



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

*“ ANÁLISIS NUMÉRICO DEL FLUJO PERISTÁLTICO
EN EL ESÓFAGO ”*

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA MECÁNICA-TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A:

MILTON CARLOS ÁLVAREZ SÁNCHEZ

TUTOR: DR. WILLIAM VICENTE Y RODRÍGUEZ



MÉXICO, CIUDAD UNIVERSITARIA

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Fernández Zayas José Luis

Secretario: Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier

Vocal: Dr. Vicente y Rodríguez William

1er. Suplente: Dr. Salinas Vázquez Martin

2do. Suplente: Dr. González Oropeza Rogelio

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de ingeniería de la UNAM

TUTOR DE TESIS:

Dr. William Vicente y Rodríguez

FIRMA

Dedicatoria

Primeramente quiero agradecer y dedicar a mi familia por todo el apoyo incondicional que he tenido en cada reto que la vida me ofrece, ustedes han generado los pensamientos que impulsan a mí ser a luchar contra cualquier adversidad.

Al Dr. William Vicente y Rodríguez y al Dr. Martin Salinas Vázquez quienes me abrieron las puertas y los ojos, al compartir toda su experiencia tanto académica como vivencial. Ustedes son aquellos, que de no haber aparecido en mi camino todos mis sueños profesionales no se podrían cumplir.

A mis compañeros del instituto que día a día me abren la puerta de su vida, enseñándome cosas que mi mente no sabía que existían.

A todas esas personas que estuvieron en este mundo enseñándome y que por seguir el camino de la vida ahora han dejado de estarlo.

A ti que aún no llegas, pero todos los días estas en mi mente, sacando lo mejor de mí y logrando que mi esfuerzo sea el máximo.

Y por último a la DGAPA que gracias a su apoyo pude concentrar mi mente en este trabajo.

Índice

Introducción	1
Capítulo 1 Fenómeno y alternativas	
1.1 Objetivo	2
1.2 Introducción	2
1.2.1 Esófago	3
1.2.2 Peristalsis	4
1.2.2.1 Peristalsis primaria	4
1.2.2.2 Peristalsis secundaria	5
1.2.2.3 Peristalsis terciaria	5
1.2.3 Bombas peristálticas	6
1.3 Métodos de predicción	7
1.3.1 Método de experimentación	7
1.3.2 Dinámica de fluidos computacional	8
1.3.2.1 Simulación numérica directa	8
1.3.2.2 Simulación de grandes escalas	9
1.3.2.3 Método basado en las ecuaciones promediadas de Reynolds	10
Capítulo 2 Ecuaciones de transporte	
2.1 Introducción	12
2.2 Continuidad	15
2.3 Conservación de cantidad de movimiento	15
2.4 Conservación de la energía total	15

2.5	Promediado de las ecuaciones	17
Capítulo 3 Método de Solución		
3.1	Introducción	20
3.2	Método de volúmenes finitos	20
3.3	Discretización	24
3.3.1	Discretización del término temporal	24
3.3.2	Discretización del término fuente	24
3.3.3	Discretización del término difusivo	25
3.3.2.1	Teorema de Gauss	26
3.3.3	Discretización del término convectivo	27
3.4	Resolución del sistema de ecuaciones lineales	30
Capítulo 4 Simulación numérica del flujo peristáltico		
4.1	Introducción	32
4.2	Sistema a simular	32
4.3	Detalles numéricos	38
4.4	Resultados numéricos con simulación de caso base	39
4.5	Variación de la longitud de onda	42
4.6	Variación de la amplitud de onda	48
4.7	Variación del ángulo de desfase de onda	55
Conclusión		61
Bibliografía		63

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enfoca al transporte de fluidos, especialmente en el mecanismo de transporte empleado por el cuerpo humano, conocido como peristalsis. Dicho mecanismo consiste en el transporte de un fluido en un ducto por medio del movimiento coordinado que se genera en las paredes comprimiendo y expandiéndolas, lo que provoca que el fluido sea estrangulado y por lo tanto transportado en la dirección de la onda de propagación.

Este tipo de transporte lo encontramos dentro del cuerpo humano en la uretra, los pequeños vasos sanguíneos y el tracto gastro-intestinal. El estudio se centra en el estudio del esófago, en cual es transportado el bolo alimenticio de la boca hacia el estómago.

Para dicho sistema se emplea una función sinusoidal para la geometría que describe las paredes del esófago y de la onda de contracción-expansión, se emplea un cambio de coordenadas para tratar el fenómeno como un caso estacionario.

La geometría compleja del ducto es representada mediante celdas que se ajustan al cuerpo (Body-Fitted Coordinates, BFC). Las ecuaciones de Navier-Stokes son resueltas numéricamente para el flujo peristáltico en tres dimensiones utilizando el método de volúmenes finitos para obtener el campo de velocidades y de presiones.

La influencia de los parámetros que definen el sistema (amplitud (b), longitud (λ), velocidad (c) y el ángulo de desfase (φ) de la onda peristáltica) sobre el comportamiento del flujo dentro del ducto, es estudiada por medio de su variación progresiva.

CAPÍTULO 1

1.1 OBJETIVO.

El objetivo del presente estudio es analizar numéricamente el transporte peristáltico en un canal tridimensional con desfase gradual de la onda peristáltica, empleando un modelo de dinámica de fluidos computacional.

1.2 INTRODUCCIÒN

Cuando una onda progresiva se expande, contrae y es propagada a la vez a lo largo de las paredes de un tubo flexible, provoca que el fluido contenido dentro del tubo sea transportado y mezclado en la dirección de la onda de propagación. A este fenómeno se le conoce como peristalsis.

El movimiento peristáltico es usado en el bombeo de sangre y otros fluidos biológicos. Esto juega un papel indispensable en el transporte de muchos fluidos fisiológicos como en los casos de:

- El transporte de la orina del riñón hacia la vejiga a través de la uretra.
- El transporte del espermatozoide en las vías del aparato reproductor masculino.
- El movimiento del óvulo en las trompas de Falopio.
- Vasodilatación de pequeños vasos sanguíneos.
- Transporte y mezcla del contenido gastrointestinal.

Este último es el mejor ejemplo de bombeo peristáltico donde el esófago, el intestino delgado y el intestino grueso bombean eficientemente el bolo alimenticio mediante peristalsis.

El tránsito del bolo alimenticio a través del esófago depende de las propiedades del bolo así como también, en menor medida, de la posición del tórax. Por ejemplo si el fluido es agua y la persona está de pie el líquido solo permanecerá de 2 a 3 segundos en el esófago.

La onda de contracción viaja a una velocidad de 1-4 cm/s y en 5-10 s llega al esfínter esofágico inferior (EEI), que es la válvula que permite la entrada del bolo alimenticio hacia el estómago [1].

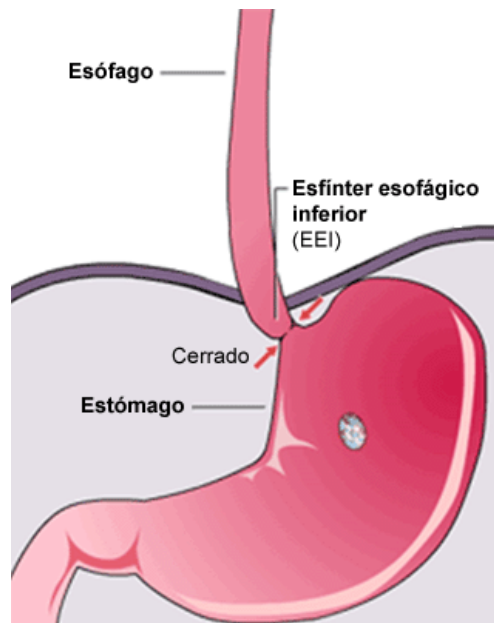


Fig. 1 Diagrama esofágico [2]

1.2.1 Esófago

El esófago es un tubo muscular que se extiende desde la sexta vértebra cervical hasta la décimo primera vértebra torácica. Tiene tres regiones anatómicas principales:

- El esófago cervical.
- El esófago torácico.
- El esófago abdominal.

El esófago se encuentra ubicado en la profundidad del mediastino, conecta la faringe con el estómago y es el único órgano del aparato digestivo situado en la cavidad torácica.

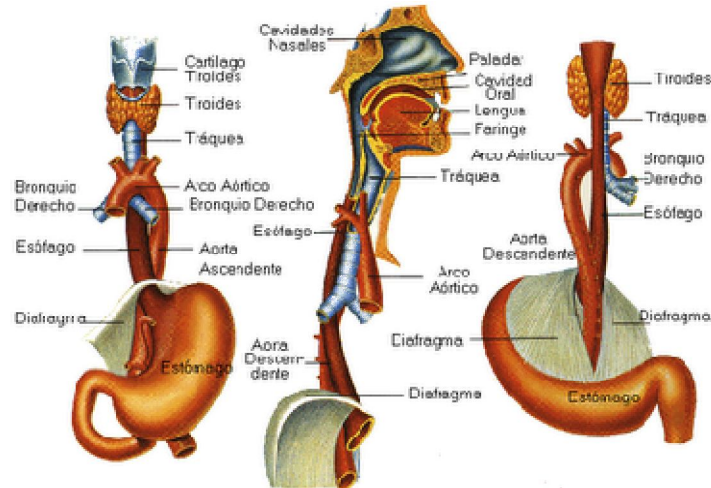


Fig.2 Ubicación del esófago dentro del organismo [3]

La pared del esófago está constituida por cuatro capas que de adentro hacia afuera son:

- Epitelio escamoso estratificado con escasa secreción de moco y bicarbonato.
- Una capa submucosa donde existe tejido elástico, vasos sanguíneos y escaso tejido linfoide.
- Una capa muscular interna circular.
- Una capa muscular externa de fibras longitudinales.

A pesar de lo simple en su estructura tiene un alto grado de especialización en la función motora, se puede decir resumidamente que su función es “mantenerse vacío”, eliminar todo el contenido, no sólo al transportar los alimentos al estómago sino también impedir el reflujo de contenido gástrico. Si este contenido es un gas, un mecanismo complejo entre los esfínteres y ondas peristálticas provoca el eructo.

Otra función importante es su participación en el mecanismo del vómito, ya que la peristalsis retrógrada más la contractura de pared abdominal tienen que estar coordinadas con la relajación del esfínter esofágico inferior (EEI) y la contractura del esfínter esofágico superior (EES) hasta el momento que el contenido sale hacia la boca con una coordinación constante del mecanismo respiratorio.

1.2.2 Peristalsis

1.2.2.1 Peristalsis primaria

La función peristáltica del esófago se reconoce desde la décimo primera semana de vida intrauterina y desde este momento se identifica la deglución. En la vida adulta se identifican 600 degluciones al día y sólo la tercera parte de ellas se asocia a la ingesta de alimentos, el resto está desencadenada por la presencia de saliva en la cavidad oral.

La peristalsis del esófago está conformada por una onda primaria que se inicia en el tercio superior a una velocidad de 1 a 4 cm por segundo; se inicia con la deglución. Se produce gracias a la contracción de la musculatura circular y en el músculo estriado depende de un estímulo excitatorio vagal, programado a nivel central. Para que esta contracción sea eficaz y propulsiva debe superar los 20 mmHg aguas arriba.

1.2.2.2 Peristalsis secundaria

El esófago presenta contracciones peristálticas sin una deglución que le preceda y se llama peristalsis secundaria, esta peristalsis tiene como función primordial limpiar el esófago de cualquier residuo existente después de las ondas primarias.

1.2.2.3 Peristalsis terciaria

Se caracteriza por contracciones en toda la extensión del esófago con baja presión e incapaces de llevar a cabo la propulsión de contenido esofágico [1].

Actualmente existe una creciente necesidad de manipular eficientemente pequeños volúmenes de fluidos en aplicaciones biotecnológicas, en las cuales el fluido transportado no debe sufrir cambios en sus propiedades; siendo el bombeo peristáltico una alternativa debido a la presencia de un menor esfuerzo cortante en este tipo de bombeo.

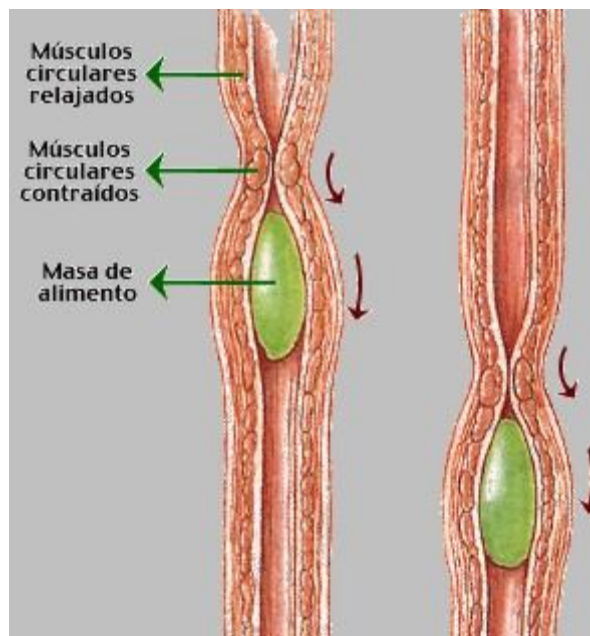


Fig. 3. Músculos esofágicos. [4]

1.2.3 Bombas peristálticas

Una bomba peristáltica es un tipo de bomba hidráulica de desplazamiento positivo usada para bombear una variedad de fluidos. El fluido es contenido dentro de un tubo flexible empotrado dentro de una cubierta circular de la bomba. Un rotor con un número de 'rodillos', 'zapatas' o 'limpiadores' unidos a la circunferencia externa comprimen el tubo flexible. Mientras que el rotor da vuelta, la parte del tubo que está bajo compresión se cierra forzando, de esta manera, al fluido a ser bombeado para moverse a través del tubo. Adicionalmente, mientras el tubo se vuelve a abrir a su estado natural después del paso de la leva, el flujo del fluido es inducido a la bomba.

Las Bombas Peristálticas solucionan problemas de movimiento de fluidos en industrias químicas alimenticias, farmacéuticas, tratamientos de agua, lecherías, laboratorios, industrias plásticas, de cosméticos y muchas otras.

El bombeo peristáltico permite dosificar con exactitud y regular caudales con una precisión entre 1% al 10%. Como el fluido está solo en contacto con el tubo y no con válvulas, pistones, engranes ó paletas como en otro tipo de bombas se asegura un bombeo libre de contaminantes. Eligiendo adecuadamente el tubo se puede bombear ácidos, álcalis, solventes y todo tipo de corrosivos. Los materiales usados son: siliconas, neopreno, EPDM, butilo, PVC vitón, teflón, poliuretano, etc. Esterilizando el tubo se puede emplear para dispensar productos farmacéuticos o de uso medicinal. Puede funcionar en ambos sentidos y en posición horizontal ó vertical.



Fig.4 Bomba peristáltica compacta 0.26 – 80 ml/min [SR 10/30 series[5]

El estudio de peristalsis en el contexto de mecánica de fluidos ha recibido mucha atención en las últimas décadas debido a su importancia en los sistemas biológicos y a las aplicaciones industriales. Muchos estudios teóricos, experimentales y numéricos has

sido desarrollado para entender el complejo fenómeno de la peristalsis. P. MUTHU y B. V. RATHISH KUMAR [6] estudiaron la influencia de las propiedades de las paredes en el movimiento peristáltico, W. YANG y T. CHING FUNG [7] simularon el transporte de comida por medio de elemento finito, S. NAKANISHI y M. KAWAGUTI [8] simularon en 2D el flujo peristáltico de un fluido viscoso, V. P. RATHOD y M. M. CHANNAKOTE [9] estudiaron el movimiento peristáltico en un medio poroso, todos ellos utilizando diferentes métodos de análisis.

1.3 MÉTODOS DE PREDICCIÓN

En el estudio del comportamiento de flujos de fluidos se tienen dos ramas principales, por un lado el análisis experimental que consiste en la elaboración de modelos a escala (prototipos), lo que implica problemas de costo, tiempo e instalación; por el otro lado se tiene el análisis numérico que se emplea en la dinámica de fluidos computacional y es de gran utilidad ya que nos reduce tiempo y costos, además de obtenerse buenas predicciones de los fenómenos en el movimiento de los fluidos.

A continuación se presentan estos métodos de predicción.

1.3.1 MÉTODO DE EXPERIMENTACIÓN

El método de experimentación se basa en la observación directa del objeto de estudio y del problema, y consiste en alterar controladamente las condiciones naturales del objeto o prototipo de estudio. De forma que realizando pruebas, creando modelos a escala y reproduciendo condiciones del fenómeno, se obtendrán relaciones o rasgos del objeto o fenómeno en estudio.

Con este método, se caracterizan los factores (X) de mayor influencia en variables de respuesta (Y), de forma que si sistemáticamente se realizan cambios controlados en los factores del proceso, sea posible observar y cuantificar los cambios generados.

Este método suele ser tardado y costoso debido a que realizar el escalamiento de los modelos y la instalación de equipos de medición representan un gran problema, así como las mismas mediciones.

1.3.2 DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL.

La dinámica de fluidos computacional (CFD) comenzó en los años 60 en la industria aeroespacial, en los años 90 se ha expandido de forma significativa a distintas aplicaciones y procesos industriales en los que intervienen reacciones químicas, transferencia de calor, flujos bifásicos, cambios de fase, transferencia de masa, etc. Esto es debido al incremento en la potencia de cálculo y disminución en los costos de los equipos de cómputo.

La CFD trabaja discretizando el objeto de estudio empleando una malla que se ajusta a cada caso, se basa en conocimientos profundos de mecánica de fluidos y matemáticas, y en el desarrollo y empleo de métodos numéricos. Esto nos abre un nuevo y extenso campo de apoyo al análisis de flujos. Sólo recordando que la teoría, la experimentación y ahora la CFD deben ser complementarias entre sí.

Dentro de la CFD se tienen varios métodos de análisis dentro de los que destacan la simulación numérica directa (DNS), simulación de grandes escalas (LES) y el método basado en las ecuaciones promediadas de Reynolds.

1.3.2.1 SIMULACIÓN NUMÉRICA DIRECTA (DNS)

La aparición de la simulación numérica directa se da con el trabajo de Orszag y Patterson, en el cual hicieron la primera simulación dentro de un mallado de 32x32x32 puntos.

Esta aproximación resuelve numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes sin ninguna simplificación y sin ningún modelo tanto en flujos laminares como turbulentos.

Ya que no existen soluciones analíticas para las ecuaciones de Navier-Stokes más que para casos ideales, es necesario hacer uso de métodos numéricos para resolverlas.

La simulación de estas ecuaciones es altamente fluctuante en casos de flujo turbulento, donde el número de Reynolds juega un papel demasiado importante ya que el aumento de éste nos indica un aumento en la turbulencia.

La simulación numérica directa está restringida a simulación de pequeños sistemas turbulentos y comprobación de resultados teóricos. Sería incorrecto pensar que este tipo de simulación podría emplearse en flujos turbulentos industriales de interés en ingeniería por lo que para este trabajo esta alternativa no será empleada ya que este tipo de simulación requiere una malla muy grande. [10]

1.3.2.2 *SIMULACIÓN DE GRANDES ESCALAS (LES)*

La idea básica de LES consiste en asumir que ciertas escalas de la turbulencia (las mayores o de menor número de onda) se encuentran directamente afectadas por las condiciones de frontera, mientras que otras (las menores o de mayor número de onda) presentan características (cuasi) universales e isotrópicas. Por lo tanto, únicamente las mayores escalas son calculadas numéricamente (escalas resueltas), mientras que las menores escalas son modeladas. El problema consiste en reemplazar el sistema original por otro que absorbe o disipa la energía no resuelta por el modelo numérico. Existen por lo tanto diversas propuestas relativas respecto de la forma a adoptar para la modelación de esta viscosidad efectiva, siendo la más divulgada la de Smagorinsky (1963). Smagorinsky calculó la circulación general de la atmósfera en diferencias finitas y representó el fluido de energía a escalas menores que las resueltas en la malla empleando un modelo basado en la viscosidad efectiva de heisenberg. [11]

1.3.2.3 MÉTODO BASADO EN LAS ECUACIONES PROMEDIADAS DE REYNOLDS

Desde el punto de vista histórico, el origen de estos métodos se remonta a finales del siglo XIX, cuando Reynolds publicó sus resultados de investigación de flujos turbulentos. Asimismo, entre los primeros intentos de una descripción matemática de los esfuerzos turbulentos se encuentra el concepto de viscosidad turbulenta, introducido por Boussinesq (1877).

Para esto se parte de la idea de que toda variable del flujo se puede descomponer en una componente media y un valor fluctuante de la forma:

$$u(t) = U + u'(t)$$

Promediando las ecuaciones de Navier-Stokes se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (UU) + \underbrace{\nabla \cdot (\overline{u'u'})}_{\text{tensor_de_Reynolds}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta U$$

En donde el tensor de Reynolds tiene unidades de esfuerzo, y haciendo una analogía con:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Siendo así se tiene para el caso más general:

$$\overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} K \delta_{ij}$$

En donde μ_t representa la viscosidad turbulenta, la cual, a diferencia de la viscosidad cinemática molecular, no representa una propiedad del fluido sino del flujo.

Sin embargo ni Reynolds ni Boussinesq intentaron resolver las ecuaciones promediadas de Navier-Stokes, fue Prandtl (1904) quien introdujo el concepto de capa límite en la física de flujos viscosos turbulentos. A partir de allí diferentes formulaciones han sido propuestas para la modelación de los esfuerzos de Reynolds, y por lo tanto cerrar el problema de la turbulencia. Las propuestas pueden ser clasificadas de acuerdo a las ecuaciones diferenciales a resolver en las siguientes categorías:

- Modelos algebraicos (o de cero ecuaciones).
- Modelos de una ecuación.
- Modelos de dos ecuaciones.
- Modelos de orden superior. [11]

CAPITULO 2 ECUACIONES DE TRANSPORTE

2.1 INTRODUCCIÓN

El movimiento de un fluido no solo nos tendría que hacer pensar en cambios de velocidad, sino que a un cambio de velocidad directamente le asociamos un cambio de la presión; dichos factores pueden verse afectados por diferentes causas, como podrían ser cambios de temperatura los cuales provocarían cambios en la densidad del fluido por dar un ejemplo de factores que alterarían el movimiento del fluido. Lo anterior nos hace pensar en lo conveniente que puede ser analizar un flujo dentro de una sección finita del espacio, realizando un balance entre el flujo que entra y el flujo que sale de dicha sección. Por lo que se iniciará el estudio del mezclador de aire-combustible con el desarrollo de las ecuaciones de transporte las cuales ayudarán a describir las características del fluido en cualquier parte dentro del flujo ya que estas son aplicables para volúmenes de control.

Para desarrollar las ecuaciones de interés es necesario hacer uso del teorema del transporte de Reynolds.

Entonces definiendo a Φ como cualquiera de las propiedades del fluido a analizar y sea $\phi = d\Phi/dm$ el valor intensivo o cantidad Φ por unidad de masa de una pequeña sección del fluido. Luego entonces la cantidad total de Φ dentro del volumen de control es:

$$\Phi_{[VC]} = \int_{VC} \phi dm = \int_{VC} \phi \rho dV \quad (2.1)$$

Para una masa diferencial se tiene:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (2.2)$$

$$dm = \rho dV \quad (2.3)$$

La variación de la propiedad intensiva se da entre partes del volumen de control, las cuales son:

- Dentro del volumen de control en la cual se tiene (termino temporal):

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{vc} \phi \rho dV \right) \quad (2.4)$$

- Flujo que abandona el volumen de control (termino convectivo):

$$\int_{SC} \phi \rho \vec{v} \cos \theta dA_{sal} \quad (2.5)$$

- Flujo que entra al volumen de control (termino convectivo):

$$\int_{SC} \phi \rho \vec{v} \cos \theta dA_{ent} \quad (2.6)$$

En donde VC y SC se define como volumen de control y superficie de control respectivamente. Siendo esto así se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(\Phi_{sist}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \phi \rho dV \right) + \int_{SC} \phi \rho \vec{v} \cos \theta dA_{sal} - \int_{SC} \phi \rho \vec{v} \cos \theta dA_{ent} \quad (2.7)$$

Esta ultima ecuación es conocida como el teorema de transporte de Reynolds para un volumen de control fijo arbitrario, y dice que la derivada temporal de un sistema es igual a la variación dentro del volumen de control más el flujo de salida a través de la superficie de control menos el flujo de entrada a través de la superficie de control

Observamos que el término $\vec{v} \cos \theta$ es igual a la componente de la velocidad perpendicular a él elemento de área de la superficie de control $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ para el flujo saliente y $-v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ para el flujo entrante; y definiendo a \vec{n} como el vector unitario perpendicular se tiene que:

$$\int_{SC} \phi \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_{SC} \phi \rho v \cos \theta dA_{sal} - \int_{SC} \phi \rho v \cos \theta dA_{ent} \quad (2.8)$$

Y reescribiendo se tiene:

$$\frac{d}{dt}(\Phi_{sist}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \phi \rho dV \right) + \int_{SC} \phi \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (2.9)$$

Al aplicar el teorema de transporte a las ecuaciones de conservación y considerando un volumen diferencial se obtienen las siguientes expresiones en coordenadas cartesianas.

2.2 CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad, que expresa la conservación de masa, puede escribirse como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.10)$$

donde \vec{v} y ρ son, respectivamente, la velocidad y la densidad instantáneas de la mezcla reactiva.

2.3 CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

La conservación de cantidad de movimiento del flujo es descrita a través de la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}' + \rho \vec{f}_m \quad (2.11)$$

donde p es la presión, $\vec{\tau}'$ es el tensor de esfuerzos viscosos y \vec{f}_m son las fuerzas másicas, por ejemplo la gravedad, \vec{g} .

Según la ley de Navier-Poisson el tensor de esfuerzos viscosos es:

$$\vec{\tau}' = \mu (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) + (\mu_v - 2/3\mu) (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{\delta} \quad (2.12)$$

donde μ es la viscosidad molecular de la mezcla, μ_v es el coeficiente de viscosidad volumétrico y $\vec{\delta}$ es el tensor delta de Kronecker. Generalmente, el coeficiente de viscosidad volumétrico es despreciado.

Si se sustituye la ecuación (2.12) en (2.11), se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{\delta} \right) \right] + \rho \vec{g} \quad (2.13)$$

2.4 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA TOTAL

La suma de la energía interna, cinética y potencial, es la energía total de la mezcla:

$$e = u + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \quad (2.14)$$

donde e , u y U son respectivamente, la energía específica total, interna y potencial, y $\vec{g} = -\nabla U$.

La ecuación de la energía total es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(u + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \right) \right] = \nabla \cdot (\vec{\tau}' \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot (p \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{J}_e + \dot{Q}_r \quad (2.15)$$

donde \vec{J}_e es el flujo difusivo de calor y \dot{Q}_r es el intercambio de calor por radiación. En la ecuación (2.15), los dos primeros términos del lado derecho representan el trabajo de las fuerzas viscosas y de presión.

La entalpía de la mezcla es definida de la siguiente manera:

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad (2.16)$$

La ecuación de la energía total en términos de la entalpía de la mezcla, es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(h + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(h + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + U \right) \right] = \frac{Dp}{Dt} + \vec{\tau}' : \nabla \vec{v} - \nabla \cdot \vec{J}_h + \dot{Q}_r \quad (2.17)$$

donde $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla$, es la derivada sustancial, y $\nabla \cdot (\vec{\tau}' \cdot \vec{v})$ es la disipación viscosa, Φ_v .

En flujos de baja velocidad, el número de Mach es pequeño, $Ma \ll 1$ y por lo tanto, la energía cinética comparada con la entalpía es despreciable.

$$Ma = \bar{v}_o / \sqrt{\gamma R_c T_o},$$

donde γ es la relación entre las capacidades térmicas a presión y a volumen constante. Pese a que el flujo es de baja velocidad, el número de Froude es grande, $Fr = \bar{v}_o^2 / \bar{g} l_o \gg 1$, por lo tanto las fuerzas de inercia son mucho mayores que las gravitatorias.

El término Dp/Dt es importante si se tienen en el sistema gradientes de presión extrema, como ondas de choque o detonaciones, no siendo así en el caso de análisis en esta tesis.

El número de Eckert, $Ec = \bar{v}_o^2 / Cp T_o$, es un indicador de la contribución de la disipación de la energía cinética al nivel total de la entalpía. Cuando $Ec \ll 1$, el término Φ_v se puede despreciar. El término \vec{J}_h se presenta más adelante.

El intercambio de energía por radiación, \dot{Q}_r , puede ser importante en flujos con combustión cuando las temperaturas son elevadas.

2.5 PROMEDIADO DE LAS ECUACIONES

El flujo en la mayor parte de los problemas de interés práctico, así como en este trabajo, es turbulento. Una de las características de este tipo de flujos es la variación aleatoria e irregular tanto en el espacio como en el tiempo de las propiedades del fluido.

Una de las alternativas para la simulación de flujos turbulentos reactivos, es el promedio de las ecuaciones instantáneas de conservación. Con este método, se promedian todas las fluctuaciones de las escalas temporales y se resuelven ecuaciones de transporte para los valores medios de las propiedades del fluido. Estas ecuaciones no son cerradas, por lo cual se requieren modelos que reemplacen los términos no cerrados.

Si el flujo presenta variaciones en la densidad, se pueden usar dos tipos de promedio. Uno es el promedio de Reynolds, el cual toma a la densidad como constante. El otro es el promedio de Favre, que es ponderado con la densidad.

De manera ilustrativa, se presenta con el símbolo Φ cualquier propiedad transportada, tal como la fracción másica de la especie Y_α , la entalpía h y las componentes de la velocidad \vec{U} . Los valores instantáneos de estas propiedades son escritos en términos de un promedio y una fluctuación turbulenta:

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' \tag{2.42}$$

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi'' \tag{2.43}$$

Los dos promedios $\bar{\Phi}$ y $\tilde{\Phi}$ están definidos como:

$$\bar{\Phi} = \lim_{n_e \rightarrow \infty} \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} \Phi^{(i)} \tag{2.44}$$

Promedio de Reynolds

$$\tilde{\Phi} = \lim_{n_e \rightarrow \infty} \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} \rho^{(i)} \Phi^{(i)} \tag{2.45}$$

Promedio de Favre

En donde $\Phi^{(i)}$ es la muestra i del conjunto de realizaciones n_e de un experimento. De las definiciones anteriores:

$$\overline{\rho\Phi''} = 0, \quad \overline{\Phi''} \neq 0 \tag{2.46}$$

Con la definición de los dos promedios se obtiene:

$$\bar{\Phi} = \tilde{\Phi} + \overline{\Phi''} \tag{2.47}$$

$$\overline{\Phi''} = -\frac{\overline{\rho'\Phi''}}{\bar{\rho}} \tag{2.48}$$

$$\overline{\rho'\Phi''} = \overline{\rho'\Phi'} \quad (2.49)$$

$$\overline{u_i\Phi'} = u_i\overline{\Phi''} + \frac{\overline{\rho'u_i\Phi''}}{\bar{\rho}} + \overline{u_i\Phi''} \quad (2.50)$$

Una de las razones para aplicar el promedio de Favre en las ecuaciones instantáneas de transporte, es que cuando se aplica dicho promedio, genera ecuaciones muy sencillas que no incluyen correcciones con fluctuaciones de la densidad en las ecuaciones resultantes.

Si se aplica el promedio de Favre a las ecuaciones instantáneas de continuidad, cantidad de movimiento, energía y especies químicas, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}) = 0 \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}) = -\nabla\bar{p} + \underbrace{\nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla\tilde{\mathbf{v}} + (\nabla\tilde{\mathbf{v}})^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})\delta^{\#} \right) \right]}_I + \underbrace{\nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}''\tilde{\mathbf{v}}'')}_{II} + \rho\bar{g} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{Y}_\alpha) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{Y}_\alpha) = \underbrace{\nabla \cdot \tilde{\Gamma}'_\alpha \nabla \tilde{Y}_\alpha}_I + \underbrace{\nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}''\tilde{Y}_\alpha'')}_{II} + \bar{S}_\alpha \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{h}) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{h}) = -\underbrace{\nabla \cdot \tilde{\mathcal{J}}_h}_I + \underbrace{\nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}''\tilde{h}'')}_{II} \quad (2.54)$$

Si se aplica el promedio de Favre en la ecuación homogénea se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{\phi}_z) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\phi}_z) = -\underbrace{\nabla \cdot (\tilde{\Gamma}''\nabla\tilde{\phi}_z)}_I + \underbrace{\nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}''\tilde{\phi}_z'')}_{II} \quad (2.55)$$

Las ecuaciones anteriores tienen una forma idéntica a las correspondientes ecuaciones instantáneas, con un término adicional $(u''_i\Phi'')$, que involucra las fluctuaciones de la velocidad y el escalar Φ , y que representa físicamente el transporte convectivo de Φ por movimientos turbulentos. En flujos turbulentos, el término de difusión laminar (I), de las ecuaciones anteriores, es generalmente despreciable frente al término de difusión turbulenta (II). Por lo tanto, las ecuaciones (2.51), (2.52), (2.53), (2.54) y (2.55) se escriben como:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}) = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{v}) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{v}\bar{v}) = -\nabla\bar{p} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{v}''\bar{v}'') + \rho\bar{g} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{Y}_\alpha) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{v}\bar{Y}_\alpha) = \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{v}''\bar{Y}_\alpha'') + \bar{S}_\alpha \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{h}) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{v}\bar{h}) = \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{v}''\bar{h}'') \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{\phi}_z) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{v}\bar{\phi}_z) = \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{v}''\bar{\phi}_z'') \quad (2.60)$$

Si el flujo es de baja velocidad ($Ma \ll 1$), generalmente se supone que las fluctuaciones de la presión son despreciables. Por lo tanto, los valores medios de la densidad y la tasa de reacción química se pueden expresar como función de una presión de referencia P_0 . Donde $\bar{\phi}_\alpha$ representa la fracción másica de las especies; para $\alpha = 1, \dots, N + 1$.

Los flujos turbulentos $\bar{v}''\bar{\Phi}''$ de la ecuaciones (2.57), (2.58), y (2.59) son términos desconocidos que requieren modelización.

El tratamiento del término $\bar{\rho}\bar{v}''\bar{\phi}_z''$, ($\bar{\phi}_z$ puede representar también la fracción másica de las especies si se incluye un término fuente).

CAPITULO 3 MÉTODO DE SOLUCIÓN

3.1 INTRODUCCIÓN

La utilidad de los métodos numéricos de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales radica en la aplicabilidad a situaciones generales y prácticas. Estos métodos numéricos discretizan y resuelven numéricamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan los fenómenos físicos como el de este trabajo.

A continuación se presenta el método numérico de volúmenes finitos, que es utilizado en este trabajo para resolver las ecuaciones de transporte que gobiernan el movimiento del flujo, las cuales fueron presentadas en el capítulo 2.

3.2 MÉTODO DE VOLUMENES FINITOS

Mediante una ecuación general de transporte, se pueden representar las ecuaciones medias de continuidad, cantidad de movimiento y del modelo de turbulencia, donde la variable dependiente está representada por $\tilde{\phi}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{\phi}) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{\phi}) - \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla_\phi) = \bar{S}_\phi \quad (3.1)$$

Aquí las variables independientes son: t, x, y, z.

Donde Γ_ϕ es el coeficiente de difusión y \bar{S}_ϕ es el término fuente. Los términos del lado izquierdo de la ecuación (3.1) son el término temporal, convectivo y difusivo, respectivamente. Siendo el término temporal recoge las variación locales con el tiempo, o acumulación/disminución de la variable dependiente, el termino convectivo el transporte de la variable dependiente de un punto a otro próximo a través de la velocidad del fluido, el término difusivo explica la tendencia del fluido hacia el equilibrio cambio de la variable dependiente debido a las propiedades del fenómeno y el término fuente los fenómenos que pueden aumentar o disminuir la variable dependiente y no están contemplados en los términos anteriores.

Los términos Γ_ϕ y \bar{S}_ϕ están especificados para cada variable $\tilde{\phi}$. En el caso de la ecuación de continuidad, $\tilde{\phi} = 1$, $\bar{S}_\phi = 0$ y $\Gamma_\phi = 0$

Esta ecuación general (3.1), se puede discretizar con el método de volúmenes finitos. Con este método, el dominio se divide en pequeños volúmenes de control (figura 3.1), asociando a cada uno de ellos un punto nodal. De manera similar, se discretiza el tiempo en intervalos temporales.

El dominio se discretiza en celdas que son topológicamente cartesianas; esto es, que cada celda del dominio computacional tenga por vecinas a seis celdas, una en cada una de sus caras. La ecuación diferencial resultante, se integra en cada volumen de control y en cada intervalo temporal, y el resultado es una ecuación discretizada que relaciona los valores de $\tilde{\phi}$ para un determinado grupo de puntos nodales. Esta ecuación algebraica expresa el principio de conservación de $\tilde{\phi}$ en el volumen finito, de la misma manera que la ecuación diferencial lo expresa para un volumen infinitesimal. La ecuación algebraica para un nodo P puede expresarse en forma general como:

$$a_P \tilde{\phi}_P = \sum_{i,I=E,W,N,S,H,L} a_i \tilde{\phi}_I + a_T \tilde{\phi}_T + B \quad (3.2)$$

Donde el subíndice I representa las celdas vecinas, i la cara entre las celdas P e I , T el valor correspondiente en el intervalo temporal anterior, y B el término fuente.

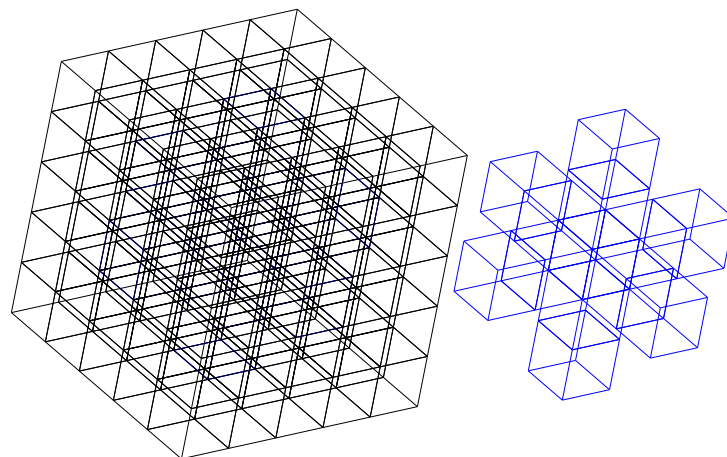
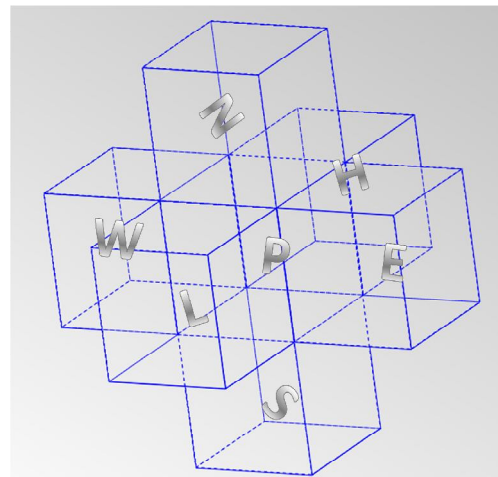
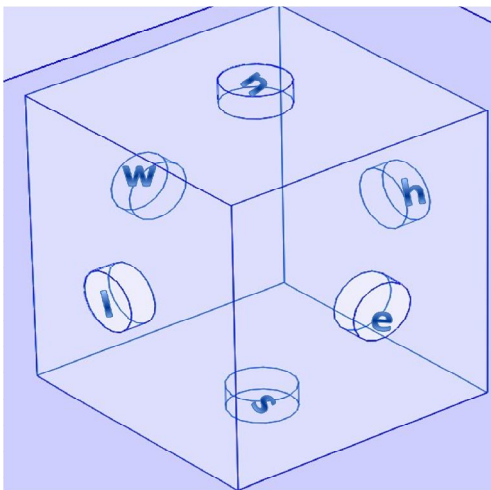


Figura 3. 1. Representación del dominio computacional discretizado en volúmenes finitos.

Al tener discretizado el dominio computacional es necesario definir el punto en el cual se encuentren almacenadas las variables, para esto las variables del tipo escalar (presión P,

entalpía h , fracciones másicas m_i , etc) son almacenadas en el centro de la celda y por el otro lado la variable de la velocidad está directamente disponible, sin necesidad de interpolación, en las caras de la celda, donde su valor es necesario para calcular el flujo convectivo entrante en la celda, siendo la velocidad directamente gobernada por los nodos vecinos. Esta disposición desplazada se conoce como “malla decalada” o “malla desplazada”.

En la figura siguiente, se muestra la notación de la celda y de sus vecinas. Dada una celda P , sus vecinas se nombrarán según las iniciales de los puntos cardinales (en inglés) en las direcciones “ x ” e “ y ” y como “Low” y “High” en la dirección z . Las caras de la celda se nombran con la misma nomenclatura, pero con letras minúsculas. A su vez, el tiempo también se discretiza. Las celdas en la dirección temporal se llaman intervalos temporales. La celda P en el paso temporal se nota como T .



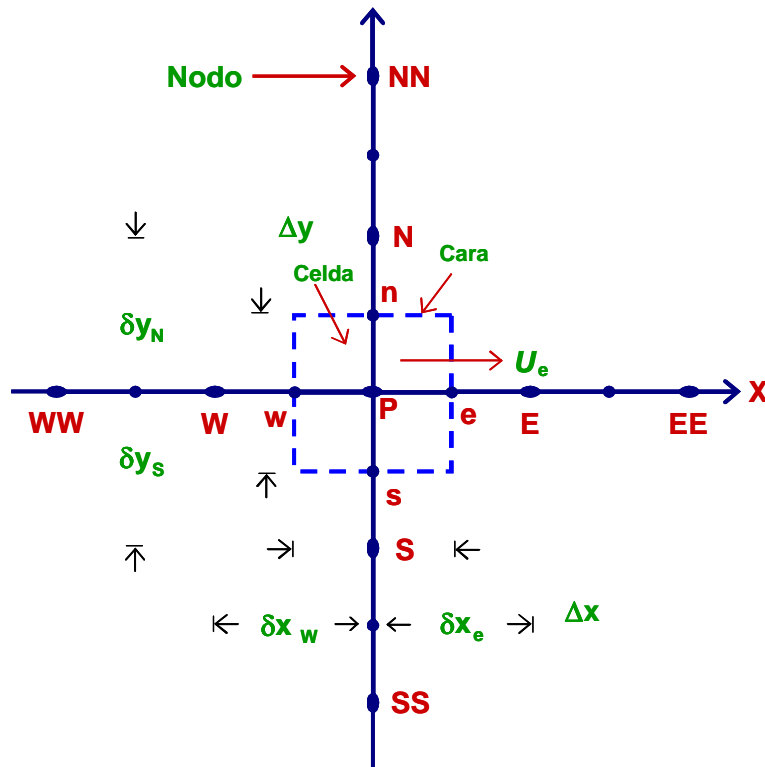


Figura 3. 2. Diagrama esquemático de de la discretización y nomenclatura del dominio computacional.

La discretización de la ecuación se basa en la integración de la misma, término a término, en cada celda P y en cada paso temporal Δt . (La celda es, por tanto, el volumen finito al que hace referencia el nombre del método). En la integración, el valor de ϕ se supondrá constante en toda la celda y en todo el paso temporal.

A continuación se muestra la discretización de dicha ecuación término a término.

3.3 DISCRETIZACIÓN

3.3.1 Discretización del término temporal

La integración del término temporal es muy sencilla: la derivada se sustituye por la diferencia del derivando al final y al principio del paso temporal, dividida por el tamaño del mismo.

$$\begin{aligned}
 T_p &= \frac{1}{\Delta t} \int \int_{\Delta t V_p} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dVdt = \\
 \frac{1}{\Delta t} \int \int_{V_p \Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt dV &= \frac{1}{\Delta t} \int_{V_p} \left[\frac{\rho_P \phi_P - \rho_T \phi_T}{\Delta t} \Delta t \right] dV = \frac{V_p}{\Delta t} (\rho_P \phi_P - \rho_T \phi_T) \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

V_p = volumen de la celda P.

T= valores al principio del paso temporal.

P= valores al final del paso temporal.

3.3.2 Discretización del término fuente

El término fuente se supondrá lineal, con la formulación coeficiente-valor, esta formulación lineal ayuda a la convergencia del método iterativo.

Se asume el término lineal: $S_\phi=C(V-\phi)$

$$F_p = \frac{1}{\Delta t} \int \int_{\Delta t V_p} S_p dVdt = V_p \cdot C \cdot (V - \phi_p) \quad (3.4)$$

C= Coeficiente

V= valor

3.3.3 Discretización del término difusivo

El tratamiento del término difusivo aconseja, en primer lugar, la transformación de la integral de volumen en una integral de superficie sobre las caras de la misma. Esta transformación se hace mediante la aplicación de Teorema de Gauss. Como resultado, es necesario evaluar el gradiente de la variable dependiente en la cara de la celda, cosa que se hace sustituyendo el gradiente por una diferencia centrada que involucra los valores de la variable en los nodos situados a ambos lados de la cara.

3.3.3.1 Teorema de gauss

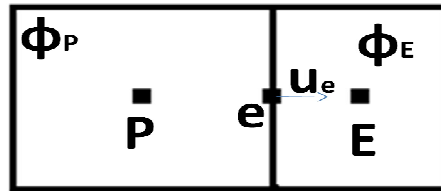
Relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen delimitado por dicha superficie. Intuitivamente se puede concebir como la suma de todas las fuentes menos la suma de todos los sumideros que da el flujo de salida neto de una región.

$$\iiint_V \nabla \cdot F dV = \iint_S F \cdot \vec{n} dS \quad (3.5)$$

Entonces omitiendo la integral temporal.

$$D_p = - \int_{V_p} \nabla (\Gamma \nabla \phi) = - \int_{S_p} \Gamma \nabla \phi d\vec{S} = - \sum_{\text{las caras}}^{\text{todas}} [\Gamma \nabla \phi \vec{n} A]_{\text{cara}} \quad (3.6)$$

Para la cara Este se tiene:



$$D_P = -\Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{|PE|} A_e \quad (3.7)$$

Debido a que Γ solo se encuentra definida en el centro de la celda es necesario definirla en la cara de la celda por medio de una interpolación:

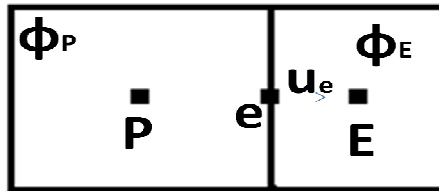
$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P |eE| + \Gamma_E |Pe|}{|PE|} \quad (3.8)$$

3.3.4 Discretización del término convectivo

Igualmente que en el caso anterior el teorema de Gauss es empleado para transformar la integral de volumen en una integral de superficie extendida a todas las caras de la celda en cuestión.

$$C_P = \int_{V_P} \nabla(\rho \bar{v} \phi) dV = \int_{S_P} (\rho \bar{v} \phi) dS = \sum_{\text{lascaras}}^{\text{todas}} [\rho \bar{v} \phi A \bar{n}]_{\text{cara}} \quad (3.9)$$

Para la cara Este se tiene:



$$C_e = \rho_e \phi_e \cdot A_e \cdot u_e \quad (3.10)$$

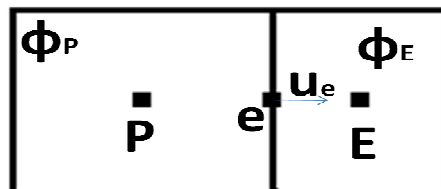
La ultima ecuación implica conocer todos los término en la cara Este por lo que es necesario desarrollar otra interpolación para $\rho_e \phi_e$.

$$\rho_e \phi_e = \frac{\rho_P \phi_P |eE| + \rho_E \phi_E |Pe|}{|PE|} \quad (3.11)$$

La solución anterior es aplicable con estabilidad numérica solo para números de Péclet menores a 2, siendo este una relación entre la convección y la difusión:

$$Pe = \frac{\rho_e u_e |PE|}{\Gamma_e} \quad (3.12)$$

Una alternativa a la inestabilidad para números de Péclet mayores a 2 consiste en tomar el valor de $\rho_e \phi_e$ como el valor en la celda aguas arriba, dicha alternativa es conocida como upwind.



$$\begin{aligned} \rho_e \phi_e &= \rho_P \phi_P \rightarrow u_e > 0 \\ \rho_e \phi_e &= \rho_E \phi_E \rightarrow u_e < 0 \end{aligned}$$

Para el caso 1D con la alternativa upwind obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \phi_P \left[\frac{V_P \rho_P}{\Delta t} + A_w \rho_P [-u_w] + A_e \rho_P [u_e] + \frac{A_w \Gamma_w}{\delta w} + \frac{A_e \Gamma_e}{\delta e} + V_P C \right] = \\ = \phi_w \left[A_w [-u_e] \rho_E + \frac{A_w \Gamma_w}{\delta w} \right] + \phi_E \left[A_e [-u_e] \rho_E + \frac{A_e \Gamma_e}{\delta e} \right] + \frac{V_P}{\Delta t} \rho_T \phi_T + V_P CV \end{aligned} \quad (3.13)$$

Simplificando en términos de la variable dependiente:

$$(a_P + V_P C) \phi_P = a_w \phi_w + a_E \phi_E + a_T \phi_T + V_P CV$$

Por lo que se puede demostrar que para el caso 3D:

$$\phi_P = \frac{\sum_{\text{vecinas}}^{celdas} a_i \phi_i + a_T \phi_T + V_P CV}{a_P + V_P C} \quad (3.14)$$

En la discretización del término temporal aparecen los valores de ϕ en la celda al principio y al final del intervalo temporal considerado. Sin embargo, el resto de los valores de ϕ que aparecen en la ecuación pueden estar evaluados al principio o al final del intervalo, o en cualquier tiempo intermedio.

Suponiendo que los valores de ϕ en los términos convectivo, difusivo y fuente son definidos linealmente por un coeficiente “f” se tiene:

Cuando “f” es cero, los valores ϕ son los del principio del paso temporal y el esquema se llama explícito.

$$\begin{aligned} \phi &= f\phi_p^1 + (1-f)\phi_p^0 \\ f = 0. &\rightarrow \phi = \phi^0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Cuando “f” es uno, los valores de ϕ son los del final del intervalo temporal, el esquema se conoce como implícito. Entonces la misma ϕ aparece en el lado izquierdo de la ecuación en una celda y en el lado derecho de la ecuación de sus vecinas, y las ecuaciones forman un sistema acoplado.

$$f = 1. \rightarrow \phi = \phi^1 \quad (3.16)$$

Cuando “f” es 0.5, es el esquema de Crank-Nicholson el cual es en teoría incondicionalmente estable, pero algunas veces lleva a soluciones oscilatorias.

$$f = 0.5 \rightarrow \phi = 0.5(\phi^0 + \phi^1) \quad (3.17)$$

3.4 Resolución del sistema de ecuaciones lineales.

Debido a la linealidad del sistema de ecuaciones, varios métodos de solución pueden ser empleados, entre ellos, el método de Gauss-Seidel y el método de Jacobi.

Estos últimos caen dentro de los métodos punto a punto, que recorren cada una de las celdas del dominio computacional calculando el valor de la variable local en función de las celdas vecinas. Debido a que el valor de las celdas vecinas es uno provisional el método tiene que iterarse hasta que el error relativo sea el mínimo.

Dentro de los métodos de resolución plano a plano se encuentra el algoritmo de Thomas, este supone los valores de las celdas vecinas low y high, y barre el dominio en dirección Sur-Este calculando y repitiendo en dirección contraria.

En el sistema de ecuaciones con el que se trabaja toda variable dependiente ϕ está biunívocamente asociada a una ecuación de transporte (y por lo tanto a una ecuación algebraica) con dos excepciones: la presión, cuyo gradiente aparece como término fuente en las ecuaciones de cantidad de movimiento, no tiene una ecuación propia; y la ecuación de continuidad carece de variable. Por lo que la solución es transformar la ecuación de continuidad en una ecuación para la presión por medio del método SIMPLE.

CAPÍTULO 4

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO PERISTÁLTICO

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el sistema a simular, que consiste en un ducto de paredes con geometría sinusoidal, en el cual fluye un fluido newtoniano; dicho sistema simula el fenómeno de deglución en el esófago, en donde una serie de ondas peristálticas transportan el bolo alimenticio hacia el estómago.

La geometría compleja del ducto es representada mediante volúmenes de control finitos y celdas que se ajustan al cuerpo (Body-Fitted Coordinates, BFC). Las ecuaciones que gobiernan el movimiento del flujo son: ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento (capítulo 2), que son resueltas mediante el método de volúmenes finitos (capítulo 3). Condiciones de frontera en las paredes son impuestas, de tal manera que se simule el movimiento de éstas.

Un caso base es establecido para analizar el comportamiento del flujo en términos de gradientes de presión, velocidad y flujo másico transportado. Para analizar el efecto de las características del ducto en el comportamiento del flujo, son variados los siguientes parámetros: amplitud (b), longitud (λ), velocidad (c) y ángulo de desfase de onda (φ).

4.2 SISTEMA A SIMULAR

El sistema a simular consiste en un ducto de paredes con forma geométrica sinusoidal (Figura 4.1). En estas paredes se colocan condiciones de frontera de tal forma que producen el movimiento transitorio de éstas. En el interior, el fluido presenta una densidad constante, ρ , de 1800 kg/m^3 y una viscosidad cinemática constante, ν , de $1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$; por lo que es considerado un fluido newtoniano. Con lo anterior se simula el transporte del bolo alimenticio en el esófago.

La geometría de la onda sinusoidal está descrita por medio de la siguiente expresión:

$$h(z) = a + b \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \quad [4.1]$$

donde a es el radio medio del ducto, b es la amplitud de la onda, λ es la longitud de onda, h es la posición de la onda y z es la coordenada axial.

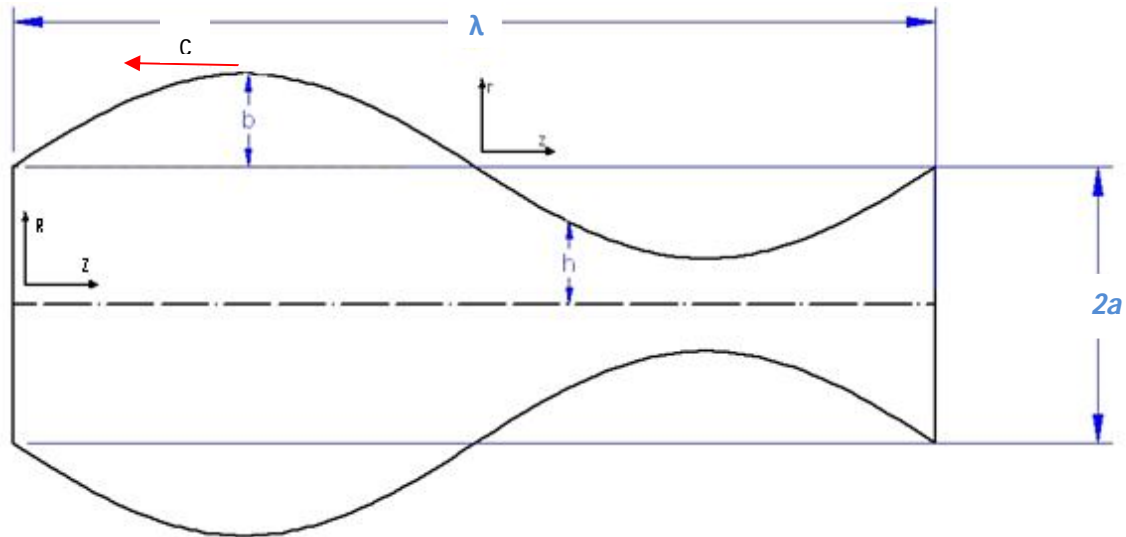


Figura. 4.1 Descripción de los parámetros de la onda peristáltica.

El fenómeno es analizado desde un punto de vista situado en la onda peristáltica, siguiendo así la trayectoria del bolo alimenticio en lugar de la contracción de la onda peristáltica.

Denotando con mayúsculas el sistema de referencia fijo y con minúsculas el sistema de referencia situado en la onda peristáltica (figura 4.1), se tiene el siguiente cambio de coordenadas:

$$Z = z + ct \quad R = r \quad r = h(z) = a + b \operatorname{seno}\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \quad w = W - c \quad u = U \quad [4.2]$$

donde U y W son la velocidad en la dirección radial y axial respectivamente en el sistema de referencia fijo, u y w son la velocidad en la dirección radial y axial respectivamente en el sistema de referencia situado en la onda, r es la dirección radial de la onda, c es la velocidad constante de la onda peristáltica y t es el tiempo.

Debido a las suposiciones anteriores, el flujo desarrollado se puede simplificar a un caso estacionario, y así enfocar el estudio al seguimiento del bolo alimenticio.

Las siguientes condiciones de frontera son aplicadas en cada una de las paredes del sistema para simular el movimiento de contracción-expansión del esófago:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, u = 0 \rightarrow r = 0 \quad [4.3]$$

$$w = -c; u = -c \frac{\partial h}{\partial z} \rightarrow r = h(z) = a + b \operatorname{seno}\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \quad [4.4]$$

El presente trabajo presenta una simulación numérica del movimiento peristáltico en el esófago en tres dimensiones, para ello se emplean los siguientes parámetros promedios de un esófago saludable [1], los cuales conformarán el caso base de estudio:

- Longitud del esófago de 0.3 m.
- Longitud de onda 0.1 m, λ .
- Amplitud de onda 0.01 m, b .
- Radio medio del esófago 0.015 m, a , (utilizado en todos los casos simulados).
- Desfase de la onda de 0 grados, φ . (corresponde al caso simétrico entre las ondas).

El caso base de geometría sinusoidal con una longitud total de 0.3 m, se muestra en la figura 4.2. Las paredes del ducto de este caso base, presentan 3 ondas sinusoidales a lo largo de la dirección axial.

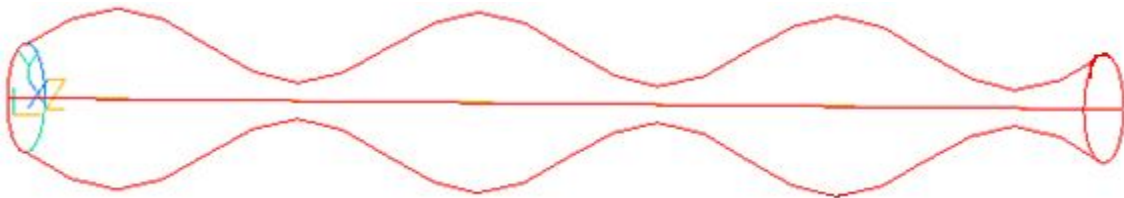


Figura 4.2 Caso base de la onda ($\lambda=0.3\text{m}$, $b=0.01\text{m}$ $a=0.015\text{m}$ y $\varphi=0.0$).

Diferentes parámetros de la onda de contracción-expansión fueron variados para determinar el efecto de los mismos en las características del flujo. Los parámetros que se variaron son mostrados en la Tabla 4.1, obteniendo así 70 casos simulados en este estudio (14 casos geométricos por 5 casos de velocidad).

Longitud de onda (λ)	Amplitud (b)	Velocidad (c)	Ángulo de desfase (φ)
0.05 m	0.005 m	0.01 m/s (caso base)	0° (caso base)
0.075 m	0.0075 m	0.02 m/s	45°
0.1 m (caso base)	0.01 m (caso base)	0.03 m/s	90°
0.125m	0.0125 m	0.04 m/s	135°
0.15 m		0.05 m/s	180°

Tabla 4.1 Parámetros variados para estudiar su efecto en el flujo.

En las siguientes figuras se muestran los diferentes casos geométricos que fueron estudiados en este trabajo, en cada uno de ellos la velocidad de la onda, c , fue variada en el rango de 0.01 a 0.05 m/s.

En la figura 4.3 se muestra los resultados geométricos para la variación de la longitud de onda, λ , para los cinco diferentes casos simulados: 0.05, 0.075, 0.10, 0.125 y 0.15 m.

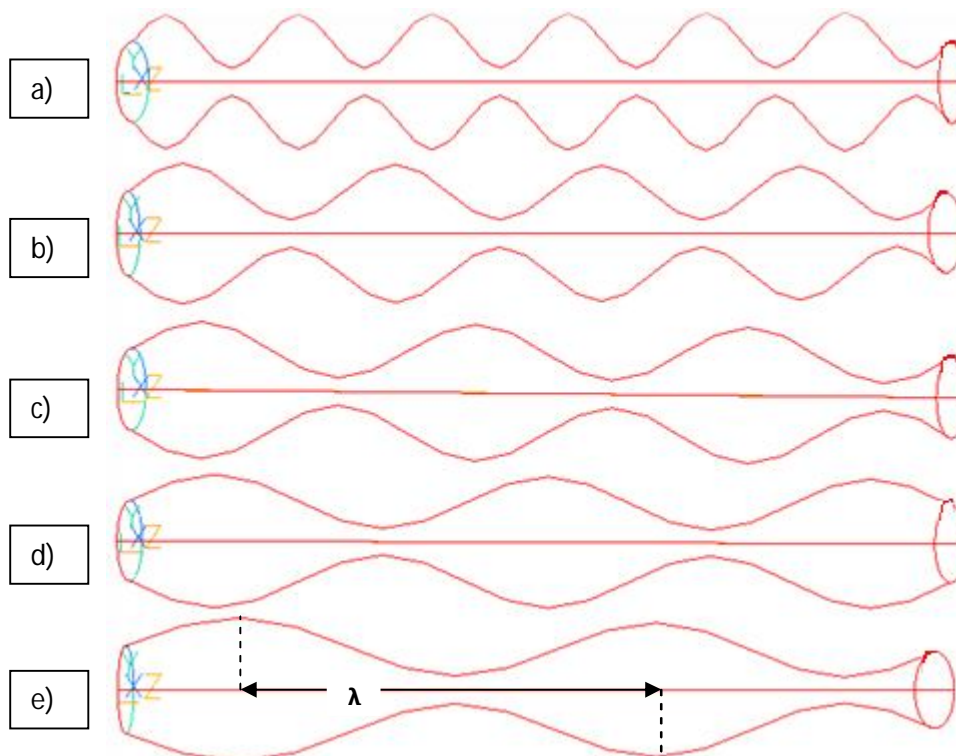


Figura. 4.3 Longitud de onda de los 5 casos simulados: a) 0.05 m, b) 0.075 m, c) 0.1 m, d) 0.125 m y e) 0.15 m.

La amplitud de onda, b , para los cuatro diferentes casos simulados: 0.005, 0.0075, 0.01 y 0.0125 m, son mostrados en la figura 4.4.

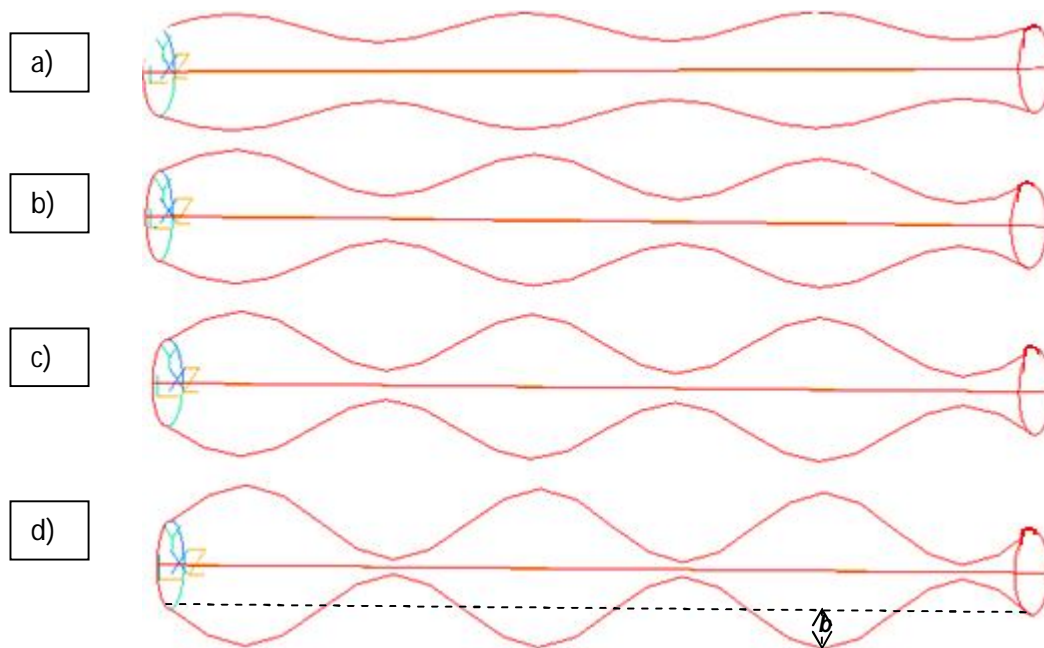


Figura 4.4. Amplitud de onda de los casos simulados: a) 0.005 m, b) 0.0075 m, c) 0.01 m y d) 0.0125 m.

En la figura 4.5 se muestran los ángulos de desfase de la onda, ϕ , para cinco diferentes casos simulados: 0° , 45° , 90° , 135° y 180° .

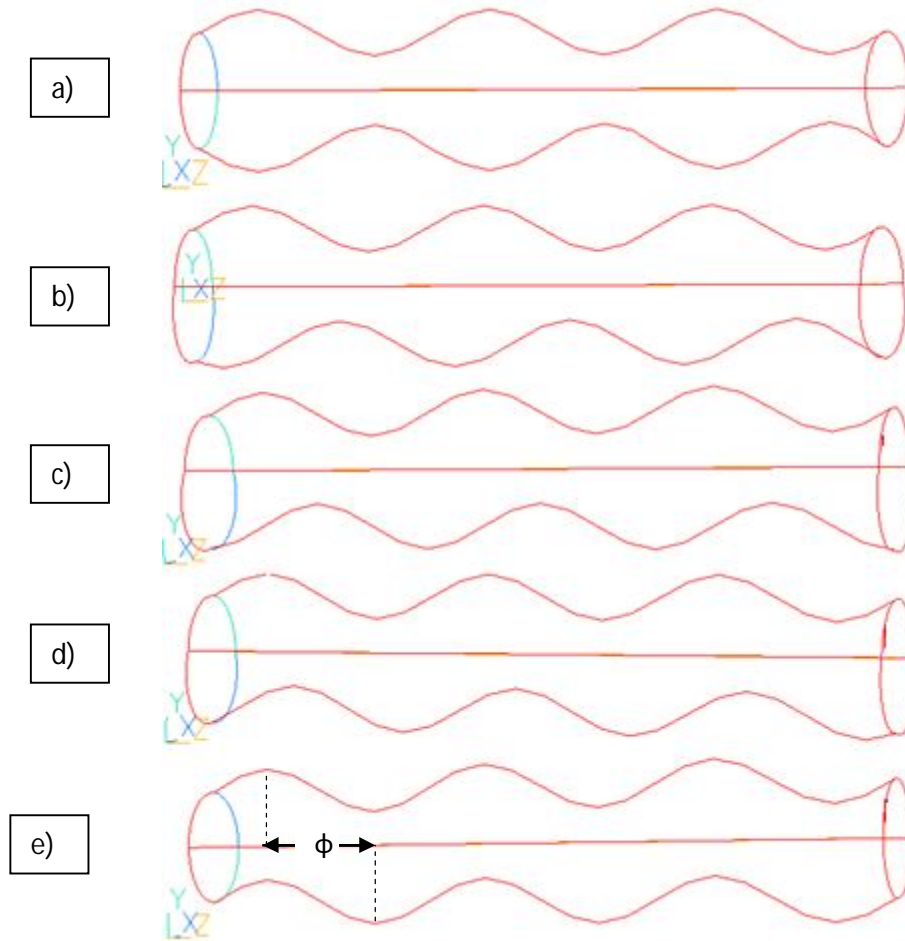


Figura 4.5 Ángulo de desfase, ϕ , de los 5 casos simulados: a) 0° , b) 45° , c) 90° , d) 135° , e) 180° .

4.3 DETALLES NUMÉRICOS

El ducto de paredes con geometría sinusoidal se simuló en 3 dimensiones con celdas que se ajustan al cuerpo (Body Fitted Coordinates, BFC); siendo ésto una de las aportaciones de este trabajo (figura 4.6).

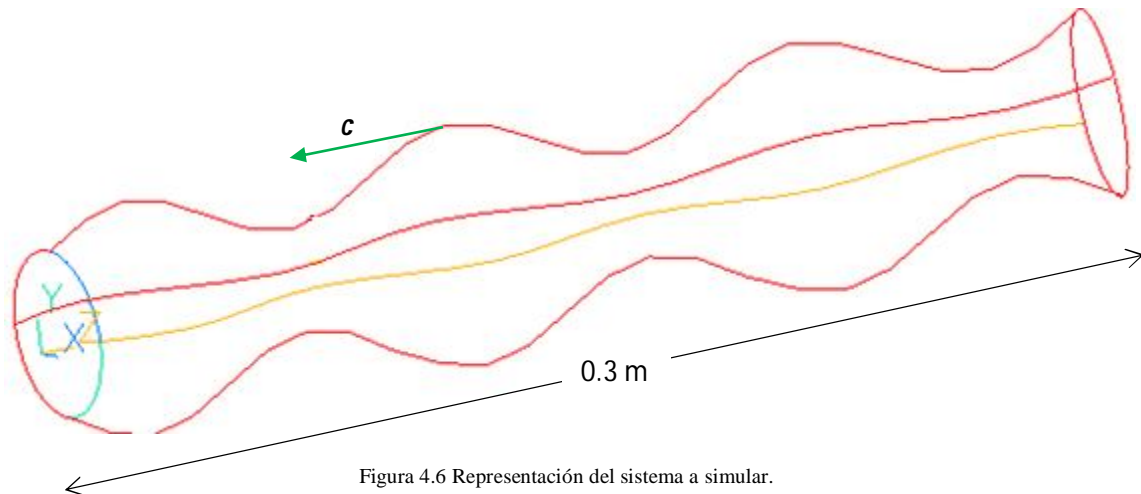


Figura 4.6 Representación del sistema a simular.

El sistema se discretizó con una malla BFC estructurada de 20x20x200 celdas en las direcciones X, Y y Z respectivamente, como se puede observar en la figura 4.7.

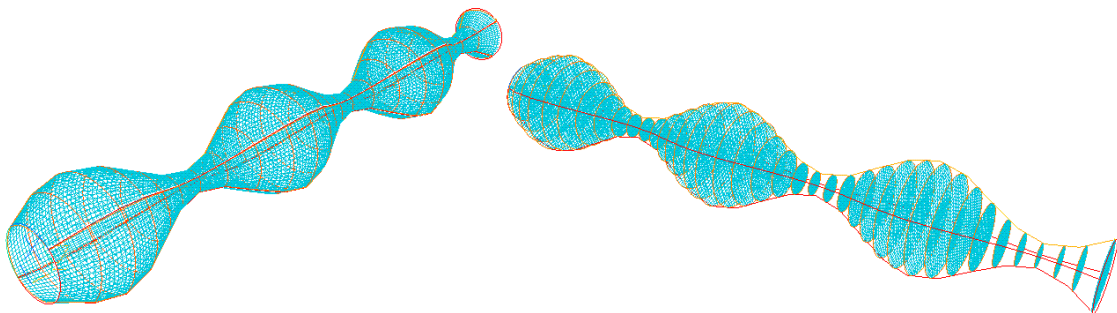


Fig. 4.7 Discretización del dominio computacional.

El número de celdas anterior se determinó mediante un análisis de sensibilidad; en donde un incremento en el número de celdas ya no produjo un cambio en las predicciones de las características del flujo, por lo que se eligió este número de celdas en la malla.

Para simular el movimiento de la onda sinusoidal que transporta el bolo alimenticio en el esófago y el cual es un fenómeno transitorio, se colocaron las condiciones de frontera mostradas en las ecuaciones 4.3 y 4.4. Al aplicar estas condiciones por el cambio de coordenadas, el flujo se simuló como estado permanente.

En los extremos del ducto, se colocaron condiciones de salida, en las cuales un valor de presión es fijado y la dirección del flujo no está especificada permitiendo así, la entrada o salida del mismo.

4.4 RESULTADOS NUMÉRICOS CON SIMULACIÓN DE CASO BASE

A continuación se presentan los resultados numéricos obtenidos para el caso base: $\lambda=0.1\text{m}$, $b=0.01\text{m}$, $c=0.01\text{m/s}$, $\varphi=0.0$; para esta geometría las paredes del ducto presentan tres ondas sinusoidales. Los resultados de las características del flujo se presentan en un plano central del ducto.

La figura 4.8 muestra los contornos de velocidad para las condiciones del caso base. Cerca de la pared, la velocidad del fluido presenta valores negativos por la condición impuesta en la misma; cabe recordar que el marco de referencia analizado es el situado en la onda peristáltica, y de aquí en adelante nos referiremos al flujo negativo como reflujo y al flujo positivo como flujo transportado. Las velocidades máximas negativas se localizan en la zona de contracción, donde se tienen valores próximos a -2.22×10^{-2} m/s. Donde la amplitud de onda es mayor, se presenta una recirculación que es resultado de la contracción y por lo tanto de la disminución del área transversal; fenómeno que es repetitivo en las tres ondas sinusoidales. En esta zona de recirculación, la velocidad es positiva con un valor máximo de 1.03×10^{-2} m/s.

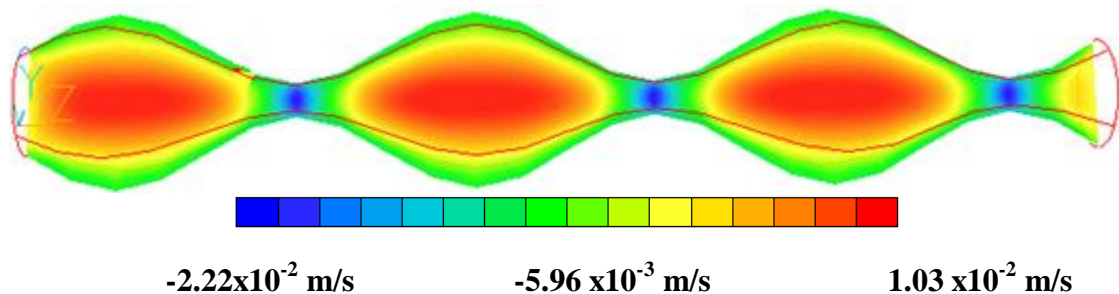


Figura 4.8 Perfiles de velocidad dentro del ducto con paredes de geometría sinusoidal.

En la figura 4.9 se corrobora la condición de movimiento de la onda peristáltica presentándose el reflujo desde el punto de vista Lagrangiano a los alrededores de las paredes, y por medio de una ampliación se muestra la zona donde el flujo cambia de dirección, siendo ésta la zona de mayor interés que llamaremos zona de captura, ya que en ella se presenta la transportación del fluido en la dirección positiva del eje axial.

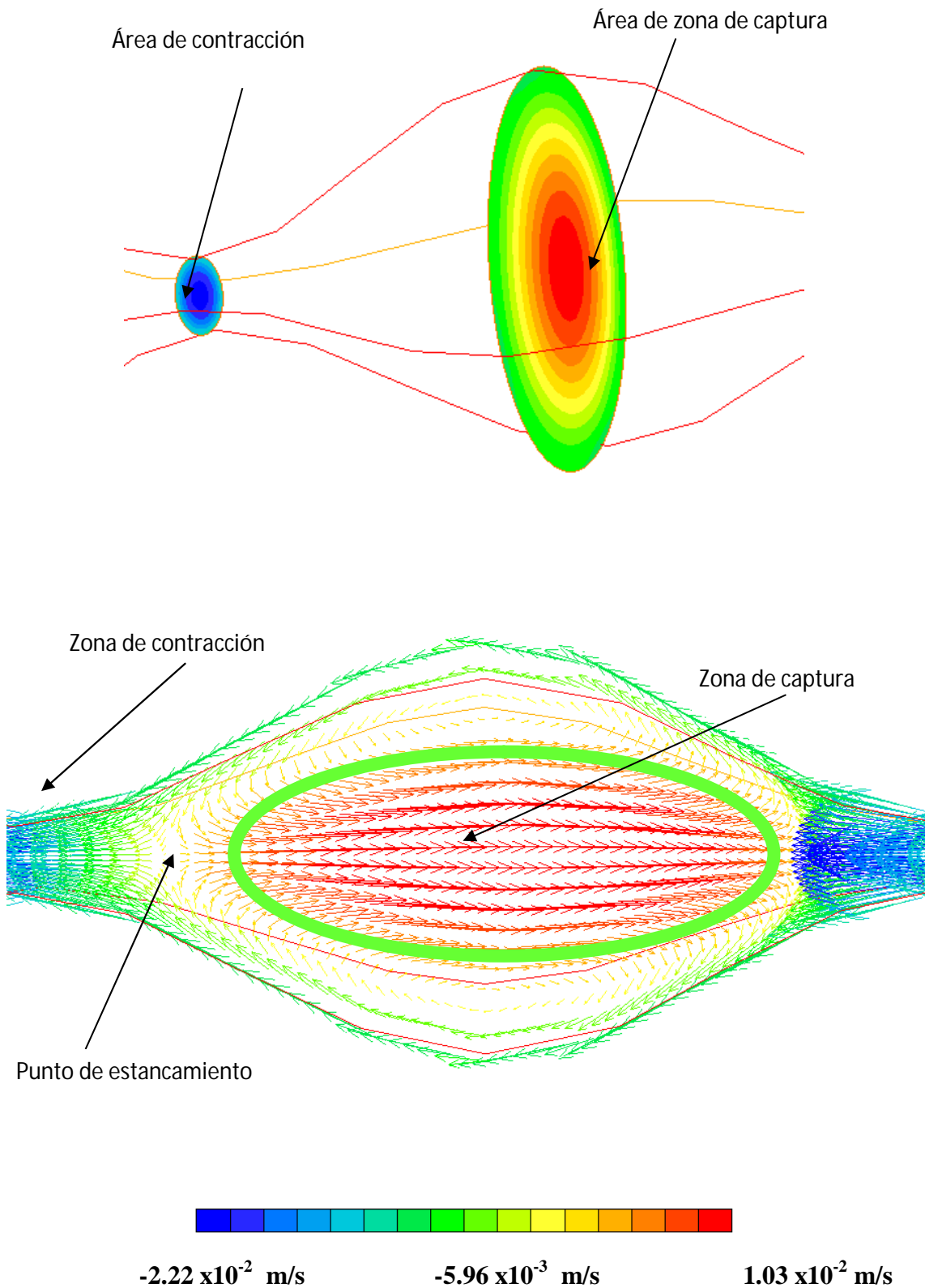


Figura 4.9 Ampliación de la zona de recirculación.

El fenómeno de la recirculación del flujo se presenta debido al efecto de la contracción de la onda peristáltica, en donde la reducción del área provoca que el fluido sea empujado en la dirección axial positiva. En esta zona de recirculación, las máximas

velocidades se tienen en el centro de la misma y para éste caso presenta un valor de 1.03×10^{-2} m/s.

En la figura 4.10 se aprecian iso-superficies de velocidad de 0 m/s o zonas de estancamiento (Dentro de las iso-superficies se presenta el flujo transportado debido al efecto que se simula en las paredes del sistema) en la zona de captura del bolo alimenticio. Con estas condiciones del caso base, el flujo másico transportado en la región central de la zona de captura es de 7.422×10^{-3} kg/s y el reflujo en la zona de contracción tiene un valor de -2.49×10^{-3} kg/s, siendo negativo por el sistema de referencia empleado.



Figura 4.10 Iso-superficies de velocidad 0 m/s.

Los contornos de presión medio se muestran en la figura 4.11, todos ellos relativos a la presión definida en los extremos del ducto. Los mayores valores de presión se localizan después de las zonas de contracción, y su valor decrece en el sentido axial positivo, lo que permite que el flujo que simula el bolo alimenticio se mueva en la dirección positiva del eje axial. El gradiente de presión medio en el plano central tiene un valor de 0.098 Pa/m y presenta un valor aproximadamente constante por onda.

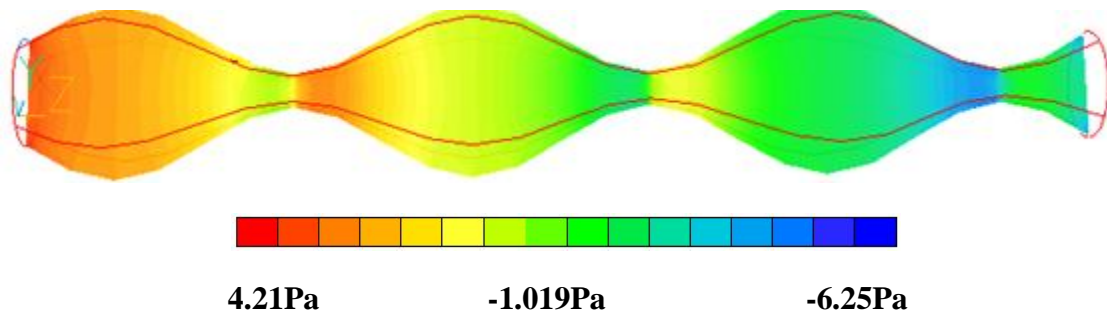


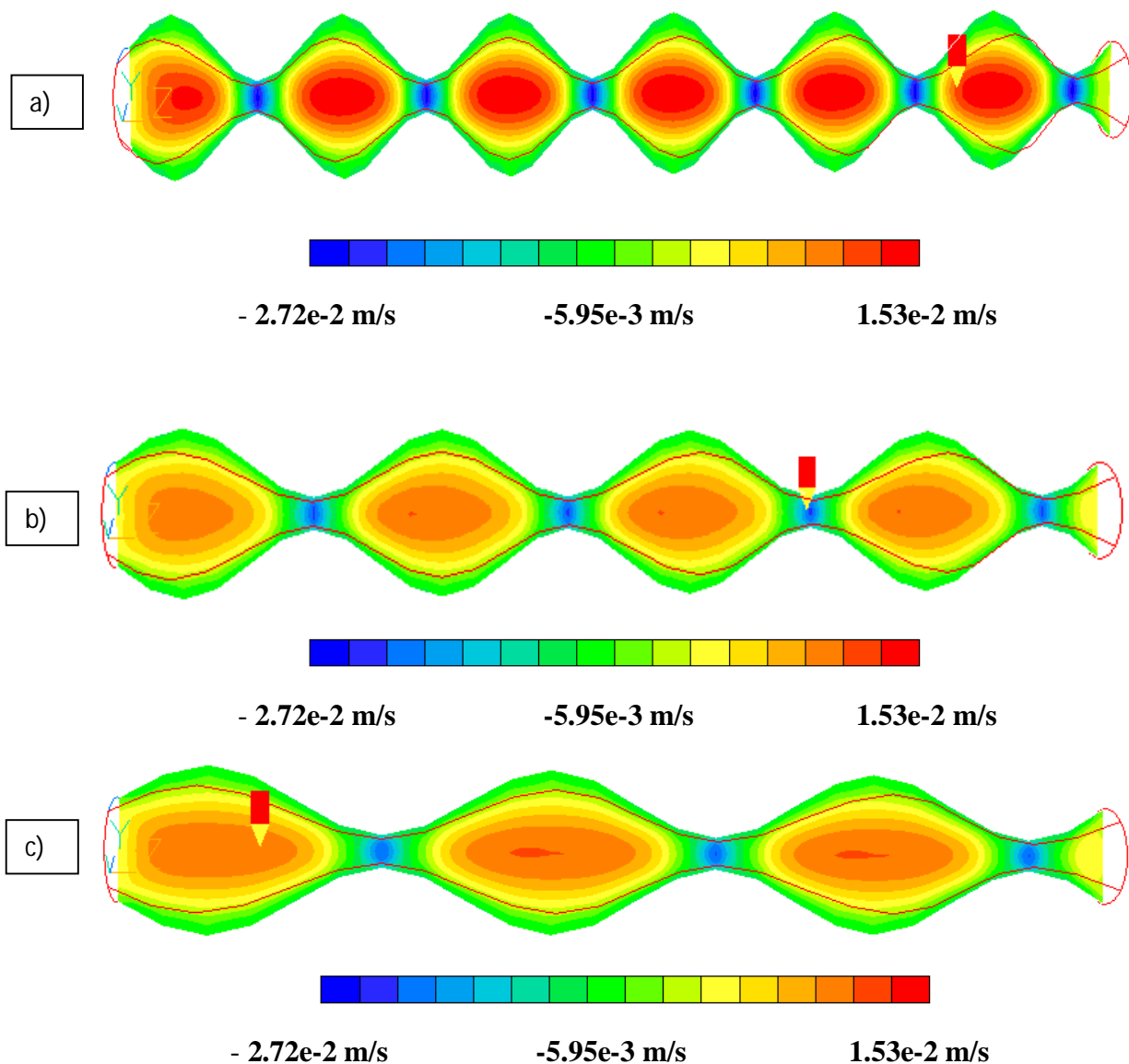
Figura 4.11 Contornos de presión.

Para conocer el efecto que tienen los parámetros que definen a la onda peristáltica sobre el comportamiento del flujo, longitud de onda (λ), amplitud de onda (b), velocidad de onda (c) y ángulo de desfase (ϕ); fueron variados de acuerdo a la Tabla 4.1.

4.5 VARIACIÓN DE LA LONGITUD DE ONDA.

El fenómeno del flujo peristáltico es controlado por cuatro parámetros (b , λ , c y ϕ), para esta sección la longitud de onda (λ) se varió tomando los siguientes valores: 0.05, 0.075, 0.1, 0.125, y 0.15 m, siendo el caso base de 0.1m. Los demás parámetros del caso base permanecen iguales (b , a y ϕ).

En la figura 4.12 se presentan los perfiles de velocidad para los 5 casos de longitud de onda y una velocidad de onda de 0.01 m/s; en donde cada uno de los casos presenta un valor de $b/a= 0.666$, valor que está por encima de lo que propone *Shapiro et al 1969* [16] para que se presente el punto de estancamiento que desarrolla la zona de recirculación o de captura del flujo.



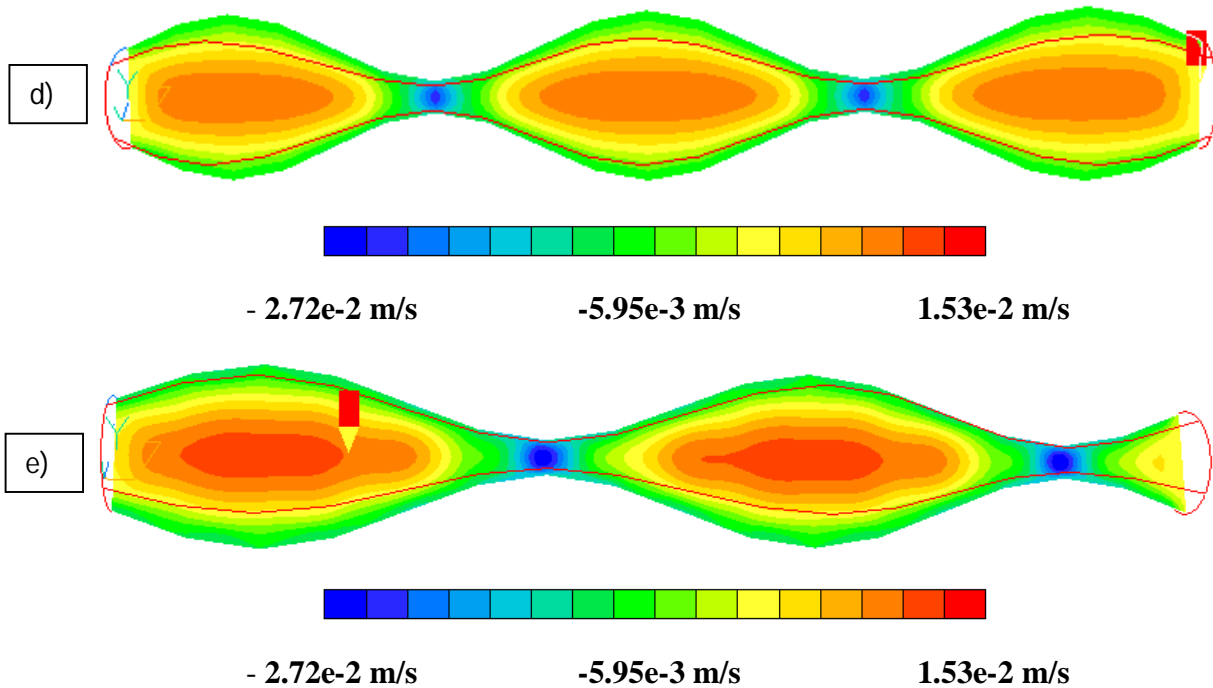


Figura 4.12 Perfiles de velocidad dentro del ducto con longitud de onda de: a) 0.05, b) 0.075, c) 0.01, d) 0.0125 y e) 0.15 m.

En las figuras anteriores se aprecia que al incrementar la longitud de onda, menos ondas peristálticas se pueden formar a lo largo del esófago (pasando de seis ondas para el primer caso, a dos ondas para el último caso); pero al incrementar la longitud de onda aumenta el volumen en donde se presenta el flujo transportado por cada onda.

En la figura 4.13 se presenta el efecto que tiene la longitud de onda sobre el reflujo para diferentes velocidades de onda, c . Conforme se incrementa la longitud de onda, disminuye la cantidad de reflujo en el sistema hasta llegar a un valor mínimo que corresponde al caso base en donde la longitud de onda (λ) es de 0.1 m. Después de este valor máximo, el reflujo aumenta conforme se incrementa la longitud de onda.

Para velocidades de onda mayores a 0.01 m/s el comportamiento es similar y el efecto de la longitud de onda en el reflujo es apreciado con mayor facilidad.

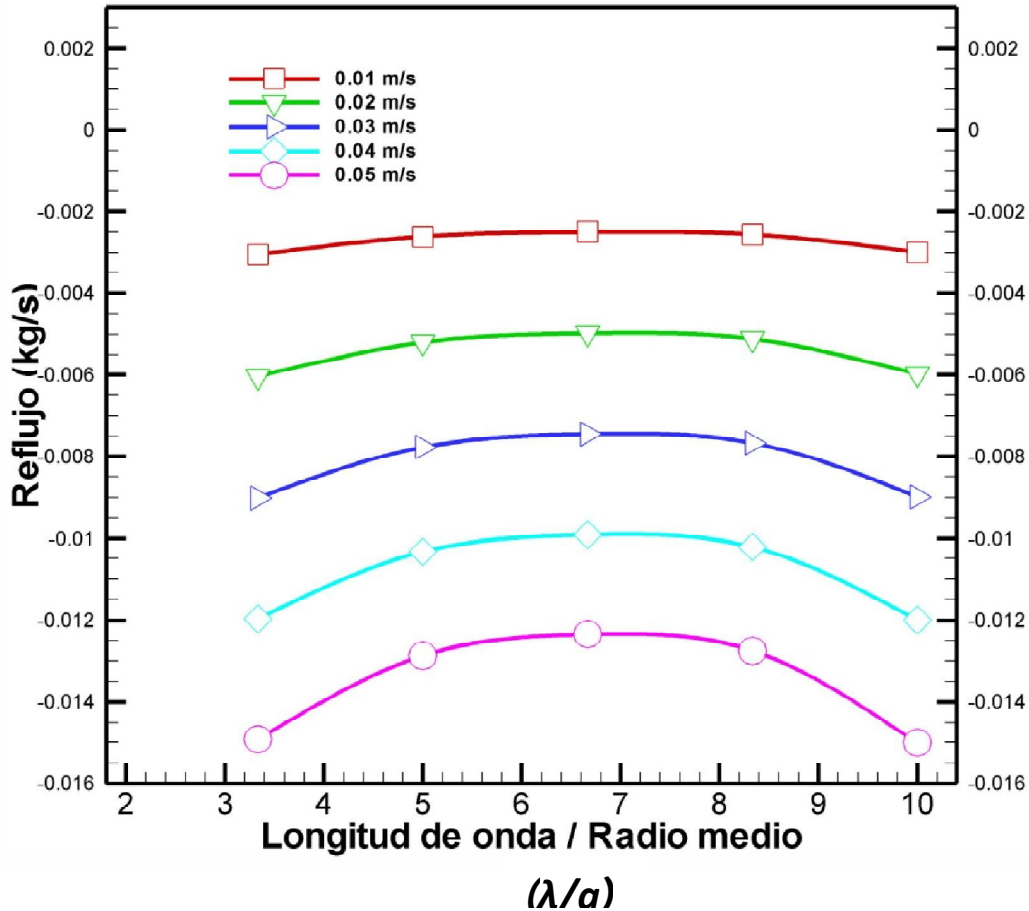


Figura 4.13 Variación del flujo másico con la longitud de onda adimensional.

El efecto que provoca la longitud de onda en el flujo transportado de izquierda a derecha debido al efecto de contracción-expansión a diferentes velocidades, es mostrado en la figura 4. 14. Este flujo es medido en un plano axial de la región central de la zona de captura, zona en donde se presenta la recirculación del flujo, por lo que el flujo es axialmente positivo. El comportamiento del flujo permanece constante y después tiende a decrecer conforme la longitud de onda aumenta, a excepción del caso de longitud de onda (L) de 0.15 m.

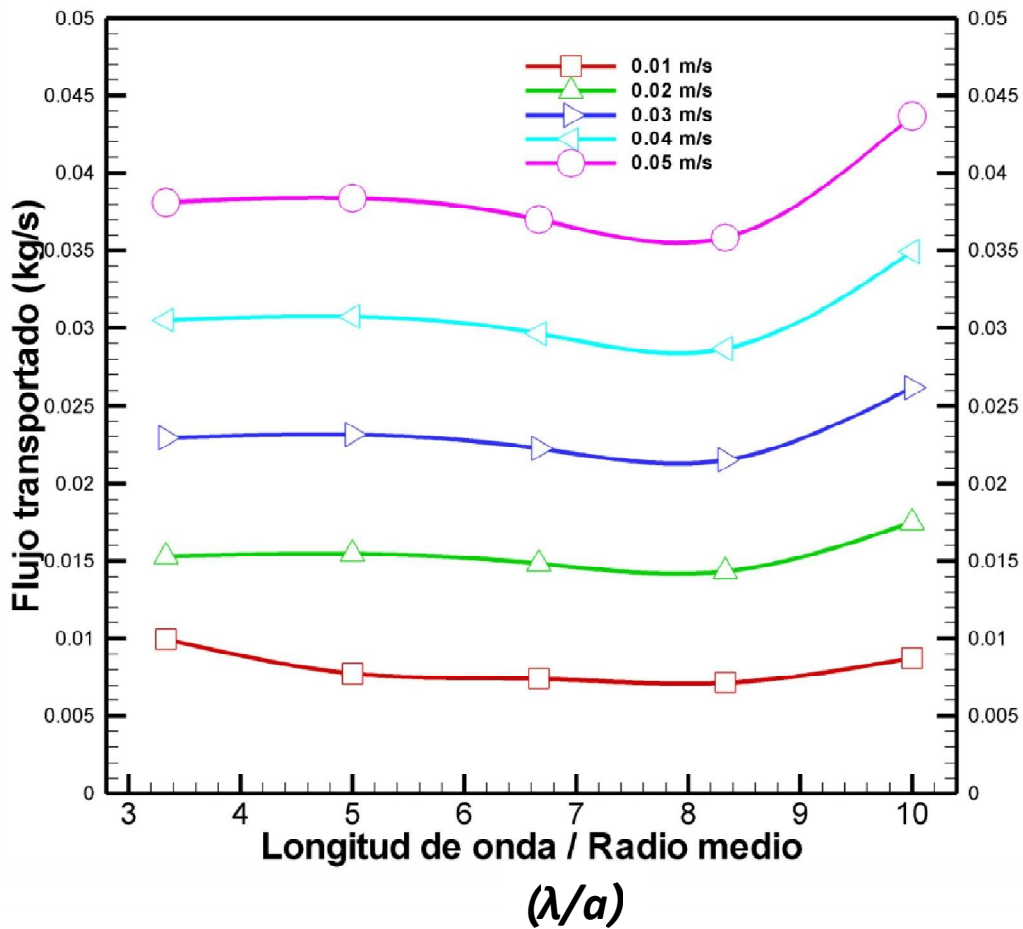


Figura 4.14 Efecto de la longitud de onda en el flujo másico de la zona de captura para diferentes velocidades: 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05 m/s.

En la figura 4.15 se presenta la relación del flujo transportado entre el reflujo, en donde se tiene un mismo comportamiento para diferentes velocidades. Un valor máximo es encontrado en $\lambda/a = 5.5$, permitiendo establecer que con la relación se tiene un máximo transporte de flujo con un mínimo de reflujo.

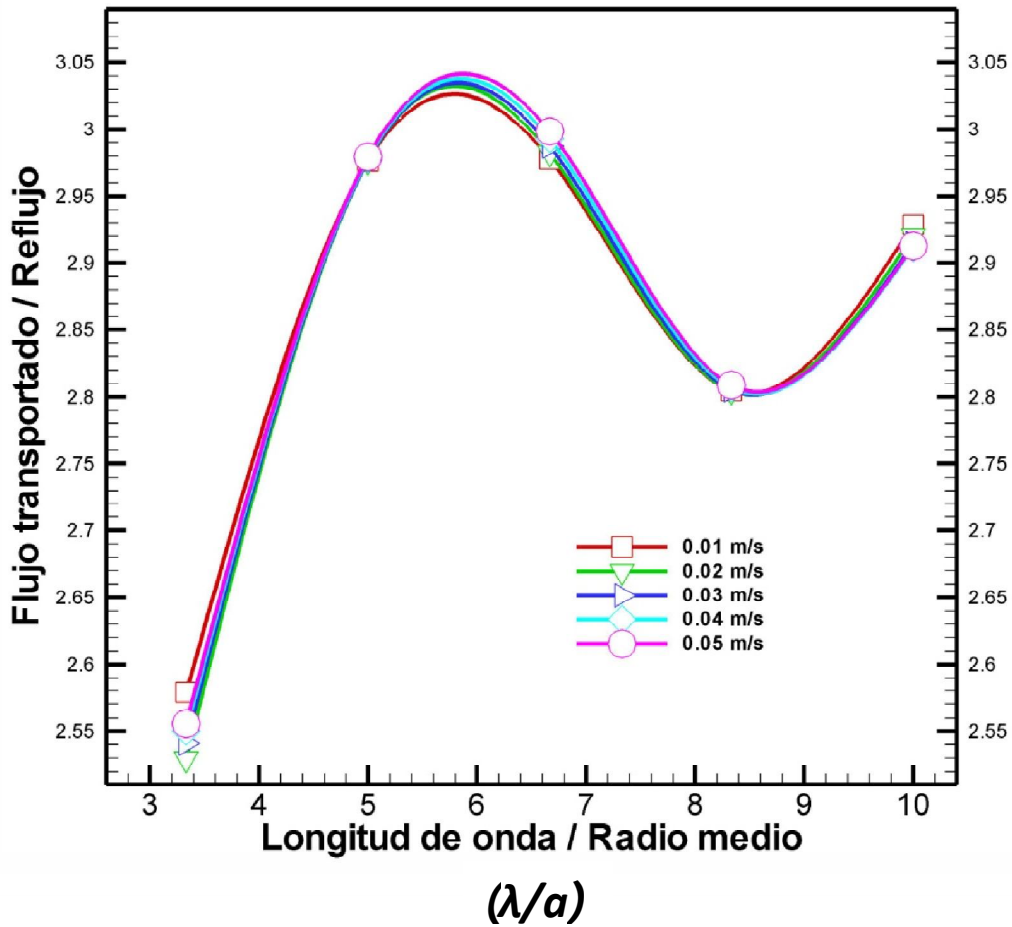


Figura 4.15 Relación de los flujos generados por el movimiento longitudinal y de contracción como función de la longitud de onda y el radio medio.

Este reflujo es producto del movimiento de las paredes y el cambio de coordenadas, por lo que el esfuerzo también es mínimo, y se confirmará con los resultados siguientes del gradiente de presión.

En la figura 4.16 se presentan la variación de los gradientes de presión medios en la dirección axial con la longitud de onda para diferentes valores de velocidad de onda, c . Para un valor de $\lambda/a = 5.5$ se observa que existe un mínimo en el gradiente de presión y a su vez un máximo en la cantidad de flujo transportado. Así mismo es observado que el gradiente de presión es dependiente de la velocidad de la onda, obteniéndose su mayor diferencia a una velocidad de 0.05 m/s.

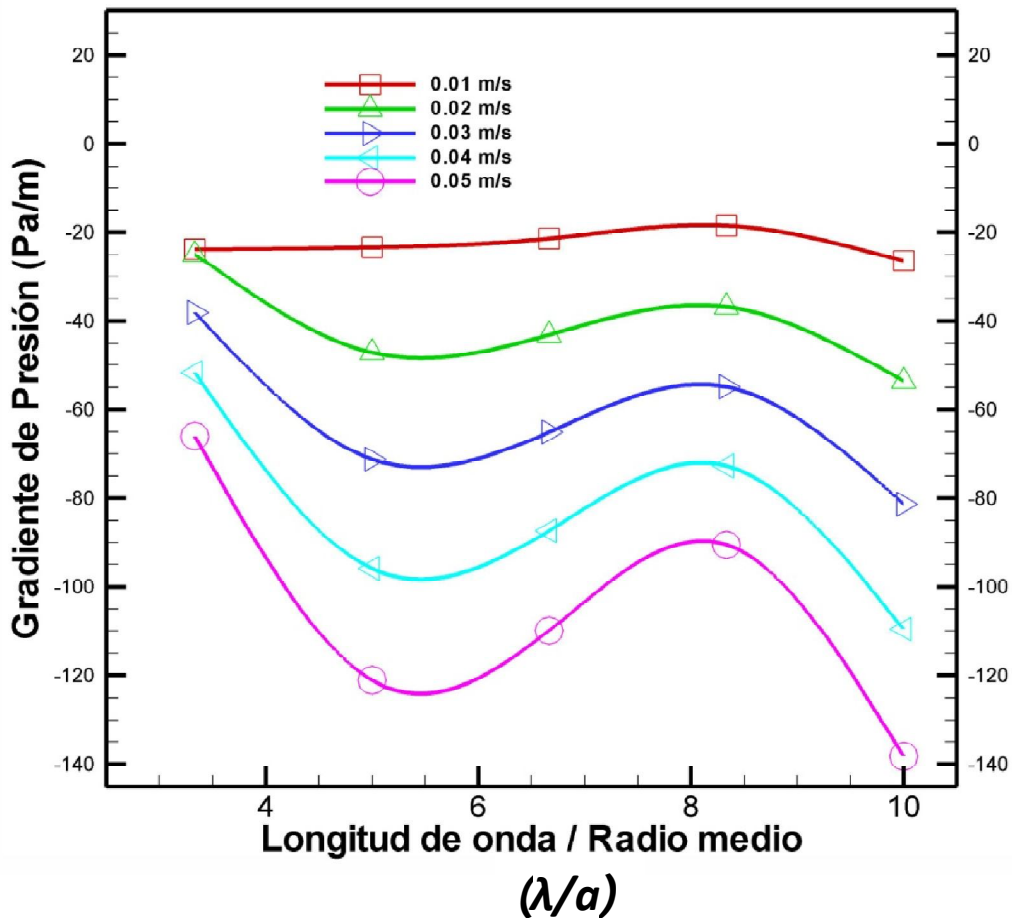


Figura 4.16 Valores de gradiente de presión en función de la longitud de onda.

4.6 VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE ONDA.

A continuación se presentan las predicciones para diferentes valores de amplitud de onda, b , en un plano XZ en la zona central del ducto.

Conservando los demás parámetros del caso base (L , a y ϕ). En la figura 4.17 se presentan los perfiles de velocidad para los 4 casos de amplitud de onda.

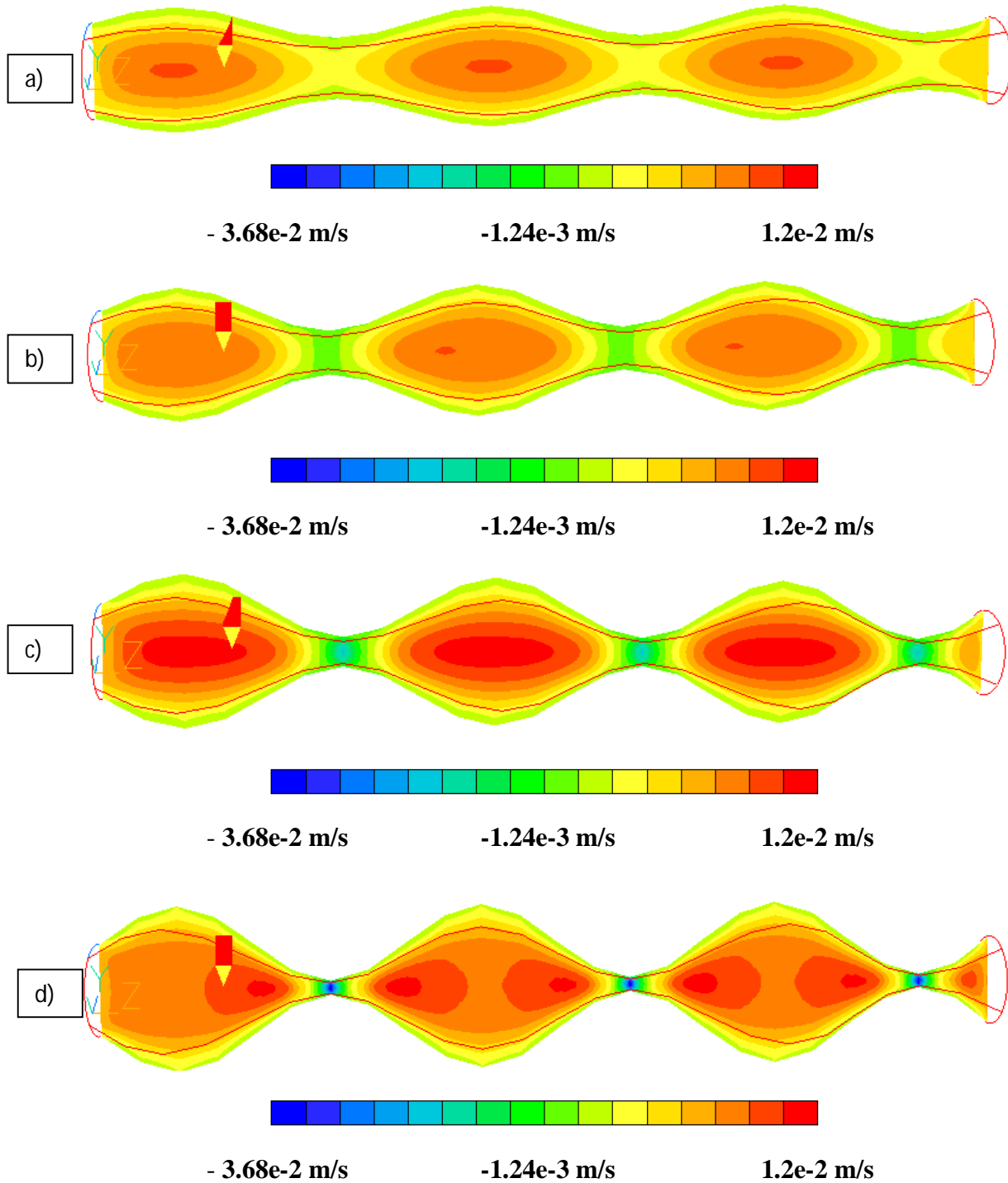


Figura 4.17 Contornos de velocidad media en el interior del ducto para las diferentes amplitudes de onda: a) 0.005, b) 0.0075, c) 0.01 y d) 0.0125 m.

En el último caso en donde la amplitud es la mayor, el fenómeno de recirculación pierde intensidad debido a que la zona de contracción presenta una reducción del área drástica.

En la figura 4.17 se observa un incremento progresivo de la zona de captura debido al incremento de la amplitud de la onda, que a su vez permite tener un incremento en el flujo capturado.

En la figura 4.18 se presenta el efecto la amplitud de onda en el reflujo para diferentes casos de velocidad de onda, c . Un incremento en la amplitud de la onda, produce una disminución en la cantidad de reflujo, debido a que con mayor amplitud se tiene una menor área de contracción. Para velocidades de onda mayores de 0.01 m/s, este fenómeno tiene un comportamiento similar convergiendo a un flujo cercano a 0.0 kg/s.

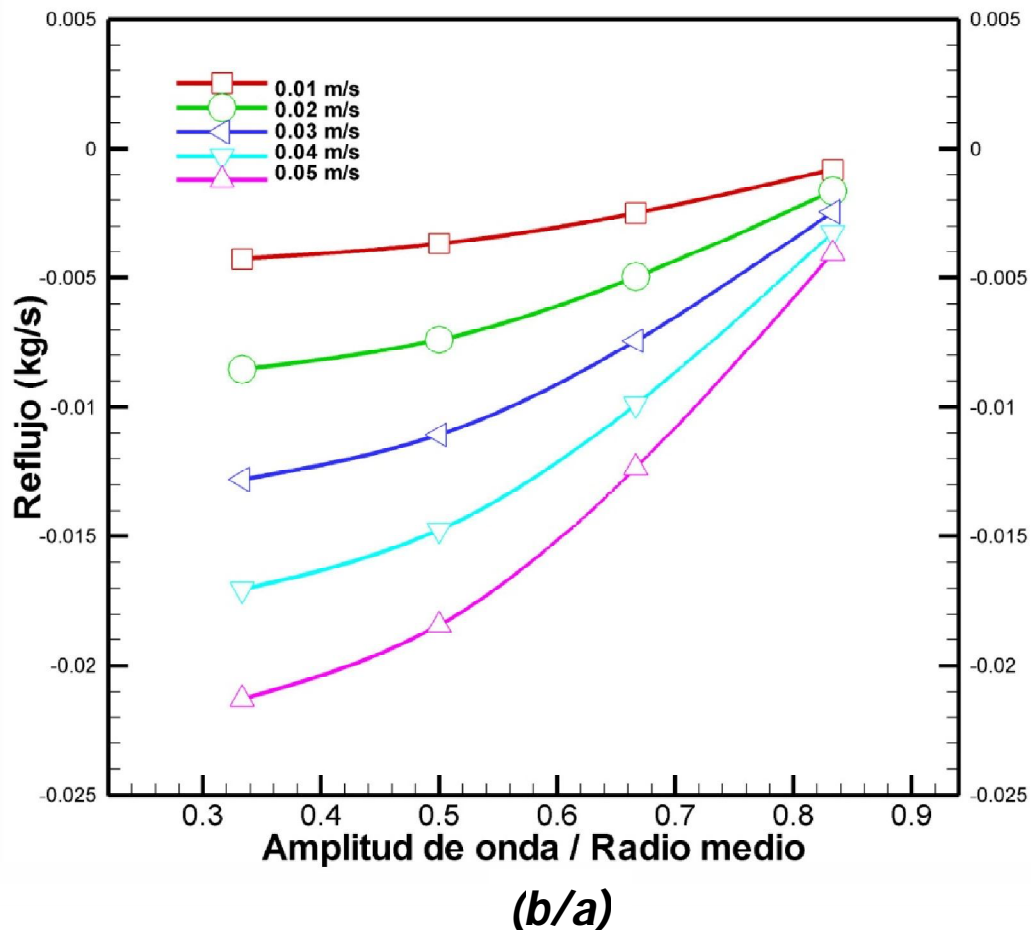


Figura 4.18 Variación del flujo másico con la amplitud de onda a diferentes velocidades.

El efecto que produce la amplitud de onda en el flujo transportado en la región central de la zona de captura, es mostrado en la figura 4.19. La cantidad de flujo transportado crece rápidamente conforme la amplitud de onda aumenta, observándose un comportamiento similar en cada una de las velocidades simuladas.

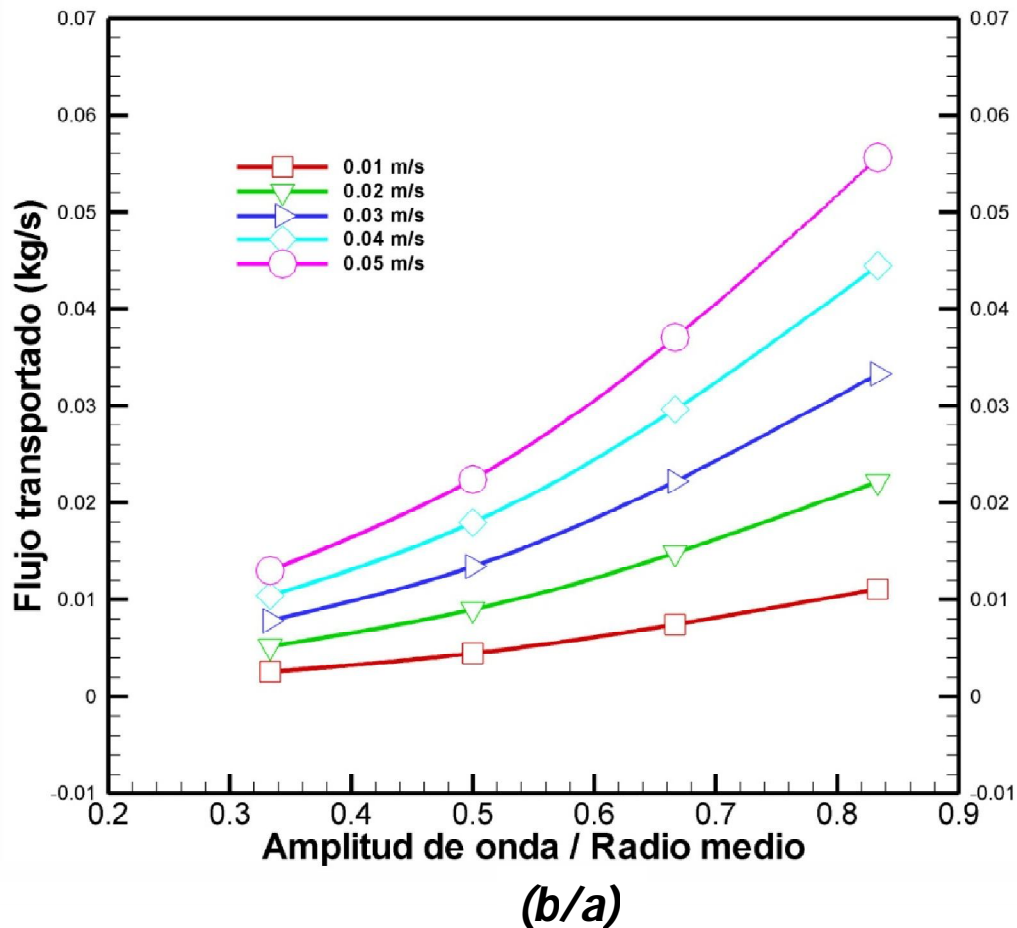


Figura 4.19 Efecto de la longitud de onda en el flujo transportado a diferentes velocidades de onda.

En la figura 4.20 se presenta la relación entre el flujo transportado y el reflujo que se presentan en el sistema. Se observa que cuando la amplitud tiende a cero, el flujo transportado tiende a desaparecer y el fenómeno tiende al caso del flujo dentro de un tubo (flujo tipo Poiseuille). Por otro lado, al incrementar la amplitud de onda, el flujo transportado crece de forma similar en cada caso de velocidad. Además se observa que hay una diferencia significativa entre el caso de mayor amplitud y su antecesor, fenómeno atribuido a la diferencia entre las áreas de captura y de contracción.

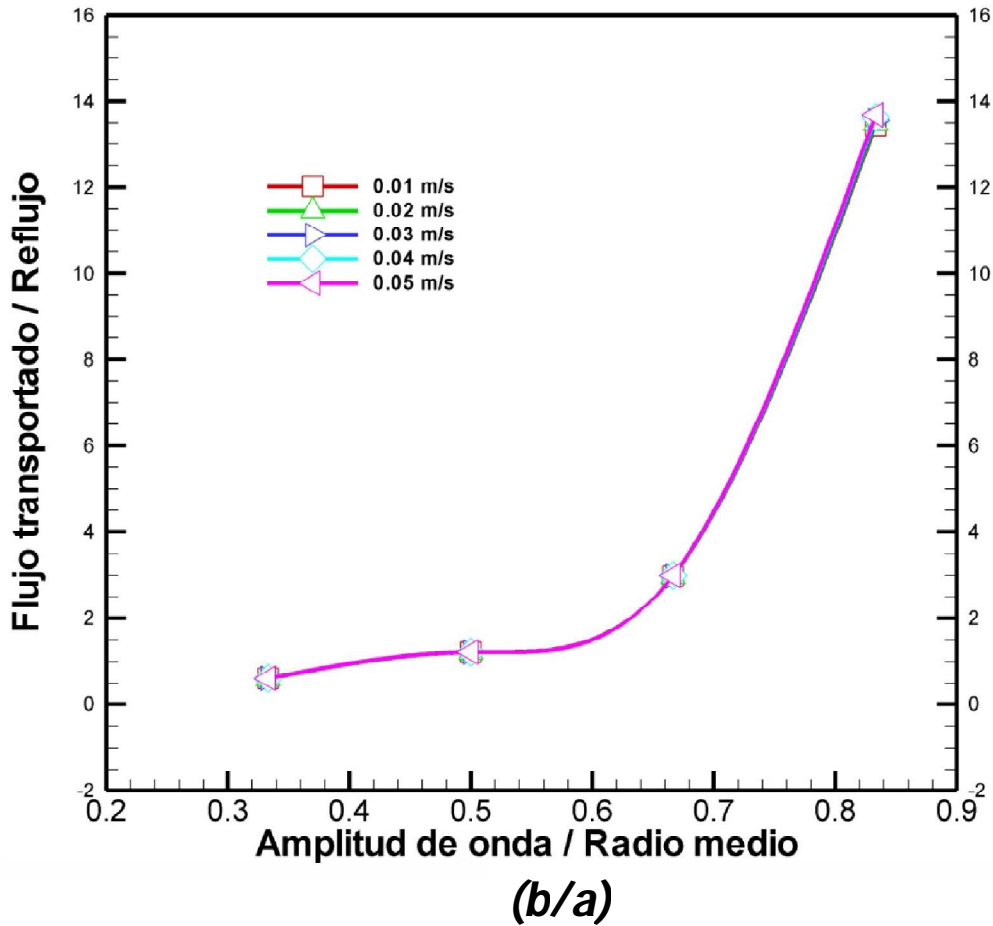


Figura 4.20 Valores de la longitud de onda contra el flujo másico a diferentes velocidades.

En la figura 4.21 se presenta el efecto de la amplitud de onda sobre el gradiente de presión del flujo. Al incrementar la amplitud, el área de contracción tiende a cero, por lo que el gradiente de presión también tiende a cero, lo que indica que no habría reflujo debido al efecto del movimiento longitudinal de las paredes.

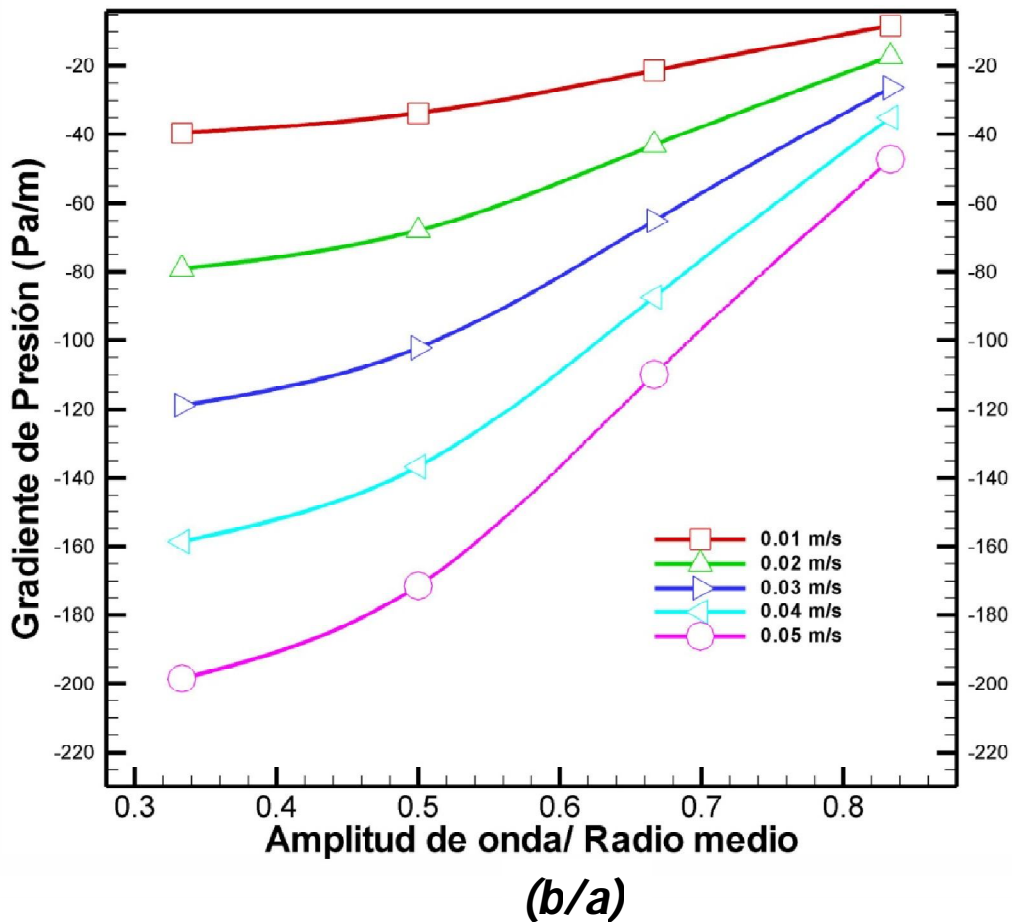


Figura 4.21 Efecto de la amplitud de onda en el gradiente de presión del flujo para diferentes velocidades de onda, c.

Perfiles de velocidad axial en el plano central de la zona de captura para las diferentes amplitudes de onda (b): 0.005, 0.0075, 0.01 y 0.0125 m, y con una velocidad de onda de 0.01 m/s (se empleó 0.01 m/s como velocidad característica para adimensionalizar la velocidad media a lo largo de la dirección transversal al flujo) son mostrados en la figura 4.22. Estos perfiles presentan un carácter parabólico en donde la máxima velocidad se encuentra en el centro del conducto; observándose también el cambio de dirección del flujo al separarse de la pared del ducto, lo que concuerda con los trabajos de *S. Nadeem et al* [15].

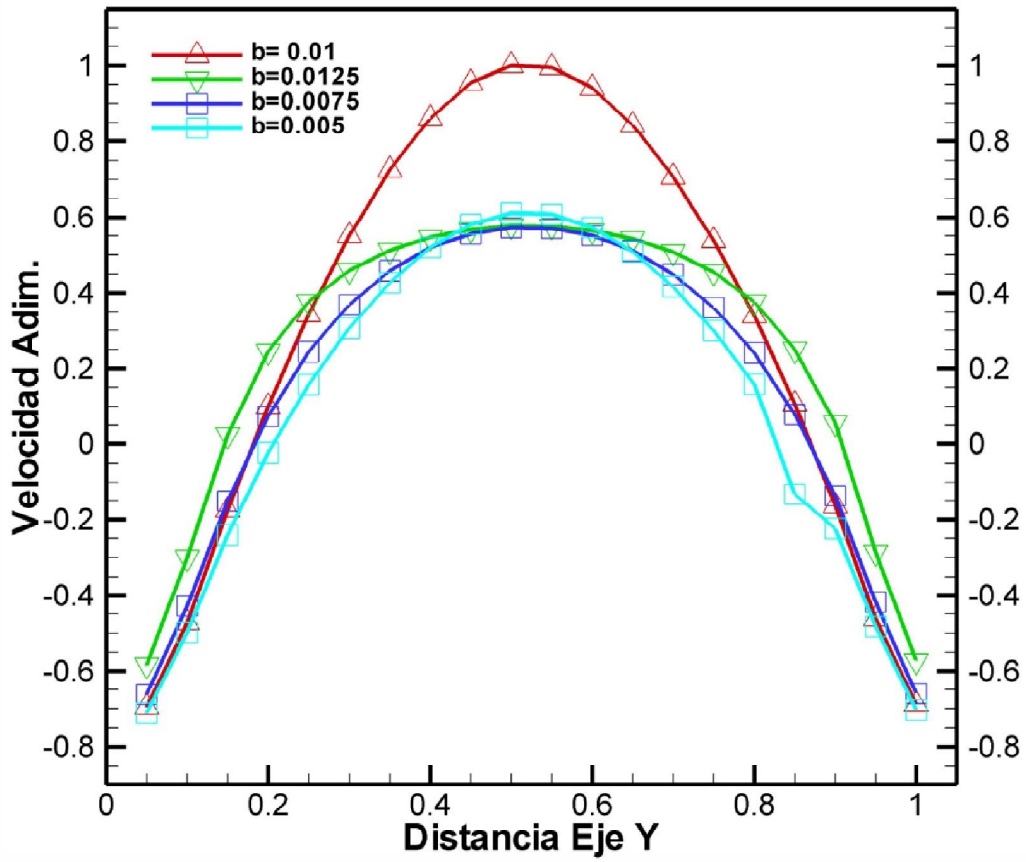


Fig 4.22 Perfiles parabólicos de velocidad.

Además en la figura anterior se observa un perfil simétrico.

En la figura 4.23 se representa el efecto en conjunto de la amplitud y longitud de la onda peristáltica en el reflujo dentro del ducto; la longitud es adimensionalizada con la amplitud de onda.

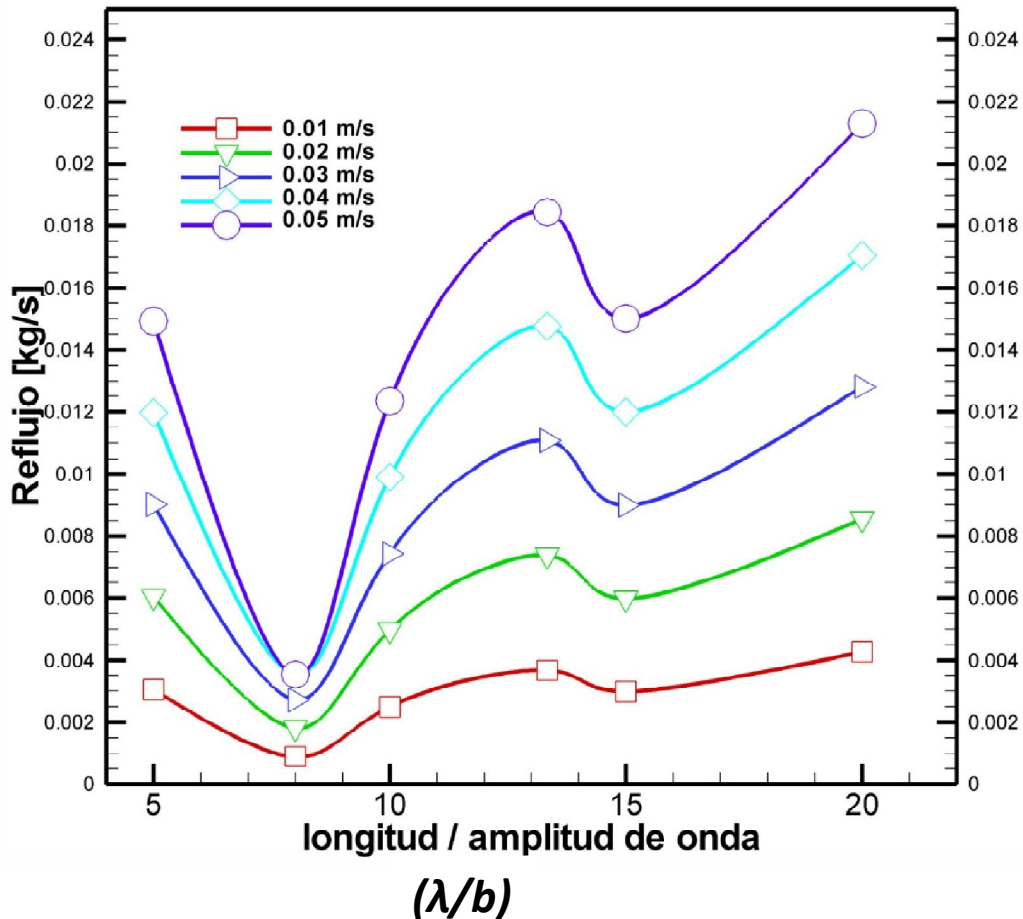


Figura 4.23 Variación del flujo transportado con la relación longitud/amplitud de onda

De acuerdo con la figura 4.23, para la relación longitud/amplitud de onda próxima a 8, la velocidad de onda no tiene un efecto notable en la cantidad de flujo másico que se captura y transporta por el movimiento de las ondas; esto debido a que es el caso en donde se tiene la mayor diferencia entre el área de contracción y el área de la zona de captura. La diferencia entre los reflujos se observa en la Figura 4.24 en donde se utiliza el valor para longitud/amplitud de onda de 20 como parámetro de referencia porcentual.

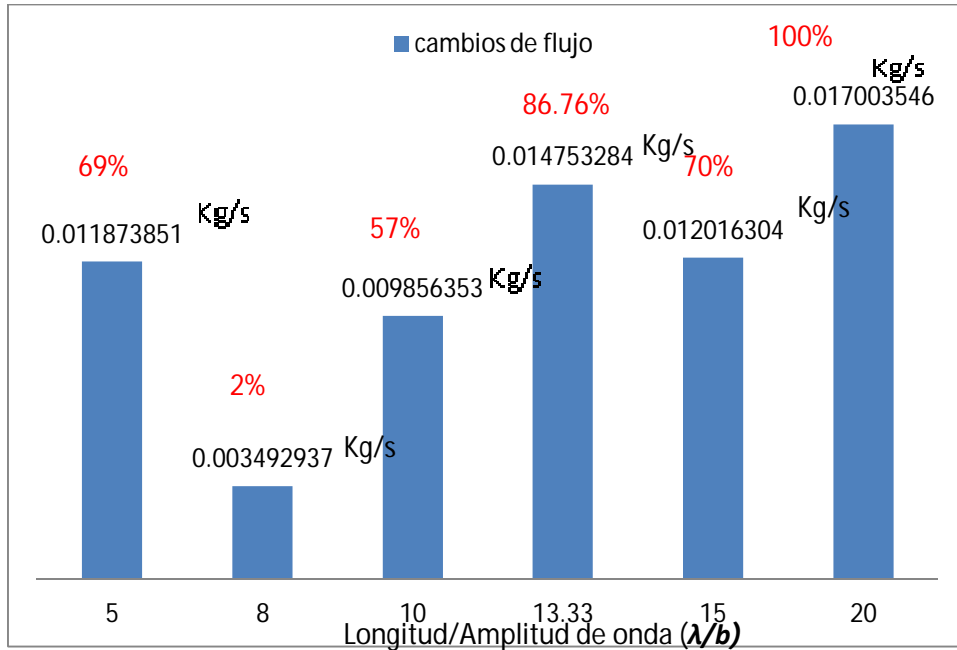
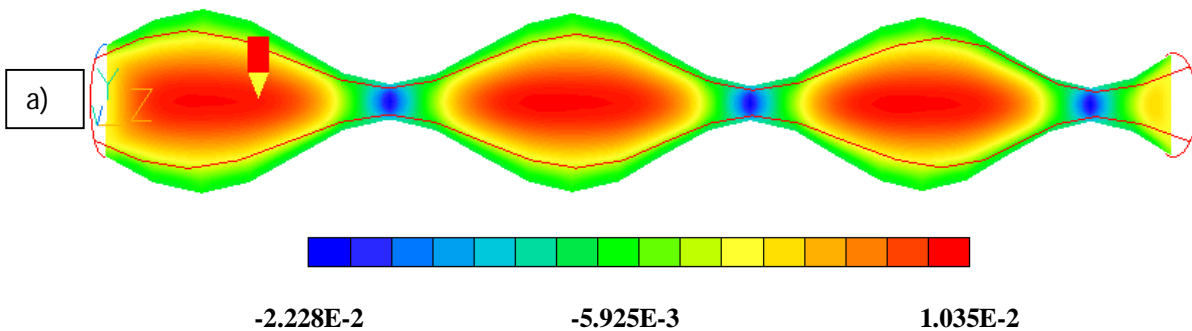


Fig 4.24 Efecto de la relación (λ/b) en el reflujo para un rango de velocidad de 0.01-0.05 m/s.

4.7 VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE DESFASE DE ONDA.

A continuación se presentan los casos en los cuales se aplica un desfase progresivo en la onda inferior para medir el efecto que tiene en el transporte del flujo. Este desfase es de: 0.0π , 0.25π , 0.5π , 0.75π y 1.0π . Los demás parámetros de la onda: longitud (λ), amplitud (b) y radio medio (a) se conservan iguales que para el caso base.

En la figura 4.25 se presentan los perfiles de velocidad de los diferentes desfases de la onda peristáltica. Conforme el desfase se aproxima a π radianes, es decir, cuando el máximo de la onda superior coincide con el máximo de la onda inferior y viceversa, el efecto de la onda peristáltica sobre el flujo transportado de la parte izquierda a la parte derecha, es cada vez menor hasta llegar a la desaparición total de la misma para el caso de un desfase de π radianes. En este caso, las ondas peristálticas se encuentran anulando su efecto una de la otra y el flujo se parece al flujo de Poiseuille.



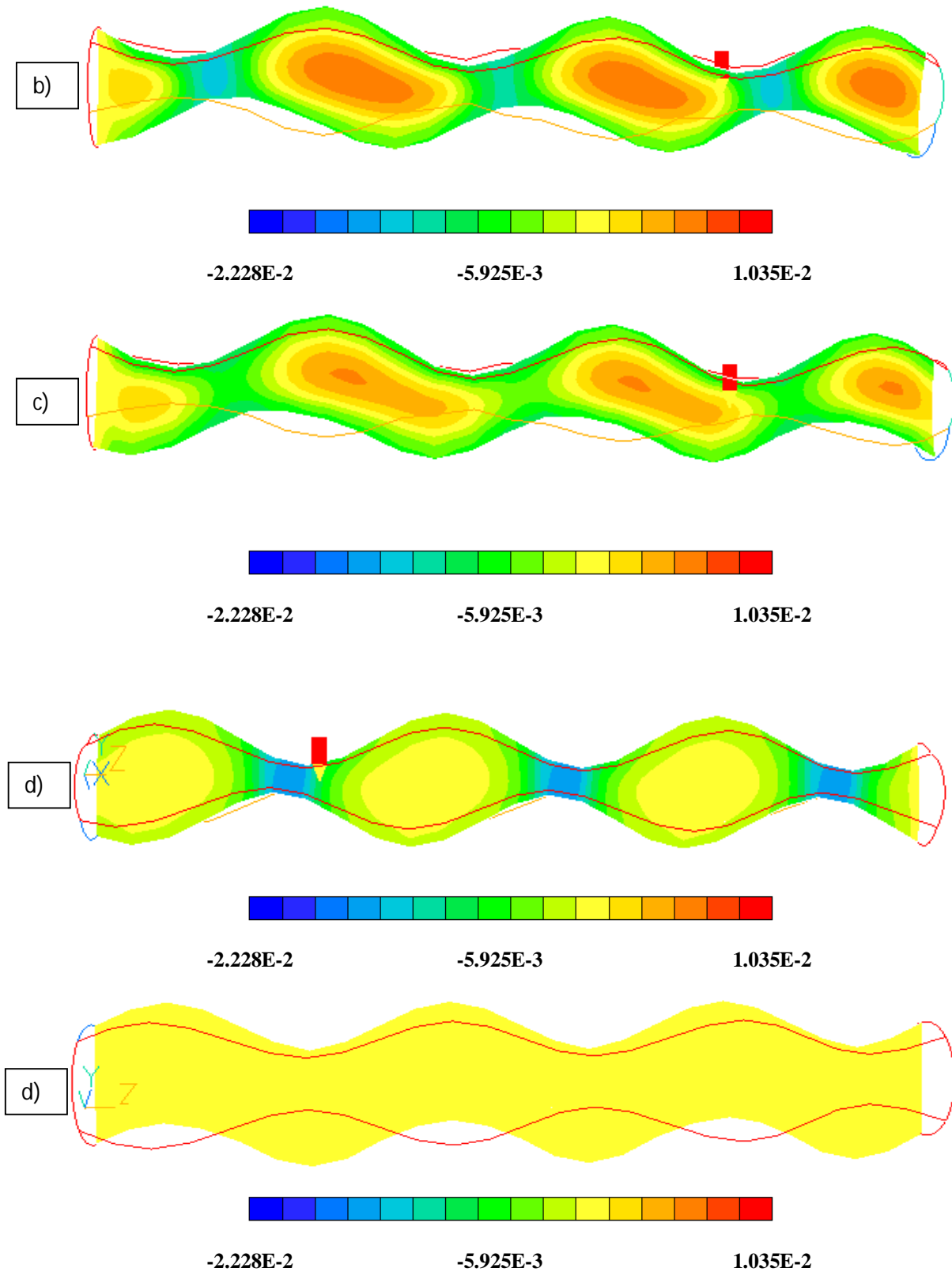


Figura 4.25 Contornos de velocidad para un desfase de: a) 0.0 π , b) 0.25 π c) 0.5 π , d) 0.75 π y e) 1.0 π .

En la figura 4.26 se presenta el campo de vectores para el desfaseamiento de π radianes. Todo el campo de flujo tiene un sentido negativo; ésto debido a que se ha utilizado un sistema de referencia situado en la onda. El efecto del movimiento de expansión-contracción desaparece junto con la recirculación.

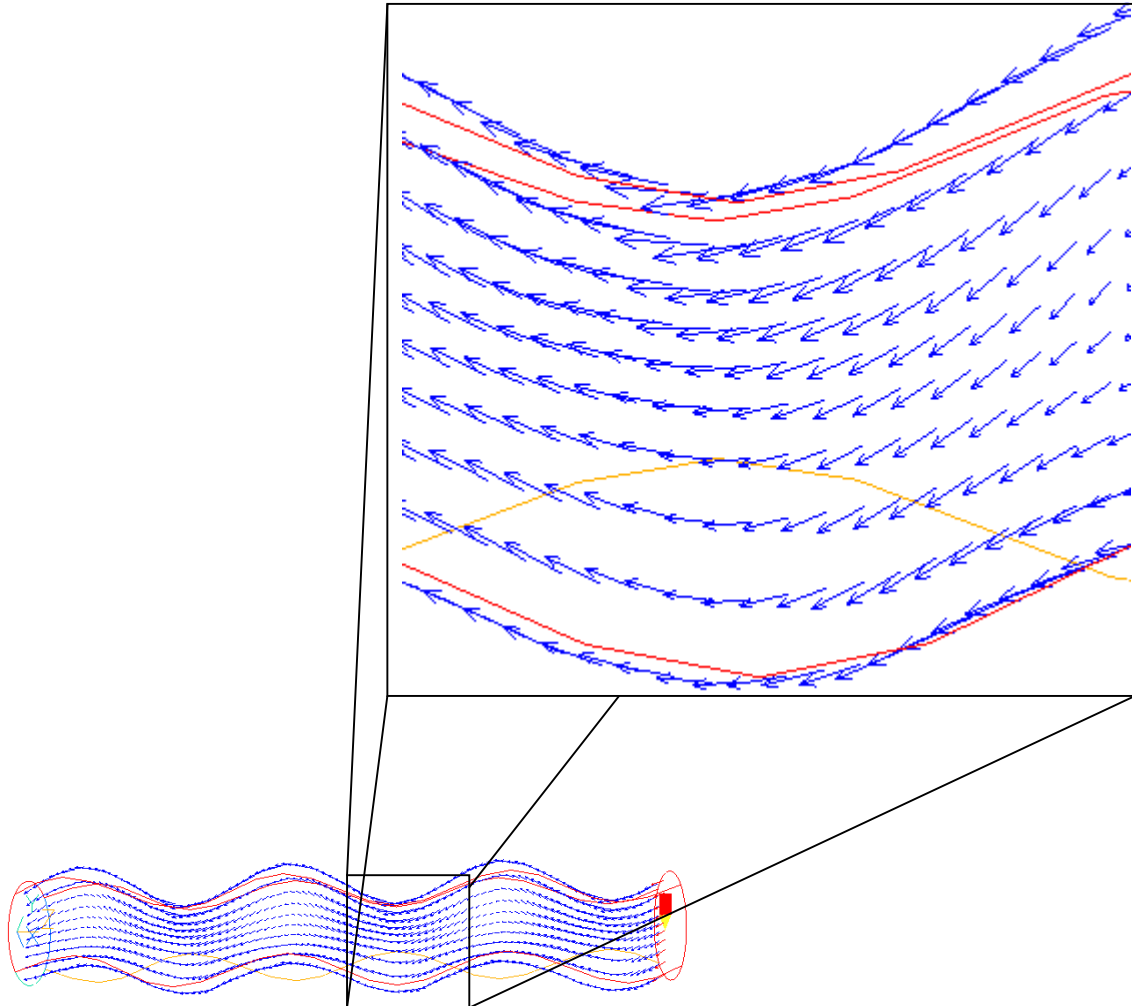
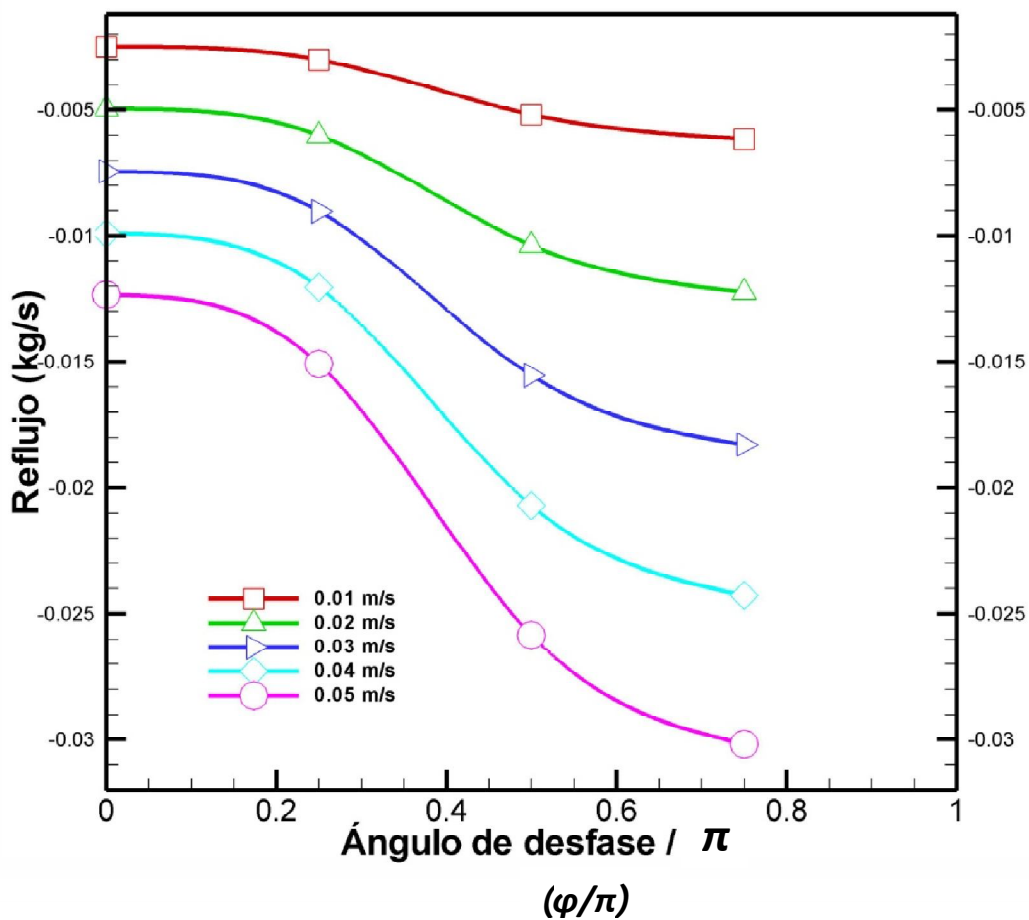


Figura 4.26 Perfiles de vectores de velocidad desfase 1.0 π .

Lo anteriormente expuesto concuerda con trabajos anteriores de simulaciones bidimensionales [13,14], en donde el fenómeno de la recirculación y la captura del bolo alimenticio desaparecen conforme $\varphi \rightarrow \pi$. Esto debido a que, al no estar coordinada la onda peristáltica los efectos de la contracción que impulsan el bolo alimenticio se contrarrestan.

En la figura 4.27 se presentan las predicciones para el reflujo a diferentes ángulos de desfase para los casos de velocidad de onda: 0.01, 0.02, 0.03, 0.04 y 0.05m/s, en donde se puede observar como el desfase produce que el flujo siga con mayor facilidad la dirección de la onda peristáltica en el sistema de referencia que se empleó y el efecto de la contracción tienda a perderse.



. Figura 4.27 Efecto del ángulo del desfase en el reflujo.

El flujo transportado que produce el fenómeno de contracción en los diferentes desfases se presenta en la figura 4.28. Se observa que el flujo transportado tiende a cero conforme el ángulo de desfase se incrementa, y la influencia de la velocidad en el flujo transportado pierde intensidad.

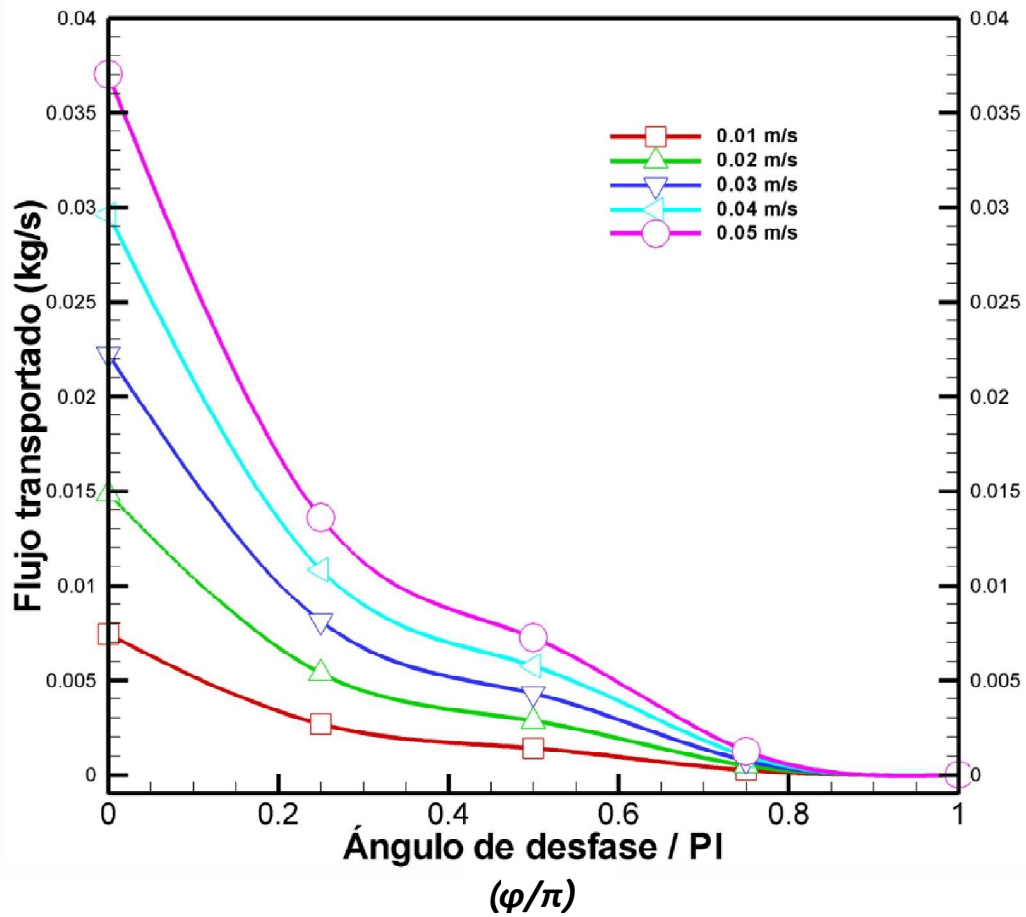


Figura 4.28 Efecto del desfase en el flujo transportado para diferentes velocidades de onda.

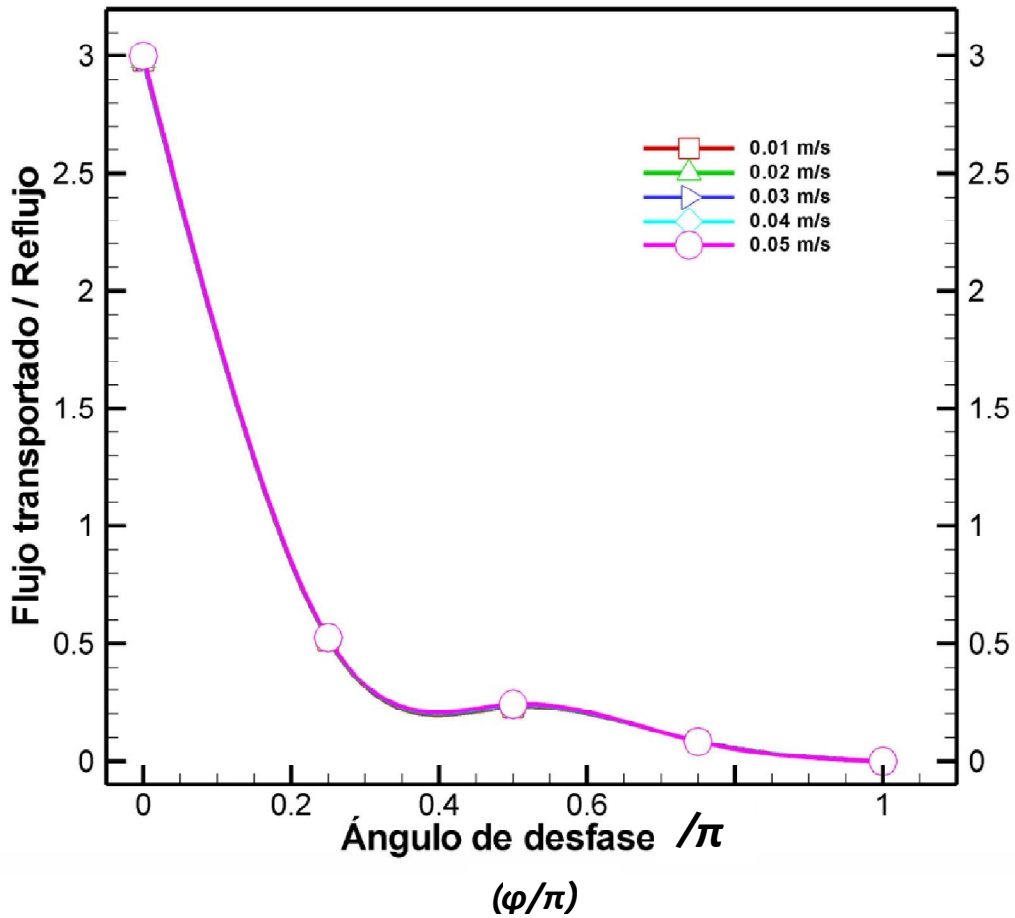


Fig 4.29 Efecto del desfase de las ondas peristálticas en la relación de flujos a diferentes velocidades de onda.

La figura 4.29 muestra la independencia entre la relación de flujos y la velocidad de la onda. El comportamiento de los flujos presenta una caída abrupta en el primer desfase y sigue decreciendo asintóticamente hacia cero, conforme el desfase tiende a π .

CONCLUSIÓN

En este trabajo se simuló de forma numérica el fenómeno de transporte del bolo alimenticio a través del esófago, estudiando el comportamiento del flujo dentro del mismo. El método de volúmenes finitos junto con el método de malla ajustada al cuerpo (BFC) fueron empleados para describir la geometría y para resolver las ecuaciones gobernantes del flujo: ecuación de continuidad y ecuación de cantidad de movimiento.

El flujo que se estudió fue delimitado por medio de una geometría tridimensional compleja con forma sinusoidal, utilizando el método de celdas ajustadas al cuerpo (BFC), lo anterior fue una de las principales aportaciones de este trabajo.

Al establecer condiciones de frontera en las paredes del sistema que simuló el movimiento peristáltico, los resultados presentaron dos fenómenos principales: cerca de las paredes se observó un flujo de carácter negativo debido al cambio de coordenadas empleado en las condiciones de frontera conocido como reflujo, y también se observaron zonas de recirculación repetitivas a largo del ducto que representó el sistema. Se asume que la generación de dicha zona de recirculación fue producida por el fenómeno de contracción-expansión impuesto en las paredes.

Cuatro parámetros fueron establecidos y variados para definir el comportamiento del flujo dentro del esófago: amplitud (b), longitud (λ), velocidad (c) y ángulo de desfase de onda (φ).

Al variar la longitud de onda en un rango de 0.05-0.15 m se encontró un comportamiento parabólico que describe la cantidad de reflujo generado en cada caso, fenómeno que tiende a linealizarse conforme se incrementa la velocidad de propagación de la onda peristáltica. Con lo que respecta al flujo transportado tiende a decrecer al aumentar la longitud de onda.

La amplitud de onda fue variada en un rango de 0.005- 0.0125 m; para el reflujo observamos que al incrementar la amplitud el reflujo tiende a cero, esto es cuando el área de contracción es mínima. Los resultados indican que la amplitud es el factor que produce mayor sensibilidad en el comportamiento del reflujo, ya que el caso de mayor amplitud (0.0125m) representó un 2% del reflujo, cuando se compara con el caso de menor amplitud (0.005m) lo que representa una gran variación. Este caso (0.0125m) es de gran interés ya que al reducir el área de contracción de forma drástica se generan cambios muy significativos en el comportamiento del flujo.

Para el caso de la variación del ángulo de desfase se encontraron los resultado previstos en simulaciones bidimensionales [13, 14], en donde el flujo transportando tiende a desaparecer conforme el ángulo de desfase entre las ondas tiende a π .

Las condiciones empleadas en este estudio asumieron un fluido newtoniano, por lo que la siguiente etapa será estudiar el comportamiento de un fluido no newtoniano, ya que este tipo de fluido coincide más con el comportamiento del bolo alimenticio. Así mismo, sería óptimo comparar los resultados con un estudio experimental, pero dada la dificultad de emplear un instrumento de medición intrusivo en el esófago, esto será un gran reto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] **MURGUÍA, D.**(2006), *Esofagología clínica*, Ed nieto editores.
- [2] <http://www.elpediatraencasa.com/2009/08/el-lactante-vomitadorregurgitador-i.html>
- [3] http://www.cancerologiaintegraldelsur.com.mx/827271_Cancer-de-Esofago.html
- [4] <http://www.profesorenlinea.cl/Ciencias/Esofago.html>
- [5] <http://www.directindustry.es/prod/gardner-denver-thomas/bombas-peristalticas-compactas-7127-448103.html>
- [6] **MUTHU P.** (2000), *On the influence of wall properties in the peristaltic motion of micropolar fluid*, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Kanpur.
- [7] **YANG W.** (2007), *Finite element simulation of food transport through the esophageal body*, School of Civil and Environmental Engineering, Nanyang Technological University, Singapore.
- [8] **NAKANISHI S.** (1982), *Numerical study on peristaltic flow of viscous fluid*, Hiroshima Institute of Technology, Miyake, Hiroshima.
- [9] **RATHOD V.P.** (2011), *A study of peristalsis in cylindrical tube through porous medium*, Department of Studies and Research in Mathematics, Gulbarga University, Gulbarga, Karanataka, India.
- [10] **SALINAS, Carmen.** (2004), *El hombre y la Máquina*.
- [11] **GARCÍA, Marcelo H.** (1996), *Hidrodinámica Ambiental*, Universidad Nacional del litoral Argentina.
- [12] **FUEYO N.** (1996), *Mecánica de fluidos computacional para ingeniería*, Área de Mecánica de Fluidos Centro Politécnico Superior, Universidad de Zaragoza, España.
- [13] **MISHRA M.** (2003), *Peristaltic Transport of a Newtonian Fluid in a Asymmetric Channel*, Mathematik und Physik ZAMP, Birkhäuser Verlag, Basel.
- [14] **Eytan O.** (1999), *Analysis of Intra-Uterine Fluid Motion Induced by Uterine Contractions*, Department of Biomedical Engineering, Israel.
- [15] **Nadeem S.** (2012), *Peristaltic Flow of a Carreau Fluid in a Rectangular Duct*, Department of Mathematics, Pakistan.

[16] **Shapiro A.** (1969), *Peristaltic pumping with long wave-lengths at low Reynolds number*