Facultad de Estudios Superiores
Acatlán

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PROBLEMAS ELEMENTALES DE LA TEORIA DE GRAFOS - UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL CCH

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

P R E S E N T A

WOLFGANG ROLF FRITZLER HAPPACH

TUTOR: MTRO. MIGUEL MERCADO MARTÍNEZ

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

NAUCALPAN DE JUÁREZ, AGOSTO 2012

ÍNDICE

RESUMEN

Grafos, compuestos por vértices y sus conexiones, llamadas aristas, forman parte de la matemática discreta que estudia objetos matemáticos contables y que constituye un contrapeso a los temas tradicionales del bachillerato, relacionados con el concepto de la continuidad (números reales, funciones, cálculo diferencial e integral). La teoría de los grafos es intuitiva e ilustrativa y puede aplicarse en la solución de problemas del entorno real del estudiante.

El objetivo del trabajo fue describir y fundamentar una propuesta didáctica de 12 clases, de dos horas cada una, que introduce a la teoría de los grafos y se dirige al nivel bachillerato, concretamente al Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Experiencias previas del autor con la enseñanza de este tema mostraron su potencial didáctico que se basa en la sencillez de los problemas y sus soluciones, la aplicación de métodos heurísticos de solución y el desarrollo de diferentes tipos de demostraciones matemáticas, cuyo aprendizaje se pretende extender más allá de los propios contenidos de la teoría de los grafos. La secuencia propuesta de actividades y problemas lleva a la definición de los conceptos básicos y a la demostración de los teoremas elementales de la teoría de los grafos.

La propuesta didáctica responde a los principios didáctico-metodológicos descritos en el preámbulo del plan de estudios del CCH y pretende lograr los objetivos generales expuestos en el plan de la asignatura de matemáticas, sobre todo aquellos relacionados con el enfoque constructivista de la resolución de problemas y el aprendizaje activo y autónomo de los estudiantes.

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se fundamenta y describe una propuesta didáctica para la enseñanza de la teoría de los grafos en el nivel bachillerato. El autor desarrolla esta propuesta a base de varias experiencias aisladas de la enseñanza de este tema, las cuales lo convencieron del potencial didáctico de los problemas relacionados con el análisis y la aplicación de grafos, compuestos de vértices y sus uniones, llamadas aristas. El proceso de la solución de los problemas propuestos lleva a la definición de los conceptos importantes, así como de la demostración de los teoremas elementales de la teoría de los grafos.

La propuesta didáctica está dirigida al nivel bachillerato, concretamente al Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). La relación de la propuesta con el plan de estudios del CCH y la ubicación de la teoría de los grafos dentro de la matemática discreta, que se presenta como un complemento de la matemática continua (que representa los contenidos tradicionales de la asignatura de matemáticas), se exponen en el capítulo introductorio. Esta característica permite a los estudiantes, sobre todo aquellos con experiencias previas negativas en la asignatura de matemáticas, iniciar "desde cero"; es decir, la teoría de los grafos elemental no requiere de conocimientos previos de los contenidos curriculares. El potencial didáctico de este tema está basado principalmente en la sencillez de sus problemas y soluciones, en la posible aplicación de varios métodos heurísticos de resolución y en la presentación de diferentes tipos de demostraciones matemáticas, cuyo tratamiento permite un aprendizaje que se extiende más allá de los propios contenidos de la propuesta didáctica.

La metodología de enseñanza se basa en la mayoría de los criterios descritos en el plan general de estudios del CCH, aparte de que intenta lograr muchos objetivos y desarrollar varias competencias generales mencionados para la asignatura de matemáticas.

La fundamentación didáctico-metodológica de la propuesta se desarrolla en el capítulo del marco teórico.

En varios lugares del presente texto, se hace referencia al anexo, en el cual se presentan las definiciones básicas, los teoremas y sus demostraciones, siendo todos ellos objetos de esta propuesta didáctica. En el mismo anexo, se agregan cuatro hojas de trabajo que contienen actividades de resolución de problemas para los estudiantes y que guían el desarrollo de las clases; se incluyen las soluciones de todos los problemas expuestos. Finalmente, se presenta la propuesta de un examen final (incluyendo sus soluciones) para evaluar el aprendizaje de los estudiantes de este curso con una duración de 12 clases de dos horas cada una.

Todas las citas, cuyos originales están en inglés y en alemán, son traducidas por el autor de este trabajo.

1.1 La filosofía educativa del plan de estudios del CCH

El día 12 de abril de 1971, se abrieron las puertas de los primeros tres planteles del CCH de la UNAM para iniciar un proyecto de enseñanza innovador en México que tuvo la finalidad de dar respuesta a una creciente demanda educativa en el nivel medio superior y de transformar los métodos tradicionales de enseñanza con una nueva perspectiva curricular (CCH a). La filosofía educativa de este proyecto se orientó – y sigue orientándose – en tres principios fundamentales: que los estudiantes aprendan a *aprender*, a *hacer* y a *ser*.

El primero de estos objetivos generales se refiere a la capacidad del estudiante de adquirir nuevos conocimientos por su propia cuenta; el segundo implica el desarrollo de las habilidades necesarias para poner en práctica lo aprendido durante los estudios; y el tercero se enfoca al desarrollo de valores humanos, cívicos y éticos que dirigen y orientan la conducta y la visión del mundo del estudiante (CCH b). De estos objetivos generales se derivan otros objetivos que, en su conjunto, forman el marco teórico del modelo educativo actual del CCH y determinan su metodología de enseñanza. En el trabajo presente, se describe una propuesta didáctica sobre un tema específico de la asignatura de matemáticas, cuya justificación se basa, precisamente, en este marco teórico de la enseñanza del Colegio.

El plan de estudios, desde entonces hasta la actualidad, se divide en cuatro áreas de conocimiento: ciencias experimentales, área histórico-social, talleres de lenguaje y comunicación, así como matemáticas. Esta división reconoce la importancia de las matemáticas como un enfoque esencial para la comprensión del mundo y como enlace entre las demás áreas. La relación con las otras áreas de conocimiento se fundamenta principalmente en la interpretación de las matemáticas como un lenguaje universal que permite el análisis preciso y la solución lógica de problemas propios y de otras ciencias, así como la eficiencia de la comunicación en el ámbito científico y de la vida diaria (CCH c). La elaboración de la propuesta didáctica aquí presentada tiene que tomar en cuenta, aparte de los objetivos generales del modelo educativo, la fundamentación didáctica de la propia área de matemáticas a la cual pertenece.

El plan de estudios inicial del área de matemáticas estuvo vigente desde los inicios del CCH en 1971 hasta 1996, cuando se llevó a cabo una amplia reforma de sus contenidos. Este plan incluyó el tema de la teoría de los grafos como obligatorio, sobre todo por su aplicación en el área de la computación. Además, la inclusión de este tema en el currículum se relacionó con las ideas didácticas de la época de los años 60 y 70 del siglo pasado que favorecían la presentación “moderna” de las matemáticas.

En el curso de la reorganización educativa, este enfoque se centró en la formalización de las teorías matemáticas a partir de “la teoría de conjuntos, simbolismo moderno, erradicación de la geometría euclidiana, introducción de las estructuras algebraicas y de sistemas axiomatizados, algebrización de la trigonometría, etc. etc." (Ruiz Zúñiga, 1992, 11). Como la teoría de los grafos describe estructuras topológicas (mediante la relación entre vértices y aristas), sin considerar el lugar geométrico en el espacio, apoya el enfoque estructuralista de la nueva visión de la matemática: "la esencia de las matemáticas está en su abstracción y en la creación o ampliación de estructuras generales" (Ruiz Zúñiga, 1992, 13). Además, la cercanía de la teoría de los grafos a la cibernética y la utilización de computadoras fue otro argumento didáctico para su impartición en el CCH. Finalmente, las amplias posibilidades de aplicar grafos para la solución de problemas de diferentes áreas de la vida diaria y de la matemática misma, justificaban su enseñanza.

En la revisión del plan de estudios del año 1996, se reformó la estructura y el contenido de las matemáticas en todos los grados, dejando afuera los temas relacionados con la matemática discreta, porque el nuevo plan se concentró mucho más en los contenidos necesarios para estudios científicos posteriores en la enseñanza superior. Un argumento fundamental para buscar nuevos contenidos curriculares fue el fracaso de la reforma en los años 1970 y 1980. Erróneamente, se había promovido (Ruiz Zúñiga, 1992, 13)

> una visión de las matemáticas que las separa de la experiencia sensorial, las separa de las otras ciencias naturales; elimina el papel de la intuición empírica; erradica la aproximación heurística y aproximativa de la práctica matemática; y hace de las matemáticas un territorio puro, abstracto, elevado, eterno, absoluto e infalible, al que sólo los mejores espíritus pueden acceder.

Así, según la opinión de los diseñadores curriculares, la teoría de los grafos ya no jugó un papel preponderante, por lo que fue excluida del programa de estudios. Sin embargo, el objetivo principal de este trabajo es la proposición de retomar la teoría de los grafos como contenido curricular, justificándola precisamente con los argumentos mencionados anteriormente en relación con el fracaso de la “matemática moderna” en la escuela. En este sentido, hay que analizar la utilidad de la teoría de los grafos más allá de su propio contenido y basarla en su contribución al logro de objetivos generales (llamados, hoy en día, competencias) que reflejan la práctica del matemático y el desarrollo del conocimiento en esta materia.

El actual plan de estudios del CCH presenta cuatro cursos semestrales de matemáticas: I: Ecuaciones y álgebra; II: Geometría Euclidiana; III: Geometría analítica; IV: Funciones polinominales y trascendentales (CCH f). En el curso I, la última unidad tiene como contenido las ecuaciones cuadráticas, mientras que la primera unidad del siguiente curso II tematiza las funciones cuadráticas. Estas dos unidades pueden juntarse al final del curso Matemáticas I, porque sería didácticamente adecuado relacionar inmediatamente las soluciones algebraicas de ecuaciones cuadráticas con los ceros de la gráfica correspondiente. Así, se podrían ganar las 15 horas planeadas de la primera unidad del curso II para presentar el contenido de la propuesta didáctica aquí presentada.

La teoría de los grafos, como se va a comprobar en el apartado del marco teórico, es un tema excelente para contribuir

> de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando el estudiante en un primer momento, identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, establece relaciones lógicas entre ellas, aún sin llegar necesariamente a un rigor axiomático propio de estudios más especializados (CCH e).

Igualmente, las actividades propuestas en este trabajo permiten “que el alumno explore, observe patrones de comportamiento, conjeture y comience a argumentar”; y por la sencillez de los conceptos básicos del grafo (vértice y arista) es posible introducir “al alumno al aspecto deductivo y a la comprensión del porqué de las demostraciones” (CCH e). De esta manera, la teoría de los grafos puede contribuir perfectamente al desarrollo de las competencias de los estudiantes, descritas en el plan actual de estudios (CCH e), y de las que se esperan lograr mediante el tema de la geometría euclidiana. La teoría de los grafos puede fungir, entonces, como una introducción excelente a los temas del curso de matemáticas II.

Con la propuesta presente, se pretende retomar el contenido anterior de la teoría de los grafos, pero ahora desde una perspectiva didáctica más amplia. Este tema permite el desarrollo de habilidades relacionadas con la resolución de problemas, el enfoque favorecido por el nuevo plan de estudios (CCH d), y la aplicación de una metodología de enseñanza basada en la construcción del conocimiento por parte del estudiante. "En cuanto a los métodos, hay que poner énfasis en los procedimientos de resolución de problemas, en las formas de razonamiento y argumentación, en la comunicación de resultados, en el establecimiento de conexiones y en el uso de diversas representaciones." (CCH d, 7) El trabajo presente se basa en la aplicación de la metodología propuesta en el plan de estudios actual.

Aparte de la correspondencia a las propuestas didáctico-metodológicas del plan de estudios del CCH, la teoría de los grafos tiene otras características importantes que muestran su potencial didáctico-metodológico. Su tratamiento no requiere de conocimientos matemáticas previos y, mucho menos, de los temas tradicionales del nivel educativo básico. Esto permite la participación activa de estudiantes "frustrados" por la enseñanza escolar previa; y la experiencia muestra que el porcentaje de estos estudiantes no es bajo. De la Peña & Barot (2002, 16), al analizar los rendimientos académicos en matemáticas en México, afirman: "En el nivel bachillerato, en 1998, la mitad de las materias reprobadas por estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM fueron materias de matemáticas.” Más adelante, los autores interpretan resultados de sus propias encuestas, realizadas en el Distrito Federal y la Ciudad Universitaria de la UNAM, de la siguiente manera: “Los resultados obtenidos en esta encuesta […] nos hacen pensar que, como suponíamos, tanto en la población general como en la población universitaria el nivel cultural es pobre y los conocimientos en matemáticas escasos.” (De la Peña & Barot, 2002, 33)

Un incremento de la motivación intrínseca favorece, muy probablemente, no solamente el logro de objetivos definidos por los contenidos matemáticos de este tema, sino también competencias de mayor jerarquía y generalidad, mencionadas en el plan de estudios del CCH y en la literatura didáctica sobre la educación matemática (por ejemplo: NCTM, 1989; 2000). Estos objetivos y competencias se analizarán más adelante en el apartado del marco teórico.

La teoría de los grafos se desarrolló históricamente a partir del análisis de problemas extramatemáticos, lo que muestra su potencial de aplicación. Esto es otro enfoque esencial del plan de estudios del CCH, ya que “es indiscutible que la Matemática constituye un elemento indispensable para comprender, estudiar, modelar y hacer predicciones sobre el entorno físico y social” (CCH d, 5). En el capítulo final del mismo documento, se resumen las capacidades y habilidades a desarrollar por el estudiante, entre las cuales se mencionan: “utilizar su conocimiento matemático en distintos contextos incluyendo su entorno habitual” y “usar las representaciones matemáticas pertinentes para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y biológicos, entre otros” (CCH d, 17). El enfoque de aplicación resalta un folleto (López de Medrano, 1973), redactado como material didáctico para la teoría de los grafos en los años iniciales del CCH y que menciona los siguientes ejemplos para el concepto de “grafo”: circuitos eléctricos, moléculas químicas, estructuras organizacionales y de operaciones y árboles genealógicos.

1.2 La teoría de los grafos como parte de la matemática discreta

La teoría de los grafos es una parte de la matemática discreta, entendida como el área que “trata de conjuntos finitos o contables y, por consiguiente, específicamente con números naturales” (Grenier, 2008, 1), constituyendo un contrapeso a la mayoría de los temas del currículum escolar que están relacionados con el concepto de la continuidad (geometría euclidiana, números reales, funciones, cálculo diferencial e integral); un concepto de difícil comprensión por su falta de “visibilidad” en el entorno real del estudiante, muy al contrario de la matemática discreta. Boyd (2002, 4) expresa esta ventaja didáctica claramente: “Muchos estudiantes tienen dificultades de comprender los conceptos abstractos que permean la matemática continua, sobre todo en matemáticas avanzadas y cursos de cálculo. La matemática discreta presenta temas que los estudiantes pueden comprender fácilmente.”

Patrick (2008, 1) aclara que las temáticas relacionadas con la matemática discreta se “olvidan” tradicionalmente en el currículum de secundaria y preparatoria porque esta rama de la matemática “no figura de manera destacada en la mayoría de los exámenes estatales de nivel medio o media superior, y porque tampoco es parte importante de los exámenes de admisión universitarios”, una afirmación hecha para la realidad de la escuela de los Estados Unidos, pero igualmente válida para la situación en México. Sin embargo, en el mismo artículo, el autor enuncia varias razones para justificar la inclusión de la matemática discreta en el currículum escolar: es la matemática de la computación, es principalmente una matemática del “mundo real”, enseña razonamiento matemático y técnicas de demostración y es simplemente “diversión”. Es interesante que el autor menciona, además, la utilización de muchos problemas de la matemática discreta en las competencias y olimpiadas matemáticas, lo que se puede interpretar como una prueba que los compositores creen que la solución de estos problemas muestre o refleje el nivel del pensamiento matemático de los estudiantes. Si ellos tienen razón, este tipo de problemas es ideal para el desarrollo de habilidades matemáticas esenciales.

Finalmente, la matemática discreta, y en especial la teoría de grafos, es un campo rico (desde el punto de vista didáctico) para aprender a construir, analizar y aplicar algoritmos, sobre todo por su relación con "lo contable". La "identificación de algoritmos y de relaciones entre algoritmos" (CCH d, 13) es uno de los "ejes metodológicos" fundamentales, descritos en el plan de estudios actual del CCH. También en los planes de estudio de Estados Unidos, se reconoce y destaca que "el desarrollo y análisis de algoritmos, a menudo, clarifican y precisan la comprensión de ideas matemáticas por parte de los estudiantes y ofrecen un contexto para crear razonamientos lógicos cuidadosos" (NCTM, 1989, 178). En este marco, se proclama la importancia de la actividad autónoma de los estudiantes, relacionada fuertemente con el enfoque educativo del constructivismo (favorecido también por el plan de estudios del CCH), por ejemplo al ser estimulados "a desarrollar y analizar sus propios algoritmos, y no solamente ejecutando aquellos que se les han proporcionado" (NCTM, 1989, 178).

Ejemplos muy ilustrativos para la aplicación de algoritmos son la búsqueda de la ruta más corta entre dos estaciones del metro, la construcción de la red de autopistas más barata o la determinación del recorrido óptimo que pasa por varias ciudades exactamente una vez (el problema del "vendedor viajante", ampliamente discutido en Boyd, 2002).

A pesar de todo el potencial didáctico de la matemática discreta, no es una tarea fácil construir un programa adecuadamente secuenciado para la introducción del tema en el bachillerato. La propuesta didáctica aquí presentada no es la única posibilidad de planificar un curso sobre la teoría de los grafos, pero en cada caso debe ser el resultado de un análisis profundo de los problemas más adecuados para desarrollar en los estudiantes las habilidades matemáticas, porque solamente "buenos problemas permiten a los estudiantes cimentar y extender sus conocimientos y, cuando son seleccionados adecuadamente, pueden estimular el aprendizaje matemático." (NCTM, 2000, 52) Los problemas deben darles la oportunidad a los estudiantes de resolverlos por su propia cuenta, de "aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas", de "efectuar generalizaciones", "establecer conjeturas" y "utilizar diversas formas de razonamiento" (CCH d, 16-17). Al lograr estos objetivos, la propuesta didáctica se integraría sin fricciones al plan de estudios del CCH, al estar en completa concordancia con su filosofía educativa.

2 MARCO TEÓRICO

2.1 Una breve historia de la teoría de los grafos

En la ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado) confluyen los ríos del viejo y nuevo Pregel, dividiéndola en cuatro áreas que, en el siglo XVIII, estaban conectadas mediante siete puentes (véase fig. 1 y 2a). Mientras paseaban por la ciudad, algunos ciudadanos – y no solamente los profesores de matemáticas de la universidad – podían haberse preguntado, si fuera posible encontrar un recorrido donde se pasaba por cada uno de los puentes una sola vez. Este problema se hizo famoso como el "Problema de los puentes de Königsberg".

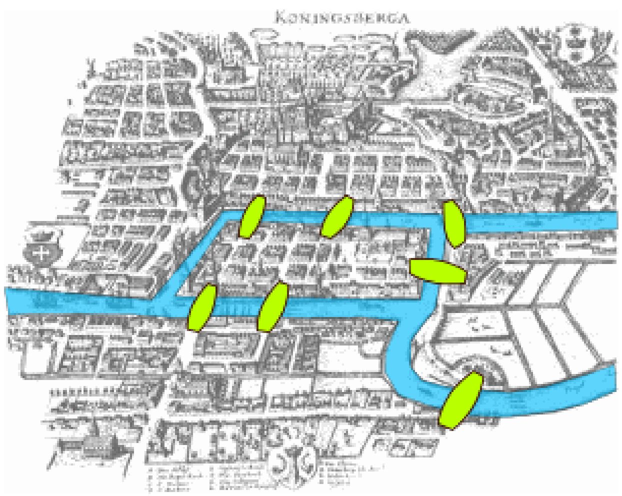


Fig. 1. *Königsberg en el siglo XVIII, con el nuevo y viejo Pregel y sus siete puentes.*

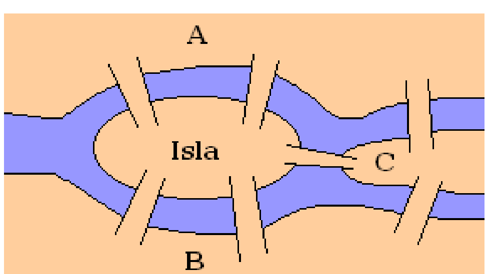


Fig. 2a. *Esquema de la división de Königsberg.*

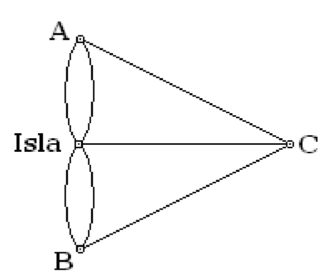


Fig. 2b. *Grafo: los puntos (vértices) representan las áreas, las líneas (aristas) los puentes.*

Este problema inspiró al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) a escribir, en 1736, el primer artículo sobre un tema de la teoría de los grafos. En este estudio, Euler demostró mediante una representación gráfica (véase el grafo de la fig. 2b) que era imposible encontrar tal recorrido. Al mismo tiempo, generalizó su solución y determinó las condiciones para recorrer un grafo arbitrario de tal manera que cada arista se utilizara exactamente una vez. Hoy en día, una sucesión de aristas adyacentes (que tienen un vértice en común) que cumple esta condición se llama “recorrido Euleriano”.

Pasaron 100 años hasta que los matemáticos se volvieran a dedicar a problemas que pueden representarse por grafos y cuyo análisis contribuyera al desarrollo de la teoría de grafos. En este tiempo, el problema de interés fue el de la coloración de mapas de países (el “Problema de los cuatro colores”): para distinguir los países se le da a cada uno un color de tal manera que países con fronteras comunes tengan colores diferentes. El problema consiste en la pregunta si es posible colorear cualquier mapa con no más de cuatro colores. A pesar de la sencillez del problema, su solución completa tardó hasta 1977 cuando se pudo confirmar el número máximo de cuatro colores, pero solamente con el considerable apoyo de una computadora. ¡Hasta hoy no se pudo formular una demostración sencilla que utilizaría sólo la lógica!

La discrepancia entre la sencillez de la pregunta y la complejidad de demostrar la respuesta motivaba a muchos matemáticos analizar el problema de los cuatro colores y sus fundamentos teóricos. La importancia de este problema para la teoría de los grafos se basaba en la gran variedad de enfoques para solucionarlo, lo que provocaba el desarrollo de nuevos métodos de solución, cuya aplicación a otros problemas similares permitía encontrar nuevas leyes acerca de la estructura de los grafos.

Aproximadamente en la misma época, el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) utilizó grafos para representar la estructura de circuitos eléctricos y, así, poder calcular de forma sencilla la corriente en diferentes lugares de un circuito eléctrico (“Leyes de Kirchhoff”). El matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895) se dedicó al conteo de todos los árboles con un número determinado de vértices para enumerar todos los posibles isómeros de carbohidratos saturados (publicó la solución completa en 1875). En 1859, Hamilton inventó un juego llamado “Viaje por el mundo”, que trataba de encontrar todos los posibles recorridos por las aristas de un dodecaedro que pasan por cada vértice exactamente una vez (véase Harary, 1969). Este tipo de recorridos cerrados se llama, hoy en día, recorrido Hamiltoniano.

Más allá de estas áreas de aplicación, se utilizó la teoría de los grafos principalmente en las matemáticas recreativas. En el siglo XX, recuperó su importancia dentro de las matemáticas puras cuando se analizaban grafos por sí mismos. Así, tardó hasta el año 1936 que el matemático húngaro Dénes König (1884-1944) publicó el primer libro de texto sobre la teoría de los grafos[1].

Con el desarrollo de la teoría de los grafos aumentó, simultáneamente, el número de áreas de aplicación. “Gran parte del interés actual en este tema se atribuye al hecho de que la teoría de los grafos – independientemente de que es una disciplina de mucha elegancia – es importante en muchas áreas como la electrotécnica o la lingüística, investigación de operaciones y cristalografía, teoría de la probabilidad y genética, así como la sociología, geografía y análisis numérico.” (Wilson, 1976, 58)

[1] König, D. (1936): *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Teoría de los grafos finitos e infinitos). Leipzig (Alemania): Akademische Verlagsgesellschaft.

Después de la Segunda Guerra Mundial principia la época de las computadoras. Con esto aparecen nuevos tipos de problemas que provocan también una reorientación dentro de la matemática. La matemática finita que se dedica, entre otros, al “conteo, construcción, existencia y optimización de figuras combinatorias” (Jeger, 1974, 11), juega un papel de cada vez mayor importancia. La teoría de los grafos, como parte de la matemática finita, es un tema que se discute desde los años 1960 en un creciente número de publicaciones didácticas, tanto libros como artículos de revistas relacionados con la enseñanza de la matemática para todos los niveles educativos.

La visión histórica de la teoría de los grafos tiene importancia para la escuela desde dos diferentes puntos de vista. Primero, se muestra su valor para la matemática actual, lo que indica que sus problemas formarían – al menos parcialmente – pronto parte de los contenidos del currículum escolar. Por otro lado, una enseñanza genética, que se orienta en “los procesos naturales del desarrollo del conocimiento acerca de la invención y aplicación de las matemáticas” (Wittmann, 1974a, 106), debe reflejar los enfoques más importantes de la evolución histórica de la matemática. El desarrollo de la teoría de los grafos es un ejemplo con el cual se puede ilustrar el proceso común de la construcción del conocimiento matemática. Sachs (1970, 194) lo describe, en relación con el problema de los cuatro colores, de esta manera: “estudios, que primero se dirigen a objetivos específicos, presentan resultados que tienen importancia por sí mismos, se relacionan con otros problemas etc., hasta que se construyera un edificio propio.” La enseñanza genética tiene el propósito de permitir que los estudiantes revivan y reconstruyan este proceso “a pequeña escala”; solamente así, ellos pueden valorar el conocimiento matemático como condición previa para el desarrollo de una motivación intrínseca para esta materia escolar.

2.2 La ubicación de la teoría de los grafos en las matemáticas

No solamente por su carácter aplicativo dentro y fuera de la propia matemática, la teoría de los grafos ganó con el tiempo su lugar científico. Es considerada como parte tanto de la topología como de la combinatoria. En la teoría de los grafos, se estudian los problemas de la combinatoria acerca de la existencia, el número, la enumeración y la optimización de ciertos objetos, igualmente como la pregunta sobre las invariantes de transformaciones topológicas.

Cualquier grafo se puede interpretar como una relación binaria. Esto explica la cercanía de la teoría de los grafos a la teoría de las relaciones, donde ésta se dedica a preguntas relacionadas con transformaciones y aquella más con aspectos combinatorios. La teoría de los grafos moderna permite la aplicación de métodos algebraicos al relacionar un grafo con una matriz que refleja su estructura de manera inequívoca. Finalmente, los grafos son medios de apoyo excelentes para la representación de estructuras complejas tomadas de diferentes áreas matemáticas, como por ejemplo, la teoría de los grupos, la probabilidad, la teoría de conjuntos y la informática.

Analizando las relaciones entre la teoría de grafos y otras áreas matemáticas de manera superficial, se podría llegar a la opinión que no tenga una importancia propia, pero: "La fuerza aplicativa de la teoría de grafos se basa en la definición del grafo. […] Las pocas condiciones que debe cumplir una estructura para llamarse grafo y la amplia generalidad de las transformaciones incidenciales permiten encontrar una gran cantidad de estructuras matemáticas y extramatemáticas que pueden interpretarse como grafos." (Bigalke, 1974, 189)

Otro indicador de la importancia de la teoría de los grafos dentro de las matemáticas es el desarrollo de un propio lenguaje y de conceptos que se basan en la intuición. Esto permite estudiar y comprender más profundamente las relaciones con otras áreas matemáticas en un nivel elemental. Este quehacer diario del matemático puede, así, representarse también en la escuela mediante el análisis de las características y de las problemáticas propias que diferencian una y otra teoría. “Es importante encontrar las relaciones entre diferentes áreas: para entender completamente un fenómeno, frecuentemente hay que observarlo desde diferentes puntos de vista” (Sachs, 1970, 190). Por eso, los contenidos matemáticos que ayudan establecer relaciones con otras áreas temáticas son indispensables. La teoría de grafos con sus amplias aplicaciones puede jugar este papel didáctico.

2.3 Objetivos generales del curso de teoría de los grafos

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) es la asociación más importante de los Estados Unidos que rige y estandariza la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos preuniversitarios, desde la primaria hasta el bachillerato. Regularmente, el NCTM edita libros en los que se describen y discuten los más recientes avances de la educación matemática de su país. También en México, los libros del NCTM son muy respetados, y muchos maestros se basan en ellos por la ausencia de publicaciones similares propias de nuestro país.

A finales de los años 80 del siglo pasado, el NCTM formuló nuevos objetivos de la enseñanza matemática que, según su opinión, deberían regir los planes de estudio y la metodología de la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 1989). Estos objetivos se consideran, hoy en día, todavía como los más representativos, por lo que forman parte explícita (expresados en los preámbulos de los planes de estudio) o implícita (utilizados y aplicados por los maestros y profesores) de la práctica educativa, tanto en Estados Unidos como en México.

Para la elaboración y orientación de la presente propuesta didáctica, se seleccionan aquellos de estos objetivos que parecen ser logrables mediante la enseñanza de la teoría de los grafos. Según los autores de los "*Estándares curriculares y evaluativos para la Matemática Escolar*" (NCTM, 1989, 176-179), la enseñanza de las matemáticas en el nivel bachillerato (grados 9 al 12 en Estados Unidos) debe lograr que los estudiantes

- valoren el papel que juegan las matemáticas en la vida diaria y en las diferentes ciencias naturales,
- desarrollen confianza en sus propias habilidades,
- sean capaces de resolver problemas no rutinarios,
- sean capaces de comunicarse entre sí y hacia los demás con el lenguaje matemático adecuado sobre contenidos, definiciones, teoremas, así como problemas y sus soluciones,
- razonen lógica y matemáticamente mediante el establecimiento de conjeturas y la formulación de demostraciones.

En el mismo libro, el NCTM (1989, 176) reconoce, en su "estándar 12" del nivel de bachillerato, la importancia de la matemática discreta para el logro de todos los objetivos mencionados:

> En los grados 9-12, el currículum matemático debe incluir tópicos de la matemática discreta para que todos los estudiantes puedan
> - representar situaciones problemáticas, utilizando estructuras discretas como grafos finitos, matrices, sucesiones y relaciones recurrentes,
> - representar y analizar grafos finitos, utilizando matrices,
> - desarrollar y analizar algoritmos,
> - resolver problemas de enumeración y probabilidad finita;
> y de tal manera que, además, los estudiantes que quieren entrar al bachillerato puedan

- representar y resolver problemas utilizando programación lineal y ecuaciones de diferencias,
- investigar situaciones problemáticas que surgen en relación con la validación computacional y la aplicación de algoritmos.

La proposición de considerar la matemática discreta como contenido de la enseñanza preuniversitaria no aboga por un propio curso completo, sino por integrar diferentes tópicos a lo largo del currículum escolar. La razón de este procedimiento es principalmente que los temas de la matemática discreta no son solamente importantes por "sus posibles aplicaciones en la ciencia computacional, sino también porque representan ideas matemáticas útiles que asumen una creciente importancia para todos los estudiantes" (NCTM, 1989, 176).

En lo siguiente, se exponen la utilidad y el valor de la propuesta didáctica en relación con cada uno de los objetivos generales arriba mencionados.

Valoración del papel de las matemáticas

Este objetivo se refiere a que los estudiantes comprendan la evolución de las matemáticas desde el punto de vista histórico, así como su papel en la sociedad y en las ciencias en general (NCTM, 1989). La teoría de los grafos es un ejemplo para ilustrar como una nueva teoría matemática se puede originar a partir de problemas de la vida diaria, incluso fácilmente entendibles por la población en general (por ejemplo, el problema de los puentes de Königsberg). De esta manera, una introducción a la teoría de los grafos ofrece la oportunidad de quitarle a la matemática el mito que sea una ciencia ya desarrollada y comprendida solamente por algunos especialistas. Este mito es una de las probables razones de frustración y rechazo de esta asignatura para una gran cantidad de estudiantes.

El amplio potencial aplicativo de la teoría de los grafos permite valorar su papel en la sociedad y, sobre todo, para otras ciencias. Ya se ha mencionado una cantidad de ejemplos donde se pueden aplicar grafos para representar y solucionar problemas específicos, tanto de la vida real como de las ciencias (computación, electrónica, química, biología etc.). Por eso, es sumamente importante presentar a los estudiantes varios ejemplos de estas aplicaciones de los grafos, dando énfasis en la utilidad para la comprensión y solución de los diferentes problemas. De preferencia, los estudiantes deben realizar la transferencia de los problemas reales al "lenguaje" de los grafos, así como su posterior resolución autónoma o guiada por el profesor. No es recomendable, desde el punto de vista didáctico, que el maestro solamente presente el proceso de traducción y solución, sino que el estudiante lo desarrolle por su propia cuenta. Esto permite que él elabore y aplique propias estrategias de solución y herramientas que le pueden servir en otros momentos y otras situaciones para resolver problemas similares. Para Freudenthal, un autor holandés reconocido internacionalmente por la comunidad de la educación matemática, es esencial que las aplicaciones no tengan soluciones esquemáticas, sino que se adapten a las necesidades de cada área de aplicación, como por ejemplo, "problemas combinatorios, de optimización, problemas lógicos y organizacionales – problemas para los cuales en la literatura no se encuentran recetas listas para usarse" (Freudenthal, 1973, 51) y que, frecuentemente, pueden ser representados mediante grafos. Por lo tanto, la selección adecuada de los problemas es crucial y debe corresponder, en cuanto a la dificultad tanto de traducción como de resolución, al nivel del grupo de estudiantes.

Autoconfianza en propias habilidades matemáticas

El estudiante debe desarrollar la confianza en su propia capacidad de pensar matemáticamente, así como de comprender y resolver problemas no rutinarios. Esta autoconfianza permite que el estudiante acepte el reto de enfrentar problemas, cuya solución no es previsible y, por eso, requiere de esfuerzos cognitivos extraordinarios aplicando heurísticas y estrategias específicas. Un estudiante sin autoconfianza se rinde rápidamente frente un problema difícil o complicado, e incluso puede abandonar un problema ya en la fase de comprensión.

El desarrollo de confianza depende principalmente de las experiencias previas en el manejo de problemas matemáticos; entre más problemas previos haya resuelto exitosamente, mayor es la probabilidad que tenga una autoconfianza bien desarrollada. Un estudiante de bachillerato con experiencias previas negativas presenta un bajo nivel de autoconfianza y autoestima, y se ve a sí mismo como uno de las personas que no tienen ni la capacidad ni la mente para las matemáticas. De esta manera, se desarrolla un círculo vicioso: el estudiante cree que no sabe matemáticas, no enfrenta problemas adecuadamente, no los puede resolver y, finalmente, cimenta su falta de autoconfianza. La teoría de los grafos puede ayudar a romper este círculo vicioso, porque el estudiante experimenta rápidamente que los problemas no requieren de conocimientos previos adquiridos en la asignatura (hay poca relación con los temas tradicionales), sino los puede resolver principalmente con el "sentido común".

Así, todos los estudiantes inician el nuevo tema "desde cero", homogenizando la capacidad de resolver los problemas en todo el grupo. Una selección adecuada de problemas, como la propuesta en este trabajo, permite que todos los estudiantes lleguen a resolverlos, obteniendo así experiencias positivas acerca de sus propias habilidades y aumentando, por consecuencia, su autoestima. Condición previa para este logro es que el profesor dé suficiente tiempo a todos los estudiantes para que experimenten con los problemas y verifiquen varias estrategias de solución. Ensayo y error es un método esencial en este proceso, pero requiere de tiempo. El profesor tiene que reconocer que, para el logro de este objetivo, es más importante darle tiempo al grupo de aprendizaje que avanzar en el temario. Es mejor si los estudiantes aumenten su autoconfianza que el profesor complete los contenidos previstos del curso.

Enfoque de la resolución de problemas

La resolución de problemas es, actualmente, el enfoque didáctico-metodológico más reconocido en el ámbito de la educación matemática. El número de profesores que piensan que el estudiante solamente tenga que recibir información y aplicarla, es afortunadamente cada vez menor; la convicción de que los estudiantes tienen que resolver problemas por su propia cuenta, tiene, hoy en día, muchos adeptos. Los planes de estudio en los diferentes países comprueben esta visión; no hay preámbulos que no den énfasis en el enfoque de la resolución de problemas.

Sin embargo, hay que reconocer que en la práctica, la selección de los problemas a resolver no es siempre la adecuada, porque es una tarea difícil y requiere, por parte del profesor, amplia experiencia didáctica y conocimiento profundo del nivel de sus estudiantes. Además, los problemas, para que vayan más allá de la pura aplicación de fórmulas, deben ser “no rutinarios” para los estudiantes. Es decir, para resolverlos el estudiante no puede “ver” la solución (o su proceso) de antemano, sino la tiene que buscar con diferentes métodos.

Por otro lado, un curso no debe contener solamente una secuencia “aleatoria” de problemas; ellos deben encadenarse mediante un “hilo negro” para que se aproveche el potencial didáctico de este enfoque metodológico. Freudenthal (1973, 96) afirma que el matemático, después de que resuelva un problema, “lo revisa desde todos los ángulos, reconsiderándolo desde muchos puntos de vista”. Solamente así, el análisis de un problema permite al estudiante adquirir la importante experiencia que “la matemática inicia cuando se generaliza un problema, comprendiéndolo con mayor profundidad en el marco de la teoría de información” (Freudenthal, 1973, 95). Por eso, es importante que el profesor organice el proceso de enseñanza-aprendizaje de tal manera que los estudiantes puedan experimentar el mismo proceso.

Una función didáctica fundamental del enfoque de resolución de problemas es el desarrollo del conocimiento matemático. Epp (1994, 257) afirma que “es ampliamente aceptado que la manera de pensar del matemático en su propio trabajo es claramente diferente del razonamiento deductivo elegante descrito en los textos matemáticos.” Ya hace veinte años, Freudenthal (1973, 118) mencionó que “la mayoría de la gente está de acuerdo con que no se debe imponer al estudiante ningún tema de enseñanza como un producto acabado. […] El proceso de aprendizaje tiene que incluir fases de descubrimiento guiado, o sea, de una invención no en sentido objetivo sino subjetivo, visto desde la perspectiva del estudiante.” En este sentido, la secuencia de los problemas seleccionados para un tema nuevo, como la teoría de los grafos, tiene que provocar el redescubrimiento de definiciones, teoremas y demostraciones por parte del estudiante. Este proceso no tiene la misma secuencia o estructura como la expuesta en las publicaciones matemáticas (incluyendo muchos libros de texto para el estudiante), donde se inicia con las definiciones, sino es lo que Freudenthal (1973, V) llama la *inversión didáctica*: “el camino hacia el resultado [el texto publicado] debe ser del orden invertido como se lo ha encontrado; específicamente, las definiciones centrales, las que fueron el toque final de la estructura, son puestos al inicio”. Eso significa que el proceso de enseñanza debe ser el inverso de la secuencia de un libro de texto tradicional; Freudenthal mismo menciona como ejemplos positivos de publicaciones, que describen y analizan la matemática como *actividad* y no como producto final, los libros de George Polya[2], un maestro de la heurística.

Comunicación en y sobre la matemática

Este objetivo se refiere a los dos aspectos de la comunicación en la enseñanza de la matemática: aprender a usar el lenguaje matemático y ser capaz de hablar sobre los contenidos y procedimientos de la matemática. Para lograr el primer aspecto es esencial que los estudiantes conozcan la simbología y los conceptos y sepan utilizarlos adecuadamente; en cuanto al segundo aspecto, los estudiantes deben ser capaces de describir y explicar procedimientos y soluciones de problemas (como reporte de un resultado matemático) a sus compañeros, así como expresar sus ideas al planificar la solución de un problema o justificar la utilidad al aplicar una determinada estrategia (como descripción de un proceso).

Ambos objetivos se pueden lograr solamente si el profesor permite, o mejor todavía, estimule la discusión entre los estudiantes en el salón de clase. Esto implica que el profesor no sancione la expresión de ideas erróneas y que los compañeros no se burlen del estudiante que comete un error. El análisis de un error, frecuentemente, impulsa un aprendizaje de mayor profundidad que la simple recepción de la información correcta, siempre y cuando se trate de entender y explicar las razones de haber cometido el error y

[2] *Como plantear y resolver problemas* (1965). México, D. F.: Trillas. *Mathematics and Plausible Reasoning* (2 vol., 1954). Princeton, NJ (USA): Princeton University Press.

que se lo corrija con argumentos lógicos. Hay que cambiar la visión generalizada que el aula de matemáticas es el lugar donde los resultados solamente pueden ser correctos o incorrectos – por lo que no puede haber discusiones u opiniones personales –, y que se deben evitar estos últimos. La opinión de que entre más errores cometan los estudiantes, peor sea el profesor, debe ser erradicada.

La modernización de la enseñanza de las matemáticas, entonces, implica la reorganización de la clase tradicional. Ya no es el profesor quien habla durante la mayor parte de la clase, sino son los estudiantes. Los maestros que "piensan que basta con 'explicar' bien y tener a los niños 'controlados y trabajando' para que el aula 'funcione' están en un error" (Alcalá Hernández, 2002, 158). Para lograr un aprendizaje autónomo, es necesario que los estudiantes tengan la libertad de desarrollar sus propias ideas y de discutirlas en un ámbito de respeto y de reflexión crítica. La teoría de los grafos es muy intuitiva y requiere de pocos conocimientos previos, así que cada estudiante, independientemente de sus calificaciones anteriores en matemáticas, puede participar activamente en las discusiones sobre los contenidos y problemas ofrecidos. De esta forma, los estudiantes desarrollarán el razonamiento si el maestro planifica

> clases en que se animan a los alumnos a exponer sus ideas para que sean debatidas; estos intercambios de ideas deberán ser receptivos, permitiendo a los estudiantes explicar y justificar lo que piensan, y aprender cómo detectar falacias y ser críticos ante los pensamientos propios y ajenos. En la clase de matemáticas, los alumnos deberían formular con frecuencia conjeturas sobre las relaciones de los objetos con que están trabajando, investigar dichas conjeturas y elaborar argumentaciones sobre la base de su labor (Crespo Crespo & Farfán, 2005, 293).

La propuesta didáctica aquí descrita parte de una secuencia de ejemplos que ilustran la efectividad representativa de los grafos y, sobre todo, que permiten al estudiante formar con el tiempo una definición apropiada del concepto de grafo. Este procedimiento es mucho más efectivo para el aprendizaje que la tradición de iniciar la introducción a un nuevo tema con las definiciones de los objetos a estudiar. Así, la propuesta didáctica presente permite que los estudiantes pueden experimentar "cómo establecer el significado de palabras, cómo evitar definiciones circulares y cómo construir afirmaciones lingüísticas para evitar malentendidos" (Freudenthal, 1973, 90). Este aprendizaje es mucho más valioso que el conocimiento específico sobre la teoría de los grafos, ya que es esencial para una comunicación interpersonal efectiva. Freudenthal (1973) se refiere a este tipo de aprendizajes con el concepto de la *disciplina mental*, la que la enseñanza de las matemáticas supuestamente desarrolla en los estudiantes más allá de los propios contenidos, y la que constituye, por tanto, una justificación de la inclusión de la matemática en el currículum. No todos los educadores están de acuerdo con esta afirmación, pero Freudenthal (1973, 92) expresa que es "posible y hasta probable que el lenguaje técnico de la matemática, si es adquirido de manera independiente y en un contexto multilateral, es una disciplina mental." La teoría de los grafos en el bachillerato permite, siempre y cuando sea enseñada de acuerdo con estas condiciones, que los aspectos comunicativos aprendidos (por ejemplo, razonamiento y explicación lógicos, expresión exacta e inequívoca) en la materia de las matemáticas puedan transferirse más allá del salón de clase.

La comunicación *en* la matemática está relacionada principalmente con la construcción y aplicación de conceptos. Este proceso es posible, según Castillo (2008, 177), solamente si el estudiante construye los conceptos "a través de la interacción que tiene con los objetos y con otros sujetos" y si "dichos objetos se presentan inmersos en un problema, no en un ejercicio".

La propuesta didáctica presente retoma estos aspectos comunicativos y comprueba que la teoría de los grafos es un contenido que permite, por sus pocos prerrequisitos y con las actividades y contenidos adecuadamente planificados, la participación activa de la gran mayoría de los estudiantes, lo que a su vez favorece el desarrollo de habilidades comunicativas, como las anteriormente descritas.

2.4 El razonamiento matemático como justificación principal la propuesta didáctica

La importancia del pensamiento y razonamiento matemáticos para la enseñanza escolar justifica un propio apartado sobre este tema, sobre todo, porque la propuesta didáctica sobre la introducción a la teoría de los grafos permite enfocar sus objetivos hacia el desarrollo del razonamiento en general y de la demostración matemática en específico.

En los últimos años, la demostración matemática, como contenido curricular, ha estado en la discusión didáctica. Hay principalmente dos razones por las cuales se da el debate sobre este tema en la educación matemática. La primera es la utilización cada vez más importante de la computadora en la clase; la segunda es la discusión sobre la necesidad de que el estudiante tenga que ejecutar y comprender demostraciones formales, basadas en la simbología y la formulación de axiomas y teoremas directamente derivados de éstas.

2.4.1 El papel de la computadora para la demostración matemática

La implementación de la computadora es útil para generar o verificar demostraciones cuando ellas requieren una tan gran cantidad de cálculos que, para el ser humano, son imposibles de realizar en su vida limitada. Por ejemplo, Horgan (1993, 101) menciona la solución del "*Party Problem*"[3], derivado de un trabajo de Frank P. Ramsey, el cual ha sido demostrado por Stanislaw P. Radziszowski (Australian National University, Canberra)

[3] ¿Cuál es el número mínimo de personas en una reunión para que, al menos *x*, se conozcan mutuamente o, al menos *y*, no se conozcan mutuamente? (véase Horgan, 1993, 101)

mediante un programa computacional que, según estimaciones del propio autor, “consumió un tiempo equivalente a 11 años de cálculos realizados por una computadora de escritorio estándar”. También la demostración de la conjetura de los “Cuatro Colores”[4], realizada por Kenneth Appel & Wolfgang Haken (Illinois University) en 1976, es un ejemplo interesante, ya que mezcla la demostración “convencional” con la computacional: los autores redujeron el problema al clasificar todos los mapas posibles en unos 2000 casos diferentes; posteriormente, todos éstos fueron coloreados por la computadora con 4 colores, consumiendo unas 1000 horas de cálculo.

Con esta cantidad de cálculos, uno se imagina que también la computadora podría cometer errores (finalmente, la computadora es programada por seres humanos), los cuales serían muy difícilmente identificables por una persona: “Ningún simple ser humano puede verificar estas llamadas demostraciones computacionales, solamente otras computadoras” (Horgan, 1993, 94). Este es el punto central por el cual no podemos constatar, desde el punto de vista filosófico, que estos procedimientos sean una demostración matemática, cuya función fundamental es establecer la verdad absoluta de algún teorema. Por lo tanto, este tipo de demostraciones no puede ser contenido curricular de la asignatura de matemáticas, porque los estudiantes no son capaces de realizar y analizarlas por su propia cuenta. Sin embargo, es importante mencionar este tipo de procedimientos como parte de una “cultura matemática”, que pone al estudiante al tanto sobre la realidad actual de las matemáticas.

Finalmente, a pesar de toda la discusión acerca de la utilización de la computadora no se debe perder de vista

[4] Cualquier mapa geográfico se puede colorear, con un máximo de cuatro colores, de tal manera que países con una frontera en común tengan colores diferentes (véase Horgan, 1993, 101).

> la importancia epistemológica de la demostración, que la hace merecedora de un lugar clave en la matemática y en su exposición, porque sigue siendo uno de sus rasgos fundamentales, porque es el método preferido de verificación y porque es un instrumento valioso para dar la credencial de matemática a todo lo que quiere llegar a formar parte de esta ciencia (Alcolea Banegas, 2002, 17).

Otro aspecto relacionado con la utilización de la computadora en la clase de matemáticas es la llamada *matemática experimental*, "en la cual los investigadores prueban sus ideas al representarlas gráficamente y al realizar cálculos con la computadora" (Horgan, 1993, 95). Un ejemplo es la determinación de superficies mínimas con un volumen dado, que se pueden encontrar mediante experimentos con burbujas de jabón. Recientemente, se está representando estos experimentos a través de complejos programas de cómputo (véase Horgan, 1993, 95). Resolver estos problemas para cuerpos complicados "a mano" es sumamente complejo, si no imposible. Los resultados pueden, posteriormente, declararse como óptimos mediante demostraciones más tradicionales.

Este procedimiento es interesante también desde el punto de vista de la educación matemática, al considerar programas de software de sencilla utilización que permiten la exploración dinámica de objetos elementales, como gráficas de funciones racionales o figuras geométricas. Así, los estudiantes de diferentes niveles escolares pueden, por su propia cuenta, encontrar inductivamente patrones y elaborar conjeturas que, finalmente, motivan una demostración deductiva y rigorosa. Al utilizar estas herramientas computacionales, los estudiantes pueden aprender la necesidad de demostrar algo que "parece" ser correcto para la cantidad limitada de casos estudiados mediante el programa de cómputo, pero que no puede ser revisado en todos los casos (véase, por ejemplo, los artículos de Mariotti, 2009; Fritzler Happach, 1997). En el caso de la teoría de los grafos, no se conoce ningún software de estas características que podría ser utilizado en clase, probablemente porque los problemas elementales son fáciles de resolver "a mano" y de demostrar mediante sencillos argumentos lógicos. Sin embargo, la computadora podría ayudar en la determinación de soluciones de problemas aplicativos que requieren la ejecución de un algoritmo específico. Este aspecto de la experimentación será explorado más adelante, en un sentido más amplio y con mayor profundidad.

La matemática discreta tiene su propio lugar en relación con la discusión sobre la demostración por computadora, porque trata con objetos contables, lo que implica que la computadora puede, generalmente, realizar la verificación de todos los casos posibles sin requerir una demostración lógica y generalizable. El estudiante podría argumentar que la posibilidad de examinar todos los casos provoque que la demostración ya no sea necesaria – la computadora puede contribuir suficiente evidencia sobre la verificación de un teorema (por ejemplo, el problema de la coloración de mapas con cuatro colores). Aquí es donde el profesor tendrá que proporcionar el análisis de ejemplos que comprueban que, a veces, un teorema tiene verificaciones hasta un número inimaginable grande de casos, pero sin embargo, al encontrar un contraejemplo (aunque sea muy remoto) se nulifica el teorema (véase el ejemplo en: De Villiers, 2009, 211). Además, es aquí donde hay que enseñar que la utilidad didáctica de la demostración no está en revisar todos los casos posibles, sino en su contribución a la comprensión del *por qué* un teorema sea cierto o no. Para el estudiante "promedio" es realmente irrelevante si una conjetura tenga un contraejemplo fuera del rango "normal" de verificación de casos (por ejemplo, $n > 1000$), pero sí es importante que comprenda las razones de la veracidad (o no) de la conjetura.

La teoría de los grafos puede ser una herramienta muy interesante para representar estos aspectos didácticos, porque ofrece una gran cantidad de problemas, cuya demostración con argumentos lógicos permite la comprensión del teorema correspondiente (por ejemplo, recorridos Eulerianos) y de otros problemas que no tienen una solución sencilla y comprensible, aunque sea un problema aparentemente de la misma dificultad (por ejemplo, circuitos Hamiltonianos). Para el último ejemplo, es importante encontrar en la práctica un algoritmo que construya uno de los circuitos buscados, es decir, que resuelve cualquier problema concreto (dentro del rango del número de vértices y aristas razonable y practicable), aunque no se entienda por qué un grafo dado tenga una solución.

Desde el punto de vista didáctico, la presentación y análisis de problemas que no tengan (hasta ahora) una demostración comprensible, pero sí un contraejemplo fuera del rango "práctico", es bastante dudosa. El estudiante "promedio" tiene que tener la posibilidad de comprender la solución de los problemas o de resolverlos dentro de un contexto de aplicación práctica. Los ejemplos mencionados en De Villiers (2009, 211) son interesantes como conocimiento cultural, pero no son útiles como contenido curricular de la matemática, porque están fuera del alcance razonable del estudiante.

2.4.2 La demostración formal y la enseñanza de la matemática

Una demostración formal puede definirse, según la generalmente aceptada visión Euclidiana, como "secuencia finita de fórmulas de algún sistema dado, donde cada fórmula de la secuencia es o bien un axioma del sistema o bien una fórmula derivada mediante una regla del sistema de algunas de las fórmulas precedentes" (Lakatos, 1981, 93). La matemática es la única ciencia en la cual las demostraciones formales se basan en axiomas que no requieren tener un significado, y mucho menos relacionado con el "mundo real". Es decir, una demostración será aceptada como tal cuando la secuencia de las fórmulas se basa en las reglas socialmente aceptadas de la lógica.

Por otro lado, y atendiendo al segundo aspecto de la discusión sobre la demostración como contenido curricular, la demostración formal puede abstraerse completamente de la realidad, lo que contradiría el postulado didáctico de la aplicabilidad de la matemática, como lo constata, por ejemplo, el plan de estudios del CCH de la UNAM. "La aplicación de la demostración formal en el ámbito escolar está actualmente cuestionada, dadas las dificultades que comporta para los estudiantes, de acuerdo con diferentes investigaciones desarrolladas en las últimas décadas." (Martínez Recio, 2002, 30) Estas dificultades se relacionan con la capacidad deficiente de muchos estudiantes de desarrollar y anotar correctamente una demostración formal. Por otro lado, también son muchos los estudiantes que aceptarían un argumento empírico o inductivo como demostración formal, lo que implica que ellos están considerando la matemática como una ciencia empírica. Por eso, "parece conveniente revisar el carácter formal atribuido a la demostración matemática, pero no sólo en el ámbito educativo, sino también en el matemático propiamente dicho" (Martínez Recio, 2002, 30).

Hay una gran cantidad de autores en el ámbito de la educación matemática que se han ocupado de este problema, tanto desde el punto de vista teórico como práctico en cuanto a la enseñanza. El consenso entre ellos es que la importancia de la demostración matemática va más allá del establecimiento de verdades. Hanna & Barbeau (2009, 86) describen la visión de Rav (1999)[5] de la siguiente manera: "una demostración es valiosa no solamente porque demuestra un resultado, sino también porque puede presentar nuevos métodos, herramientas, estrategias y conceptos de una aplicabilidad más amplia en la matemática y que abren nuevas direcciones matemáticas." Por eso, Rav define un tipo de demostración que llama "conceptual" y lo distingue de la demostración formal, llamada por él "derivación", y que coincide principalmente con la definición de Lakatos (1981) y citada al inicio de este apartado (véase p. 32). La demostración conceptual consiste en "un

[5] Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Matematica, 7* (1), 5-41.

argumento rigoroso aceptable para los matemáticos, pero el cual apela al significado de los conceptos y fórmulas utilizadas". Esto significa que "los matemáticos entenderían completamente su estructura global y podrían verificar que cada uno de sus pasos es correcto" (Hanna & Barbeau, 2009, 86). De esta manera, las demostraciones se convierten en "portadoras de conocimiento matemático", lo que es, según Rav, el argumento didáctico fundamental para mantener demostraciones como contenido de la enseñanza matemática.

También Imre Lakatos (1922-1974), un reconocido matemático y filósofo de la ciencia, trata de reconceptualizar las pruebas o demostraciones matemáticas, porque está convencido que las demostraciones formales no son las únicas importantes para el matemático. Las divide en las tres categorías de "pre-formales", "formales" y "post-formales" (Lakatos, 1981, 91), de los cuales solamente las dos primeras son de interés para la enseñanza de la matemática en el nivel preuniversitario. La segunda categoría implica, en concordancia con los otros autores citados, un sistema de axiomas y de reglas de deducción. Una demostración o prueba formal "es absolutamente fiable; [pero] es una pena que no sea totalmente seguro […] acerca de qué es fiable dicha prueba" (Lakatos, 1981, 102). Se considera una prueba pre-formal como un nivel anterior o más bajo que la formal, porque no se parte de axiomas, sino de la intuición y concepción del mundo real. "No hay postulados, ni una lógica subyacente bien definida", sino lo que se hace es "*mostrar intuitivamente* que el teorema es verdadero" (Lakatos, 1981, 96; lo resaltado coincide con el original). Cualquier teoría elaborado de manera pre-formal puede ser axiomatizada posteriormente, pero con la desventaja que "no tenemos ninguna garantía de que nuestro sistema formal contenga el material completo, empírico o cuasi-empírico, en el que realmente estamos interesados y del que nos ocupamos en la teoría informal" (Lakatos, 1981, 98-99). Este proceso de abstracción constituye el problema psicológico del estudiante, que provoca que los profesores del nivel medio superior argumentan que “los estudiantes ya no consideran demostraciones tradicionales axiomáticas como tan convincentes como, digamos, argumentos visuales” (Horgan, 1993, 103).

Otros autores han retomado la concepción de Lakatos para estudiar, con mayor profundidad didáctica, las razones de incluir (o no) las demostraciones formales en el currículum matemático. “Junto al pensamiento estrictamente deductivo, se resalta también la necesidad de potenciar otros modos validativos de tipo empírico-inductivo, la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, los procesos de generalización, etc.” (Martínez Recio, 2002, 31). Hanna & Barbeau (2009, 89) mencionan a Lucast (2003)[6] quien afirma que “la demostración es valiosa para el currículum escolar porque es un instrumento importante en el proceso cognitivo que se requiere para la resolución exitosa de problemas”; en este sentido, Lucast sostiene que “la demostración y la resolución de problemas son prácticamente el mismo proceso, que ambos llevan a la ‘comprensión’, y cuyo énfasis está en la modelación y justificación de la solución de problemas”. Los problemas fundamentales a reflexionar desde el punto de vista didáctico son que la demostración formal, generalmente, no mejora la comprensión del teorema y oculta el camino de cómo se llegó al teorema demostrado. Por eso, la utilidad didáctica de la demostración debe ser “la de aprender a razonar en matemáticas”, lo que implica resolver problemas y generalizar proposiciones y lo que, finalmente, “ayuda a los estudiantes a construir un edificio matemático inteligente, lógico y no sólo funcional” (Martínez Recio, 2002, 38).

[6] Lucast, E. (2003). *Proof as a method: A new case for proof in mathematics curricula*. Tesis no publicada. Pittsburg, PA (USA): Carnegie Mellon University. (p. 1)

Muchos teóricos de la didáctica de la enseñanza matemática coinciden que la demostración debe ser parte del currículum escolar; las diferencias se encuentran en la forma de tratar este tema. La mayoría de los autores reconoce la importancia de la demostración formal, pero no como la única manera de establecer la veracidad de una afirmación. Aumentan las propuestas de manejar más los aspectos informales de la demostración. En este contexto es importante que el enfoque de la demostración "es más que un método formal para certificar un resultado, incrementa las exigencias para los maestros e implica un mayor compromiso de los estudiantes" (Hanna & Barbeau, 2009, 98). Pero precisamente por esta afirmación, el enfoque se relaciona directamente con el propósito del papel activo del estudiante en cualquiera de los niveles educativos. Los objetivos generales de los preámbulos de los planes de estudio actuales, por ejemplo del CCH, mencionan la necesidad de que el estudiante construya su conocimiento y desarrolle sus habilidades mediante la actividad autónoma. Este se refiere tanto al principio de "aprender a aprender", como al enfoque metodológico de la "resolución de problemas". Hanna & Barbeau (2009, 98) lo expresan claramente de la siguiente manera:

> La enseñanza de la demostración también tiene el potencial de transmitir a los estudiantes otras partes importantes del conocimiento matemático y de presentarles una imagen más amplia de la naturaleza de las matemáticas. Al resaltar estos aspectos de la demostración, cuyo valor a veces no se aprecia, les da a los educadores una razón adicional para mantener la demostración en el currículum matemático.

Es aquí, donde los contenidos relacionados con la demostración informal, definida ya anteriormente por Lakatos (1981) como "pre-formal", se relacionan con el desarrollo de las diferentes facetas del razonamiento matemático. Por ejemplo, el pensamiento inductivo parte de observaciones sistemáticas que, al identificar regularidades y patrones, permiten formular conjeturas y generalizaciones que van más allá de los casos específicos estudiados. “La observación de esos patrones da la posibilidad de preguntarse si son accidentales o si hay razones para que aparezcan. Surgen así conjeturas que deben ser puestas a prueba y que originan demostraciones” (Crespo Crespo & Farfán, 2005, 291). La inseguridad sobre si las regularidades observadas son válidas para todos los casos, motiva demostraciones informales que convenzan mediante argumentos lógicos y comprensibles para todos los estudiantes. Es importante que el estudiante vea la necesidad de demostrar algo a partir de su propia actividad y no porque el maestro se lo indica. Mientras no se siente esta necesidad, el maestro debe evitar la obligación de la demostración. Es su tarea (no fácil de cumplir) proporcionar problemas bien seleccionados que provocan la inseguridad del estudiante acerca de sus propias conjeturas. Para lograr esto, es importante evitar un ambiente artificial en el salón: “La escuela tiene como uno de sus desafíos actuales identificar y comprender la presencia de formas de argumentaciones que los alumnos construyen fuera de ella y que penetran en las aulas” (Crespo Crespo, Farfán & Lezama, 2009, 65). Solamente así, se facilita el proceso de que los estudiantes interioricen el razonamiento matemático y lleguen a aceptar la asignatura de matemáticas como cualquier otra materia.

Para lograr esto, también es importante presentar la matemática de manera dinámica, es decir, proveyendo a los estudiantes “una idea sobre cómo nuevos resultados pueden ser descubiertos o inventados” (De Villiers, 2009, 205). Hay que evitar una visión estática y rutinaria de la matemática, dando la impresión de un sistema hecho, basado en deducciones que representan una verdad absoluta y no modificable. Al contrario, por ejemplo De Villiers (2009, 205) destaca que “George Polya, Imre Lakatos y muchos otros señalaron que la matemática, en su realización, es frecuentemente una ciencia experimental e inductiva”. Esto confirma que la enseñanza en el aula debe permitir que los estudiantes vivencien la dinámica del proceso de descubrimientos matemáticos, principalmente mediante la experimentación que implica, en un sentido amplio de la palabra, todo razonamiento intuitivo, inductivo o analógico. De Villiers (2009, 206) menciona como aspectos de la experimentación matemática: *comprender* los conceptos, definiciones y demostraciones de una afirmación; *formular conjeturas* a partir de patrones inductivos o generalizaciones; *verificar la validez* de una afirmación o conjetura; *refutar globalmente* una afirmación generando un contraejemplo; *modificar una afirmación* al analizar y afinar su conjunto de dominio ("refutación heurística").

La planificación de un proceso de experimentación matemática en clase depende en primer lugar de la selección y presentación de adecuados problemas a resolver por los estudiantes. Nunokawa (2009, 233) define un problema matemático como "una situación que no puede relacionarse inmediatamente con un conocimiento matemático que podría jugar un papel esencial en la solución final". Por eso, la exploración de la situación y de sus condiciones permite una comprensión más clara y profunda del problema por parte de los estudiantes, "aunque su entendimiento no lleva necesariamente hacia la solución final [; …] su comprensión podría profundizarse mediante la exploración de estas situaciones u objetos" (Nunokawa, 2009, 233). La fase de experimentación al inicio de un proceso de resolver un problema no solamente favorece la comprensión del significado de las palabras, sino también de la relación entre los datos dados y buscados, de tal manera que el estudiante pueda obtener una primera visión sobre la manera de construir la solución y de la demostración o argumento que muestran la veracidad de esta solución. "La investigación experimental puede, a veces, contribuir también al descubrimiento de una pista escondida de la estructura subyacente de un problema, conduciendo a lo mejor a la construcción o invención de una demostración" (De Villiers, 2009, 215).

Después de una primera fase de experimentación, el estudiante puede encontrar patrones que le permiten formular conjeturas. Entre más amplia es la experimentación, mayor seguridad intuitiva desarrollará el estudiante sobre sus conjeturas. Aquí es importante que el estudiante sepa que esta forma de exploración y experimentación no es solamente el manejo de un “debutante matemático”, sino que la historia de la matemática "es repleta con cientos de casos donde se hacen conjeturas principalmente sobre la base de la intuición, investigación numérica y/o construcción y medición.” Es más, los matemáticos profesionales, “a veces, pueden aceptar ciertas conjeturas confirmadas inductivamente como ‘teoremas’, aún si falta una demostración rigorosa” (De Villiers, 2009, 206). Así, el estudiante puede aceptar su propio proceso de resolver problemas como algo “normal”, y reconocer que es capaz de “trabajar como un matemático”, perdiendo a lo mejor una visión “mística” sobre las matemáticas que, frecuentemente, lo aleja de la materia escolar y lo desmotiva. Estas vivencias muestran que la intuición en la matemática no es una habilidad innata, sino "se desarrolla casi siempre a partir del manejo regular, la exploración y manipulación de ideas y objetos matemáticos” (De Villiers, 2009, 207).

Si la fase de experimentación lleva a conjeturas, y los estudiantes obtienen suficientes indicios intuitivos sobre la veracidad de sus afirmaciones, es el momento de provocar la necesidad de demostrarlo de manera irrefutable. En caso de que el estudiante no tenga suficiente seguridad, en vez de buscar una demostración buscaría un contraejemplo para comprobar la falsedad de su conjetura. Estos contraejemplos, muchas veces, resultan del mismo proceso de experimentación y no de deducciones lógicas. También aquí es importante informar al estudiante de que su procedimiento es “normal” para los matemáticos: “La práctica de evaluar primero una conjetura desconocida mediante la consideración de casos específicos es, probablemente, tan viejo como la propia matemática, y sigue siendo utilizado activamente en la investigación moderna" (De Villiers, 2009, 208).

El proceso de la solución de un problema y de la demostración de su veracidad casi siempre consiste en un intercambio de experimentación inductiva y razonamiento deductivo. De Villiers (2009, 216-217) aclara que en las actividades científicas del matemático, "la experimentación y la deducción se complementan mutuamente en vez de oponerse. Generalmente, nuestra seguridad matemática no se basa exclusivamente en o bien métodos lógico-deductivos o bien la experimentación, sino en una combinación sana de ambos". De esta manera, los procesos de resolver problemas matemáticos favorecen y estimulan, poco a poco, el razonamiento del estudiante en toda su amplitud y complejidad.

La teoría de los grafos es un contenido que, con la adecuada organización y planificación, puede contribuir al logro de los objetivos mencionados en este capítulo y relacionados con la demostración matemática. El tema ofrece problemas de todos los niveles de dificultad que ayudan a desarrollar el razonamiento matemático. La propuesta didáctica aquí descrita trata de corresponder a los desafíos para lograr los objetivos y competencias generales de los estudiantes. Es importante que los criterios de selección y secuenciación de los problemas a resolver durante el curso no debe ser la estructuración de la teoría como tal, sino tiene que considerarse como un proceso genético, es decir que favorece el "re-descubrimiento" de los teoremas elementales por parte de los estudiantes. Ellos deben tener suficiente tiempo para la experimentación y la aplicación del razonamiento inductivo y deductivo, así como la libertad de comunicarse sobre los procesos vividos en cuanto a la definición de los grafos y sus diferentes clases, la formulación de conjeturas y la elaboración de argumentos lógicos y demostraciones para demostrar o refutarlos.

Una introducción a la teoría de los grafos tiene la gran ventaja de que los estudiantes no requieren de conocimientos previos y que sus objetos (los grafos) son muy ilustrativos e intuitivos, lo que favorece los procesos aquí descritos con respecto a la demostración matemática informal en todas sus facetas. La demostración formal basada en un sistema de representaciones simbólicas no se considera en el programa aquí propuesto. Sin embargo, se da mucho énfasis en argumentaciones deductivas y rigorosas. En vez de desarrollar un sistema formal, se enfocan las demostraciones en la comprensión de los diferentes teoremas y su aplicación en problemas de la vida diaria y del entorno de los estudiantes. "Como resultado, es necesario que los estudiantes experimenten el valor de la demostración deductiva para la explicación, comprensión y sistematización de nuestros resultados matemáticos. […] buenas demostraciones nos permiten explicar y entender por qué un resultado es verdadero" (De Villiers, 2009, 219)".

En conclusión, la propuesta didáctica presentada en este trabajo trata de responder a la importante tarea, tan claramente expresada por De Villiers (2009, 220):

> Tenemos que explorar caminos auténticos, excitantes y significativos para incorporar la experimentación y la demostración en la educación matemática, para proporcionarles a los estudiantes una idea más profunda y más holística de la naturaleza de nuestra materia. Los maestros y diseñadores curriculares encaran un reto enorme: ilustrar y desarrollar una comprensión y apreciación de las funciones, no solamente de la demostración, sino también de la experimentación, es decir conjeturar, verificar, refutar global y heurísticamente y comprender.

2.5 Posibles contenidos para la escuela

Si la didáctica disciplinar de cualquier ciencia debe orientarse en el estado de su arte, entonces no se pueden olvidar las matemáticas discretas, que "viven y se desarrollan con las aplicaciones y, simultáneamente, contienen un potencial didáctico significativo" (Jeger, 1974, 11). Conforme aumenta la importancia de esta rama de las matemáticas, y como parte de ella la teoría de grafos, se incrementa desde los años 70 del siglo pasado el número de estudios y propuestas didácticas acerca su inclusión en la enseñanza escolar. Sin embargo, estos artículos se refieren generalmente a la inserción de problemas específicos en el currículum tradicional por unas pocas horas de clase. Hay escasas propuestas sobre cómo juntar varios temas de la teoría de grafos en una sola secuencia didáctica. Como los grafos no pertenecen los planes de estudio oficiales, los autores de estas propuestas tratan de justificar los contenidos propuestos a partir de los objetivos generales de la enseñanza de las matemáticas.

En el currículum del bachillerato, se propaga la modernización de la enseñanza matemática, entre otras razones, principalmente porque

> tenemos que corresponder a las exigencias de la revolución científico-tecnológica: pensar sistémicamente, manejar estructuras discretas complejas y desarrollar algoritmos de solución y construcción son capacidades cada vez más importantes. […] Para esto, los problemas combinatorios y de la teoría de grafos pueden representar un fundamento excelente (Sachs, 1970, 197).

Por tanto, la enseñanza de la matemática no debe restringir la utilización de los grafos simplemente como medio de representación. Hay una amplia gama de problemas de la vida diaria, cuya estructura es tan compleja que los estudiantes requieren para su solución de métodos de la teoría de grafos (por ejemplo, recorridos circulares, recorridos óptimos por un museo, problemas organizativos). A pesar del alto nivel de motivación intrínseca que conlleva este tipo de problemas, no se tematizan generalmente en las clases de matemáticas. Para una propuesta didáctica que se basa en el enfoque constructivista, hay que seleccionar problemas y actividades que permiten la transferencia autónoma de los resultados obtenidos y de las estrategias aplicadas a otros problemas o situaciones similares para, así, desarrollar los conocimientos básicos de la teoría de grafos. Al mismo tiempo, problemas que requieren una solución algorítmica resultan interesantes, para favorecer el desarrollo del pensamiento algorítmico, un objetivo ampliamente reconocido en la educación matemática (véase, por ejemplo, NCTM, 1989; 2000). Ejemplos de este tipo de problemas son la programación lineal, donde se busca la organización óptima de secuencias complejas de trabajos parciales o el mejor flujo por una red de transportes.

Desde el punto de vista didáctico, es muy valioso el hecho de que en la teoría de grafos se pueden formular problemas de comprensión sencilla de todos los niveles de dificultad. Esto permite utilizar métodos de enseñanza que aplican en grupos con un nivel de aprendizaje heterogéneo. Muchos de los problemas son parte de la matemática recreativa y tienen un carácter altamente motivante. Así, los estudiantes pueden experimentar que las matemáticas no tienen que ser "secas" o aburridas. Los expertos de la didáctica, igual que los mismos profesores, deben preguntarse "cómo se puede convertir la enseñanza de la matemática en una vivencia. Hay que tomar en serio las críticas sobre las clases aburridas de la matemática" (Jeger, 1974, 12). Los problemas clásicos de la historia de la teoría de grafos, así como problemas de la matemática recreativa (por ejemplo, problemas con fichas de dominó, pasajes complejos y transvases), presentan muchas ideas que se pueden utilizar en clase y que ayudan a aclarar el concepto del grafo de manera ilustrativa.

En resumen, se puede constatar que la literatura didáctica ofrece y analiza una amplia variedad de posibles contenidos de la teoría de grafos para la enseñanza; por eso, no debería ser difícil seleccionar y planificar una secuencia de contenidos y actividades relacionados con los grafos. Sin embargo, no se debe cometer el error de tematizar la teoría de grafos por sí mismo. Hay que enfatizar el enfoque aplicativo dentro y fuera de la propia matemática, así como aquellas actividades que favorezcan el desarrollo de habilidades y competencias matemáticas generalizables, porque demasiada teoría podría "– similar como con la teoría de conjuntos – llevar a protestas por parte de los científicos, incomprensión por parte del público y miedo ante el desconocimiento entre los profesores.” (Bigalke, 1974, 9)

2.6 Aspectos didácticos de la propuesta

La estimulación del desarrollo de estrategias para la resolución de problemas es un objetivo general pretencioso de la enseñanza de las matemáticas, pero generalmente aceptado. Un aspecto parcial de este objetivo importante es el pensamiento combinatorio, que sin lugar a dudas es fundamental para la solución de la mayoría de los problemas de la teoría de los grafos. Además, los estudiantes deben aprender estrategias del pensamiento lógico que les ayudan a resolver nuevos problemas paso a paso. Parte de estas estrategias son el pensamiento heurístico y la capacidad de matematizar problemas de la vida diaria.

Parece difícil lograr todos estos objetivos en la situación actual de la escuela. Sin embargo, es importante seguir intentándolo con el apoyo de contenidos matemáticos adecuados. Para comprobar que “los grafos presentan una bonita oportunidad de enseñar el pensamiento combinatorio y heurístico en la escuela”, se requiere, “después de mostrar el potencial didáctico, encontrar los problemas y aplicaciones adecuados para la enseñanza escolar” (Jeger, 1974, 12).

Como la teoría de grafos actualmente no es parte del currículum oficial del bachillerato, hay que encontrar una forma de incluirla en el plan de estudios mediante la contracción o reducción de los contenidos establecidos. Por eso, la unidad temática no debe sobrepasar cuatro semanas para no perjudicar el aprendizaje de los contenidos obligatorios. La justificación didáctica de esta decisión por parte de los profesores se tiene que basar, mínimo, en tres condiciones: 1. Contribución a los objetivos generales de la asignatura de matemáticas; 2. Utilidad para los niveles escolares posteriores; 3. Enfoque en la aplicabilidad de los grafos.

Considerando las exposiciones anteriores del marco teórico, hay que intentar de alcanzar los siguientes objetivos, relacionados con competencias matemáticas básicas: aprender a argumentar al analizar las demostraciones de teoremas sencillos de la teoría de grafos; fomentar la creatividad mediante problemas que no se pueden resolver con esquemas conocidos, sino que requieren de estrategias propias; traducir problemas aplicativos al lenguaje de la teoría de grafos, lo que significa poder matematizar situaciones del propio entorno. Es imposible relacionar todos estos objetivos con un contenido concreto de la propuesta didáctica aquí presentada, sino es necesario fomentarlos a lo largo de toda la secuencia.

Como ya se mencionó en varias ocasiones, la finalidad de la propuesta didáctica no es solamente el alcance de objetivos propios de la teoría de los grafos, sino también de fomentar el pensamiento típico de la matemática. Así, se propicia la formulación de definiciones adecuadas al concertarlas en el grupo de aprendizaje, principalmente para simplificar la comunicación y favorecer la expresión exacta. Mediante diferentes ejemplos se practica el método de la demostración indirecta que se utiliza en otros ámbitos del plan de estudios del bachillerato. El esquema de la inducción matemática puede aplicarse en demostraciones de características sencillas de todos los grafos. Así, se facilita la comprensión de otros temas del bachillerato, como por ejemplo sucesiones y series.

Este procedimiento, desde el punto de vista didáctico, es fundamentado en las ideas de Wagenschein (1977), quien se opone a los cursos con una secuencia completa de los contenidos, subiendo por todos los “escalones” desde abajo hasta arriba. Como “antítesis” formula el principio de lo “ejemplar”, es decir seleccionar contenidos y problemas que permitan reflejar lo esencial del tema a enseñar: “Lo particular en lo que se sumerge no es escalón, es *espejo* del todo.” En este sentido, lo ejemplar es “sustituto, imagen, representante, concisión, modelo, muestra, ejemplo, paradigma” (Wagenschein, 1977, 12). La didáctica de su enseñanza se orienta, aparte de la selección de los contenidos ejemplares, en dos otros principios fundamentales, lo genético y lo socrático: el primero es parte esencial de la pedagogía, porque “tiene que ver con evolución, la evolución de la personalidad del niño y – en la enseñanza, como didáctica – con la evolución del conocimiento en él.” El método socrático es parte del principio de lo ejemplar, porque “la evolución, el despertar de las fuerzas intelectuales, se desarrolla mejor en la plática” (Wagenschein, 1977, 55). Un curso organizado según el principio de lo genético no “trae” los hechos y teoremas, sino los deja descubrir; tal curso “se refiere a la ciencia verdadera, la viva, no a la que protege y *administra* sus hallazgos para su [pura] utilización” (Wagenschein, 1977, 60; lo resaltado está en el original); “se trata, como lo dice Wittenberg, del ‘redescubrimiento de una ciencia desde sus principios’, por medio de un problema retador y abridero que nos plantea una realidad no manipulada” (Wagenschein, 1977, 74).

A lo largo de la propuesta didáctica, se restringe el concepto del grafo a la ilustrativa definición geométrica (véase el anexo), evitando una formalización innecesaria. Todas las definiciones formales utilizan el concepto de transformación para enfatizar el carácter de la relación entre vértices y aristas. Para la propuesta presente, se evita esta formalización porque se tratan los grafos solamente como objetos geométricos concretos. Sin embargo, es de gran importancia que se aclare, en cada problema y situación aplicativa, exactamente cuáles objetos corresponden a los vértices y cuáles relaciones representan las aristas.

Conceptos relacionados con grafos muy específicos, como “vértices aislados”, “lazos” o “aristas múltiples” se suprimen en esta propuesta didáctica, porque todos los grafos resultan de situaciones donde no hay correspondencia con estos conceptos. Por tanto, se centra en el caso más sencillo del grafo simple y conexo.

2.7 Aspectos metodológicos de la propuesta

La realización de una propuesta didáctica con el tema de la teoría de los grafos y con la finalidad de lograr los objetivos generales mencionados arriba, implica una serie de decisiones metodológicas. Primero, hay que asegurar que los estudiantes tengan el tiempo suficiente para trabajar de forma autónoma, lo que propicia un aprendizaje significativo del concepto del grafo y el desarrollo de propios métodos de solución. Como no siempre tendrán la capacidad de resolver los problemas completamente solos, hay que aplicar esta metodología principalmente en las fases iniciales de la exploración de los problemas. La presentación y comparación de soluciones, así como la elaboración de demostraciones, se debe realizar mediante la discusión entre estudiantes, supervisada y guiada por el profesor.

Los contenidos de la teoría de grafos se relacionan con problemas sencillos e ilustrativos, tomados del entorno de los estudiantes o de la matemática recreativa. Con esto se espera mantener y aumentar la motivación y enfocar los aspectos aplicativos de los grafos. No se debe perder el carácter lúdico de la teoría de grafos elemental, por lo que se busca la formalización matemática solamente cuando el tema lo exige (por ejemplo, al aplicar la fórmula Euleriana de los poliedros).

Por lo tanto, hay que permitir el mayor tiempo posible para el trabajo en parejas o pequeños grupos. Aunque esto dificulte la planificación exacta de las clases, esta metodología vale la pena, considerando los objetivos generales a lograr y permitiendo que los impulsos del trabajo provengan de los propios estudiantes.

El trabajo individual se aplica, sobre todo, a la hora de resolver ejercicios para practicar la aplicación de los conocimientos aprendidos. Problemas más difíciles, cuyo proceso de solución requiere de más apoyo, deben ser trabajados en parejas.

Actualmente no existe un libro de texto que se podría utilizar en clase; por eso, se elaboran hojas de trabajo (véase el anexo) para los diferentes temas parciales. Los estudiantes deben anotar las definiciones y teoremas importantes, si no están incluidos en las hojas de trabajo. Así, se exige una buena parte de trabajo autónomo por parte de los estudiantes al realizar anotaciones durante las clases; una capacidad que no se puede esperar que todas tengan. Por eso, será necesario que el profesor dé avisos acera de los contenidos que los estudiantes deben anotar en su cuaderno.

La propuesta didáctica se basa en la filosofía del constructivismo, es decir la idea que el aprendiz no es una persona que solamente recibe informaciones pasivamente por parte de su maestro, sino debe construir "los conocimientos en función de sus experiencias previas, estructuras mentales y creencias o ideas que ocupan para interpretar objetos y eventos. La teoría constructivista postula que el saber, sea de cualquier naturaleza, lo elabora el aprendiz mediante acciones que hace sobre la realidad" (Castillo, 2008, 174). El docente debe tomar en cuenta los principios de la teoría constructivista que establece el marco teórico "para analizar y fundamentar muchas de las decisiones que toma en la planificación de sus actividades y práctica docente" (Castillo, 2008, 174). Por eso, cada tema parcial de la propuesta didáctica aquí presentada parte de un problema que los estudiantes deben de explorar y, finalmente, solucionar. La discusión de las posibles soluciones favorece la comprensión de que puede haber siempre diferentes caminos a resolver los problemas. “El individuo […] debe construir los conceptos a través de la interacción que tiene con los objetos y con otros sujetos. Tal parece que para que el alumno pueda construir su conocimiento y llevar a cabo la interacción activa con los objetos matemáticos es preciso que dichos objetos se presenten inmersos en un problema, no en un ejercicio” (Castillo, 2008, 177). Para la comunicación sobre los nuevos conocimientos se elaboran definiciones de los conceptos de acuerdo a las necesidades de los estudiantes, es decir, las definiciones intuitivos iniciales (basadas en la visión geométrica de los grafos) se cambian por definiciones más formales solamente si estas contribuyen a una mejor comprensión y una comunicación más exacta.

Con respecto a la formalidad de las demostraciones de los teoremas que se elaboran en conjunto con los estudiantes, se aplica el mismo principio: inicialmente, las demostraciones son intuitivos y serán formalizadas solamente si los estudiantes comprenden la necesidad de este procedimiento. Por eso, es importante permitir la constante discusión en clase, sobre todo para desarrollar de manera crítica el razonamiento lógico de los estudiantes.

2.8 Antecedentes de la propuesta didáctica

Hay una gran cantidad de artículos didácticos que proponen la inclusión de problemas de la matemática discreta y de la teoría de los grafos en el currículum escolar. Muchos de ellos tratan temas y tópicos aislados o problemas específicos (algunos de estos artículos se citan en esta misma tesis), pero no proponen una secuencia didáctica más prolongada o un curso completo. Sin embargo, se pueden encontrar trabajos que describen los resultados de la aplicación de cursos de mayor duración que contienen tópicos de la teoría de los grafos, pero sin explicitar los contenidos enseñados, y mucho menos los detalles metodológicos aplicados.

Hussmann (2008) utilizó con éxito un curso introductorio a la matemática discreta para la capacitación de profesores de matemáticas, porque pensó que las temáticas eran nuevas para ellos, como un área "virgen", y permitieron que experimentaran su asignatura desde un punto de vista diferente. Si los profesores viven un proceso de aprendizaje basado en el paradigma del constructivismo social, se presupone que ellos sean mejor capacitados para desarrollar y organizar el mismo proceso con sus estudiantes. Su enfoque metodológico es muy similar al que se propone en esta propuesta didáctica sobre la teoría de los grafos. El autor menciona cuatro aspectos principales que justificaban su procedimiento:

> Las tareas son fáciles de abordar, tienen una naturaleza motivante, inducen procesos de resolución activa de problemas y ofrecen planteamientos de cualquier nivel; modelo y realidad son tan cercanos, que procesos de modelación pueden realizarse en diferentes niveles; los conceptos matemáticos se desarrollan a partir del manejo de objetos reales; la exploración de diferentes tipos de conceptos y modelos posibles precede la construcción formal de estos conceptos. (Hussmann, 2008, 2).

El autor desarrolla los contenidos a partir de problemas complejos, pero significativos para la introducción a un nuevo campo matemático, porque estos problemas dan la oportunidad que los profesores-estudiantes

> caminen solos un largo tramo por el campo matemático. En un primer acercamiento, los aprendices desarrollan los conceptos y concepciones para resolver el problema por su propia cuenta. Después, él o ella reflexionan sobre su proceso de resolución y crean una teoría matemática adecuada, con sus definiciones, teoremas y demostraciones. (Hussmann, 2008, 4).

Como la construcción del conocimiento difiere de individuo a individuo, hay que apoyar a los estudiantes específicamente, lo que se puede lograr mediante una estructura comunicativa dialogal entre maestro y estudiantes que constituye la clave para un proceso de enseñanza-aprendizaje exitoso. "Aspectos centrales de este principio dialogal son la confianza en la eficiencia del aprendiz y la concentración en las ideas y productos creados por los estudiantes." (Hussmann, 2008, 5).

Rosenstein (1997, xxiv) menciona que los docentes, después de haber recibido cursos de capacitación en matemática discreta, "reportaron cambios en sus aulas, en sus estudiantes y en ellos mismos." Además, lograron una enseñanza exitosa con muchos estudiantes de diferentes niveles de conocimientos, demostrando "un nuevo entusiasmo para enseñar con formas nuevas y ganando adeptos entre sus colegas y directivos."

Turgman (1997) describe la concepción de un curso anual de teoría de los grafos para un grupo de grado 11 del bachillerato en Israel, y reporta resultados empíricos positivos sobre el aprovechamiento académico del mismo. La justificación para la aplicación del curso se basa en la convicción del autor que la teoría de los grafos es un tema "fácil de aprender, basado en pocos principios, no requiere conocimientos matemáticos previos y tiene muchas aplicaciones prácticas." (Turgman, 1997, 207) Después de la aplicación del curso, el autor pudo demostrar cómo "poder bajar el nivel de un tema importante, interesante y práctico, al nivel de bachillerato; [… mejorar] la actitud del estudiante hacia las ciencias disciplinarias; [… y reforzar] la habilidad del estudiante de construir modelos y situaciones prácticas reales." (Turgman, 1997, 210) Sus resultados encontrados con respecto a los aprendizajes logrados por los estudiantes son, principalmente, los siguientes:

> El rendimiento [académico] en la teoría de los grafos es cercano al de otras áreas del estudio matemático. […] Es posible y preferible enseñar la teoría de los grafos en todos los niveles del bachillerato y hasta en la secundaria. […] Encontramos una modificación clara de las actitudes, […] sobre todo al comparar las actitudes al inicio y al final del año. […] Hay una influencia de la teoría de los grafos sobre los estudios de la matemática (comparación entre grupos experimentales y grupos control). (Turgman, 1997, 216)

Todos estos testimonios demuestran nuevamente el gran potencial didáctico de los cursos en matemática discreta y justifican la propuesta didáctica presentada en este trabajo de tesis.

3 LA PROPUESTA DIDÁCTICA

3.1 Conceptualización desde el punto de vista de los contenidos

La primera fase de la secuencia didáctica empieza con la problemática que marca también el inicio histórico de la teoría de grafos. En las dos primeras clases se estudian las condiciones bajo las cuales es posible dibujar un grafo sin despegar el lápiz (problema de la existencia de un recorrido Euleriano). El problema se puede resolver completamente mediante el sencillo teorema 1 (véase el anexo), el cual los estudiantes pueden descubrir por su propia cuenta. El problema central de la tercera clase consiste en la generalización de la solución anterior, buscando el número mínimo de diferentes recorridos Eulerianos de un grafo (cobertura del grafo con recorridos Eulerianos abiertos). También este problema tiene una solución sencilla que consiste en el teorema 2 (véase anexo).

Se inicia la secuencia didáctica con estos problemas y contenidos, porque permiten una definición intuitiva e ilustrativa del concepto de "grafo" mediante una introducción lúdica. Además, los estudiantes no requieren de conocimientos previos, de tal manera que puedan resolver los problemas mencionados. Con ejemplos muy sencillos, los estudiantes desarrollan, paso por paso, un lenguaje matemático exacto lo que favorece una comunicación exitosa en el grupo de aprendizaje, un objetivo que se ampliará a lo largo del resto de la propuesta didáctica.

En las siguientes dos clases, se tematizan viajes o recorridos por un grafo que pasan exactamente una vez por cada uno de sus vértices (recorridos Hamiltonianos). Este problema se presenta de forma natural como analogía de los recorridos Eulerianos. Para resolver estos problemas se requieren métodos propios y específicos de la teoría de los grafos que desarrollan el pensamiento estructural y la capacidad de análisis, porque no existe una un teorema con condiciones necesarias y suficientes para la existencia de recorridos Hamiltonianos. Así, es necesario adaptar los métodos de solución a la estructura concreta de cada grafo. Aquí, los estudiantes pueden reconocer que la matemática no es una ciencia "superpoderosa", sino que hay problemas que se formulan de manera sencilla y, sin embargo, no tienen (hasta hoy en día) una solución completa.

Después de esta primera fase de la "elaboración de herramientas matemáticas", en la que se define y aplica el concepto del grafo, y se muestran los dos primeros teoremas sencillos, se continúa con la fase del "análisis estructural-conceptual". Aquí se trata los grafos de manera abstracta, a partir de la pregunta acerca de la "igualdad" de dos grafos. Esta pregunta lleva al concepto de la isomorfia, el cual exige claridad sobre las características estructurales de los grafos.

Este tema tiene una doble finalidad didáctica. Primero, se aclara la estructura topológica del grafo, representada solamente por la relación entre vértices y aristas; la ubicación geométrica de estos objetos es completamente irrelevante. Para ilustrar los invariantes de las relaciones topológicas en clase, se puede utilizar un modelo físico del grafo construido por medio de resortes elásticos anudados que se pueden distorsionar arbitrariamente sin quitar los nudos (vértices) entre los resortes (aristas).

Por otro lado, es un principio universal de la matemática buscar similitudes estructurales entre objetos de diferentes entes matemáticas. Solamente así es posible formular conocimientos abstractos, cuyas múltiples formas de interpretación permiten la amplia aplicabilidad de los resultados obtenidos de forma sistemática. Por eso, es importante que se presente, en la enseñanza escolar, la isomorfia como un concepto general, el cual le permite al estudiante reconocer "que el mismo sistema lógico abarca un gran cantidad de áreas matemáticas aparentemente diferentes", y "cuán económico es abstraerse" (Beisswanger, 1960, 124).

La tercera fase de la propuesta didáctica, en la que se tematizan principalmente problemas de aplicación, inicia con la búsqueda de estructuras mínimas de un grafo que mantienen la conexión entre todos los vértices (aunque sea por rodeos – *árbol constitutivo* de un grafo). Este problema motiva los conceptos de "árbol" y "conectividad", y representa un problema que tiene menos importancia en la teoría de los grafos misma, pero sí en relación con ciertas áreas de aplicación. Árboles se utilizan frecuentemente para ilustrar procesos multifásicos (combinatoria, probabilidad) sin tematizar sus características específicas. Tal estudio permite, en el sentido del "ordenamiento local" de Wittmann (1974b; también Freudenthal, 1973, pp. 150 s.), aclarar la dependencia mutua entre definiciones y teoremas: a partir de una determinada definición de un objeto se derivan teoremas sobre sus características que, a su vez, podrían utilizarse como definición inicial.

El aspecto aplicativo de los árboles lleva a desarrollar algoritmos de solución, cuya importancia en la enseñanza moderna de la matemática está en aumento. "Por la accesibilidad de computadoras y calculadoras, es la hora de reformar nuevamente la enseñanza hacia el 'pensamiento algorítmico'. […] Tenemos que repensar todos los contenidos de la enseñanza de la matemática desde el punto de vista algorítmico." (Engel, 1977, 5)

En las clases 9, 10 y 11, los estudiantes deben descubrir, demostrar y aplicar la fórmula Euleriana para poliedros. Esta demostración puede realizarse de manera sencilla y elegante mediante la utilización de grafos *planares* que son topológicamente equivalentes a la red de vértices y aristas de poliedros. Por eso, esta fase de la propuesta didáctica inicia con la pregunta si es posible dibujar un grafo de tal manera que sus aristas no se crucen (el concepto del “grafo planar”). Una respuesta completa a esta pregunta es esencial para la electrónica al construir circuitos eléctricos en el menor espacio posible. La fórmula Euleriana para poliedros juega un papel tan importante en la topología combinatoria como el teorema de Pitágoras en la geometría Euclidiana. Se requiere la fórmula no solamente para la demostración de muchos teoremas importantes (por ejemplo, cuerpos Platónicos, teorema de Kuratowski, problemas de coloración), sino la elaboración de su demostración permite el reconocimiento de muchas ideas fundamentales de la demostración matemática (principios heurísticos, inducción matemática). En la propuesta didáctica se utiliza la fórmula en relación con la solución del problema: “¿Cuáles grafos no pueden dibujarse en forma plana?”.

La última clase es un cierre lúdico, donde se presenta y analiza un juego estratégico con grafos planares. En una de sus variantes, se puede demostrar mediante la fórmula Euleriana para poliedros que el ganador está determinado desde el inicio del juego. Esta variante puede entenderse como “broma matemática”, cuyo análisis y comprensión requiere los conocimientos sobre grafos planares previamente adquiridos, mientras que la segunda variante es un juego estratégico en el cual cada jugador tiene la posibilidad de ganar.

Para evaluar los aprendizajes de la propuesta didáctica, se propone un examen que evalúa el nivel de alcance de los objetivos principales de la propuesta didáctica. Posteriormente, es necesario devolver y retroalimentar el examen.

Aunque problemas de coloración jugaron un papel importante en la historia de la teoría de los grafos, y a pesar de que existen varias propuestas didácticas sobre su integración en la enseñanza de secundaria y bachillerato, lamentablemente no es posible incluirlos en la propuesta presente. Es hasta el final de la unidad didáctica que los estudiantes adquieren los conocimientos previos necesarios para su solución (fórmula

Euleriana para poliedros, grafos planares); por tanto, este tipo de problemas podría ser una posible y valiosa extensión de la propuesta didáctica presente.

3.2 Planificación de las clases

3.2.1 Primera clase

Competencias: Los estudiantes

- explican por qué grafos con un recorrido Euleriano cerrado tienen vértices solamente de grado par,
- explican por qué un recorrido Euleriano abierto tiene que iniciar y finalizar en vértices de grado impar,
- formulan y utilizan las definiciones de grafo, vértice, arista y recorrido,
- comprenden que definiciones son necesarias para una comunicación exitosa.

Plan de clase:

- El grupo de estudiantes discuta, junto con el profesor, las posibilidades de dibujar el grafo de la fig. 3 sin despegar el lápiz, indicando la secuencia de las aristas mediante sus vértices.
- Posteriormente, el profesor explica la siguiente tarea por parejas: Cada estudiante construye dos figuras similares que pueden dibujarse sin despegar el lápiz; se intercambian los dibujos para buscar el recorrido correspondiente a las dos figuras de su compañero. El profesor supervisa el trabajo de las parejas y selecciona algunos ejemplos para que sean presentados y explicados en el pizarrón.

- Si algún estudiante elabora ya un grafo con un recorrido Euleriano abierto, se presentará en el pizarrón; en caso contrario, el profesor presenta el grafo de la fig. 4. Los estudiantes buscan individualmente soluciones del problema presentado y, posteriormente, discuten en grupo la diferencia entre un recorrido Euleriano cerrado y abierto. Esta actividad lleva a la pregunta: "¿Cuál es la diferencia entre un "vértice intermedio" y un "vértice final" del recorrido Euleriano abierto?"
- Para la discusión de la pregunta y una mejor comunicación se describen y abstraen las características de las figuras para definir los conceptos "grafo", "vértice", "arista" y "recorrido Euleriano" (véase anexo). En un trabajo colectivo, los estudiantes tratan de responder la pregunta mencionada para llegar a la conclusión que un vértice intermedio incide con un número par de aristas, un vértice final con un número impar.
- En una plática entre estudiantes y profesor, se formula la suposición que cada vértice de un grafo con un recorrido Euleriano cerrado incide con un número par de aristas y se elabora la demostración correspondiente (véase anexo). Estas afirmaciones motivan la definición del concepto "grado de vértice" (véase anexo). El profesor pide que los estudiantes formulen por parejas los teoremas 1 y 1' (sólo las condiciones necesarias) y sus demostraciones correspondientes por escrito (descritos en forma: "Si …, entonces …"); al final de la clase se presentan y revisan dos o tres de las propuestas, dando énfasis en la formulación correcta de la implicación de los teoremas.
- Se deja como tarea para la siguiente clase determinar las soluciones de los ejercicios de la primera hoja de trabajo (véase anexo).

Comentarios:

En esta primera clase, se desarrolla el concepto intuitivo del grafo como figura geométrica. El problema introductorio (fig. 3) se discute en grupo para que el profesor pueda supervisar y orientar la solución, sobre todo aclarando que el punto de intersección de las dos aristas AD y BE no es un vértice, lo que significa que en este punto no se puede "doblar"; es el primer aspecto básico para la posterior definición del concepto "grafo". Es posible que algunos estudiantes conozcan el problema de la primaria o como actividad recreativa; en este caso, el profesor tendría que asegurar que no se revele la solución antes de que todo el grupo comprenda claramente el problema. Es importante que se presenten soluciones con diferentes vértices iniciales; los estudiantes tienen que intuir que un recorrido Euleriano cerrado puede iniciar en cualquier vértice.

La comprensión de la diferencia entre "vértices intermedios" y "vértices finales" lleva directamente a la suposición de los teoremas 1 y 1' (sólo las condiciones necesarias; véase anexo). Los estudiantes deben ser capaces de desarrollar, en una discusión colectiva, la idea de las demostraciones correspondientes (véase anexo) por su propia cuenta; es suficiente elaborar la argumentación de manera intuitiva. Para comprender esta argumentación es importante que los estudiantes hayan explorado, construido y analizado grafos que contienen un recorrido Euleriano y que hayan comprendido las soluciones elaboradas anteriormente.

En esta primera fase de la clase, los estudiantes pueden nombrar los grafos, vértices y aristas con sus propias palabras (por ejemplo, como dibujo, puntos y líneas). Hay que esperar hasta la presentación de la pregunta mencionada para motivar la formulación de las definiciones de los conceptos centrales. Para esto es conveniente dejar varios ejemplos de grafos (de las actividades anteriores) en el pizarrón. La formulación de los teoremas y de sus demostraciones permite evaluar la comprensión de lo aprendido en esta clase y acostumbra a los estudiantes a utilizar los nuevos conceptos.

Para la introducción del concepto de grafo, se podría utilizar también el problema histórico de los “puentes de Königsberg”. Una justificación de este procedimiento sería que los estudiantes conocieran y revivieran el inicio histórico de la teoría de los grafos, además reconozcan la representación de una situación real mediante un grafo. La decisión didáctica contra este problema se debe a que el grafo correspondiente contiene aristas múltiples, lo que contradiría la definición intencionada de grafos sencillos.

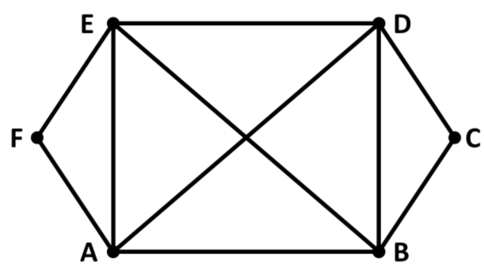


Fig. 3. *Grafo con un recorrido Euleriano cerrado.*

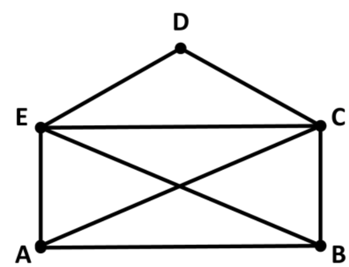


Fig. 4. *Grafo con un recorrido Euleriano abierto.*

3.2.2 Segunda clase

Competencias: Los estudiantes

- identifican la diferencia entre una condición necesaria y suficiente,
- formulan la inversión de una implicación,
- aplican el teorema sobre la existencia de recorridos Eulerianos para resolver un problema con fichas de dominó.

Plan de clase:

- Retroalimentación de la tarea y repetición de la condición necesaria del teorema 1: "Si un grafo tiene un recorrido Euleriano, cada uno de sus vértices tiene grado par."
- Discusión colectiva de la implicación: "Si llovió, entonces la calle está mojada", y de su inversión: "Si la calle está mojada, entonces llovió" para comprender la diferencia entre una condición necesaria y suficiente para que la calle esté mojada (la lluvia es suficiente, pero no necesaria). Luego, se trasfiere el resultado a la condición necesaria del teorema 1 (véase arriba; en otras palabras: "Para que exista un recorrido Euleriano cerrado de un grafo, es necesario que sus vértices sean de grado par."). Esto lleva a la pregunta: "Que todos los vértices tengan grado par, ¿es suficiente para la existencia de un recorrido Euleriano?"
- Los estudiantes elaboran, en discusión colectiva y guiado por el profesor, el algoritmo que construye un recorrido Euleriano (véase la demostración de la condición suficiente del teorema 1) en un grafo, cuyos vértices sean todos de grado par. El mismo algoritmo se aplica para la construcción de un recorrido Euleriano abierto, si el grafo tiene exactamente dos vértices impares. Al final, los estudiantes anotan, en su cuaderno, los teoremas 1 y 1' en forma completa (véase anexo).
- Los estudiantes reciben, por parejas, un set de fichas de dominó sin "mulas" (fichas con dos números iguales), con la tarea de formar una línea cerrada de fichas de acuerdo con las reglas del juego. Posteriormente, se trabaja la misma tarea, pero sin las fichas que contienen un campo vacío. El primer problema se resuelve sin dificultad, pero el segundo parece que no es posible de resolver.

- Para ilustrar las opciones de solución, los estudiantes construyen los grafos correspondientes a ambos problemas; para eso, tienen que reconocer que una ficha con sus dos números corresponde a una arista con sus dos vértices. Así, en el primer problema resulta el grafo completo de 7 vértices (fig. 5), y en el segundo el grafo completo de 6 vértices (fig. 6).
- Los estudiantes traducen ambos problemas al lenguaje de la teoría de los grafos y encuentran las soluciones mediante la aplicación del teorema 1 (véase anexo).
- No hay tarea para la siguiente clase.

Comentarios:

Al confrontar los conceptos de “condición necesaria” y “condición suficiente” con el problema de la primera clase, los estudiantes reconocen que la construcción de recorridos Eulerianos se relaciona principalmente con la búsqueda de una condición suficiente. La aclaración de la estructura lógica contribuye al desarrollo del pensamiento exacto y crítico. La sencillez del problema permite que los estudiantes reconozcan los conceptos de “necesario” y “suficiente” que se utilizan también en el lenguaje común.

Para aclarar los dos tipos de condiciones, se propone elaborar en clase una tabla como la siguiente (misma que los estudiantes deben anotar en su cuaderno):

Condiciones generales	Ejemplo 1	Ejemplo 2
Si A, entonces B. A es suficiente para B.	A: lluvia, B: calle mojada. Si llovió, entonces la calle está mojada. (correcto) Lluvia es suficiente para que la calle esté mojada.	A: todos los vértices son pares, B: existe un recorrido Euleriano cerrado. Si todos los vértices son pares, entonces existe un recorrido Euleriano cerrado. Que todos los vértices sean pares es suficiente para que exista un recorrido Euleriano cerrado.
Si B, entonces A. A es necesario para B.	A: lluvia, B: calle mojada. Si la calle está mojada, entonces llovió. (falso) Lluvia no es necesaria para que la calle esté mojada.	A: todos los vértices son pares, B: existe un recorrido Euleriano cerrado. Si existe un recorrido Euleriano cerrado, entonces todos los vértices son pares. (correcto) Que todos los vértices sean pares es necesario para que exista un recorrido Euleriano cerrado.

Los problemas de las fichas pueden interpretarse como un contrapeso a la "matemática dura" de la primera parte de la clase y tiene la función de finalizarla de manera lúdica. A la vez, son el punto de partida para la siguiente clase. Por primera vez, se presenta un problema que muestra el potencial de la aplicabilidad de la teoría de los grafos. La imposibilidad de resolver el segundo problema es difícil de entender viendo solamente las fichas, pero se vuelve muy fácil cuando se analiza el grafo correspondiente. Esto es una motivación adicional para el tema de la teoría de los grafos.

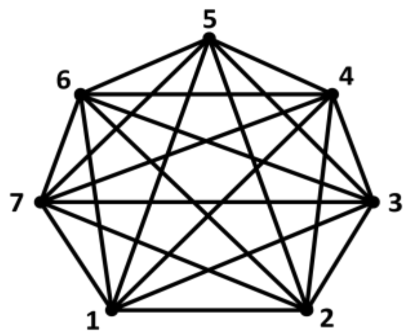


Fig. 5. *El grafo completo de 7 vértices.*

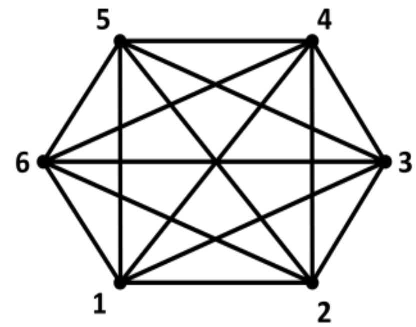


Fig. 6. *El grafo completo de 6 vértices.*

3.2.3 Tercera clase

Competencias: Los estudiantes

- reconocen el concepto de “cobertura” de un grafo,
- aplican el teorema sobre el número mínimo de recorridos abiertos de una cobertura y comentan la idea fundamental de su demostración,
- formulan una sencilla deducción de este teorema sobre el número de vértices con grado impar.

Plan de clase:

- Se reparte un set de fichas de dominó (sin mulas y sin las fichas con un campo vacío) para cada pareja de estudiantes. Hay que colocar todas las fichas entregadas, de acuerdo con las reglas del dominó, en varias cadenas, buscando el número mínimo de ellas.
- Después de encontrar la solución mediante las fichas (o como apoyo para encontrarla), los estudiantes transfieren este problema al grafo completo de 6 vértices (fig. 5) para llegar a la suposición que una cobertura de un grafo contiene, al menos, tantas cadenas como la mitad del número de vértices de grado impar. Simultáneamente se define el concepto de “cobertura”.

- En trabajo grupal, los estudiantes verifican su suposición con diferentes grafos y, mediante la construcción del número mínimo de cadenas, llegan a la idea principal para la demostración que cadenas lo más largas posibles inician y terminan siempre en vértices impares. Los estudiantes, en plática con el profesor, elaboran la demostración completa y anotan el teorema 2 (véase anexo).
- Como trabajo individual, cada estudiante resuelve los ejercicios de la segunda hoja de trabajo (véase anexo). Se retroalimentan algunas soluciones explicándolas en el pizarrón.
- Exploración por parejas de la pregunta: "¿Cuántos vértices de grado par e impar puede tener un grafo?" Hay que llegar a la suposición que un grafo puede tener cualquier número de vértices pares (por ejemplo, todos los polígonos), pero solamente un número par de vértices impares. Los estudiantes formulan, como resultado, el teorema 3 (véase anexo) y lo demuestran en una discusión colectiva como una sencilla deducción del teorema 2 (véase anexo).
- No hay tarea para la siguiente clase.

Comentarios:

La solución lúdica del segundo problema de dominó (véase la clase anterior) lleva a una generalización del problema de los recorridos Eulerianos de grafos que tienen vértices impares y a la introducción del concepto de "cobertura". Al elaborar la demostración del teorema correspondiente, los estudiantes conocen un principio para resolver problemas de mínimas y máximas que se utiliza no solamente en la teoría de los grafos, sino en muchas otras áreas: suponiendo que se tenga una solución óptima (aquí, el número mínimo de recorridos Eulerianos abiertos), se deducen características del objeto correspondiente que son importantes para la elaboración de la demostración. Esta deducción lógica tiene como condición previa que existe realmente una solución del problema (lo que se debería demostrar primero); sin embargo, no es necesario indicarlo a los estudiantes porque en el caso de problemas finitos, esta condición previa siempre se cumple de manera trivial.

En esta clase se termina la problemática de los recorridos sobre grafos que pasan por cada arista exactamente una vez, y con esto se termina la primera fase de la secuencia didáctica, dedicada principalmente al desarrollo y aplicación de los conceptos básicos de la teoría de los grafos.

3.2.4 Cuarta clase

Competencias: Los estudiantes

- traducen el problema del recorrido Hamiltoniano al lenguaje de la teoría de los grafos,
- identifican la diferencia entre recorridos Eulerianos y Hamiltonianos,
- desarrollan una estrategia para encontrar un recorrido Hamiltoniano,
- utilizan esta estrategia, apoyado en una división en casos, para encontrar todos los recorridos Hamiltonianos de un grafo.

Plan de clase:

- Los estudiantes trabajan con el primer problema de la tercera hoja de trabajo (véase anexo). Posteriormente, anotan diferentes soluciones en el pizarrón y formulan el problema en el lenguaje de la teoría de los grafos: "Busca un recorrido cerrado, el cual pasa por cada vértice exactamente una vez". Con esto se define el concepto del recorrido Hamiltoniano. El profesor puede platicar sobre el juego llamado "viaje por el mundo" que inventó Hamilton y que dio su nombre a este tipo de recorridos. Los estudiantes comentan las diferencias y similitudes con el recorrido Euleriano para reconocer la analogía entre ambos tipos de problemas.

- Los estudiantes trabajan, por parejas, el segundo problema de la tercera hoja de trabajo (véase anexo). Al inicio, el profesor puede guiarlos mediante la siguiente pregunta auxiliar: "¿Cuáles partes de un posible recorrido Hamiltoniano se determinan inmediatamente?" Después de anotar la solución en el pizarrón, se pide que los diferentes grupos de estudiantes expliquen su procedimiento a sus compañeros. Como resumen, el grupo formula un algoritmo para la construcción sucesiva de un recorrido Hamiltoniano, utilizando la estrategia de coloración de las aristas: "1. Colorea todas las aristas que inciden con los vértices de grado dos; 2. Elimina todas las aristas que inciden con vértices que ya tienen dos aristas coloreadas; 3. Observa el grado restante y vuelve a paso 1; 4. No pases por un vértice una segunda vez, antes de haber pasado por todos los vértices."
- Se utiliza este algoritmo para encontrar todos los recorridos Hamiltonianos del grafo del problema 3.a) de la tercera hoja de trabajo (véase anexo). En la siguiente fase de discusión colectiva, se aclara que se requiere una división en casos específicos, de acuerdo con las tres posibilidades de poder pasar por un vértice. Cada caso es trabajado por un grupo de estudiantes para juntar posteriormente todas las soluciones.
- La tarea para la siguiente clase es solucionar el problema 3.b) de la tercera hoja de trabajo (véase anexo).

Comentarios:

El objetivo principal de la clase es la elaboración de una estrategia sencilla para la construcción de recorridos Hamiltonianos. La idea fundamental consiste en resaltar las partes necesarias del recorrido y deducir de este análisis nuevas afirmaciones. Los tres problemas, cuya dificultad aumenta, motivan a los estudiantes a desarrollar una estrategia y, si es necesario, mejorarla a lo largo de la clase. El primer problema se puede resolver simplemente probando las soluciones, mientras el segundo problema requiere de un procedimiento sistemático, porque en caso contrario sería difícil poder analizar el grafo con la pura vista.

La capacidad de desarrollar estrategias de solución requiere que los estudiantes sean capaces de analizar las estructuras de los diferentes grafos. En las taxonomías del aprendizaje, el análisis siempre tiene un alto grado de complejidad. Por eso, no se puede suponer que todos los estudiantes comprenderían completamente la estructura. El segundo problema se selecciona porque puede solucionarse mediante ensayo y error. Esto permite experiencias positivas para todos los estudiantes. A través de la formulación de la estrategia, aquellos estudiantes que no pueden encontrarla por su propia cuenta, pueden al menos aplicarla para resolver el tercer problema. Esto procedimiento fomenta al desarrollo de la competencia transversal (dentro de las matemáticas) del pensamiento algorítmico, cuyo aumento de importancia para la enseñanza de la matemáticas ya se destacó en varias ocasiones.

La aplicación sistemática de la estrategia de ensayo y error es necesaria para poder resolver el tercer problema. La división en tres casos específicos es el criterio de la clasificación de todos los recorridos Hamiltonianos. Así, los estudiantes llegan a conocer uno de los principios fundamentales del conteo que juega un papel central, por ejemplo, en el área de la combinatoria, pero utilizado también en muchas demostraciones de otras áreas matemáticas.

En esta clase es importante que los estudiantes tengan suficiente tiempo para resolver los problemas por su cuenta, porque deben de utilizar la estrategia de ensayo y error. La ocupación con los problemas previstos permite que todos los estudiantes puedan vivir experiencias positivas al encontrar soluciones. El profesor debe planificar el tiempo necesario para los procesos de solución y su presentación y discusión frente al grupo. Los recorridos Hamiltonianos son apropiados para la aplicación de ensayo y error, porque la falta de una solución sencilla o de un teorema que resuelva este tipo de problemas completamente, como en el caso de los recorridos Eulerianos, requiere de estrategias heurísticas diferentes.

Experiencias previas, propias del autor de esta tesis, con la enseñanza del tema de los recorridos Hamiltonianos muestran que es una oportunidad de participación de los estudiantes de menor nivel de rendimiento o de menor autoestima en relación con la asignatura de las matemáticas. Es precisamente la estrategia del ensayo y error que permite la actividad exitosa de todos los estudiantes que, además, contribuye a la comprensión de la estructura de los grafos involucrados.

3.2.5 Quinta clase

Competencias: Los estudiantes

- demuestran la imposibilidad de encontrar un recorrido Hamiltoniano de manera indirecta,
- explican el significado de la coloración de un grafo,
- reconocen que no hay una condición necesaria ni suficiente para la existencia de un recorrido Hamiltoniano.

Plan de clase:

- Se retroalimenta la tarea de la clase anterior (problema 3b de la tercera hoja de trabajo). Similar que en el problema 3a, se necesita dividir todas las soluciones en tres casos, de acuerdo con la forma de poder pasar por uno de los vértices. Al comparar los diferentes recorridos Hamiltonianos, los estudiantes reconocen que hay, por la simetría, esencialmente dos soluciones (véase las soluciones de la tercera hoja de trabajo en el anexo). Como parte de la retroalimentación debe enfatizarse la función de la estrategia de dividir las soluciones en casos específicos, un método muy común del quehacer del matemático.
- La figura 7 representa el problema introductorio de la clase: algunas ciudades con sus carreteras de conexión. Los estudiantes buscan, en parejas, la respuesta a la siguiente pregunta: "¿Es posible, empezando por cualquier ciudad, poder visitar todas las demás ciudades exactamente una vez?" Al aplicar nuevamente la estrategia del ensayo y error, los estudiantes deberían llegar a la suposición de que no exista tal recorrido.
- En discusión colectiva, guiado por el profesor, los estudiantes deben descubrir que cada vértice de grado 3 está conectado con un vértice de grado 4, y viceversa, lo que permite encontrar un argumento sencillo que demuestra que el recorrido Hamiltoniano es imposible.
- La figura 8 ilustra la red de ferrocarriles del país ficticio "Arania". Los estudiantes tratan de encontrar un recorrido que inicia en A, termina en Z y pasa por cada ciudad exactamente una vez. Después de varios ensayos, llegan a la suposición que no existe ninguna solución; y esto se demuestra nuevamente mediante la coloración de los vértices. Como ayuda se podría mencionar la coloración de un tablero de ajedrez.

- Los estudiantes comentan, como resumen de la fase anterior, la función de una coloración de aristas o vértices en una demostración indirecta (para encontrar una contradicción).
- El profesor expone el conocimiento actual sobre la existencia de recorridos Hamiltonianos.
- Tarea para la siguiente clase: estudiar algunos grafos en cuanto a la existencia de recorridos Eulerianos y recorridos Hamiltonianos (los grafos de la primera y segunda hoja de trabajo).

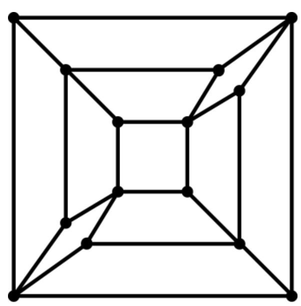


Fig. 7. *Un grafo de ciudades y carreteras.*

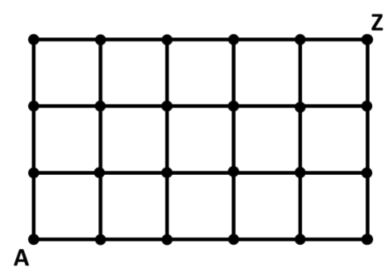


Fig. 8. *Un grafo sobre el tablero de ajedrez.*

Comentarios:

Los estudiantes llegan a conocer, en esta clase, grafos que no tienen un recorrido Hamiltoniano; no hay un esquema según el cual se podría clasificar estos grafos, es decir, se tiene que analizar la estructura de cada grafo específicamente. Por eso, hay que encontrar demostraciones indirectas que se basan, en estos dos casos, en la estrategia de la coloración de vértices de tal manera que al pasar de un vértice a otro tuviera que cambiar en cada paso el color. Este principio es fundamental para la solución de problemas de la teoría de los grafos y cuya popularidad se basa en su sencilla aplicación. Aunque esta estrategia es sumamente elegante y sencilla, no es aplicable a cualquier grafo. Es necesario estudiar la estructura específica de cada grafo para reconocer la posibilidad de utilizar la coloración.

El grafo de la figura 7 tiene 8 vértices de grado 3 (que sean de color blanco) y 6 de grado 4 (que sean de color negro). Como al pasar de un vértice a otro hay que cambiar siempre de color, y hay 8 vértices blancos y sólo 6 negros, es imposible pasar por todos los vértices y regresar al vértice inicial (al menos uno de los vértices blancos no se puede visitar).

En el caso de la figura 8, se utiliza la misma coloración de dos colores de tal manera que cada vértice blanco incida con uno negro, y viceversa. Así, si A es blanco, también Z tiene que ser blanco. Al pasar por 22 vértices (antes de llegar a Z), se cambia 22 veces el color, terminando en un vértice blanco, igual que Z, lo que es imposible.

La utilidad de la coloración se vuelve más impresionante, conforme los estudiantes buscan una solución para el recorrido Hamiltoniano. Al ocuparse por mucho tiempo en la búsqueda de una solución se provoca, con el tiempo, una alta motivación para encontrar una demostración sencilla y breve.

En esta clase se demuestra la imposibilidad de un recorrido Hamiltoniano de manera indirecta, lo que, generalmente, se trata en grados escolares anteriores (secundaria y bachillerato) y utilizando transformaciones algebraicas. Aquí, los estudiantes pueden percatarse de la fortaleza de este tipo de demostración, aunque no tenga que expresarse de manera formal. En el caso de la teoría de los grafos, la lógica intuitiva del “sentido común” es suficiente para aceptar la veracidad de las demostraciones indirectas.

En relación con los problemas de los recorridos Hamiltonianos, los estudiantes pueden experimentar, de manera ejemplar, el quehacer del matemático de explorar primero (por ejemplo, mediante ensayo y error) un problema por mucho tiempo hasta llegar a una suposición. Al estar intuitivamente convencido de ella, el matemático empieza a buscar una demostración lógica, corta y sencilla (véase pp. 30 s.).

3.2.6 Sexta clase

Competencias: Los estudiantes

- utilizan grafos para representar torneos deportivos,
- reconocen que la característica fundamental del grafo es su estructura combinatoria,
- identifican el concepto de la isomorfia de grafos,
- demuestran cuáles grafos son isomorfos entre sí y cuáles no los son.

Plan de clase:

- La retroalimentación de la tarea de la clase anterior permite, como finalización del tema de los recorridos Hamiltonianos, enfatizar (en una discusión entre estudiantes y profesor) las diferencias entre recorridos Eulerianos y Hamiltonianos con respecto a las características de los problemas y soluciones correspondientes.
- Cada estudiante trabaja el siguiente problema: "Anita, Berta, Christina, Dora y Elisa realizan un torneo de ajedrez enfrentándose cada una a cada una (llamado "*round robín*") una sola vez. Dora ya jugó cuatro veces, Christina tres veces, Berta dos y Anita una vez. ¿Contra quién ya jugó Elisa?" Algunos de los estudiantes que utilizan grafos para la solución, la presentan en el pizarrón. Se deben presentar, al menos, dos grafos de aspecto diferente.
- A partir de la pregunta si los grafos en el pizarrón son "iguales", los estudiantes reconocen en una plática libre que lo único importante es cuáles vértices están conectados por una arista, mientras su ubicación o tamaño son irrelevantes. Posteriormente, se anota la definición de isomorfia que los estudiantes elaboran a base de lo analizado.

- Cada estudiante aplica la nueva definición para determinar y justificar si los grafos de la cuarta hoja de trabajo (véase anexo) son isomorfos o no. Los problemas están ordenados según el grado de dificultad.
- El profesor comenta la idea universal de la isomorfia a partir de dos ejemplos de los teoremas sobre las potencias en álgebra (tema anterior del bachillerato):

$$\begin{array}{ccccc} a^m & * & a^n & = & a^{m+n} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ m & + & n & = & m+n \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccccc} (& a^m &)^n & = & a^{m*n} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ m & * & n & = & m*n \end{array}$$

- La tarea para la siguiente clase es dibujar todos los grafos no isomorfos entre sí, con dos, tres y cuatro vértices.

Comentarios:

La discusión final sobre recorridos Eulerianos y Hamiltonianos debe aclarar que los primeros son fáciles de encontrar y construir, pero los segundos tienen que solucionarse con estrategias que aprovechan características específicas de los grafos a analizar. El profesor debe destacar que en la matemática es una experiencia frecuente que problemas muy similares pueden tener grandes diferencias en cuanto a la dificultad de solucionarlos.

El problema introductorio de la clase lleva a los estudiantes a reconocer que al dibujar un grafo, lo único importante es su estructura combinatoria y no sus características geométricas. Este reconocimiento motiva la definición de la isomorfia. Se evita conscientemente el concepto de la relación biyectiva que se utiliza generalmente en las definiciones formales. Para la enseñanza es más importante que los estudiantes puedan "llenar" el significado del nuevo concepto con contenidos concretos e ilustrativos, en vez de relacionarlo con otros conceptos abstractos.

Como no existe una estrategia sencilla para determinar la isomorfia entre grafos, en cada problema hay que analizar en detalle la estructura de cada grafo. A veces es necesario utilizar solamente estructuras parciales de grafos complejos para demostrar que dos grafos no son isomorfos (por ejemplo, el problema 5 de la cuarta hoja de trabajo). Los ejemplos de esta hoja de trabajo se seleccionan de tal manera que los estudiantes tendrían que utilizar diferentes tipos de argumentos para justificar su solución.

El ejemplo de la isomorfia de otra área matemática, en este caso de las potencias algebraicas, ilustra la universalidad de este concepto. La teoría de los grafos es un tema extraordinario, en el sentido del principio de lo ejemplar de Wagenschein (véase p. 46), para ilustrar y profundizar este concepto fundamental que fomenta el pensamiento estructural, sin la necesidad de utilizar la teoría formal de los conjuntos.

3.2.7 Séptima clase

Competencias: Los estudiantes

- construyen el árbol constitutivo de un grafo sencillo mediante ensayo y error,
- identifican diferentes características de un árbol,
- reconocen que una definición debe ser breve e inequívoca,
- conocen un algoritmo para la determinación de un árbol constitutivo.

Plan de clase:

- Cada estudiante trabaja el siguiente problema (fig. 9): “Se debe reparar la red de carreteras de un estado. Para esto es necesario cerrar temporalmente el mayor número de carreteras. Obviamente, hay que asegurar que se puede seguir llegando de cualquier ciudad a cualquier otra.” (Klose, 1978, 57)

- Los estudiantes describen cómo encontrar la mejor red de carreteras abiertas y mencionan las características de esta red. Se presentan varias soluciones en el pizarrón, de tal manera que se identifiquen diferentes características equivalentes.
- Los grafos que resuelven el problema llevan al concepto de “árbol” (véase anexo), cuya definición se deriva de las características encontradas por los estudiantes. En una plática colectiva se elaboran algunas demostraciones breves que muestran la equivalencia de algunas de estas características.
- A partir de las diferentes soluciones de los estudiantes, ellos formulan el concepto de “árbol constitutivo” y desarrollan un algoritmo para encontrar el árbol constitutivo de un grafo.
- En la tarea, los estudiantes tienen que determinar los árboles constitutivos de algunos grafos (los de la segunda hoja de trabajo).

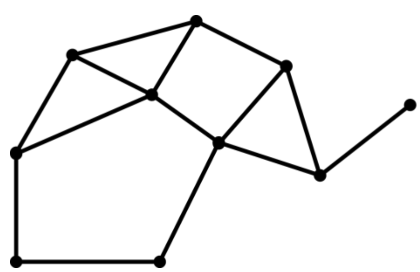


Fig. 9. *Otra red de carreteras.*

Comentarios:

El problema inicial de la clase tiene una gran cantidad de soluciones (Klose, 1978, 57 s.); sin embargo, todas tienen las mismas características, de las cuales se deben mencionar: conectividad, no hay recorridos cerrados, hay un vértice más que aristas, dos vértices cualesquiera están conectados mediante un solo recorrido. Al describir estas y otras características, los estudiantes introducen y utilizan, generalmente, otros conceptos (como círculo, puente, arista final) que son tan ilustrativos que no requieren de una definición formal propia.

Después de que el profesor introdujera el concepto de “árbol” (un nombre sumamente ilustrativo) para los grafos caracterizados anteriormente por los estudiantes, ellos pueden ahora elaborar una definición propia de este nuevo concepto. Con este procedimiento se busca lograr dos objetivos generales importantes. Primero, el reconocimiento que la definición de un concepto debe ser breve e inequívoca; por otro lado, la larga lista de características del árbol muestra que algunas de ellas se determinan mutuamente, así que, por principio, cualquiera de ellas puede ser utilizada para la formulación de la definición. El profesor tiene que seleccionar algunas de las características cuya equivalencia es fácil de demostrar (Klose, 1978, 59-62).

Ambos objetivos están íntimamente relacionados con el método del ordenamiento local de figuras, un caso específico de lo que se llama en la matemática, generalmente, “caracterización” (véase p. 55) y que se presenta normalmente en conjunto con el tema de las figuras geométricas. Así, este tema de la teoría de los grafos se convierte, a la vez, en una forma intuitiva de acercarse a la axiomática (tomar una característica como la inicial y demostrar las otras como derivaciones de ella).

La formulación del algoritmo prepara la solución de problemas de optimización que se presenta en la siguiente clase. Se puede proponer, por ejemplo, la siguiente formulación del algoritmo: “Quita, paso por paso, de cada círculo una arista sin destruir la conectividad del grafo restante. Cuando ya no hay ningún círculo, entonces el grafo restante es un árbol constitutivo.”

3.2.8 Octava clase

Competencias: Los estudiantes

- desarrollan un algoritmo para la determinación de un árbol constitutivo mínimo,
- aplican este algoritmo a grafos con aristas ponderadas.

Plan de clase:

- Cada estudiante resuelve, mediante la estrategia de ensayo y error, el siguiente problema (fig. 10): “Hay que conectar cinco ciudades mediante una red ferrocarrilera, de tal manera que se pueda llegar de cada ciudad a cualquier otra. En cada arista están anotados los costos de construcción (en millones de pesos) correspondientes. Hay que encontrar la red más barata.”
- Los estudiantes describen su procedimiento de solución. En una discusión colectiva, ellos elaboran, a partir de las diferentes soluciones presentadas, un algoritmo que se aplica, posteriormente, a otro problema (fig. 11): “Seis ciudades deben conectarse mediante una red telefónica con costo mínimo; los costos están anotados en las aristas correspondientes.”
- La tarea para la siguiente clase consiste en determinar árboles constitutivos mínimos de varios grafos (los grafos c y d de la segunda hoja de trabajo, inventando las ponderaciones de las aristas).

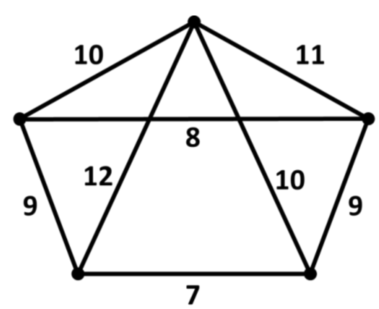


Fig. 10. *Una red de carreteras con costos de construcción.*

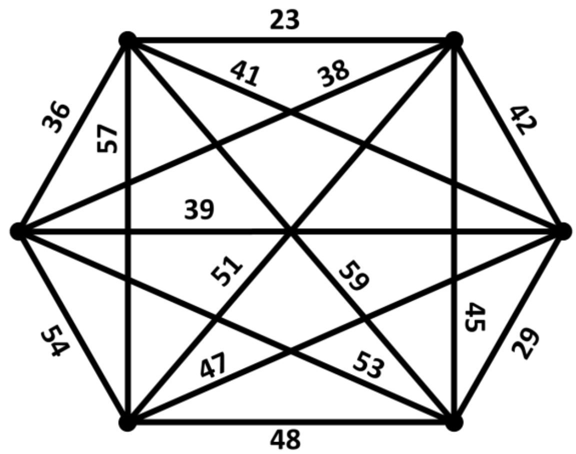


Fig. 11. *Una red telefónica con costos de construcción.*

Comentarios:

En esta clase, los estudiantes se enfrentan por primera vez con grafos, cuyas aristas tienen una ponderación indicada con números. Estos grafos juegan un papel importante para la resolución de problemas de optimización (investigación de operaciones). Aunque tengan una gran cantidad de aplicaciones, en esta propuesta didáctica ya no se retoman más adelante, para no prolongar demasiado la unidad temática. Los problemas pueden ser resueltos mediante algoritmos específicos más o menos complejos y, por eso, no contribuyen a nuevos conocimientos acerca de métodos o estrategias generales de solución de la teoría de los grafos. Se considera más importante presentarles a los estudiantes otros problemas que permiten una visión más profunda de la teoría de los grafos.

La última clase y la de hoy deben considerarse como una unidad, porque en ambas clases se construyen árboles constituyentes. En esta clase, es más fácil para los estudiantes encontrar la solución, porque el algoritmo es muy similar al tematizado en la clase anterior. Solamente hay que quitar siempre las aristas “más caras”. Es difícil demostrar que este algoritmo realmente lleva a la solución óptima (véase, por ejemplo, Weidig, 1972, 54), así que se tendría que renunciar a esta demostración. Sin embargo, el proceso de solución es tan ilustrativo que no se motiva una necesidad de demostrarlo.

3.2.9 Novena clase

Competencias: Los estudiantes

- identifican un grafo plano,
- reconocen la fórmula de Euler para grafos,
- explican la demostración de la fórmula de Euler a partir de la solución de un caso específico.

Plan de clase:

- El profesor explica la problemática de los circuitos eléctricos impresos (o *chips*), cuyas conexiones no deben cruzarse para evitar un cortocircuito. Se transfiere este problema a los grafos a través de la interconexión de cuatro puntos (fig. 12). Este problema motiva la definición de grafos planares (véase anexo), cuyas aristas no deben cruzarse.
- Los estudiantes dibujan, en parejas, otros grafos planares y describen sus características. Luego, se presentan varios ejemplos en el pizarrón.
- A partir de estos ejemplos, el profesor propone contar el número de vértices, aristas y áreas de cada uno. Anotando una lista de estos datos, los estudiantes deberían llegar (eventualmente guiados por el profesor) a la suposición de la fórmula de Euler para grafos planos: $e - k + f = 1$.
- Para el caso específico de los árboles ($f = 0$), los estudiantes ya conocen esta fórmula: $e - k = 1$. Mediante la pregunta guía, si se puede reducir cualquier grafo planar a un árbol, los estudiantes deberían llegar a la idea de aplicar el algoritmo aprendido anteriormente

para la construcción de un árbol constitutivo. Ellos ejecutan este algoritmo con algunos ejemplos y observan la variación de los números *e*, *k* y *f*.

- En una discusión colectiva, se desarrolla la demostración de forma general (véase anexo), y los estudiantes explican, posteriormente como resumen, la idea heurística de reducir el caso general a un caso específico conocido.
- Como tarea para la siguiente clase, los estudiantes deben investigar y analizar si existe una fórmula similar para los vértices, aristas y áreas de un poliedro.

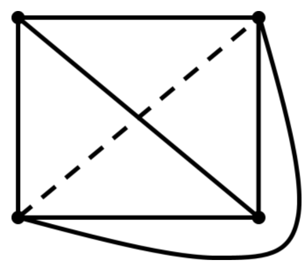


Fig. 12. *El grafo completo de cuatro vértices en forma plana (se evita el cruce de la "diagonal" al dibujarla "por fuera").*

Comentarios:

Los grafos planos se introducen mediante la descripción de un problema de actual relevancia. Los estudiantes se enfrentan a la misma pregunta que la electrónica hizo, en su desarrollo histórico, a la teoría de los grafos. Así, ellos pueden comprender un ejemplo sencillo de la aplicación de la teoría de los grafos en otra ciencia.

Después de definir la clase de grafos que corresponden a este problema (llamados "planares"), hay que estudiar las características de estos grafos. Este análisis es un procedimiento inductivo, similar al que aplica el científico mientras no tenga conocimientos profundos sobre el tema.

Una de las características más importantes de los grafos planares es la relación entre el número de sus vértices, aristas y áreas. El profesor debe guiar a los estudiantes para que lleguen a suponer la fórmula de Euler, mediante una lista adecuada de los datos de los grafos ejemplificados en el pizarrón, los estudiantes pueden llegar a suponer la fórmula. En caso de no presentar entre los grafos el ejemplo de un árbol, el profesor tendría que agregar uno, porque es importante para la siguiente fase de la clase.

Los estudiantes deberían encontrar la idea de la demostración de la fórmula supuesta, si se les mencionara el caso específico de los árboles. La repetición del proceso del descubrimiento de la demostración destaca la importancia del principio heurístico:

"No habrá ningún descubrimiento, ni en la matemática elemental ni avanzada, ni en cualquier otra área científica, dónde no participarían estos principios [generalización, especialización, analogía] de manera esencial." (Polya, 1969, 40)

Por eso, la tarea para la siguiente clase tiene la finalidad de provocar el descubrimiento de la analogía entre grafos planares y cuerpos tridimensionales en cuanto a sus vértices, aristas y áreas. Esta analogía permite suponer que haya una fórmula similar para estos cuerpos.

3.2.10 Décima clase

Competencias: Los estudiantes

- reconocen la relación entre grafos planos y poliedros,
- desarrollan la fórmula de Euler,
- aplican la fórmula de Euler para demostrar, mediante una demostración indirecta, que el "grafo de suministro" no es plano.

Plan de clase:

- Después de retroalimentar la tarea, se menciona la fórmula supuesta para los poliedros: $e - k + f = 2$.
- En una discusión colectiva, guiada por el profesor, se desarrolla la equivalencia topológica entre grafos planares y poliedros a partir del siguiente experimento mental: “Imagínese que un grafo planar sea una bolsa del mandado tejida, extendida en la mesa. Si se levanta la bolsa agarrándola con dos manos, ella forma el esqueleto de las aristas de un cuerpo tridimensional que está abierto por arriba.” Si se interpreta el área alrededor del grafo como el área superior del cuerpo, se logra una biyección entre los vértices, aristas y áreas del grafo y del cuerpo. Al invertir este proceso, cada poliedro produce un grafo planar. Entonces, hace sentido agregar en la fórmula de Euler para grafos planares el área exterior; esta fórmula se llama la fórmula Euleriana para poliedros.
- A partir del problema de encontrar la forma cómo realizar una interconexión de cinco puntos en lo plano, los estudiantes tratan de dibujar el grafo completo de cinco vértices de forma planar, es decir sin cruces entre sus aristas.
- La suposición que este problema es imposible de resolver, se demuestra en una discusión colectiva, guiada por el profesor, quien debe proponer, si los estudiantes no lo sugieren por su propia cuenta, utilizar la fórmula de Euler y de contar las aristas mediante la mitad de la suma de los grados de los vértices (véase anexo).
- Por parejas, los estudiantes resuelven el “problema de suministro” (tres casas deben conectarse subterráneamente con las estaciones de agua, gas y electricidad, sin que las excavaciones se cruzan), aplicando la misma idea como en la demostración anterior.

- Los estudiantes presentan su demostración de la imposibilidad de solución en el pizarrón. El profesor debe guiar a los estudiantes para que descubran que cada área es limitada por 4 aristas (véase anexo).
- El profesor explica el teorema de Kuratowski como caracterización de todos los grafos que no se pueden dibujar de forma planar (véase Ore, 1974, 86).
- Tarea para la siguiente clase: dibujar grafos planares con 5, 6 y 7 vértices.

Comentarios:

Los estudiantes conocen en esta clase los dos grafos no planares más importantes. Todos los demás grafos no planares se reducen, como lo indica el teorema de Kuratowski, a estos dos grafos. Aunque la demostración para este teorema es demasiado complicada para la propuesta didáctica presente, los estudiantes deberían saber que este teorema responde completamente a la problemática de la planareidad de los grafos.

El experimento mental del inicio de la clase permite que los estudiantes comprendan que la fórmula Euleriana para poliedros es equivalente a la de los grafos planares, si se cuenta el área exterior. Como la fórmula Euleriana es un resultado inmediato de la fórmula para grafos planares, demostrada en la clase anterior, no es necesario demostrarla nuevamente para poliedros. Las demostraciones que los dos grafos mencionados no son planares aclaran que puede ser de ventaja contar también el área exterior.

Se decide presentar el “problema de suministro” como el segundo de la clase, porque los estudiantes pudieran conocer su solución desde artículos sobre adivinanzas matemáticas, lo que quitaría la fase importante de ensayo y error. Los intentos y esfuerzos de encontrar la manera de poder dibujar el grafo en forma plana, motiva elaborar una demostración general para la imposibilidad de la solución.

Ambas demostraciones son indirectas y retoman este procedimiento del tema de los recorridos Hamiltonianos, lo que evidencia la universalidad de este tipo de demostraciones. En este caso, se utiliza el formalismo algebraico para llegar a la contradicción necesaria para demostrar la imposibilidad de dibujar los grafos, mencionados en el teorema de Kuratowski, de forma planar.

La tarea para la siguiente clase tiene la función introducir al contenido siguiente sobre el número máximo de aristas de un grafo planar.

Observación metodológica acerca de las dos últimas clases

Experiencias previas con el tema de la fórmula Euleriana para poliedros permiten esbozar una metodología diferente para su tratamiento didáctico. Las dos últimas clases podrían desarrollarse también mediante un enfoque inductivo, lo que quiero presentar brevemente en lo siguiente.

Se entregan a los estudiantes modelos de diferentes poliedros y se pide que los caractericen. Al anotar el número de vértices, aristas y áreas de cada poliedro, es muy probable que los estudiantes descubran la relación entre estos números que se expresa en la fórmula de Euler. Para su demostración es conveniente comparar los poliedros con grafos. Al cortar un poliedro por sus aristas, se puede extenderlo en un plano, convirtiéndose en un grafo con los mismos vértices, aristas y áreas[7].

En este momento, se motiva la caracterización de estos grafos y la introducción del concepto de "grafo planar". Un estudio inductivo de diferentes grafos planares revela la misma relación entre el número de vértices, aristas y áreas. Al demostrar la fórmula para grafos, también es válida para los poliedros.

[7] Los estudiantes reconocerían este hecho todavía más claramente, si ellos mismos construyeran los modelos, porque tendrían que dibujar primero el grafo correspondiente para luego, "levantarlo" y pegarlo como cuerpo. Lo aquí propuesto es la inversión de este proceso.

Para la demostración, en esta propuesta metodológica, no se puede partir de los árboles como caso específico, pero se podría llevar a cabo una inducción matemática (un método importante para la enseñanza de la matemática discreta) observando que al agregar una arista en un grafo planar dado (sin que cruce otra arista), también se eleva el número de áreas por uno (manteniendo el número de vértices). Otro procedimiento sería, obviamente, la demostración propuesta en el anexo.

Este ejemplo muestra que las decisiones didácticas y metodológicas no son fáciles de tomar y deben tomarse de manera consciente, porque dependen de varios factores, como la secuenciación de los contenidos, el problema inicial del tema, así como la aplicación y utilización de métodos de solución que se determinan como competencias a desarrollar por parte de los estudiantes.

Cabe destacar que el procedimiento aquí descrito es un excelente ejemplo para la cooperación, en el sentido de Polya (1969), de inducción y analogía en la matemática: se encuentra la fórmula Euleriana de manera inductiva para poliedros; al descubrir la analogía entre poliedros y grafos, se revela la misma fórmula para estos últimos; al mostrar la equivalencia topológica entre grafos y poliedros, es suficiente demostrar la fórmula solamente para uno de los objetos.

3.2.11 Onceava clase

Competencias: Los estudiantes

- reconocen que todas las áreas de grafos planares con un máximo número de aristas son limitadas por 3 aristas,
- desarrollan la fórmula para el número máximo de aristas en grafos planares,

- demuestran el teorema 8 (véase anexo) como consecuencia de la fórmula anterior.

Plan de clase:

- Para la retroalimentación de la tarea, algunos estudiantes presentan sus grafos planares con 5, 6 y 7 vértices para que, en una discusión colectiva, se llegue al resultado que grafos con el máximo número de aristas contienen sólo “triángulos”.
- Desarrollo y demostración, en una discusión colectiva, de la fórmula para el número máximo de aristas de un grafo planar, aplicando la fórmula de Euler y los principios de conteo de la clase anterior (véase anexo).
- Discusión de la pregunta si se podría utilizar la nueva fórmula para la demostración de que los grafos K_5 (grafo completo con 5 vértices) y $K_{3,3}$ (“grafo del suministro”; grafo bipartido completo con dos conjuntos de 3 vértices) no son planares, llegando al resultado que si es posible para el primero, pero para el segundo no.
- Formulación del teorema 8 (véase anexo) como derivación de la discusión anterior. Los estudiantes reconocen que la inversión del teorema 8 no es correcta ($K_{3,3}$ como contraejemplo).
- Desarrollo de la demostración que no puede haber más de 5 cuerpos platónicos (véase anexo), en una discusión colectiva guiada por el profesor.

Comentarios:

Es la última clase formal de la propuesta didáctica, en la que se busca que los estudiantes comuniquen sobre características de grafos planares y sobre demostraciones de teoremas de la teoría de los grafos. Por eso, durante el mayor tiempo de la clase se realizan discusiones con todo el grupo.

Al dibujar las soluciones de la tarea de la clase anterior, los estudiantes deberían descubrir que los grafos planares con el máximo de aristas se constituyen de puros triángulos. Así, es fácil derivar la fórmula del máximo número de aristas de un grafo planar con *n* vértices, aplicando nuevamente el principio del conteo de aristas a partir de los grados de cada vértice (véase anexo, teorema 7).

En el análisis del teorema 8 (véase anexo) permite nuevamente diferenciar entre condiciones necesarias y suficientes. Un grafo planar no puede tener “demasiadas” aristas (teorema 7 del anexo), pero aunque tenga “pocas” no implica que sea planar. Es importante presentar el contraejemplo, porque en caso contrario podría resultar que los estudiantes no lo crean.

Hay dos razones para tematizar las triangulaciones. Por un lado, se puede conocer una clase específica de grafos que tienen gran importancia en la teoría de los grafos; por ejemplo, están relacionados con el problema de los cuatro colores. Por otro lado, se puede practicar la aplicación de los principios del conteo de aristas para obtener la fórmula; principios que también juegan un papel importante en la combinatoria. Ellos son un ejemplo para el principio heurístico fundamental de obtener ecuaciones mediante dos formas diferentes de contar los mismos objetos.

La demostración del teorema 9 (véase anexo) sobre los cuerpos platónicos representa una aplicación elegante y sencilla de la fórmula Euleriana, comprobando así nuevamente la gran importancia de esta fórmula para la matemática. Esta demostración es interesante, sobre todo porque puede realizarse sin utilizar el concepto geométrico de la congruencia (de las caras o áreas de los poliedros). Normalmente, hay que basarse en cálculos sobre los ángulos internos que en la teoría de los grafos no se requieren. Esto significa que la regularidad de los cuerpos platónicos ya está determinada por su estructura topológica y que la exigencia adicional de áreas congruentes no reduce el número de los posibles cuerpos. La dedicación a este tema, podríamos llamarlo “clásico”, es un final de la propuesta didáctica muy productivo, porque se presenta, en un tema aparentemente “lejano” de la teoría de los grafos, la elegancia de sus métodos.

3.2.12 Doceava clase

Esta clase representa un epílogo lúdico de la aplicación de la teoría de los grafos. Se renuncia a mencionar competencias a desarrollar en esta clase, porque no hay intención de comprobar su logro.

Plan de clase:

- Presentación del juego “Brussels Sprouts” (véase Gardner, 1977, 17; también Wikipedia, s. f.). Después de varios intentos, los estudiantes deberían reconocer que el juego termina siempre después del mismo número de jugadas.
- Desarrollo de una demostración para esta suposición (véase Gerl, 1979, 114 s.) en una discusión colectiva.
- Presentación y realización del juego “Sprouts” (véase Gardner, 1977, 11).
- Explicación del profesor sobre los conocimientos acerca de posibles estrategias de juego (véase Gardner, 1977, 14 s.).

Comentarios:

Ambos juegos tienen la finalidad de que los estudiantes, nuevamente, se familiaricen con grafos planares y que se fomente su capacidad de imaginación topológica. La demostración de que el resultado del primer juego no depende de alguna estrategia, requiere la aplicación de la fórmula Euleriana. Este análisis del juego debería realizarse relativamente rápido en una plática colectiva, para que quede suficiente tiempo para el segundo juego que sí requiere de estrategias para ganar. Las explicaciones finales del profesor incitan a los estudiantes a desarrollar propias estrategias para el juego “Sprouts”. Para lograr esto, es necesario planificar un tiempo considerable de práctica, ya que los grafos que se producen durante el juego se pueden volver bastante complejos. Experiencias previas con este juego muestran que los estudiantes se motivan y participan con entusiasmo.

3.2.13 Treceava y catorceava clases

Se propone realizar un examen sobre los contenidos del curso (véase anexo) para comprobar los conocimientos adquiridos y, sobre todo, el logro de las competencias relacionadas con la aplicación de métodos y principios de la teoría de los grafos.

En la siguiente clase es importante retroalimentar al grupo de estudiantes sobre los resultados individuales y grupales del examen, así como sobre los aciertos y errores más comunes. Así, el profesor obtiene una visión sobre el éxito de la propuesta didáctica, y los estudiantes una retroalimentación detallada sobre sus avances en conocimientos y habilidades matemáticas. En este momento es recomendable que el profesor aclare algunas de las competencias que se esperaba desarrollar y que van más allá del contenido propio del curso. De esta manera, es posible que los estudiantes comprendan la necesidad de conectar diferentes temarios de la matemática; una experiencia más importante que el aprendizaje de los puros contenidos. La matemática es una disciplina de métodos, heurísticas y pensamiento lógico y no solamente un conjunto de conocimientos aislados.

Comentarios acerca del examen final:

Primer problema

Este problema se relaciona con los contenidos de las primeras cuatro clases. Para comprobar el conocimiento de las definiciones, se formuló este problema en el lenguaje de la teoría de los grafos. Los vértices se indicaron mediante letras para que los estudiantes pudieran nombrar sus soluciones – igual que en las clases – mencionando la secuencia de los vértices por los que pasan los recorridos Eulerianos y Hamiltonianos. La solución completa de todos los problemas parciales requiere del conocimiento de los teoremas 1 y 1' (véase anexo). Para demostrar la no existencia de un recorrido Hamiltoniano en los problemas parciales b) y d), es lo más fácil utilizar la estrategia para encontrar recorridos Hamiltonianos (véase p. 67).

Segundo problema

Con este problema se comprueba el objetivo de aprendizaje de la quinta clase, en la cual se determinaron todos los recorridos Hamiltonianos mediante la división en casos específicos y la aplicación sistemática de ensayo y error. El grado de dificultad del problema corresponde al de los problemas tratados en la clase. También aquí hay que analizar tres diferentes casos específicos.

Los dos primeros problemas del examen sirven principalmente como una introducción. Solamente piden el nivel de reproducción, por lo que deberían ser resueltos por la mayoría de los estudiantes. Los siguientes problemas son más difíciles, porque ya no pueden resolverse mediante un simple esquema conocido.

Tercer Problema

El tercer problema tiene la finalidad de comprobar la comprensión del concepto de "isomorfia", que se trató en la séptima clase. En el inciso a) se requiere una buena visión tridimensional para encontrar la asociación entre los vértices correspondientes. Aunque se pueda responder el inciso b) mediante ensayo y error, pero requiere de una idea propia de los estudiantes para justificar la solución, ya que un problema similar no se había tratado en las clases. La solución más elegante se basa en que se puede dibujar uno de los grafos de forma planar. La solución del tercer inciso exige un pensamiento claramente estructurado con el cual se pueda determinar la asociación de los vértices correspondientes paso por paso y de manera inequívoca. Para esto, es necesario identificar los vértices a partir de su grado. El primer problema parcial requiere una visión ilustrativa de la isomorfia, mientras para el tercer problema parcial hay que comprender la estructura combinatoria de ambos grafos.

Cuarto problema

Con este problema se pretende comprobar la comprensión del concepto "planar". Ambos problemas parciales tienen un grado de dificultad mayor que los problemas correspondientes en las clases. Para poder resolver el problema, los estudiantes tienen que imaginarse diferentes representaciones topológicas de los grafos, como, por ejemplo, el modelo de los resortes utilizado en las clases. En este sentido, la solución completa requiere un pensamiento propio de los estudiantes.

Quinto problema

El último problema requiere una demostración similar como la elaborada en las clases. El rendimiento propio de los estudiantes consiste en reconocer que todas las áreas del grafo tienen que ser limitadas por cinco aristas, en caso de que sea posible dibujarlo en forma planar. Para que los estudiantes puedan encontrar esta idea, se incluye una nota correspondiente. El objetivo de ser capaz de reconocer y comprender demostraciones matemáticas, aquí, se toma en cuenta como objetivo importante, pero complejo y de alto nivel de aprendizaje.

Problema adicional

Mediante este problema adicional se pretendió comprobar si los estudiantes eran capaces de tratar un teorema elemental nuevo de la teoría de los grafos y encontrar ideas propias para su demostración. Como este objetivo no fue parte explícita de la secuencia didáctica, aunque esté relacionado con las ideas didácticas generales de la secuencia, este problema no se pone de forma obligatoria. Con esto se espera obtener información sobre las capacidades heurísticas de los estudiantes, aunque es muy probable que solamente una pequeña parte del grupo pueda enfrentarse a este problema. La condición previa para la solución del problema es el conocimiento del teorema 2 (véase anexo), del cual se deriva inmediatamente la demostración pedida. Es posible encontrar otras soluciones, pero es difícil juntarlas para una demostración completa.

4 CONCLUSIONES

Hasta ahora hay pocas propuestas didácticas acerca de la introducción a la teoría de los grafos en el bachillerato. Sin embargo, hay muchos artículos metodológicos aislados sobre el manejo didáctico de temas parciales de la teoría de los grafos. La mayoría de estas propuestas se entiende no sólo como una contribución a nuevos conocimientos de los estudiantes, sino también al logro de objetivos generales de la enseñanza de la matemática. La propuesta presentada en este trabajo se entiende en este sentido.

La importancia de este trabajo radica en la propuesta de secuenciar los contenidos y de cómo podrían ser aplicados en el bachillerato de manera razonable. Se reconoce que no hay una forma única de elaborar una propuesta didáctica, sino existen varias alternativas de seleccionar y secuenciar los posibles contenidos de un programa de la teoría de los grafos para la escuela; todas estas alternativas didácticas deben ser comparadas en la práctica en cuanto a sus efectos y alcances.

Es importante recalcar que los objetivos generales de la propuesta didáctica se pueden lograr solamente si el profesor planifica sus clases de tal manera que los estudiantes tengan suficiente tiempo para propias iniciativas y el manejo autónomo de los contenidos. Sin embargo, hay que tomar en cuenta en cada grupo específico hasta qué nivel los estudiantes estén acostumbrados de trabajar de esta manera en las clases de matemáticas, porque en caso contrario podría convertirse en una sobreexigencia para ellos.

El profesor requiere un buen tacto para decidir sobre la profundidad necesaria para tratar los aspectos lógicos de los contenidos matemáticos propuestos. En este sentido constataría que durante la realización de la propuesta didáctica puedan aparecer los mismos problemas de aprendizaje como al tratar otros temas tradicionales de la enseñanza de la matemática. Aunque la teoría de los grafos puede contribuir al logro de varios objetivos generales de alto nivel, no puede evitar las dificultades generales de la enseñanza de la matemática. Estos problemas hay que superar independientemente de los contenidos tratados.

El autor está convencido que los contenidos de la teoría de los grafos son un enriquecimiento para las clases de matemáticas en el bachillerato, igual que en la secundaria. Si se realiza una unidad de enseñanza similar a la propuesta, es más fácil retomar, en otros momentos del currículum, problemas motivantes relacionados con grafos. Así, por ejemplo, se podrían extender las aplicaciones de la fórmula Euleriana (como en problemas de coloración de mapas), del tratamiento de problemas de optimización de la investigación de operaciones y del análisis de dígrafos (los aristas tienen una dirección).

Otro aspecto esencial de la teoría de los grafos en el bachillerato es su potencial aplicativo. Hay muchas áreas dentro y fuera de las propias matemáticas, en las cuales se pueden utilizar los grafos para resolver problemas de vida diaria y de otras ciencias. La Academia de Matemáticas de la UPIICSA del Instituto Politécnico Nacional, por ejemplo, imparte la asignatura de “Teoría de los grafos” dentro de la carrera de Ingeniería de Transporte, donde se resuelven principalmente problemas de optimización de procesos organizacionales de construcción y de redes de transporte.

En los inicios del CCH de la UNAM, la teoría de los grafos formó parte del plan de estudios de la asignatura de “Matemáticas”, pero fue excluida con la reforma de 1996. La propuesta aquí desarrollada para la introducción a la teoría de los grafos se adecúa perfectamente, como se ha demostrado en la fundamentación didáctica, a la estructura de las competencias generales y específicas del actual plan de estudios. Concretamente, se propone ubicar la teoría de los grafos al inicio del curso de “Matemáticas II”, cuyo tema principal es la geometría Euclidiana, para la cual la teoría de los grafos serviría como un elemento introductorio adecuado. El contenido previsto de la función cuadrática podría reubicarse al final del curso de “Matemáticas I”, donde se tematiza la solución algebraica de ecuaciones cuadráticas. Sería muy provechoso integrar ambos temas para que el alumno pueda relacionar las soluciones algebraicas con representación gráfica en un sistema de coordenadas en un solo momento, lo que favorecería la comprensión de la relación entre algebra y geometría y, por tanto, serviría como una introducción muy ilustrativa a los temas relacionados con la geometría analítica del curso “Matemáticas III”.

Finalmente, no se debe olvidar que la experiencia con la realización de propuestas didácticas específicas indica que se pueden enseñar en la escuela casi todos los contenidos matemáticos. Pero, la pregunta debe ser siempre si tiene sentido enseñar estos contenidos. Para responder esta pregunta en relación con la teoría de los grafos de una manera más objetiva, la propuesta aquí descrita no debe quedar sola. Hay que realizar más intentos que deben evaluarse de acuerdo con lo expresado tan claramente por Freudenthal (1973, 67):

> Se puede constatar una enseñanza exitosa con este u otro tema aislado, pero es un éxito barato, porque cualquier tema aislado puede enseñarse, con la insistencia necesaria, exitosamente, sobre todo si no es muy extenso o no pretende profundidad. Pero, tal seguridad local sirve poco. La verdadera cuestión es saber cómo encaja este tema en el todo de la enseñanza matemática, si puede ser integrado en esta totalidad, o si es tan insólito y aislado que finalmente no dejaría ninguna huella en la totalidad educativa.

En este sentido, la teoría de los grafos en el bachillerato trae dos beneficios principales para los alumnos: el logro de objetivos educativos que permiten la comprensión de la matemática como una ciencia viva, intuitiva, pero también rigorosa, y el amplio potencial de la aplicabilidad de los grafos en la resolución de problemas dentro y fuera de la matemática.

5 BIBLIOGRAFÍA

Alcalá Hernández, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Graó.

Alcolea Banegas, J. (2002). La demostración matemática: problemática actual. *Contrastes. Revista Internacional de Filosofía, 7*, 15-34. Recuperado el 7 de febrero 2012 en http://saavedrafajardo.um.es/WEB/archivos/Contrastes/007/Contrastes007-03.pdf.

Beisswanger, P. (1960). Auffällige Struktur-Gleichheiten (Equivalencias estructurales llamativas). *Der Mathematikunterricht, 6* (1), 11-125.

Bigalke, H. G. (1974). Über die mögliche Bedeutung der Graphentheorie beim Lernen von Mathematik (Sobre la posible importancia de la teoría de los grafos para el aprendizaje de la matemática). *Didaktik der Mathematik*, *2* (3), 189-216.

Boyd, A. B. (2002). *Discrete Mathematics Topics in the Secondary School Curriculum*. Tesis de maestría en Lousiana State University (http://etd.lsu.edu/docs/available/etd-0417102-115228/unrestricted/Boyd_thesis.pdf)

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 11* (2), 171-194.

CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades, a). Recuperado el 12 de enero 2012 en http://www.cch.unam.mx/historia.

CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades, b). Recuperado el 12 de enero 2012 en http://www.cch.unam.mx/misionyfilosofia.

CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades, c). Recuperado el 12 de enero 2012 en http://www.cch.unam.mx/plandeestudios.

CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades, d). Recuperado el 12 de enero 2012 en http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/osareas_areadematematicas.pdf.

CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades, e). Recuperado el 20 de febrero 2012 en http://portalacademico.cch.unam.mx/esquema/matematicas2.

CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades, f). Recuperado el 20 de febrero 2012 en http://portalacademico.cch.unam.mx/taxonomy/term/581.

Crespo Crespo, C. R. & Farfán, R. M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 8* (3), 287-317.

Crespo Crespo, C., Farfán, R. M. & Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y de la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 12* (1), 29-66.

De la Peña, J. A. & Barot, M. (2002). Las matemáticas en la cultura. En: De la Peña, J. A. (ed.), *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. México, D. F.: Siglo XXI. (pp. 9-50)

De Villiers, M. (2009). Experimentation and Proof in Mathematics. En: Hanna, G., Jahnke, H. N. & Pulte, H. (eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. New York: Springer. (pp. 205-221)

Engel, A. (1977). *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt* (Matemática elemental desde el punto de vista algorítmico). Stuttgart (Alemania): Klett.

Epp, S. S. (1994). The Role of Proof in Problem Solving. En: Schoenfeld, A. H. (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale, NJ (USA): Lawrence Erlbaum.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht (Holanda): D. Reidel.

Fritzler Happach, W. (1997). Triángulos y cuadriláteros inscritos en un círculo. Una aplicación del software educativo “Cabri Géomètre”. *Educación Matemática, 9* (2), pp. 116-130.

Gardner, M. (1977). *Mathematischer Karneval* (Carnaval matemático). Berlin (Alemania): Ullstein.

Gerl, P. (1979). Aus einem Seminar zur Unterhaltungsmathematik (De un seminario sobre matemática recreativa). *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 11* (3), 112-118.

Grenier, D. (2008). *Some specific concepts and tools of Discrete Mathematics*. Recuperado el 23 de enero 2012 en http://tsg.icme11.org/document/get/754.

Hanna, G. & Barbeau, E. (2009). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge. En: Hanna, G., Jahnke, H. N. & Pulte, H. (eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives.* New York: Springer. (pp. 85-100)

Harary, F. (1969). *Graph Theory*. Boston, MA (USA): Addison Wesley.

Horgan, J. (1993). The Death of Proof. *Scientific American, 269* (4), 92-103. Recuperado el 7 de febrero 2012 en: http://www.math.uh.edu/~tomforde/Articles/DeathOfProof.pdf.

Hussmann, S. (2008). *Doing mathematics – authentically and discrete. A perspective for teacher training.* Trabajo presentado en el 11th International Congress on Mathematical Education, México. Recuperado el día 20 de febrero 2012 en: http://tsg.icme11.org/document/get/768.

Jeger, M. (1974). Elementare Begriffe und Sätze aus der Theorie der Graphen (Conceptos y teoremas elementales de la teoría de los grafos). *Der Mathematikunterricht, 20* (4), 11-64.

Klose, K.-D. (1978). Netze und Landkarten (Redes y mapas). *Der Mathematikunterricht, 24* (3), 53-99.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Universidad.

López de Medrano, S. (1973). *Teoría de gráficas*. México, D. F.: Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior.

Mariotti, M. A. (2009). Proofs, Semiotics and Artefacts of Information Technologies. En: Hanna, G., Jahnke, H. N. & Pulte, H. (eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives.* New York: Springer. (pp. 169-188)

Martínez Recio, A. (2002). La demostración en matemática: una aproximación epistemológica y didáctica. En: Moreno, M. F., Gil, F., Socas, M. & Godino, J. D. (eds.), *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Almería (España): Universidad de Almería. (pp. 27-44) Recuperado el 7 de febrero 2012 en: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas05SEIEM/Vsimposio.pdf

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA (USA): NCTM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA (USA): NCTM.

Nunokawa, K. (2009). Proof, Mathematical Problem-Solving, and Explanation in Mathematics Teaching. En: Hanna, G., Jahnke, H. N. & Pulte, H. (eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives.* New York: Springer. (pp. 223-236)

Ore, O. (1974). *Graphen und ihre Anwendungen* (Grafos y sus aplicaciones). Stuttgart (Alemania): Klett.

Patrick, D. (2008). *Why Discrete Mathematics is Important*. Recuperado el 23 de enero 2012 en http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/DiscreteMath.pdf?

Polya, G. (1969). *Mathematik und plausibles Schließen* (Matemática e inferencia plausible; vol. 1). Basel (Suiza): Birkhäuser.

Rosenstein, J. G. (1997). Discrete mathematics in the schools: An opportunity to revitalize school mathematics. In J.G. Rosenstein, D. Franzblau, F. Roberts (Eds.), *Discrete mathematics in the schools*. Providence, RI (USA): American Mathematical Society.

Ruiz Zúñiga, Á. (1992). Las matemáticas modernas en las Américas … Filosofía de una reforma. *Educación Matemática, 4* (1), 10-20.

Sachs, H. (1970). Gedanken zur Entwicklung der Theorie der endlichen Graphen (Ideas sobre el desarrollo de la teoría de los grafos finitos). *Mathematik in der Schule, 8* (3), 183-197.

Turgman, A. (1997). Teaching of Graph Theory for High School and College. En: Pothier, Y. M. (ed.), *Canadian Mathematics Education Study Group, Proceedings 1997 Annual Meeting.* Halifax, Nova Scotia (Canadá): Mount St. Vincent University Press. (pp. 207-227).

Wagenschein, M. (1977). *Verstehen lehren* (Enseñar a comprender). Weinheim (Alemania): Beltz.

Weidig, I. (1972). Das Studium von Netzen (El estudio de redes). *Der Mathematikunterricht, 18* (3), 42-55.

Wikipedia (s. f.). *Sprouts (game).* Recuperado el día 25 de febrero en http://en.wikipedia.org/wiki/Sprouts_(game).

Wilson, R. J. (1976). *Einführung in die Graphentheorie* (Introducción a la teoría de los grafos). Göttingen (Alemania): Vandenhoeck & Ruprecht.

Wittmann, E. (1974a). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (Preguntas básicas de la enseñanza de la matemática). Braunschweig (Alemania): Vieweg.

Wittmann, E. (1974b). Themenkreismethode und lokales Ordnen (Método temático y local). *Der Mathematikunterricht, 20* (1), 5-18.

ANEXOS

Definiciones

Un *grafo* es un conjunto de *vértices* y un conjunto de *aristas*, dónde cada arista conecta dos vértices y cada par de vértices está conectado por, a lo sumo, una arista.

El *grado de un vértice* V indica el número de aristas que se juntan en este vértice.

Un *recorrido* es una secuencia de aristas vecinas y puede ser *abierto* o *cerrado*, dependiendo de que sus vértices finales A y B coinciden (A = B) o no (A ≠ B), respectivamente.

Un *recorrido Euleriano* de un grafo es un recorrido que contiene cada arista del grafo exactamente una vez. Un *recorrido Hamiltoniano* de un grafo es un recorrido que contiene cada vértice exactamente una vez.

Una *cobertura* de un grafo es un conjunto de recorridos abiertos en el cual cada arista aparece exactamente una vez y pertenece a exactamente uno de los recorridos.

Un grafo se llama *conexo* si cada par de vértices están conectados mediante, al menos, un recorrido. Un *árbol* es un grafo conexo G que no contiene recorridos cerrados. Un *árbol constituyente* es un árbol cuyo conjunto de vértices coincide con el conjunto de vértices de G y cuyo conjunto de aristas es un subconjunto del conjunto de aristas de G.

Dos grafos G y H se llaman *isomorfos* si existe una asignación entre ambos conjuntos de vértices tal que dos vértices A y B de G están conectados por una arista si y sólo si lo son sus imágenes A' y B' en H.

Un grafo se llama *planar* si se puede dibujar en el plano sin que dos aristas se crucen. Una *triangulación* es un grafo planar en el cual cada tripleta de vértices está conectado por exactamente tres aristas.

Un grafo *completamente regular* es un grafo cuyos vértices son todos del mismo grado y cuyas áreas están limitadas por el mismo número de aristas. Al "levantar" dicho grafo hacia la tercera dimensión, resulta un *cuerpo platónico* que es un poliedro, cuyas caras (o áreas) son todas congruentes y en cuyos vértices se junta el mismo número de áreas.

Teoremas y demostraciones

Teorema 1: Un grafo tiene un recorrido Euleriano cerrado si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

Demostración: a) "⇒" (condición necesaria para la existencia de un recorrido Euleriano cerrado): Un recorrido Euleriano contiene cada arista exactamente una vez. Se consideran las aristas de un vértice V cualesquiera. Al pasar por V se utiliza una arista de llegada y una de salida. Esto significa que el grado de V es par.

b) "⇐" (condición suficiente para la existencia de un recorrido Euleriano cerrado): Se inicia la construcción de un recorrido Euleriano en un vértice cualesquiera V, seleccionando cualquier arista VV' que incide con él. Del vértice V' se puede volver a salir (por ejemplo, por una arista V'V''), porque su grado es par. Siguiendo así, y como el conjunto de vértices es finito, en algún momento hay que volver a llegar al vértice V. Si este recorrido contiene ya todas las aristas, se encontró el recorrido Euleriano. En caso contrario, se eliminan todas las aristas utilizadas y todos los vértices que ya no tienen aristas. El grafo restante tiene, nuevamente, sólo vértices de grado par, porque la diferencia de dos números pares es par. Entonces, se puede volver a construir un recorrido cerrado que se puede acoplar al primer recorrido en un vértice común, de tal manera que se obtenga un recorrido cerrado más largo (véase la fig. 13). Se repite este procedimiento hasta que se eliminaran todas las aristas del grafo.

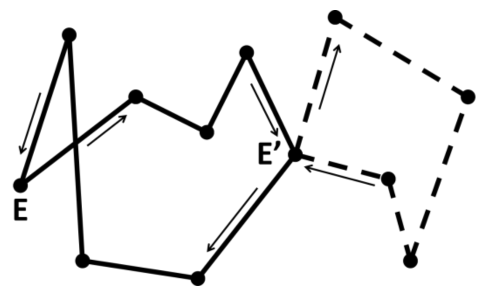


Fig. 13. *Ilustración de la demostración del teorema 1 ("⇐").*

Teorema 1': Un grafo tiene un recorrido Euleriano abierto si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar; estos dos vértices son los extremos del recorrido.

Demostración: a) "⇒" (condición necesaria para la existencia de un recorrido Euleriano abierto): Sean A y B los vértices finales del recorrido Euleriano abierto. Se agrega al grafo un vértice C de grado 2, uniéndolo solamente con A y B. De esta manera, el recorrido Euleriano abierto (A → B) se cierra, agregando las aristas BC y CA. Por tanto, todos los vértices del nuevo grafo son de grado par. Entonces, en el grafo original, solamente los vértices A y B tienen grado impar.

b) "⇐" (condición suficiente para la existencia de un recorrido Euleriano abierto): Se construye un recorrido que conecta A con B. Si se eliminan todas las aristas utilizadas y todos los vértices sin aristas, el grafo restante contiene solamente vértices de grado par. De acuerdo con la demostración del teorema 1, se pueden construir uno o varios recorridos cerrados que se pueden acoplar al primer recorrido entre A y B (véase la fig. 14).

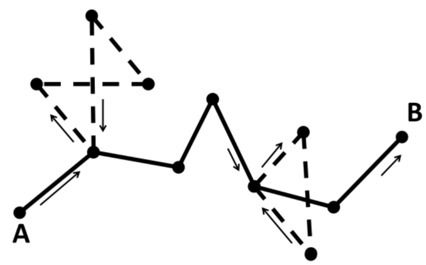


Fig. 14. *Ilustración de la demostración del teorema 1' ("⇐").*

Teorema 2: Si un grafo tiene $2n$ ($n \in$ N) vértices de grado impar, entonces una cobertura mínima del grafo contiene exactamente n recorridos abiertos.

Demostración: Suponiendo que se haya encontrado una cobertura con el mínimo de recorridos abiertos. Al pasar por cualquiera de los vértices "intermedios" se utilizan siempre dos aristas; entonces un vértice de grado impar tiene que ser el vértice final de alguno de los recorridos abiertos. Por otro lado, todos estos vértices finales tienen que ser diferentes, porque si dos recorridos tuvieran un vértice impar en común, éstos se podrían conectar en un solo recorrido en contradicción a la condición de que la cobertura era mínima.

Teorema 3: El número de vértices de grado impar de un grafo es par.

Demostración: Para cualquier grafo se puede encontrar una cobertura mínima, entonces se puede dividir el conjunto de todos los vértices impares del grafo en pares de vértices finales de los recorridos de esta cobertura.

Teorema 4: Para grafos planares con e vértices, k aristas y f áreas se tiene la fórmula: $e - k + f = 2$ (fórmula Euleriana para poliedros). Aquí, se cuenta también el área exterior del grafo.

Demostración: Se imagina el grafo como una isla en el mar, y las aristas sean diques que delimitan terrenos (las áreas del grafo). Se busca destruir el mínimo de diques para inundar todos los terrenos de la isla. Entonces, no tiene sentido destruir un dique que tiene agua de ambos lados, porque no se inundaría ningún nuevo terreno; por lo tanto, al destruir un dique se inunda exactamente un terreno. Como hay f-1 terrenos secos (sin considerar el mar alrededor de la isla), hay que destruir exactamente f-1 diques.

El sistema de los diques que quedan forman un grafo conexo, porque se hubieran resultado dos islas o terrenos independientes, el último dique destruido habría tenido agua por ambos lados. De cada vértice se puede llegar a cualquier otro vértice por exactamente un recorrido de diques, porque si existieran dos de tales recorridos, ellos delimitarían juntos un terreno todavía seco. Considerando un vértice P cualesquiera y todos los recorridos que conectan P con los demás vértices, entonces se puede relacionar cada vértice (que no sea P) con la última arista del recorrido correspondiente; o sea, e-1 diques quedan completos. Al sumar los diques destruidos y los diques completos, se obtiene la fórmula Euleriana:

$k = (f-1) + (e-1) \Leftrightarrow e - k + f = 2$ (véase Rademacher & Toeplitz, 56 s.).

Teorema 5: Para el número k de aristas de un grafo con n vértices se tiene la siguiente fórmula:

$$k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} g(E_i),$$

donde $g(E_i)$ es el grado del vértice E.

Demostración: Al sumar los grados de todos los vértices, cada arista se cuenta exactamente dos veces: para cada uno de sus dos vértices una vez. Entonces, el número de aristas es la mitad de la suma de los grados de los vértices.

Teorema 6: a) El grafo completo con 5 vértices (K_5) no es planar.

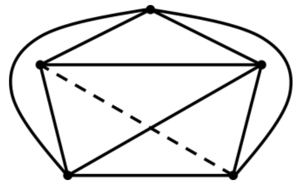


Fig. 15. *Ilustración de la demostración del teorema 6a).*

b) El grafo bipartido con 6 vértices ($K_{3,3}$) no es planar.

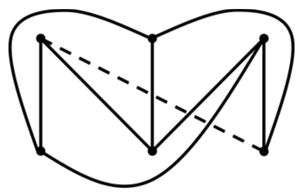


Fig. 16. *Ilustración de la demostración del teorema 6b).*

Demostración: a) El grafo K_5 tiene k = 10 aristas y e = 5 vértices. Suponiendo que fuera planar, entonces según el teorema 5 se obtendría:

$$e - k + f = 2 \Rightarrow 5 - 10 + f = 2 \Rightarrow f = 7.$$

Entonces, el grafo debería tener 7 áreas que todas serían limitadas por, al menos, 3 aristas. Como cada arista pertenece exactamente a dos áreas, se deberían tener para estas 7 áreas, al menos, (3*7) / 2 = 10.5 aristas, en contradicción al número existente de aristas.

b) El grafo $K_{3,3}$ tiene k = 9 aristas y e = 6 vértices. Suponiendo que fuera planar, entonces según el teorema 5 se obtendría:

$$e - k + f = 2 \Rightarrow 6 - 9 + f = 2 \Rightarrow f = 5.$$

Entonces, el grafo debería tener 5 áreas que todas serían limitadas por, al menos, 4 aristas porque el grafo no puede tener triángulos. Como cada arista pertenece exactamente a dos áreas, se deberían tener para estas 5 áreas, al menos, (4*5) / 2 = 10 aristas, en contradicción al número existente de aristas.

Teorema 7: Una triangulación con e vértices tiene $3e - 6$ aristas.

Demostración: Una triangulación tenga e vértices, k aristas y f áreas. Como es un grafo planar y cada arista pertenece a exactamente dos áreas, se obtiene según teorema 5: (1) $e - k + f = 2$. Como cada una de las f áreas está limitada por 3 aristas y cada arista pertenece a exactamente dos áreas, se obtiene: (2) $3f = 2k$. Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$e - k + (2/3)k = 2 \Leftrightarrow k = 3e - 6.$

Teorema 8: Un grafo con e vértices y más que $3e - 6$ aristas no es planar.

Demostración: Se conecta los e vértices, paso por paso, con el mayor número de aristas. Si un área constituida tuviera más que 3 aristas, se podría añadir otra arista dentro de esta área sin cruzar otra arista (como "diagonal"). Este procedimiento termina cuando todas las áreas son "triángulos". Entonces, se construyó una triangulación como grafo con el máximo número de aristas.

Teorema 9: Hay exactamente cinco cuerpos platónicos.

Demostración: Como cualquier poliedro, un cuerpo platónico puede representarse por un grafo planar con el mismo número de vértices, aristas y áreas. Si este grafo tiene e vértices, k aristas y f áreas (contando también el área exterior del grafo), entonces es (1) $e + f = k + 2$. Si cada área está limitada por N aristas, entonces es (2) $2k = Nf \Leftrightarrow f = 2k/N$, porque cada arista se cuenta para dos áreas. Si cada vértice incide con M aristas, entonces es (3) $2k = Me; \Leftrightarrow e = 2k/M$, porque cada arista se cuenta para dos vértices. Al sustituir las ecuaciones (2) y (3) en (1), resulta: $(2k/M) + (2k/N) = k + 2$. Dividiendo ambos lados de esta ecuación por $2k$, resulta: $(1/M) + (1/N) = (1/2) + (1/k)$, con $M, N, k \in \mathrm{N}$ y $M, N \geq 3$. Como es $k \geq 1$, tiene que ser (4) $(1/M) + (1/N) > (1/2)$. M y N no pueden ser simultáneamente mayores que 3, porque en este caso serían: $1/M + 1/N \leq 1/4 + 1/4 = 1/2$, en contradicción a la condición (4). Entonces quedan, para satisfacer la condición (4), como posibles valores para M y N:

$M = 3$, $N = 3$: $1/M + 1/N = 1/3 + 1/3 = 2/3 > 1/2$ (en este caso es $1/k = 2/3 - 1/2 = 1/6$ o $k = 6$);

$M = 3$, $N = 4$ o $M = 4$, $N = 3$: $1/M + 1/N = 1/3 + 1/4 = 7/12 > 1/2$ (en este caso es $1/k = 7/12 - 1/2 = 1/12$ o $k = 12$);

$M = 3$, $N = 5$ o $M = 5$, $N = 3$: $1/M + 1/N = 1/3 + 1/5 = 8/15 > 1/2$ (en este caso es $1/k = 8/15 - 1/2 = 1/30$ o $k = 30$).

En caso de que sean $M = 3$, $N \geq 5$ o $M \geq 5$, $N = 3$: $1/M + 1/N \leq 1/3 + 1/6 = 1/2$, lo que ya no satisface la condición (4).

Ahora, se puede hacer la siguiente tabla con los números para los vértices, aristas y áreas correspondientes a los cinco casos, utilizando las fórmulas (2) y (3) para calcular f y e, respectivamente.

M	***N***	***e***	***k***	***f***	**Nombre del poliedro**
3	3	4	6	4	tetraedro
3	4	8	12	6	hexaedro
4	3	6	12	8	octaedro
3	5	20	30	12	dodecaedro
5	3	12	30	20	icosaedro

Así, queda demostrado que no puede haber más que estos cinco grafos completamente regulares. Falta solamente construir los poliedros correspondientes, que son los cinco cuerpos platónicos (véase las siguientes figuras).

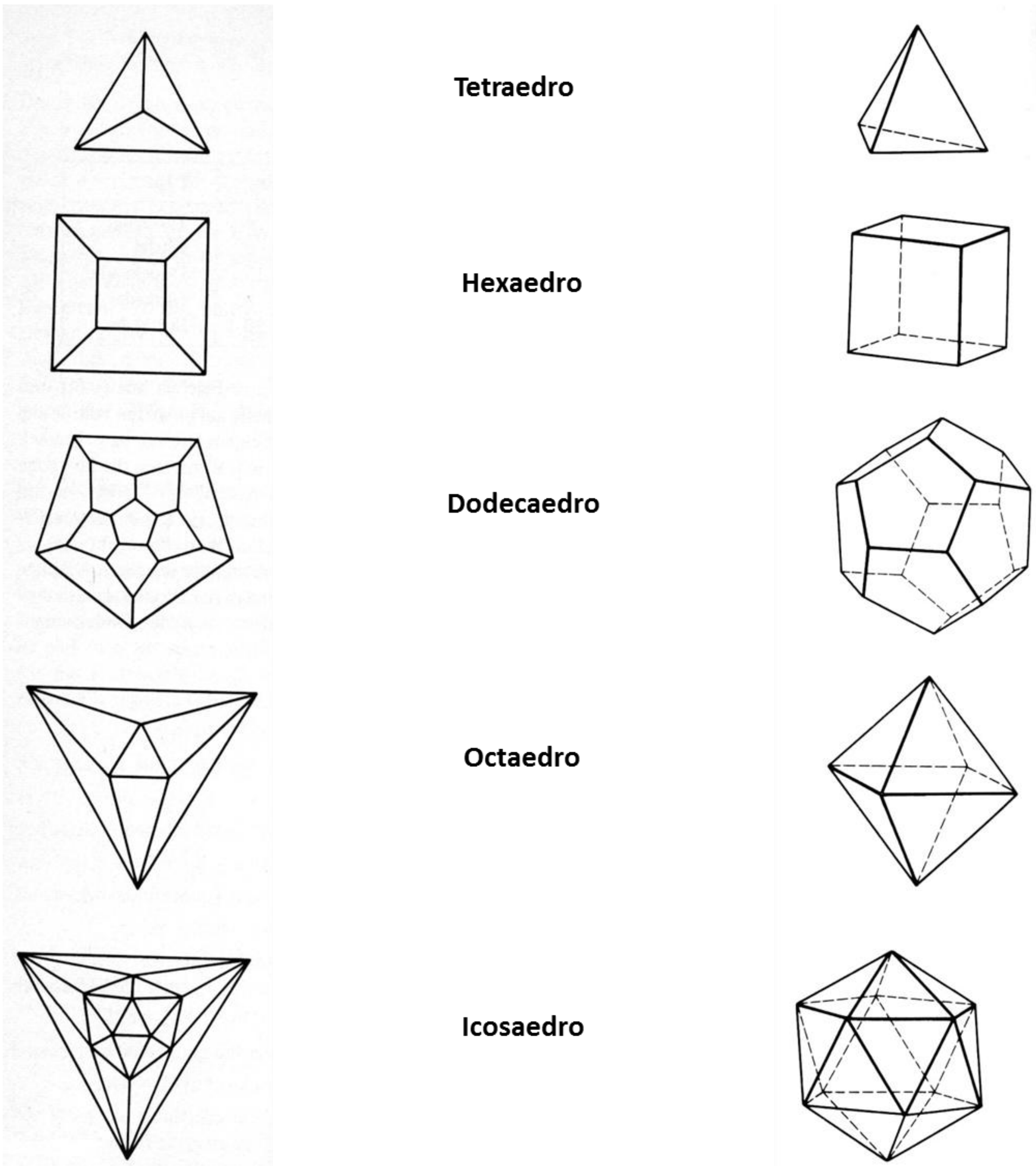
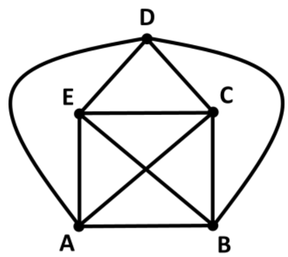


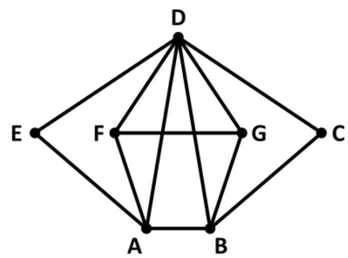
Fig. 17. *Los cinco cuerpos platónicos con sus grafos correspondientes (tomado de Ore, 1974, 94).*

Primera hoja de trabajo

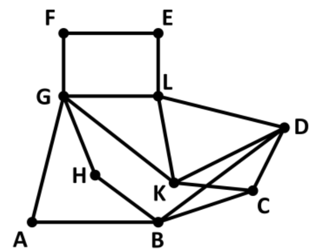
¿Cómo se pueden dibujar las siguientes figuras sin levantar el lápiz? Anota la secuencia de los puntos por los que pasaste.



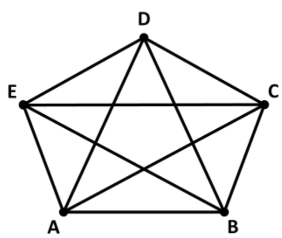
a)



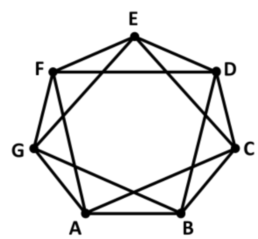
b)



c)



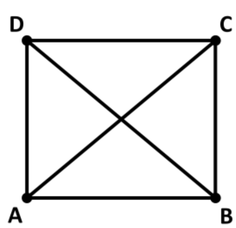
d)



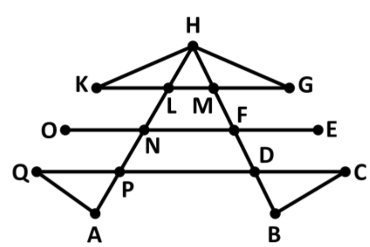
e)

Segunda hoja de trabajo

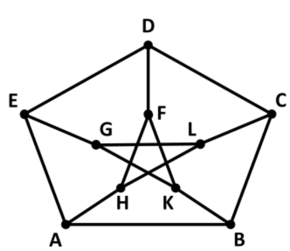
Cuenta en cada grafo el número de vértices con grado impar. Luego, determina una cobertura del grafo con el número mínimo posible de recorridos abiertos.



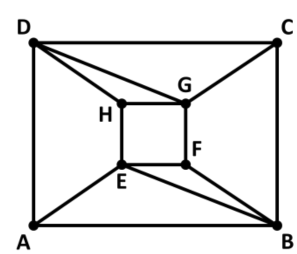
a)



b)



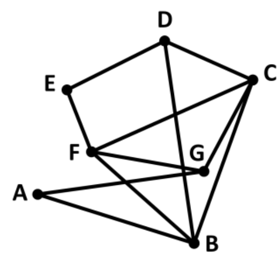
c)



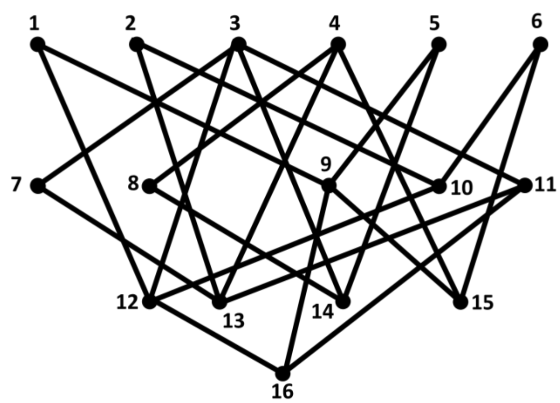
d)

Tercera hoja de trabajo

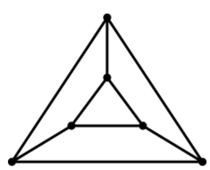
Problema 1: Determina un viaje redondo que inicia y termina en la ciudad C, visitando todas las demás ciudades exactamente una vez.

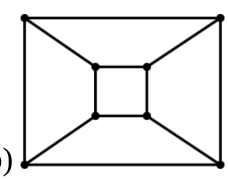


Problema 2: Determina un viaje redondo visitando cada vértice exactamente una vez.



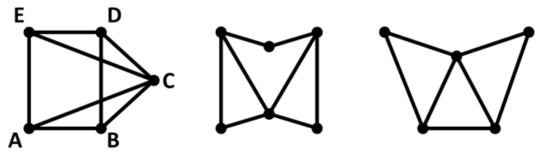
Problema 3: Determina todos recorridos posibles que pasan por cada vértice exactamente una vez.

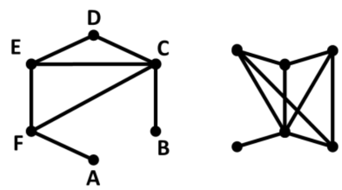
a) 

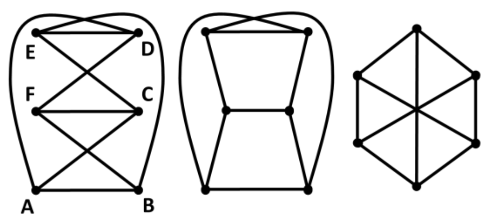
b) 

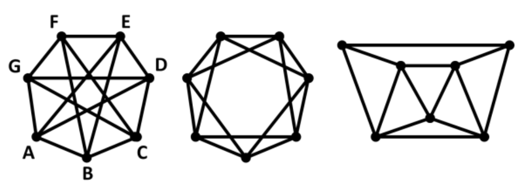
Cuarta hoja de trabajo

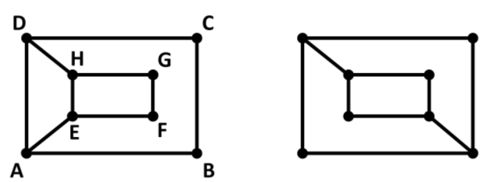
¿Cuáles de los siguientes grafos son isomorfos? Anota la correspondencia de los vértices de los grafos o justifica por qué los grafos no son isomorfos.

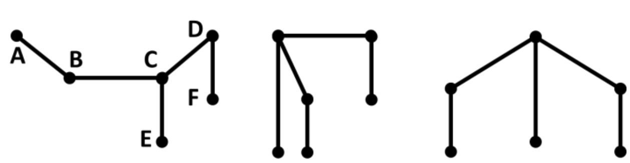
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

Soluciones de las hojas de trabajo

Primera hoja de trabajo

a) Hay recorridos Eulerianos cerrados, por ejemplo: ADBAEDCBECA.

b) Hay recorridos Eulerianos abiertos que inician y terminan en F y G, por ejemplo: FAEDCBDGBADFG.

c) Hay recorridos Eulerianos abiertos que inician y terminan en C y G, por ejemplo: GFELDCBAGLKDBHGKC.

d) Hay recorridos Eulerianos cerrados, por ejemplo: ABCDEACEBDA.

e) Hay recorridos Eulerianos cerrados, por ejemplo: ABCDEFGACEGBDFA.

Segunda hoja de trabajo

a) Los 4 vértices son de grado impar, entonces, un cubrimiento mínimo contiene dos cadenas de aristas, por ejemplo: (1) ABCDAC, (2) BD.

b) Hay dos vértices impares, entonces existe un recorrido Euleriano abierto, por ejemplo: ONPAQPDCBDFNLKHLMGHMFE.

c) Los 10 vértices son impares, entonces una cobertura mínima consiste en 5 cadenas de aristas, por ejemplo: (1) AHLCBK, (2) CDEGL, (3) EAB, (4) DFH, (5) GKF.

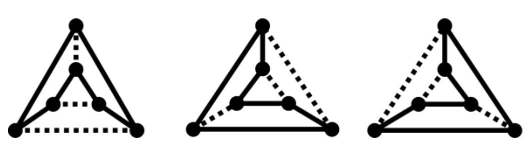
d) Hay 4 vértices impares, entonces una cobertura mínima consiste en dos cadenas de aristas, por ejemplo: (1) AEFBADHGC, (2) HEBCDGF.

Tercera hoja de trabajo

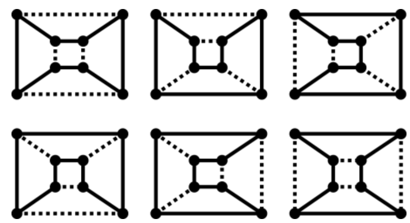
Problema 1: Hay 3 diferentes viajes redondos: (1) CFEDBAGC, (2) CDEFBAGC, (3) CDEFGABC.

Problema 2: Existe solamente un recorrido cerrado: 1-9-5-14-8-4-15-6-10-2-13-7-3-11-16-12-1.

Problema 3: a) Existen 3 recorridos cerrados que se pueden hacer coincidir mediante un giro de 60 grados.



b) Existen 6 recorridos cerrados, de los cuales solamente dos son esencialmente diferentes; los demás se pueden hacer coincidir con éstos mediante transformaciones simétricas.

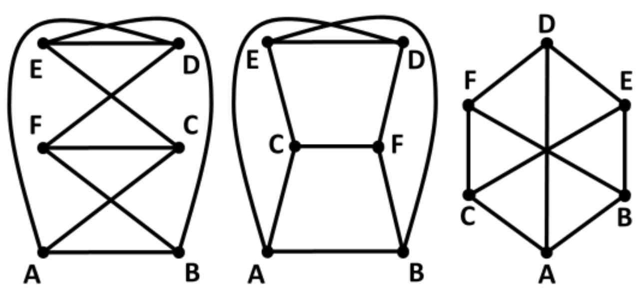


Cuarta hoja de trabajo

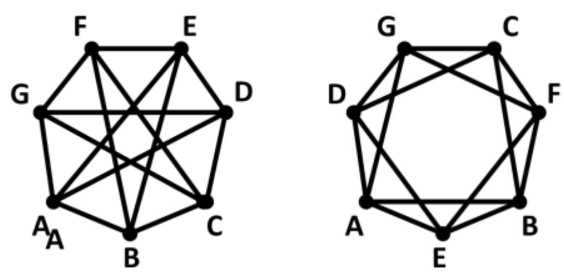
1. No hay grafos isomorfos. El segundo grafo tiene 6 vértices al contrario de los otros dos grafos. El tercer grafo contiene vértices de grado 2 al contrario del primer grafo.

2. Los grafos no son isomorfos. El primero tiene 8 aristas, el segundo 9.

3. Los 3 grafos son mutuamente isomorfos.



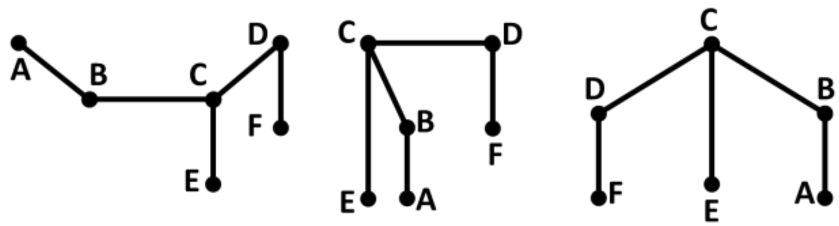
4. Los dos primeros grafos son isomorfos.



El tercer grafo no es isomorfo con los primeros, porque tiene dos vértices del grado 3 y una arista menos.

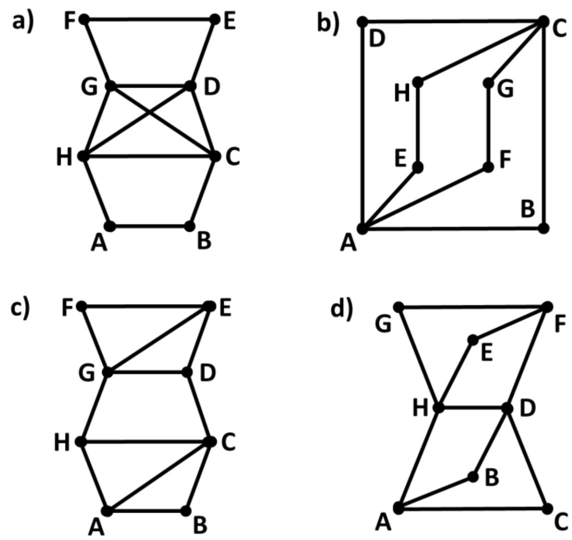
5. Los grafos no son isomorfos, porque los 4 vértices de grado 3 del primer grafo forman un cuadrilátero, al contrario que el segundo grafo. Otra diferencia es que el primer grafo tiene un recorrido Hamiltoniano, al contrario que el segundo grafo.

6. Los tres grafos son isomorfos.

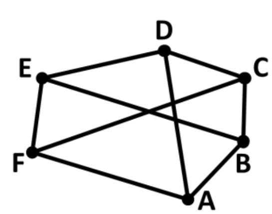


Examen final

Problema 1: Determina, en cada grafo, si tiene un recorrido Euleriano (abierto o cerrado) y un camino Hamiltoniano cerrado. Indica cada uno de estos recorridos o justifica por qué no existe tal recorrido.

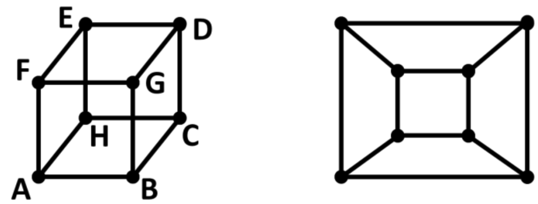


Problema 2: El siguiente grafo representa el mapa de todas las conexiones aéreas entre 6 ciudades. El conde Hamilton vive en A y quiere visitar cada una de las ciudades exactamente una vez., antes de que regrese a su casa en A. Indica todos los posibles viajes.

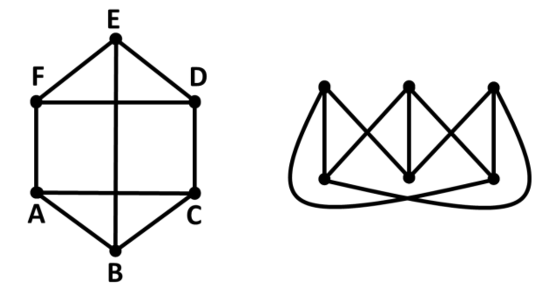


Problema 3: ¿Cuáles de los siguientes grafos son isomorfos mutuamente? En caso de isomorfia, indica la asociación de los vértices correspondientes. En caso contrario, justifica por qué no son isomorfos.

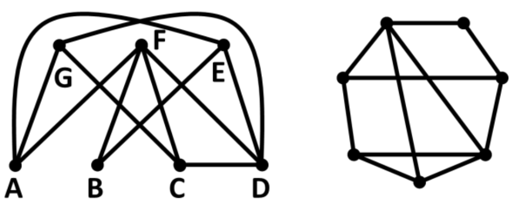
a)



b)

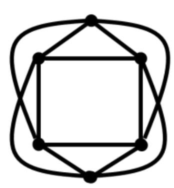


c)

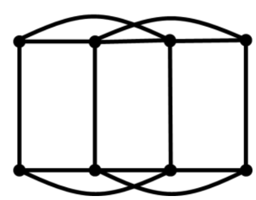


Problema 4: Dibuja los siguientes grafos de forma planar.

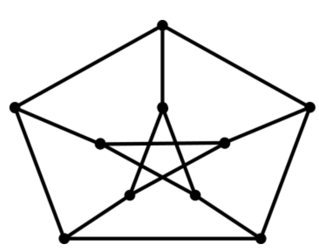
a)



b)



Problema 5: Demuestra mediante una demostración indirecta que el siguiente grafo no puede dibujarse de forma planar. (Nota: ¿Cuántas aristas delimitan cada área?)



Problema adicional: Demuestra que el número de vértices con grado impar siempre es par.

Soluciones del examen final

Problema 1:

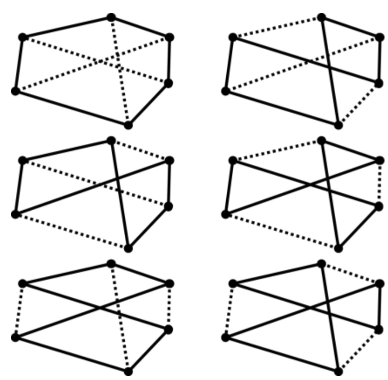
a) Recorrido Euleriano cerrado: AHGBFGCFEDCBA. Recorrido Hamiltoniano: ABCDEFGHA.

b) Recorrido Euleriano cerrado: AHEFGABCEDA. No existe un recorrido Hamiltoniano; AH, HE, AD y DE deberían ser parte de tal recorrido, pero al recorrer estas aristas obtenemos un recorrido cerrado antes de haber visitado todos los vértices.

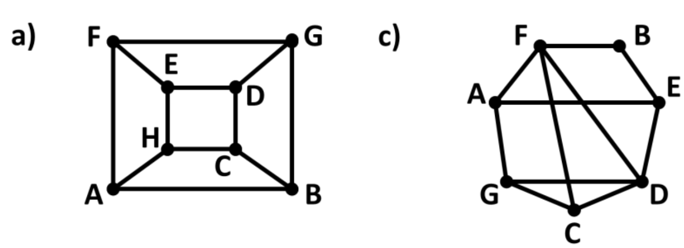
c) Cuatro vértices (A, D, E y H) tienen grado impar, por lo que no existe un recorrido Euleriano. Recorrido Hamiltoniano: ABCDEFGHA.

d) Recorrido Euleriano abierto: ACDBAHDFEHGF. No existe un recorrido Hamiltoniano. La justificación es la misma como en inciso b), utilizando las aristas AC, CD, DB y BA.

Problema 2: Existen los siguientes seis recorridos Hamiltonianos.

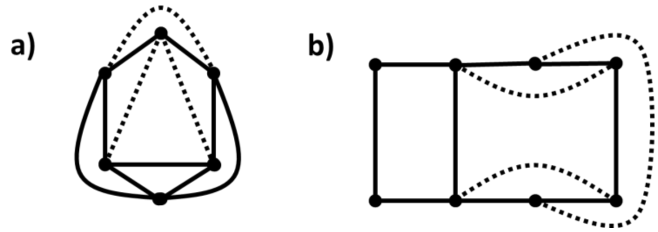


Problema 3: Los grafos de los incisos a) y c) son isomorfos, respectivamente:



b) Ambos grafos no son isomorfos, porque el primero puede dibujarse de forma planar, el segundo no (el “grafo de suministros”).

Problema 4:



Problema 5: El grafo tiene k = 15 artistas y e = 10 vértices. Se supone haberlo dibujado de forma planar. Entonces, por la fórmula Euleriana para poliedros, resulta para el número f de áreas: $e - k + f = 2 \Leftrightarrow f = 2 - 10 + 15 = 7$. Cada área está delimitada por 5 aristas. Cada arista delimita dos áreas adyacentes, entonces para todas las áreas se requerirían, al menos, (7*5) / 2 = 17.5 aristas, en contradicción al número de aristas existentes (k = 15).

Problema adicional: Véase, en el anexo, la demostración del teorema 3.