



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

TEORÍA DE GRUPOS EN SISTEMAS
DE MUCHOS CUERPOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:
ROBERTO ADRIÁN GARCÍA GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. OCTAVIO CASTAÑOS GARZA



posgrado en ciencias físicas
u n a m

COMITÉ TUTORAL:
DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA
DR. JUAN CARLOS LÓPEZ VIEYRA



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

1. Introducción	1
2. Esquema de segunda cuantización	7
2.1. Modelos de partícula independiente	7
2.2. Sistemas de muchas partículas	8
3. Teoría de grupos en sistemas de muchos cuerpos	21
3.1. Elementos de teoría de grupos	21
3.2. Bases polinomiales de grupos unitarios	25
3.2.1. Polinomios de máximo peso	36
3.3. Estados de Gelfand-Tsetlin	41
4. Bases polinomiales de $U(4)$ y $U(9)$	49
4.1. Grupo $U(4) \supset U(2) \times U(2)$	49
4.2. Grupo $U(9) \supset U(3) \times U(3)$	60
4.2.1. Operadores de descenso de $U(3)$	70
4.2.2. Identificación con estados de Gelfand-Tsetlin	80
5. Espectroscopía de átomos complejos	87
5.1. Espectroscopía	87
5.2. Hamiltoniano y espectro de energías	92
5.2.1. Sistema de electrones en la capa s	97
5.2.2. Sistema de electrones en la capa p	99
5.2.3. Sistema de electrones en la capa d	124
6. Conclusiones	155
A. Segunda cuantización	159
B. Tensores irreducibles	175
B.1. Operadores tensoriales	175
B.2. Teorema de Wigner-Eckart	177

C. Elementos de matriz del operador Runge-Lenz	179
D. Elementos de teoría de representaciones	183
E. Elemento de matriz del generador \mathcal{C}_2^3	191
F. Diagramas de Young	193
G. Relaciones de conmutación	197
H. Tensores unitarios de Racah	207
Bibliografía	209

Capítulo 1

Introducción

Para entender la importancia que tiene la teoría de grupos en la física es indispensable hablar primero de la simetrías, concepto íntimamente ligado a las transformaciones y a los grupos. La noción de simetría es muy antigua; ya para los griegos tenía la connotación de conmensurabilidad de los objetos o cosas respecto a la unidad. Esta idea perduró hasta el renacimiento. En 1673 Claude Perrault redefinió el concepto como una relación de igualdad entre los elementos opuestos, es decir, la simetría bajo la reflexión; de esta manera, operaciones matemáticas tales como traslaciones, reflexiones y rotaciones son introducidas conduciendo finalmente a la noción de simetría en la cristalografía.

Esta evolución del concepto de simetría fue relacionada con el naciente formalismo matemático en el siglo XIX llamado teoría de grupos, lo que permitió establecer en forma más cuantitativa las simetrías asociadas al grupo de transformaciones que dejan invariantes ecuaciones de movimiento de los sistemas físicos. Uno de los propósitos de esta contribución es mostrar cómo las simetrías pueden ser usadas principalmente en mecánica cuántica para simplificar la comprensión de fenómenos físicos que ocurren en moléculas, átomos, núcleos y en partículas elementales.

Joseph Lagrange en su estudio de raíces de ecuaciones algebraicas de tercero y cuarto orden, introduce las permutaciones, que son transformaciones biyectivas entre dos conjuntos de objetos. Se puede decir que Lagrange es de los precursores de la teoría de grupos, que fue desarrollada posteriormente por Evariste Galois y Auguste Cauchy. En 1832 Galois usa la estructura del grupo de permutaciones para resolver en forma cerrada ecuaciones polinomiales cuárticas y cúbicas, probando que las ecuaciones de quinto o mayor orden no pueden ser resueltas de forma cerrada. Por su parte Cauchy estudió las propiedades del grupo simétrico.

Evgraf Fedorov y Arthur Schönflies establecieron una lista completa de 230 grupos cristalográficos. Fedorov consideró que el grupo espacial, para tener significado, debería restringirse a ideas preconcebidas y de otra manera no era real. Schönflies demandó únicamente que el grupo de operaciones de simetría sea geoméricamente

posible: por esa razón extendió la lista de 65 hasta 230 el número de grupos cristalográficos. Un sólido cristalino es un arreglo de celdas unitarias tales que el cristal es invariante ante traslaciones de la red. Aunque hay otro tipo de isometrías, como las rotaciones que mantienen fijo un punto. Los grupos cíclicos C_n de simetrías de moléculas contienen únicamente un eje de rotación de n -ésimo orden, los grupos C_{nv} adicionalmente tiene un plano especular perpendicular al eje de rotación de n -ésimo orden.

El grupo de rotaciones impropias tiene un eje de rotación-reflexión de n -ésimo orden. Los grupos dihédricos D_n tienen un eje de rotación de n -ésimo orden, un eje doble de rotación perpendicular al eje mencionado. Los grupos D_{nh} nuevamente contienen las simetrías de D_n y un plano especular que contiene al eje de rotación de n -ésimo orden y bisecta los ángulos entre los ejes dobles.

Después, en 1893 Marius Sophus Lie desarrolla la teoría de grupos continuos. Él consideró el conjunto de transformaciones continuas $\vec{x} = f(\vec{x}_0, \vec{a})$ que lleva al punto \vec{x}_0 del espacio en otro punto \vec{x} del mismo. Él estudió el conjunto de transformaciones continuas que pueden ser descritas en la vecindad de la identidad, las cuales son conocidas como álgebras de Lie.

La teoría de las álgebras de Lie semisimples y sus representaciones está en el corazón de la matemática moderna. Las álgebras de Lie semisimple sobre los números reales y complejos fueron clasificadas en los trabajos de Cartan y Killing en los años 1930.

Hay 4 series infinitas A_n , B_n , C_n y D_n que se llaman álgebras de Lie clásicas, y 5 álgebras de Lie Excepcionales E_6 , E_7 , E_8 , F_4 y G_2 . La estructura de estas álgebras de Lie está descrita en términos de conjuntos finitos de vectores en un espacio Euclidiano llamado el sistema de raíces. Debido al teorema de completa reducibilidad de Weyl, la teoría de representaciones de dimensión finita de álgebras de Lie semisimples se reduce al estudio de representaciones irreducibles [1], que son parametrizadas por los pesos más altos. Los caracteres y dimensiones son explícitamente conocidos por la fórmula de Weyl.

Georg Frobenius e Issai Schur establecieron la teoría de las representaciones; éstas son correspondencias homomórficas entre conjuntos de transformaciones y operadores. Si el homomorfismo se reduce a un isomorfismo se tiene una representación fiel. Si la correspondencia se hace con operadores lineales entonces la representación es lineal. Las representaciones más útiles desde el punto de vista físico son las transformaciones unitarias. Esto se debe a que preservan el producto escalar especialmente en mecánica cuántica. Al respecto cabe mencionar los dos lemas de Schur, los cuales son de utilidad en la clasificación de las representaciones irreducibles.

Las simetrías pueden ser clasificadas de acuerdo con las propiedades de los grupos de transformaciones asociadas; éstas pueden ser locales o globales, lo cual depende

de los parámetros de transformación. Si los parámetros son los mismos en todos los puntos de espacio-tiempo se dice que las simetrías son globales, mientras que si los parámetros dependen del punto del espacio-tiempo se dice que son locales.

Como se puede ver, la teoría grupos la podemos encontrar en la descripción de sistemas atómicos, nucleares y partículas elementales; de hecho también se encuentra en óptica cuántica, por ejemplo, en sistemas de dos y tres niveles.

El presente estudio puede resumirse de la siguiente manera.

En el capítulo dos se considera un sistema de muchas partículas que está descrito por un hamiltoniano que consta de dos términos: el primero corresponde a un hamiltoniano de partículas independientes, y el segundo término está relacionado con la interacción residual que existente entre éstas.

Se usa el formalismo de segunda cuantización para escribir el hamiltoniano mencionado junto con algunos operadores físicos que son de mucha utilidad para clasificar los estados, tales como las componentes del momento angular ℓ_q , las del espín S_m , L^2 y S^2 entre otros. Se observa que dichos operadores quedan descritos por generadores de un grupo unitario $\mathcal{U}(n)$ que están realizados en función de operadores fermiónicos o bosónicos de creación y aniquilación si las partículas tienen espín semientero o enteros, respectivamente.

Los grupos unitarios se ven al inicio del capítulo 3, en donde se definen los generadores $\mathcal{C}_\rho^{\rho'}$ del grupo $\mathbf{U}(4r)$ (aquí 4 denota los grados de libertad internos, mientras que r los grados de libertad espaciales) y sus relaciones de conmutación. En esta parte se utiliza el hecho de que el grupo anterior tiene como subgrupo al producto directo $\mathcal{U}(r) \times U(4)$; aquí los grupos $U(4)$ y $\mathcal{U}(r)$ tienen por generadores a $\mathcal{C}_\sigma^{\sigma'}$ y $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$, respectivamente. Por supuesto que los generadores de los subgrupos satisfacen relaciones de conmutación similares a las del grupo más grande. En este capítulo se introducen los operadores de Casimir que como ya se sabe conmutan con todos los generadores del grupo; en especial se destacan el de primer orden, N , y el de segundo, Γ , que serán de gran utilidad en los cálculos.

Siguiendo el formalismo introducido por Moshinsky [2] se construye la base que porta la representación irreducible del grupo unitario $\mathbf{U}(4r)$. Ésta es una base polinomial en los operadores de creación $b_{\mu s}^\dagger$. El peso de un elemento arbitrario de la base se define como un vector $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r)$ en el que cada ω_n es el eigenvalor del generador de peso \mathcal{C}_n^n al actuar sobre dicho polinomio. Esta definición da un criterio para comparar el peso de dos polinomios arbitrarios de la base; usando dicho criterio y las relaciones de conmutación se clasifican los generadores en tres categorías a saber, los de ascenso $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$ $\mu' > \mu$, los de peso \mathcal{C}_μ^μ con $\mu = 1, 2, \dots, r$, y los de descenso

$C_{\mu}^{\mu'}$ $\mu > \mu'$. En forma análoga se clasifican los generadores del grupo $U(4)$.

Por un teorema de Cartan [3] de entre todos los polinomios de la base existe uno de peso máximo (peso mínimo) mediante el cual se puede caracterizar la representación irreducible del grupo unitario. La acción de los generadores de ascenso (descenso) de ambos grupos sobre dicho estado debe ser cero y de acuerdo con el criterio de comparación de los pesos, este debe ser el máximo (mínimo), esto garantiza que el polinomio con los pesos $[h_1, h_2, \dots, h_r]$ y $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$ porte la representación irreducible del producto directo $\mathcal{U}(r) \times U(4)$.

Con el polinomio de peso máximo que porta la representación irreducible a nuestra disposición lo que procede es obtener la base correspondiente a esta representación; para esto se utilizan los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky L_n^k con $k < n$ [2]. Dichos operadores bajan la representación del grupo $\mathcal{U}(n)$ pero al mismo tiempo son estados de máximo peso del subgrupo $\mathcal{U}(n-1)$. Repitiendo este procedimiento, con la ayuda de los operadores de descenso de este grupo se obtienen todos los estados de máximo peso pero ahora del grupo $\mathcal{U}(n-2)$. Continuando este proceso hasta llegar al grupo $\mathcal{U}(2)$ se construye la base. En ésta base se calcularán los elementos de matriz de los generadores.

Aplicaciones del formalismo desarrollado se ven en el Capítulo 4. Primero se obtiene el estado de máximo peso: después se construyen los operadores de descenso normalizados y se escribe un estado arbitrario de la base en términos de potencias de los operadores de descenso actuando sobre el estado de máximo peso. Posteriormente se establece la correspondencia entre la base polinomial y los estados de Gelfand-Tsetlin. Finalmente se calculan los elementos de matriz de los generadores de los grupos involucrados. Esto se hace para las cadenas de grupos siguientes: $\mathbf{U}(4) \supset \mathcal{U}(2) \times U(2)$ y $\mathbf{U}(9) \supset \mathcal{U}(3) \times U(3)$, donde se considera que el número de grados de libertad espaciales es el mismo que el de internos son, es decir, $n = r = 2, 3$.

Por último tenemos las aplicaciones a sistemas atómicos de muchos electrones en los orbitales s , p y d . Para estos sistemas se utiliza el esquema de clasificación $\mathbf{U}(2(2l+1)) \supset \mathcal{U}(2l+1) \times U(2)$, donde la l caracteriza el momento angular orbital de los electrones, para el sistema, por ejemplo, $l = 0$ para la capa s , $l = 1$ para la capa p , y $l = 2$ para la capa d .

Para cada una de éstas l'_s se han expresado los hamiltonianos en el formalismo de *segunda cuantización*, considerando como término de interacción residual la repulsión coulombiana entre los electrones. Dichos hamiltonianos pueden ser reescritos en términos de operadores tales como el operador de número N , el operador de Casimir de segundo orden $\Gamma(2l+1)$, así como los operadores de momento angular orbital total \hat{L} y el espín total \hat{S} entre otros.

En el caso de las capas s y p se obtienen expresiones analíticas para los espectros energéticos en función de los operadores antes mencionados.

Dado el número de electrones y considerando el esquema de clasificación, se obtienen los estados de máximo peso de las particiones correspondientes a N . En este sistema de clasificación, el espín total del sistema de electrones queda determinado por la partición del grupo $U(2)$, por lo que en el resto del capítulo se hará hincapié en el grupo complementario.

Utilizando potencias de los operadores de descenso del grupo $U(2l+1)$ se construyen todos los estados de máximo peso en el grupo $U(2l)$; repitiendo el procedimiento con los operadores de descenso de este grupo, se obtiene los estados de máximo peso en el grupo $U(2l-1)$; y así sucesivamente hasta obtener los estados de máximo peso del grupo $U(2)$ y finalmente la base. Con dichos estados se calcula la acción del operador \hat{L}^2 y después se construye la representación matricial.

En este esquema de clasificación no se incluye al grupo $SO(3)$ por lo que el momento angular no está bien definido. Para tener estados con buen momento angular, es decir, que sean eigenestados del operador L^2 , se diagonaliza la representación matricial de dicho operador. Esto permite conocer el contenido de momento angular orbital L , de las representaciones de los grupos unitarios de $U(2l+1)$. Hay que mencionar que en la interacción residual debida a la repulsión coulombiana en la capa d se produce un término que mezcla estados, es decir, que no es diagonal en la base canónica, ni en la base que diagonaliza al operador de Casimir de segundo orden del grupo $SO(5)$.

Capítulo 2

Esquema de segunda cuantización

2.1. Modelos de partícula independiente

Los sistemas de fermiones pueden describirse convenientemente identificando el potencial común en el que se mueven las partículas como un operador de un cuerpo más una interacción residual entre ellas. Así el problema de muchas partículas se descompone en la forma

$$H = T + V = H_0 + H_1, \quad (2.1)$$

donde $H_1 = V - U$, y

$$H_0 = \sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{p_i^2}{2m_i} + U(r_i) \right\}. \quad (2.2)$$

$U(r_i)$ es un potencial de un cuerpo apropiadamente seleccionado. En este caso el estado que describe al sistema está compuesto por el producto directo de cada uno de los espacios que describen a cada una de las partículas,

$$|\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_n\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle, \quad (2.3)$$

en donde se satisfacen las ecuaciones de eigenvalores de la energía para cada partícula, $h_i|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle$. Tomando esto en cuenta, el valor de la energía adquiere la forma

$$E = \sum_{i=1}^n E_i. \quad (2.4)$$

Ejemplos de modelos de este tipo son los sistemas coulombianos en los que electrones están atraídos por un núcleo que produce un potencial de la forma $U(r_i) = -\frac{Ze^2}{r_i}$. Para átomos hidrogenoides es conocido el espectro de energías de cada partícula; para sistemas nucleares en donde las partículas pueden ser protones o neutrones, el potencial común tiene la forma de un oscilador armónico.

2.2. Sistemas de muchas partículas

Estudiamos sistemas de muchos cuerpos que pueden describirse con hamiltonianos de la forma

$$H = \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_i^2}{2m} + U_i \right] + \sum_{i<j=1}^n V_{ij}, \quad (2.5)$$

donde U_i, V_{ij} son potenciales de uno y dos cuerpos, respectivamente. Ninguno de los potenciales es necesariamente central y las partículas de masa m obedecen la estadística de **Fermi-Dirac**. Nuestro primer objetivo es reescribir el hamiltoniano anterior de tal manera que la estructura de grupo asociada se manifieste claramente. Esto se hace con la ayuda del apéndice (A), que esencialmente consiste en reemplazar las funciones de partícula independiente $\Psi_{\nu lm, \sigma}(x) = \psi_{\nu lm}(x)\chi_{\sigma}$ que se encuentran en el espacio de Hilbert por operadores de creación en un espacio de Fock, es decir

$$\psi_{\nu lm}(x)\chi_{\sigma} \rightarrow b_{\nu lm \sigma}^{\dagger}|0\rangle.$$

Usando el esquema de segunda cuantización expresamos el hamiltoniano (2.5) en términos de operadores fermiónicos de creación b_{ρ}^{\dagger} y aniquilación b^{ρ} , que como sabemos satisfacen las relaciones de anti-conmutación

$$\{b_{\rho}^{\dagger}, b^{\rho'}\} = \delta_{\rho}^{\rho'}, \quad \{b_{\rho}^{\dagger}, b_{\rho'}^{\dagger}\} = \{b^{\rho}, b^{\rho'}\} = 0, \quad (2.6)$$

donde el índice ρ indica los estados de una partícula disponibles. Para definir explícitamente estos estados, podemos escoger un potencial central común, no necesariamente U_i y clasificar los estados por νlm correspondientes al número cuántico principal de este potencial, el momento angular orbital y su proyección, respectivamente. Además se debe tener en cuenta el número cuántico de espín σ , y si tratamos con nucleones se tendrá que incluir el isospín τ . Entonces el estado ρ corresponderá a las etiquetas

$$\rho \longrightarrow \nu lm, \sigma \tau. \quad (2.7)$$

Los operadores de uno y dos cuerpos en el formalismo de segunda cuantización están dados por las expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \sum_{\rho_1, \rho'_1} \langle \rho_1 | W_1 | \rho'_1 \rangle b_{\rho_1}^{\dagger} b^{\rho'_1}, \\ \mathcal{V} &= \frac{1}{2} \sum_{\rho_1 \rho'_1} \sum_{\rho_2 \rho'_2} \langle \rho_1 \rho_2 | V_{12} | \rho'_1 \rho'_2 \rangle b_{\rho_2}^{\dagger} b_{\rho_1}^{\dagger} b^{\rho'_1} b^{\rho'_2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

En este esquema al estado de n -partículas lo podemos representar como el producto de operadores de creación actuando sobre el vacío, es decir,

$$|\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n\rangle \equiv b_{\rho_1}^{\dagger} b_{\rho_2}^{\dagger} \cdots b_{\rho_n}^{\dagger} |0\rangle. \quad (2.9)$$

El producto escalar de dos estados arbitrarios $\langle \rho'_1, \rho'_2 \cdots, \rho'_n | \rho_1, \rho_2 \cdots \rho_n \rangle$ se obtiene usando las reglas de anticonmutación de tal manera que

$$\langle 0 | b^{\rho'_n} \cdots b^{\rho'_1} b_{\rho_1}^\dagger \cdots b_{\rho_n}^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\rho'_1 \cdots \rho'_n}^{\rho_1 \cdots \rho_n} \equiv \det \| \delta_{\rho_i}^{\rho'_j} \|, \quad (2.10)$$

donde $\delta_{\rho_1 \rho_2}^{\rho'_1 \rho'_2}$ es un determinante de deltas, que define la propiedad de normalización. Por ejemplo,

$$\delta_{\rho_1 \rho_2}^{\rho'_1 \rho'_2} = \delta_{\rho_1, \rho'_1} \delta_{\rho_2, \rho'_2} - \delta_{\rho_1, \rho'_2} \delta_{\rho_2, \rho'_1}.$$

Reemplazando el índice ρ por el doble índice μs , donde μ tiene que ver con la parte espacial y s con la parte del espín e isoespín del estado, se obtienen los operadores de uno y dos cuerpos para un sistema nuclear.

A continuación se muestra que este esquema es equivalente al utilizado comúnmente, en el que los estados están representados por funciones del espacio de Hilbert.

En la representación ordinaria, un estado de n partículas que obedecen la estadística de Fermi-Dirac es caracterizado por el determinante de Slater

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\mathfrak{P}} (-)^{\mathfrak{P}} \mathfrak{P} [\psi_{\rho_1}(1) \psi_{\rho_2}(2) \cdots \psi_{\rho_n}(n)], \quad (2.11)$$

donde \mathfrak{P} define las permutaciones de las índices $1, 2, \cdots, n$, el factor $(-)^{\mathfrak{P}}$ nos dice si el número de transposiciones que componen la permutación es par, en ese caso es positivo, y en el caso contrario negativo.

Si tomamos el producto escalar de dos estados en esta representación, se produce el mismo resultado que si se hubiera hecho en segunda cuantización. En el esquema de Schrödinger los elementos de matriz tienen el significado

$$\begin{aligned} \langle \eta_1 | W_1 | \eta'_1 \rangle &= \int \psi_{\eta_1}^*(1) W_1 \psi_{\eta'_1}(1) d\tau_1, \\ \langle \eta_1 \eta_2 | V_{12} | \eta'_1 \eta'_2 \rangle &= \iint \psi_{\eta_1}^*(1) \psi_{\eta_2}^*(2) V_{12} \psi_{\eta'_1}(1) \psi_{\eta'_2}(2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si consideramos ahora el cálculo de los elementos de matriz pero usando el formalismo de segunda cuantización con los operadores de uno y dos cuerpos \mathcal{W} y \mathcal{V} , respectivamente, y tomando en cuenta las expresiones (2.9), (2.10) se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle \rho'_1, \rho'_2 \cdots \rho'_n | \mathcal{W} | \rho_1, \rho_2 \cdots \rho_n \rangle &= \sum_{\eta_1, \eta'_1} \langle \eta_1 | W | \eta'_1 \rangle \langle \rho'_1, \rho'_2, \cdots \rho'_n | b_{\eta_1}^\dagger b^{\eta'_1} | \rho_1, \rho_2 \cdots, \rho_n \rangle \\ &= \sum_{\eta_1, \eta'_1} \langle \eta_1 | W | \eta'_1 \rangle \langle 0 | b^{\rho'_n} \cdots b^{\rho'_1} b_{\eta_1}^\dagger b^{\eta'_1} b_{\rho_1}^\dagger \cdots b_{\rho_n}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \sum_{\eta_1, \eta'_1} \langle \eta_1 | W | \eta'_1 \rangle \langle 0 | b^{\rho'_n} \cdots b^{\rho'_1} (\delta_{\eta_1}^{\eta'_1} - b^{\eta'_1} b_{\eta_1}^\dagger) b_{\rho_1}^\dagger \cdots b_{\rho_n}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \sum_{\eta_1, \eta'_1} \langle \eta_1 | W | \eta_1 \rangle (\delta_{\eta_1}^{\eta'_1} \delta_{\rho_1 \cdots \rho_n}^{\rho'_1 \cdots \rho'_n} - \delta_{\eta_1 \rho_1 \cdots \rho_n}^{\eta'_1 \rho'_1 \cdots \rho'_n}). \end{aligned}$$

Para el caso de dos cuerpos tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \rho'_1 \cdots \rho'_n | \mathcal{V} | \rho_1 \cdots \rho_n \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\eta_1 \eta'_1 \\ \eta_2 \eta_2}} \langle \eta_1 \eta_2 | V_{12} | \eta'_1 \eta'_2 \rangle \langle 0 | b^{\rho'_n} \cdots b^{\rho'_1} b_{\eta_2}^\dagger b_{\eta_1}^\dagger b^{\eta'_1} b^{\eta'_2} b_{\rho_1}^\dagger \cdots b_{\rho_n}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\eta_1 \eta'_1 \\ \eta_2 \eta_2}} \{ \langle \eta_1 \eta_2 | V_{12} | \eta'_1 \eta'_2 \rangle [\langle 0 | b^{\rho'_n} \cdots b^{\rho'_1} (\delta_{\eta_2 \eta_1}^{\eta'_2 \eta'_1} - \delta_{\eta_1}^{\eta'_1} b^{\eta'_2} b_{\eta_2}^\dagger + \delta_{\eta_2}^{\eta'_1} b^{\eta'_2} b_{\eta_1}^\dagger \\
&\quad - \delta_{\eta_2}^{\eta'_2} b^{\eta'_1} b_{\eta_1}^\dagger + \delta_{\eta_1}^{\eta'_2} b^{\eta'_1} b_{\eta_2}^\dagger + b^{\eta'_2} b^{\eta'_1} b_{\eta_1}^\dagger b_{\eta_2}^\dagger) b_{\rho_1}^\dagger \cdots b_{\rho_n}^\dagger | 0 \rangle] \}, \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\eta_1 \eta'_1 \\ \eta_2 \eta_2}} \{ \langle \eta_1 \eta_2 | V_{12} | \eta'_1 \eta'_2 \rangle [\delta_{\eta_2 \eta_1}^{\eta'_2 \eta'_1} \delta_{\rho_1 \cdots \rho_n}^{\rho'_1 \cdots \rho'_n} - \delta_{\eta_1}^{\eta'_1} \delta_{\eta_2 \rho_1 \cdots \rho_n}^{\eta'_2 \rho'_1 \cdots \rho'_n} + \delta_{\eta_2}^{\eta'_1} \delta_{\eta_1 \rho_1 \cdots \rho_n}^{\eta'_2 \rho'_1 \cdots \rho'_n} \\
&\quad - \delta_{\eta_2}^{\eta'_2} \delta_{\eta_1 \rho_1 \cdots \rho_n}^{\eta'_1 \rho'_1 \cdots \rho'_n} + \delta_{\eta_1}^{\eta'_2} \delta_{\eta_2 \rho_1 \cdots \rho_n}^{\eta'_1 \rho'_1 \cdots \rho'_n} + \delta_{\eta_1 \eta_2 \rho_1 \cdots \rho_n}^{\eta'_1 \eta'_2 \rho'_1 \cdots \rho'_n}] \}.
\end{aligned}$$

Comparando las dos ecuaciones anteriores, con los correspondientes elementos de matriz usando determinantes de Slater, se concluye que los resultados en los diferentes esquemas son equivalentes.

A continuación se dan ejemplos usando este formalismo tanto de operadores de uno como de dos cuerpos.

Operadores de un cuerpo

Consideremos al operador de momento angular que en su representación de tensor esférico irreducible ℓ_q toma la forma

$$\ell_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ell_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\ell_x + i\ell_y), \quad \ell_0 = \ell_z, \quad \ell_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ell_x - i\ell_y).$$

y satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\ell_1, \ell_{-1}] = -\ell_0, \quad [\ell_1, \ell_0] = -\ell_1 \quad [\ell_{-1}, \ell_0] = \ell_{-1}. \quad (2.13)$$

Si queremos construir el momento angular orbital total del sistema debemos tomar en cuenta el momento individual de cada una de las partículas que conforman al sistema, es decir,

$$\vec{\mathcal{L}} = \sum_s \vec{\ell}_s. \quad (2.14)$$

En segunda cuantización una componente del momento angular orbital total la podemos escribir como

$$\mathcal{L}_q = \sum_{\substack{l_m \\ l' m'}} \sum_{\substack{m_s \\ m'_s}} \langle n l' m'; \frac{1}{2} m'_s | \ell_q | n l m; \frac{1}{2} m_s \rangle b_{n l' m'; \frac{1}{2} m'_s}^\dagger b^{n l m; \frac{1}{2} m_s}. \quad (2.15)$$

Como el operador \mathcal{L}_q no tiene dependencia del espín, se obtiene $\delta_{m'_s}^{m_s}$ en el producto escalar, y usando el teorema de Wigner-Eckart¹, tenemos que el operador de momento angular orbital está dado por la expresión

$$\mathcal{L}_q = \sum_{l m_s} \sqrt{l(l+1)} \sum_{m, m'} \langle l m, 1 q | l m' \rangle b_{n l m'; \frac{1}{2} m_s}^\dagger b^{n l m; \frac{1}{2} m_s}, \quad (2.16)$$

donde usamos que el elemento de matriz reducido asociado $\langle n l' || \ell || n l \rangle = \delta_{l l'} \sqrt{l(l+1)}$. El resultado anterior lo podemos escribir como un acoplamiento entre dos tensores; para 2 hacer esto, utilizamos la relación entre los índices covariantes y contravariantes

$$b^{n l m; \frac{1}{2} m_s} = (-)^{\frac{1}{2} - m_s} (-)^m b_{n l - m; \frac{1}{2} - m_s}. \quad (2.17)$$

Considerando los siguientes coeficientes Clebsch-Gordan y sus propiedades de simetría [5],

$$\langle l m; 1 q | l m' \rangle = (-)^{l-m} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \langle l m'; l - m | 1 q \rangle, \quad \langle \frac{1}{2} m_s; \frac{1}{2} - m_s | 0 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-)^{\frac{1}{2} - m_s}, \quad (2.18)$$

se tiene que al substituirlos en la ecuación (2.16) permiten escribir el operador de momento angular orbital total en forma acoplada

$$\mathcal{L}_q = \sum_l (-)^l \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{l(l+1)} \sqrt{2l+1} [b_{n l; \frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{n l; \frac{1}{2}}]_{q 0}^{10}. \quad (2.19)$$

Por lo tanto hemos encontrado la representación del momento angular orbital total $\vec{\mathcal{L}}$ en el espacio de Fock. Mediante el símbolo \otimes , junto con los dobles subíndices ($q 0$) y superíndices (10) indicamos tanto el acoplamiento del momento angular orbital como el del espín.

Ahora consideremos al espín total del sistema; procediendo en forma similar se tiene

$$\mathcal{S}_{\bar{m}} = \sum_i \mathbf{S}_{\bar{m}}(i) = \sum_{\substack{l' m' m'_s \\ l m m_s}} \langle n' l' m'; \frac{1}{2} m'_s | \mathbf{S}_{\bar{m}} | n l m; \frac{1}{2} m_s \rangle b_{n' l' m'; \frac{1}{2} m'_s}^\dagger b^{n l m; \frac{1}{2} m_s}. \quad (2.20)$$

El operador $\mathbf{S}_{\bar{m}}$ no depende de la parte orbital, de aquí que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\bar{m}} &= \sum_{l m} \sum_{m'_s} \langle \frac{1}{2} m'_s | \mathbf{S}_{\bar{m}} | \frac{1}{2} m_s \rangle b_{n l m; \frac{1}{2} m'_s}^\dagger b^{n l m; \frac{1}{2} m_s} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{l m} \sum_{m'_s} \langle \frac{1}{2} m_s 1 \bar{m} | \frac{1}{2} m'_s \rangle b_{n l m; \frac{1}{2} m'_s}^\dagger b^{n l m; \frac{1}{2} m_s}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

¹Teorema de Wigner-Eckart para un tensor esférico $\langle j_2 m_2 | T_q^k | j_1 m_1 \rangle = \langle j_1 m_1; k q | j_2 m_2 \rangle \langle j_2 || T^k || j_1 \rangle$, se puede ver de forma más detallada en [5]

donde en el último renglón usamos el teorema de Wigner-Eckart. Como se tiene que $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, y $\bar{m} = -1, 0, 1$, se pueden escribir explícitamente los operadores correspondientes,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{lm} b_{nlm; \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^\dagger b^{nlm; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}, \\ \mathcal{S}_0 &= \frac{1}{2} \sum_{lm} \{b_{nlm; \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^\dagger b^{nlm; \frac{1}{2} \frac{1}{2}} - b_{nlm; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^\dagger b^{nlm; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}\}, \\ \mathcal{S}_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{lm} b_{nlm; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^\dagger b^{nlm; \frac{1}{2} \frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (2.22)$$

De la misma forma como se hizo con el momento angular orbital \mathcal{L}_q , vamos a escribir la ecuación (2.21) como un acoplamiento entre tensores, para esto tomamos en cuenta que

$$\begin{aligned}b^{nlm; \frac{1}{2} m_s} &= (-)^{\frac{1}{2} - m_s} (-)^m b_{nl-m; \frac{1}{2} - m_s}, \\ \langle \frac{1}{2} m'_s; 1\bar{m} | \frac{1}{2} m_s \rangle &= (-)^{\frac{1}{2} - m_s} \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \frac{1}{2} m'_s; \frac{1}{2} - m_s | 1\bar{m} \rangle, \\ \langle lm; l-m | 00 \rangle &= (-)^{l-m} \frac{1}{\sqrt{2l+1}}.\end{aligned}$$

Considerando los resultados anteriores se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\bar{m}} &= \sum_{lm} \sum_{mm'} (-)^l \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2l+1} \langle lm; l-m | 00 \rangle \langle \frac{1}{2} m'_s; \frac{1}{2} - m_s | 1\bar{m} \rangle b_{nlm; \frac{1}{2} m'_s}^\dagger b_{nl-m; \frac{1}{2} - m_s}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l (-)^l \sqrt{2l+1} [b_{nl \frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl \frac{1}{2}}]_{0\bar{m}}^{01}.\end{aligned}\quad (2.23)$$

A continuación tomamos en cuenta la interacción espín-órbita, esto es, el operador de muchos cuerpos $\sum_i \ell_i \cdot \mathbf{S}_i$, que corresponde a la suma del producto escalar del momento angular orbital por el espín de cada una de las partículas que componen al sistema y que denotaremos por $\mathcal{H}_{\ell, \mathbf{S}}$. Este operador ha tenido un papel relevante en la física atómica y nuclear. Entonces

$$\mathcal{H}_{\ell, \mathbf{S}} = \sum_{\substack{nlm \\ l'm'}} \sum_{m_s m'_s} \sum_q (-)^q \langle nl'm'; \frac{1}{2} m'_s | \ell_q \mathbf{S}_{-q} | nlm; \frac{1}{2} m_s \rangle b_{nl'm'; \frac{1}{2} m'_s}^\dagger b^{nlm; \frac{1}{2} m_s}. \quad (2.24)$$

Los operadores ℓ_q y \mathbf{S}_{-q} actúan en espacios diferentes, por lo que se pueden separar los elementos de matriz en dos partes y aplicar el teorema de Wigner-Eckart a cada una de ellas:

$$\mathcal{H}_{\ell, \mathbf{S}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_l \sum_{\substack{mm' \\ q}} \sqrt{l(l+1)} \sum_{\substack{m_s m'_s \\ q}} (-)^q \langle lm; 1q | lm' \rangle \langle \frac{1}{2} m_s; 1q | \frac{1}{2} m'_s \rangle b_{nlm'; \frac{1}{2} m'_s}^\dagger b^{nlm; \frac{1}{2} m_s}. \quad (2.25)$$

Utilizando las propiedades de simetría de los coeficientes de Clebsch-Gordan [5],

$$\begin{aligned}\langle lm; 1q | lm' \rangle &= (-)^{l-m} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \langle lm'; l-m | 1q \rangle, \\ \langle \frac{1}{2}m_s; 1q | \frac{1}{2}m'_s \rangle &= (-)^{\frac{1}{2}-m_s} \langle \frac{1}{2}m'_s; \frac{1}{2}-m_s | 1q \rangle,\end{aligned}\quad (2.26)$$

junto con la propiedad (2.17), tenemos que el operador de interacción espín-órbita se puede escribir

$$\mathcal{H}_{\ell,s} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_l (-)^l \sqrt{l(l+1)(2l+1)} \sum_q (-)^q [b_{nl; \frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl; \frac{1}{2}}]_{qq}^{11}. \quad (2.27)$$

En este trabajo estamos interesados en estudiar el comportamiento de átomos de n electrones, por lo que también consideramos el operador vectorial de una partícula conocido por el nombre de vector de Runge-Lenz [4], como el último ejemplo de operadores de un cuerpo, y que en mecánica cuántica se define

$$\vec{A}'_0 = \frac{1}{2}(\vec{L}' \times \vec{P}' - \vec{P}' \times \vec{L}') + Ze^2 \frac{\vec{r}'}{r'}. \quad (2.28)$$

Para entender su significado físico, consideramos una partícula de masa m sujeta a un potencial coulombiano de un núcleo con carga Ze^2 , que está descrito por el hamiltoniano

$$H' = \frac{P'^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r'}. \quad (2.29)$$

Para el análisis siguiente es conveniente elegir las unidades siguientes: la longitud $\frac{a}{Z}$, donde $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ es el radio de la primer órbita del átomo de Bohr, el momento angular orbital \hbar , el momento cinético $P \frac{\hbar Z}{a}$ y la energía $\frac{Ze^2}{2a}$. Tomando lo anterior en cuenta, los operadores que nos interesan toman la forma

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}, \quad \vec{A}_0 = \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{2}(\vec{L} \times \vec{P} - \vec{P} \times \vec{L}), \quad H = P^2 - \frac{2}{r}. \quad (2.30)$$

El operador de Runge-Lenz \vec{A}_0 es un operador vectorial y satisface las relaciones de conmutación

$$[L_i, A_{0j}] = i\epsilon_{ijk} A_{0k}. \quad (2.31)$$

Es directo probar que $A_0^2 = \vec{A}_0 \cdot \vec{A}_0$ está relacionado con L^2 y el hamiltoniano H :

$$\vec{A}_0 \cdot \vec{A}_0 = H(L^2 + 1) + 1. \quad (2.32)$$

Ya que $\vec{A}_0 \cdot \vec{A}_0$ es un escalar, entonces es invariante bajo rotaciones y conmuta con \vec{L} . De la ecuación (2.32) puede verse que la diagonalización simultánea de A_0^2 y L^2 lleva a la solución del problema de eigenvalores del hamiltoniano.

Las relaciones algebraicas que satisfacen H , \vec{L} y \vec{A}_0 son

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\vec{L}, \quad [L_i, A_{0j}] = i\epsilon_{ijk}A_{0k}, \quad \vec{A}_0 \times \vec{A}_0 = i\vec{L}H. \quad (2.33)$$

Adicionalmente es fácil probar que \vec{L} y \vec{A} son constantes de movimiento:

$$[H, L_i] = [H, A_{0i}] = 0. \quad (2.34)$$

Es inmediato de las expresiones (2.30), (2.31) y (2.33) que

$$\vec{L} \cdot \vec{A}_0 = 0. \quad (2.35)$$

De acuerdo al espectro de eigenvalores del hamiltoniano, es conveniente renormalizar al operador vectorial de Runge-Lenz:

$$\vec{A} = \begin{cases} \vec{A}_0(-H)^{-\frac{1}{2}}, & \text{para } E < 0 \\ \vec{A}_0, & \text{para } E = 0 \\ \vec{A}_0(H)^{-\frac{1}{2}} & \text{para } E > 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Entonces las ecuaciones (2.33) pueden escribirse

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\vec{L}, \quad [L_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k, \quad \vec{A} \times \vec{A} = \epsilon i\vec{L}, \quad (2.37)$$

donde $\epsilon = 1, 0, -1$ corresponden a los casos $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$, respectivamente. Con esta forma del vector de Runge-Lenz las ecuaciones (2.32), (2.35) se escriben

$$\begin{aligned} (L^2 + \epsilon A^2 + 1)H &= -1, & \epsilon &= \pm 1 \\ H(L^2 + 1) + 1 &= A^2, & \epsilon &= 0 \\ \vec{L} \cdot \vec{A} &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

En este trabajo nos interesa el caso $\epsilon = 1$, que corresponde a estados ligados. Haciendo una transformación, podemos escribir a los operadores vectoriales en términos de dos operadores de momento angular, es decir,

$$\vec{J}_1 = \frac{1}{2}(\vec{L} + \vec{A}), \quad \vec{J}_2 = \frac{1}{2}(\vec{L} - \vec{A}), \quad (2.39)$$

que satisfacen las relaciones de conmutación de un grupo producto directo $SU(2) \times SU(2)$, esto es,

$$\vec{J}_k \times \vec{J}_k = i\vec{J}_k, \quad [J_{1i}, J_{2i}] = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.40)$$

Calculando el cuadrado de los operadores de momento angular se tiene

$$\begin{aligned} J_1^2 &= \frac{1}{4}(\vec{L} + \vec{A}) \cdot (\vec{L} + \vec{A}) = \frac{1}{4}(L^2 + A^2 + \vec{L} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{L}), \\ J_2^2 &= \frac{1}{4}(\vec{L} - \vec{A}) \cdot (\vec{L} - \vec{A}) = \frac{1}{4}(L^2 + A^2 - \vec{L} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{L}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

y recordando la relación $\vec{L} \cdot \vec{A} = 0$ se concluye que

$$J_1^2 = J_2^2 = \frac{1}{4}(L^2 + A^2). \quad (2.42)$$

Ahora utilizamos los resultados de la teoría del acoplamiento del momento angular para obtener los posibles eigenvalores del hamiltoniano. Ya que los operadores \vec{J}_1 , \vec{J}_2 son hermitianos los eigenvalores de J_1^2 , J_2^2 son $j_1(j_1 + 1)$ y $j_2(j_2 + 1)$, respectivamente. Entonces por la condición (2.42) debe ocurrir que $j_1 = j_2 = j$, así los eigenvalores de H se pueden obtener usando la ecuación (2.38) con el resultado

$$E = \frac{-1}{(2j + 1)^2}. \quad (2.43)$$

Ésto determina los estados ligados del átomo de hidrógeno o hidrogenoides, donde el número entero $2j + 1$ se identifica con el número cuántico principal n , que toma los valores $n = 1, 2, \dots$.

Una componente del operador vectorial de Runge-Lenz de un sistema de n partículas, $\vec{A} = \sum_s \vec{A}_s$, en el formalismo de segunda cuantización, está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_q &= \sum_{\substack{l'm' \\ lmm_s}} \langle nl'm' | A_q | nlm \rangle b_{nl'm'; \frac{1}{2}m_s}^\dagger b^{nlm; \frac{1}{2}m_s} \\ &= \sum_{\substack{l'm' \\ lmm_s}} \langle lm; 1q | l'm' \rangle \langle nl' || A || nl \rangle b_{nl'm'; \frac{1}{2}m_s}^\dagger b^{nlm; \frac{1}{2}m_s}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde se usó el teorema de Wigner-Eckart. Utilizando los elementos de matriz reducidos que se calcularon en el Apéndice (C),

$$\langle nl + 1 || A || nl \rangle = \sqrt{\frac{(l+1)(n+l+1)(n-l-1)}{(2l+3)}}, \quad \langle nl - 1 || A || nl \rangle = \sqrt{\frac{l(n+l)(n-l)}{(2l-1)}} \quad (2.45)$$

tenemos que la componente del operador de Runge-Lenz se escribe

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_q &= \sum_{\substack{mm_s \\ l}} \left\{ \sqrt{\frac{(l+1)(n+l+1)(n-l-1)}{(2l+3)}} \langle lm; 1q | l + 1, m + q \rangle b_{nl+1, m+q; \frac{1}{2}m_s}^\dagger b^{nlm; \frac{1}{2}m_s} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{l(n+l)(n-l)}{(2l-1)}} \langle lm; 1q | l - 1, m + q \rangle b_{nl-1, m+q; \frac{1}{2}m_s}^\dagger b^{nlm; \frac{1}{2}m_s} \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Acoplando cada uno de los términos en los momentos angulares orbital y de espín se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_q = \sum_l (-)^l \left\{ \sqrt{\frac{2(l+1)(n+l+1)(n-l-1)}{3}} \left[b_{n,l+1;\frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl;\frac{1}{2}} \right]_{q0}^{10} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2l(n+l)(n-l)}{3}} \left[b_{n,l-1;\frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl;\frac{1}{2}} \right]_{q0}^{10} \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Operadores de dos cuerpos

Empezamos construyendo los cuadrados del momento angular orbital L^2 , y del espín S^2 , posteriormente consideramos la interacción Coulombiana entre dos electrones $\left(\frac{e^2}{|r_1-r_2|}\right)$, y por último una interacción de contacto $V = V_0 \delta(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$.

Para los operadores de momento angular usamos el producto escalar de dos tensores esféricos

$$A \cdot B = \sum_q (-)^q A_q B_q. \quad (2.48)$$

De manera que el momento angular orbital al cuadrado de un sistema de muchos cuerpos toma la forma

$$L^2 = \sum_q (-)^q L_q L_{-q} = \frac{2}{3} \sum_{lq} (-)^q l(l+1)(2l+1) [b_{nl\frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl\frac{1}{2}}]_{q0}^{10} [b_{nl\frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl\frac{1}{2}}]_{-q0}^{10}, \quad (2.49)$$

donde sustituimos \mathcal{L}_q y \mathcal{L}_{-q} dados en (2.19). Puede escribirse también en forma forma acoplada, esto es,

$$L^2 = -\frac{2}{3} \sum_l l(l+1)(2l+1) \left[[b_{nl\frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl\frac{1}{2}}]^{10} \times [b_{nl\frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl\frac{1}{2}}]^{10} \right]_0^0. \quad (2.50)$$

Utilizando el mismo procedimiento, escribimos la forma que tiene el cuadrado del espín como un producto escalar :

$$S^2 = \sum_{\bar{m}} (-)^{\frac{1}{2}-\bar{m}} S_{\bar{m}} S_{-\bar{m}} = \sum_{l\bar{m}} (-)^{\frac{1}{2}-\bar{m}} (2l+1) [b_{nl\frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl\frac{1}{2}}]_{01}^{0\bar{m}} [b_{nl\frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl\frac{1}{2}}]_{0-\bar{m}}^{01}; \quad (2.51)$$

y en forma acoplada a espín total cero, esto es,

$$S^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l (2l+1) \left[[b_{nl\frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl\frac{1}{2}}]^{01} \times [b_{nl\frac{1}{2}}^\dagger \otimes b_{nl\frac{1}{2}}]^{01} \right]_0^0. \quad (2.52)$$

Es directo mostrar que estos operadores tienen interacciones de uno y dos cuerpos.

Para dos partículas que interactúan mediante un potencial, que es función de la norma de la diferencia entre sus vectores de posición

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (2.53)$$

donde denotamos por \vec{r}_1 y \vec{r}_2 a los vectores de posición de la partícula 1 y 2, respectivamente, la correspondiente forma de la interacción de n partículas en segunda cuantización es

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l'_1 l'_2 \\ l_1 l_2}} \sum_{\substack{m'_1 m'_2 \\ m_1 m_2}} \sum_{\substack{m'_{1s} m'_{2s} \\ m_{1s} m_{2s}}} \langle nl'_1 m'_1, \frac{1}{2} m'_{1s}; nl'_2 m'_2, \frac{1}{2} m'_{2s} | V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | nl_1 m_1, \frac{1}{2} m_{1s}; nl_2 m_2, \frac{1}{2} m_{2s} \rangle \\ \times b^\dagger_{nl'_2 m'_2; \frac{1}{2} m'_{2s}} b^\dagger_{nl'_1 m'_1; \frac{1}{2} m'_{1s}} b^{nl_1 m_1; \frac{1}{2} m_{1s}} b^{nl_2 m_2; \frac{1}{2} m_{2s}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Hemos considerado que estamos en una capa, por lo que $n = n_1 = n_2 = n'_1 = n'_2$. Por comodidad en lo que resta de la discusión no se escribirá el índice y superíndice $\frac{1}{2}$ correspondiente al espín. Para calcular el elemento de matriz que aparece en la ecuación anterior vamos a usar el desarrollo del potencial en término de armónicos esféricos [6], [12]:

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right) \mathcal{V}_l(r_1, r_2) \sum_{m=-l}^l (-)^m Y_{-m}^l(\Omega_2) Y_m^l(\Omega_1). \quad (2.55)$$

Sustituyendo la expresión anterior en el elemento de matriz que queremos calcular, separando las variables se tiene las siguientes integrales: la primera corresponde a la parte radial a la que denotaremos con F^l y que es conocida como integral de Slater

$$F^l(nl'_1 nl'_2 nl_1 nl_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty R_{nl'_2}^*(r_2) R_{nl'_1}^*(r_1) \mathcal{V}_l(r_1, r_2) R_{nl_1}(r_1) R_{nl_2}(r_2) r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2; \quad (2.56)$$

las otras dos son integrales de tres armónicos esféricos, que tienen la forma

$$\langle Y_{m_3}^{l_3}, Y_{m_2}^{l_2} Y_{m_1}^{l_1} \rangle = \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_3 m_3 \rangle \langle l_3 || Y^{l_2} || l_1 \rangle, \quad (2.57)$$

donde el elemento de matriz reducido vale $\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}} \langle l_1 0 l_2 0 | l_3 0 \rangle$ [ver [5],[12]].

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (2.54), además de suponer que el operador V no depende explícitamente del espín, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l'_1 l'_2 m'_1 m'_2 \\ l_1 m_1 l_2 m_2}} \sum_{m_1 s m_2 s}^{lm} (-)^m \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{(2l'_1+1)(2l'_2+1)}} F^l(nl'_1 nl'_2 nl_1 nl_2) \langle l_1 0; l_0 | l'_1 0 \rangle \langle l_2 0; l_0 | l'_2 0 \rangle \\ \times \langle l_1 m_1; l m | l'_1 m'_1 \rangle \langle l_2 m_2; l - m | l'_2 m'_2 \rangle b^\dagger_{nl'_2 m'_2 m_{2s}} b^\dagger_{nl'_1 m'_1 m_{1s}} b^{nl_1 m_1 m_{1s}} b^{nl_2 m_2 m_{2s}}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Consideramos conveniente reescribir también la expresión anterior en forma acoplada; para tal propósito se escriben los operadores como

$$b_{nl'_2 m'_2 m_{2s}}^\dagger b_{nl'_1 m'_1 m_{1s}}^\dagger b^{nl_1 m_1 m_{1s}} b^{nl_2 m_2 m_{2s}} = b_{nl'_1 m'_1 m_{1s}}^\dagger b^{nl_1 m_1 m_{1s}} b_{nl'_2 m'_2 m_{2s}}^\dagger b^{nl_2 m_2 m_{2s}} - \delta_{l'_2}^{l_1} \delta_{m'_2}^{m_1} \delta_{m_{2s}}^{m_{1s}} b_{nl'_1 m'_1 m_{1s}} b_{nl'_2 m'_2 m_{2s}}. \quad (2.59)$$

De tal manera que la energía de interacción puede escribirse $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$, donde definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{l'_1 l'_2 m'_1 m'_2 \\ l_1 m_1 l_2 m_2}} \sum_{\substack{lm \\ m_{1s} m_{2s}}} (-)^m \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{(2l'+1)(2l'+1)}} F^l(nl'_1 nl'_2 nl_1 nl_2) \langle l_1 0; l_0 | l'_1 0 \rangle \langle l_2 0; l_0 | l'_2 0 \rangle \\ & \times \langle l_1 m_1; lm | l'_1 m'_1 \rangle \langle l_2 m_2; l - m | l'_2 m'_2 \rangle b_{nl'_1 m'_1 m_{1s}}^\dagger b^{nl_1 m_1 m_{1s}} b_{nl'_2 m'_2 m_{2s}}^\dagger b^{nl_2 m_2 m_{2s}}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Para escribir la energía potencial en forma acoplada se bajan los índices en los operadores de aniquilación, [ver Ec. (2.17)], y se usan las propiedades de simetría de los coeficientes Clebsch-Gordan

$$\begin{aligned} \langle l_1 m_1; lm | l'_1 m'_1 \rangle &= (-)^{l_1 - m_1} \sqrt{\frac{(2l'_1+1)}{2l+1}} \langle l'_1 m'_1; l_1 - m_1 | lm \rangle, \\ \langle l_2 m_2; l - m | l'_2 m'_2 \rangle &= (-)^{l_2 - m_2} \sqrt{\frac{(2l'_2+1)}{(2l+1)}} \langle l'_2 m'_2; l_2 - m_2 | l - m \rangle. \end{aligned}$$

Para la parte de espín se utiliza

$$\langle \frac{1}{2} m_{1s}; \frac{1}{2} - m_{1s} | 00 \rangle = (-)^{\frac{1}{2} - m_{1s}} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle \frac{1}{2} m_{2s}; \frac{1}{2} - m_{2s} | 00 \rangle = (-)^{\frac{1}{2} - m_{2s}} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto se pueden acoplar en el momento angular como en el espín y entonces \mathcal{V}_1 queda escrito

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 = & \sum_{\substack{l'_1 l'_2 \\ l_1 l_2}} \sum_l (-)^m (-)^{l_1 + l_2} \frac{1}{2l+1} \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)} F^l(nl'_1 nl'_2 nl_1 nl_2) \\ & \times \langle l_1 0; l_0 | l'_1 0 \rangle \langle l_2 0; l_0 | l'_2 0 \rangle [b_{nl'_1}^\dagger \otimes b_{nl_1}]_{m_0}^{l_0} [b_{nl'_2}^\dagger \otimes b_{nl_2}]_{-m_0}^{l_0}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Un tratamiento similar se hace con el término correspondiente al operador de un cuerpo y que denotamos por \mathcal{V}_2 , obteniéndose

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 = & - \sum_{\substack{l'_1 l'_2 \\ l_1 l_2}} \sum_l (-)^m (-)^{l_1 + l_2} \frac{1}{2l+1} \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)} F^l(nl'_1 nl'_2 nl_1 nl_2) \\ & \times \langle l_1 0; l_0 | l'_1 0 \rangle \langle l_2 0; l_0 | l'_2 0 \rangle \delta_{l'_1}^{l_2} \delta_{l'_2}^{l_1} (-)^{l_2} \frac{(-)^m}{\sqrt{2(2l_2+1)}} [b_{nl_2}^\dagger \otimes b_{nl_2}]_{00}^{00}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Juntando ambos términos, la expresión para la interacción \mathcal{V} se reescribe

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & \sum_{\substack{l'_1 l'_2 \\ l_1 l_2}} \sum_l (-)^m (-)^{l_1+l_2} \frac{1}{2l+1} \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)} F^l(nl'_1 nl'_2 nl_1 nl_2) \\ & \times \langle l_1 0; l_0 | l'_1 0 \rangle \langle l_2 0; l_0 | l'_2 0 \rangle \left\{ [b_{nl'_1}^\dagger \otimes b_{nl_1}]_{m0}^{l_0} [b_{nl'_2}^\dagger \otimes b_{nl_2}]_{-m0}^{l_0} \right. \\ & \left. - \delta_{l'_1}^{l_2} \delta_{l'_2}^{l_1} (-)^{l_2} \frac{(-)^m}{\sqrt{2(2l_2+1)}} [b_{nl_2}^\dagger \otimes b_{nl_2}]_{00}^{00} \right\}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

De las ecuaciones (2.55), (2.56) es inmediato que la función F^l es la que depende de la forma del potencial de interacción. En el caso en que la interacción sea coulombiana, la función $\mathcal{V}(r_1, r_2)$ que aparece en la ecuación (2.55) toma la forma [6]

$$\mathcal{V}_l(r_1, r_2) = \frac{e^2}{2} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}, \quad (2.64)$$

aquí $r_{<}$ ($r_{>}$) es el menor (mayor) de (r_1, r_2) . En capítulos posteriores usaremos esta interacción. En el ejemplo del potencial de contacto $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = V_0 a_0^3 \delta(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$, la delta de Dirac se desarrolla como

$$\delta(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \frac{1}{r_1 r_2} \delta(r_1 - r_2) \delta(\phi_1 - \phi_2) \delta(\cos \theta_1 - \cos \theta_2), \quad (2.65)$$

y de las relaciones de cerradura de los armónicos esféricos [6], el potencial de contacto toma la forma

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = V_0 a_0^3 \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (-)^m Y_{-m}^l(\Omega_2) Y_m^l(\Omega_1). \quad (2.66)$$

Comparando la ecuación anterior con (2.55), obtenemos en este caso

$$\mathcal{V}_l(r_1, r_2) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) V_0 \frac{a_0^3}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2). \quad (2.67)$$

Cada uno de los casos considerados tendrá la función F^l que le corresponde. Con este ejemplo terminamos el estudio en segunda cuantización de operadores de uno y dos cuerpos.

Por último mencionamos que en general los operadores expresados en el formalismo de segunda cuantización pueden ser reescritos en términos de los generadores de grupos unitarios. En el siguiente capítulo se verá que los generadores se pueden realizar en términos de operadores de creación y aniquilación, tanto de bosones como de fermiones.

Capítulo 3

Teoría de grupos en sistemas de muchos cuerpos

En este capítulo se establecen los fundamentos para la construcción de las bases polinomiales (de operadores bosónicos o fermiónicos de creación) que portan la representación irreducible de grupos unitarios.

La primer parte consta de un resumen breve de conceptos básicos de teoría de grupos y de propiedades de los grupos unitarios. Se presenta explícitamente la construcción de la base polinomial que porta la representación irreducible del grupo de rotaciones $O(3)$. Estas ideas se generalizan para aplicarlas a grupos unitarios.

Estamos interesados en sistemas de N partículas que pueden ser descritos por los grupos unitarios $\mathbf{U}(nr) \supset \mathbf{U}(n) \times \mathbf{U}(r)$ y sus cadenas canónicas, tanto para partículas que se comportan como bosones o fermiones.

Por último se describen los estados de Gelfand-Tsetlin que constituyen bases de cadenas canónicas de grupos unitarios, junto con sus propiedades.

3.1. Elementos de teoría de grupos

Un conjunto de elementos g forma un grupo G si tiene una operación definida para cualesquiera dos elementos que satisfacen los axiomas de cerradura, ley asociativa, existencia del idéntico y existencia del inverso.

Dos grupos G y F son isomorfos si existe una correspondencia uno a uno entre sus elementos, y como ejemplo tenemos que el grupo de permutaciones de tres elementos, S_3 , es isomorfo al grupo de transformaciones de isometría del triángulo equilátero.

Si H es un subgrupo de G , el conjunto gH donde g es elemento de G se llama clase lateral izquierda de H , mientras que Hg se llama clase lateral derecha de H . El número de clases laterales izquierda y derecha es el mismo, y recibe el nombre de índice de H en G . Si el orden de G es n_g y el orden de H es n_h entonces el número de co-clases es $n_c = n_g/n_h$.

Entonces el grupo G es la unión de las co-clases y puede desarrollarse en términos de ellas. Este resultado conduce al concepto de espacio cociente y generalmente se denota por G/H . Como ejemplo mencionamos que S_3 es la unión de dos clases laterales del subgrupo de permutaciones pares; una de ellas es el subgrupo de permutaciones pares y el otro es el conjunto de permutaciones pares seguida por una transposición. Entonces, como el orden de las permutaciones pares es 3 el índice es 2, ya que S_3 tiene 6 elementos.

Si para un subgrupo N de G ocurre que $gN = Ng$ para todo elemento g de G , entonces N es un subgrupo normal o invariante. La multiplicación de dos clases laterales de un subgrupo invariante forman un grupo teniendo a N como el elemento identidad. Este grupo se llama grupo cociente de G respecto a N y se denota por G/N . Si un grupo no contiene subgrupos invariantes, se llama grupo simple; en cambio si el grupo contiene subgrupos invariantes no-abelianos, se llama semi-simple.

Orbitas y Grupos Pequeños

Sea P un punto del espacio vectorial H . El subgrupo G^P de G que deja al punto invariante es $G^P P = P$ se llama *grupo pequeño* o de estabilidad de G en P . Como ejemplo consideremos el espacio \mathbb{R}^3 y entonces las rotaciones alrededor del eje z $SO_z(2)$ forma el grupo de estabilidad de $SO(3)$ en $(0, 0, 1)$; otro es el grupo pequeño $SO_x(2)$ en $(1, 0, 0)$.

Al conjunto de puntos V que pueden alcanzarse al actuar con G sobre un punto en H se le llama la órbita de G en P . La órbita de $SO(3)$ en $(0, 0, R)$ es la superficie de la esfera de radio R centrada en el origen.

La órbita de $SO(2)$ en el punto $(a, 0)$ del plano XY es la circunferencia de un círculo de radio a .

El espacio cociente G/G^P es por lo tanto idéntico a la órbita V ; entonces $SO(3)/SO(2)$ es la superficie de una esfera unida en el espacio tridimensional.

El grupo Euclidiano $E(2)$ está constituido por tres generadores P_x , P_y y J_z , y en consecuencia es un grupo de Lie de tres parámetros [ver más adelante]. Es un grupo no compacto y contiene un subgrupo invariante abeliano, de tal manera que no es simple ni semi-simple. Es isomorfo al grupo de estabilidad del grupo de Poincaré de partículas sin masa. Puede obtenerse de $O(3)$ mediante el procedimiento de contracción de grupos

Grupos Continuos, Grupos de Lie

Un grupo finito de orden g consiste de g elementos R_1, R_2, \dots, R_g . Podemos considerar a los elementos de dicho grupo como un conjunto de puntos variedad del grupo, o podemos etiquetar un conjunto de puntos con los enteros desde 1, hasta g , y asociar un elemento del grupo con cada punto en este espacio; así el punto etiqueta-

do con a lo asociamos con el elemento R_a del grupo en cuestión (En otras palabras, los elementos están etiquetados por un parámetro que puede asumir g valores).

Un grupo se dice que es continuo si para una definición generalizada de vecindad o continuidad es impuesta en cada uno de los elementos de la variedad. Ahora nos restringiremos al caso más sencillo, donde los elementos de la variedad pueden ser clasificados por un conjunto finito de parámetros que varían continuamente o por un conjunto de funciones. Por ejemplo, el conjunto de transformaciones

$$x' = ax + b, \quad (3.1)$$

forman un grupo. Los parámetros a y b varían continuamente en el conjunto de números reales por lo que podemos decir que éste es un grupo de dos parámetros continuos. En general los elementos de un grupo de r parámetros continuos están descritos o etiquetados por r parámetros reales a_1, a_2, \dots, a_r , que varían continuamente; así que los elementos del grupo son $R(a_1, a_2, \dots, a_r) \equiv R(a)$.

Grupos cuyos elementos pueden ser descritos por un número finito de parámetros continuos, se dicen que son grupos continuos. El rango de la variación de estos parámetros no está especificado, puede ser $(-\infty, \infty)$ o pueden estar confinados en algún dominio finito; cuando sucede lo último se dice que la variedad es cerrada.

Para un grupo de r parámetros, la continuidad se expresa en término de la distancia en el espacio de los parámetros. Dos elementos del grupo $R(a)$ y $R(a')$ son cercanos uno del otro si la distancia $[\sum_1^r (a_i - a'_i)^2]^{\frac{1}{2}}$ es pequeña; en el caso que los elementos del grupo estén descritos por un conjunto de funciones en un espacio de funciones, la cercanía de los elementos de ese grupo estará dada por la definición de distancia en dicho espacio.

Los requerimientos para que los elementos $R(a)$ formen un grupo continuo, son los mismos que para los grupos finitos. Primero debe existir un conjunto de parámetros con valor a^0 tales que

$$R(a^0)R(a) = R(a)R(a^0) = R(a), \quad (3.2)$$

para todo a . $R(a^0)$ es el elemento identidad del grupo. Después, para cualquier valor de a , podemos encontrar un \bar{a} tal que

$$R(\bar{a})R(a) = R(a)R(\bar{a}) = R(a^0), \quad (3.3)$$

entonces $R(\bar{a})$ es el inverso del elemento $R(a)$, es decir,

$$R(\bar{a}) = [R(a)]^{-1}. \quad (3.4)$$

El producto de dos elementos del conjunto debe también pertenecer al mismo; dados los parámetros con valor a , b , podemos encontrar un conjunto de parámetros con valor c tales que

$$R(c) = R(a)R(b), \quad (3.5)$$

donde los parámetros c son funciones reales de los parámetros a y b , esto es

$$c_k = \phi_k(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_r), \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (3.6)$$

Hasta aquí los requerimientos son los mismos que para los grupos finitos o numerables, pero ahora adicionalmente se requiere que los parámetros del producto sean funciones analíticas de los parámetros que lo componen, es decir, que la funciones de la ecuación (3.6) tengan derivadas de todos los órdenes con respecto a los argumentos. De forma similar se requiere que \bar{a} en (3.3) sea una función analítica de a . Cuando esto se cumple tenemos un grupo de Lie de r parámetros.

Transformaciones físicas y operadores

Nos interesa estudiar cuál es el efecto de algunas operaciones físicas realizadas sobre un sistema físico. Algunos ejemplos de estas operaciones podrían ser las siguientes: traslación, reflexión, rotación o una permutación de partículas del sistema. Si denotamos colectivamente las coordenadas de todas las partículas por x , después de la operación las coordenadas se transforman en x' ; además existe una matriz no singular R que relaciona a los dos conjunto de coordenadas de la forma

$$x' = Rx. \quad (3.7)$$

Como ejemplo de una transformación física tenemos a la traslación sobre el eje x por a unidades, la cual podemos representar con la ecuación

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = T_a \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde la matriz de traslación es de la forma

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $a = 0$, tenemos la identidad \mathbb{I} . Si consideramos otra traslación T_b , el producto de ambas está dado por

$$T_b T_a = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_{a+b},$$

y como a es un número real, existe $-a$ tal que

$$T_{-a} T_a = T_{-a+a} = T_0 = \mathbb{I}.$$

De acuerdo con lo anterior , T_a satisface los requisitos para ser un grupo.

Otro ejemplo de transformaciones físicas son las rotaciones por un ángulo α alrededor del eje z ; esto se representa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matriz de rotación la denotamos como R_α . Para $\alpha = 0$ se obtiene la identidad. Si tenemos otra rotación por un ángulo β , el producto está dado por

$$\begin{aligned} R_\beta R_\alpha &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta + \alpha) & \operatorname{sen}(\beta + \alpha) \\ -\operatorname{sen}(\beta + \alpha) & \cos(\beta + \alpha) \end{pmatrix} \\ &= R_{\beta+\alpha} \end{aligned}$$

y para $\beta = -\alpha$ se tiene que

$$R_{-\beta} R_\beta = R_0 = \mathbb{I}.$$

Por lo tanto las rotaciones forman un grupo.

3.2. Bases polinomiales de grupos unitarios

Un grupo unitario $U(nr)$ de (nr) dimensiones contiene $(nr)^2$ generadores, que denotamos $\mathbf{C}_{\mu s}^{\mu' s'}$ con $\mu, \mu' = 1, 2, \dots, r$; $s, s' = 1, 2, \dots, n$, los cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\mathbf{C}_{\mu s}^{\mu' s'}, \mathbf{C}_{\mu' s''}^{\mu'' s'''}] = \mathbf{C}_{\mu s}^{\mu'' s'''} \delta_{\mu''}^{\mu'} \delta_{s''}^{s'} - \mathbf{C}_{\mu' s''}^{\mu s} \delta_{\mu}^{\mu''} \delta_s^{s'''} . \quad (3.8)$$

Es inmediato demostrar que el grupo $U(nr)$ tiene como subgrupo al producto directo $U(r) \times U(n)$, donde los generadores de $U(r)$ y $U(n)$ se escriben

$$\mathbf{C}_\mu^{\mu'} = \sum_s \mathbf{C}_{\mu s}^{\mu' s}, \quad \mathbf{C}_s^{s'} = \sum_\mu \mathbf{C}_{\mu s}^{\mu s'}. \quad (3.9)$$

Estos generadores por supuesto satisfacen relaciones de conmutación similares a las del grupo $U(nr)$; además es fácil mostrar del conmutador (3.8) que

$$[\mathbf{C}_\mu^{\mu'}, \mathbf{C}_s^{s'}] = 0. \quad (3.10)$$

Cabe mencionar que los generadores se pueden realizar en términos de operadores bosónicos o fermiónicos de creación y aniquilación, es decir,

$$\mathbf{C}_{\mu s}^{\mu' s'} = a_{\mu s}^\dagger a^{\mu' s'}, \quad \mathbf{C}_{\mu s}^{\mu' s} = b_{\mu s}^\dagger b^{\mu' s'}. \quad (3.11)$$

Los operadores bosónicos y fermiónicos cumplen con las relaciones de conmutación y anticonmutación

$$\begin{aligned} [a^\rho, a_{\rho'}^\dagger] &= \delta_{\rho\rho'}, & [a_\rho^\dagger, a_{\rho'}^\dagger] &= 0, & [a^\rho, a^{\rho'}] &= 0, \\ \{b^\rho, b_{\rho'}^\dagger\} &= \delta_{\rho\rho'}, & \{b_\rho^\dagger, b_{\rho'}^\dagger\} &= 0, & \{b^\rho, b^{\rho'}\} &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones de conmutación o anticonmutación de los operadores bosónicos o fermiónicos se corrobora que satisfacen relaciones de conmutación de la forma (3.8). El grupo $\mathbf{U}(nr)$ tiene nr operadores invariantes,

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \sum_{\mu s} \mathbf{C}_{\mu s}^{\mu s}, \\ \Gamma_2 &= \sum_{\mu_1 \mu_2 s_1 s_2} \mathbf{C}_{\mu_2 s_2}^{\mu_1 s_1} \mathbf{C}_{\mu_1 s_1}^{\mu_2 s_2}, \\ &\vdots \\ \Gamma_{nr} &= \sum_{\mu_1 \dots \mu_r} \sum_{s_1 \dots s_n} \mathbf{C}_{\mu_2 s_2}^{\mu_1 s_1} \dots \mathbf{C}_{\mu_1 s_1}^{\mu_r s_n}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Estos operadores invariantes conmutan con los $(nr)^2$ generadores. En forma análoga se definen los invariantes para los subgrupos $\mathcal{U}(r)$ y $U(n)$. El invariante Γ_1 , comúnmente llamado operador de número \hat{N} , cumple la propiedad $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(n)} = \Gamma_1^{(r)} = \hat{N}$ que se demuestra mediante la expresión

$$\Gamma_1^{(r)} = \sum_{\mu} \mathbf{C}_{\mu}^{\mu} = \sum_{\mu, s} \mathbf{C}_{\mu s}^{\mu s} = \sum_s \mathbf{C}_s^s = \Gamma_1^{(n)}. \quad (3.13)$$

El superíndice indica el grupo al que está asociado el invariante. También existe una relación entre los invariantes de segundo orden de cada uno de los subgrupos. Lo demostramos utilizando la realización explícita en términos de operadores bosónicos de creación y aniquilación:

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{(r)} &= \sum_{\mu \mu'} \mathbf{C}_{\mu}^{\mu'} \mathbf{C}_{\mu'}^{\mu} = \sum_{\mu, \mu', s, s'} a_{\mu s}^\dagger a^{\mu' s} a_{\mu' s'}^\dagger a^{\mu s'} = \sum_{\mu, \mu', s, s'} a_{\mu s}^\dagger a^{\mu' s} (a^{\mu s'} a_{\mu' s'}^\dagger - \delta_{\mu'}^{\mu} \delta_{s'}^s), \\ &= \sum_{\mu, \mu', s, s'} a_{\mu s}^\dagger a^{\mu s'} (a_{\mu' s'}^\dagger a^{\mu' s} - \delta_{\mu'}^{\mu} \delta_{s'}^s) - n \sum_{\mu s} a_{\mu s}^\dagger a^{\mu s} = \sum_{s s'} \mathbf{C}_s^{s'} \mathbf{C}_{s'}^s + (r - n) \sum_s \mathbf{C}_s^s \\ &= \Gamma_2^{(n)} + (r - n) \hat{N}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Los superíndices r, n indican el grupo $\mathcal{U}(r)$ o $U(n)$, respectivamente. Notar que si los dos subgrupos son de la misma dimensión se tiene que $\Gamma_2^{(r)} = \Gamma_2^{(n)}$.

En el caso de la física nuclear el índice n toma el valor 4, que nos indica los grados de libertad de espín e isospín; el índice r está relacionado con la degeneración de un

oscilador armónico tridimensional.

Queremos contestar a la pregunta: ¿cuál es la posible representación irreducible del subgrupo $\mathcal{U}(r) \times U(4)$ contenida en la representación de $\mathbf{U}(4r)$ [8]? (las representaciones incluyendo las irreducibles se tratan en el apéndice D)

Para poder discutir la posible representación irreducible del subgrupo $\mathcal{U}(r) \times U(4)$ se necesita desarrollar el concepto de peso y la clasificación de los generadores \mathcal{C}_μ^μ , $\mathcal{C}_s^{s'}$ de $\mathcal{U}(r) \times U(4)$. Primero se introducirá este concepto para el grupo de rotaciones \mathbf{R}_3 . Los generadores de \mathbf{R}_3 son L_\pm, L_0 , y sus relaciones de conmutación y operadores adjuntos son

$$[L_+, L_-] = 2L_0, \quad [L_0, L_\pm] = \pm L_\pm; \quad (L_\pm)^\dagger = L_\mp, \quad (L_0)^\dagger = L_0. \quad (3.15)$$

Consideremos el conjunto linealmente independiente de polinomios homogéneos en las variables x, y, z de grado N , es decir, polinomios $P(x, y, z)$ que satisfacen

$$\mathbf{r} \cdot \nabla P = NP; \quad (3.16)$$

es claro que estos polinomios constituyen una base para la representación del grupo \mathbf{R}_3 , pero es bien sabido que en general, no es una representación irreducible, como veremos más adelante.

¿Cómo podemos descomponer el conjunto de soluciones de la ecuación (3.16) en subconjuntos irreducibles?

Para hacerlo, hay que notar primero que como $\mathbf{r} \cdot \nabla$ conmuta con L_\pm, L_0 , podemos usar el operador hermítico L_0 para caracterizar al polinomio con la ecuación

$$L_0 P = mP. \quad (3.17)$$

El entero m será llamado el *peso* del polinomio. El polinomio $P' = L_+ P$ sigue siendo solución de la ecuación (3.16) pero utilizando las relaciones de conmutación (3.15) uno puede ver que el peso de P' aumenta a $m + 1$, y así podemos denotar a L_+ como el generador de ascenso. En forma similar $P'' = L_- P$ tiene peso igual a $m - 1$, y podemos denotar a L_- como el generador de descenso. Los generadores de \mathbf{R}_3 pueden ser divididos en tres conjuntos; en este caso se tiene un elemento en cada uno: el generador de ascenso L_+ , el generador de peso L_0 y el generador de descenso, L_- . Suponemos que entre los polinomios (3.16) hay uno de peso máximo, i.e., caracterizado por

$$L_0 P = lP, \quad L_+ P = 0. \quad (3.18)$$

Para encontrar los polinomios que satisfacen la ecuación (3.18) utilizamos el siguiente método: primero realizamos el cambio de variables

$$x_\pm = x \pm iy, \quad x_0 = z,$$

y escribimos los operadores $\vec{r} \cdot \nabla$, L_+ , L_- y L_0 en términos de estas nuevas variables,

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \nabla &= x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} + x_- \frac{\partial}{\partial x_-} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}, & L_+ &= 2x_0 \frac{\partial}{\partial x_-} - x_+ \frac{\partial}{\partial x_0}, \\ L_0 &= x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} - x_- \frac{\partial}{\partial x_-}, & L_- &= x_- \frac{\partial}{\partial x_0} - 2x_0 \frac{\partial}{\partial x_+}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ahora se obtiene la acción de éstos sobre las variables x_+ , x_- y x_0

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \nabla x_+ &= x_+ & L_+ x_+ &= 0, & L_- x_+ &= 2x_0, & L_0 x_+ &= x_+, \\ \vec{r} \cdot \nabla x_- &= x_- & L_+ x_- &= 2x_0, & L_- x_- &= 0, & L_0 x_- &= -x_-, \\ \vec{r} \cdot \nabla x_0 &= x_0 & L_+ x_0 &= -x_+, & L_- x_0 &= x_-, & L_0 x_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como vemos las acciones contemplan un solo término, que justifica a posteriori el cambio de variables.

Construcción de los polinomios de grado N con $l = N$

Uno puede ver de las expresiones anteriores que $P = x_+$ es el único polinomio de primer orden que satisface las condiciones (3.18). Esto es, que tiene $N = 1$ y $l = 1$. Entonces lo denotaremos $(N, l) = (1, 1)$. Polinomios de segundo orden, con $N = 2$, son funciones de tensores esféricos de orden 0 y 2. Esto es,

$$[\vec{r} \times \vec{r}]_m^l = \sum_q \langle 1q1(m-q) | lm \rangle x_q x_{m-q}. \quad (3.21)$$

De acuerdo a la ecuación (3.21) no se pueden acoplar los vectores \vec{r} a momento angular 1. Con esto el problema se reduce a tomar una de las dos posibilidades que quedan

$$\begin{aligned} T_{22} &\propto x_+^2, \\ T_{00} &= [\vec{r} \times \vec{r}]_0^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x_0^2 - 2x_1 x_{-1}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x_0^2 + x_+ x_-), \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_+$, $x_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}x_-$ y $x_0 = x_0$; esta reducción se debe a que en general $L_+ T_{2m} \propto T_{2m+1}$. Para confirmar lo anterior calculamos

$$L_+ x_+^2 = 2x_+ L_+ x_+ = 0, \quad \vec{r} \cdot \nabla x_+^2 = 2x_+^2, \quad L_0 x_+^2 = 2x_+^2.$$

Por lo tanto el polinomio final tiene $N=2$, $l=2$, por lo que lo denotamos con $(2,2)$. Sin embargo este polinomio no es independiente de $(1,1)$. Finalmente operamos sobre T_{00} , esto es,

$$\begin{aligned} L_+(x_+ x_- + x_0^2) &= x_+ L_+ x_- + 2x_0 L_+ x_0 + x_- L_+ x_+ = 2x_+ x_0 - 2x_0 x_+ = 0, \\ \vec{r} \cdot \nabla(x_+ x_- + x_0^2) &= x_+ x_- + x_- x_+ + 2x_0 = 2(x_+ x_- + x_0^2), \\ L_0(x_+ x_- + x_0^2) &= x_+ L_0 x_- + x_- L_0 x_+ + 2x_0 L_0 x_0 = 0. \end{aligned}$$

De tal manera se tiene $N=2, l=0$, que se denota por $(2,0)$, esto es,

$$-\sqrt{3}(2,0) = x_+x_- + x_0^2 = r^2. \quad (3.23)$$

Sea $P(x_+, x_-, x_0)$ un polinomio homogéneo de grado N ; entonces podemos factorizarlo como

$$P(x_+, x_-, x_0) = x_+^N P''\left(\frac{x_-}{x_+}, \frac{x_0}{x_+}\right). \quad (3.24)$$

Dividiendo la ecuación (3.23) por x_+^2 se obtiene

$$\frac{r^2}{x_+^2} = \frac{x_-}{x_+} + \frac{x_0^2}{x_+^2}, \quad (3.25)$$

de tal manera que el polinomio puede escribirse

$$P(x_+, x_-, x_0) = x_+^N P''\left(\frac{r^2}{x_+^2}, \frac{x_0}{x_+}\right). \quad (3.26)$$

Haciendo los cambios de variables $x' = \frac{r^2}{x_+^2}$ y $y' = \frac{x_0}{x_+}$; y usando que L_+ es un operador diferencial de primer orden tenemos

$$L_+P = L_+(x_+^N P''(x', y')) = x_+^N \left(\frac{\partial P''}{\partial x'} L_+x' + \frac{\partial P''}{\partial y'} L_+y' \right), \quad (3.27)$$

ya que $L_+x_+ = 0$. Teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} L_+x' &= L_+\left(\frac{r^2}{x_+^2}\right) = \frac{L_+r^2}{x_+^2} - \frac{2r^2}{x_+^3} L_+x_+ = 0, \\ L_+y' &= L_+\left(\frac{x_0}{x_+}\right) = \frac{L_+x_0}{x_+} - \frac{x_0}{x_+^2} L_+x_+ = -\frac{x_+}{x_+} = -1. \end{aligned}$$

Se concluye que P'' debe ser función de x' únicamente, ya que

$$L_+P = -x_+^N \frac{\partial P''}{\partial y'} = 0, \quad \implies \frac{\partial P''}{\partial y'} = 0. \quad (3.28)$$

De manera que P se puede escribir

$$P(x_+, x_-, x_0) = x_+^N P''(x') = x_+^N x'^n = x_+^{(N-2n)} r^{2n}, \quad (3.29)$$

donde se escribió $P''(x') = x'^n$. Es inmediato obtener la acción de L_0 sobre P , esto es,

$$\begin{aligned} L_0P &= L_0(x_+^{(N-2n)}(r^2)^n) = x_+^{(N-2n)} n(r^2)^{n-1} L_0r^2 + (N-2n)x_+^{(N-2n-1)} L_0x_+ r^{2n}, \\ &= (N-2n)x_+^{(N-2n)}(r^2)^n = (N-2n)P \equiv lP. \end{aligned} \quad (3.30)$$

30CAPÍTULO 3. TEORÍA DE GRUPOS EN SISTEMAS DE MUCHOS CUERPOS

Lo que implica que $n = \frac{N-l}{2}$. Finalmente el polinomio se escribe como

$$P_{Nl}(x_+, x_-, x_0) = Cx_+^l r^{(N-l)} = C(x + iy)^l (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{(N-l)}{2}}, \quad (3.31)$$

para $l = N, N-2, N-4, \dots, 1$ o 0 . La constante C se introduce para normalizar la parte angular del polinomio.

Una vez que se tienen los polinomios de peso máximo en \mathbf{R}_2 , podemos generar aquellos de peso menor con la aplicación de L_- . Se obtiene

$$P_{Nlm} = [(l+m)!]^{\frac{1}{2}} [(l-m)!(2l)!]^{-\frac{1}{2}} L_-^{(l-m)} P_{Nl}. \quad (3.32)$$

Con la ayuda de (3.15) se comprueba que el peso de P_{Nlm} es m . De la expresión (3.31) se observa que polinomios homogéneos de grado N contienen varios valores de momento angular orbital y por eso sus correspondientes representaciones, en general, no son irreducibles.

Sin embargo, podemos descomponer el conjunto de polinomios homogéneos de grado N linealmente independientes en subconjuntos P_{Nlm} con $m = l, \dots, -l$, los cuales son una base de la representación irreducible del grupo R_3 caracterizada por l . Estos estados son eigenestados de un oscilador armónico en tres dimensiones con un momento angular orbital definido.

Ahora extendemos el resultado anterior para los grupos unitarios en r y 4 dimensiones, respectivamente. Los polinomios serán el conjunto de todos los polinomios homogéneos en los operadores $b_{\mu s}^\dagger$ de grado n linealmente independientes. Podemos definir su producto escalar como

$$(P, P') \equiv \langle 0 | P^\dagger P' | 0 \rangle \quad (3.33)$$

donde en P^\dagger es el hermitiano adjunto de P' , y se usan las relaciones de anticonmutación (2.6) junto con la propiedad $b^{\mu s} | 0 \rangle = 0$, para evaluar los elementos de matriz.

¿Este conjunto de polinomios es una base que porta una representación de los grupos $\mathcal{U}(r)$ y $U(4)$?

Esta representación, en general, no es irreducible y se procederá a derivar las restricciones en el conjunto de polinomios que lo haga irreducible. Primero caracterizaremos los polinomios por su grado ω_μ y ω_s en la componente μ y s de $b_{\mu s}^\dagger$; i.e., P debe satisfacer

$$C_\mu^\mu P | 0 \rangle = \omega_\mu P | 0 \rangle, \quad C_s^s P | 0 \rangle = \omega_s P | 0 \rangle. \quad (3.34)$$

Las condiciones anteriores pueden ser aplicadas simultáneamente ya que los operadores conmutan entre sí. El polinomio P está entonces caracterizado por dos conjuntos de números $[\omega_1 \cdots, \omega_r]$, $\{\omega_1, \cdots, \omega_4\}$, y en analogía con (3.18), nos referiremos a ellos como el peso del polinomio en $\mathcal{U}(r)$ y $U(4)$, respectivamente. Si tenemos dos polinomios P, P' , con pesos $[\omega_1, \cdots, \omega_r]$ y $[\omega'_1, \cdots, \omega'_r]$ diremos que, en $\mathcal{U}(r)$, P es de mayor peso que P' si en la diferencia de los pesos $[\omega_1 - \omega'_1, \cdots, \omega_r - \omega'_r]$, el primer término diferente de cero, cuando se lee de izquierda a derecha, es positivo. Una propiedad similar sucede para $U(4)$.

Si P satisface la ecuación (3.34) entonces de las relaciones de conmutación (3.8) podemos ver que el polinomio homogéneo P' de grado n definido por $P'|0\rangle = C_\mu^{\mu'} P|0\rangle$, donde $\mu < \mu'$, tendrá peso $[\omega_1, \cdots, \omega_\mu + 1, \cdots, \omega_{\mu'} - 1, \cdots, \omega_r]$, y así es de mayor peso que P . En forma similar $P''|0\rangle = C_\mu^{\mu'} P|0\rangle$, donde $\mu > \mu'$, tendrá un peso más bajo que P . Por lo tanto, los generadores $C_\mu^{\mu'}$ los cuales tienen la propiedad $(C_\mu^{\mu'})^\dagger = C_\mu^{\mu'}$ pueden ser clasificados en tres conjuntos:

$$(1) \quad C_\mu^{\mu'}, \quad \mu < \mu'; \quad (2) \quad C_\mu^{\mu}; \quad (3) \quad C_\mu^{\mu'}, \quad \mu > \mu', \quad (3.35)$$

donde el conjunto (1) contiene a los operadores de ascenso, el conjunto (2) a los operadores de peso, y el conjunto (3) a los operadores de descenso en $\mathcal{U}(r)$.

Con un análisis muy similar podemos ver que $C_s^{s'}$, los cuales tienen la propiedad $(C_s^{s'})^\dagger = C_s^{s'}$, pueden ser clasificados en tres conjuntos

$$(1) \quad C_s^{s'}, \quad s < s'; \quad (2) \quad C_s^s; \quad (3) \quad C_s^{s'} \quad s' < s, \quad (3.36)$$

los cuales corresponden a los generadores de ascenso, peso y descenso, respectivamente, del grupo $U(4)$.

Ahora suponemos que en el conjunto de polinomios existe uno de máximo peso en $\mathcal{U}(r)$ y $U(4)$, es decir, caracterizado por

$$C_\mu^{\mu'} P|0\rangle = h_\mu P|0\rangle, \quad C_\mu^{\mu'} P|0\rangle = 0, \quad \mu < \mu', \quad (3.37a)$$

$$C_s^s P|0\rangle = \nu_s P|0\rangle, \quad C_s^{s'} P|0\rangle = 0, \quad s < s', \quad (3.37b)$$

y en analogía con (3.17), esperamos que los pesos máximos $[h_1, \cdots, h_r]$, $\{\nu_1, \cdots, \nu_4\}$, puedan ser usados para caracterizar la representación irreducible del grupo $\mathcal{U}(r) \times U(4)$ [8].

¿Cuáles son los valores de los polinomios de peso máximo compatibles con un número dado de partículas N ?, es decir, si para el grupo R_3 se tiene la relación $l = N, N - 2, N - 4, \cdots, 1$ o 0 . ¿qué tipo de relación le corresponde al grupo

$\mathcal{U}(r) \times U(4)$?

A continuación se muestra que los pesos $[h_1, \dots, h_r]$, $\{\nu_1, \dots, \nu_4\}$, son particiones del número N , es decir,

$$h_1 + h_2 + \dots + h_r = N, \quad h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_r \geq 0, \quad (3.38)$$

$$\nu_1 + \dots + \nu_4 = N, \quad \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_4 \geq 0. \quad (3.39)$$

Las desigualdades anteriores se obtienen aplicando el operador de descenso $\mathcal{C}_{\mu'}^\mu$ con $\mu' > \mu$ a P , y usando las reglas de conmutación junto con la ecuación (3.33). De esta forma tenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_{\mu'}^\mu P, \mathcal{C}_{\mu'}^\mu P) &= \langle 0 | P^\dagger \mathcal{C}_{\mu'}^\mu \mathcal{C}_{\mu'}^\mu P | 0 \rangle = \langle 0 | P^\dagger [\mathcal{C}_{\mu'}^\mu, \mathcal{C}_{\mu'}^\mu] P | 0 \rangle = \langle 0 | P^\dagger (\mathcal{C}_{\mu'}^\mu - \mathcal{C}_{\mu'}^{\mu'}) P | 0 \rangle \\ &= (h_\mu - h_{\mu'}) (P, P) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Se usó que $\mathcal{C}_{\mu'}^\mu P | 0 \rangle = 0$ y las propiedades del producto escalar. Entonces se concluye que

$$h_\mu \geq h_{\mu'}, \quad \text{si} \quad \mu < \mu', \quad (3.41)$$

lo que prueba la desigualdad. En forma similar, aplicando $\mathcal{C}_s^{s'}$ con $s' > s$ se obtiene la correspondiente desigualdad.

Análogamente se pueden construir los polinomios de mínimo peso, esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu^\mu P | 0 \rangle &= h_\mu P | 0 \rangle, & \mathcal{C}_{\mu'}^\mu P | 0 \rangle &= 0, & \mu' > \mu, \\ \mathcal{C}_s^s P | 0 \rangle &= \nu_s P | 0 \rangle, & \mathcal{C}_{s'}^s P | 0 \rangle &= 0 & s' > s. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para este caso se actúa con el operador de ascenso en la demostración correspondiente a la ecuación (3.40). Sin embargo en este trabajo siempre usaremos el polinomio de máximo peso. Los polinomios de máximo peso y mínimo peso son únicos, y por el teorema de Cartan [3], estos pesos sirven para etiquetar las representaciones irreducibles de los grupos unitarios.

Procedemos a encontrar una relación entre las particiones (3.38) y (3.39). Para realizar dicha tarea, primero hemos de hallar un polinomio que sea de máximo peso, es decir, que satisfaga las ecuaciones (3.37a) y (3.37b). Consideraremos como un ejemplo específico el siguiente polinomio de máximo peso

$$\begin{aligned} P(b_{\mu s}^\dagger) &= b_{11}^\dagger b_{12}^\dagger b_{13}^\dagger b_{14}^\dagger \\ &\quad \times b_{21}^\dagger b_{22}^\dagger b_{23}^\dagger \\ &\quad \times b_{31}^\dagger b_{32}^\dagger \\ &\quad \times b_{41}^\dagger b_{42}^\dagger \\ &\quad \times b_{51}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Calculando el peso del polinomio, se puede encontrar que las particiones de los grupos corresponden con las siguientes,

$$[4, 3, 2, 2, 1], \quad \{5, 4, 2, 1\}. \quad (3.44)$$

En el siguiente diagrama claramente se observa que las h'_s son el número de cuadros en los renglones, mientras que las ν'_s corresponden al número de cuadros en las columnas. Por lo tanto cuando uno tiene una partición, la otra partición queda totalmente determinada, y viceversa.

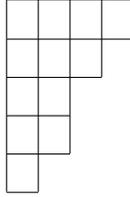


Fig. 3.1: El número de cuadros en las columnas están relacionados con la partición del grupo $\mathcal{U}(2)$, mientras que el número de cuadros en los renglones lo están con la partición del grupo $\mathcal{U}(3)$

De las relaciones de anticonmutación de los operadores fermiónicos $b_{\mu s}^\dagger$, podemos ver que para todo renglón debe cumplirse que $h_\mu \leq 4$ y para toda columna $\nu_s \leq r$.

Podríamos expresar el estado de máximo peso, como el de la ecuación (3.43) en una manera alternativa con la ayuda de la notación de determinantes [2]:

$$\Delta_{\mu_1, \dots, \mu_j}^{s_1, \dots, s_j} \equiv \sum_{\mathfrak{P}_s} (-)^{\mathfrak{P}_s} \mathfrak{P}_s b_{\mu_1, s_1}^\dagger \cdots b_{\mu_j, s_j}^\dagger, \quad (3.45)$$

$$\nabla_{\mu_1, \dots, \mu_j}^{s_1, \dots, s_j} \equiv \sum_{\mathfrak{P}_\mu} (-)^{\mathfrak{P}_\mu} \mathfrak{P}_\mu b_{\mu_1, s_1}^\dagger \cdots b_{\mu_j, s_j}^\dagger, \quad (3.46)$$

donde \mathfrak{P}_s especifica todas las permutaciones de los índices s_1, s_2, \dots, s_j , mientras que \mathfrak{P}_μ denota las permutaciones de los índices $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j$. Si tenemos uno o más índices de renglón repetidos, el determinante por columna, expresión (3.45) es diferente de cero, esto se debe a que los operadores de creación b_{ij}^\dagger anticonmutan. Para ilustrar este hecho se dará el siguiente ejemplo, en el que consideraremos $\mu_1 = \mu_2 = \mu$:

$$\Delta_{\mu \mu}^{s_1 s_2} = \sum_{\mathfrak{P}_s} (-)^{\mathfrak{P}_s} \mathfrak{P}_s b_{\mu s_1}^\dagger b_{\mu s_2}^\dagger = b_{\mu s_1}^\dagger b_{\mu s_2}^\dagger - b_{\mu s_2}^\dagger b_{\mu s_1}^\dagger = 2b_{\mu s_1}^\dagger b_{\mu s_2}^\dagger, \quad (3.47)$$

el cual sólo es cero si $s_1 = s_2$. De forma análoga, para el determinante por renglón los índices que se pueden repetir son los de columna. Tomando nuevamente un ejemplo,

34CAPÍTULO 3. TEORÍA DE GRUPOS EN SISTEMAS DE MUCHOS CUERPOS

tenemos que para $s_1 = s_2 = s$ la expresión (3.46) tiene la forma

$$\nabla_{\mu_1 \mu_2}^{s \ s} = \sum_{\mathfrak{P}_\mu} (-)^{\mathfrak{P}_\mu} \mathfrak{P}_\mu b_{\mu_1 s}^\dagger b_{\mu_2 s}^\dagger = b_{\mu_1 s}^\dagger b_{\mu_2 s}^\dagger - b_{\mu_2 s}^\dagger b_{\mu_1 s}^\dagger = 2b_{\mu_1 s}^\dagger b_{\mu_2 s}^\dagger.$$

En este caso el determinante es cero si independientemente del valor de s_1 y s_2 , se pide que $\mu_1 = \mu_2$; esto implica que en cada caso es simétrico respecto al índice que no se permuta y antisimétrico respecto al otro, con lo que al final se tiene una representación antisimétrica, que era de esperar para un sistema de fermiones.

Regresando al ejemplo de la ecuación (3.43), y considerando la ecuación (3.47) con $\mu_1 = 3, 4$, y $s_1 = 1, s_2 = 2$. Sugiere desarrollar $\Delta_{\mu\mu\mu}^{123}$ y $\Delta_{\mu\mu\mu\mu}^{1234}$, de la misma manera. Con lo anterior podemos reescribir este polinomio de máximo peso como

$$P = [4!3!2!1!]^{-1} \Delta_{1111}^{1234} \Delta_{222}^{123} \Delta_{33}^{12} \Delta_{44}^{12} \Delta_5^1,$$

o alternativamente

$$P = [5!4!3!2!1!]^{-1} \nabla_{12345}^{11111} \nabla_{1234}^{2222} \nabla_{12}^{33} \nabla_1^4.$$

Ambos representan al mismo estado; los factoriales que aparece en las expresiones se introdujeron para normalizar los estados correspondientes.

Si se calcula el conmutador de los generadores con los determinantes se obtiene el siguiente resultado

$$[\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, \Delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j}^{1 \ 2 \dots j}] = \delta_{\mu_1}^{\mu'} \Delta_{\mu \mu_2 \dots \mu_j}^{1 \ 2 \dots j} + \dots + \delta_{\mu_j}^{\mu'} \Delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu}^{1 \ 2 \dots j}, \quad 1 \leq j \leq 4, \quad (3.48a)$$

$$[C_s^{s'}, \nabla_{12 \dots j}^{s_1 s_2 \dots s_j}] = \delta_{s'}^{s_1} \nabla_{12 \dots j}^{s_2 \dots s_j} + \dots + \delta_{s'}^{s_j} \nabla_1^{s_1 s_2 \dots s}, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (3.48b)$$

Esto es independiente de la realización que se tenga, sea bosónica o fermiónica; la clave es que $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$ es simétrico respecto a las permutaciones \mathfrak{P}_s mientras que $C_s^{s'}$ es simétrico respecto a las permutaciones \mathfrak{P}_μ . Podemos notar que para el caso en que se tienen fermiones con los índices de renglón repetidos, el primer conmutador de la ecuación anterior toma la forma

$$[\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, \Delta_{\mu_1 \mu_1 \dots \mu_1}^{12 \dots j}] = j \delta_{\mu_1}^{\mu'} \Delta_{\mu \mu_1 \dots \mu_1}^{1 \ 2 \dots j}. \quad (3.49)$$

Esto se debe a que el determinante es simétrico respecto el intercambio de índices de renglón. Como prueba de este hecho tenemos

$$\Delta_{\mu_1 \mu_1 \dots \mu_1}^{1 \ 2 \dots k \dots j} = \sum_{\mathfrak{P}_s} (-)^{\mathfrak{P}_s} \mathfrak{P}_s b_{\mu_1 1}^\dagger b_{\mu_1 2}^\dagger \dots b_{\mu_1 k-1}^\dagger b_{\mu_k}^\dagger b_{\mu_1 k+1}^\dagger \dots b_{\mu_1 j}^\dagger. \quad (3.50)$$

Usando las propiedades de anti-conmutación, trasladamos el k -ésimo operador al inicio, es decir,

$$\Delta_{\mu_1 \mu_1 \dots \mu_1}^{1 \ 2 \dots k \dots j} = (-)^{k-1} \sum_{\mathfrak{P}_s} (-)^{\mathfrak{P}_s} \mathfrak{P}_s b_{\mu_k}^\dagger b_{\mu_1 1}^\dagger b_{\mu_1 2}^\dagger \dots b_{\mu_1 k-1}^\dagger b_{\mu_1 k+1}^\dagger \dots b_{\mu_1 j}^\dagger. \quad (3.51)$$

Recordando que las transposiciones P_{k1} satisfacen propiedades

$$P_{k1}^2 = 1, \quad \text{y} \quad P_{k1} b_{\mu k}^\dagger b_{\mu_1 1}^\dagger b_{\mu_1 2}^\dagger \cdots b_{\mu_1 j}^\dagger = -b_{\mu 1}^\dagger b_{\mu_1 k}^\dagger b_{\mu_1 2}^\dagger \cdots b_{\mu_1 j}^\dagger, \quad (3.52)$$

la ecuación (3.51) se transforma en

$$\Delta_{\mu_1 \mu_1 \cdots \mu_1}^{1 \ 2 \ \cdots k \ \cdots \ j} = (-)^k \sum_{\mathfrak{P}_s} (-)^{\mathfrak{P}} \mathfrak{P} P_{k1} b_{\mu 1}^\dagger b_{\mu_1 k}^\dagger b_{\mu_1 2}^\dagger \cdots b_{\mu_1 k-1}^\dagger b_{\mu_1 k+1}^\dagger \cdots b_{\mu_1 j}^\dagger. \quad (3.53)$$

Regresando el operador $b_{\mu_1 k}^\dagger$ al k -ésimo lugar y considerando las propiedades de grupo de los operadores de permutación se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu_1 \mu_1 \cdots \mu_1}^{1 \ 2 \ \cdots k \ \cdots \ j} &= (-)^{2(k-1)} \sum_{\mathfrak{P}'_s} (-)^{\mathfrak{P}'_s} \mathfrak{P}'_s b_{\mu 1}^\dagger b_{\mu_1 2}^\dagger \cdots b_{\mu_1 k-1}^\dagger b_{\mu_1 k}^\dagger b_{\mu_1 k+1}^\dagger \cdots b_{\mu_1 j}^\dagger \\ &= \Delta_{\mu \mu_1 \cdots \mu_1}^{1 \ 2 \ \cdots \ j}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

en donde $\mathfrak{P}'_s = \mathfrak{P}_s P_{1k}$, la posición en la que se encuentra μ al final es irrelevante para la prueba.

Estas relaciones son de utilidad cuando actuamos con los operadores $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$, $\mathcal{C}_s^{s'}$ sobre las bases polinomiales; en particular se puede comprobar fácilmente que el polinomio del ejemplo (3.43) es de máximo peso en los dos grupos.

En la realización bosónica, $\Delta_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}^{s_1 s_2 \cdots s_j}$ y $\nabla_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}^{s_1 s_2 \cdots s_j}$ son equivalentes ya que representan al mismo polinomio; esto se debe a que los operadores de creación y aniquilación conmutan. En nuestro caso usaremos la primera y la escribimos como

$$\Delta_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_j} = \sum_{\mathfrak{P}_\alpha} (-)^{\mathfrak{P}_\alpha} \mathfrak{P}_\alpha a_{\mu_1 \alpha_1}^\dagger a_{\mu_2 \alpha_2}^\dagger \cdots a_{\mu_j \alpha_j}^\dagger. \quad (3.55)$$

Dada esta forma, no podemos tener índices repetidos, ya que el determinante es cero; por ejemplo, si $s_1 = s_2 = s$,

$$\Delta_{\mu_1 \mu_2}^s = a_{\mu_1 s}^\dagger a_{\mu_2 s}^\dagger - a_{\mu_1 s}^\dagger a_{\mu_2 s}^\dagger = 0. \quad (3.56)$$

La construcción del polinomio de máximo peso que porta la representación irreducible se hará para los fermiones y para los bosones; lo hacemos de esta forma ya que aunque las ecuaciones que se deben satisfacer tiene la misma estructura, el polinomio que se propone para cada caso es diferente.

3.2.1. Polinomios de máximo peso

Fermiones

Considerando un sistema de N fermiones, por ejemplo electrones, el polinomio de máximo peso está caracterizado por la representación de los grupos unitarios

$$\mathbf{U}(2r) \supset \mathcal{U}(r) \times U(2), \quad (3.57)$$

en donde se considera que el espín total del sistema puede tomar los valores $S = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2, \dots, \frac{1}{2}$ o 0. En este caso $[2^{\frac{N}{2}-S} 1^{2S}]$ es la representación conjugada de $\{\frac{N}{2} + S, \frac{N}{2} - S\}$. Se propone para el polinomio la forma

$$P = \Delta_{11}^{12} \Delta_{22}^{12} \cdots \Delta_{\frac{N}{2}-S}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S}^2 \Delta_{\frac{N}{2}-S+1}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S+2}^1 \cdots \Delta_{\frac{N}{2}+S}^1. \quad (3.58)$$

Vamos a probar que es de máximo peso. Para esto primero calculamos el peso del polinomio de la ecuación anterior; utilizando (3.49) puede verse fácilmente que para $\mu = \mu'$

$$[\mathcal{C}_\mu^\mu, \Delta_{jj \cdots j}^{12 \cdots n}] = n \delta_j^\mu \Delta_{\mu j \cdots j}^{12 \cdots n}. \quad (3.59)$$

Haciendo uso de la ecuación anterior vamos a calcular el conmutador de un generador de peso con el polinomio:

$$[\mathcal{C}_\mu^\mu, P] = [\mathcal{C}_\mu^\mu, \Delta_{11}^{12} \Delta_{22}^{12} \cdots \Delta_{\frac{N}{2}-S}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S}^2 \Delta_{\frac{N}{2}-S+1}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S+2}^1 \cdots \Delta_{\frac{N}{2}+S}^1]. \quad (3.60)$$

Desarrollando el conmutador y usando (3.59) se obtiene

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_\mu^\mu, P] &= 2\delta_1^\mu \Delta_{\mu 1}^{12} \Delta_{22}^{12} \cdots \Delta_{\frac{N}{2}-S}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S}^2 \Delta_{\frac{N}{2}-S+1}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S+2}^1 \cdots \Delta_{\frac{N}{2}+S}^1 \\ &\quad + 2\delta_2^\mu \Delta_{11}^{12} \Delta_{\mu 2}^{12} \cdots \Delta_{\frac{N}{2}-S}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S}^2 \Delta_{\frac{N}{2}-S+1}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S+2}^1 \cdots \Delta_{\frac{N}{2}+S}^1 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 2\delta_{\frac{N}{2}-S}^\mu \Delta_{11}^{12} \Delta_{22}^{12} \cdots \Delta_\mu^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S}^2 \Delta_{\frac{N}{2}-S+1}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S+2}^1 \cdots \Delta_{\frac{N}{2}+S}^1 \\ &\quad + \delta_{\frac{N}{2}-S+1}^\mu \Delta_{11}^{12} \Delta_{22}^{12} \cdots \Delta_{\frac{N}{2}-S}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S}^2 \Delta_\mu^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S+2}^1 \cdots \Delta_{\frac{N}{2}+S}^1 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \delta_{\frac{N}{2}+S}^\mu \Delta_{11}^{12} \Delta_{22}^{12} \cdots \Delta_{\frac{N}{2}-S}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S}^2 \Delta_{\frac{N}{2}-S+1}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S+2}^1 \cdots \Delta_\mu^1. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Actuando sobre el vacío en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene que el peso de P es $\underbrace{[2, 2, \dots, 2]}_{\frac{N}{2}-S \text{ veces}} \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_{2S \text{ veces}}$ al que se denota como $[2^{\frac{N}{2}-S} 1^{2S}]$.

Lo que prosigue es actuar con los generadores de ascenso. Como un ejemplo usamos al generador \mathcal{C}_1^2 . Haciendo el conmutador con P se obtiene

$$[\mathcal{C}_1^2, P] = 2\Delta_{11}^{12}\Delta_{12}^{12}\Delta_{33}^{12}\cdots\Delta_{\frac{N}{2}-S}^1\Delta_{\frac{N}{2}-S}^2\Delta_{\frac{N}{2}-S+1}^1\Delta_{\frac{N}{2}-S+2}^1\cdots\Delta_{\frac{N}{2}+S}^1. \quad (3.62)$$

Podemos ver que en los dos primeros determinantes se repite el índice y superíndice (1,1); esto implica que P y \mathcal{C}_1^2 conmutan. A modo de demostración, los determinantes involucrados se desarrollan en términos de los operadores de creación, esto es,

$$\Delta_{11}^{12}\Delta_{12}^{12} = 2b_{11}^\dagger b_{12}^\dagger (b_{11}^\dagger b_{22}^\dagger - b_{12}^\dagger b_{21}^\dagger), \quad (3.63)$$

donde tenemos repetidos los operadores fermiónicos de creación $b_{11}^\dagger, b_{12}^\dagger$ por lo que el conmutador de la ecuación (3.62) es cero, implicando

$$\mathcal{C}_1^2 P|0\rangle = P\mathcal{C}_1^2|0\rangle = 0. \quad (3.64)$$

En el caso más general tenemos el generador de ascenso \mathcal{C}_k^j en donde $1 \leq k < j \leq \frac{N}{2} + S$. La discusión la haremos en dos partes. En la primera $j \leq \frac{N}{2} - S$, por lo que el conmutador del polinomio con el generador es de la forma

$$[\mathcal{C}_k^j, P] = 2\Delta_{11}^{12}\Delta_{22}^{12}\cdots\Delta_{kk}^{12}\cdots\Delta_{j-1j-1}^1\Delta_{kj}^{12}\Delta_{j+1j+1}^1\Delta_{j+1j+1}^2\cdots\Delta_{\frac{N}{2}-S}^1\Delta_{\frac{N}{2}-S}^2 \\ \times \Delta_{\frac{N}{2}-S+1}^1\cdots\Delta_{\frac{N}{2}+S}^1.$$

El determinante Δ_{kj}^{12} consta de dos términos en los que aparecen los operadores b_{k1}^\dagger (en el primero) y b_{k2}^\dagger (en el segundo), que también los encontramos en el k -ésimo determinante. Por lo tanto el valor del conmutador es cero, lo que implica

$$\mathcal{C}_k^j P|0\rangle = 0. \quad (3.65)$$

Para el segundo caso, en el cual $\frac{N}{2} - S + 1 \leq j \leq \frac{N}{2} + S$, que a su vez se divide en dos partes. En la primera de ellas $k \leq \frac{N}{2} - S$; dada esta configuración el conmutador toma la forma

$$[\mathcal{C}_k^j, P] = \Delta_{11}^{12}\Delta_{22}^{12}\cdots\Delta_{kk}^{12}\cdots\Delta_{\frac{N}{2}-S}^1\Delta_{\frac{N}{2}-S}^2 \\ \times \Delta_{\frac{N}{2}-S+1}^1\cdots\Delta_{\frac{N}{2}-S+j-1}^1\Delta_k^1\Delta_{\frac{N}{2}-S+j+1}^1\cdots\Delta_{\frac{N}{2}+S}^1. \quad (3.66)$$

En la línea anterior aparecen los determinantes $\Delta_{kk}^{12} = 2b_{k1}^\dagger b_{k2}^\dagger$ y $\Delta_k^1 = b_{k1}^\dagger$ entre otros, de los cuales podemos ver fácilmente que se repite el operador b_{k1}^\dagger ; por lo tanto el conmutador es igual cero, lo que implica que

$$\mathcal{C}_k^j P|0\rangle = 0. \quad (3.67)$$

En la segunda parte consideramos que $\frac{N}{2} - S < k < j$; al hacer el conmutador del generador con el polinomio se tiene

$$[\mathcal{C}_k^j, P] = \Delta_{11}^{12} \Delta_{22}^{12} \cdots \Delta_{\frac{N}{2}-S}^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S}^2 \Delta_{\frac{N}{2}-S+1}^1 \cdots \Delta_{\frac{N}{2}-S+k}^1 \cdots \Delta_{\frac{N}{2}-S+j-1}^1 \\ \times \Delta_k^1 \Delta_{\frac{N}{2}-S+j+1}^1 \cdots \Delta_{\frac{N}{2}+S}^1.$$

Podemos ver que se repite Δ_k^1 , el cual aparece primero en el k -ésimo lugar y después en el j -ésimo; dado este hecho, el conmutador es cero. Juntando los resultados, dados de (3.61) a (3.67), con el resultado anterior, corroboramos que el polinomio es de máximo peso. En las aplicaciones se dará mayor claridad al procedimiento utilizado.

Bosones

Para un sistema de N bosones tenemos asociada la cadena de grupos

$$\mathbf{U}(n^2) \supset \mathcal{U}(n) \times U(n), \quad (3.68)$$

donde $[N]$ denota la representación irreducible totalmente simétrica de N bosones del grupo unitario de n^2 dimensiones y $[h_1, h_2, \dots, h_n]$ las correspondientes representaciones irreducibles de $\mathcal{U}(n)$ y $U(n)$. Se tiene que $N = h_1 + h_2 + \dots + h_n$. En este caso se propone como solución de las ecuaciones (3.37a),(3.37b) el polinomio [7]

$$P = k(\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} \dots (\Delta_{12\dots n}^{12\dots n})^{h_n}. \quad (3.69)$$

En los cálculos que se harán a continuación, la constante de normalización k no es indispensable por lo que se omite en la discusión. Al polinomio sin normalizar lo denotaremos con el símbolo \mathcal{P} . Para demostrar que cumple con (3.37a) y (3.37b), primero se calcula el conmutador

$$[\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, (\Delta_{12\dots j}^{12\dots j})^m].$$

En general si se tienen dos operadores A y B , se cumple la propiedad

$$[A, B^m] = \sum_{r=0}^{m-1} B^r [A, B] B^{m-1-r}.$$

En nuestro tratamiento $A = \mathcal{C}_\mu^{\mu'}$ y $B = \Delta_{12\dots j}^{12\dots j}$. Con esto la ecuación anterior toma la forma del conmutador que necesitamos calcular, esto es,

$$[\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, (\Delta_{12\dots j}^{12\dots j})^m] = \sum_{r=0}^{m-1} (\Delta_{12\dots j}^{12\dots j})^r [\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, \Delta_{12\dots j}^{12\dots j}] (\Delta_{12\dots j}^{12\dots j})^{m-1-r}. \quad (3.70)$$

La expresión puede simplificarse utilizando las relaciones de conmutación dadas en (3.48a), obteniendo

$$[\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, \Delta_{12\dots j}^{12\dots j}] = \delta_1^{\mu'} \Delta_{\mu 2\dots j}^{12\dots j} + \delta_2^{\mu'} \Delta_{1\mu 3\dots j}^{123\dots j} + \dots + \delta_j^{\mu'} \Delta_{12\dots \mu}^{12\dots j},$$

que al sustituirlo en (3.70), además de considerar que los $\Delta_{12\dots j}^{12\dots j}$ conmutan entre sí, se tiene

$$[\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, (\Delta_{12\dots j}^{12\dots j})^m] = m(\delta_1^{\mu'} \Delta_{\mu 2\dots j}^{12\dots j} + \dots + \delta_j^{\mu'} \Delta_{12\dots \mu}^{12\dots j}) (\Delta_{12\dots j}^{12\dots j})^{m-1}. \quad (3.71)$$

Ahora procedemos a calcular el peso del polinomio usando la ecuación anterior considerando $\mu = \mu'$. Por lo tanto

$$\mathcal{C}_\mu^\mu P|0\rangle = (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} \mathcal{C}_\mu^\mu (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} \dots (\Delta_{12\dots n}^{12\dots n})^{h_n} |0\rangle + (h_1 - h_2) \delta_1^\mu \frac{\Delta_\mu^1}{\Delta_1^1} \mathcal{P}|0\rangle, \quad (3.72)$$

donde $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}|0\rangle = C_s^{s'}|0\rangle = 0$, o equivalentemente $a^{\mu s}|0\rangle = 0$. Actuando ahora con \mathcal{C}_μ^μ sobre \mathcal{P}' que está definido como $\mathcal{P}' = (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} \dots (\Delta_{12\dots n}^{12\dots n})^{h_n}$, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu^\mu \mathcal{P}'|0\rangle &= (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} \mathcal{C}_\mu^\mu (\Delta_{123}^{123})^{h_3-h_4} \dots (\Delta_{12\dots n}^{12\dots n})^{h_n} |0\rangle \\ &\quad + (h_2 - h_3) (\delta_1^\mu \Delta_{\mu 2}^{12} + \delta_2^\mu \Delta_{1\mu}^{12}) (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3-1} (\Delta_{123}^{123})^{h_3-h_4} \dots (\Delta_{12\dots n}^{12\dots n})^{h_n} |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Juntando este resultado con el de la ecuación (3.72) y arreglando términos tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu^\mu \mathcal{P}|0\rangle &= (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} \mathcal{C}_\mu^\mu (\Delta_{123}^{123})^{h_3-h_4} \dots (\Delta_{12\dots n}^{12\dots n})^{h_n} |0\rangle \\ &\quad + \delta_1^\mu \left\{ (h_1 - h_2) \frac{\Delta_\mu^1}{\Delta_1^1} + (h_2 - h_3) \frac{\Delta_{\mu 2}^{12}}{\Delta_{12}^{12}} \right\} \mathcal{P}|0\rangle + \delta_2^\mu (h_2 - h_3) \frac{\Delta_{1\mu}^{12}}{\Delta_{12}^{12}} \mathcal{P}|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Continuando con este proceso hasta que el generador de peso actúe sobre el vacío, se llega a que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu^\mu \mathcal{P}|0\rangle &= \left\{ \delta_1^\mu \left[(h_1 - h_2) \frac{\Delta_\mu^1}{\Delta_1^1} + (h_2 - h_3) \frac{\Delta_{\mu 2}^{12}}{\Delta_{12}^{12}} + \dots + h_n \frac{\Delta_{\mu 2\dots n}^{12\dots n}}{\Delta_{12\dots n}^{12\dots n}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \delta_2^\mu \left[(h_2 - h_3) \frac{\Delta_{1\mu}^{12}}{\Delta_{12}^{12}} + (h_3 - h_4) \frac{\Delta_{1\mu 3}^{123}}{\Delta_{123}^{123}} + \dots + h_n \frac{\Delta_{1\mu 3\dots n}^{123\dots n}}{\Delta_{123\dots n}^{123\dots n}} \right] \right. \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left. + \delta_n^\mu h_n \frac{\Delta_{12\dots \mu}^{12\dots n}}{\Delta_{12\dots n}^{12\dots n}} \right\} \mathcal{P}|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Podemos ver fácilmente que para $\mu = 1$ tenemos que $\mathcal{C}_1^1 P = h_1 P$, para $\mu = 2$ $\mathcal{C}_2^2 P = h_2 P$, y así sucesivamente, obteniendo el peso $[h_1, h_2, \dots, h_n]$.

Para mostrar que es de máximo peso, actuamos con un generador de ascenso $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$ con $\mu' > \mu$, es decir,

$$\mathcal{C}_\mu^{\mu'} \mathcal{P}|0\rangle = \mathcal{C}_\mu^{\mu'} (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} \dots (\Delta_{12\dots n}^{12\dots n})^{h_n} |0\rangle. \quad (3.76)$$

Aprovechamos el conmutador de la ecuación (3.71), sólo que en este caso se pedirá que $\mu' > \mu$; esto implica que $\mu' > 1$ y el conmutador lo reescribimos como

$$[\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, (\Delta_{12\dots j}^{12\dots j})^m] = m\{\delta_2^{\mu'} \Delta_{1\mu\dots j}^{12\dots j} + \dots + \delta_j^{\mu'} \Delta_{12\dots \mu}^{12\dots j}\} (\Delta_{12\dots j}^{12\dots j})^{m-1}.$$

Notar que cuando se tienen dos índices de renglón repetidos en un determinante, éste vale cero, es decir,

$$\Delta_{12\dots i\dots k\dots j}^{12\dots i\dots k\dots j} = 0. \quad (3.77)$$

Considerando un término arbitrario entre los corchetes, por ejemplo el k -ésimo, tenemos

$$\delta_k^{\mu'} \Delta_{12\dots k-1\mu\dots j}^{12\dots k-1k\dots j} \quad (3.78)$$

y tomando en cuenta que para cada μ en el intervalo $1 \leq \mu \leq k-1$, se van a tener repetidos dos índices de renglón; ésto vale para toda $\mu < \mu'$. Entonces todo operador de ascenso satisface

$$[\mathcal{C}_\mu^{\mu'}, (\Delta_{12\dots j}^{12\dots j})^m] = 0. \quad (3.79)$$

El procedimiento anterior puede repetirse para cualquiera de los determinantes $\Delta_{12}^{12}, \Delta_{123}^{123}, \dots, \Delta_{12\dots n}^{12\dots n}$. Por lo tanto

$$\mathcal{C}_\mu^{\mu'} \mathcal{P}|0\rangle = \mathcal{P} \mathcal{C}_\mu^{\mu'} |0\rangle = 0, \quad (3.80)$$

confirmando que el polinomio propuesto es de máximo peso en el grupo $\mathcal{U}(n)$.

Considerando los generadores $C_s^{s'}$ de $U(n)$ se probará que es de máximo peso en este grupo y por lo tanto tenemos el polinomio que porta la representación irreducible de $\mathcal{U}(n) \times U(n)$.

Sabemos que para un sistema de bosones los determinantes $\Delta_{12\dots j}^{12\dots j}$ y $\nabla_{12\dots j}^{12\dots j}$, son equivalentes esto permite escribir el polinomio como

$$P = (\nabla_1^1)^{h_1-h_2} (\nabla_{12}^{12})^{h_2-h_3} \dots (\nabla_{12\dots n}^{12\dots n})^{h_n}. \quad (3.81)$$

Si se hace el conmutador de $(\nabla_{12\dots j}^{12\dots j})^m$ con un generador arbitrario del grupo unitario $U(n)$ se encuentra que

$$[C_s^{s'}, (\nabla_{12\dots j}^{12\dots j})^m] = \sum_{r=1}^{m-1} (\nabla_{12\dots j}^{12\dots j})^r [C_s^{s'}, \nabla_{12\dots j}^{12\dots j}] (\nabla_{12\dots j}^{12\dots j})^{m-r-1}. \quad (3.82)$$

Utilizando la ecuación (3.48b) la expresión anterior toma la forma

$$[C_{s'}^{s'}, (\nabla_{12\dots j}^{12\dots j})^m] = m\{\delta_{s'}^1 \nabla_{s2\dots j}^{12\dots j} + \delta_{s'}^2 \nabla_{1s\dots j}^{12\dots j} + \dots + \delta_{s'}^j \nabla_{12\dots s}^{12\dots j}\} (\nabla_{12\dots j}^{12\dots j})^{m-1} \quad (3.83)$$

Se puede ver que tanto la estructura del polinomio como la del conmutador son similares a las que se tenían para el grupo complementario, y dado que el proceso para mostrar que es de máximo peso es el mismo podemos decir que este polinomio porta la representación del grupo $U(n)$.

3.3. Estados de Gelfand-Tsetlin

Otra manera de escribir los estados que portan la representación irreducible de los grupos unitarios, corresponde a los estados de Gelfand-Tsetlin [2], [4]. Estos estados están constituídos por renglones que a su vez contienen números enteros, el primer renglón, comenzando de abajo hacia arriba, consta de un número, el segundo de dos, así hasta llegar al renglón n -ésimo en el cual contamos con n números. Estos renglones tienen la siguiente disposición

$$\left| \begin{array}{ccccccc} h_{1n} & & h_{2n} & & \dots & & h_{nn} \\ & h_{1n-1} & & h_{2n-1} & & \dots & & h_{n-1n-1} \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & h_{12} & & h_{22} & & \\ & & & & & h_{11} & & \end{array} \right\rangle. \quad (3.84)$$

A cada renglón le podemos asociar la partición que porta la representación irreducible (RI) de un grupo unitario. En este caso al primero le corresponde la partición que porta la RI del grupo unitario $\mathcal{U}(1)$, al segundo la partición que porta la RI del grupo $\mathcal{U}(2)$, y así sucesivamente hasta el n -ésimo renglón el cual porta la RI del grupo $\mathcal{U}(n)$. Dado que los renglones están asociados con las particiones, los elementos que contienen respetan las siguientes desigualdades, por ejemplo para el renglón k -ésimo

$$h_{1k} \geq h_{2k} \geq \dots \geq h_{kk} \quad (3.85)$$

donde $k = 1, 2, \dots, n$. En otras palabras el primer índice del número h_{fg} nos dice el orden en el que se encuentra mientras que el segundo el grupo al que representa.

Para poder caracterizar dichos estados vamos a hacer uso de las cadenas de los grupos unitarios $\mathcal{U}(n)$. En principio tales grupos admiten una gran variedad de cadenas, pero dada la configuración anterior usaremos la siguiente:

$$\mathcal{U}_n \supset \left(\begin{array}{cc} \mathcal{U}_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \supset \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \supset \dots \supset \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{array} \right). \quad (3.86)$$

Esta cadena es conocida como *cadena canónica*. El tipo de cadena usada dependerá del tipo de problema que queremos caracterizar.

Es necesario saber el peso que tiene un estado arbitrario de Gelfand-Tsetlin. Para conocer dicho peso primero debemos calcular el eigenvalor del generador \mathcal{C}_k^k . Una manera de obtenerlo es la siguiente: consideremos a los operadores de Casimir de primer orden de los grupo $\mathcal{U}(k)$ y $\mathcal{U}(k-1)$, es decir,

$$\Gamma_1^{(k)} = \sum_{\mu=1}^k \mathcal{C}_\mu^\mu, \quad \Gamma_1^{(k-1)} = \sum_{\mu=1}^{(k-1)} \mathcal{C}_\mu^\mu,$$

con sus respectivos eigenvalores $\sum_{\mu=1}^k h_{\mu k}$ y $\sum_{\mu=1}^{k-1} h_{\mu k-1}$. Despejando el generador \mathcal{C}_k^k en términos de los operadores de Casimir se obtiene

$$\mathcal{C}_k^k = \Gamma_1^{(k)} - \Gamma_1^{(k-1)}, \quad (3.87)$$

y recordando que éstos conmutan con todos los generadores del grupo $\mathcal{U}(k)$ y sus subgrupos, el eigenvalor ω_k del operador \mathcal{C}_k^k es

$$\omega_k = \sum_{\mu=1}^k h_{\mu k} - \sum_{\mu=1}^{k-1} h_{\mu k-1}, \quad (3.88)$$

para $k = 2, 3, \dots, n$; en el caso en que $k=1$ el eigenvalor $\omega_1 = h_{11}$. De esta manera el peso $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ del estado de Gelfand-Tsetlin está totalmente determinado. Teniendo presente la discusión del estado de máximo y mínimo peso para la base polinomial, estamos en condiciones de definir el estado de máximo y mínimo peso de la siguiente forma:

$$\left| \begin{array}{cccc} h_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{nn} \\ h_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{n-1n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & h_{1n} & h_{2n} \\ & & & h_{1n} \end{array} \right\rangle, \quad \left| \begin{array}{cccc} h_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{nn} \\ h_{2n} & h_{3n} & \cdots & h_{nn} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ h_{n-1n} & h_{nn} & & \\ h_{nn} & & & \end{array} \right\rangle. \quad (3.89)$$

El primer estado corresponde al de máximo peso con $[h_{1n}, h_{2n}, \dots, h_{nn}]$, mientras que el segundo al de mínimo peso con $[h_{nn}, h_{n-1n}, \dots, h_{2n}, h_{1n}]$.

Dado un estado arbitrario como el que aparece en la ecuación (3.84), consideremos los renglones $k, k-1$, donde los elementos de cada renglón satisfacen

$$h_{1k} \geq h_{2k} \geq \cdots \geq h_{kk}, \quad \text{para } \mathcal{U}(k), \quad (3.90a)$$

$$h_{1k-1} \geq h_{2k-1} \geq \cdots \geq h_{k-1k-1}, \quad \text{para } \mathcal{U}(k-1). \quad (3.90b)$$

Para este par de representaciones cabría hacer la siguiente pregunta: ¿cuántas RI del grupo $\mathcal{U}(k-1)$ podemos encontrar en el grupo $\mathcal{U}(k)$? o de otra forma ¿cómo están relacionados los elementos de estas dos representaciones?

Para contestar la segunda pregunta, tomaremos en cuenta los renglones $k, k-1$ del estado de máximo peso en $\mathcal{U}(k)$, los cuales satisfacen el conjunto de desigualdades

$$h_{1k} \geq h_{2k} \geq \dots \geq h_{k-1k} \geq h_{kk}, \quad \text{de máximo peso en } \mathcal{U}(k), \quad (3.91a)$$

$$h_{1k} \geq h_{2k} \geq \dots \geq h_{k-1k}, \quad \text{de máximo peso en } \mathcal{U}(k-1), \quad (3.91b)$$

y de forma análoga para los de mínimo peso:

$$h_{1k} \geq h_{2k} \geq \dots \geq h_{kk-1} \geq h_{kk}, \quad \text{de mínimo peso en } \mathcal{U}(k), \quad (3.92a)$$

$$h_{2k} \geq h_{3k} \geq \dots \geq h_{kk-1}, \quad \text{de mínimo peso en } \mathcal{U}(k-1). \quad (3.92b)$$

Notar que para el mínimo peso se invierten las desigualdades de la RI. Comparando las ecuaciones (3.90b),(3.91b) y (3.92b), y teniendo en cuenta que los estados de máximo y mínimo peso son únicos, tenemos cotas superior e inferior para cada elemento del renglón $(k-1)$ -ésimo en término de los elementos del renglón k -ésimo, es decir,

$$h_{1k} \geq h_{1k-1} \geq h_{2k}, \quad h_{2k} \geq h_{2k-1} \geq h_{3k}, \quad \dots, \quad h_{k-1k} \geq h_{k-1k-1} \geq h_{kk}, \quad (3.93)$$

la cual se puede sintetizar como

$$h_{1k} \geq h_{1k-1} \geq h_{2k} \geq h_{2k-1} \geq \dots \geq h_{k-1k-1} \geq h_{kk}, \quad (3.94)$$

donde $k = 1, 2, 3 \dots, n$. Si escribimos todos los casos uno debajo de otro en orden descendente, se obtiene las reglas de ramificación

$$\begin{aligned} h_{1n} &\geq h_{1n-1} \geq h_{2n} \geq \dots \geq h_{n-1,n-1} \geq h_{nn}, \\ h_{1n-1} &\geq h_{1n-2} \geq \dots \geq h_{n-1n-1}, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ h_{12} &\geq h_{11} \geq h_{22}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Una prueba más formal se puede encontrar en [10]. Utilizando la ecuación (3.94) podemos contar el número de representaciones del grupo $\mathcal{U}(k-1)$ que están incluidas en el grupo $\mathcal{U}(k)$, esto es,

$$\sum_{h_{1k-1}=h_{2k}}^{h_{1k}} \sum_{h_{2k-1}=h_{3k}}^{h_{2k}} \dots \sum_{h_{k-1k-1}=h_{kk}}^{h_{k-1k}} 1. \quad (3.96)$$

Considerando todos las posibles representaciones de cada uno de los renglones del estado de Gelfand-Tsetlin en el grupo $\mathcal{U}(n)$ se obtiene una forma de calcular la dimensión que con ayuda de la ecuación anterior la podemos escribir de la forma

$$D([h_n]) = \sum_{h_{1k-1}=h_{2k}}^{h_{1k}} \sum_{h_{2k-1}=h_{3k}}^{h_{2k}} \cdots \sum_{h_{k-1k-1}=h_{kk}}^{h_{k-1k}} \cdots \sum_{h_{12}=h_{23}}^{h_{13}} \sum_{h_{22}=h_{33}}^{h_{23}} \sum_{h_{11}=h_{22}}^{h_{12}} 1. \quad (3.97)$$

Como ejemplos consideremos los siguientes estados de Gelfand-Tsetlin que portan la RI de los grupos $\mathcal{U}(2)$, $\mathcal{U}(3)$ y $\mathcal{U}(4)$

$$\left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{22} \end{array} \right\rangle, \quad \left| \begin{array}{ccc} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ & h_{12} & h_{22} \\ & & h_{11} \end{array} \right\rangle, \quad \left| \begin{array}{cccc} h_{14} & h_{24} & h_{34} & h_{44} \\ & h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ & & h_{12} & h_{22} \\ & & & h_{11} \end{array} \right\rangle. \quad (3.98)$$

Usando la ecuación (3.97) y definiendo $P_{ij} \equiv h_{ij} + j - i$ se obtiene la dimensión

$$D([h]_2) = \sum_{h_{11}=h_{22}}^{h_{12}} 1 = h_{12} - h_{22} + 1, \quad (3.99a)$$

$$D([h]_3) = \sum_{h_{12}=h_{23}}^{h_{13}} \sum_{h_{22}=h_{33}}^{h_{23}} \sum_{h_{11}=h_{12}}^{h_{12}} 1, \quad (3.99b)$$

$$D([h]_4) = \sum_{h_{13}=h_{24}}^{h_{14}} \sum_{h_{23}=h_{34}}^{h_{24}} \sum_{h_{33}=h_{44}}^{h_{34}} \sum_{h_{12}=h_{23}}^{h_{13}} \sum_{h_{22}=h_{33}}^{h_{23}} \sum_{h_{11}=h_{12}}^{h_{12}} 1. \quad (3.99c)$$

Al desarrollar las sumas hemos tomado en cuenta los resultados para $\sum_{i=1}^n i$ y $\sum_{i=1}^n i^2$; después de hacer el álgebra e introduciendo los hooks [4] se llegan a las expresiones

$$D([h]_2) = (P_{12} - P_{22}), \quad (3.100a)$$

$$D([h]_3) = \frac{1}{2!}(P_{13} - P_{23})(P_{13} - P_{33})(P_{23} - P_{33}), \quad (3.100b)$$

$$D([h]_4) = \frac{1}{2!3!}(P_{14} - P_{24})(P_{14} - P_{34})(P_{14} - P_{44})(P_{24} - P_{34})(P_{24} - P_{44})(P_{34} - P_{44}), \quad (3.100c)$$

donde se define el hook como $P_{in} \equiv h_{in} + n - i$. Aquí el subíndice n denota al grupo con $i = 1, 2, \dots, n$. Esto sugiere que la dimensión $D([h]_n)$ de la representación del grupo unitario $\mathcal{U}(n)$ se pueda escribir

$$D([h_n]) = \prod_{i < j=2}^n \frac{(P_{in} - P_{jn})}{1!2! \cdots (n-1)!}, \quad (3.101)$$

donde $P_{in} = h_{in} + n - i$, la cual es conocida como fórmula de la dimensión de Weyl .

Recapitulando, sabemos calcular el peso de un estado arbitrario, tenemos el estado de máximo peso y sabemos contar el número de estados disponibles dada una partición. Lo que necesitamos ahora es un operador de descenso con el cual se pueda obtener la base cuando lo hagamos actuar sobre el estado de máximo peso. Este operador se define de la siguiente manera

$$\mathbf{L}_n^k \left| \begin{array}{ccccccc} h_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{kn} & \cdots & h_{nn} & \\ & h_{1n-1} & \cdots & h_{kn-1} & \cdots & h_{n-1n-1} & \end{array} \right\rangle = K \left| \begin{array}{ccccccc} h_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{kn} & \cdots & h_{nn} & \\ & h_{1n-1} & \cdots & h_{kn-1} - 1 & \cdots & h_{n-1n-1} & \end{array} \right\rangle, \quad (3.102)$$

con $k < n$. La razón por la que no aparecen los demás renglones es la siguiente: queremos que al actuar con el operador de descenso sobre un estado de máximo peso, la representación del grupo $\mathcal{U}(n-1)$ sea de máximo peso.

Con la ayuda del producto de potencias de L_n^k podemos generar todos los estados de máximo peso en $\mathcal{U}(n-1)$ en donde la representación está restringida por la primer línea de desigualdades que aparece en las reglas de ramificación.

Una vez obtenidos estos estados, se usarán los operadores L_{n-1}^k con $k < n-1$ de forma similar a (3.102), pero para el grupo $\mathcal{U}(n-1)$ se obtienen todos los estados de máximo peso en el grupo $\mathcal{U}(n-2)$ con la representación restringida a la segunda línea de desigualdades que aparecen en las reglas de ramificación.

De esta manera podemos usar el operador L_p^k con $k < p \leq n$ para generar la base completa. En el capítulo siguiente se ejemplificará el uso de estos operadores para los grupos $\mathbf{U}(4)$ y $\mathbf{U}(9)$.

Estos operadores son función de los generadores de descenso $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$ de $\mathcal{U}(r)$ con $\mu > \mu'$ y $\mu, \mu' = 1, 2, \dots, n$.

Para simplificar la notación un poco vamos a denotar al estado (3.84) como $|(h)\rangle$ y al renglón k -ésimo de la siguiente forma $[h]_k \equiv [h_{1k}, h_{2k}, \dots, h_{kk}]$, que puede ser visto como un vector de k componentes.

Una vez que se tiene la base, podemos escribir los elementos de matriz de los generadores del grupo $\mathcal{U}(n)$, no sin antes mencionar que estos estados satisfacen la propiedad de ortonormalidad, es decir,

$$\langle (h') | (h) \rangle = \delta_{(h)_n (h')_n}, \quad (3.103)$$

donde la $\delta_{(h)_n (h')_n}$ vale 1 si se tiene igualdad por renglones, es decir $[h']_k = [h]_k$ para $k = 1, 2, \dots, n$, y cero en cualquier otro caso.

Los elementos de matriz de los generadores de peso se obtienen fácilmente a partir de la ecuación (3.88); de esta manera se tiene que

$$\langle (h') | \mathcal{C}_\mu^\mu | (h) \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{\mu} h_{k\mu} - \sum_{k=1}^{\mu-1} h_{k\mu-1} \right\} \langle (h') | (h) \rangle = \omega_\mu \delta_{(h)_n (h')_n}. \quad (3.104)$$

Para dar una forma explícita de los elementos de matriz de los generadores de ascenso [11], es conveniente introducir el vector renglón unidad, de dimensión k , esto es,

$$\Delta_k(\tau) = [\delta_{1,\tau}, \delta_{2,\tau}, \dots, \delta_{k,\tau}], \quad \tau = 1, 2, \dots, k. \quad (3.105)$$

Adicionalmente definimos la suma entre vectores de este tipo como la suma de vectores, es decir,

$$[h]_k + \Delta_k(\tau) = [h_{1,k} + \delta_{1,\tau}, h_{2,k} + \delta_{2,\tau}, \dots, h_{k,k} + \delta_{k,\tau}]. \quad (3.106)$$

Los elementos de matriz de los generadores de ascenso son cero, esto es,

$$\langle (h')_n | \mathcal{C}'_\mu | (h)_n \rangle = 0, \quad \mu' > \mu, \quad (3.107)$$

a menos de que se cumpla que las RI de los subgrupos sean iguales:

$$\begin{aligned} [h']_l &= [h]_l, & \text{para } l &= 1, 2, \dots, \mu - 1, \mu', \dots, n; \\ [h']_k &= [h]_k + \Delta_k(\tau), & \text{para } k &= \mu, \mu + 1, \dots, \mu' - 1. \end{aligned} \quad (3.108)$$

En palabras: los elementos de matriz son nulos a menos de que las componentes de los renglones del estado final ($|h'\rangle$) concuerden con los del estado inicial, para todos los renglones con excepción de los renglones $\mu, \mu + 1, \dots, \mu' - 1$; en este caso los elementos de los renglones del estado final son aquellos a los que elementos del renglón inicial se le suma 1 en todas las posibles posiciones, eso nos tomaría $\mu' - \mu$ índices $\tau_\mu, \tau_{\mu+1}, \dots, \tau_{\mu'-1}$ que indican el lugar donde colocar el 1 en cada uno de los renglones $\mu, \mu + 1, \dots, \mu' - 1$.

Dada una manera específica de asignar los índices $\tau_\mu, \tau_{\mu+1}, \dots, \tau_{\mu'-1}$, el elemento de matriz toma la forma

$$\begin{aligned} \langle (h)' | \mathcal{C}'_{\mu'} | (h) \rangle &= \left[(-) \frac{\prod_{s=1}^{\mu'} (P_{s\mu'} - P_{\tau_{\mu'-1}\mu'-1} - 1)}{\prod_{s=1, s \neq \tau_{\mu'-1}}^{\mu'-1} (P_{s\mu'-1} - P_{\tau_{\mu'-1}\mu'-1} - 1)} \right]^{\frac{1}{2}} S(\mu - \tau_\mu) \\ &\times \left[\frac{\prod_{s=1}^{\mu-1} (P_{s\mu-1} - P_{\tau_\mu\mu})}{\prod_{s=1, s \neq \tau_\mu}^{\mu} (P_{s\mu} - P_{\tau_\mu\mu})} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \prod_{k=\mu+1}^{\mu'-1} \left\{ S(\tau_{k-1} - \tau_k) \left[\prod_{s=1, s \neq \tau_{k-1}}^{k-1} \frac{P_{sk-1} - P_{\tau_k k}}{P_{sk-1} - P_{\tau_{k-1}k-1} - 1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \prod_{s=1, s \neq \tau_k}^k \frac{P_{sk} - P_{\tau_{k-1}k-1} - 1}{P_{sk} - P_{\tau_k k}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.109)$$

donde

$$S(\mu - \tau_\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \geq \tau_\mu, \\ -1, & \mu < \tau_\mu, \end{cases} \quad S(\tau_{k-1} - \tau_k) = \begin{cases} 1, & \tau_{k-1} \geq \tau_k, \\ -1, & \tau_{k-1} < \tau_k, \end{cases} \quad (3.110)$$

Los elementos de matriz de los operadores de descenso se obtienen tomando el hermitiano conjugado de la ecuación (3.109). Como ejemplo consideremos a los grupos unitarios $\mathcal{U}(2)$ y $\mathcal{U}(3)$. A continuación vamos a listar los elementos de matriz de los generadores del primer grupo:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{11} + 1 & \end{array} \middle| \mathcal{C}_1^2 \middle| \begin{array}{c} h_{12} \ h_{22} \\ h_{11} \end{array} \right\rangle &= \sqrt{(h_{12} - h_{11})(h_{11} - h_{22} + 1)}, \\ \left\langle \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{11} - 1 & \end{array} \middle| \mathcal{C}_2^1 \middle| \begin{array}{c} h_{12} \ h_{22} \\ h_{11} \end{array} \right\rangle &= \sqrt{(h_{12} - h_{11} + 1)(h_{11} - h_{22})}. \end{aligned} \quad (3.111a)$$

El segundo grupo tiene 9 generadores, de los cuales 4 corresponden al subgrupo $\mathcal{U}(2)$ y que no repetiremos. Para facilitar la escritura de la lista vamos a prescindir del tercer renglón; esto es debido a que contiene la partición la cual, como sabemos, no puede ser modificada por cualquiera de los generadores del grupo,

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{cc} h_{12} + 1 & h_{22} \\ h_{11} + 1 & \end{array} \middle| \mathcal{C}_1^3 \middle| \begin{array}{c} h_{12} h_{22} \\ h_{11} \end{array} \right\rangle &= \left[\frac{(h_{13} - h_{12})(h_{12} - h_{23} + 1)(h_{12} - h_{33} + 2)(h_{11} - h_{22} + 1)}{(h_{12} - h_{22} + 1)(h_{12} - h_{22} + 2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \left\langle \begin{array}{cc} h_{12} h_{22} + 1 & \\ h_{11} + 1 & \end{array} \middle| \mathcal{C}_1^3 \middle| \begin{array}{c} h_{12} h_{22} \\ h_{11} \end{array} \right\rangle &= - \left[\frac{(h_{13} - h_{22} + 1)(h_{23} - h_{22})(h_{22} - h_{33} + 1)(h_{12} - h_{11})}{(h_{12} - h_{22})(h_{12} - h_{22} + 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \left\langle \begin{array}{cc} h_{12} + 1 h_{22} & \\ h_{11} & \end{array} \middle| \mathcal{C}_2^3 \middle| \begin{array}{c} h_{12} h_{22} \\ h_{11} \end{array} \right\rangle &= \left[\frac{(h_{13} - h_{12})(h_{12} - h_{23} + 1)(h_{12} - h_{33} + 2)(h_{12} - h_{11})}{(h_{12} - h_{22} + 1)(h_{12} - h_{22} + 2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \left\langle \begin{array}{cc} h_{12} h_{22} + 1 & \\ h_{11} & \end{array} \middle| \mathcal{C}_2^3 \middle| \begin{array}{c} h_{12} h_{22} \\ h_{11} \end{array} \right\rangle &= \left[\frac{(h_{13} - h_{22} + 1)(h_{23} - h_{22})(h_{22} - h_{33} + 1)(h_{11} - h_{22})}{(h_{12} - h_{22})(h_{12} - h_{22} + 1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.112a)$$

Los elementos de matriz de los operadores de descenso se obtiene tomando el hermítico conjugado de las ecuaciones (3.112a); como se verá en el siguiente capítulo, estos elementos de matriz coincidirán con los que se calcularán allí y con los que aparecen en [2]. El cálculo explícito de uno de estos elementos utilizando la fórmula (3.109) lo podemos ver en el apéndice (E).

Capítulo 4

Bases polinomiales de $\mathbf{U}(4)$ y $\mathbf{U}(9)$

Se presentan dos ejemplos para ilustrar el método de construcción de bases polinomiales que portan las representaciones irreducibles (RI) de grupos unitarios. Consideramos sistemas de N bosones descritos por los grupos $\mathbf{U}(n^2) \supset \mathcal{U}(n) \times U(n)$, con $n = 2, 3$.

En cada caso se obtienen los polinomios de máximo peso que portan las RI. Se construyen los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky. A partir de la acción de potencias de los operadores de descenso sobre los polinomios de máximo peso, se obtienen las bases canónicas de los grupos $\mathcal{U}(2)$ y $\mathcal{U}(3)$. Para finalizar se hace la identificación de los estados de la base polinomial con los estados de Gelfand-Tsetlin y se calculan los elementos de matriz de los generadores de los grupos.

4.1. Grupo $\mathbf{U}(4) \supset \mathcal{U}(2) \times U(2)$

Utilizando el procedimiento desarrollado en el capítulo 2, pueden construirse bases polinomiales bosónicas que porten la representación irreducible de grupos unitarios en 4 y 9 dimensiones. Para el grupo $\mathbf{U}(4)$ tenemos que los generadores pueden escribirse como $C_{\mu s}^{\mu' s'}$ con $\mu, \mu' = 1, 2$; $s, s' = 1, 2$ y que al contraer los índices en s se obtienen los generadores de $\mathcal{U}(2)$ mientras que al sumar sobre μ' tenemos $U(2)$. Como se requiere describir sistemas bosónicos la representación irreducible de $\mathbf{U}(4)$ toma la forma $[N]$, donde N denota el número de bosones y la partición $[h_{12}, h_{22}]$ expresa la representación irreducible de los grupos $\mathcal{U}(2)$ y $U(2)$. Usando resultados anteriores tenemos que $N = h_{12} + h_{22}$. Si se quiere que el polinomio porte la representación irreducible de los grupos se debe pedir que sea homogéneo de grado N , linealmente independiente, y de máximo peso, es decir, debe satisfacer las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} C_1^1 P &= h_{12} P, & C_2^2 P &= h_{22} P, & C_1^2 P &= 0, & \text{para } & \mathcal{U}(2), \\ C_1^1 P &= h_{12} P, & C_2^2 P &= h_{22} P, & C_1^2 P &= 0. & \text{para } & U(2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Primero nos ocuparemos en construir el polinomio de máximo peso que porta la representación irreducible en el grupo $U(2)$, y después pediremos que este polinomio satisfaga las condiciones antes escritas para que lo sea también en el otro grupo.

En la representación bosónica tenemos la siguiente correspondencia de los operadores de creación y aniquilación

$$a_{\mu s}^\dagger \longrightarrow \alpha_{\mu s} \quad \text{y} \quad a^{\mu s} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mu s}}. \quad (4.2)$$

En esta realización el polinomio queda descrito por la función

$$P = P(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}). \quad (4.3)$$

De la expresión se observa que el cuadrado del número de variables es igual al número de generadores, por otra parte los generadores se pueden escribir como

$$C_\mu^{\mu'} = \sum_s \alpha_{\mu s} \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mu' s}} \quad \mu, \mu' = 1, 2,$$

con

$$C_s^{s'} = \sum_\mu \alpha_{\mu s} \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mu s'}} \quad s, s' = 1, 2.$$

Dada la forma que presentan, son operadores diferenciales lineales actuando sobre funciones dependientes de las α 's. El conjunto de ecuaciones (4.1) se considera como un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas.

Para facilitar la construcción del polinomio, tomaremos primero la acción de un generador arbitrario del grupo sobre cualquiera de las variables $\alpha_{\bar{\mu}s}$, esto es,

$$C_\mu^{\mu'} \alpha_{\bar{\mu}s} = \sum_t \alpha_{\mu t} \frac{\partial \alpha_{\bar{\mu}s}}{\partial \alpha_{\mu' t}} = \delta_{\bar{\mu}\mu'} \alpha_{\mu s}. \quad (4.4)$$

Usando este resultado se puede construir la siguiente tabla:

Podemos ver que estos generadores actúan sobre el primer subíndice de las variables. Esto nos da la pauta para reescribir a P de la siguiente forma. Para que el polinomio pueda ser homogéneo de grado h_{12} en α_{11} y h_{22} en α_{21} ,

$$P = \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} P' \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \right). \quad (4.5)$$

Al actuar con los generadores de peso de $U(2)$ sobre P , considerando la tabla (4.1) obtenemos el siguiente par de ecuaciones, una para cada generador de peso:

$$C_1^1 P = h_{12} \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} P' + \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} \frac{\partial P'}{\partial \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right)} C_1^1 \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right), \quad (4.6a)$$

	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}
\mathcal{C}_1^1	α_{11}	α_{12}	0	0
\mathcal{C}_1^2	0	0	α_{11}	α_{12}
\mathcal{C}_2^1	α_{21}	α_{22}	0	0
\mathcal{C}_2^2	0	0	α_{21}	α_{22}

Tabla 4.1: Acción de los generadores sobre las variables

$$\mathcal{C}_2^2 P = h_{22} \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} P' + \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} \frac{\partial P'}{\partial \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}\right)} \mathcal{C}_2^2 \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}\right). \quad (4.6b)$$

Para ver qué forma tiene el segundo miembro del lado derecho de las ecuaciones anteriores realizamos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1^1 \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right) &= \frac{1}{\alpha_{11}} \mathcal{C}_1^1 \alpha_{12} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}^2} \mathcal{C}_1^1 \alpha_{11} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}^2} \alpha_{11} = 0, \\ \mathcal{C}_2^2 \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}\right) &= \frac{1}{\alpha_{21}} \mathcal{C}_2^2 \alpha_{22} - \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}^2} \mathcal{C}_2^2 \alpha_{21} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}^2} \alpha_{21} = 0. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta lo anterior, las ecuaciones (4.6a),(4.6b), garantizan que tenemos un polinomio homogéneo, esto es,

$$\mathcal{C}_1^1 P = h_{12} P, \quad \mathcal{C}_2^2 P = h_{22} P,$$

cumpléndose dos de las tres condiciones usadas en (4.1). Sólo falta pedir que la acción del generador de ascenso sobre el polinomio sea cero.

Actuando con \mathcal{C}_1^2 se tiene

$$\mathcal{C}_1^2 P = h_{22} \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} P' + \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} \frac{\partial P'}{\partial \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}\right)} \mathcal{C}_1^2 \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}\right), \quad (4.7)$$

donde hemos usado que $\mathcal{C}_1^2 (\alpha_{21})^{h_{22}} = h_{22} (\alpha_{21})^{h_{22}-1} \alpha_{11}$, además de usar nuevamente la tabla (4.1). Para encontrar el segundo término calculamos

$$\mathcal{C}_1^2 \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}\right) = \frac{1}{\alpha_{21}} \mathcal{C}_1^2 \alpha_{22} - \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}^2} \mathcal{C}_1^2 \alpha_{21} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{22} \alpha_{11}}{\alpha_{21}^2} = -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right).$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.7) y reorganizando términos se obtiene

$$\mathcal{C}_1^2 P = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} \left\{ h_{22} P' - \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right) \frac{\partial P'}{\partial \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}\right)} \right\}.$$

Igualando la expresión anterior a cero se llega a que el polinomio P' obedece la ecuación

$$h_{22}P' = \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right) \frac{\partial P'}{\partial \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \right)}.$$

La ecuación anterior sugiere reemplazar $\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} = \beta_{22} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$ en P' de tal manera que el polinomio de máximo peso puede escribirse

$$P = \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} P'' \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \beta_{22} \right).$$

Actuando nuevamente con \mathcal{C}_1^2 sobre P se obtiene

$$\mathcal{C}_1^2 P = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} \left\{ h_{22} P'' - \beta_{22} \frac{\partial P''}{\partial \beta_{22}} \right\},$$

donde se utilizó la regla de la cadena en la obtención de la derivada parcial con respecto a β_{22} . Igualando a cero se encuentra que

$$h_{22} P'' = \beta_{22} \frac{\partial P''}{\partial \beta_{22}},$$

concluyéndose que P'' debe ser un polinomio homogéneo de grado h_{22} con respecto a la variable β_{22} .

El resultado anterior sugiere que podemos factorizar a $\beta_{22}^{h_{22}}$ y reescribir el polinomio como

$$P = \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} \beta_{22}^{h_{22}} G \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right), \quad (4.8)$$

donde $G \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right)$ es un polinomio de una variable.

Ahora aplicamos las correspondientes ecuaciones para el grupo complementario. Es conveniente, antes de establecer las ecuaciones, encontrar la acción de un generador arbitrario de $U(2)$ sobre cualquiera de las variables $\alpha_{\mu t}$:

$$C_s^{s'} \alpha_{\mu t} = \sum_{\bar{\mu}} \alpha_{\mu s} \frac{\partial \alpha_{\mu t}}{\partial \alpha_{\bar{\mu} s'}} = \delta_t^{s'} \alpha_{\mu s}, \quad (4.9)$$

lo que indica que únicamente modifica el segundo índice de dicha variable. Con la ecuación anterior se pueden obtener la tabla (4.2), en la que aparece la acción de los generadores de peso y ascenso de $U(2)$ sobre las variables del polinomio (4.8).

	α_{11}	α_{21}	$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$	β_{22}
C_1^1	α_{11}	α_{21}	$-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$	$-\beta_{22}$
C_1^2	0	0	1	0
C_2^2	0	0	$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$	β_{22}

Tabla 4.2: Acción de los generadores de $U(2)$ sobre las variables

Para la determinación del peso, empezamos calculando la acción de C_1^1 :

$$C_1^1 P = h_{12} \alpha_{11}^{h_{12}-1} (C_1^1 \alpha_{11}) \alpha_{21}^{h_{22}} \beta_{22}^{h_{22}} G + h_{22} \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}-1} (C_1^1 \alpha_{21}) \beta_{22}^{h_{22}} G + \\ + h_{22} \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} \beta_{22}^{h_{22}-1} (C_1^1 \beta_{22}) G + \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} \beta_{22}^{h_{22}} \frac{\partial G}{\partial (\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}})} C_1^1 \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right).$$

Tomando en cuenta la tabla (4.2), la ecuación anterior se reduce a

$$C_1^1 P = h_{12} P - \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} \beta_{22}^{h_{22}} \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right) \frac{\partial G}{\partial (\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}})}.$$

Entonces para tener un polinomio homogéneo en el índice 1 debe ocurrir que

$$\frac{\partial G}{\partial (\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}})} = 0,$$

esto es, G debe ser una constante. En resumen, el polinomio de máximo peso en los grupos $U(2)$ y $U(2)$ está dado por

$$P = N \alpha_{11}^{h_{12}} \alpha_{21}^{h_{22}} \beta_{h_{22}}^{h_{22}} = N \alpha_{11}^{h_{12}-h_{22}} (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21})^{h_{22}}, \quad (4.10)$$

donde N es una constante de normalización. Recordando la notación de determinantes del capítulo anterior y expresando a P en término de operadores bosónicos, el polinomio de máximo peso se puede escribir como

$$\left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{12} \end{array} \right\rangle \equiv P|0\rangle = N (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} |0\rangle, \quad (4.11)$$

que por supuesto concuerda con la fórmula general establecida en la ecuación (3.69).

Una vez obtenido el polinomio de máximo peso lo que procede es normalizar el estado de Gelfand-Tsetlin, es decir,

$$1 = \langle 0|P^\dagger P|0\rangle = N^2 \langle 0|(\Delta_1^{1\dagger})^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_{12}^{12\dagger})^{h_{22}-1} \Delta_{12}^{12\dagger} (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} |0\rangle, \quad (4.12)$$

donde factorizamos $\Delta_{12}^{12\dagger}$. A continuación consideramos la acción de $\Delta_{12}^{12\dagger}$ sobre $P|0\rangle$. Para esto vamos a necesitar los siguientes conmutadores:

$$[\Delta_{12}^{12\dagger}, (\Delta_1^1)^n] = n(\Delta_1^1)^{n-1} \Delta_2^{2\dagger}, \quad (4.13a)$$

$$[\Delta_{12}^{12\dagger}, (\Delta_{12}^{12})^n] = n(\Delta_{12}^{12})^{n-1} \{ \Delta_1^1 \Delta_1^{1\dagger} + \Delta_2^2 \Delta_2^{2\dagger} + \Delta_1^2 \Delta_1^{2\dagger} + \Delta_2^1 \Delta_2^{1\dagger} + n + 1 \}, \quad (4.13b)$$

$$[\Delta_2^{2\dagger}, (\Delta_{12}^{12})^n] = n(\Delta_{12}^{12})^{n-1} \Delta_1^1. \quad (4.13c)$$

Tomando en cuenta estos resultados se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_{12}^{12\dagger} P|0\rangle &= \{ (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} \Delta_{12}^{12\dagger} + [\Delta_{12}^{12\dagger}, (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}}] \} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} |0\rangle \\ &= (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} \Delta_{12}^{12\dagger} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} |0\rangle + (h_{12} - h_{22}) (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}-1} \Delta_2^{2\dagger} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde se ha sustituido el valor del conmutador (4.13a). Desarrollando por separado cada término del lado derecho de la ecuación anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_{12}^{12\dagger} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} |0\rangle &= \{ (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} \Delta_{12}^{12\dagger} + [\Delta_{12}^{12\dagger}, (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}}] \} |0\rangle \\ &= h_{22}(h_{22} + 1) (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}-1} |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.15a)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2^{2\dagger} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} |0\rangle &= \{ (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} \Delta_2^{2\dagger} + [\Delta_2^{2\dagger}, (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}}] \} |0\rangle \\ &= h_{22} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}-1} \Delta_1^1 |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.15b)$$

donde usamos las ecuaciones (4.13a),(4.13c), y que los operadores bosónicos de descenso satisfacen $a^{\mu s}|0\rangle = 0$. Sustituyendo (4.15a),(4.15b), en (4.14) y reorganizando términos se llega a la expresión

$$\Delta_{12}^{12\dagger} (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} |0\rangle = h_{22}(h_{12} + 1) (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}-1} |0\rangle.$$

Finalmente si reemplazamos este resultado en (4.12) se obtiene

$$\langle 0|P^\dagger P|0\rangle = N^2 h_{22}(h_{22} + 1) \langle 0|(\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}-1} (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}-1} |0\rangle. \quad (4.16)$$

Para encontrar N conviene definir la función

$$f(h_{12}, h_{22}) \equiv \langle 0|(\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} |0\rangle.$$

Entonces la ecuación (4.16) en términos de la nueva función la escribimos como

$$f(h_{12}, h_{22}) = h_{22}(h_{12} + 1) f(h_{12} - 1, h_{22} - 1),$$

obteniendo así una relación de recurrencia, donde h_{12}, h_{22} , decrecen en una unidad para que la cantidad $h_{12} - h_{22}$ no cambie. Utilizando ésta calculamos el siguiente término, esto es,

$$f(h_{12} - 1, h_{22} - 1) = (h_{22} - 1)h_{12}f(h_{12} - 2, h_{22} - 2);$$

y así sucesivamente, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} f(h_{12}, h_{22}) &= h_{22}(h_{12} + 1)f(h_{12} - 1, h_{22} - 1) \\ &= h_{22}(h_{22} - 1)(h_{12} + 1)h_{12}f(h_{12} - 2, h_{22} - 2) \\ &= h_{22}(h_{22} - 1)(h_{22} - 2)(h_{12} + 1)h_{12}(h_{12} - 1)f(h_{12} - 3, h_{22} - 3) \\ &\vdots \\ &= \frac{h_{22}!(h_{12} + 1)!}{(h_{12} - h_{22} + 1)!}f(h_{12} - h_{22}, 0), \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde $f(h_{12} - h_{22}, 0) = \langle 0 | (\Delta_1^{1\dagger})^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} | 0 \rangle$.

Considerando a $\Delta_1^{1\dagger}$ como un operador diferencial se tiene que

$$\begin{aligned} \langle 0 | (\Delta_1^{1\dagger})^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} | 0 \rangle &= \langle 0 | (\Delta_1^{1\dagger})^{h_{12}-h_{22}-1} \Delta_1^{1\dagger} (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} | 0 \rangle, \\ &= (h_{12} - h_{22}) \langle 0 | (\Delta_1^{1\dagger})^{h_{12}-h_{22}-1} (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}-1} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

La expresión anterior puede escribirse en término de las f , obteniendo la relación de recurrencia

$$f(h_{12} - h_{22}, 0) = (h_{12} - h_{22})f(h_{12} - h_{22} - 1, 0).$$

Procediendo en forma iterativa

$$\begin{aligned} f(h_{12} - h_{22}, 0) &= (h_{12} - h_{22})f(h_{12} - h_{22} - 1, 0), \\ &= (h_{12} - h_{22})(h_{12} - h_{22} - 1)f(h_{12} - h_{22} - 2, 0), \\ &= (h_{12} - h_{22})(h_{12} - h_{22} - 1)(h_{12} - h_{22} - 2)f(h_{12} - h_{22} - 3, 0), \\ &\vdots \\ &= (h_{12} - h_{22})!f(0, 0), \end{aligned}$$

donde $f(0, 0) = \langle 0 | 0 \rangle \equiv 1$. Juntando los resultados anteriores se encuentra que el coeficiente de normalización tiene el valor

$$N = \sqrt{\frac{h_{12} - h_{22} + 1}{h_{22}!(h_{12} + 1)!}}, \quad (4.19)$$

y por lo tanto, el estado de Gelfand-Tsetlin de máximo peso normalizado está dado por

$$\left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12} & \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{h_{12} - h_{22} + 1}{h_{22}!(h_{12} + 1)!}} (\Delta_1^1)^{h_{12}-h_{22}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{22}} |0\rangle. \quad (4.20)$$

El siguiente paso es obtener la base completa a partir del estado de máximo peso mediante el uso de los operadores de descenso. Dado que sólo tenemos un generador de descenso, éste está relacionado con el operador de descenso de la siguiente manera

$$L_2^1 = N \mathcal{C}_2^1, \quad (4.21)$$

para garantizar que da un polinomio normalizado. En general para un grupo unitario $U(n)$, el n -ésimo renglón del estado no se ve afectado por la acción de los generadores, esto es debido a que porta la RI. Para este caso sólo tenemos dos renglones por lo que el efecto de los generadores sobre los estados ocurre solamente en el primer renglón. De esta manera la acción de \mathcal{C}_2^1 sobre un estado de máximo peso es de la forma

$$\mathcal{C}_2^1 \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12} & \end{array} \right\rangle = N_{h_{12}-1} \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12}-1 & \end{array} \right\rangle.$$

Si se actúa dos veces sobre el estado de máximo peso se tiene la relación

$$(\mathcal{C}_2^1)^2 \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12} & \end{array} \right\rangle = N_{h_{12}-2} \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12}-2 & \end{array} \right\rangle.$$

De esta manera si se actúa p veces sobre el estado de máximo peso tenemos que

$$(\mathcal{C}_2^1)^p \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12} & \end{array} \right\rangle = N_{h_{12}-p} \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12}-p & \end{array} \right\rangle. \quad (4.22)$$

Para encontrar la constante que aparece en la ecuación anterior vamos a tomar el producto del estado anterior con su adjunto, teniendo en cuenta que los estados de Gelfand-Tsetlin son ortonormales, es decir,

$$\begin{aligned} N_{h_{12}-p}^2 &= \left\langle \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12} & \end{array} \left| (\mathcal{C}_1^2)^p (\mathcal{C}_2^1)^p \right| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12} & \end{array} \right\rangle, \\ &= \left\langle \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12} & \end{array} \left| (\mathcal{C}_1^2)^{p-1} \mathcal{C}_1^2 (\mathcal{C}_2^1)^p \right| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12} & \end{array} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde factorizamos a \mathcal{C}_1^2 , consideramos

$$\mathcal{C}_1^2 (\mathcal{C}_2^1)^p \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12} & \end{array} \right\rangle = \{(\mathcal{C}_2^1)^p \mathcal{C}_1^2 + [\mathcal{C}_1^2, (\mathcal{C}_2^1)^p]\} \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ h_{12} & \end{array} \right\rangle. \quad (4.24)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior es cero; esto se debe a que se está actuando con un operador de ascenso sobre el estado de máximo peso. Por otro lado se sustituye el valor del conmutador en el segundo término, con lo que se obtiene

$$[\mathcal{C}_1^2, (\mathcal{C}_2^1)^p] = p(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - p + 1)(\mathcal{C}_2^1)^{p-1}. \quad (4.25)$$

Substituyendo éste en (4.24) y actuando con los generadores de peso sobre el estado de máximo peso resulta

$$\mathcal{C}_1^2 (\mathcal{C}_2^1)^p \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{12} \end{array} \right\rangle = p(h_{12} - h_{22} - p + 1)(\mathcal{C}_2^1)^{p-1} \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{12} \end{array} \right\rangle. \quad (4.26)$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (4.23) y definiendo la función

$$F(p) = \left\langle \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{12} \end{array} \left| (\mathcal{C}_1^2)^p (\mathcal{C}_2^1)^p \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{12} \end{array} \right\rangle \right\rangle, \quad (4.27)$$

obtenemos la relación de recurrencia

$$F(p) = p(h_{12} - h_{22} - p + 1)F(p - 1). \quad (4.28)$$

Procediendo en forma iterativa se encuentra el valor de dicha función, esto es,

$$\begin{aligned} F(p) &= p(h_{12} - h_{22} - p + 1)F(p - 1) \\ &= p(p - 1)(h_{12} - h_{22} - p + 1)(h_{12} - h_{22} - p + 2)F(p - 2) \\ &\vdots \\ &= \frac{p!(h_{12} - h_{22})!}{(h_{12} - h_{22} - p)!} F(0), \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $F(0)$ es el producto del estado de máximo peso consigo mismo, por lo tanto es igual a 1. Con esto, la ecuación (4.22) se reescribe como

$$\left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{11} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{(h_{11} - h_{22})!}{(h_{12} - h_{11})!(h_{12} - h_{22})!}} (\mathcal{C}_2^1)^{h_{12} - h_{11}} \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{12} \end{array} \right\rangle, \quad (4.30)$$

donde tomamos $p = h_{12} - h_{11}$.

Si consideramos el caso anterior, esto es, $p = h_{12} - h_{11} + 1$, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{11} - 1 \end{array} \right\rangle &= \sqrt{\frac{(h_{11} - h_{22} - 1)!}{(h_{12} - h_{11} + 1)!(h_{12} - h_{22})!}} (\mathcal{C}_2^1)^{h_{12} - h_{11} + 1} \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{12} \end{array} \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{(h_{11} - h_{22} - 1)!}{(h_{12} - h_{11} + 1)!(h_{12} - h_{22})!}} \mathcal{C}_2^1 (\mathcal{C}_2^1)^{h_{12} - h_{11}} \left| \begin{array}{cc} h_{12} & h_{22} \\ & h_{12} \end{array} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Usando la ecuación (4.30), después de arreglar términos, se obtiene la constante que relaciona un estado arbitrario con peso $[h_{11}, h_{12} + h_{22} - h_{11}]$ con otro de peso $[h_{11} - 1, h_{12} + h_{22} - h_{11} + 1]$ mediante el generador de descenso C_2^1 , esto es,

$$C_2^1 \left| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} & \\ & & \end{array} \right\rangle = \sqrt{(h_{12} - h_{11} + 1)(h_{11} - h_{22})} \left| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} - 1 & \\ & & \end{array} \right\rangle. \quad (4.32)$$

Dada esta ecuación estamos en condiciones de calcular los elementos de matriz del generador de descenso; para obtener los generadores de ascenso sólo debemos tomar el hermítico conjugado.

A continuación se listan los elementos de matriz de los operadores de ambos grupos

$$\left\langle \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} & \\ & & \end{array} \left| C_1^1 \right| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} & \\ & & \end{array} \right\rangle = h_{11},$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} & \\ & & \end{array} \left| C_2^2 \right| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} & \\ & & \end{array} \right\rangle = h_{12} + h_{22} - h_{11},$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} - 1 & \\ & & \end{array} \left| C_2^1 \right| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} & \\ & & \end{array} \right\rangle = \sqrt{(h_{11} - h_{22})(h_{12} - h_{11} + 1)},$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} + 1 & \\ & & \end{array} \left| C_1^2 \right| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} & \\ & & \end{array} \right\rangle = \sqrt{(h_{11} - h_{22} + 1)(h_{12} - h_{11})}.$$

Ahora mediante un cambio de variable realizaremos la transición de $U(2)$ a $SU(2)$, para después encontrar la conexión entre la representación de $SU(2)$ y la del momento angular de espín. Para tal propósito tomaremos la acción de los operadores de descenso de cada representación sobre un estado arbitrario y al compararlos se obtendrá la correspondencia entre las dos representaciones.

Se propone el cambio de variable

$$\bar{C}_s^{s'} = C_s^{s'} - \frac{1}{2} \hat{N} \delta_s^{s'}, \quad s, s' = 1, 2.$$

Esto implica que los generadores con $s' = s$ toman la forma

$$\bar{C}_1^1 = \frac{1}{2}(C_1^1 - C_2^2), \quad \bar{C}_2^2 = -\bar{C}_1^1,$$

Puede verificarse directamente que el operador de Casimir de primer orden $\bar{N} = 0$ mientras que el de segundo orden

$$\bar{\Gamma} = \sum_{s,s'} \bar{C}_s^{s'} \bar{C}_{s'}^{s} = \Gamma - \frac{\hat{N}^2}{2}. \quad (4.33)$$

Al calcular la acción de $\bar{\Gamma}$ sobre el estado de máximo peso, se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} \left| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{12} & \\ & & h_{12} \end{array} \right\rangle &= (\Gamma - \frac{1}{2}\hat{N}^2) \left| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{12} & \\ & & h_{12} \end{array} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}(h_{12} - h_{22})(h_{12} - h_{22} + 2) \left| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{12} & \\ & & h_{12} \end{array} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Este resultado va a ser de utilidad más adelante.

En la representación de $U(2)$ y $SU(2)$ el operador de descenso al que denotaremos como L_2^1 se define de la siguiente manera:

$$L_2^1 \left| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} & \\ & & h_{11} \end{array} \right\rangle = \sqrt{(h_{12} - h_{11} + 1)(h_{11} - h_{22})} \left| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} - 1 & \\ & & h_{11} \end{array} \right\rangle. \quad (4.35)$$

Por otra parte tenemos la representación $|S m\rangle$ con los correspondientes generadores S^2, S_+, S_- y S_z , donde S_- satisface la siguiente ecuación

$$S_- |S m\rangle = \sqrt{(S + m)(S - m + 1)} |S m - 1\rangle. \quad (4.36)$$

Dado que representan a los mismos estados al comparar las ecuaciones (4.35), (4.36), y tomar en cuenta que el eigenvalor del Casimir de primer orden \hat{N} es $N = h_{12} + h_{22}$, se establece la siguiente correspondencia entre ambas representaciones:

$$\left| \begin{array}{ccc} h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} & \\ & & h_{11} \end{array} \right\rangle \longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} \frac{N}{2} + S & & \frac{N}{2} - S \\ & \frac{N}{2} + m & \\ & & \frac{N}{2} - S \end{array} \right\rangle. \quad (4.37)$$

Al actuar con los generadores $\bar{\Gamma}, \bar{C}_1^1$, sobre un estado arbitrario e identificando se podrá encontrar la correspondencia entre los operadores. Primero lo haremos con $\bar{\Gamma}$, esto es,

$$\bar{\Gamma} \left| \begin{array}{ccc} \frac{N}{2} + S & & \frac{N}{2} - S \\ & \frac{N}{2} + m & \\ & & \frac{N}{2} - S \end{array} \right\rangle = 2S(S + 1) \left| \begin{array}{ccc} \frac{N}{2} + S & & \frac{N}{2} - S \\ & \frac{N}{2} + m & \\ & & \frac{N}{2} - S \end{array} \right\rangle.$$

Relacionando a $S(S + 1)$ con el eigenvalor del operador \hat{S}^2 se llega a que $\hat{S}^2 = \frac{\bar{\Gamma}}{2}$. Con \bar{C}_1^1 obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{C}_1^1 \left| \begin{array}{ccc} \frac{N}{2} + S & & \frac{N}{2} - S \\ & \frac{N}{2} + m & \\ & & \frac{N}{2} - S \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{2}(C_1^1 - C_2^2) \left| \begin{array}{ccc} \frac{N}{2} + S & & \frac{N}{2} - S \\ & \frac{N}{2} + m & \\ & & \frac{N}{2} - S \end{array} \right\rangle \\ &= m \left| \begin{array}{ccc} \frac{N}{2} + S & & \frac{N}{2} - S \\ & \frac{N}{2} + m & \\ & & \frac{N}{2} - S \end{array} \right\rangle. \end{aligned}$$

Al relacionar a m con el eigenvalor del operador \hat{S}_z obtenemos la segunda correspondencia que junto con los operadores de ascenso y descenso

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}(C_1^1 - C_2^2), \quad \hat{S}_- = C_2^1 \quad \text{y} \quad \hat{S}_+ = C_1^2, \quad (4.38)$$

forman el algebra de $\mathbf{SU}(2)$. Estos estados son útiles para la descripción de la parte de materia en modelos de interacción de materia con un campo electromagnético de un modo, tales como los modelos de Tavis-Cummings o de Dicke.

4.2. Grupo $\mathbf{U}(9) \supset \mathcal{U}(3) \times U(3)$

Repitiendo el procedimiento utilizado en la parte anterior vamos a construir la base polinomial bosónica que porta la RI del grupo unitario $\mathbf{U}(9)$. Los generadores de este grupo son de la forma $C_{\mu s}^{\mu' s'}$ con $\mu, \mu' = 1, 2, 3$; $s, s' = 1, 2, 3$. Tomamos la traza con respecto a s y obtenemos los generadores $C_{\mu}^{\mu'}$ de $\mathcal{U}(3)$, mientras que si se hace con respecto a μ se obtienen los generadores $C_s^{s'}$ de $U(3)$. Como se describen sistemas bosónicos la RI de $\mathbf{U}(9)$ toma la forma $[N]$ donde N es el número de bosones y la partición $[h_{13}, h_{23}, h_{33}]$ expresa la RI de los grupos $\mathcal{U}(3)$ y $U(3)$, por los resultados anteriores se cumple la siguiente relación $N = h_{13} + h_{23} + h_{33}$.

Para construir la base polinomial primero pedimos que P sea de máximo peso en el grupo $\mathcal{U}(3)$. Para esto el polinomio debe satisfacer el siguiente conjunto de ecuaciones

$$C_1^1 P = h_{13} P, \quad C_2^2 P = h_{23} P, \quad C_3^3 P = h_{33} P, \quad C_1^2 P = C_1^3 P = C_2^3 P = 0. \quad (4.39)$$

Después se pedirá que el polinomio cumpla con un conjunto similar de ecuaciones para los generadores de $U(3)$.

Tomando en cuenta la ecuación (4.4) la cual es válida para cualquier representación de un grupo unitario $\mathcal{U}(n)$, la acción de un generador de peso sobre una variable $\alpha_{\mu' s}$ arbitraria es de la forma

$$C_{\mu}^{\mu'} \alpha_{\mu' s} = \alpha_{\mu s} \delta_{\mu \mu'}, \quad \mu = 1, 2, 3. \quad (4.40)$$

Como los generadores se comportan como operadores diferenciales sobre las $\alpha' s$, los generadores miden el grado de las variables $\alpha_{\mu s}$ en el polinomio, por lo que es conveniente factorizarlo de la manera

$$P = \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} P' \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}}, \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{31}} \right). \quad (4.41)$$

En esta forma garantizamos que tenemos un polinomio homogéneo de grado h_{13} respecto a α_{11} , h_{23} respecto a α_{21} y h_{33} respecto a α_{31} . Para checar que P es realmente

eigenfunción de los generadores de peso, tomamos la acción de uno de ellos; por ejemplo \mathcal{C}_1^1 :

$$\mathcal{C}_1^1 P = h_{13} \alpha_{11}^{h_{13}-1} (\mathcal{C}_1^1 \alpha_{11}) \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} P' + \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \left\{ \sum_{\mu s} \frac{\partial P'}{\partial \left(\frac{\alpha_{\mu s}}{\alpha_{\mu 1}} \right)} \mathcal{C}_1^1 \left(\frac{\alpha_{\mu s}}{\alpha_{\mu 1}} \right) \right\}, \quad (4.42)$$

donde $\mu = 1, 2, 3$; $s = 2, 3$. Dado que \mathcal{C}_1^1 es un operador diferencial hemos utilizado la regla de la cadena en el desarrollo de la acción sobre P' , haciendo el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1^1 \left(\frac{\alpha_{\mu s}}{\alpha_{\mu 1}} \right) &= \frac{1}{\alpha_{\mu 1}} \mathcal{C}_1^1 \alpha_{\mu s} - \frac{\alpha_{\mu s}}{\alpha_{\mu 1}^2} \mathcal{C}_1^1 \alpha_{\mu 1} = \left(\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{\mu 1}} - \frac{\alpha_{\mu s} \alpha_{11}}{\alpha_{\mu 1}^2} \right) \delta_{\mu 1} \\ &= \frac{1}{\alpha_{\mu 1}^2} (\alpha_{\mu 1} \alpha_{\mu s} - \alpha_{\mu s} \alpha_{11}) \delta_{\mu 1} = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

para $\mu = 1, 2, 3$. Usando éste junto con (4.42) corroboramos que el polinomio es homogéneo de grado h_{13} respecto de α_{11} , es decir,

$$\mathcal{C}_1^1 P = h_{13} P.$$

De manera análoga se procede con los otros dos generadores de peso obteniéndose un resultado similar:

$$\mathcal{C}_2^2 P = h_{23} P, \quad \mathcal{C}_3^3 P = h_{33} P.$$

Ahora tenemos que actuar con los generadores de ascenso sobre P y pedir que esta acción sea igual a cero. Comenzando con \mathcal{C}_1^2 se tiene

$$\mathcal{C}_1^2 P = h_{23} \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}-1} (\mathcal{C}_1^2 \alpha_{21}) \alpha_{31}^{h_{33}} P' + \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \left\{ \sum_{\mu s} \frac{\partial P'}{\partial \left(\frac{\alpha_{\mu s}}{\alpha_{\mu 1}} \right)} \mathcal{C}_1^2 \left(\frac{\alpha_{\mu s}}{\alpha_{\mu 1}} \right) \right\}, \quad (4.44)$$

con $\mu = 1, 2, 3$; $s = 2, 3$. Calculando la acción de \mathcal{C}_1^2 que aparece en el segundo término de la ecuación anterior se halla

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1^2 \left(\frac{\alpha_{\mu s}}{\alpha_{\mu 1}} \right) &= \frac{1}{\alpha_{\mu 1}} \mathcal{C}_1^2 \alpha_{\mu s} - \frac{\alpha_{\mu s}}{\alpha_{\mu 1}^2} \mathcal{C}_1^2 \alpha_{\mu 1} = \left(\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{\mu s}} - \frac{\alpha_{\mu s} \alpha_{11}}{\alpha_{\mu 1}^2} \right) \delta_{\mu 2} \\ &= -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{\mu 1}} \left(\frac{\alpha_{\mu s}}{\alpha_{\mu 1}} - \frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{11}} \right) \delta_{\mu 2}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.44), igualando a cero y reorganizando términos se encuentra la condición

$$h_{23} P' = \left\{ \frac{\partial P'}{\partial \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \right)} \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right) + \frac{\partial P'}{\partial \left(\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{21}} \right)} \left(\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} \right) \right\}. \quad (4.46)$$

La ecuación anterior sugiere reemplazar

$$\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} = \beta_{22} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \quad \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{21}} = \beta_{23} + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}, \quad (4.47)$$

en el polinomio P' de tal forma que P puede escribirse

$$P = \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} P'' \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}, \beta_{22}, \beta_{23}, \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}}, \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{31}} \right). \quad (4.48)$$

Calculando nuevamente la acción del generador \mathcal{C}_1^2 sobre este polinomio e igualando a cero se obtiene la ecuación

$$h_{23} P'' = \beta_{22} \frac{\partial P''}{\partial \beta_{22}} + \beta_{23} \frac{\partial P''}{\partial \beta_{23}}, \quad (4.49)$$

en donde se ha utilizado la ecuación (4.45) para calcular la acción del generador sobre β_{22} y β_{23} ; esto se debe a que $\mathcal{C}_1^2 \beta_{2s} = \mathcal{C}_1^2 \left(\frac{\alpha_{2s}}{\alpha_{21}} \right)$ para $s = 2, 3$.

De la ecuación anterior podemos apreciar que P'' es un polinomio homogéneo de grado h_{23} respecto a las variables β_{22}, β_{23} . Esto nos da la pauta para factorizar ya sea β_{22} o β_{23} . En esta discusión hemos decidido utilizar la primer variable, por lo que el polinomio toma la forma

$$P = \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23}} P'' \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}, \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}, \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}}, \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{31}} \right). \quad (4.50)$$

Un tratamiento similar se hace con el generador \mathcal{C}_1^3 . Sólo hay que tener en cuenta que $\mathcal{C}_1^3 \beta_{2s} = 0$; esto es así porque el generador actúa sobre las $\alpha_{\mu s}$ con primer subíndice igual a 3.

Dicho lo anterior, si se toma la acción de este generador sobre el polinomio P y se iguala a cero se obtiene

$$h_{33} P''' = \left\{ \frac{\partial P'''}{\partial \left(\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}} \right)} \left(\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right) + \frac{\partial P'''}{\partial \left(\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{31}} \right)} \left(\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{31}} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} \right) \right\}.$$

Procediendo en forma similar que para \mathcal{C}_1^2 , se realiza el siguiente cambio de variables en el polinomio P''' :

$$\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}} = \beta_{32} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \quad \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{31}} = \beta_{33} + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}.$$

Entonces el polinomio lo escribimos

$$P = \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23}} G \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}, \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}, \beta_{32}, \beta_{33} \right),$$

donde G es un nuevo polinomio. Actuando nuevamente con \mathcal{C}_1^3 sobre P e igualando a cero se encuentra la relación

$$h_{33}G = \left\{ \beta_{32} \frac{\partial G}{\partial \beta_{32}} + \beta_{33} \frac{\partial G}{\partial \beta_{33}} \right\},$$

que indica que G es un polinomio homogéneo de grado h_{33} respecto a las variables β_{32}, β_{33} , lo que nos permite factorizar una de las dos variables. En este caso tomamos a la primera, por lo que el polinomio toma la forma

$$P = \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23}} \beta_{32}^{h_{33}} G' \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}, \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}, \frac{\beta_{33}}{\beta_{32}} \right). \quad (4.51)$$

Finalmente se toma la acción de \mathcal{C}_2^3 sobre el polinomio P . Con el propósito de que el cálculo sea más claro primero vamos a actuar sobre las variables del polinomio.

De acuerdo a la ecuación (4.4), que también es válida para los generadores de este grupo, tenemos que \mathcal{C}_2^3 sólo actúa sobre las variables con primer subíndice igual a 3; por lo tanto

$$\mathcal{C}_2^3 \alpha_{11} = \mathcal{C}_2^3 \alpha_{21} = \mathcal{C}_2^3 \beta_{22} = \mathcal{C}_2^3 \beta_{23} = 0. \quad (4.52)$$

Para el caso contrario, es decir, cuando tenemos α_{3s} con $s = 1, 2, 3$,

$$\mathcal{C}_2^3 \alpha_{31} = \alpha_{21}, \quad \mathcal{C}_2^3 \alpha_{32} = \alpha_{22}, \quad \mathcal{C}_2^3 \alpha_{33} = \alpha_{23}. \quad (4.53)$$

A partir de la ecuación anterior podemos calcular la acción de este generador sobre β_{32}, β_{33} . Comenzando con el primero tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2^3 \beta_{32} &= \mathcal{C}_2^3 \left(\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right) = \frac{1}{\alpha_{31}} \mathcal{C}_2^3 \alpha_{32} - \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}^2} \mathcal{C}_2^3 \alpha_{31} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{31}} - \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}^2} \alpha_{21} \\ &= -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{31}} \left(\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}} - \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \right), \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde se han utilizado las ecuaciones (4.52), (4.53). El término entre paréntesis puede ser escrito en función de las betas. Con esto la ecuación se transforma en

$$\mathcal{C}_2^3 \beta_{32} = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{31}} \{ \beta_{32} - \beta_{22} \}. \quad (4.55)$$

De forma similar se hace con β_{33} , obteniendo el resultado

$$\mathcal{C}_2^3 \beta_{33} = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{31}} (\beta_{33} - \beta_{23}). \quad (4.56)$$

Para terminar con este preámbulo vamos a calcular la acción sobre el cociente

$$\mathcal{C}_2^3 \left(\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}} \right) = \frac{1}{\beta_{32}} \mathcal{C}_2^3 \beta_{33} - \frac{\beta_{33}}{\beta_{32}^2} \mathcal{C}_2^3 \beta_{32} = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{31}} \left\{ \frac{1}{\beta_{32}} (\beta_{33} - \beta_{23}) - \frac{\beta_{33}}{\beta_{32}^2} (\beta_{32} - \beta_{22}) \right\}. \quad (4.57)$$

En esta ocasión utilizamos las ecuaciones (4.55) y (4.56). Rearreglando términos se obtiene

$$\mathcal{C}_2^3\left(\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}}\right) = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{31}} \frac{\beta_{22}}{\beta_{32}} \left\{ \frac{\beta_{33}}{\beta_{32}} - \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} \right\}. \quad (4.58)$$

La utilidad de escribirla de esta manera la veremos a la hora de calcular la acción del generador sobre P .

Al actuar con \mathcal{C}_2^3 sobre el polinomio P se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2^3 P &= h_{33} \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}-1} (\mathcal{C}_2^3 \alpha_{31}) \beta_{22}^{h_{23}} \beta_{32}^{h_{33}} G' + h_{33} \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23}} \beta_{32}^{h_{33}-1} (\mathcal{C}_2^3 \beta_{32}) G' \\ &+ \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23}} \beta_{32}^{h_{33}} \left\{ \frac{\partial G'}{\partial(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}})} \mathcal{C}_2^3\left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right) + \frac{\partial G'}{\partial(\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}})} \mathcal{C}_2^3\left(\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}\right) + \frac{\partial G'}{\partial(\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}})} \mathcal{C}_2^3\left(\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial G'}{\partial(\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}})} \mathcal{C}_2^3\left(\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (4.52), (4.53), (4.55) y (4.58), igualando a cero, y rearreglando términos se halla

$$h_{33} G' = \left(\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}} - \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} \right) \frac{\partial G'}{\partial(\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}})},$$

que sugiere reemplazar

$$\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}} = \gamma_{33} + \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}},$$

en el polinomio G' de tal manera que P puede expresarse

$$P = \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23}} \beta_{32}^{h_{33}} G''\left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}, \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}, \gamma_{33}\right),$$

en donde G'' es un nuevo polinomio que depende de las variables indicadas en la expresión anterior. Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{C}_2^3 \gamma_{33} = \mathcal{C}_2^3 \left(\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}} - \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} \right) = \mathcal{C}_2^3 \left(\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}} \right) = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{31}} \frac{\beta_{22}}{\beta_{32}} \left(\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}} - \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} \right) = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{31}} \frac{\beta_{22}}{\beta_{32}} \gamma_{33},$$

tomamos la acción sobre el polinomio. Igualando a cero, y rearreglando términos se encuentra

$$h_{33} G'' = \gamma_{33} \frac{\partial G''}{\partial \gamma_{33}}.$$

Como en casos anteriores hemos utilizado la regla de la cadena para obtener la derivada parcial respecto a γ_{33} . La ecuación anterior implica que G''' es un polinomio homogéneo de grado h_{33} respecto a γ_{33} , lo cual permite factorizar dicha variable; por lo tanto, el polinomio se reescribe

$$P = \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23}} \beta_{32}^{h_{33}} \gamma_{33}^{h_{33}} G'''' \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}, \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} \right). \quad (4.60)$$

Sólo nos queda por aplicar un conjunto de condiciones similares a las de (4.39) pero en este caso los generadores son los de $U(3)$.

Como en ocasiones anteriores, vamos a necesitar primero la acción de un generador arbitrario $C_s^{s'}$ sobre $\alpha_{\mu t}$, y con la ayuda de este resultado calculamos la acción sobre $\beta_{\mu t}$, esto es,

$$C_s^{s'} \alpha_{\mu t} = \sum_{\mu'} \alpha_{\mu' s} \frac{\partial \alpha_{\mu t}}{\alpha_{\mu' s'}} = \alpha_{\mu s} \delta_{s' t}. \quad (4.61)$$

Ahora actuamos sobre $\beta_{\mu t}$ con $\mu = 2, 3$; $s = 2, 3$. En el caso en que $\mu = 1$ o $s = 1$ se tiene que $\beta_{1s} = \beta_{\mu 1} = \beta_{11} = 0$:

$$C_s^{s'} \beta_{\mu t} = C_s^{s'} \left(\frac{\alpha_{\mu s'}}{\alpha_{\mu 1}} - \frac{\alpha_{1 s'}}{\alpha_{11}} \right) = \frac{1}{\alpha_{\mu 1}} C_s^{s'} \alpha_{\mu t} - \frac{\alpha_{\mu t}}{\alpha_{\mu 1}^2} C_s^{s'} \alpha_{\mu 1} - \frac{1}{\alpha_{11}} C_s^{s'} \alpha_{1 t} + \frac{\alpha_{1 t}}{\alpha_{11}} C_s^{s'} \alpha_{11}. \quad (4.62)$$

Usando la relación (4.61) repetidamente y agrupando términos se obtiene

$$C_s^{s'} \beta_{\mu t} = \beta_{\mu s} \delta_{s' t} - \left(\frac{\alpha_{\mu t} \alpha_{\mu s'}}{\alpha_{11}^2} - \frac{\alpha_{1 t} \alpha_{1 s'}}{\alpha_{11}^2} \right) \delta_{s' 1}. \quad (4.63)$$

A partir de las ecuaciones (4.61) y (4.63) podemos construir la tabla en la que aparece la acción de los generadores sobre las variables del polinomio, que será de utilidad en cálculos posteriores.

Considerando la tabla anterior y agrupando términos, la acción del generador C_1^1 sobre el polinomio P toma la forma

$$C_1^1 P = h_{13} P - \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23}} \beta_{32}^{h_{33}} \gamma_{33}^{h_{33}} \left\{ \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \frac{\partial G''''}{\partial \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right)} + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} \frac{\partial G''''}{\partial \left(\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} \right)} \right\}.$$

Para que el eigenvalor del generador C_1^1 esté bien definido pedimos que

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \frac{\partial G''''}{\partial \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right)} + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} \frac{\partial G''''}{\partial \left(\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} \right)} = 0. \quad (4.64)$$

	α_{11}	α_{21}	α_{31}	$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$	$\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}$	β_{22}	β_{23}	β_{32}	$\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}$	$\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}}$	γ_{33}
C_1^1	α_{11}	α_{21}	α_{31}	$-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$	$-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}$	$-\beta_{22}$	$-\beta_{23}$	$-\beta_{32}$	0	0	0
C_2^2	0	0	0	$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$	0	β_{22}	0	β_{32}	$-\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}$	$-\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}}$	0
C_3^3	0	0	0	0	$\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}$	0	β_{23}	0	$\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}$	$\frac{\beta_{33}}{\beta_{32}}$	γ_{33}
C_1^2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 4.3: Acción de algunos generadores de $U(3)$ sobre las variables

De manera análoga lo hacemos con C_2^2 y C_3^3 , obteniendo las ecuaciones

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \frac{\partial G'''}{\partial(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}})} - \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} \frac{\partial G'''}{\partial(\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}})} = 0, \quad \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} \frac{\partial G'''}{\partial(\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}})} + \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} \frac{\partial G'''}{\partial(\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}})} = 0. \quad (4.65)$$

Por sí mismas estas tres ecuaciones no permiten resolver el problema. Para poder hacerlo y ver la forma que tiene el polinomio G''' tomamos la acción del generador de ascenso C_1^2 . Considerando nuevamente la tabla (4.3) tenemos que

$$C_1^2 P = \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23}} \beta_{32}^{h_{33}} \gamma_{33}^{h_{33}} \frac{\partial G'''}{\partial(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}})}. \quad (4.66)$$

Entonces, si se quiere que el polinomio sea de máximo peso debemos pedir que la ecuación anterior sea igual a cero, por lo que se debe satisfacer

$$\frac{\partial G'''}{\partial(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}})} = 0.$$

Sustituyendo este resultado en las ecuaciones (4.64) y (4.65) obtenemos las condiciones

$$\frac{\partial G'''}{\partial(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}})} = 0, \quad \frac{\partial G'''}{\partial(\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}})} = 0, \quad \frac{\partial G'''}{\partial(\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}})} = 0,$$

que implican que G''' es constante. Por lo tanto el polinomio que porta la representación irreducible de $U(3) \times U(3)$ lo escribimos de la forma

$$P = \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23}} \beta_{32}^{h_{33}} \gamma_{33}^{h_{33}}.$$

Tomando en cuenta que $\gamma_{33} = \frac{(\beta_{22}\beta_{33} - \beta_{23}\beta_{32})}{\beta_{22}\beta_{32}}$, al sustituirla en la expresión anterior se tiene

$$P = \alpha_{11}^{h_{13}} \alpha_{21}^{h_{23}} \alpha_{31}^{h_{33}} \beta_{22}^{h_{23} - h_{33}} (\beta_{22}\beta_{33} - \beta_{23}\beta_{32})^{h_{33}}. \quad (4.67)$$

A continuación expresamos el polinomio en términos de operadores bosónicos de creación y utilizando los determinantes definidos en el segundo capítulo. Entonces tenemos que

$$\beta_{22} = \frac{\Delta_{12}^{12}}{\Delta_1^1 \Delta_2^1}, \quad (\beta_{22}\beta_{33} - \beta_{23}\beta_{32}) = \frac{\Delta_{123}^{123}}{\Delta_1^1 \Delta_2^1 \Delta_3^1}.$$

Al sustituirlas en el polinomio P , después de reorganizar términos; llegamos a la expresión del polinomio de máximo peso:

$$P = (\Delta_1^1)^{h_{13}-h_{23}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{23}-h_{33}} (\Delta_{123}^{123})^{h_{33}}, \quad (4.68)$$

que por supuesto está de acuerdo con la ecuación (3.69) del capítulo 2.

Para normalizar el estado de máximo peso, representado por el polinomio, se establece la ecuación

$$1 = N^2 \langle 0 | (\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}} (\Delta_{12}^{12\dagger})^{h_{23}-h_{33}} (\Delta_1^{1\dagger})^{h_{12}-h_{23}} (\Delta_1^1)^{h_{13}-h_{23}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{23}-h_{33}} (\Delta_{123}^{123})^{h_{33}} | 0 \rangle. \quad (4.69)$$

El primer paso para calcular este elemento de matriz es determinar la acción de $\Delta_{123}^{123\dagger}$ sobre el polinomio P , al que reescribimos

$$P_{h_{33}} = (\Delta_{123}^{123})^{h_{33}} \mathbf{P}', \quad \text{donde} \quad \mathbf{P}' = (\Delta_{12}^{12})^{h_{23}-h_{33}} (\Delta_1^1)^{h_{13}-h_{23}};$$

le añadimos el subíndice h_{33} para denotar que el polinomio es función de h_{33} . Se desarrolla el determinante por la tercera columna, esto es,

$$\Delta_{123}^{123\dagger} = \Delta_{23}^{12\dagger} \Delta_1^{3\dagger} - \Delta_{13}^{12\dagger} \Delta_2^{3\dagger} + \Delta_{12}^{12\dagger} \Delta_3^{3\dagger}.$$

Notamos que $\Delta_1^{3\dagger}, \Delta_2^{3\dagger}, \Delta_3^{3\dagger}$ conmutan con \mathbf{P}' por lo que es inmediato que

$$\begin{aligned} \Delta_{123}^{123\dagger} \mathbf{P}' | 0 \rangle &= \{ \Delta_{23}^{12\dagger} \Delta_1^{3\dagger} - \Delta_{13}^{12\dagger} \Delta_2^{3\dagger} + \Delta_{12}^{12\dagger} \Delta_3^{3\dagger} \} \mathbf{P}' | 0 \rangle \\ &= \{ \Delta_{23}^{12\dagger} \mathbf{P}' \Delta_1^{3\dagger} - \Delta_{13}^{12\dagger} \mathbf{P}' \Delta_2^{3\dagger} + \Delta_{12}^{12\dagger} \mathbf{P}' \Delta_3^{3\dagger} \} | 0 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (4.70)$$

ya que $a^{\mu s} | 0 \rangle = 0$.

Considerando a $(\Delta_{123}^{123\dagger})$ como un operador diferencial sobre Δ_{123}^{123} y con ayuda de la ecuación (4.70) procedemos a calcular la acción sobre el polinomio $P_{h_{33}}$:

$$\Delta_{123}^{123\dagger} P_{h_{33}} | 0 \rangle = h_{33} (\Delta_{23}^{12\dagger} \Delta_1^{3\dagger} - \Delta_{13}^{12\dagger} \Delta_2^{3\dagger} + \Delta_{12}^{12\dagger} \Delta_3^{3\dagger}) \Delta_{123}^{123} P_{h_{33}-1} | 0 \rangle, \quad (4.71)$$

en donde $P_{h_{13}-1} = (\Delta_{123}^{123})^{h_{33}-1} \mathbf{P}'$. Tomando en cuenta los resultados

$$\Delta_1^{3\dagger} \Delta_{123}^{123} | 0 \rangle = \Delta_{23}^{12} | 0 \rangle, \quad \Delta_2^{3\dagger} \Delta_{123}^{123} | 0 \rangle = -\Delta_{13}^{12} | 0 \rangle, \quad \Delta_3^{3\dagger} \Delta_{123}^{123} | 0 \rangle = \Delta_{12}^{12} | 0 \rangle,$$

la ecuación anterior se transforma en

$$\Delta_{123}^{123\dagger} P_{h_{33}} |0\rangle = h_{33} \{ \Delta_{23}^{12\dagger} \Delta_{23}^{12} + \Delta_{13}^{12\dagger} \Delta_{13}^{12} + \Delta_{12}^{12\dagger} \Delta_{12}^{12} \} P_{h_{33}-1} |0\rangle. \quad (4.72)$$

La expresión entre corchetes es equivalente a

$$\Delta_{123}^{123\dagger} P_{h_{33}} |0\rangle = h_{33} \sum_{\mu\mu'} \Delta_{\mu}^{1\dagger} \Delta_{\mu'}^{2\dagger} (\Delta_{\mu}^1 \Delta_{\mu'}^2 - \Delta_{\mu'}^1 \Delta_{\mu}^2) P_{h_{33}-1} |0\rangle, \quad (4.73)$$

con $\mu = \mu' = 1, 2, 3$. Desarrollando el lado derecho de esta ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_{123}^{123\dagger} P &= h_{33} \{ \Delta_1^{1\dagger} \Delta_2^{2\dagger} (\Delta_1^1 \Delta_2^2 - \Delta_2^1 \Delta_1^2) + \Delta_2^{1\dagger} \Delta_1^{2\dagger} (\Delta_2^1 \Delta_1^2 - \Delta_1^1 \Delta_2^2) \\ &\quad + \Delta_1^{1\dagger} \Delta_3^{2\dagger} (\Delta_1^1 \Delta_3^2 - \Delta_3^1 \Delta_1^2) + \Delta_3^{1\dagger} \Delta_1^{2\dagger} (\Delta_3^1 \Delta_1^2 - \Delta_1^1 \Delta_3^2) \\ &\quad + \Delta_2^{1\dagger} \Delta_3^{2\dagger} (\Delta_2^1 \Delta_3^2 - \Delta_3^1 \Delta_2^2) + \Delta_3^{1\dagger} \Delta_2^{2\dagger} (\Delta_3^1 \Delta_2^2 - \Delta_2^1 \Delta_3^2) \}, \end{aligned}$$

donde se identifica el primer renglón con $\Delta_{12}^{12\dagger} \Delta_{12}^{12}$, el segundo con $\Delta_{13}^{12\dagger} \Delta_{13}^{13}$ y el tercero con $\Delta_{23}^{12\dagger} \Delta_{23}^{12}$ obteniéndose, la ecuación (4.72). A continuación manipularemos el lado derecho de la ecuación (4.73) para expresarla en función de los generadores de peso y ascenso del grupo $\mathcal{U}(2)$. Esto se realizará para cada término:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu\mu'} \Delta_{\mu}^{1\dagger} \Delta_{\mu'}^{2\dagger} \Delta_{\mu}^1 \Delta_{\mu'}^2 &= \sum_{\mu\mu'} \Delta_{\mu}^{1\dagger} \Delta_{\mu}^1 \Delta_{\mu'}^{2\dagger} \Delta_{\mu'}^2 \\ &= \sum_{\mu} (\Delta_{\mu}^1 \Delta_{\mu}^{1\dagger} + 1) \sum_{\mu'} (\Delta_{\mu'}^2 \Delta_{\mu'}^{2\dagger} + 1) = (C_1^1 + 3)(C_2^2 + 3), \\ \sum_{\mu\mu'} \Delta_{\mu}^{1\dagger} \Delta_{\mu'}^{2\dagger} \Delta_{\mu'}^1 \Delta_{\mu}^2 &= \sum_{\mu\mu'} \Delta_{\mu}^{1\dagger} \Delta_{\mu'}^{2\dagger} \Delta_{\mu}^2 \Delta_{\mu'}^1 = \sum_{\mu\mu'} \Delta_{\mu}^{1\dagger} (\Delta_{\mu}^2 \Delta_{\mu'}^{2\dagger} + \delta_{\mu\mu'}) \Delta_{\mu'}^1 \\ &= \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^2 \Delta_{\mu}^{1\dagger} \sum_{\mu'} \Delta_{\mu'}^1 \Delta_{\mu'}^{2\dagger} + \sum_{\mu} (\Delta_{\mu}^1 \Delta_{\mu}^{1\dagger} + 1) \\ &= C_2^1 C_1^2 + (C_1^1 + 3). \end{aligned}$$

Multiplicando por h_{33} en ambos lados de cada una de las expresiones anteriores y restando la segunda a la primera se consigue el resultado deseado:

$$\Delta_{123}^{123\dagger} P_{h_{33}} |0\rangle = h_{33} \{ (C_1^1 + 3)(C_2^2 + 2) - C_2^1 C_1^2 \} P_{h_{33}-1} |0\rangle. \quad (4.74)$$

El polinomio $P_{h_{33}-1}$ tiene como peso a $[h_{13} - 1, h_{23} - 1, h_{33} - 1]$, es decir, que el estado de Gelfand-Tsetlin asociado es de la forma

$$P_{h_{33}-1} |0\rangle = \left| \begin{array}{ccc} h_{13} - 1 & h_{23} - 1 & h_{33} - 1 \\ & h_{13} - 1 & h_{23} - 1 \\ & & h_{13} - 1 \end{array} \right\rangle.$$

Ya que es un estado de máximo peso en $U(2)$, la acción del generador de ascenso C_1^2 vale cero. Entonces, la ecuación (4.74) toma la forma

$$\Delta_{123}^{123\dagger} P_{h_{33}}|0\rangle = h_{33}(h_{13} + 2)(h_{23} + 1)P_{h_{33}-1}|0\rangle.$$

Resumiendo, al considerar la acción del operador $(\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}}$ sobre el polinomio de máximo peso, tenemos

$$\begin{aligned} (\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}} P_{h_{33}}|0\rangle &= (\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}-1} \Delta_{123}^{123\dagger} P_{h_{33}}|0\rangle \\ &= h_{33}(h_{13} + 2)(h_{23} + 1)(\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}-1} P_{h_{33}-1}|0\rangle. \end{aligned}$$

En la última línea hemos considerado el resultado anterior, por lo que al repetir el procedimiento tomando en cuenta a (4.74) y además considerando que el estado $P_{h_{33}-1}|0\rangle$ es de máximo peso en $U(2)$, la ecuación anterior toma la forma

$$(\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}} P_{h_{33}}|0\rangle = h_{33}(h_{33} - 1)(h_{13} + 2)(h_{13} + 1)(h_{23} + 1)h_{23}(\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}-2} P_{h_{33}-2}|0\rangle.$$

Este proceso se continua en forma iterativa, en la que cada polinomio $P_{h_{33}-n}$, donde $n = 1, 2, 3 \dots h_{33}$ tiene como peso a $[h_{13} - n, h_{23} - n, h_{33} - n]$, además de ser de máximo peso en el grupo $U(2)$. De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} (\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}} P_{h_{33}}|0\rangle &= h_{33}(h_{13} + 2)(h_{23} + 1)(\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}-2} \Delta_{123}^{123\dagger} P_{h_{33}-1}|0\rangle \\ &= h_{33}(h_{13} + 2)(h_{23} + 1)(\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}-2} (C_1^1 + 3)(C_2^2 + 2)P_{h_{33}-2}|0\rangle \\ &= h_{33}(h_{33} - 1)(h_{13} + 2)(h_{13} + 1)(h_{23} + 1)h_{23}(\Delta_{123}^{123\dagger})^{h_{33}-2} P_{h_{33}-2}|0\rangle \\ &\vdots \\ &= \frac{h_{33}!(h_{13} + 2)!(h_{23} + 1)!}{(h_{13} - h_{33} + 2)!(h_{23} - h_{33} + 1)!} P'|0\rangle. \end{aligned}$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (4.69), notamos que la normalización se reduce a la de un polinomio en $U(2)$, es decir,

$$1 = N^2 \frac{h_{33}!(h_{13} + 2)!(h_{23} + 1)!}{(h_{13} - h_{33} + 2)!(h_{23} - h_{33} + 1)!} \langle 0|P'^{\dagger}P'|0\rangle,$$

con $P' = (\Delta_{12}^{12})^{h_{23}-h_{33}} (\Delta_1^1)^{h_{13}-h_{23}}$. Para terminar el cálculo, el método a seguir es similar al utilizado en la sección anterior por lo que sólo se escribirá el resultado final:

$$1 = N^2 \frac{h_{33}!(h_{13} + 2)!(h_{23} + 1)!(h_{23} - h_{33})!(h_{13} - h_{33} + 1)!}{(h_{13} - h_{33} + 2)!(h_{23} - h_{33} + 1)!(h_{13} - h_{23} + 1)!}.$$

Esto implica que

$$P|0\rangle = \sqrt{\frac{(h_{13} - h_{33} + 2)(h_{23} - h_{33} + 1)(h_{13} - h_{23} + 1)}{h_{33}!(h_{13} + 2)!(h_{23} + 1)!}} (\Delta_{123}^{123})^{h_{33}} (\Delta_{12}^{12})^{h_{23} - h_{33}} (\Delta_1^1)^{h_{13} - h_{23}} |0\rangle. \quad (4.75)$$

En lo que resta de la discusión vamos a construir los operadores de descenso para actuar sobre este polinomio y así obtener la base completa correspondiente a la representación irreducible caracterizada por la cadena de grupos $\mathbf{U}(9) \supset \mathcal{U}(3) \times U(3)$.

4.2.1. Operadores de descenso de $\mathcal{U}(3)$

La importancia de los operadores de descenso radica en el hecho de que a partir del estado de máximo peso, permiten obtener el estado arbitrario general asociado a la RI de la cadena de grupos $\mathcal{U}(3) \supset \mathcal{U}(2) \supset \mathcal{U}(1)$ que para este caso es $[h_{13}, h_{23}, h_{33}]$.

De acuerdo a la definición (3.102) dada en el capítulo 2 podemos ver que para el grupo $\mathcal{U}(3)$ se cuenta con los siguientes operadores de descenso L_3^1, L_3^2 y L_2^1 . Los dos primeros mantienen la representación de máximo peso en $\mathcal{U}(2)$ por lo que debe satisfacerse

$$\mathcal{C}_1^2 L_3^1 P|0\rangle = \mathcal{C}_1^2 L_3^2 P|0\rangle = 0.$$

Aquí $P|0\rangle$ denota el estado normalizado de peso máximo peso en $\mathcal{U}(3)$, mientras que L_2^1 es el operador de descenso de $\mathcal{U}(2)$.

L_3^2

De las relaciones de conmutación de \mathcal{C}_1^2 con los generadores de descenso del grupo $\mathcal{U}(3)$, podemos proponer a \mathcal{C}_3^2 como uno de los operadores de descenso, esto es,

$$L_3^2 = \mathcal{C}_3^2. \quad (4.76)$$

Para ver el efecto que produce este operador, vamos a calcular el peso del estado producido por la acción de L_3^2 sobre el estado de máximo peso, es decir, $\mathcal{C}_\mu^\mu L_3^2 P|0\rangle$ con $\mu = 1, 2, 3$.

Usando las relaciones de conmutación de los generadores de $\mathcal{U}(3)$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu^\mu L_3^2 P|0\rangle &= \{L_3^2 \mathcal{C}_\mu^\mu + [\mathcal{C}_\mu^\mu, L_3^2]\} P|0\rangle = h_{\mu 3} L_3^2 P|0\rangle + (\mathcal{C}_\mu^2 \delta_3^\mu - \mathcal{C}_3^\mu \delta_\mu^2) P|0\rangle \\ &= (h_{\mu 3} + \delta_3^\mu - \delta_\mu^2) \mathcal{C}_3^2 P|0\rangle, \end{aligned}$$

expresión que toma los pesos $w = h_{\mu 3} + \delta_3^\mu - \delta_\mu^2$.

De la ecuación anterior fácilmente podemos ver que el peso del estado representado por $L_3^2 P|0\rangle$ es $(h_{13}, h_{23} - 1, h_{33} + 1)$, y como sabemos que \mathcal{C}_1^2 conmuta con L_3^2 podemos decir que es de máximo peso en $\mathcal{U}(2)$ portando la representación $[h_{13}, h_{23} - 1]$ de $\mathcal{U}(2)$, hecho que se demuestra actuando con \mathcal{C}_1^1 y \mathcal{C}_2^2 .

De forma más general, si se calcula el peso del estado producido por la acción de $(L_3^2)^m$ sobre el estado de máximo peso, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu^\mu (L_3^2)^m P|0\rangle &= \{(L_3^2)^m \mathcal{C}_\mu^\mu + [\mathcal{C}_\mu^\mu, (L_3^2)^m]\}|0\rangle \\ &= h_{\mu 3} (L_3^2)^m P|0\rangle + [\mathcal{C}_\mu^\mu, (L_3^2)^m] P|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.77)$$

A continuación vamos a calcular el conmutador de \mathcal{C}_μ^μ con $(L_3^2)^m$, esto es,

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_\mu^\mu, (L_3^2)^m] &= \sum_{r=0}^{m-1} (L_3^2)^{m-r-1} [\mathcal{C}_\mu^\mu, L_3^2] (L_3^2)^r = \sum_{r=0}^{m-1} (L_3^2)^{m-r-1} (\delta_3^\mu - \delta_\mu^2) (L_3^2)^{r+1} \\ &= m (L_3^2)^m (\delta_3^\mu - \delta_\mu^2), \end{aligned} \quad (4.78)$$

para $\mu = 1, 2, 3$. Este conmutador indica el número de partículas etiquetadas con el primer subíndice μ que son creadas o aniquiladas por el operador $(L_3^2)^m$, según sea el caso, sin que por esto no se siga conservando el número total de partículas.

Tomando en cuenta (4.78), la ecuación (4.77) se reescribe

$$\mathcal{C}_\mu^\mu (L_3^2)^m P|0\rangle = [h_{\mu 3} + m(\delta_3^\mu - \delta_\mu^2)] (L_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.79)$$

Es inmediato que el peso del estado $(L_3^2)^m P|0\rangle$ en $\mathcal{U}(3)$ está dado por $(h_{13}, h_{23} - m, h_{33} + m)$, además de ser de peso máximo en $\mathcal{U}(2)$ y que tiene la representación $[h_{13}, h_{23} - m]$. En suma, podemos decir que el operador (4.76) está bien definido.

Normalización

Como queremos obtener estados ortonormales, lo que haremos a continuación es normalizar a L_3^2 ; es decir, que para cualquier potencia de este operador se satisfaga

$$(\mathbb{L}_3^2)^m = \frac{1}{N_m} (L_3^2)^m, \quad (4.80)$$

donde N_m es la constante de normalización por determinar. El procedimiento a seguir es el siguiente: primero consideremos la acción de $(\mathbb{L}_3^2)^m$ sobre el estado de peso máximo, $(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle$, y se hace el producto escalar con el adjunto de la ecuación anterior obteniéndose

$$N_m^2 = \langle 0|P^\dagger (\mathbb{L}_3^2)^\dagger (L_3^2)^m P|0\rangle = \langle 0|P^\dagger (L_3^2)^\dagger (L_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.81)$$

Por el momento sólo vamos a trabajar con la acción de $L_3^{2\dagger}$ sobre $(L_3^2)^m P|0\rangle$. (La ventaja de hacerlo de esta manera se verá más adelante):

$$L_3^{2\dagger}(L_3^2)^m P|0\rangle = \{(L_3^2)^m L_3^{2\dagger} + [L_3^{2\dagger}, (L_3^2)^m]\}P|0\rangle, \quad (4.82)$$

donde es directo ver que el primer término de la ecuación es cero, porque $L_3^{2\dagger} = C_2^3$ es un generador de ascenso. Para ver la forma que tiene el segundo sumando, desarrollamos el conmutador

$$\begin{aligned} [L_3^{2\dagger}, (L_3^2)^m] &= \sum_{r=0}^{m-1} (L_3^2)^{m-r-1} [L_3^{2\dagger}, L_3^2] (L_3^2)^r = \sum_{r=0}^{m-1} (L_3^2)^{m-r-1} (C_2^2 - C_3^3) (L_3^2)^r \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} (L_3^2)^{m-r-1} \{(L_3^2)^r (C_2^2 - C_3^3) + [C_2^2 - C_3^3, (L_3^2)^r]\}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Usando la ecuación (4.78), reorganizando términos se halla

$$[L_3^{2\dagger}, (L_3^2)^m] = m(L_3^2)^{m-1} (C_2^2 - C_3^3 - m + 1). \quad (4.84)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.82) se tiene

$$L_3^{2\dagger}(L_3^2)^m P|0\rangle = m(h_{23} - h_{33} - m + 1)(L_3^2)^{m-1} P|0\rangle,$$

y por lo tanto la expresión (4.81) se escribe

$$N_m^2 = m(h_{23} - h_{33} - m + 1) \langle 0|P^\dagger (L_3^2)^{m-1} (L_3^2)^{m-1} P|0\rangle.$$

El producto escalar de la derecha lo podemos identificar con N_{m-1}^2 , obteniéndose la relación de recurrencia

$$N_m^2 = m(h_{23} - h_{33} - m + 1)N_{m-1}^2.$$

Procediendo en forma iterativa se llega a que

$$\begin{aligned} N_m^2 &= m(h_{23} - h_{33} - m + 1)N_{m-1}^2 \\ &= m(m-1)(h_{23} - h_{33} - m + 2)(h_{23} - h_{33} - m + 1)N_{m-2}^2 \\ &\vdots \\ &= m!(h_{23} - h_{33})(h_{23} - h_{33} - 1) \cdots (h_{23} - h_{33} - m + 1)N_0^2 \\ &= \frac{m!(h_{23} - h_{33})!}{(h_{23} - h_{33} - m)!}, \end{aligned}$$

donde usamos que $N_0^2 = 1$. Para finalizar vamos a reescribir el operador de descenso normalizado a la potencia m , esto es,

$$(\mathbb{L}_3^2)^m = \sqrt{\frac{(h_{23} - h_{33} - m)!}{m!(h_{23} - h_{33})!}} (L_3^2)^m. \quad (4.85)$$

L_3^1

Nos gustaría utilizar el mismo razonamiento con el operador L_3^1 . El problema que tenemos para hacerlo es que \mathcal{C}_1^2 no conmuta con \mathcal{C}_3^1 . Sin embargo es importante notar que el producto de generadores $\mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_3^2$ se comporta como \mathcal{C}_3^1 , esto es, satisface relaciones de conmutación análogas con los generadores de peso:

$$[\mathcal{C}_1^1, \mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_3^2] = -\mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_3^2, \quad [\mathcal{C}_2^2, \mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_3^2] = 0, \quad [\mathcal{C}_3^3, \mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_3^2] = \mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_3^2.$$

Este resultado que permite proponer que el operador L_3^1 sea una combinación lineal de \mathcal{C}_3^1 y $\mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_3^2$, es decir,

$$L_3^1 = \alpha \mathcal{C}_3^1 + \beta \mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_3^2. \quad (4.86)$$

Para que sea un operador de descenso, la combinación anterior debe satisfacer la condición

$$\mathcal{C}_1^2 \{\alpha \mathcal{C}_3^1 + \beta \mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_3^2\} P|0\rangle = 0. \quad (4.87)$$

Desarrollando el lado izquierdo se tiene

$$\{\alpha(\mathcal{C}_3^1 \mathcal{C}_1^2 + [\mathcal{C}_1^2, \mathcal{C}_3^1]) + \beta(\mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_1^2 + [\mathcal{C}_1^2, \mathcal{C}_2^1]) \mathcal{C}_3^2\} P|0\rangle = 0.$$

Sustituyendo el valor de los conmutadores, además de considerar que $P|0\rangle$ y $\mathcal{C}_3^2 P|0\rangle$ son estados de máximo peso en $\mathcal{U}(2)$, la expresión anterior se reduce a

$$\{-\alpha + \beta(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2)\} \mathcal{C}_3^2 P|0\rangle = 0.$$

Actuando con los generadores $\mathcal{C}_1^1, \mathcal{C}_2^2$ sobre $\mathcal{C}_3^2 P|0\rangle$ y sustituyendo se obtiene la ecuación

$$-\alpha + \beta(h_{13} - h_{23} + 1) = 0.$$

Despejando α y substituyendo en (4.86) (tomando $\beta = 1$), podemos escribir al operador de descenso L_3^1 de la forma

$$L_3^1 = \mathcal{C}_3^1 (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 + 1) + \mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_3^2. \quad (4.88)$$

Normalización

Ahora vamos a determinar la normalización, el procedimiento es similar al anterior, sólo que ahora debemos de tener en cuenta que vamos a actuar sobre el estado $(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle$. Primero definimos la relación que va a existir entre el nuevo operador con el anterior, esto es,

$$(\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle \equiv \frac{1}{N_{n,m}} (L_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle, \quad (4.89)$$

donde $N_{n,m}$ es la constante de normalización por determinar. Después hacemos el producto escalar de la ecuación anterior con su adjunto, teniendo en cuenta que por definición es un estado con norma unitaria, por lo que

$$\begin{aligned} N_{n,m}^2 &= \langle 0|P^\dagger (\mathbb{L}_3^{2\dagger})^m (L_3^{1\dagger})^n (L_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle \\ &= \langle 0|P^\dagger (\mathbb{L}_3^{2\dagger})^m (L_3^{1\dagger})^{n-1} L_3^{1\dagger} (L_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \end{aligned}$$

La expresión anterior puede desarrollarse:

$$N_{n,m}^2 = \langle 0|P^\dagger (\mathbb{L}_3^2)^m (L_3^1)^{n-1} \{ (L_3^1)^n L_3^{1\dagger} + [L_3^{1\dagger}, (L_3^1)^n] \} (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.90)$$

Revisando el primer término de la ecuación anterior tenemos que la acción del operador $L_3^{1\dagger}$ sobre $(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle$ tiene la forma

$$L_3^{1\dagger} (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle = [L_3^{1\dagger}, (\mathbb{L}_3^2)^m] P|0\rangle = [(C_1^1 - C_2^2 + 1)C_1^3 + C_2^3 C_1^2, (\mathbb{L}_3^2)^m] P|0\rangle.$$

Usando las propiedades de los conmutadores, la ecuación anterior se desarrolla como

$$\begin{aligned} L_3^{1\dagger} (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle &= (C_1^1 - C_2^2 + 1)[C_1^3, (\mathbb{L}_3^2)^m] P|0\rangle + [(C_1^1 - C_2^2 + 1), (\mathbb{L}_3^2)^m] C_1^3 P|0\rangle \\ &\quad + C_2^3 [C_1^2, (\mathbb{L}_3^2)^m] P|0\rangle + [C_2^3, (\mathbb{L}_3^2)^m] C_1^2 P|0\rangle. \end{aligned}$$

Puede verse que el segundo y cuarto términos son cero debido a que se está actuando con un generador de ascenso sobre el polinomio de máximo peso. Adicionalmente tenemos que C_1^2 conmuta con \mathbb{L}_3^2 , lo que implica que el tercer término también se anule. Con esto la expresión anterior se reduce a

$$L_3^{1\dagger} (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle = (C_1^1 - C_2^2 + 1)[C_1^3, (\mathbb{L}_3^2)^m] P|0\rangle. \quad (4.91)$$

Relaciones de conmutación relevantes a esta sección son dadas en el Apéndice G. En particular, de acuerdo con (G.23b), el conmutador de C_1^3 con $(\mathbb{L}_3^2)^m$ es proporcional a C_1^2 , que al actuar sobre el estado de máximo peso da cero. Entonces la ecuación (4.90) toma la forma

$$N_{n,m}^2 = \langle 0|P^\dagger (\mathbb{L}_3^2)^m (L_3^{1\dagger})^{n-1} [L_3^{1\dagger}, (L_3^1)^n] (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.92)$$

Para evaluar el conmutador es conveniente utilizar conmutaciones múltiples de la forma $[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1]$ y así sucesivamente. Para encontrar la acción del conmutador sobre el estado $(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle$, usamos la expresión (G.53):

$$\begin{aligned} [L_3^{1\dagger}, (L_3^1)^n], (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle &= n(L_3^1)^{n-1}(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 2)[\mathcal{C}_1^3, L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle \\ &+ \frac{n(n-1)}{2}(L_3^1)^{n-2}(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 3)[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6}(L_3^1)^{n-3}(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 4)[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle \\ &+ n(L_3^1)^{n-2}Q\mathcal{C}_1^2(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle - n(L_3^1)^n\mathcal{C}_1^3(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Es importante señalar que los dos últimos términos son cero ya que el conmutador $[\mathcal{C}_1^3, (\mathbb{L}_3^2)^m]$ es proporcional a \mathcal{C}_1^2 , además de que \mathcal{C}_1^2 conmuta con el operador \mathbb{L}_3^2 .

A continuación se va a tratar cada término por separado. Lo primero que vamos a hacer es tomar la acción de $[\mathcal{C}_1^3, L_3^1]$ sobre $(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle$, esto es,

$$[\mathcal{C}_1^3, L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle = (\mathbb{L}_3^2)^m[\mathcal{C}_1^3, L_3^1]P|0\rangle + [[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], (\mathbb{L}_3^2)^m]P|0\rangle.$$

De acuerdo con (G.56) el segundo término se hace cero, mientras que si se usa el tercer conmutador de la ecuación (G.2), se convierte en

$$[\mathcal{C}_1^3, L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle = (h_{13} - h_{23})(h_{13} - h_{33} + 1)(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle.$$

Dado que

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 2)(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle &= (\mathbb{L}_3^2)^m(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + m + 2)P|0\rangle \\ &= (h_{13} - h_{23} - n + m + 2)(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle, \end{aligned}$$

el primer término de (4.93) dividido por $(L_3^1)^{n-1}$ se escribe

$$\begin{aligned} n(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 2)[\mathcal{C}_1^3, L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle &= n(h_{13} - h_{23})(h_{13} - h_{33} + 1) \\ &\times (h_{13} - h_{23} - n + m + 2)(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Para simplificar el segundo término de (4.93), primero se tomará la acción del conmutador doble de \mathcal{C}_1^3 con L_3^1 sobre el estado $(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle$, esto es,

$$[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle = (\mathbb{L}_3^2)^m[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1]P|0\rangle + [[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], (\mathbb{L}_3^2)^m]P|0\rangle.$$

El último término es cero ya que el conmutador es proporcional a \mathcal{C}_1^2 (ver (G.57)), y mediante (G.11), la expresión anterior toma la forma

$$[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle = -2(2h_{13} - h_{23} - h_{33})L_3^1(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle.$$

Al actuar con $(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 3)$ sobre $L_3^1(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle$ obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 3)L_3^1(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle &= L_3^1(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 2)(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle \\ &= L_3^1(\mathbb{L}_3^2)^m(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + m + 2)P|0\rangle \\ &= (h_{13} - h_{23} - n + m + 2)L_3^1(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 3)[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle &= -2(2h_{13} - h_{23} - h_{33}) \\ &\quad \times (h_{13} - h_{23} - n + m + 2)L_3^1(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Dado que el tercer conmutador múltiple de \mathcal{C}_1^3 con L_3^1 es igual a $6(L_3^1)^2$ se tiene que

$$[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle = 6(L_3^1)^2(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle.$$

Actuando con $(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 4)$ sobre ambos lados de la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 4)[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle &= 6(h_{13} - h_{23} - n + m + 2) \\ &\quad \times (L_3^1)^2(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Finalmente, se juntan los resultados (4.94), (4.95) y (4.96), y reorganizando los términos se encuentra

$$\begin{aligned} [L_3^{1\dagger}, (L_3^1)^n](\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle &= n(h_{13} - h_{23} - n + m + 2)(h_{13} - h_{23} - n + 1) \\ &\quad \times (h_{13} - h_{33} - n + 2)(L_3^1)^{n-1}(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle, \end{aligned}$$

que si se sustituye en (4.92) resulta en la expresión

$$\begin{aligned} N_{n,m}^2 &= n(h_{13} - h_{23} - n + m + 2)(h_{13} - h_{23} - n + 1)(h_{13} - h_{33} - n + 2) \\ &\quad \times \langle 0|P^\dagger(\mathbb{L}_3^{2\dagger})^m(L_3^{1\dagger})^{n-1}(L_3^1)^{n-1}(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \end{aligned}$$

Al identificar a $\langle 0|P^\dagger(\mathbb{L}_3^{2\dagger})^m(L_3^{1\dagger})^{n-1}(L_3^1)^{n-1}(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle$ con $N_{n-1,m}^2$ se obtiene la relación de recurrencia

$$N_{n,m}^2 = n(h_{13} - h_{23} - n + m + 2)(h_{13} - h_{23} - n + 1)(h_{13} - h_{23} - n + 2)N_{n-1,m}^2. \quad (4.97)$$

Para resolver la relación de recurrencia de $N_{n,m}^2$ consideramos los casos $(n-1, m)$ y $(n-2, m)$, es decir,

$$\begin{aligned} N_{n-1,m}^2 &= (n-1)(h_{13} - h_{23} - n + m + 3)(h_{13} - h_{23} - n + 2) \\ &\quad \times (h_{13} - h_{33} - n + 3) N_{n-2,m}^2, \end{aligned} \quad (4.98a)$$

$$\begin{aligned} N_{n-2,m}^2 &= (n-2)(h_{13} - h_{23} - n + m + 4)(h_{13} - h_{23} - n + 3) \\ &\quad \times (h_{13} - h_{33} - n + 4) N_{n-3,m}^2. \end{aligned} \quad (4.98b)$$

Al sustituir (4.98a) en (4.97) obtenemos

$$\begin{aligned} N_{n,m}^2 = & n(n-1)(h_{13} - h_{23} - n + m + 3)(h_{13} - h_{23} - n + m + 2) \\ & \times (h_{13} - h_{23} - n + 2)(h_{13} - h_{23} - n + 1) \\ & \times (h_{13} - h_{33} - n + 3)(h_{13} - h_{33} - n + 2) N_{n-2,m}^2. \end{aligned}$$

Ahora remplazamos (4.98b) en la ecuación anterior con lo que se tiene

$$\begin{aligned} N_{n,m}^2 = & n(n-1)(n-2)(h_{13} - h_{23} - n + m + 4)(h_{13} - h_{23} - n + m + 3) \\ & \times (h_{13} - h_{23} - n + m + 2)(h_{13} - h_{23} - n + 3)(h_{13} - h_{23} - n + 2) \\ & \times (h_{13} - h_{23} - n + 1)(h_{13} - h_{33} - n + 4)(h_{13} - h_{33} - n + 3) \\ & \times (h_{13} - h_{33} - n + 2) N_{n-3,m}^2. \end{aligned}$$

Repitiendo este proceso en forma iterativa hasta llegar a $N_{0,m}^2$, se obtiene

$$N_{n,m}^2 = \frac{n!(h_{13} - h_{23} + m + 1)!(h_{13} - h_{23})!(h_{13} - h_{33} + 1)!}{(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)!(h_{13} - h_{23} - n)!(h_{13} - h_{33} - n + 1)!} N_{0,m}^2, \quad (4.99)$$

donde $N_{0,m}^2$ es la norma del estado $(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle$, que por construcción es igual a uno.

Reemplazando este resultado en la ecuación (4.89) encontramos que

$$\begin{aligned} (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle = & \sqrt{\frac{(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)!(h_{13} - h_{23} - n)!(h_{13} - h_{33} - n + 1)!}{n!(h_{13} - h_{23} + m + 1)!(h_{13} - h_{23})!(h_{13} - h_{33} + 1)!}} \\ & \times (L_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle, \end{aligned} \quad (4.100)$$

que junto con (4.85) permiten escribir el estado más general en $U(3)$, que es de máximo peso en el subgrupo $U(2)$. Esto lo hacemos tomando la acción de

$$\begin{aligned} (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m = & \left[\frac{(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)!(h_{13} - h_{23} - n)!(h_{13} - h_{33} - n + 1)!}{n!(h_{13} - h_{23} + m + 1)!(h_{13} - h_{23})!(h_{13} - h_{33} + 1)!} \right. \\ & \left. \frac{(h_{23} - h_{33} - m)!}{m!(h_{23} - h_{33})!} \right]^{\frac{1}{2}} \times (L_3^1)^n (L_3^2)^m, \end{aligned} \quad (4.101)$$

sobre el estado de máximo peso. Aunque los dos operadores de descenso conmutan por comodidad es preferible seguir el orden que aparece en la ecuación anterior.

\mathbb{L}_2^1

Para obtener la base completa debemos de actuar con el operador $(\mathbb{L}_2^1)^q$, que se define

$$(\mathbb{L}_2^1)^q \equiv \frac{1}{N_q} (L_2^1)^q, \quad (4.102)$$

donde $L_2^1 = \mathcal{C}_2^1$ es el operador de descenso del grupo $\mathcal{U}(2)$ y N_q es la constante de normalización.

Para hallar el valor de dicha constante se hará lo siguiente: primero tomamos la acción del operador sobre el estado $P'|0\rangle$, es decir,

$$(\mathbb{L}_2^1)^q P'|0\rangle = \frac{1}{N_q} (L_2^1)^q P'|0\rangle. \quad (4.103)$$

Al tomar el producto vectorial de este estado con su adjunto y considerando que es de norma unitaria se tiene que

$$N_q^2 = \langle P'^\dagger (L_2^{1\dagger})^q (L_2^1)^q P'|0\rangle = \langle 0|P'^\dagger (L_2^{1\dagger})^{q-1} L_2^{1\dagger} (L_2^1)^q P'|0\rangle, \quad (4.104)$$

el cual puede desarrollarse de la forma

$$N_q = \langle 0|P'^\dagger (L_2^{1\dagger})^{q-1} \{ (L_2^1)^q L_2^{1\dagger} + [L_2^{1\dagger}, (L_2^1)^q] \} P'|0\rangle. \quad (4.105)$$

Como $L_2^{1\dagger} = \mathcal{C}_1^2$ es un generador de ascenso y $P'|0\rangle$ es un estado de máximo peso en $\mathcal{U}(2)$ se tiene que $L_2^{1\dagger} P'|0\rangle = 0$; por lo tanto

$$N_q = \langle 0|P'^\dagger (L_2^{1\dagger})^{q-1} [L_2^{1\dagger}, (L_2^1)^q] P'|0\rangle. \quad (4.106)$$

Lo que haremos a continuación es encontrar la acción del conmutador $[L_2^{1\dagger}, (L_2^1)^q]$ sobre el estado $P'|0\rangle$, por lo que sólo trabajaremos por el momento con esa parte, esto es,

$$\begin{aligned} [L_2^{1\dagger}, (L_2^1)^q] P'|0\rangle &= \sum_{r=0}^{q-1} (L_2^1)^{q-r-1} [L_2^{1\dagger}, L_2^1] (L_2^1)^r P'|0\rangle \\ &= \sum_{r=0}^{q-1} (L_2^1)^{q-r-1} (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2) (L_2^1)^r P'|0\rangle \\ &= \sum_{r=0}^{q-1} (L_2^1)^{q-r-1} \{ (L_2^1)^r (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2) + [\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2, (L_2^1)^r] P'|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Procediendo de forma análoga a la ecuación (4.78) tenemos

$$[\mathcal{C}_\mu^\mu, (L_2^1)^r] = r(L_2^1)^r (\delta_2^\mu - \delta_\mu^1). \quad (4.108)$$

Usando este resultado la ecuación (4.107) se convierte en

$$\begin{aligned} [L_2^{1\dagger}, (L_2^1)^q] P'|0\rangle &= (L_2^1)^{q-1} \sum_{r=0}^{q-1} (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - 2r) P'|0\rangle \\ &= q(L_2^1)^{q-1} \{ \mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - q + 1 \} P'|0\rangle, \end{aligned} \quad (4.109)$$

y por medio de las expresiones (4.78), (G.3) y (G.4) se encuentra

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - q + 1)P'|0\rangle &= (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - q + 1)(\mathbb{L}_3^1)^n(\mathbb{L}_3^2)^m P'|0\rangle \\ &= (\mathbb{L}_3^1)^n(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n - q + 1)(\mathbb{L}_3^2)^m P'|0\rangle \\ &= (\mathbb{L}_3^1)^n(\mathbb{L}_3^2)^m(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 + m - n - q + 1)P'|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Actuando con los generadores de peso que aparecen en la ecuación anterior y reorganizando términos se concluye

$$(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - q + 1)P'|0\rangle = (h_{13} - h_{23} + m - n - q + 1)P'|0\rangle. \quad (4.111)$$

Substituyendo este resultado en (4.109), se obtiene

$$[L_2^{1\dagger}, (L_2^1)^q]P'|0\rangle = q(r - q + 1)(L_2^1)^{q-1}P'|0\rangle. \quad (4.112)$$

Aquí hemos tomado $r = h_{13} - h_{23} + m - n$. Finalmente si se sustituye (4.112) en (4.106) se obtiene la ecuación

$$N_q^2 = q(r - q + 1)\langle 0|P'^{\dagger}(L_2^{1\dagger})^{q-1}(L_2^1)^{q-1}P'|0\rangle. \quad (4.113)$$

El producto vectorial que aparece en el lado derecho de esta ecuación lo identificamos como N_{q-1}^2 , por lo que (4.113) da paso a la relación de recurrencia

$$N_q^2 = q(r - q + 1)N_{q-1}^2. \quad (4.114)$$

Usando esta relación con $q - 1$ y substituyendo el resultado en (4.114) se obtiene

$$N_q^2 = q(q - 1)(r - q + 2)(r - q + 1)N_{q-2}^2. \quad (4.115)$$

Repetiendo este proceso en forma iterativa se sigue que

$$\begin{aligned} N_q^2 &= q(r - q + 1)N_{q-1}^2 \\ &= q(q - 1)(r - q + 2)(r - q + 1)N_{q-2}^2 \\ &= q(q - 1)(q - 2)(r - q + 3)(r - q + 2)(r - q + 1)N_{q-3}^2 \\ &\vdots \\ &= q! \frac{r!}{(r - q)!} N_0^2. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Por construcción $P'|0\rangle$ es de norma unitaria, por lo que $N_0^2 = 1$. Teniendo esto en cuenta y substituyendo el valor de r , puede escribirse (4.103) como

$$(\mathbb{L}_2^1)^q P'|0\rangle = \sqrt{\frac{(h_{13} - h_{23} + m - n - q)!}{q!(h_{13} - h_{23} + m - n)!}} (L_2^1)^q P'|0\rangle. \quad (4.117)$$

En conclusión, podemos decir que el estado arbitrario que puede obtenerse dada la RI $[h_{13}, h_{23}, h_{33}]$ se consigue actuando con potencias de los operadores de descenso sobre el estado de máximo peso en dicha representación, es decir,

$$\mathcal{P}|0\rangle = (\mathbb{L}_2^1)^q (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.118)$$

Esto garantiza que los estados obtenidos sean ortonormales. Utilizando (4.101) y (4.116), la ecuación anterior toma la forma

$$\mathcal{P}|0\rangle = M_{q,n,m} (L_2^1)^q (L_3^1)^n (L_3^2)^m P|0\rangle, \quad (4.119)$$

donde

$$M_{q,n,m} = \left[\frac{(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)! (h_{13} - h_{23} - n)! (h_{13} - h_{33} - n + 1)!}{n! (h_{13} - h_{23} + m + 1)! (h_{13} - h_{23})! (h_{13} - h_{33} + 1)!} \frac{(h_{23} - h_{33} - m)! (h_{13} - h_{23} - n - q + m)!}{m! (h_{23} - h_{33})! q! (h_{13} - h_{23} - n + m)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.120)$$

4.2.2. Identificación con estados de Gelfand-Tsetlin

Ahora vamos a calcular el peso del estado 4.119. Comencemos con el generador \mathcal{C}_1^1 :

$$\mathcal{C}_1^1 \mathcal{P}|0\rangle = \mathcal{C}_1^1 (\mathbb{L}_2^1)^q (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle = \{(\mathbb{L}_2^1)^q \mathcal{C}_1^1 + [\mathcal{C}_1^1, (\mathbb{L}_2^1)^q]\} (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.121)$$

Antes de seguir debemos decir que el resultado del conmutador de los generadores de peso con los operadores de descenso normalizados son similares a los que se obtienen con los operadores $L_{\mu'}^{\mu''}$ con $\mu'' < \mu'$. Usando (4.108) la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1^1 \mathcal{P}|0\rangle &= -q \mathcal{P}|0\rangle + (\mathbb{L}_2^1)^q \mathcal{C}_1^1 (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle \\ &= -q \mathcal{P}|0\rangle + (\mathbb{L}_2^1)^q (\mathbb{L}_3^1)^n \mathcal{C}_1^1 (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle + (\mathbb{L}_2^1)^q [\mathcal{C}_1^1, (\mathbb{L}_3^1)^n] (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Usando la expresión (G.3) y considerando que \mathcal{C}_1^1 conmuta con \mathbb{L}_3^2 tenemos

$$\mathcal{C}_1^1 \mathcal{P}|0\rangle = -q \mathcal{P}|0\rangle - n (\mathbb{L}_2^1)^q (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle + (\mathbb{L}_2^1)^q (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m \mathcal{C}_1^1 P|0\rangle, \quad (4.123)$$

que se simplifica dando paso a la ecuación de eigenvalores

$$\mathcal{C}_1^1 \mathcal{P}|0\rangle = (h_{13} - n - q) \mathcal{P}|0\rangle. \quad (4.124)$$

En forma similar se obtienen los eigenvalores de los otros dos generadores; por lo tanto el peso del estado $\mathcal{P}|0\rangle$ es

$$(h_{13} - n - q, h_{23} - m + q, h_{33} + m + n). \quad (4.125)$$

Considerando lo anterior podemos identificar al estado $\mathcal{P}|0\rangle$ con el estado de Gelfand-Tsetlin

$$\left| \begin{array}{ccc} h_{13} & & h_{23} & & h_{33} \\ & h_{13} - n & & h_{23} - m & \\ & & h_{13} - n - q & & \end{array} \right\rangle = \mathcal{P}|0\rangle. \quad (4.126)$$

Elementos de Matriz de los Generadores

Para terminar con la descripción de las bases de la RI de $U(3)$, calcularemos los elementos de matriz de los generadores de este grupo. Al momento de escribir los elementos de matriz hemos decidido no poner el primer renglón; esto se debe a que éste contiene la representación del grupo. De la ecuación (4.125) obtenemos fácilmente los elementos de matriz de los generadores de peso; éstos son

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \middle| \mathcal{C}_1^1 \middle| \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \right\rangle &= h_{13} - n - q, \\ \left\langle \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \middle| \mathcal{C}_2^2 \middle| \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \right\rangle &= h_{23} - m + q, \\ \left\langle \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \middle| \mathcal{C}_3^3 \middle| \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \right\rangle &= h_{33} + m + n. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Ahora calcularemos los elementos de matriz de los generadores de descenso. Comencemos tomando la acción del generador \mathcal{C}_3^1 sobre el estado $\mathcal{P}|0\rangle$, es decir,

$$\mathcal{C}_3^1 \mathcal{P}|0\rangle = \mathcal{C}_3^1 (\mathbb{L}_2^1)^q (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.128)$$

Dado que este generador conmuta con \mathbb{L}_2^1 , lo pasamos un lugar a la derecha, esto es,

$$\mathcal{C}_3^1 \mathcal{P}|0\rangle = M_{q,n,m} (L_2^1)^q \mathcal{C}_3^1 (L_3^1)^n (L_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.129)$$

Lo que se hará a continuación es reescribir al generador \mathcal{C}_3^1 en términos de los operadores de descenso. De la ecuación (4.88) tenemos

$$\mathcal{C}_3^1 (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 + 1) = L_3^1 - L_2^1 L_3^2. \quad (4.130)$$

Al actuar con el lado izquierdo de esta ecuación sobre $(L_3^1)^n(L_3^2)^m P|0\rangle$, y usando (4.79), (G.3) y (G.4) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3^1(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 + 1)(L_3^1)^n(L_3^2)^m P|0\rangle &= \mathcal{C}_3^1(L_3^1)^n(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 1)(L_3^2)^m P|0\rangle \\ &= \mathcal{C}_3^1(L_3^1)^n(L_3^2)^m(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 + m - n + 1)P|0\rangle \\ &= (h_{13} - h_{23} + m - n + 1)\mathcal{C}_3^1(L_3^1)^n(L_3^2)^m P|0\rangle. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\mathcal{C}_3^1(L_3^1)^n(L_3^2)^m P|0\rangle = \frac{(L_3^1 - L_2^1 L_3^2)}{(h_{13} - h_{23} + m - n + 1)}(L_3^1)^n(L_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.131)$$

Con esto en cuenta la ecuación (4.129) toma la forma

$$\mathcal{C}_3^1 \mathcal{P}|0\rangle = \frac{M_{q,n,m}}{(h_{13} - h_{23} + m - n + 1)}(L_2^1)^q(L_3^1 - L_2^1 L_3^2)(L_3^1)^n(L_3^2)^m P|0\rangle.$$

Separando los términos y considerando que L_3^2 conmuta con L_3^1 se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3^1 \mathcal{P}|0\rangle &= \frac{M_{q,n,m}}{(h_{13} - h_{23} + m - n + 1)}(L_2^1)^q(L_3^1)^{n+1}(L_3^2)^m P|0\rangle \\ &\quad - \frac{M_{q,n,m}}{(h_{13} - h_{23} + m - n + 1)}(L_2^1)^{q+1}(L_3^1)^n(L_3^2)^{m+1} P|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Escribiendo la ecuación con las normalizaciones adecuadas tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3^1 \mathcal{P}|0\rangle &= A_1(\mathbb{L}_2^1)^q(\mathbb{L}_3^1)^{n+1}(\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle \\ &\quad + A_2(\mathbb{L}_2^1)^{q+1}(\mathbb{L}_3^1)^n(\mathbb{L}_3^2)^{m+1} P|0\rangle, \end{aligned} \quad (4.133)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{M_{q,n,m}}{M_{q,n+1,m}(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)}, \\ A_2 &= \frac{M_{q,n,m}}{M_{q+1,n,m+1}(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)}. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Utilizando la ecuación (4.120), los podemos reescribir en términos de h_{13} , h_{23} , h_{33} , q , n y m

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\frac{(n+1)(h_{13} - h_{23} - n)(h_{13} - h_{33} - n + 1)(h_{13} - h_{23} - n - q + m)}{(h_{13} - h_{23} - n + m)(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)}}, \\ A_2 &= -\sqrt{\frac{(q+1)(m+1)(h_{23} - h_{33} - m)(h_{13} - h_{23} + m + 2)}{(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)(h_{13} - h_{23} - n + m + 2)}}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

De la ecuación (4.133) junto con (4.126) podemos ver que sólo tenemos dos elementos de matriz posibles. Identificando cada uno de los estados resultantes con el estado de Gelfand-Tsetlin correspondiente, escribimos los elementos de matriz

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{cc|c} h_{13} - n - 1 & h_{23} - m & \mathcal{C}_3^1 \\ h_{13} - n - q - 1 & & \end{array} \right| \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \rangle &= A_1, \\ \left\langle \begin{array}{cc|c} h_{13} - n & h_{23} - m - 1 & \mathcal{C}_3^1 \\ h_{13} - n - q - 1 & & \end{array} \right| \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \rangle &= A_2. \end{aligned} \quad (4.136)$$

De la misma manera se calcula el elemento de matriz del generador \mathcal{C}_3^2 . Tomemos pues la acción de este generador sobre el estado $\mathcal{P}|0\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3^2 \mathcal{P}|0\rangle &= M_{q,n,m} \mathcal{C}_3^2 (L_2^1)^q (L_3^1)^n (L_3^2)^m P|0\rangle \\ &= M_{q,n,m} \{ (L_2^1)^q \mathcal{C}_3^2 + [\mathcal{C}_3^2, (L_2^1)^q] \} (L_3^1)^n (L_3^2)^m P|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Haciendo el conmutador que aparece en el segundo término, se tiene

$$[\mathcal{C}_3^2, (L_2^1)^q] = \sum_{r=0}^{q-1} (L_2^1)^{q-r-1} [\mathcal{C}_3^2, L_2^1] (L_2^1)^r = \sum_{r=0}^{q-1} (L_2^1)^{q-r-1} \mathcal{C}_3^1 (L_2^1)^r = q (L_2^1)^{q-1} \mathcal{C}_3^1. \quad (4.138)$$

Tomando en cuenta que $\mathcal{C}_3^2 = L_3^2$, la expresión (4.137) toma la forma

$$\mathcal{C}_3^2 \mathcal{P}|0\rangle = M_{q,m,n} (L_2^1)^q (L_3^1)^n (L_3^2)^{m+1} P|0\rangle + q (L_2^1)^{q-1} \mathcal{C}_3^1 (L_3^1)^n (L_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.139)$$

Utilizando de nuevo el resultado (4.131) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3^2 \mathcal{P}|0\rangle &= M_{q,n,m} (L_2^1)^q (L_3^1)^n (L_3^2)^{m+1} P|0\rangle \\ &\quad + \frac{q M_{q,n,m}}{(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)} (L_2^1)^{q-1} (L_3^1)^{n+1} (L_3^2)^m P|0\rangle \\ &\quad - \frac{q M_{q,n,m}}{h_{13} - h_{23} - n + m + 1} (L_2^1)^q (L_3^1)^n (L_3^2)^{m+1} P|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.140)$$

Rearreglando términos y expresando a los operadores con sus respectivas normalizaciones resulta

$$\mathcal{C}_3^2 \mathcal{P}|0\rangle = A_3 (\mathbb{L}_2^1)^q (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^{m+1} P|0\rangle + A_4 (\mathbb{L}_2^1)^{q-1} (\mathbb{L}_3^1)^{n+1} (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle, \quad (4.141)$$

donde

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{M_{q,n,m} (h_{13} - h_{23} - n - q + m + 1)}{M_{q,n,m+1} (h_{13} - h_{23} - n + m + 1)}, \\ A_4 &= \frac{q M_{q,n,m}}{M_{q-1,n+1,m} (h_{13} - h_{23} - n + m + 1)}, \end{aligned} \quad (4.142)$$

que con la ayuda de (4.120) pueden ser reescritos de la siguiente manera:

$$A_3 = \sqrt{\frac{(m+1)(h_{23}-h_{33}-m)(h_{13}-h_{23}+m+2)(h_{13}-h_{23}-n+m-q+1)}{(h_{13}-h_{23}-n+m+1)(h_{13}-h_{23}-n+m+2)}},$$

$$A_4 = \sqrt{\frac{q(n+1)(h_{13}-h_{23}-n)(h_{13}-h_{33}-n+1)}{(h_{13}-h_{23}-n+m)(h_{13}-h_{23}-n+m+1)}}. \quad (4.143)$$

Identificando los estados resultantes con los estados correspondientes de Gelfand-Tsetlin, se escriben los elementos de matriz relacionados a este generador:

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} h_{13}-n & h_{23}-m-1 & \mathcal{C}_3^2 \\ & h_{13}-n-q & \end{array} \begin{array}{cc} h_{13}-n & h_{23}-m \\ h_{13}-n-q & \end{array} \right\rangle = A_3,$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} h_{13}-n-1 & h_{23}-m & \mathcal{C}_3^2 \\ & h_{13}-n-q & \end{array} \begin{array}{cc} h_{13}-n & h_{23}-m \\ h_{13}-n-q & \end{array} \right\rangle = A_4. \quad (4.144)$$

Para terminar con los generadores de descenso se calculará el elemento de matriz de \mathcal{C}_2^1 . Como en casos anteriores actuamos primero con el generador sobre el estado $\mathcal{P}|0\rangle$, esto es,

$$\mathcal{C}_2^1 \mathcal{P}|0\rangle = M_{q,n,m} \mathcal{C}_2^1 (L_2^1)^q (L_3^1)^n (L_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.145)$$

Como $\mathcal{C}_2^1 = L_2^1$, lo juntamos con $(L_2^1)^n$ y normalizando se tiene

$$\mathcal{C}_2^1 \mathcal{P}|0\rangle = \frac{M_{q,n,m}}{M_{q+1,n,m}} (\mathbb{L}_2^1)^{q+1} (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m P|0\rangle. \quad (4.146)$$

En este caso

$$\frac{M_{q,n,m}}{M_{q+1,n,m}} = \sqrt{(q+1)(h_{13}-h_{23}-n-q+m)}, \quad (4.147)$$

por lo que el elemento de matriz queda de la siguiente forma:

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} h_{13}-n & h_{23}-m & \mathcal{C}_2^1 \\ & h_{13}-n-q-1 & \end{array} \begin{array}{cc} h_{13}-n & h_{23}-m \\ h_{13}-n-q & \end{array} \right\rangle = \sqrt{(q+1)(h_{13}-h_{23}-n-q+m)}. \quad (4.148)$$

Tomando el adjunto de las ecuaciones (4.136), (4.144) y (4.148), y teniendo cuidado en identificar los nuevos estados, se enlistarán los elementos de matriz para los generadores de ascenso al final del capítulo

Tomando el caso particular en que $n = h_{13} - h_{12}$, $m = h_{23} - h_{22}$ y $q = h_{12} - h_{11}$ el estado (4.119) se reescribe como

$$\mathcal{P}|0\rangle = \left[\frac{(h_{12}-h_{22}+1)!(h_{12}-h_{23})!(h_{12}-h_{33}+1)!(h_{22}-h_{33})!}{(h_{13}-h_{12})!(h_{23}-h_{22})!(h_{12}-h_{11})!(h_{13}-h_{22}+1)!(h_{13}-h_{23})!(h_{13}-h_{33}+1)!} \right. \\ \left. \frac{(h_{11}-h_{22})!}{(h_{23}-h_{33})!(h_{12}-h_{22})!} \right]^{\frac{1}{2}} \times (L_2^1)^{h_{12}-h_{11}} (L_3^1)^{h_{13}-h_{12}} (L_3^2)^{h_{23}-h_{22}} P|0\rangle, \quad (4.149)$$

y tiene por peso a $(h_{11}, h_{12} + h_{22} - h_{11}, h_{13} + h_{23} + h_{33} - h_{12} - h_{22})$, lo cual está de acuerdo con la ecuación (3.88) del segundo capítulo, lo que nos permite hacer la siguiente correspondencia con los estados de Gelfand-Tsetlin

$$\left| \begin{array}{ccc} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ & h_{12} & h_{22} \\ & & h_{11} \end{array} \right\rangle = \mathcal{P}|0\rangle. \quad (4.150)$$

Los elementos de matriz de los generadores de peso y ascenso coinciden con (3.111a) (3.112a) y con los encontrados en la Ref. [2].

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q + 1 & \end{array} \middle| \mathcal{C}_1^2 \right. & \left. \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \right\rangle = \sqrt{(q)(h_{13} - h_{23} - n - q + m + 1)} \\
\left\langle \begin{array}{cc} h_{13} - n + 1 & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q + 1 & \end{array} \middle| \mathcal{C}_1^3 \right. & \left. \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{n(h_{13} - h_{23} - n + 1)(h_{13} - h_{33} - n + 2)(h_{13} - h_{23} - n - q + m + 1)}{(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)(h_{13} - h_{23} - n + m + 2)}} \\
\left\langle \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m + 1 \\ h_{13} - n - q + 1 & \end{array} \middle| \mathcal{C}_1^3 \right. & \left. \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{qm(h_{23} - h_{33} - m + 1)(h_{13} - h_{23} + m + 1)}{(h_{13} - h_{23} - n + m)(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)}} \\
\left\langle \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m + 1 \\ h_{13} - n - q & \end{array} \middle| \mathcal{C}_2^3 \right. & \left. \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{m(h_{23} - h_{33} - m + 1)(h_{13} - h_{23} + m + 1)(h_{13} - h_{23} - n - q + m)}{(h_{13} - h_{23} - n + m)(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)}} \\
\left\langle \begin{array}{cc} h_{13} - n + 1 & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \middle| \mathcal{C}_2^3 \right. & \left. \begin{array}{cc} h_{13} - n & h_{23} - m \\ h_{13} - n - q & \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{n(q + 1)(h_{13} - h_{23} - n + 1)(h_{13} - h_{33} - n + 2)}{(h_{13} - h_{23} - n + m + 1)(h_{13} - h_{23} - n + m + 2)}}
\end{aligned}$$

Tabla 4.4: Elementos de matriz de los generadores de ascenso de los grupos $\mathcal{U}(3)$ y $\mathcal{U}(2)$, [ver [2]].

Capítulo 5

Espectroscopía de átomos complejos

5.1. Espectroscopía

Estudios espectroscópicos de la luz emitida o absorbida por átomos y iones datan de principios del siglo XIX. A partir de dichos estudios, se ha hecho más evidente la asociación entre una longitud de onda particular con un átomo de un elemento dado y que la información espectral debe proveer pistas sobre la estructura interna del átomo.

Para entender un poco más de lo que se está hablando es apropiado revisar alguno de los hechos básicos y terminología de la espectroscopía y estructura atómica.

Líneas espectrales

Información concerniente con la estructura electrónica de un átomo aislado (ión) puede ser deducida de una gran variedad de experimentos; por ejemplo, datos acerca de la dispersión elástica o inelástica de electrones o iones, y datos obtenidos de la energía de los foto-electrones expulsados por el átomo. Por mucho la fuente con información de mayor exactitud viene del estudio espectroscópico de la luz radiada o absorbida por el átomo.

El espectro de luz radiada por el átomo de una fuente de luz apropiada puede ser examinado con la ayuda de un simple espectrógrafo de prisma. Luz proveniente de la fuente se hace incidir sobre una rendija pequeña, la cual está orientada de forma paralela con una de las caras dispersantes del prisma. La luz que pasó a través de la rendija es dispersada en el prisma de acuerdo con la longitud de onda. Para cada longitud de onda presente en la luz se forma en una pantalla una imagen de la rendija; las distintas imágenes correspondientes a diferentes longitudes de onda están dispuestas unas de otras en dirección perpendicular al largo de cada una de

las imágenes.

Si la fuente es tal que (por ejemplo un sólido incandescente) radía luz de todas longitudes de onda, en la pantalla vamos a tener una sucesión continua de imágenes de rendijas que se traslapan formando lo que se conoce como espectro continuo. Sin embargo, si la luz de una fuente es radiada por una colección de algunos átomos aislados, se encuentra que consiste de un número mayor o menor de longitudes de onda aisladas; si se usa una rendija espectrográfica muy estrecha el espectro que aparece en la pantalla es el de un conjunto de líneas paralelas aisladas. Tal espectro es llamado apropiadamente como líneas espectrales.

Evidentemente, las imágenes observadas de un espectro de átomo son características de la forma de la rendija del espectrógrafo. En la mayoría de los casos los espectrógrafos de prisma han sido sustituidos por espectrógrafos de rejillas.

Características de espectros de átomos y iones

Cada átomo o ión emite una línea espectral que es característica de dicho átomo o ión. Esto provee la base para los métodos espectroscópicos del análisis de mezclas de átomos.

El espectro emitido por un átomo neutro de un elemento dado es llamado el primer espectro del elemento y es denotado por el número romano *I*; el espectro emitido por un átomo ionizado es llamado el segundo espectro y está denotado por *II*; etc. Obviamente el número de posibles líneas espectrales de un elemento es igual a su número atómico, de manera que existen los espectros de *H*I, *He*I, *He*II, *Li*I, *Li*II, *Li*III, etc.

Espectros de iones de diferentes elementos que tienen el mismo número de electrones *N* tienden a ser similares en estructura, especialmente para los que están altamente ionizados. Una secuencia de iones con *N* fijo, o la correspondiente secuencia de espectros, es llamada una secuencia iso-electrónica

Unidades de longitudes de onda y número de onda

La longitud de onda de las líneas espectrales comúnmente están dadas en las siguientes unidades $1\text{Å}=10^{-8}cm = 10^{-10}m$. Desde un punto de vista teórico, es más conveniente describir las líneas espectrales, no en términos de su longitud de onda sino en términos de su frecuencia o alguna cantidad proporcional a ésta; por ejemplo, la línea puede ser descrita por la energía de un fotón de longitud de onda λ , es decir,

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda_{vac}}. \quad (5.1)$$

Para longitudes de onda (en el vacío) medidas en Å,

$$E = \frac{12398.5}{\lambda_{vac}} eV = \frac{911.27}{\lambda_{vac}} \text{Ry}, \quad (5.2)$$

donde el Rydberg $Ry \cong 13.6058 eV$. También pueden ser descritos simplemente en términos del número de onda o por el número de onda (en el vacío) por unidad de longitud (usualmente por centímetro) y en segundo lugar con λ en Å. Se tiene así

$$\sigma \equiv \frac{1}{\lambda_{vac}} = \frac{E}{hc}, \quad \sigma = \frac{10^8}{\lambda_{vac}} cm^{-1}. \quad (5.3)$$

La unidad cm^{-1} , frecuentemente es llamada como kayser (K). El kilokayser es conveniente para describir líneas en el extremo ultravioleta, es decir, longitudes de onda cercano a los 100 Å que corresponden con el número de onda $10^6 K$ o 1000 kK. Los milikayser son convenientes para la discusión del corrimiento en isótopos, estructura hiperfina y otros efectos pequeños.

Niveles de Energía

El hecho de que la luz radiada por átomos lo haga para longitudes de onda en forma discreta está asociado con el hecho de que el átomo sólo puede existir en estados estacionarios que tienen cierto tipo de valores discretos para la energía interna E .

Todas las posibles energías del átomo son conocidas como niveles de energía. La energía más baja es llamada nivel base y cada estado cuántico del átomo que tenga esta energía (podría haber más de uno) es conocido como el estado base. Todos los demás niveles son llamados niveles de excitación. Estaremos interesados primeramente en niveles energéticos que correspondan a la excitación de los electrones de la capa más alejada.

La energía de varios de los niveles de un átomo está comúnmente especificada en términos de la energía de excitación por encima del estado base. El electrón volt eV se usa frecuentemente como unidad de energía:

$$1eV = 10^8 e/C = 1.60219 \times 10^{12} \text{ergs}. \quad (5.4)$$

Para propósitos teóricos la unidad más conveniente para la medición de la energía es el Rydberg:

$$1Ry = \frac{me^4}{2\hbar^2} = \frac{e^2}{2a_0} = 2.17991 \times 10^{-11} \text{ergs} = 13.6058 eV, \quad (5.5)$$

donde $a_0 = \hbar/me^2 = 0.529177 \times 10^{-8} cm$ es el radio de la primera órbita de Bohr del átomo de hidrógeno

Diagramas de niveles energéticos

Los posibles niveles energéticos de un átomo son representados por medio de un diagrama en el cual cada nivel es representado por una corta línea horizontal

dispuesta en un punto apropiado a lo largo de una línea vertical que contiene la escala de la energía: cada nivel se suele poner en una de las varias columnas, de acuerdo con ciertas propiedades del estado cuántico que corresponde a ese nivel.

Cada nivel a sido apropiadamente etiquetado con los valores de los números cuánticos n, l . Es suficiente con decir que a cada columna le corresponde un valor específico de l , y que los niveles (que difieren sólo en el número cuántico n) forman una secuencia regular conocida como serie de Rydberg; cuando n tiende a ∞ , cada serie tiende a un valor límite de la energía (límite de la serie). Este límite también es llamado límite de ionización, y representa el estado físico en el cual un electrón ha sido removido a una distancia infinita del ión.

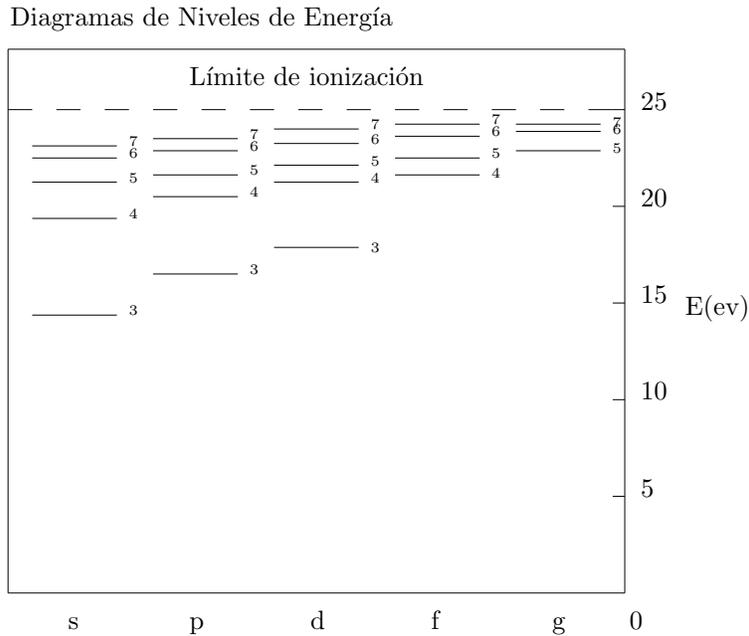


Fig. 5.1: Diagrama de niveles energéticos de algunos niveles conocidos del *CII*. Las etiquetas s, p, d, f y g , representan los valores del momento angular orbital, $l = 0, 1, 2, 3, 4$ respectivamente, y los números a los lados de los niveles denotan al número cuántico principal n , [17].

La diferencia de energía entre el estado base de un átomo o ión y el primer límite de ionización es llamado energía de ionización (es decir, entre el estado base de un ión y el estado base del próximo ión).

Si I_m es la energía de ionización de la m -ésima fase de ionización, $1 \leq m \leq Z$,

entonces la energía total requerida para remover los $Z - m + 1$ electrones es

$$\sum_{j=m}^Z I_j. \quad (5.6)$$

Para propósitos teóricos, el cero de la energía es tomado como el estado en el que el núcleo y los electrones están separados por una distancia infinita; con respecto a este cero, la energía electrónica total de un ión en la m -ésima fase, y en estado base está dada por

$$E = - \sum_{j=m}^Z I_j. \quad (5.7)$$

Principio de combinación de Ritz; Diagramas de Grotian

Si un átomo existe en un estado excitado con energía E_2 , espontáneamente puede decaer en algún otro estado con energía E_1 . La diferencia de energía aparece como un fotón de energía $E_2 - E_1$. Este fotón corresponde a la radiación emitida con frecuencia ν , longitud de onda λ y número de onda σ dado por

$$E_2 - E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hc\sigma. \quad (5.8)$$

O si los niveles de energía están dados en unidades de pseudo-energía E/hc ,

$$\frac{E_2}{hc} - \frac{E_1}{hc} = \frac{1}{\lambda} = \sigma. \quad (5.9)$$

De forma contraria, si el átomo existe en el estado (1) y está en presencia del campo de radiación, que incluye radiación de número de onda σ dado por (5.9), puede ser excitado al estado (2) por la absorción de un fotón con energía $E_2 - E_1$.

El principio de combinación de Ritz afirma que cualesquiera dos niveles energéticos de un átomo pueden combinarse como se indicó en el párrafo anterior para dar paso al surgimiento a una línea espectral. En principio esto es cierto pero en la práctica algunos pares de niveles dan paso a líneas espectrales muy débiles casi despreciables, como resultado de varias reglas de selección.

Frecuentemente, las líneas espectrales más fuertes e importantes se muestran en el diagrama de niveles enérgicos en la forma de líneas verticales u horizontales que conectan dos pares apropiados de niveles de energía, con la correspondiente longitud de onda (en Å) escrita a un lado de la línea. Este diagrama es conocido como diagrama de Grotian:

Líneas que involucran el nivel base son llamadas líneas de resonancia. La línea de resonancia que está relacionada con el nivel energético más bajo es llamada línea de resonancia principal.

5.2. Hamiltoniano y espectro de energías

Con la herramienta desarrollada a lo largo de los capítulos anteriores se quiere describir sistemas atómicos.

Lo que hay que tener en cuenta primero es la forma del hamiltoniano del sistema. Utilizaremos la aproximación de campo central, donde el hamiltoniano se escribe

$$H = \sum_i \left\{ \frac{P_i^2}{2m} + U(r_i) \right\} + \sum_{i < j} V(|r_i - r_j|), \quad (5.10)$$

donde el primer término corresponde con el hamiltoniano de un sistema de partículas independientes al que denotaremos con H_{PI} , y el segundo término representa la interacción coulombiana entre los electrones.

Como se quiere hacer uso de las técnicas de teoría de grupos para la descripción del sistema es preciso expresar a este hamiltoniano en el formalismo de segunda cuantización. En esta parte de la discusión se considera que los electrones se encuentran en la misma capa, es decir, que el valor del número cuántico principal n es el mismo para todos. De acuerdo con la ecuación (2.8), el término H_{PI} puede ser reescrito

$$\mathcal{H}_{PI} = \sum_{\substack{l'm' \\ lm}} \sum_{m_s m'_s} \langle nl'm'; \frac{1}{2}m'_s | h | nlm; \frac{1}{2}m_s \rangle b_{nl'm'm'_s}^\dagger b^{nlmm_s}, \quad (5.11)$$

donde h es el hamiltoniano de un átomo hidrogenoide, y respecto a esta base $E_n = -\frac{Ze^2}{2a_0 n^2}$, no depende de l, m, m_s , por lo que la ecuación anterior se reduce a

$$\mathcal{H}_{PI} = E_n \sum_{lmm_s} b_{nlmm_s}^\dagger b^{nlmm_s} = E_n \sum_{lmm_s} C_{lmm_s}^{lmm_s}. \quad (5.12)$$

Utilizando las propiedades de simetría de los coeficientes Clebsch-Gordan, y la métrica que permite subir y bajar índices, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle lm; l-m | 00 \rangle &= (-)^{l-m} \frac{1}{\sqrt{(2l+1)}}, \\ \langle \frac{1}{2}m_s; \frac{1}{2}-m_s | 00 \rangle &= (-)^{\frac{1}{2}-m_s}, \\ b^{nlmm_s} &= (-)^m (-)^{\frac{1}{2}-m_s} b_{nl-m-m_s}. \end{aligned}$$

Entonces podemos escribir la parte de partícula independiente del hamiltoniano en forma acoplada:

$$\mathcal{H}_{PI} = E_n \sum_l (-)^l \sqrt{2(2l+1)} [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{00}^{00} = E_n \hat{N}. \quad (5.13)$$

El hecho de que esté acoplado a cero nos dice que esta cantidad es un escalar, tanto en el grado de libertad espacial como en el de espín.

Introduciendo la expresión (2.63) que describe a un operador de dos cuerpos en segunda cuantización, es decir que representa la interacción entre las partículas $V(|r_1 - r_2|)$, se está en condición de escribir el hamiltoniano del sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = E_n \hat{N} + \sum_{\substack{l'_1 l'_2 \\ l m l_1 l_2}} (-)^{l_1+l_2+m} \frac{1}{2l+1} \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)} F^l(nl'_1 nl'_2 nl_1 nl_2) \langle l_1 0; l_0 | l'_1 0 \rangle \\ \times \langle l_2 0; l_0 | l'_2 0 \rangle \left\{ [b_{nl'_1}^\dagger \otimes b_{nl_1}]_{m_0}^{l_0} [b_{nl'_2}^\dagger \otimes b_{nl_2}]_{-m_0}^{l_0} - (-)^{l_2+m} \frac{\delta_{l'_1}^{l_2} \delta_{l'_2}^{l_1}}{\sqrt{2(2l_2+1)}} [b_{nl_2}^\dagger \otimes b_{nl_2}]_{00}^{00} \right\}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde la integral de Slater $F^l(nl'_1 nl'_2 nl_1 nl_2)$ se definió en la ecuación (2.56).

Antes de proseguir con la discusión, es importante encontrar una expresión para el operador de Casimir de segundo orden del grupo $\mathcal{U}(3)$ en término del acoplamiento de tensores esféricos. De acuerdo con [12] este operador puede expresarse usando los tensores unitarios de Racah como

$$\Gamma(2l+1) \equiv \sum_{k=0}^{2l} \binom{2k+1}{2l+1} \underline{\mathcal{U}}^k(nl, nl) \cdot \underline{\mathcal{U}}^k(nl, nl), \quad (5.15)$$

donde $\underline{\mathcal{U}}_q^k(nl', nl) \equiv \sum_{mm'} \langle lm; kq | l'm' \rangle \mathcal{C}_{l'm'}^{lm}$, es la expresión en segunda cuantización del operador de un cuerpo $\sum_{j=1}^N [U_q^k(nl', nl)]_j$, donde $\underline{\mathcal{U}}_q^k$ es un operador tensorial cuyos elementos de matriz reducidos valen $\langle n_1 l'_1 || U^k(l', l) || n_1 l_1 \rangle = \delta_{l'l_1} \delta_{l_1}$, por lo que el operador de Casimir se puede desarrollar de la manera

$$\begin{aligned} \Gamma(2l+1) = \sum_{k=0}^{2l} \sum_{\substack{m=-l'_1 m'_2 \\ m_1 m_2}}^l \sum_{\substack{m_1 s \\ m_2 s}} (-)^m \binom{2k+1}{2l+1} \langle l m_1; l m | l m'_1 \rangle \langle l m_2; l - m | l m'_2 \rangle \\ \times b_{nl m'_1 m_1 s}^\dagger b^{nl m_1 m_1 s} b_{nl m'_2 m_2 s}^\dagger b^{nl m_2 m_2 s}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Repetiendo el mismo procedimiento realizado para el término de partícula independiente, es decir, bajando índices y reescribiendo los coeficientes Clebsch-Gordan para poder acoplar los operadores de creación con los de aniquilación tanto en la parte angular como de espín, se obtiene

$$\Gamma(2l+1) = 2 \sum_{k=0}^{2l} \sum_{m=-k}^k (-)^m [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{m_0}^{k 0} [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{-m_0}^{k 0}. \quad (5.17)$$

Los tensores resultantes pueden ser reacoplados siguiendo el mismo método. Finalmente se tiene que

$$\Gamma(2l + 1) = 2 \sum_{k=0}^{2l} (-)^{2l-k} \sqrt{2k+1} \left[[b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]^{k0} \times [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]^{k0} \right]_0^0. \quad (5.18)$$

Como ejemplo de lo anterior queremos caracterizar átomos con electrones en las capas de valencia s, p d y f. En principio, y como se verá más adelante para los últimos dos casos, será necesario introducir subgrupos adicionales para que la descripción se pueda llevar a cabo.

Antes de ver la forma que tiene el espectro de energías, se dará un bosquejo de las integrales de Slater que aparecen en los hamiltonianos anteriores. Esto se hará tanto para potenciales de interacción coulombiana como para potenciales de contacto; en ambos casos se realizará un cambio de variable que permitirá separar la dependencia del número atómico, hecho que servirá para construir tablas que utilizaremos más adelante en la discusión de los casos ya mencionados.

La integral de Slater para la interacción coulombiana tiene la forma

$$F_C^l(n, l'_1, l'_2, l_1, l_2) = e^2 \int_0^\infty \int_0^{r_1} R_{nl'_1}(r_1) R_{nl'_2}(r_2) \frac{r_2^l}{r_1^{l+1}} R_{nl_1}(r_1) R_{nl_2}(r_2) r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2 \\ + \int_0^\infty \int_{r_1}^\infty R_{nl'_1}(r_1) R_{nl'_2}(r_2) \frac{r_1^l}{r_2^{l+1}} R_{nl_1}(r_1) R_{nl_2}(r_2) r_1^2 r_2^2 dr_2 dr_1. \quad (5.19)$$

Utilizando la expresión de las funciones radiales [13] que están dadas en términos de los polinomios asociados de Laguerre, es decir,

$$R_{nl}(r) = \left[\alpha^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}r} (\alpha r)^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\alpha r) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{2Z}{na_0}, \quad (5.20)$$

y reemplazando las funciones radiales en la integral de Slater, se obtiene la expresión

$$F_C^l(n, l'_1, l'_2, l_1, l_2) = \frac{\alpha^6 e^2}{4n^2} \left[\frac{(n-l'_1-1)!(n-l'_2-1)!(n-l_1-1)!(n-l_2-1)!}{(n+l'_1)!(n+l'_2)!(n+l_1)!(n+l_2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \left\{ \int_0^\infty \int_0^{r_1} e^{-\alpha(r_1+r_2)} (\alpha r_1)^{l'_1+l_1} (\alpha r_2)^{l'_2+l_2} \frac{(r_2)^l}{(r_1)^{l+1}} L_{n-l'_1-1}^{2l'_1+1}(\alpha r_1) L_{n-l'_2-1}^{2l'_2+1}(\alpha r_2) \right. \\ L_{n-l_1-1}^{2l_1+1}(\alpha r_1) L_{n-l_2-1}^{2l_2+1}(\alpha r_2) r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2 \\ \left. + \int_0^\infty \int_{r_1}^\infty e^{-\alpha(r_1+r_2)} (\alpha r_1)^{l'_1+l_1} (\alpha r_2)^{l'_2+l_2} \frac{(r_1)^l}{(r_2)^{l+1}} L_{n-l'_1-1}^{2l'_1+1}(\alpha r_1) L_{n-l'_2-1}^{2l'_2+1}(\alpha r_2) \right. \\ \left. L_{n-l_1-1}^{2l_1+1}(\alpha r_1) L_{n-l_2-1}^{2l_2+1}(\alpha r_2) r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2 \right\}. \quad (5.21)$$

A continuación se efectúan los cambios de variables $x_1 = \alpha r_1$ y $x_2 = \alpha r_2$. Entonces se tiene

$$\frac{r_1^{2l+1}}{r_2^{l-1}} dr_1 dr_2 = \alpha^{-5} \frac{x_1^{l+2}}{x_2^{l-1}} dx_1 dx_2, \quad \frac{r_2^{l+2}}{r_1^{l-1}} dr_1 dr_2 = \alpha^{-5} \frac{x_2^{l+2}}{x_1^{l-1}} dx_1 dx_2, \quad (5.22)$$

que al sustituirlas en la integral de Slater (5.21) se obtiene

$$F_C^l(n, l'_1, l'_2, l_1, l_2) = \frac{Ze^2}{2a_0} f_C^l(nl'_1l'_2l_1l_2), \quad (5.23)$$

con a_0 denotando el radio de Bohr y donde para simplificar la escritura definimos la función adimensional e independiente del número atómico

$$\begin{aligned} f_C^l(n, l'_1, l'_2, l_1, l_2) &= \frac{1}{n^3} \left[\frac{(n - l'_1 - 1)!(n - l'_2 - 1)!(n - l_1 - 1)!(n - l_2 - 1)!}{(n + l'_1)!(n + l'_2)!(n + l_1)!(n + l_2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left\{ \int_0^\infty \int_0^{x_1} e^{-x_1 - x_2} (x_1)^{l'_1 + l_1 - l + 1} (x_2)^{l'_2 + l_2 + l + 2} L_{n-l'_1-1}^{2l'_1+1}(x_1) L_{n-l'_2-1}^{2l'_2+1}(x_2) \right. \\ &\quad \left. L_{n-l_1-1}^{2l_1+1}(x_1) L_{n-l_2-1}^{2l_2-1}(x_2) dx_1 dx_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty e^{-x_1 - x_2} (x_1)^{l'_1 + l_1 + l + 2} (x_2)^{l'_2 + l_2 - l + 1} L_{n-l'_1-1}^{2l'_1+1}(x_1) L_{n-l'_2-1}^{2l'_2+1}(x_2) \right. \\ &\quad \left. L_{n-l_1-1}^{2l_1+1}(x_1) L_{n-l_2-1}^{2l_2-1}(x_2) dx_1 dx_2 \right\}. \quad (5.24) \end{aligned}$$

Un tratamiento similar se hace con la interacción de contacto, donde

$$\nu_l(r_1 r_2) = a_0^3 V_0 \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}.$$

Eliminando una de las integrales por medio de la delta de Dirac se tiene que

$$F_\delta^l(nl'_1, l'_2, l_1, l_2) = a_0^3 V_0 \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) \int_0^\infty R_{nl'_1}^*(r_1) R_{nl'_2}^*(r_1) R_{nl_1}(r_1) R_{nl_2}(r_1) r_1^2 dr_1. \quad (5.25)$$

Sustituyendo las expresiones de las funciones radiales (5.20), haciendo el cambio de variables $x_1 = \alpha r_1$, y simplificando términos se obtiene

$$F_\delta^l(n, l'_1, l'_2, l_1, l_2) = Z^3 \frac{V_0}{2\pi} f_\delta^l(n, l'_1, l'_2, l_1, l_2), \quad (5.26)$$

donde como en el caso anterior definimos una función adimensional, sin dependencia del número atómico, y que en este caso tiene la forma

$$f_{\delta}^l(n, l'_1, l'_2, l_1, l_2) = \frac{(2l+1)}{n^5} \left[\frac{(n-l'_1-1)!(n-l'_2-1)!(n-l_1-1)!(n-l_2-1)!}{(n+l'_1)!(n+l'_2)!(n+l_1)!(n+l_2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \int_0^{\infty} e^{-2x_1} (x_1)^{l'_1+l'_2+l_1+l_2+2} L_{n-l'_1-1}^{2l'_1+1}(x_1) L_{n-l'_2-1}^{2l'_2+1}(x_1) L_{n-l_1-1}^{2l_1+1}(x_1) L_{n-l_2-1}^{2l_2+1}(x_1) dx_1. \quad (5.27)$$

A partir de estas dos funciones, $f_C^l(n, l'_1, l'_2, l_1, l_2)$ y $f_{\delta}^l(n, l'_1, l'_2, l_1, l_2)$ se construyen las tablas (5.1), (5.2) y (5.3). La primera de ellas se usará en la descripción de un sistema con electrones en la capa s , la segunda para electrones en la capa p y la tercera para un sistema de electrones en la capa d .

n	1	2	3	4	5
$f_C^0(n0000)$	1.25	0.300781	0.132813	0.074543	0.0476599
$f_{\delta}^0(n0000)$	0.25	0.00488281	0.000482253	0.0000927448	0.0000257324

Tabla 5.1: Tabla de las funciones f^l con $l = 0$ correspondientes a las interacciones coulombiana y de contacto denotadas por los subíndices C y δ , respectivamente, para electrones en la capa s , es decir, que $l'_1 = l'_2 = l_1 = l_2 = 0$.

n	2	3	4	5
$f_C^0(n1111)$	0.363281	0.143736	0.0778694	0.048999
$f_C^2(n1111)$	0.175781	0.0719763	0.0398445	0.0253662
$f_{\delta}^0(n1111)$	0.00488281	0.000442065	0.0000832081	0.0000229297
$f_{\delta}^2(n1111)$	0.0244141	0.00221033	0.00041604	0.000114648

Tabla 5.2: Tabla de las funciones f^l con $l = 0, 2$, correspondientes a las interacciones coulombiana y de contacto denotadas por los subíndices C y δ , respectivamente, para electrones en la capa p , es decir, que $l'_1 = l'_2 = l_1 = l_2 = 1$.

n	3	4	5	6
$f_C^0(n2222)$	0.172092	0.0853462	0.0518662	0.0350577
$f_C^2(n2222)$	0.090842	0.0431465	0.0263818	0.0179887
$f_\delta^0(n2222)$	0.000506366	0.0000851154	0.0000226172	0.00000777399
$f_\delta^2(n2222)$	0.00253183	0.000425577	0.000113086	0.0003887

Tabla 5.3: Tabla de las funciones f^l con $l = 0, 2$, correspondientes a las interacciones coulombiana y de contacto denotadas por los subíndices C y δ , respectivamente, para electrones en la capa d , es decir, que $l'_1 = l'_2 = l_1 = l_2 = 2$.

5.2.1. Sistema de electrones en la capa s

Supongamos que el sistema que se quiere describir es un conjunto de electrones, donde se ha considerado un potencial de interacción de naturaleza coulombiana. Si estos electrones se encuentran en la capa ns , es decir, que $l'_1 = l'_2 = l_1 = l_2 = 0$ esto implica que $l = 0$. Al sustituir estos valores en (5.14), y con la ayuda de (5.13) y (5.23), el hamiltoniano que describe al sistema es

$$\mathcal{H} = -\frac{Z^2}{n^2}\hat{N} + \frac{Z}{2}f^0(n, 0000)\hat{N}(\hat{N} - 1),$$

donde se ha utilizado al Rydberg como unidad de energía ($1 Ry = 13.6058 eV$).

Dado que \hat{N} es un operador diagonal con eigenvalor N que representa el número de electrones en la capa, en este caso los únicos valores posibles que puede tomar son $N = 1, 2$.

Como estamos en la capa s , el momento angular orbital total vale cero, por lo que el sistema se clasifica mediante la cadena de grupos del espín, esto es,

$$\left\{ \frac{N}{2} + S, \frac{N}{2} - S \right\} \supset \left\{ \frac{N}{2} + M_S \right\} \\ U(2) \supset U(1).$$

En el primer caso, es decir $N = 1$, el término de interacción es cero, por lo tanto el espectro energético coincide con el del hamiltoniano de partícula independiente.

La partición correspondiente al grupo $U(2)$ es $\{1\}$ y tiene asociado el espín total $S = \frac{1}{2}$. A continuación se escribe el espectro energético junto con sus eigenestados:

$$E(n) = -\frac{Z^2}{n^2}, \quad |1; [1]00; \{1\} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = s_+^\dagger |0\rangle, \quad |1; [1]00; \{1\} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle = s_-^\dagger |0\rangle.$$

De aquí en adelante se denotarán como $|N; [h_\mu]LM_L; [\widetilde{h_\mu}]SM_S\rangle$ donde N representa el número de electrones en la capa, $[h_\mu]$ es la partición del grupo $\mathcal{U}(2l+1)$, L es el momento angular orbital total, M_L es la proyección del momento angular, $[\widetilde{h_\mu}]$ es la partición de $U(2)$, S es el espín total y M_S es la proyección del espín, Aquí s_+^\dagger (s_-^\dagger) representa un operador fermiónico de creación con momento angular 0, espín $\frac{1}{2}$ y proyección $\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$). En este caso la parte espacial es trivial.

Cuando se tiene dos electrones ($N = 2$) en la capa ns el término de interacción contribuye al espectro energético como

$$E(N = 2, n) = -\frac{2Z^2}{n^2} + Zf^0(n0000), \quad (5.28)$$

que ya se mencionó anteriormente tiene unidades de Rydbergs. Junto con el espectro tenemos el correspondiente eigenestado

$$|2; [2]00; \{11\}00\rangle = s_+^\dagger s_-^\dagger |0\rangle.$$

Como ejemplos de sistemas con electrones en la capa ns tenemos a los siguientes átomos: ${}_2\text{He}$, ${}_4\text{Be}$, ${}_{12}\text{Mg}$, ${}_{20}\text{Ca}$. Utilizando estos números atómicos se construyen los siguientes diagramas de niveles energéticos para $n = 1, 2, 3, 4$, donde se muestra por un lado el espectro energético del hamiltoniano de partícula independiente y por otro el espectro del hamiltoniano (5.28).

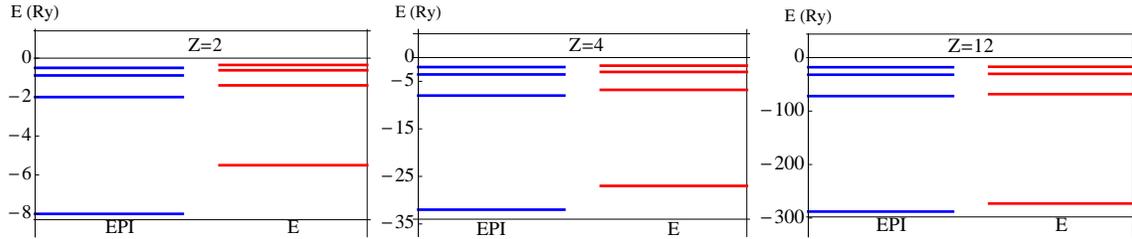


Fig. 5.2: En el lado izquierdo de cada uno de estos diagramas se tiene el espectro de energías del hamiltoniano de partícula independiente, mientras que en el derecho se muestra el espectro energético tomando en cuenta la interacción coulombiana de dos electrones en la capa s . En la parte superior está escrito el número atómico correspondiente.

5.2.2. Sistema de electrones en la capa p

Ahora consideramos átomos con electrones en la capa p . Esto quiere decir que $l'_1 = l'_2 = l_1 = l_2 = 1$; de acuerdo con los coeficientes Clebsch-Gordan que aparecen en (5.14) se infiere que $l = 0, 2$. Teniendo esto en cuenta el hamiltoniano se escribe

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = E_n \hat{N} + 3F^0(n1111) \{ [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{00}^{00} [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{00}^{00} + \frac{1}{\sqrt{6}} [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{00}^{00} \} \\ + \frac{6}{25} F^2(n1111) \sum_{m=-2}^2 (-)^m [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{m0}^{20} [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{-m0}^{20} \\ + \frac{\sqrt{6}}{5} F^2(n1111) [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{00}^{00}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Haciendo uso de la ecuación (5.13) la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = E_n \hat{N} + \frac{1}{2} F^0(n1111) \hat{N} (\hat{N} - 1) - \frac{1}{5} F^2(n1111) \hat{N} \\ + \frac{6}{25} F^2(n1111) \sum_{m=-2}^2 (-)^m [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{m0}^{20} [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{-m0}^{20}. \end{aligned}$$

Sólo falta identificar el último término de la ecuación anterior con algunos de los operadores de Casimir de los grupos de la cadena en el esquema de clasificación físico

$$[2^{\frac{N}{2}-S} 1^{2S}] \quad \mathcal{U}(3) \supset SO(3) \supset SO(2). \quad (5.30)$$

Tomando en cuenta el operador de Casimir de segundo orden de $\mathcal{U}(3)$, (5.17), con $l = 1$,

$$\begin{aligned} \Gamma(3) = 2 [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{00}^{00} [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{00}^{00} + 2 \sum_{m=-1}^1 (-)^m [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{m0}^{10} [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{-m0}^{10} \\ + 2 \sum_{m=-2}^2 (-)^m [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{m0}^{20} [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{-m0}^{20}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Puede verse que el primer término es proporcional al cuadrado del operador de número (5.13), mientras que el segundo es proporcional a L^2 . Esto se puede ver al comparar la expresión con la ecuación (2.49). Por lo tanto, despejando el tercer término y reorganizando se obtiene

$$\sum_{m=-2}^2 (-)^m [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{m0}^{20} [b_{n1}^\dagger \otimes b_{n1}]_{-m0}^{20} = \frac{1}{2} \Gamma(3) - \frac{1}{6} \hat{N}^2 - \frac{1}{4} L^2.$$

Sustituyendo este resultado en el hamiltoniano, y después de reagrupar términos, se llega a que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \hat{N}E_n + \frac{1}{2}F^0(n1111)\hat{N}(\hat{N} - 1) \\ + \frac{1}{5}F^2(n1111)\left\{\frac{3}{5}\Gamma(3) - \frac{1}{5}\hat{N}^2 - \frac{3}{10}L^2 - \hat{N}\right\}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Este hamiltoniano queda escrito en función de los operadores de Casimir de los grupos $\mathbf{U}(6)$, $\mathbf{U}(3)$ y $SO(3)$.

En discusiones anteriores hemos hablado de los eigenvalores del operador de número; ahora toca el turno de hablar de los eigenvalores de los operadores \hat{L}^2 y $\Gamma(2l + 1)$. En este esquema de clasificación, el eigenvalor del operador \hat{L}^2 está dado por $L(L+1)$ donde L denota el momento angular orbital total del sistema de N electrones. Los posibles valores que toma L deben estar contenidos en la representación irreducible de $\mathbf{U}(3)$ dada por

$$[2^{\frac{N}{2}-S}, 1^{2S}]. \quad (5.33)$$

Para ver qué forma tiene el eigenvalor del operador de Casimir de segundo orden del grupo $\mathbf{U}(2l + 1)$, se va a reescribir de tal manera que quede expresado en función de generadores de peso y ascenso, para que cuando actúe sobre el estado de máximo peso sólo tengamos la contribución de los eigenvalores de los generadores de peso. Usando la ecuación (3.12) tenemos que el operador de Casimir se puede expresar

$$\Gamma(2l + 1) = \sum_{\mu_1, \mu_2} \mathcal{C}_{\mu_1}^{\mu_2} \mathcal{C}_{\mu_2}^{\mu_1}.$$

Por medio de las relaciones de conmutación entre los generadores del grupo dadas en (3.8), y tomando en cuenta que $\mu_1, \mu_2 = 1, 2, \dots, 2l + 1$, la ecuación anterior se transforma en

$$\Gamma(2l + 1) = \sum_{\mu=1}^{2l+1} (\mathcal{C}_{\mu}^{\mu})^2 + \sum_{\mu_1 < \mu_2} (\mathcal{C}_{\mu_1}^{\mu_2} - \mathcal{C}_{\mu_2}^{\mu_1}) + 2 \sum_{\mu_2 < \mu_1} \mathcal{C}_{\mu_1}^{\mu_2} \mathcal{C}_{\mu_2}^{\mu_1}.$$

Al actuar sobre el estado de máximo peso, que en general puede representarse por la partición $[h_1, h_2, \dots, h_{2l+1}]$, obtenemos el eigenvalor del operador de Casimir al que denotaremos por $\gamma(2l + 1)$:

$$\gamma(2l + 1) = \sum_{\mu} (h_{\mu})^2 + \sum_{\mu_1 < \mu_2} (h_{\mu_1} - h_{\mu_2}).$$

Desarrollando la segunda suma y reagrupando los términos, además de renombrar índices, podemos escribir a γ de la forma

$$\gamma(2l + 1) = \sum_{\mu} h_{\mu}(h_{\mu} + 2l + 2 - 2\mu).$$

Si consideramos la cadena canónica de grupos, el estado de máximo peso tiene como representación irreducible a $[2^{\frac{N}{2}-S}, 1^{2S}]$, por lo que γ toma el valor

$$\gamma(2l+1) = N\left(2l+3 - \frac{N}{2}\right) - 2S(S+1). \quad (5.34)$$

En el caso del sistema de electrones p , tenemos $l=1$, y el eigenvalor de Γ_3 es

$$\gamma(3) = N\left(5 - \frac{N}{2}\right) - 2S(S+1). \quad (5.35)$$

Con la discusión previa, y tomando en cuenta (5.32) y (5.35), a continuación se escribe el espectro de energías para electrones en la capa p :

$$E = NE_n + \frac{1}{2}F^0(n, 1, 1, 1, 1)N(N-1) - \frac{3}{25}F^2(n, 1, 1, 1, 1)\left\{\frac{5}{6}N(N-4) + 2S(S+1) + \frac{1}{2}L(L+1)\right\}, \quad (5.36)$$

donde usamos la clasificación $\{1^N\}$, $[h'_s]$, $\{\nu_s\}$, L , M_L , S , M_S .

Para usar la expresión del espectro energético para un sistema de electrones en la capa p , lo primero que hay que saber es que el número de electrones permitidos en dicha capa es $1 \leq N \leq 6$. Ahora escribimos los espectros para cada partición de N , que como se verá más adelante tiene asociados ciertos valores tanto del espín S como del momento angular orbital total L . A continuación se discutirá cada caso por separado,

N = 1

Se tiene la representación irreducible $[100]$ de $\mathcal{U}(3)$ y contiene los valores de $L=1$ y $S=\frac{1}{2}$, de tal manera que la energía toma la forma

$$E(Z, N=1, L=1, S=\frac{1}{2}, n) = -\frac{Z^2}{n^2}.$$

Como sólo se tiene un electrón, la parte de interacción entre los electrones no contribuye y el espectro es del átomo hidrogenoide, para la capa p .

N = 2

En este caso $\mathbf{U}(6)$ está descrito por la representación irreducible $[1^2]$ y contiene a las representaciones irreducibles $[200]$ y $[110]$ de $\mathcal{U}(3)$.

Utilizando las reglas de ramificación de $\mathcal{U}(3) \supset \mathcal{O}(3)$ (en este caso, son todas las RI del grupo $SO(3)$ contenidas en la RI $[h_{13}, h_{23}, h_{33}]$ del grupo $\mathcal{U}(3)$) se obtienen los posibles momentos angulares. Así tenemos que $[200]$ contiene $L=0$ y $L=2$ mientras

que [110] contiene $L = 1$. Para la parte de espín, se tienen las representaciones irreducibles $\{11\}$, $\{20\}$, y entonces es inmediato que $S = 0$ para $\{11\}$ y $S = 1$ para $\{20\}$. Por lo tanto las energías posibles toman la forma

$$\begin{aligned} E(Z, N = 2, L = 0, S = 0, n) &= -2\frac{Z^2}{n^2} + Zf^0(n, 1111) + \frac{2}{5}Zf^2(n, 1111), \\ E(Z, N = 2, L = 2, S = 0, n) &= -2\frac{Z^2}{n^2} + Zf^0(n, 1111) + \frac{1}{25}Zf^2(n, 1111), \\ E(Z, N = 2, L = 1, S = 1, n) &= -2\frac{Z^2}{n^2} + Zf^0(n, 1111) - \frac{1}{5}Zf^2(n, 1111), \end{aligned}$$

que pueden definirse como E_{1S} , E_{1D} y E_{3P} , respectivamente, concluyendo con la siguiente relación

$$R_2 = \frac{E_{1S} - E_{1D}}{E_{1D} - E_{3P}} = \frac{3}{5}, \quad (5.37)$$

para cualquier capa n , el subíndice 2 denota el número de partículas.

Dividiendo la ecuación anterior por Z y sumando $2\frac{Z}{n^2}$ se obtiene únicamente la contribución debida a la interacción de los electrones; de esta manera se quita la dependencia de Z . En la gráfica (5.3) se muestran los niveles energéticos de la repulsión entre los electrones dada una n . Podemos ver que para $L = 1$ y $S = 1$ la interacción es la más pequeña, en particular para $n = 2$, que corresponde al estado base.

N = 3

En este caso $\mathbf{U}(6)$ está descrito por la representación irreducible $[1^3]$ y contiene las representaciones irreducibles $[210]$ y $[111]$ de $\mathcal{U}(3)$.

Utilizando las reglas de ramificación de $\mathcal{U}(3) \supset O(3)$ se obtienen los posibles momentos angulares. Así tenemos que $[210]$ contiene $L = 1$ y $L = 2$, mientras que $[111]$ contiene $L = 0$. Para la parte de espín se tienen las representaciones irreducibles $\{21\}$ y $\{30\}$, y entonces es inmediato que $S = \frac{1}{2}$ para $\{21\}$ y $S = \frac{3}{2}$ para $\{30\}$. Por lo tanto las energías posibles toman la forma

$$\begin{aligned} E(Z, N = 3, L = 1, S = \frac{1}{2}, n) &= -3\frac{Z^2}{n^2} + 3Zf^0(n, 1111), \\ E(Z, N = 3, L = 2, S = \frac{1}{2}, n) &= -3\frac{Z^2}{n^2} + 3Zf^0(n, 1111) - \frac{6}{25}Zf^2(n, 1111), \\ E(Z, N = 3, L = 0, S = \frac{3}{2}, n) &= -3\frac{Z^2}{n^2} + 3Zf^0(n, 1111) - \frac{3}{5}Zf^2(n, 1111), \end{aligned} \quad (5.38)$$

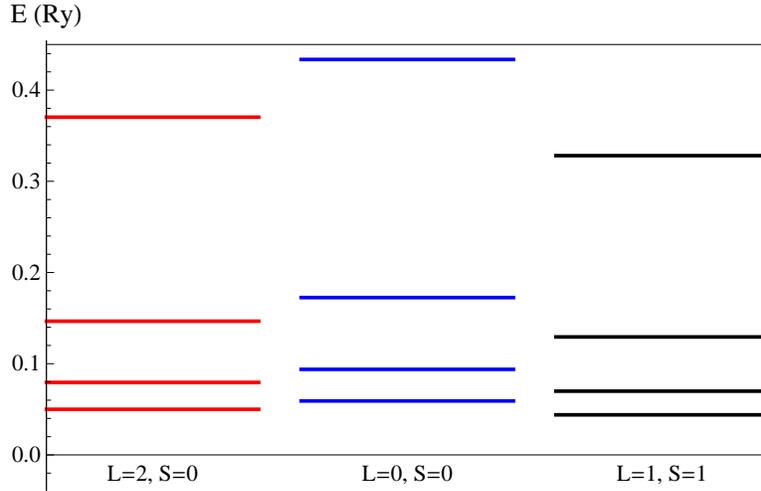


Fig. 5.3: En la figura se muestra los diagramas de niveles energéticos debido a la repulsión coulombiana para un sistema de dos electrones en la capa p, con $n = 2, 3, 4, 5$. Las dos primeras columnas están relacionadas con la partición [200]; la primera corresponde a los eigenestados con momento angular orbital total $L = 2$ y espín total $S = 0$, la segunda con $L = 0$ y $S = 0$; por otra parte la tercer columna está relacionada con la partición [110] y los eigenestados tienen momento angular orbital total $L = 1$ y espín $S = 1$

que pueden definirse como E_{2P} , E_{2D} y E_{4S} , respectivamente, concluyendo con la siguiente relación

$$R_3 = \frac{E_{2P} - E_{2D}}{E_{2P} - E_{4S}} = \frac{2}{5},$$

para toda n e integral de Slater.

En forma similar, dividiendo cada una de las ecuaciones de (5.38) por Z y sumando $3\frac{Z}{n^2}$ se obtiene únicamente la contribución proporcional a la interacción entre los electrones. En la gráfica (5.4) se muestran los niveles energéticos de la repulsión entre los electrones.

N = 4

Equivalente a dos agujeros, y el contenido de las L'_s y S'_s es el mismo que $N = 2$. En este caso $U(6)$ está descrito por la representación irreducible [1⁴] y contiene las representaciones irreducibles [220] y [211] de $U(3)$.

Utilizando las reglas de ramificación de $U(3) \supset O(3)$ se obtienen los posibles momentos angulares. Así tenemos que [220] contiene $L = 0$ y $L = 2$, mientras que [211] contiene $L = 1$. Para la parte de espín se tienen las representaciones irreducibles {22} y {31}, y entonces es inmediato que $S = 0$ para {22} y $S = 1$ para {31}. Por

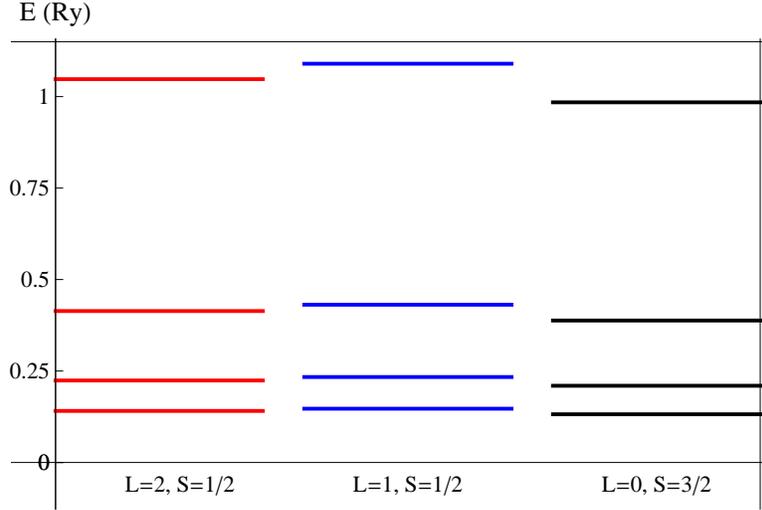


Fig. 5.4: En la figura se muestra los diagramas de niveles energéticos debido a la repulsión coulombiana para un sistema de tres electrones en la capa p, con $n = 2, 3, 4, 5$. Las dos primeras columnas están relacionadas con la partición [210]; la primera corresponde a los eigenestados con momento angular orbital total $L = 2$ y espín total $S = \frac{1}{2}$, la segunda con $L = 1$ y $S = \frac{1}{2}$. Por otra parte la tercer columna está relacionada con la partición [111] y los eigenestados tienen momento angular orbital total $L = 0$ y espín $S = \frac{3}{2}$.

lo tanto las energías posibles toman la forma

$$E(Z, N = 4, L = 2, S = 0, n) = -4\frac{Z^2}{n^2} + 6Zf^0(n, 1111),$$

$$E(Z, N = 4, L = 0, S = 0, n) = -4\frac{Z^2}{n^2} + 6Zf^0(n, 1111) - \frac{9}{25}Zf^2(n, 1111),$$

$$E(Z, N = 4, L = 1, S = 1, n) = -4\frac{Z^2}{n^2} + 6Zf^0(n, 1111) - \frac{3}{5}Zf^2(n, 1111),$$

que se pueden definir como E_{1D} , E_{1S} y E_{3P} , respectivamente, concluyendo con

$$R_4 = \frac{E_{1D} - E_{1S}}{E_{1D} - E_{3P}} = \frac{3}{5} \quad \forall \quad n.$$

Dividiendo la ecuación anterior por Z y sumando $4\frac{Z}{n^2}$ se obtiene únicamente la contribución debido a la interacción de los electrones, de esta manera quita la dependencia de Z . En la gráfica (5.5) se muestran los niveles energéticos de la repulsión entre los electrones para un sistema de 4 electrones.

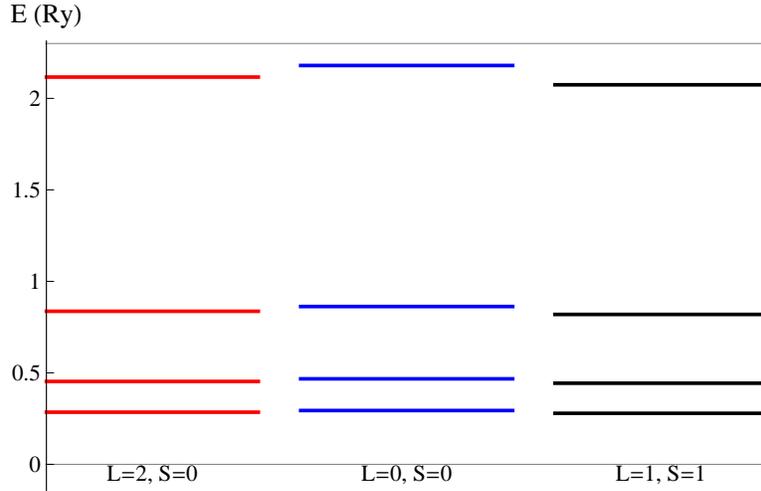


Fig. 5.5: En la figura se muestra los diagramas de niveles energéticos debido a la repulsión coulombiana para un sistema de cuatro electrones en la capa p, con $n = 2, 3, 4, 5$. Las dos primeras columnas están relacionadas con la partición [220]; la primera corresponde a los eigenestados con momento angular orbital total $L = 2$ y espín total $S = 0$, la segunda con $L = 0$ y $S = 0$. Por otra parte la tercer columna está relacionada con la partición [211] y los eigenestados tienen momento angular orbital total $L = 1$ y espín $S = 1$.

N = 5

Equivalente a un agujero, en esta ocasión la representación irreducible es [221] en el grupo $\mathcal{U}(3)$ y contiene los valores de $L = 1$ $S = \frac{1}{2}$ de tal manera que la energía toma la forma

$$E(Z; N = 5, L = 1, S = \frac{1}{2}, n) = -5\frac{Z^2}{n^2} + 10Zf^0(n, 1111) - \frac{4}{5}Zf^2(n, 1111).$$

A diferencia del caso $N = 1$, aquí sí hay contribución por la interacción repulsiva entre los electrones.

N = 6

Corresponde a la capa cerrada que está determinada por la representación irreducible [222] en el grupo $\mathcal{U}(3)$ y contiene $L = 0$. La parte de espín está descrita por la representación {33} que contiene $S = 0$. De acuerdo con estos valores podemos decir que tiene sólo un estado con el espectro energético

$$E(Z, N = 6, L = 0, S = 0, n) = -6\frac{Z^2}{n^2} + 15Zf^0(n, 1111) - \frac{6}{5}Zf^2(n, 1111).$$

Para construir los estados propios correspondientes, primero se obtiene el estado de máximo peso para cada una de las posibles particiones de N , después, ya sea mediante los generadores u operadores de descenso de los grupos $\mathcal{U}(3)$ y $U(2)$ se deriva

la base canónica para cada una de las representaciones irreducibles. En esta base se diagonaliza el operador \hat{L}^2 y se verifica de acuerdo con las reglas de ramificación conocidas de $\mathcal{U}(3) \supset SO(3)$.

Bases

Se quieren construir estados que porten la RI de las cadenas de grupos

$$\begin{array}{c} [h_{13}, h_{23}, h_{33}] \\ \mathcal{U}(3) \end{array} \supset \begin{array}{c} L \\ SO(3) \end{array} \supset \begin{array}{c} L \\ SO(2), \end{array} \quad \begin{array}{c} \{\frac{N}{2}+S, \frac{N}{2}-S\} \\ U(2) \end{array} \supset \begin{array}{c} S \\ SU(2) \end{array} \supset \begin{array}{c} S \\ SO(2). \end{array}$$

Se tiene que para un sistema de electrones con momento angular $l = 1$, está caracterizado por el grupo $\mathbf{U}(6)$ cuya RI se denota $[1^N]$, donde N representa el número de electrones. En este caso $N = 1, 2, \dots, 6$, con $N = 1$ indicando el estado de partícula independiente y $N = 6$ el caso de capa cerrada.

Los estados se van a etiquetar como

$$|[1^N]; [2^{\frac{N}{2}-S} 1^{2S}], L M_L; \{\frac{N}{2} + S, \frac{N}{2} - S\}, S M_S], \quad (5.39)$$

donde $[2^{\frac{N}{2}-S} 1^{2S}]$ indica la RI de $\mathcal{U}(3)$, $\{\frac{N}{2} + S, \frac{N}{2} - S\}$ la RI de $U(2)$, L el momento angular orbital contenido en $[2^{\frac{N}{2}-S} 1^{2S}]$. Son estados de proyección de momento angular M_L y del espín M_S .

1 electrón

La RI $[1]$ de $\mathbf{U}(6)$ contiene a las representaciones irreducibles $[1]$ de $\mathcal{U}(3)$ y $\{1\}$ de $U(2)$, y en consecuencia contiene a las RI's con momento angular $L = 1$ de $SO(3)$ y $S = \frac{1}{2}$ para $SU(2)$.

Se quiere establecer un procedimiento general para construir la base. Primero se obtiene el estado de máximo peso

$$p_{1+}^\dagger |0\rangle = |100, 10, 1; 10, 1\rangle,$$

donde el lado derecho se identifica con las cadenas canónicas de los grupos $\mathcal{U}(3)$ y $U(2)$. El estado de máximo peso se construye proponiendo $\mathbf{P}|0\rangle = p_{m\sigma}^\dagger |0\rangle$ y pidiendo que se cumpla

$$C_\mu^{\mu'} \mathbf{P}|0\rangle = 0 \quad \text{si} \quad \mu' \geq \mu, \quad C_\sigma^{\sigma'} \mathbf{P}|0\rangle = 0 \quad \text{si} \quad \sigma' \geq \sigma,$$

implicando que $m = 1$ y $\sigma = +$. En este caso es directo probar que

$$L^2 |100, 10, 1\rangle = 2\hbar |100, 10, 1\rangle,$$

	\mathcal{C}_1^0	\mathcal{C}_1^{-1}	\mathcal{C}_0^{-1}	\mathcal{C}_+^-	peso $\mathcal{U}(3)$	peso $U(2)$
$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger 0\rangle$	0	0	0	0	(200)	{11}
$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger 0\rangle$	0	0	0	0	(110)	{20}
$p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+} p_{1-}^\dagger 0\rangle$	0	0	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger 0\rangle$	(110)	{11}
$p_{1+}^\dagger p_{-1+} 0\rangle$	0	0	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger 0\rangle$	0	(101)	{20}
$p_{1+}^\dagger p_{-1-} 0\rangle$	0	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{-1+}^\dagger 0\rangle$	(101)	{11}

Tabla 5.4: Acción de los operadores de ascenso de los grupos $\mathcal{U}(3)$, $U(2)$, seguido del peso

es diagonal. De aquí en adelante denotaremos los estados de Gelfand-Tsetlin como

$$\left| \begin{array}{ccc} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ & h_{12} & h_{22} \\ & & h_{11} \end{array} , \begin{array}{cc} \nu_{12} & \nu_{22} \\ & \nu_{11} \end{array} \right\rangle = |h_{13}h_{23}h_{33}, h_{12}h_{22}, h_{11}; \nu_{12}, \nu_{22}, \nu_{11}\rangle. \quad (5.40)$$

2 electrones

Se propone el estado $p_{m\sigma}^\dagger p_{1+}^\dagger |0\rangle$, donde $m = 1, 0, -1$, y $\sigma = +, -$; con excepción de $(1, +)$. Al pedir que sea de máximo peso tanto en $\mathcal{U}(3)$ como en $U(2)$, se debe satisfacer

$$\mathcal{C}_1^{-1} p_{1+}^\dagger p_{m\sigma}^\dagger |0\rangle = 0, \quad \mathcal{C}_1^0 p_{1+}^\dagger p_{m\sigma}^\dagger |0\rangle = 0, \quad \mathcal{C}_0^{-1} p_{1+}^\dagger p_{m\sigma}^\dagger |0\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_+^- p_{1+}^\dagger p_{m\sigma}^\dagger |0\rangle = 0.$$

Utilizando la tabla (5.4), obtenemos dos condiciones:

$$m = 1, \quad \sigma = -, \quad \text{y} \quad m = 0, \quad \sigma = +.$$

Por lo tanto los estados de máximo peso para dos electrones son

$$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger |0\rangle = |200, 20, 2; 11, 1\rangle, \quad (5.41a)$$

$$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger |0\rangle = |110, 11, 1; 20, 2\rangle, \quad (5.41b)$$

donde del lado derecho se identifican con los estados de Gelfand-Tsetlin de máximo peso del producto directo $\mathcal{U}(3) \times U(2)$. El primer estado de la ecuación anterior tiene como RI a [200] en $\mathcal{U}(3)$ y {11} en $U(2)$, mientras que el segundo tiene [110] en $\mathcal{U}(3)$ y {20} en $U(2)$.

Tomando en cuenta la relación (4.37) junto con la partición se llega al conjunto de condiciones

$$\nu_{12} = \frac{N}{2} + S, \quad \nu_{22} = \frac{N}{2} - S, \quad \nu_{11} = \frac{N}{2} + m, \quad (5.42)$$

las cuales determinan automáticamente el espín total del sistema. Por lo tanto el sistema con partición $\{11\}$ tiene espín total $S = 0$, mientras que la partición $\{20\}$, $S = 1$.

Con los operadores de descenso unitarios de Nagel-Moshinsky que se construyeron en el capítulo anterior a nuestra disposición,

$$\mathbb{L}_3^2 = \frac{\mathcal{C}_3^2}{\sqrt{h_{23} - h_{33}}}, \quad \mathbb{L}_3^1 = \frac{\mathcal{C}_3^1(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 + 1) + \mathcal{C}_3^2\mathcal{C}_2^1}{\sqrt{(h_{13} - h_{23} + 1)(h_{13} - h_{23})(h_{13} - h_{33} + 1)}}, \quad \mathbb{L}_2^1 = \frac{\mathcal{C}_2^1}{\sqrt{h_{13} - h_{23}}},$$

para la parte espacial, y

$$\mathbb{L}_-^+ = \frac{\mathcal{C}_+^-}{\sqrt{(\nu_{12} - \nu_{22} + 1)(\nu_{11} - \nu_{22})}},$$

para la parte de espín, se está en condiciones de obtener la base completa para cada una de las particiones.

De (3.102) puede verse que la acción del operador L_n^k con $k < n$ sobre el estado de máximo peso, mantiene éste estado en el grupo $\mathcal{U}(n-1)$ pero decrece en una unidad el k -ésimo elemento de cada uno de los renglones inferiores al n -ésimo. Por ejemplo consideremos al grupo $\mathcal{U}(3)$ con sus operadores L_3^2 , L_3^1 , actuando sobre un estado de máximo peso con partición $[h_{13}, h_{23}, h_{33}]$, esto es,

$$L_3^2 |h_{13}h_{23}h_{33}, h_{13}h_{23}, h_{13}\rangle = k |h_{13}h_{23}h_{33}, h_{13}h_{23} - 1, h_{13}\rangle,$$

donde se debe satisfacer $h_{23} - 1 \geq h_{33}$. De forma análoga se tiene para el otro operador

$$L_3^1 |h_{13}h_{23}h_{33}, h_{13}h_{23}, h_{13}\rangle = k' |h_{13}h_{23}h_{33}, h_{13} - 1, h_{13} - 1\rangle,$$

con $h_{13} - 1 \geq h_{23}$. En el par de ecuaciones anteriores k , k' son constantes de proporcionalidad.

En general si actuamos con potencias de estos dos operadores se obtienen todos los estados de máximo peso en el grupo $\mathcal{U}(2)$:

$$(L_3^1)^n (L_3^2)^m |h_{13}h_{23}h_{33}, h_{13}h_{23}, h_{13}\rangle = k'' |h_{13}h_{23}h_{33}, h_{13} - nh_{23} - m, h_{13} - n\rangle. \quad (5.43)$$

Las h'_s que componen al estado anterior deben satisfacer las desigualdades

$$h_{13} \geq h_{13} - n \geq h_{23}, \quad h_{23} \geq h_{23} - m \geq h_{33} \quad \implies \quad h_{13} - n \geq h_{23} - m.$$

Aunque $[L_3^1, L_3^2] = 0$, la última desigualdad sugiere seguir el orden que aparece en la ecuación (5.43). Por otra parte el operador L_2^1 sólo actúa sobre el elemento del primer renglón, por lo que el estado más general se puede obtener de

$$(\mathbb{L}_2^1)^q (\mathbb{L}_3^1)^n (\mathbb{L}_3^2)^m |h_{13}h_{23}h_{33}, h_{13}h_{23}, h_{13}\rangle = |h_{13}h_{23}h_{33}, h_{13} - nh_{23} - m, h_{13} - n - q\rangle.$$

Con estos resultados, podemos obtener las bases para cada una de las particiones de $N = 2$.

Haciendo uso de la fórmula de Weyl (3.101), se calcula la dimensión para un sistema de 2 electrones en la capa p . Esto se hace de la siguiente manera:

$$Dim([1^2]) = \frac{\prod_{i < j=2}^6 (P_{i6} - P_{j6})}{5!4!3!2!} = \frac{1 \cdot 6!5!3!2!}{2 \cdot 5!4!3!2!} = 15.$$

Utilizando los operadores de descenso de $\mathcal{U}(3)$ se obtendrán primero los estados de máximo peso en el subgrupo $\mathcal{U}(2)$. Después de realizar dicha tarea, se utiliza el operador de descenso del grupo $\mathcal{U}(2)$ para obtener la base.

RI [200] de $\mathcal{U}(3)$

La parte de espín es directa. Usando (5.42), el espín total es $S = 0$ y su proyección $M_S = 0$. Para la parte espacial mediante la acción de los operadores \mathbb{L}_3^1 y \mathbb{L}_3^2 sobre el estado de peso máximo (5.41a) tantas veces como sean necesarias hasta que se anule, se construyen todos los estados de máximo peso de $U(2)$ contenidos en la RI [200] de $\mathcal{U}(3)$, el resultado es

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_3^1 |200, 20, 2\rangle &= |200, 10, 1\rangle, & (\mathbb{L}_3^1)^2 |200, 20, 2\rangle &= |200, 00, 0\rangle, \\ (\mathbb{L}_3^1)^3 |200, 20, 2\rangle &= 0, & \mathbb{L}_3^2 |200, 20, 2\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Solamente escribimos la parte espacial de los estados. Tomamos la acción del operador de descenso de $\mathcal{U}(2)$ las veces que sean necesarias, se obtiene la RI de $\mathcal{U}(1)$; esta es

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_2^1 |20, 2\rangle &= |20, 1\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^2 |20, 2\rangle &= |20, 0\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^3 |20, 2\rangle &= 0, \\ \mathbb{L}_2^1 |10, 1\rangle &= |10, 0\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^2 |10, 1\rangle &= 0, \\ \mathbb{L}_2^1 |00, 0\rangle &= 0. \end{aligned}$$

En las expresiones obtenidas, la representación de $\mathcal{U}(3)$ no es afectada y por lo tanto fue omitida.

Para establecer la forma explícita de los estados, se escriben los operadores de Nagel-Moshinsky en función de los generadores de descenso y peso. Renombrando

los índices $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 0$, $3 \rightarrow -1$, y tomando la acción sobre el estado de máximo peso se tiene, por ejemplo,

$$\begin{aligned} (\mathbb{L}_{-1}^1)^2 |200, 20, 2; 11, 1\rangle &= \frac{1}{4} [\mathcal{C}_{-1}^1 (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_0^0 + 1) - \mathcal{C}_0^1 \mathcal{C}_{-1}^0]^2 p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{1}{4} [\mathcal{C}_{-1}^1 (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_0^0 + 1) - \mathcal{C}_0^1 \mathcal{C}_{-1}^0] (p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger - p_{-1-}^\dagger p_{1+}^\dagger) |0\rangle \\ &= p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle. \end{aligned}$$

Los demás se obtienen de forma análoga. A continuación se da una lista explícita de los estados escritos en forma decreciente en el valor de su peso:

$$\begin{aligned} |200, 20, 2\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger |0\rangle, \\ |200, 20, 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger - p_{0-}^\dagger p_{1+}^\dagger) |0\rangle, \\ |200, 10, 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger - p_{-1-}^\dagger p_{1+}^\dagger) |0\rangle, \\ |200, 20, 0\rangle &= p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger |0\rangle, \\ |200, 10, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger - p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger) |0\rangle, \\ |200, 00, 0\rangle &= p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Para tener al momento angular orbital bien definido, se utiliza la base canónica de Gelfand-Tsetlin (5.44). Notamos que su proyección ya está bien definida por la descripción utilizada para los operadores fermiónicos. El operador \hat{L}^2 está dado por

$$\hat{L}^2 = \mathcal{L}_0(\mathcal{L}_0 + 1) - 2\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_1. \tag{5.45}$$

Mediante las ecuaciones (2.16) y (3.9), escribimos las componentes del momento angular en términos de los generadores de $\mathcal{U}(3)$

$$\mathcal{L}_1 = -\mathcal{C}_0^{-1} - \mathcal{C}_1^0, \quad \mathcal{L}_0 = \mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_{-1}^{-1}, \quad \mathcal{L}_{-1} = \mathcal{C}_{-1}^0 + \mathcal{C}_0^1. \tag{5.46}$$

Para calcular la acción del operador L^2 sobre los estados (5.44), utilizamos las dos ecuaciones anteriores, obteniendo

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 |200, 20, 2\rangle &= 6|200, 20, 2\rangle, \\ \hat{L}^2 |200, 20, 1\rangle &= 6|200, 20, 1\rangle, \\ \hat{L}^2 |200, 10, 1\rangle &= 2|200, 10, 1\rangle + 2\sqrt{2}|200, 20, 0\rangle, \\ \hat{L}^2 |200, 20, 0\rangle &= 2\sqrt{2}|200, 10, 1\rangle + 4|200, 20, 0\rangle, \\ \hat{L}^2 |200, 10, 0\rangle &= 6|200, 10, 0\rangle, \\ \hat{L}^2 |200, 00, 0\rangle &= 6|200, 00, 0\rangle. \end{aligned}$$

Entonces la representación matricial del operador L^2 , toma la forma

$$L^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Observamos que cuatro estados de la base canónica son diagonales, y por lo tanto tienen momento angular $L = 2$. Al calcular los eigenvalores de la parte no diagonal de la matriz, tenemos 2 eigenestados, uno con momento angular $L = 2$ y otro con $L = 0$. De tal manera que los estados de $L = 2$ se escriben

$$\begin{aligned} |2; [200]L = 2, M_L = 2; \{11\}; S = 0, M_S = 0\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger |0\rangle, \\ |2; [200]L = 2, M_L = 1; \{11\}; S = 0, M_S = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger - p_{0-}^\dagger p_{1+}^\dagger) |0\rangle, \\ |2; [200]L = 2, M_S = 0; \{11\}; S = 0, M_S = 0\rangle &= \frac{1}{2}(p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger - p_{-1-}^\dagger p_{1+}^\dagger + 2p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger) |0\rangle, \\ |2; [200]L = 2, M_S = -1; \{11\}; S = 0, M_S = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger - p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger) |0\rangle, \\ |2; [200]L = 2, M_S = -2; \{11\}; S = 0, M_S = 0\rangle &= p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle. \end{aligned}$$

Mientras que el de momento angular total $L = 0$,

$$|2; [200]L = 0, M_L = 0 \{11\}; S = 0, M_S = 0\rangle = (p_{-1-}^\dagger p_{1+}^\dagger - p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger + p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger) |0\rangle.$$

RI [110] de $\mathcal{U}(3)$

De acuerdo con (5.42), el espín total y su proyección son $S = 1$ y $M_S = 1$. Ahora, la acción de los operadores de descenso de $\mathcal{U}(3)$ sobre el estado de máximo peso está dada por

$$\mathbb{L}_3^1 |110, 11, 1\rangle = 0, \quad \mathbb{L}_3^2 |110, 11, 1\rangle = |110, 10, 1\rangle, \quad (\mathbb{L}_3^2)^2 |110, 11, 1\rangle = 0.$$

Finalmente, se usa el operador \mathbb{L}_2^1 sobre los dos estados anteriores de máximo peso de $\mathcal{U}(2)$, esto es,

$$\mathbb{L}_2^1 |11, 1\rangle = 0, \quad \mathbb{L}_2^1 |10, 1\rangle = |10, 0\rangle, \quad (\mathbb{L}_2^1)^2 |10, 1\rangle = 0,$$

donde nuevamente hemos omitido la representación de $\mathcal{U}(3)$.

Escribiendo los operadores unitarios de descenso en función de los generadores del grupo y tomando su acción sobre el estado de máximo peso (5.41b), encontramos

su forma explícita:

$$\begin{aligned} |110, 11, 1\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger |0\rangle, \\ |110, 10, 1\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\ |110, 10, 0\rangle &= p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle. \end{aligned}$$

Nuevamente queremos determinar los elementos de matriz de L^2 . Utilizando (5.45) y (5.46), y reorganizando términos se obtiene

$$\begin{aligned} L^2 |110; 20\rangle &= 2 |110; 20\rangle, \\ L^2 |101; 20\rangle &= 2 |101; 20\rangle, \\ L^2 |011; 20\rangle &= 2 |011; 20\rangle. \end{aligned}$$

Entonces la representación matricial del operador de momento angular al cuadrado es proporcional a la matriz identidad, es decir,

$$\hat{L}^2 \longrightarrow 2 \mathbb{I},$$

y los eigenestados de Gelfand-Tsetlin para esa representación tienen momento angular total definido $L = 1$. Al actuar con el operador de descenso del grupo complementario \mathbb{L}_+^- , se obtiene la base completa de la parte espacial y de espín:

$$\begin{aligned} |2; [110]11; \{20\}11\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger |0\rangle, \\ |2; [110]11; \{20\}10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger - p_{0-}^\dagger p_{1+}^\dagger) |0\rangle, \\ |2; [110]11; \{20\}1-1\rangle &= p_{1-}^\dagger p_{0-}^\dagger |0\rangle, \\ |2; [110]10; \{20\}11\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\ |2; [110]10; \{20\}10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger - p_{-1-}^\dagger p_{1+}^\dagger) |0\rangle, \\ |2; [110]10; \{20\}1-1\rangle &= p_{1-}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle, \\ |2; [110]1-1; \{20\}11\rangle &= p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\ |2; [110]1-1; \{20\}10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger - p_{-1-}^\dagger p_{0+}^\dagger) |0\rangle, \\ |2; [110]1-1; \{20\}1-1\rangle &= p_{0-}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle. \end{aligned}$$

Los estados están escritos en la base de momento angular (5.39). Se observa de la expresión para la energía del sistema (5.36) que están degenerados los estados con diferente proyección de momento angular orbital y de espín. Sumando éstos con los de la partición anterior se obtienen los 15 estados del sistema de dos electrones en la capa p .

3 electrones

En este caso se proponen los estados

$$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle, \quad p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle, \quad (5.47)$$

formados a partir de la aplicación de un operador fermiónico de creación a los estados de máximo peso del sistema anterior, donde $m_1, m_2 = 1, 0, -1$, y $\sigma_1, \sigma_2 = +, -$, evitando la repetición de parejas de subíndices.

Para que sean de máximo peso se les pide, en el grupo $\mathcal{U}(3)$, que satisfagan

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle &= 0, & \mathcal{C}_0^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle &= 0, & \mathcal{C}_1^0 p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle &= 0, \\ \mathcal{C}_1^{-1} p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle &= 0, & \mathcal{C}_0^{-1} p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle &= 0, & \mathcal{C}_1^0 p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle &= 0, \end{aligned}$$

mientras que en el grupo $U(2)$,

$$C_{+}^{-} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle = 0, \quad C_{+}^{-} p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle = 0.$$

Utilizando las tablas (5.5) y (5.6) obtenemos las siguientes restricciones en los subíndices

$$m_1 = 0, \quad \sigma_1 = +, \quad \text{y} \quad m_2 = -1, \quad \sigma_2 = +.$$

Esto implica que los estados de máximo peso son

$$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger |0\rangle = |210, 21, 2; 21, 2\rangle, \quad (5.48a)$$

$$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle = |111, 11, 1; 30, 3\rangle, \quad (5.48b)$$

donde del lado derecho pueden identificarse con los estados de Gelfand-Tsetlin de máximo peso del producto directo $\mathcal{U}(3) \times U(2)$. El primer estado tiene las RI [210] en el grupo $\mathcal{U}(3)$ y {21} en el grupo $U(2)$, mientras que el segundo cuenta con [111] en $\mathcal{U}(3)$ y {30} de $U(2)$.

Antes de comenzar con la obtención de las bases, calculamos la dimensión, usando (3.101), esto es,

$$Dim([1^3]) = \frac{\prod_{i < j=2}^6 (P_{i6} - P_{j6})}{5!4!3!2!} = \frac{1 \ 6!5!4!2!}{6 \ 5!4!3!2!} = 20.$$

Utilizando los operadores de descenso de $\mathcal{U}(3)$ se obtienen los estados de máximo peso en el subgrupo $\mathcal{U}(2)$ y después se utiliza el operador de descenso del grupo $\mathcal{U}(2)$ para obtener la base para cada una de las RI de $\mathcal{U}(3)$.

	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0-}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_1^0	0	0	0	0
\mathcal{C}_1^{-1}	0	0	0	0
\mathcal{C}_0^{-1}	0	0	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_+^-	0	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger 0\rangle$	0	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger 0\rangle$
$(\omega_1 \omega_0 \omega_{-1})$	(210)	(210)	(201)	(201)
$(\omega_+ \omega_-)$	(21)	(12)	(21)	(12)

Tabla 5.5: Acción de los operadores de ascenso de los grupos $\mathcal{U}(3)$, $U(2)$, seguido del peso. Aquí ω_i denota el eigenvalor del operador de peso

RI [210] de $U(3)$

En esta ocasión la RI del grupo complementario es $\{21\}$, y el espín total y su proyección son $S = \frac{1}{2}$ y $M_S = \frac{1}{2}$, respectivamente. Actuando con los operadores \mathbb{L}_3^1 y \mathbb{L}_3^2 sobre el estado de peso máximo (5.48a), se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_3^1 |210, 21, 2\rangle &= |210, 11, 1\rangle, & (\mathbb{L}_3^1)^2 |210, 21, 2\rangle &= 0, \\
\mathbb{L}_3^2 |210, 21, 2\rangle &= |210, 20, 2\rangle, & (\mathbb{L}_3^2)^2 |210, 21, 2\rangle &= 0, \\
\mathbb{L}_3^1 \mathbb{L}_3^2 |210, 21, 2\rangle &= |210, 10, 1\rangle. & &
\end{aligned} \tag{5.49}$$

La acción del operador \mathbb{L}_2^1 sobre los estados de máximo peso en el grupo $U(2)$ da

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_2^1 |20, 2\rangle &= |20, 1\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^2 |20, 2\rangle &= |20, 0\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^3 |20, 2\rangle &= 0, \\
\mathbb{L}_2^1 |21, 2\rangle &= |21, 1\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^2 |21, 2\rangle &= 0, \\
\mathbb{L}_2^1 |10, 1\rangle &= |10, 0\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^2 |10, 1\rangle &= 0, \\
\mathbb{L}_2^1 |11, 1\rangle &= 0, & & & &
\end{aligned} \tag{5.50}$$

donde fue omitida la representación de $U(3)$. Utilizando (5.48a) junto con la forma explícita de los operadores de descenso (5.49) y (5.50), se tiene en forma decreciente

	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_1^0	0	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger 0\rangle$	0	0
\mathcal{C}_1^{-1}	0	0	0	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_0^{-1}	0	0	0	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_+^-	0	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger 0\rangle$	0	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger 0\rangle$
$(\omega_1 \omega_0 \omega_{-1})$	(210)	(120)	(111)	(111)
$(\omega_+ \omega_-)$	(21)	(12)	(30)	(21)

Tabla 5.6: Acción de los operadores de ascenso de los grupos $\mathcal{U}(3)$, $U(2)$, seguido del peso. Aquí ω_i denota el eigenvalor del operador de peso

en el valor del peso del estado:

$$\begin{aligned}
|210, 21, 2; 21, 2\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger |0\rangle, \\
|210, 20, 2; 21, 2\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\
|210, 21, 1; 21, 2\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{0+}^\dagger |0\rangle \\
|210, 11, 1; 21, 2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2p_{1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{0+}^\dagger + p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger) |0\rangle, \\
|210, 20, 1; 21, 2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger) |0\rangle, \\
|210, 10, 1; 21, 2\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\
|210, 20, 0; 21, 2\rangle &= p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\
|210, 10, 0; 21, 2\rangle &= p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle.
\end{aligned}$$

Calculando la acción de \hat{L}^2 sobre los estados anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}
L^2|210, 21, 2\rangle &= 6|210, 21, 2\rangle, \\
L^2|210, 20, 2\rangle &= 4|210, 20, 2\rangle + 2|210, 21, 1\rangle, \\
L^2|210, 21, 1\rangle &= 2|210, 20, 2\rangle + 4|210, 21, 1\rangle, \\
L^2|210, 11, 1\rangle &= 3|210, 11, 1\rangle + \sqrt{3}|210, 20, 1\rangle, \\
L^2|210, 20, 1\rangle &= \sqrt{3}|210, 11, 1\rangle + 5|210, 20, 1\rangle, \\
L^2|210, 10, 1\rangle &= 4|210, 10, 1\rangle + 2|210, 20, 0\rangle, \\
L^2|210, 20, 0\rangle &= 2|210, 10, 1\rangle + 4|210, 20, 0\rangle, \\
L^2|210, 10, 0\rangle &= 6|210, 10, 0\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto su representación matricial está dada por

$$L^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

Hay dos eigenestados con momento angular total $L = 2$; la proyección del momento angular del primero es $M_L = 2$, mientras que la del segundo es $M_L = -2$. Están dados por

$$|3; [210]2, 2; \{21\}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle = |210, 21, 2\rangle, \quad |3; [210]2, -2; \{21\}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle = |210, 10, 0\rangle.$$

El resto de la matriz se parte en tres bloques de dimensión 2×2 . Al diagonalizar el primer bloque se obtiene un eigenestado con momento angular $L = 2$ y otro con momento angular total $L = 1$, con proyección $M_L = 1$. Están dados por

$$\begin{aligned} |3; [210]2, 1; \{21\}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|210, 20, 2\rangle + |210, 21, 1\rangle), \\ |3; [210]1, 1; \{21\}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|210, 21, 1\rangle - |210, 20, 2\rangle). \end{aligned}$$

Diagonalizando el segundo bloque se obtienen dos eigenestados, uno con momento angular total $L = 2$ y el otro con $L = 1$; su proyección es $M_L = 0$. Están descritos por

$$\begin{aligned} |3; [210]2, 0; \{21\}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{2}(|210, 11, 1\rangle + \sqrt{3}|210, 20, 1\rangle), \\ |3; [210]1, 1; \{21\}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{2}(|210, 20, 1\rangle - \sqrt{3}|210, 11, 1\rangle). \end{aligned}$$

En el tercer bloque hay dos eigenestados, uno con momento angular total $L = 2$ y el otro con $L = 1$, su proyección es $M_L = -1$ y están dados por

$$\begin{aligned} |3; [210]2, -1; \{21\}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|210, 10, 1\rangle + |210, 20, 0\rangle), \\ |3; [210]1, -1; \{21\}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|210, 20, 0\rangle - |210, 10, 1\rangle). \end{aligned}$$

En resumen, la forma explícita de los eigenestados con momento angular orbital total $L = 2$ es

$$\begin{aligned}
|3; [210]22; \{21\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger |0\rangle, \\
|3; [210]21; \{21\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{0+}^\dagger) |0\rangle, \\
|3; [210]20; \{21\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{0+}^\dagger + p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger) |0\rangle, \\
|3; [210]2-1; \{21\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger + p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger) |0\rangle, \\
|3; [210]2-2; \{21\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle,
\end{aligned}$$

mientras que los estados que tienen momento angular orbital total $L = 1$ toman la forma

$$\begin{aligned}
|3; [210]11; \{21\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger - p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger) |0\rangle, \\
|3; [210]10; \{21\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0+}^\dagger - p_{1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{0+}^\dagger) |0\rangle, \\
|3; [210]1-1; \{21\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger - p_{1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger) |0\rangle.
\end{aligned}$$

En ambos casos, los estados se expresan en la base de momento angular (5.39). Actuando con \mathbb{L}_-^+ sobre los estados de las dos ecuaciones anteriores, obtenemos la base completa. Para $L = 2$ se tiene

$$\begin{aligned}
|3; [210]22; \{21\}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0-}^\dagger |0\rangle, \\
|3; [210]21; \{21\}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1-}^\dagger + p_{1-}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{0+}^\dagger) |0\rangle, \\
|3; [210]20; \{21\}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2p_{1-}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{0+}^\dagger + p_{1-}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle, \\
|3; [210]2-1; \{21\}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1-}^\dagger + p_{-1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger) |0\rangle, \\
|3; [210]2-2; \{21\}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\rangle &= p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle,
\end{aligned}$$

mientras que para $L = 1$,

$$\begin{aligned}
|3; [210]11; \{21\}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger - p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle, \\
|3; [210]10; \{21\}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0-}^\dagger - p_{1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{0-}^\dagger) |0\rangle, \\
|3; [210]1-1; \{21\}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1-}^\dagger - p_{1-}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger) |0\rangle,
\end{aligned}$$

de tal manera que la dimensión de la base correspondiente a las RI [210] de $\mathcal{U}(3)$ y $\{21\}$ de $\mathcal{U}(2)$ es 16.

RI [111] de $\mathcal{U}(3)$

La RI del grupo complementario es $\{30\}$, y el espín y su proyección son $S = \frac{3}{2}$ y $M_S = \frac{3}{2}$, respectivamente. La acción de los operadores de descenso de los grupos

$\mathcal{U}(3)$ sobre (5.48b) es cero, implicando que en la base canónica de $\mathcal{U}(3)$ el estado es único. De tal manera que debe tener momento angular $L = 0$. Al tomar la acción del operador \mathbb{L}_+ sobre el estado (5.48b), se obtienen los estados con proyección $M_S = -\frac{1}{2}$ y $M_S = -\frac{3}{2}$ en la parte de espín, esto es,

$$\begin{aligned} |3; [111]00, \{30\} \frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\ |3; [111]00, \{30\} \frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle, \\ |3; [111]00, \{30\} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (p_{1-}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger + p_{1-}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle, \\ |3; [111]00, \{30\} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle &= p_{1-}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle. \end{aligned}$$

Finalmente si se consideran los estados de las dos RI de $\mathcal{U}(3)$ contenidas en $\mathbf{U}(6)$ se observa que hay 20 estados.

4 electrones

Proponemos los estados siguientes

$$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle \quad \text{y} \quad p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle,$$

que se forman aplicando un operador fermiónico de creación a los estados de máximo peso del sistema de tres electrones, donde $m_1, m_2 = 1, 0, -1$, y $\sigma_1, \sigma_2 = +, -$, evitando la repetición de subíndices. Para que sean de máximo peso en el grupo $\mathcal{U}(3)$ deben cumplir

$$\begin{aligned} C_1^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle &= 0, & C_1^{-1} p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle &= 0, \\ C_0^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle &= 0, & C_0^{-1} p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle &= 0, \\ C_1^0 p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle &= 0, & C_1^0 p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle &= 0, \end{aligned}$$

mientras que para el grupo $U(2)$, se debe satisfacer que

$$C_+^- p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle = 0, \quad C_+^- p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle = 0.$$

Utilizando las tablas (5.7) y (5.8) obtenemos las condiciones sobre los subíndices:

$$m_1 = 0, \quad \sigma_1 = -, \quad \text{y} \quad m_2 = 1, \quad \sigma_2 = -,$$

implicando que los estados de máximo peso están dados por

$$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{0-}^\dagger |0\rangle = |220, 22, 2; 22, 2\rangle, \quad (5.52a)$$

$$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle = |211, 21, 2; 31, 3\rangle. \quad (5.52b)$$

	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_1^0	0	0	0
\mathcal{C}_1^{-1}	0	0	0
\mathcal{C}_0^{-1}	0	0	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_+^-	0	0	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger 0\rangle$
$(\omega_1 \omega_0 \omega_{-1})$	(220)	(211)	(211)
$(\omega_+ \omega_-)$	(22)	(31)	(22)

Tabla 5.7: Acción de los operadores de ascenso de los grupos $\mathcal{U}(3)$, $U(2)$, seguido del peso. Aquí ω_i denota el eigenvalor del operador de peso.

RI [220] de $\mathcal{U}(3)$

El espín total es $S = 0$ y su proyección $M_S = 0$. Actuando con los operadores \mathbb{L}_3^1 y \mathbb{L}_3^2 sobre el estado de peso máximo (5.52a), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_3^2 |220, 22, 2\rangle &= |220, 21, 2\rangle, & (\mathbb{L}_3^2)^2 |220, 22, 2\rangle &= |220, 20, 2\rangle, & (\mathbb{L}_3^2)^3 |220, 22, 2\rangle &= 0, \\ \mathbb{L}_3^1 |220, 22, 2\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Tomamos la acción del operador de descenso de $\mathcal{U}(2)$, encontrando

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_2^1 |20, 2\rangle &= |20, 1\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^2 |20, 2\rangle &= |20, 0\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^3 |20, 2\rangle &= 0, \\ \mathbb{L}_2^1 |21, 2\rangle &= |21, 1\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^2 |21, 1\rangle &= 0, \\ \mathbb{L}_2^1 |22, 2\rangle &= 0, \end{aligned}$$

donde omitimos la representación de $\mathcal{U}(3)$. La forma explícita de los estados de Gelfand-Tsetlin es

$$\begin{aligned} |220, 22, 2; 22, 2\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger |0\rangle, \\ |220, 21, 2; 22, 2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0-}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle, \\ |220, 20, 2; 22, 2\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle, \\ |220, 21, 1; 22, 2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0-}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle, \\ |220, 20, 1; 22, 2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle, \\ |220, 20, 0; 22, 2\rangle &= p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle. \end{aligned}$$

	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0-}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_1^0	0	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger 0\rangle$	0
\mathcal{C}_1^{-1}	0	0	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_0^{-1}	0	0	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_+^-	0	0	0
$(\omega_1 \omega_0 \omega_{-1})$	(211)	(121)	(112)
$(\omega_+ \omega_-)$	(31)	(31)	(31)

Tabla 5.8: Acción de los operadores de ascenso de los grupos $\mathcal{U}(3)$, $U(2)$, seguido del peso. Aquí ω_i denota el eigenvalor del operador de peso.

La acción de \hat{L}^2 sobre los estados anteriores da

$$\begin{aligned}
L^2|220, 22, 2\rangle &= 6|220, 22, 2\rangle, \\
L^2|220, 21, 2\rangle &= 6|22220, 21, 2\rangle, \\
L^2|220, 20, 2\rangle &= 4|220, 20, 2\rangle + 2\sqrt{2}|220, 21, 1\rangle, \\
L^2|220, 21, 1\rangle &= 2\sqrt{2}|220, 20, 2\rangle + 2|220, 21, 1\rangle, \\
L^2|220, 20, 1\rangle &= 6|220, 20, 1\rangle, \\
L^2|220, 20, 0\rangle &= 6|220, 20, 0\rangle,
\end{aligned}$$

que dan paso a la representación matricial del operador \hat{L}^2 :

$$L^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se observa que cuatro estados de la base canónica son diagonales con momento angular $L = 2$, y al calcular los eigenvalores de la parte no diagonal de la matriz encontramos dos eigenestados: uno con $L = 2$ y otro con $L = 0$. De tal manera que

los estados con $L = 2$ se escriben como

$$\begin{aligned}
|4; [220]22; \{22\}00\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger |0\rangle, \\
|4; [220]21; \{22\}00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0-}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle, \\
|4; [220]20; \{22\}00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger + p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0-}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle, \\
|4; [220]2-1; \{22\}00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle, \\
|4; [220]2-2; \{22\}00\rangle &= p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle,
\end{aligned}$$

mientras que el de momento angular total $L = 0$,

$$|4; [220]00; \{22\}00\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (p_{0+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0-}^\dagger + p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger - p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger) |0\rangle.$$

La dimensión de esta base es 6.

RI [211] de $\mathcal{U}(3)$

El espín total y la proyección de éste son $S = 1$ y $M_S = 1$, respectivamente. La acción de los operadores de descenso del grupo $\mathcal{U}(3)$ sobre (5.52b) da

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_3^1 |211, 21, 2\rangle &= |\bar{2}11, 11, 1\rangle, & (\mathbb{L}_3^1)^2 |211, 21, 2\rangle &= 0, \\
\mathbb{L}_3^2 |211, 211, 2\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Al tomar la acción de \mathbb{L}_2^1 sobre los estados de máximo peso del grupo $\mathcal{U}(2)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_2^1 |21, 2\rangle &= |21, 1\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^2 |21, 2\rangle &= 0, \\
\mathbb{L}_2^1 |11, 1\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

A continuación se da la forma explícita de los estados obtenidos

$$\begin{aligned}
|211, 21, 2; 31, 3\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger |0\rangle, \\
|211, 21, 1; 31, 3\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0-}^\dagger |0\rangle, \\
|211, 11, 1; 31, 3\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle.
\end{aligned}$$

La acción de \hat{L}^2 sobre los estados anteriores es

$$\begin{aligned}
\hat{L}^2 |211, 21, 2\rangle &= 2|211, 21, 2\rangle, \\
\hat{L}^2 |211, 21, 1\rangle &= 2|211, 21, 1\rangle, \\
\hat{L}^2 |211, 11, 1\rangle &= 2|211, 11, 1\rangle.
\end{aligned}$$

En la base canónica de $\mathcal{U}(3)$, la representación matricial de L^2 es diagonal con momento angular total $L = 1$ y sus eigenestados los denotamos como

$$\begin{aligned} |4; [211]11; \{31\}11\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger |0\rangle, \\ |4; [211]10; \{31\}11\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{0-}^\dagger |0\rangle, \\ |4; [211]1-1; \{31\}11\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle. \end{aligned}$$

La base completa se obtiene al actuar con \mathbb{L}_-^\dagger sobre estos estados.

Comparando con el sistema de dos electrones, se observa que tienen estructura similar, es decir, que tienen el mismo número de estados y que las particiones [200] y [220] tienen los mismos valores para el momento angular orbital total y espín total. Lo mismo sucede con [110] y [211], es decir, es equivalente a tener dos agujeros.

5 electrones

Para encontrar los estados que portan la RI tanto en el grupo $\mathcal{U}(3)$ como en $U(2)$, se proponen los estados

$$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle, \quad p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle,$$

que se forman por la aplicación de un operador fermiónico de creación a cada uno de los estados de máximo peso del sistema de 4 electrones en la capa p , donde $m_1 = -1$, $\sigma_1 = +, -$, y $m_2 = 0, -1$, $\sigma_2 = +, -$, con excepción de $(0, +)$.

Para que sean de máximo peso se les pide en el grupo $\mathcal{U}(3)$ que satisfagan

$$\begin{aligned} C_1^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle &= 0, & C_1^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle &= 0, \\ C_0^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle &= 0, & C_1^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle &= 0, \\ C_1^0 p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle &= 0, & C_1^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle &= 0, \end{aligned}$$

mientras que para el grupo $U(2)$, se debe satisfacer que

$$C_+^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle = 0, \quad C_+^{-1} p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle = 0.$$

Utilizando la tabla (5.9), podemos ver que el estado de máximo peso es

$$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle = |221, 22, 2; 32, 3\rangle, \quad (5.53)$$

que porta la RI [221] de $\mathcal{U}(3)$ y {32} de $U(2)$.

	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1-}^\dagger 0\rangle$	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_1^0	0	0	0
\mathcal{C}_1^{-1}	0	0	0
\mathcal{C}_0^{-1}	0	0	$p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{-1-}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_+^-	0	$p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger 0\rangle$	0
$(\omega_1 \omega_0 \omega_{-1})$ (221)	(221)	(221)	(212)
$(\omega_+ \omega_-)$ (32)	(32)	(23)	(32)

Tabla 5.9: Acción de los operadores de ascenso de los grupos $\mathcal{U}(3)$, $U(2)$, seguido del peso. Aquí ω_i denota el eigenvalor del operador de peso.

RI [221] de $\mathcal{U}(3)$

El espín total y su proyección son $S = \frac{1}{2}$ y $M_S = \frac{1}{2}$, respectivamente. Con la acción de \mathbb{L}_3^1 y \mathbb{L}_3^2 sobre (5.53) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_3^2 |221, 22, 2\rangle &= |221, 21, 2\rangle, & (\mathbb{L}_3^2)^2 |221, 22, 2\rangle &= 0, \\ \mathbb{L}_3^1 |221, 22, 2\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Actuando con \mathbb{L}_2^1 sobre los estados de máximo peso en el grupo $\mathcal{U}(2)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_2^1 |21, 2\rangle &= |21, 1\rangle, & (\mathbb{L}_2^1)^2 |21, 2\rangle &= 0, \\ \mathbb{L}_3^1 |22, 2\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Enseguida se da la forma explícita de los estados correspondientes con la RI de $\mathcal{U}(3)$:

$$\begin{aligned} |221, 22, 2; 32, 3\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle \\ |221, 21, 2; 32, 3\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\ |221, 21, 1; 32, 3\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \tag{5.54}$$

La acción de \hat{L}^2 sobre los estados anteriores da

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 |221, 22, 2\rangle &= 2|221, 22, 2\rangle, \\ \hat{L}^2 |221, 21, 2\rangle &= 2|221, 21, 2\rangle, \\ \hat{L}^2 |221, 21, 1\rangle &= 2|221, 21, 1\rangle, \end{aligned}$$

donde se infiere que la representación matricial de \hat{L}^2 es proporcional a la identidad, con momento angular orbital total $L = 1$.

Actuando con \mathbb{L}_+^- sobre (5.54) obtenemos la base completa de momento angular (5.39), que escribimos como

$$\begin{aligned} |5; [221]11, \{32\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\ |5; [221]11, \{32\}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle, \\ |5; [221]10, \{32\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\ |5; [221]10, \{32\}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\ |5; [221]1 - 1, \{32\}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle, \\ |5; [221]1 - 1, \{32\}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}\rangle &= p_{1+}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1-}^\dagger p_{-1+}^\dagger |0\rangle. \end{aligned}$$

Es de notar que tanto el número de estados como el valor del momento angular total de todo el sistema coincide con los que se tiene para un sistema de un electrón.

6 electrones

Finalmente consideramos el sistema de 6 electrones en la capa p, que se corresponde con la capa cerrada. Como no se deben repetir operadores fermiónicos de creación en la descripción del estado de máximo, la única posibilidad que se tiene es

$$|222, 22, 2; 33, 3\rangle = p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle.$$

Usando las reglas de ramificación para ambos grupos, o actuando directamente con los generadores de peso y ascenso, se puede mostrar que este estado es un escalar. El espín total del sistema es $S = 0$, y al tomar la acción de \hat{L}^2 sobre este estado es cero, es decir, que el momento angular total es $L = 0$ y su eigenestado es

$$|6; [222]00; \{33\}00\rangle = p_{1+}^\dagger p_{1-}^\dagger p_{0+}^\dagger p_{0-}^\dagger p_{-1+}^\dagger p_{-1-}^\dagger |0\rangle.$$

expresado en la base de momento angular (5.39). Es importante mencionar que los estados de máximo peso obtenidos también se pueden obtener usando la ecuación (3.58).

5.2.3. Sistema de electrones en la capa d

Ahora consideremos un sistema de electrones en la capa d. Cada electrón tiene momento angular $l_i = 2$. Al sustituir este valor en el término de interacción del hamiltoniano (5.14), puede verse que sólo los términos correspondientes con $l =$

0, 2, 4, contribuyen, esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & E_{n_2} \hat{N} + \frac{1}{2} F^0(n2222) \hat{N}(\hat{N} - 1) - \frac{1}{7} F^2(n2222) \hat{N} - \frac{1}{7} F^4(n2222) \hat{N} \\ & + \frac{2}{7} F^2(n2222) \sum_{m=-2}^2 (-)^m [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{m0}^{20} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-m0}^{20} \\ & + \frac{10}{63} F^4(n2222) \sum_{m=-4}^4 (-)^m [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{m0}^{40} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-m0}^{40}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Procediendo de la misma manera que en la capa p , se quiere clasificar los estados de la base mediante la cadena de grupos

$$\mathcal{U}(5) \supset SO(3) \supset SO(2),$$

esto es, se quiere tener bien definido el momento angular y su proyección. Sin embargo, encontramos que son necesarios mas números cuánticos para tener una base completa. La manera de resolver el problema consiste en utilizar un resultado general sobre la inclusión de los grupos ortogonales con determinante unidad de $2l+1$ dimensiones $SO(2l+1)$ en grupos unitarios $\mathcal{U}(2l+1)$ [14]. Este grupo especial ortogonal tiene $l(2l+1)$ generadores y contiene como subgrupo a $SO(3)$ con sus generadores \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_{-1} y \mathcal{L}_0 , componentes del momento angular orbital total. Tomando esto en cuenta se puede establecer el esquema de clasificación dado por la cadena de grupos

$$\mathcal{U}(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2). \quad (5.56)$$

El operador de Casimir de segundo orden del grupo $SO(2l+1)$ se define de forma análoga a la de los grupo unitarios:

$$\Phi(5) \equiv \frac{1}{2} \sum_{m_1, m_2} \Lambda_{m_1}^{m_2} \Lambda_{m_2}^{m_1} \quad \text{donde} \quad \Lambda_m^{m'} \equiv \mathcal{C}_m^{m'} - (-)^{m+m'} \mathcal{C}_{-m'}^{-m}. \quad (5.57)$$

Aquí las $\Lambda_m^{m'}$ con $m, m' = 2, 1, 0, -1, -2$ son los generadores del grupo $SO(2l+1)$. Estos generadores son antisimétricos, es decir, cumplen que $\Lambda_m^{-m} = 0$.

Es directo encontrar las relaciones de conmutación de los generadores del grupo $SO(2l+1)$; éstas son

$$[\Lambda_m^{m'}, \Lambda_{m''}^{m''}] = \frac{1}{2} \left\{ \Lambda_{mm''} g_{m''m'} + \Lambda_{m'm''} g_{m''m} + \Lambda_{m''m} g_{mm''} + \Lambda_{m''m} g_{m'm''} \right\}, \quad (5.58)$$

donde $g_{mm'} \equiv (-)^m \delta_{m, -m'}$ es la métrica. Estos generadores se pueden también clasificar de la forma siguiente

$$\begin{array}{lll} \Lambda_{m_1}^{m_2} & m_1 > |m_2|, & \text{generadores de ascenso,} \\ \Lambda_{m_1}^{m_1} & m_1 = 1, 2, \dots, l, & \text{generadores de peso,} \\ \Lambda_{m_1}^{m_2} & -m_2 < m_1 < m_2, & \text{generadores de descenso.} \end{array} \quad (5.59)$$

También se puede mostrar que existe un estado de máximo peso que porta la representación de los grupos y que satisface

$$\begin{aligned}\Lambda_{m_1}^{m_2} P|0\rangle &= 0, & m_1 &> |m_2|, \\ \Lambda_m^m P|0\rangle &= \omega_{l-m+1} P|0\rangle, & m &= 1, 2, \dots, l.\end{aligned}\quad (5.60)$$

A continuación se escriben los operadores de Casimir de ambos grupos en términos de operadores conocidos. Comencemos con el operador de Casimir del grupo $\mathcal{U}(5)$. Sustituyendo $l = 2$ en (H.8) y desarrollando el operador de Casimir toma la forma

$$\begin{aligned}\Gamma(5) &= \frac{1}{5} \hat{N}^2 + 2 \sum_{q=-1}^1 (-)^q [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{q0}^{10} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-q0}^{10} \\ &+ 2 \sum_{q=-2}^2 (-)^q [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{q0}^{20} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-q0}^{20} + 2 \sum_{q=-3}^3 (-)^q [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{q0}^{30} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-q0}^{30} \\ &+ 2 \sum_{q=-4}^4 (-)^q [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{q0}^{40} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-q0}^{40}.\end{aligned}\quad (5.61)$$

Haciendo lo mismo con el operador de Casimir del grupo $SO(5)$ se tiene

$$\Phi(5) = 4 \sum_{q=-1}^1 (-)^q [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{q0}^{10} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-q0}^{10} + 4 \sum_{q=-3}^3 (-)^q [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{q0}^{30} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-q0}^{30}.$$

Juntando las dos expresiones anteriores y despejando el último término de (5.61) se llega a que

$$\begin{aligned}2 \sum_{q=-4}^4 (-)^q [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{q0}^{40} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-q0}^{40} &= -2 \sum_{q=-2}^2 (-)^q [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{q0}^{20} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-q0}^{20} \\ &+ \Gamma(5) - \frac{1}{5} \hat{N}^2 - \frac{1}{2} \Phi(5).\end{aligned}\quad (5.62)$$

Reemplazando el resultado anterior en (5.55) y agrupando términos, el hamiltoniano se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= E_n \hat{N} + F^0(n2222) \frac{1}{2} \hat{N} (\hat{N} - 1) - \frac{1}{7} F^2(n2222) \hat{N} \\ &+ \frac{1}{7} F^4(n2222) \left\{ \frac{5}{9} \Gamma(5) - \frac{5}{18} \Phi(5) - \frac{1}{9} \hat{N}^2 - \hat{N} \right\} \\ &+ \frac{2}{7} \left\{ F^2(n2222) - \frac{5}{9} F^4(n2222) \right\} \sum_{q=-2}^2 (-)^q [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{q0}^{20} [b_{n_2}^\dagger \otimes b_{n_2}]_{-q0}^{20}.\end{aligned}\quad (5.63)$$

Observamos que \hat{N} , $\Gamma(5)$ y $\Phi(5)$ son operadores diagonales en la cadena (5.56), cuyos eigenvalores son N , $\gamma(5)$ dada en (5.34) y $\phi(5)$ que encontramos a continuación.

Se desarrolla la expresión (5.57), y se usa la antisimetría de los generadores del grupo, para encontrar

$$\begin{aligned} \Phi(5) = & (\Lambda_2^2)^2 + (\Lambda_1^1)^2 + \Lambda_2^1 \Lambda_1^2 + \Lambda_1^2 \Lambda_2^1 + \Lambda_2^0 \Lambda_0^2 + \Lambda_0^2 \Lambda_2^0 + \Lambda_1^0 \Lambda_0^1 + \Lambda_0^1 \Lambda_1^0 + \Lambda_2^{-1} \Lambda_{-1}^2 \\ & + \Lambda_{-1}^2 \Lambda_2^{-1}. \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones de conmutación (5.58), la ecuación anterior se escribe

$$\Phi(5) = \Lambda_2^2(\Lambda_2^2 + 3) + \Lambda_1^1(\Lambda_1^1 + 1) + 2(\Lambda_1^2 \Lambda_2^1 + \Lambda_0^2 \Lambda_2^0 + \Lambda_0^1 \Lambda_1^0 + \Lambda_{-1}^2 \Lambda_2^{-1}).$$

En el tercer término aparecen del lado derecho generadores de ascenso, que al actuar sobre una base de máximo peso para el grupo $SO(5)$, se cancela. Por lo tanto en la base $SO(5) \supset SO(4) \supset SO(3)$ se tiene que el eigenvalor está dado por

$$\phi(5) = \omega_2(\omega_2 + 3) + \omega_1(\omega_1 + 1),$$

donde ω_2 , ω_1 son los eigenvalores de los generadores de peso Λ_2^2 y Λ_1^1 actuando sobre el estado de máximo peso. Además las etiquetas satisfacen que $\omega_2 \geq \omega_1 \geq 0$ y $\omega_2 \leq h_{1,5} \leq 2$, expresiones que constituyen las reglas de ramificación de la cadena $\mathcal{U}(5) \supset SO(5)$. Con este par de condiciones y la expresión anterior se construye la tabla (5.10). Por otra parte, el operador $\Phi(5)$ no es diagonal en la base canónica del

ω_2	ω_1	$\phi(5)$
0	0	0
1	0	4
	1	6
2	0	10
	1	12
	2	16

Tabla 5.10: Eigenvalor del operador de Casimir de segundo orden $\phi(5)$ en función de ω_1 , ω_2

grupo $\mathcal{U}(5)$; entonces es necesario tener su representación matricial para obtener los eigenvalores.

El número de electrones que se pueden tener en esta capa van desde 1 hasta 10. A continuación construimos los estados de máximo peso para cada uno de estos sistemas. Sólo se hará énfasis en el de dos electrones representado por la partición [2], mostrando cómo a partir del estado de máximo se obtiene la base utilizando los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky [9].

1 electrón

Un estado arbitrario para un sistema de un electrón en la capa d , lo podemos expresar como

$$d_{m\sigma}^\dagger|0\rangle. \quad (5.64)$$

Aquí el operador fermiónico de creación $d_{m\sigma}^\dagger$ denota a un electrón en la capa d con proyección del momento angular m y de espín σ , donde $m = 2, 1, 0, -1, -2$, y $\sigma = +, -$.

La acción de un generador arbitrario $C_\mu^{\mu'}$ de $\mathcal{U}(5)$ y $C_s^{s'}$ de $U(2)$ sobre el estado (5.64) están dados por

$$C_\mu^{\mu'} d_{m\sigma}^\dagger|0\rangle = \delta_m^{\mu'} d_{\mu\sigma}^\dagger|0\rangle, \quad C_s^{s'} d_{m\sigma}^\dagger|0\rangle = \delta_\sigma^{s'} d_{ms}^\dagger|0\rangle. \quad (5.65)$$

Con este par de ecuaciones, se muestra que $d_{2+}^\dagger|0\rangle$ es el estado de máximo peso al que le hemos asociado el estado de Gelfand-Tsetlin

$$d_{2+}^\dagger|0\rangle = |10000, 1000, 100, 10, 1; 10, 1\rangle. \quad (5.66)$$

Este estado porta la RI de las particiones [10] en el grupo $\mathcal{U}(5)$ y $\{10\}$ en $U(2)$, y por supuesto que el espín total es $S = \frac{1}{2}$.

De acuerdo con (3.102) y las reglas de ramificación, los únicos estados que se pueden construir son

$$\begin{aligned} L_5^1|10000, 1000, 100, 10, 1\rangle &= |10000, 0000, 000, 00, 0\rangle, \\ L_4^1|10000, 1000, 100, 10, 1\rangle &= |10000, 1000, 000, 00, 0\rangle, \\ L_3^1|10000, 1000, 100, 10, 1\rangle &= |10000, 1000, 100, 00, 0\rangle, \\ L_2^1|10000, 1000, 100, 10, 1\rangle &= |10000, 1000, 100, 10, 0\rangle, \end{aligned}$$

donde sólo escribimos la parte de $\mathcal{U}(5)$. Para obtener la base completa se toma la acción del operador L_+^- sobre los estados anteriores, por lo que la dimensión es 10 .

En esta parte, se utiliza un programa en Mathematica para encontrar las representaciones matriciales de los operadores que conforman al hamiltoniano. Para un

electrón los operadores son diagonales y a continuación se escriben los eigenvalores de cada uno de ellos:

$$\phi(5) = 4, \quad L = 2.$$

Tomando en cuenta la tabla (5.10), se observa que la RI del grupo $SO(5)$ asociada con este eigenvalor es $(1, 0)$ la cual contiene a su vez al momento angular $L = 2$. Por otro lado se encuentra que la representación matricial del último término del hamiltoniano es diagonal, es decir,

$$\sum_{q=-2}^2 (-)^q [b_{n2}^\dagger \otimes b_{n2}]_{q0}^{20} [b_{n2}^\dagger \otimes b_{n2}]_{-q0}^{20} = \frac{1}{2} \mathbb{I} \quad (5.67)$$

Reemplazando este resultado en (5.63) e introduciendo los eigenvalores de los operadores del hamiltoniano, podemos ver cómo la energía se reduce al valor de partícula independiente, es decir, el espectro energía toma la forma

$$E(Z, n) = -\frac{Z^2}{n^2},$$

en donde se ha utilizado al Rydberg como unidad.

2 electrones

Siguiendo el método empleado en la capa p , primero se construyen los estados de máximo peso para el sistema de dos electrones en la capa d .

Consideremos el par de operadores fermiónicos de creación d_{2+}^\dagger , $d_{m\sigma}^\dagger$. El primero representa el estado de máximo peso del sistema anterior, mientras que el segundo denota a un electrón con proyección del momento angular m y de espín σ . Tomando el producto y actuando sobre el vacío se forma el estado

$$d_{2+}^\dagger d_{m\sigma}^\dagger |0\rangle, \quad (5.68)$$

donde $m = 2, 1, 0, -1, -2$, y $\sigma = +, -$, con excepción de $m = 2$ y $\sigma = +$; en tal caso se repetiría el operador fermiónico de creación y dada la naturaleza de las partículas se tendría un estado nulo, hecho que concuerda con el principio de exclusión de Pauli.

Como queremos que sea de máximo peso y por ende porte la RI de los grupos, se le pide al estado construido (5.68), que satisfaga las ecuaciones (3.37a) y (3.37b), es decir, que la acción de los generadores de ascenso de ambos grupos sobre este estado sea cero y así ser de peso máximo.

Aprovechando que el grupo $U(2)$ tiene un solo generador de ascenso, tomamos la acción de este sobre el estado (5.68), es decir,

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{m\sigma}^\dagger |0\rangle = \delta_\sigma^- d_{2+}^\dagger d_{m+}^\dagger |0\rangle.$$

Para que la ecuación anterior se haga cero y satisfaga una de las condiciones antes mencionadas, debe suceder que $\sigma = -$ o que $\sigma = +$. El primer caso implica que $m = 2$; con esto se tiene un estado de máximo peso en $U(2)$ con partición $\{11\}$; es fácil mostrar que también lo es en el grupo $\mathcal{U}(5)$ con la partición $[20]$, y que denotamos como

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger |0\rangle = |20000, 2000, 200, 20, 2; 11, 1\rangle. \quad (5.69)$$

De acuerdo con (5.42), el espín total del sistema es $S = 0$. En el segundo caso, se construye la tabla (5.11), donde se muestra la acción de los generadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{m+}^\dagger |0\rangle$ con $m = 1, 0, -1, -2$. Al observar dicha

	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{-2+}^\dagger 0\rangle$
C_1^0	0	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger 0\rangle$	0	0
C_1^{-1}	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger 0\rangle$	0
C_1^{-2}	0	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger 0\rangle$
C_0^{-1}	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$	0
C_0^{-2}	0	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$
C_{-1}^{-2}	0	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$

Tabla 5.11: Acción de los operadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{m+}^\dagger |0\rangle$ con $m = 1, 0, -1, -2$. Como la acción de los generadores C_2^μ con $-2 \leq \mu \leq 1$ sobre estos estados es cero, se han omitido en la tabla.

tabla se puede decir que el estado que satisface las condiciones para ser de peso máximo en ambos grupos, es el que tiene las particiones $[11]$, $\{20\}$ en los grupos $\mathcal{U}(5)$ y $U(2)$ respectivamente, y lo expresamos como

$$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger |0\rangle = |11000, 1100, 110, 11, 1; 20, 2\rangle. \quad (5.70)$$

En este caso, nuevamente de (5.42) el espín total es $S = 1$. En la obtención de la base se utilizarán los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky, considerando

cada partición por separado.

RI [2] de $\mathcal{U}(5)$

Primero actuamos con los operadores de descenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre el estado representado por la partición en cuestión, obteniendo

$$\begin{aligned} L_5^1 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 1000, 100, 10, 1\rangle, \\ (L_5^1)^2 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 0000, 000, 00, 0\rangle. \end{aligned} \quad (5.71)$$

La acción de los operadores L_5^2, L_5^3, L_5^4 , sobre el estado de máximo peso es cero, por lo que el conjunto de estados de máximo peso del subgrupo está formado por los estados obtenidos en la ecuación anterior, junto con el de máximo peso del grupo $\mathcal{U}(5)$.

Ahora consideremos la acción de los operadores L_4^1, L_4^2 y L_4^3 , sobre los estados de máximo peso del grupo $\mathcal{U}(4)$. Procediendo de esta forma encontramos

$$\begin{aligned} L_4^1 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 2000, 100, 10, 1\rangle, \\ (L_4^1)^2 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 2000, 000, 00, 0\rangle, \\ L_4^1 L_5^1 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 1000, 000, 00, 0\rangle. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Las demás combinaciones de acciones de operadores sobre los estados son cero, por lo que el conjunto de estados de máximo peso del grupo $\mathcal{U}(3)$ viene dado por los estados que aparecen en las ecuaciones (5.71) y (5.72).

En el siguiente paso, se toma la acción de los operadores L_3^1 y L_3^2 sobre los estados de máximo peso del grupo $\mathcal{U}(3)$, hallándose

$$\begin{aligned} L_3^1 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 2000, 200, 10, 1\rangle, \\ (L_3^1)^2 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 2000, 200, 00, 0\rangle, \\ L_3^1 L_4^1 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 2000, 100, 00, 0\rangle, \\ L_3^1 L_5^1 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 1000, 100, 00, 0\rangle. \end{aligned} \quad (5.73)$$

El operador L_3^2 no contribuye con la generación de estados, por lo que los estados de máximo peso del grupo $\mathcal{U}(2)$ están dados por los estados que aparecen en la ecuación anterior junto con los estados de máximo peso del grupo $\mathcal{U}(3)$.

Finalmente se toma la acción del operador L_2^1 sobre los estados de máximo peso del grupo $\mathcal{U}(2)$, obteniendo

$$\begin{aligned} L_2^1 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 2000, 200, 20, 1\rangle, \\ (L_2^1)^2 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 2000, 200, 20, 0\rangle, \\ L_2^1 L_3^1 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 2000, 200, 10, 0\rangle, \\ L_2^1 L_4^1 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 2000, 100, 10, 0\rangle, \\ L_2^1 L_5^1 |20000, 2000, 200, 20, 2\rangle &= |20000, 1000, 100, 10, 0\rangle. \end{aligned} \quad (5.74)$$

La base correspondiente a esta partición está determinada por los estados que aparecen en las ecuaciones (5.71) a (5.74), junto con (5.69), dando un total de 15, número que concuerda con la fórmula de las dimensiones de Weyl.

De forma análoga se obtienen las bases para las demás particiones de N .

Con respecto a esta base se construye la representación matricial de los operadores $\Gamma(5)$, $\Phi(5)$ y L^2 ; en los dos últimos fue necesario diagonalizar los operadores, dando los siguientes eigenvalores:

$$\phi(5) = 0, 10, \quad L = 0, 2, 4.$$

Veamos cuáles representaciones irreducibles (ω_2, ω_1) del grupo $SO(5)$ están relacionadas con cada eigenvalor del operador de Casimir de segundo orden de este grupo. Utilizando la tabla (5.10) podemos decir que la partición [2] de $\mathcal{U}(5)$ contiene a las particiones $(0, 0)$ y $(2, 0)$ de $SO(5)$; la primera a su vez con el eigenvalor 0 y la segunda con el eigenvalor 10.

De acuerdo con Hamermesh [14], la representación $(0, 0)$ contiene al momento angular $L = 0$, mientras que $(2, 0)$ contiene a los momentos angulares $L = 2, 4$.

RI [11] de $\mathcal{U}(5)$

Usando el mismo procedimiento, tenemos que

$$\begin{aligned} L_5^2 |11000, 1100, 110, 11, 1\rangle &= |11000, 1000, 100, 10, 1\rangle, \\ L_4^2 |11000, 1100, 110, 11, 1\rangle &= |11000, 1100, 100, 10, 1\rangle, \\ L_4^1 L_5^2 |11000, 1100, 110, 11, 1\rangle &= |11000, 1000, 000, 00, 0\rangle, \\ L_3^2 |11000, 1100, 110, 11, 1\rangle &= |11000, 1100, 110, 10, 1\rangle, \\ L_3^1 L_5^2 |11000, 1100, 110, 11, 1\rangle &= |11000, 1000, 100, 00, 0\rangle, \\ L_3^1 L_4^2 |11000, 1100, 110, 11, 1\rangle &= |11000, 1100, 100, 00, 0\rangle, \\ L_2^1 L_5^2 |11000, 1100, 110, 11, 1\rangle &= |11000, 1000, 100, 10, 0\rangle, \\ L_2^1 L_4^2 |11000, 1100, 110, 11, 1\rangle &= |11000, 1100, 100, 10, 0\rangle, \\ L_2^1 L_3^2 |11000, 1100, 110, 11, 1\rangle &= |11000, 1100, 110, 10, 0\rangle. \end{aligned} \quad (5.75)$$

La base correspondiente a esta partición tiene dimensión 10, a partir de la cual se obtiene la representación matricial de los operadores de Casimir de segundo orden de los grupos $SO(5)$ y $SO(3)$. Dado que no son diagonales se calculan sus eigenvalores, obteniendo

$$\phi(5) = 6, \quad L = 1, 3.$$

$U^{(10)}$ N	$U^{(5)}$ $[h_{15}h_{25}h_{35}h_{45}h_{55}]$	$SO(5)$ (ω_2, ω_1)	$SO(3)$ L
2	[20000]	(0, 0)	0
		(2, 0)	2, 4
	[11000]	(1, 1)	1, 3

Tabla 5.12: En la tabla se muestra como están relacionadas las representaciones irreducibles de los grupos $U(5)$, $SO(5)$ y $SO(3)$ para un sistema de 2 electrones.

Usando (5.10) se muestra que la RI [11] de $U(5)$ contiene la RI (1, 1) de $SO(5)$ y ésta contiene a los momentos angulares $L = 1, 3$.

En resumen se tiene la siguiente tabla, donde se muestran las reglas de ramificación para un sistema de dos electrones en la capa d , caracterizado por la cadena de grupos (5.56).

3 electrones

A partir de los estados de máximo peso del sistema anterior, se construyen estados de tres electrones, pidiendo después que satisfagan las ecuaciones (3.37a) y (3.37b), con el propósito de ser de máximo peso.

Para realizar esta tarea añadimos un operador fermiónico de creación a los estados (5.69) y (5.70), esto es,

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{m_1, \sigma_1}^\dagger |0\rangle, \quad d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{m_2, \sigma_2}^\dagger |0\rangle, \quad (5.76)$$

donde $m_1, m_2 = 1, 0, -1, -2$; y $\sigma_1, \sigma_2 = +, -$. Tomando la acción del operador de ascenso del grupo C_+^- sobre el primer estado de (5.76) se tiene que

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{m_1, \sigma_1}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_1}^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{m_1+}^\dagger |0\rangle. \quad (5.77)$$

La única manera de que la ecuación anterior sea igual a cero es que se tome $\sigma_1 = +$; esto garantiza que el estado sea de máximo en el grupo $U(2)$. Para obtener el estado de máximo en el grupo complementario, se construye la tabla (5.13) donde se muestra la acción de los operadores de ascenso del grupo $U(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{m_1+}^\dagger |0\rangle$ con $m_1 = 1, 0, -1, -2$. En dicha tabla se observa que el estado al que se denota como

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger |0\rangle = |21000, 2100, 21, 2; 21, 2\rangle, \quad (5.78)$$

	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{-2+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_1^0	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger 0\rangle$	0	0
\mathcal{C}_1^{-1}	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger 0\rangle$	0
\mathcal{C}_1^{-2}	0	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_0^{-1}	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$	0
\mathcal{C}_0^{-2}	0	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_{-1}^{-2}	0	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$

Tabla 5.13: Acción de los operadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{m_1+}^\dagger |0\rangle$ con $m_1 = 1, 0, -1, -2$. La acción de los generadores \mathcal{C}_2^μ con $-2 \leq \mu \leq 1$ sobre estos estados es cero por lo que se han omitido de la tabla.

es el de máximo peso, que porta las RI's [21] y {21} en los grupos $\mathcal{U}(5)$ y $U(2)$, respectivamente; además tiene espín total $S = \frac{1}{2}$.

Procediendo de forma análoga tomamos la acción del operador \mathcal{C}_+^- sobre el segundo estado que aparece en (5.76), resultando

$$\mathcal{C}_+^- d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{m_2\sigma_2}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_2}^- d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{m_2+}^\dagger |0\rangle.$$

La única forma de que la ecuación anterior se haga cero es tomando $\sigma_2 = +$. Construyendo la tabla (5.14) similar a la anterior podemos ver que el estado con la RI's

	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_0^{-1}	0	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$	0
\mathcal{C}_0^{-2}	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_{-1}^{-2}	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$

Tabla 5.14: Acción de los operadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{m_2+}^\dagger |0\rangle$ con $m_2 = 0, -1, -2$. La acción de los generadores \mathcal{C}_2^μ y $\mathcal{C}_1^{\mu'}$ con $-2 \leq \mu \leq 1$ y $-2 \leq \mu' \leq 0$ sobre estos estados da cero, por lo que se han omitido en la tabla

[111] de $\mathcal{U}(5)$ y {30} en el grupo complementario, es

$$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger |0\rangle = |11100, 1110, 111, 11, 1; 30, 3\rangle, \quad (5.79)$$

el cual tiene peso máximo con espín total $S = \frac{3}{2}$.

En lo que resta de la discusión se omite la obtención de la base mediante los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky. Este procedimiento se ilustró con detalle para la RI [20].

En vez de esto se hará mención de los eigenvalores de los operadores $\Gamma(5)$, $\Phi(5)$, L^2 y la relación que existe entre las representaciones irreducibles del grupo $SO(5)$ y los momentos angulares.

RI [21] de $\mathcal{U}(5)$

La representación matricial del operador $\Gamma(5)$ construida con la base canónica es diagonal. El eigenvalor de este operador se obtiene haciendo uso de la ecuación (5.34) con $N = 3$, $l = 2$ y el espín correspondiente, por lo que en este caso el eigenvalor es 15.

Para la obtención de los eigenvalores de los otros dos operadores, es necesario diagonalizar las respectivas representaciones matriciales; al calcular sus eigenvalores se obtuvieron los resultados

$$\phi(5) = 4, 12, \quad L = 1, 2, 2, 3, 4, 5.$$

Por medio de la tabla (5.10) se puede decir que la partición de $SO(5)$ relacionada con el eigenvalor $\phi(5) = 4$ es $(1, 0)$, mientras que la relacionada con $\phi(5) = 12$ es $(2, 1)$.

Conforme a [14], la primer partición de $SO(5)$ contiene al momento angular $L = 2$, en tanto que la segunda contiene a los momentos angulares $L = 1, 2, 3, 4, 5$.

En este caso la partición [21] de $\mathcal{U}(5)$ contiene a las particiones $(1, 0)$ y $(2, 1)$ de $SO(5)$, que a su vez contienen a los momentos angulares $L = 2$ y $L = 1, 2, 3, 4, 5$, respectivamente.

RI [111] de $\mathcal{U}(5)$

La representación matricial de los operadores $\Gamma(5)$ y $\Phi(5)$ son diagonales, con los eigenvalores

$$\gamma(5) = 9, \quad \phi(5) = 6;$$

mientras que al diagonalizar a L^2 se obtienen los siguientes valores del momento angular total

$$L = 1, 3.$$

Al eigenvalor del operador $\Phi(5)$ le corresponde la representación $(1, 1)$ en el grupo $SO(5)$, la cual está asociada con los momentos angulares $L = 1, 3$.

$U(10)$ N	$U(5)$ $[h_{15}h_{25}h_{35}h_{45}h_{55}]$	$SO(5)$ (ω_2, ω_1)	$SO(3)$ L
3	[21000]	(1, 0)	2
		(2, 1)	1, 2, 3, 4, 5
	[11100]	(1, 1)	1, 3

Tabla 5.15: En la tabla se muestra cómo están relacionadas las representaciones irreducibles de los grupos $U(5)$, $SO(5)$ y $SO(3)$ para un sistema de 3 electrones.

En resumen, se da la tabla (5.2.3).

4 electrones

En la construcción de los estados de máximo peso del sistema de cuatro electrones en la capa d , se agrega un operador fermiónico de creación a cada uno de los estados (5.78) y (5.79), obteniendo

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{m_1\sigma_1}^\dagger |0\rangle, \quad d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{m_2\sigma_2}^\dagger |0\rangle, \quad (5.80)$$

donde $m_1, m_2 = 1, 0, -1, -2$; $\sigma_1, \sigma_2 = +, -$ teniendo cuidado de no repetir parejas de índices. Como se requiere que sean de peso máximo, pedimos que la acción de los generadores de ascenso de los grupos $U(5)$ y $U(2)$ sobre los estados (5.80) den cero.

Al tomar la acción del operador C_+^- sobre el primer estado de (5.80) e igualar a cero se tiene que

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{m_1\sigma_1}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_1}^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{m_1+}^\dagger |0\rangle = 0.$$

La ecuación anterior se satisface en dos casos. En el primero $\sigma_1 = -$, lo que obliga a escoger $m_1 = 1$; de esta manera se obtiene que el estado $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger |0\rangle$ es de máximo peso en $U(2)$ con partición $\{22\}$. Es fácil mostrar que también lo es de $U(5)$ y porta la RI [22] y lo denotamos por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger |0\rangle = |22000, 2200, 220, 22, 2; 22, 2\rangle, \quad (5.81)$$

donde de la RI del grupo $U(2)$ y (5.42), se deduce que el espín total es $S = 0$.

En el segundo caso se tiene que $\sigma_1 = +$. Tomando este hecho en cuenta se construye la tabla (5.16), donde se muestra la acción de los generadores de ascenso del grupo $U(5)$. Se aprecia que el estado asociado con las particiones [211] de $U(5)$ y $\{32\}$ del grupo complementario se escribe

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger |0\rangle = |21100, 2110, 211, 21, 2; 31, 3\rangle. \quad (5.82)$$

	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_0^{-1}	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$	0
\mathcal{C}_0^{-2}	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_{-1}^{-2}	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$

Tabla 5.16: Acción de los operadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{m+}^\dagger |0\rangle$ con $m = 0, -1, -2$. La acción de los operadores \mathcal{C}_2^μ con $\mu = 1, 0, -1, -2$ y $\mathcal{C}_1^{\mu'}$ con $\mu' = 0, -1, -2$, sobre estos estados da cero por lo que se omitieron.

De acuerdo con (5.42), se sabe que el espín total es $S = 1$.

Por otro lado tenemos la acción del generador de descenso del grupo $U(2)$ sobre el segundo estado de (5.80). Después de igualar a cero se tiene que

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{m_2, \sigma_2}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_2}^- d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{m_2+}^\dagger |0\rangle = 0.$$

La única manera de que se cumpla lo anterior es tomando $\sigma = +$, garantizando que es de máximo peso en $U(2)$. Considerando lo anterior se construye la tabla (5.17) que sirve para obtener el estado de máximo peso en ambos grupos. Se observa que

	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-2+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_0^{-1}	0	0
\mathcal{C}_0^{-2}	0	0
\mathcal{C}_{-1}^{-2}	0	$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$

Tabla 5.17: Acción de los operadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{m+}^\dagger |0\rangle$ con $m = -1, -2$. La acción de los operadores \mathcal{C}_2^μ con $\mu = 1, 0, -1, -2$ y $\mathcal{C}_1^{\mu'}$ con $\mu' = 0, -1, -2$, sobre estos estados da cero por lo que se omitieron.

el estado que porta la RI [11110] de $\mathcal{U}(5)$ y $\{40\}$ de $U(2)$, se denota

$$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger |0\rangle = |11110, 1111, 111, 11, 1; 40, 4\rangle. \quad (5.83)$$

Por medio de (5.42) se tiene que el espín total es $S = 2$.

Para cada una de las particiones anteriores, obtenemos las bases respectivas mediante el uso de los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky. Cabe mencionar que la dimensión de la primer partición es de 75 estados, la de la segunda es de 45 y de la última es 5, formando un total de 100 estados posibles para un sistema de cuatro electrones en la capa d .

RI [22] de $\mathcal{U}(5)$

Como se ha utilizado la base canónica de $\mathcal{U}(5)$, la representación matricial del operador $\Gamma(5)$ es diagonal con eigenvalor 20, no así la de $\Phi(5)$ y L^2 .

Al calcular los eigenvalores de los operadores que no son diagonales, se tienen los resultados

$$\phi = 0, 10, 16, \quad L = 0, 0, 2, 2, 3, 4, 4, 6.$$

La representación irreducible del grupo $SO(5)$ asociada con cada uno de los eigenvalores del operador de Casimir de segundo orden la obtenemos utilizando (5.10). De esta manera tenemos que la partición [22] de $\mathcal{U}(5)$ contiene las particiones $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(2, 2)$ del grupo $SO(5)$.

La partición $(0, 0)$ está relacionada con el eigenvalor $\phi(5) = 0$, y le corresponde el momento angular $L = 0$, mientras que $(2, 0)$ tiene el eigenvalor $\phi(5) = 10$ que contiene los momentos angulares $L = 2, 4$; y por último a la partición $(2, 2)$ le corresponde el eigenvalor $\phi(5) = 16$, y contiene los momentos angulares $L = 0, 2, 3, 4, 6$.

RI [211] de $\mathcal{U}(5)$

La representación matricial del operador $\Gamma(5)$ en esta base es diagonal con eigenvalor 16.

Al diagonalizar a los operadores $\Phi(5)$ y L^2 , se obtienen los siguientes resultados:

$$\phi(5) = 6, 12, \quad L = 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5.$$

A partir de los eigenvalores de $\Phi(5)$ y utilizando (5.10), se deduce que [211] contiene a las representaciones irreducibles $(1, 1)$, $(2, 1)$ del grupo $SO(5)$, y de acuerdo con [14], la primera está relacionada con los momentos angulares $L = 1, 3$, mientras que la segunda con $L = 1, 2, 3, 4, 5$. De esta forma se evita la degeneración de estados etiquetados con la misma L .

RI [1111] de $\mathcal{U}(5)$

Para esta partición los operadores son diagonales. De hecho el hamiltoniano también lo es. Los eigenvalores de los operadores son

$$\gamma(5) = 8, \quad \phi(5) = 4, \quad L = 2.$$

La representación irreducible del grupo $SO(5)$ es $(1, 0)$ que tiene asociada el momento angular $L = 2$.

A modo de resumen presentamos la tabla (5.18).

$U(10)$ N	$\mathcal{U}(5)$ $[h_{15}h_{25}h_{35}h_{45}h_{55}]$	$SO(5)$ (ω_2, ω_1)	$SO(3)$ L
4	[22000]	(0, 0)	0
		(2, 0)	2, 4,
		(2, 2)	0, 2, 3, 4, 6
	[21100]	(1, 1)	1, 3
		(2, 1)	1, 2, 3, 4, 5
	[11110]	(1, 0)	2

Tabla 5.18: En la tabla se muestra cómo están relacionadas las representaciones irreducibles de los grupos $\mathcal{U}(5)$, $SO(5)$ y $SO(3)$ para un sistema de 4 electrones.

5 electrones

La obtención de los estados de máximo peso para cinco electrones en la capa d se realiza de la manera siguiente. Primero se añade un operador fermiónico de creación a cada una de las expresiones (5.81), (5.82) y (5.83), obteniéndose

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{m_1\sigma_1}^\dagger |0\rangle, \quad d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{m_2\sigma_2}^\dagger |0\rangle, \quad d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{m_3\sigma_3}^\dagger |0\rangle, \quad (5.84)$$

donde $m_1 = 0, -1, -2$, $\sigma_1 = +, -$; $m_2 = -1, -2$, $\sigma_2 = +, -$, y $m_3 = 1, 0$, $\sigma_3 = -$; $m_3 = -2$, $\sigma_3 = +, -$, y $m_3 = 2, 1, 0, -1$, $\sigma_3 = -$.

El paso siguiente consiste en tomar la acción de los generadores de ascenso tanto de $\mathcal{U}(5)$ como de $U(2)$, y después pedir que dicha acción valga cero.

Como el grupo $U(2)$ tiene un solo generador de ascenso, actuamos primero con éste sobre los estados de (5.84). Comenzamos con

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{m_1\sigma_1}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_1}^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{m_1+}^\dagger |0\rangle.$$

Para que esta ecuación se haga cero, el estado debe ser de máximo peso y debemos tomar $\sigma_1 = +$. Este resultado permite construir la tabla (5.19) en donde se muestra la acción de los generadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$, y se observa que el estado

	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{-2+}^\dagger 0\rangle$
C_0^{-1}	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$	0
C_0^{-2}	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger 0\rangle$
C_{-1}^{-2}	0	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$

Tabla 5.19: Acción de los operadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{m_1+}^\dagger |0\rangle$ con $m = 0, -1, -2$. La acción de los operadores C_2^μ con $\mu = 1, 0, -1, -2$ y $C_1^{\mu'}$ con $\mu' = 0, -1, -2$, sobre estos estados da cero, por lo que se han omitido en la tabla

que porta las RI's [221] de $\mathcal{U}(5)$ y {32} de $U(2)$ se denota por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger |0\rangle = |22100, 2210, 221, 22, 2; 3, 2, 3\rangle. \quad (5.85)$$

De acuerdo con (5.42), tiene espín total $S = \frac{1}{2}$.

La acción del generador C_+^- sobre el segundo estado de la expresión (5.84) da

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{m_2\sigma_2}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_2}^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{m_2+}^\dagger |0\rangle.$$

Para que la ecuación anterior sea cero, debe satisfacerse que $\sigma_2 = -$, de tal manera que $m_2 = 1, 0$, o $\sigma_2 = +$. En el primer caso se tienen los estados

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{1-}^\dagger |0\rangle, \quad d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger |0\rangle.$$

Anticonmutando los dos últimos operadores fermiónicos de creación en el primer término de la ecuación anterior, se obtiene el estado de máximo peso (5.85) salvo un signo. Se puede mostrar que el segundo estado no es de peso máximo en $\mathcal{U}(5)$; por ejemplo, si tomamos la acción del generador de ascenso C_1^0 sobre éste, se obtiene el primer estado.

Por otro lado si se tiene que $\sigma_2 = +$, se construye la tabla (5.20), en la que se muestra la acción de los generadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$, donde se observa que el estado que porta la RI [2111] en $\mathcal{U}(5)$ y {41} en el grupo complementario, se denota por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger |0\rangle = |21110, 2111, 211, 21, 2; 41, 4\rangle. \quad (5.86)$$

De acuerdo con (5.42), se deduce que el espín total es $S = \frac{3}{2}$. Para finalizar tenemos la acción del generador de descenso del grupo $U(2)$ sobre el tercer estado de (5.84), es decir

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{m_3\sigma_3}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_3}^- d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{m_3+}^\dagger |0\rangle.$$

	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-2+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_0^{-1}	0	0
\mathcal{C}_0^{-2}	0	0
\mathcal{C}_{-1}^{-2}	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$

Tabla 5.20: Acción de los operadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger |0\rangle$ y $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-2+}^\dagger |0\rangle$. La acción de los operadores \mathcal{C}_2^μ con $\mu = 1, 0, -1, -2$ y $\mathcal{C}_1^{\mu'}$ con $\mu' = 0, -1, -2$, sobre estos estados son cero da lo que se han omitido en la tabla.

Esta expresión que da cero si $\sigma_3 = -$ y el índice $m_3 = 2, 1, 0, -1$, o también si $\sigma_3 = +$. Para el primer caso, se tienen los estados

$$\begin{aligned} d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{2-}^\dagger |0\rangle, & \quad d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{1-}^\dagger |0\rangle, \\ d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{0+}^\dagger |0\rangle, & \quad d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-1-}^\dagger |0\rangle. \end{aligned}$$

Al anticonmutar tres veces el último operador fermiónico de creación del primer término de la ecuación anterior, se obtiene el estado de máximo peso (5.86) salvo un signo. De la misma manera, que en el caso anterior, se puede mostrar que los otros tres estados no son de peso máximo en el grupo $\mathcal{U}(5)$; como ejemplo podemos tomar la acción de los generadores \mathcal{C}_2^1 sobre el segundo, \mathcal{C}_2^0 sobre el tercero, y \mathcal{C}_2^{-1} sobre el cuarto; en todos los casos se obtiene el primero.

Para $\sigma_3 = +$, tenemos que $m_3 = -2$. Así se forma el estado de máximo peso en $U(2)$ que porta la RI $\{50\}$, y también lo es en $\mathcal{U}(5)$, con la RI $[11111]$. Denotamos este estado

$$d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger |0\rangle = |11111, 1111, 111, 11, 1; 50, 5\rangle. \quad (5.87)$$

De (5.42), el espín total del estado es $S = \frac{5}{2}$.

Con cada estado de máximo peso se construye la base utilizando los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky. Cabe mencionar que la dimensión correspondiente con la primer partición es de 75 estados, la de la segunda es de 24, y la de la tercera de 1. A partir de cada una se obtiene la representación matricial de los operadores $\Gamma(5)$, $\Phi(5)$ y L^2 .

A continuación se darán los eigenvalores correspondientes a las representaciones matriciales de los operadores antes mencionados, haciendo énfasis en los eigenvalores del operador $\Phi(5)$ y la representación irreducible de $SO(5)$ asociada con éstos,

además de los momentos angulares relacionados con cada una de las particiones del grupo $SO(5)$.

RI [221] de $\mathcal{U}(5)$

La representación matricial de $\Gamma(5)$ es diagonal con eigenvalor 21. Por otra parte las representaciones matriciales de $\Phi(5)$ y L^2 no son diagonales, por lo que al calcular los eigenvalores de cada uno de los operadores antes mencionados se obtiene lo siguiente:

$$\phi = 4, 12, 16; \quad L = 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6.$$

Usando de nuevo la tabla (5.10) podemos decir que la RI [221] de $\mathcal{U}(5)$ contiene a las representaciones irreducibles $(1, 0)$ asociada con el eigenvalor $\phi(5) = 4$, $(2, 1)$ asociada con $\phi(5) = 12$ y $(2, 2)$ asociada con $\phi(5) = 16$. De acuerdo con [14], la primera incluye al momento angular $L = 2$, mientras que la segunda incluye los momentos angulares $L = 1, 2, 3, 4, 5$, en tanto que la tercera contiene a los momentos angulares $L = 0, 2, 3, 4, 6$.

RI [2111] de $\mathcal{U}(5)$

El eigenvalor asociado con el operador de Casimir de segundo orden del grupo $\mathcal{U}(5)$ es $\gamma(5) = 15$. De la diagonalización de los operadores $\Phi(5)$ y L^2 se obtuvieron los siguientes eigenvalores:

$$\phi = 6, 10; \quad L = 1, 2, 3, 4;$$

De la tabla (5.10) podemos decir que $\phi(5) = 6$ tiene asociada la representación irreducible $(1, 1)$, y ésta incluye los momentos angulares $L = 1, 3$; mientras que $\phi(5) = 10$ le corresponde la partición $(2, 0)$, la cual contiene a los momentos angulares $L = 2, 4$.

RI [11111] de $\mathcal{U}(5)$

Como se mencionó anteriormente esta representación sólo cuenta con un estado en el grupo $\mathcal{U}(5)$, por lo que a continuación se muestran los eigenvalores de los operadores $\Gamma(5)$, $\Phi(5)$ y L^2 :

$$\gamma(5) = 5, \quad \phi(5) = 0, \quad L = 0.$$

En este caso podemos decir que la partición [11111] de $\mathcal{U}(5)$ sólo contiene la partición $(0, 0)$ de $SO(3)$, y ésta incluye al momento angular $L = 0$.

Resumiendo

$U(10)$ N	$U(5)$ $[h_{15}h_{25}h_{35}h_{45}h_{55}]$	$SO(5)$ (ω_2, ω_1)	$SO(3)$ L
5	[22100]	(1, 0)	2
		(2, 1)	1, 2, 3, 4, 5
		(2, 2)	0, 2, 3, 4, 6
	[21110]	(1, 1)	1, 3
		(2, 0)	2, 4
		(0, 0)	0

Tabla 5.21: En la tabla se muestra cómo están relacionadas las representaciones irreducibles de los grupos $U(5)$, $SO(5)$ y $SO(3)$ para un sistema de 5 electrones.

6 electrones

Para obtener los estados de máximo peso se constuyen los siguientes estados

$$\begin{aligned}
& d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle, \\
& d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle, \\
& d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger d_{m_3 \sigma_3}^\dagger |0\rangle,
\end{aligned} \tag{5.88}$$

que se forman al aplicar un operador fermiónico de creación a cada uno de los estados (5.85), (5.86) y (5.87), teniendo cuidado de no repetir parejas de subíndices $m_i \sigma_i$ en cada una de las expresiones anteriores.

Para que los estados de la ecuación anterior sean de máximo peso, la acción de los generadores de ascenso de los grupos $U(5)$ y $U(2)$ sobre éstos debe ser cero.

Se toma la acción del generador de ascenso de $U(2)$ sobre los estados de (5.88), comenzando con

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_1}^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{m_1 +}^\dagger |0\rangle.$$

La ecuación anterior es igual a cero siempre que $\sigma_1 = -$ y $m_1 = 0$ o que $\sigma_1 = +$. En el primer caso se tiene el estado de máximo peso de $U(2)$ porta la RI $\{33\}$ y de máximo peso en $U(5)$ porta la RI $[222]$. El estado se escribe

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger |0\rangle = |22200, 2220, 222, 22, 2; 33, 3\rangle, \tag{5.89}$$

	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-2+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_0^{-1}	0	0
\mathcal{C}_0^{-2}	0	0
\mathcal{C}_{-1}^{-2}	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$

Tabla 5.22: Acción de los operadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger |0\rangle$ y $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-2+}^\dagger |0\rangle$. La acción de los operadores \mathcal{C}_2^μ con $\mu = 1, 0, -1, -2$ y $\mathcal{C}_1^{\mu'}$ con $\mu' = 0, -1, -2$, sobre estos estados es cero, por lo que se han omitido en la tabla.

De (5.42) se deduce que el espín del estado es $S = 0$. Si consideramos que $\sigma_1 = +$, se construye la tabla (5.22) en la que se muestra la acción de los generadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$; de tal manera que el estado porta las RI's [2211] de $\mathcal{U}(5)$ y {42} del grupo complementario, y se denota por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger |0\rangle = |22110, 2211, 221, 22, 2; 42, 4\rangle. \quad (5.90)$$

Al utilizar (5.42), junto con la partición del grupo $U(2)$, se infiere que el espín total es $S = 1$.

Actuando con el generador C_+^- sobre el segundo estado de (5.88), se tiene que

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_2}^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{m_2+}^\dagger |0\rangle.$$

La ecuación anterior es igual a cero cuando $\sigma_2 = -$ con $m_2 = 1, 0, -1$, o $\sigma_2 = +$. Al considerar el primer caso podemos ver que hay tres estados de máximo peso en el grupo $U(2)$; estos son

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{1-}^\dagger |0\rangle \quad d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-1-}^\dagger |0\rangle, \quad d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2-}^\dagger |0\rangle.$$

Al anticonmutar dos veces el operador d_{1-}^\dagger en el primer estado, podemos notar que es igual al de máximo peso (5.90), mientras que los otros dos no lo son. Esto se puede ver al tomar la acción de los generadores de ascenso \mathcal{C}_0^0 y \mathcal{C}_1^{-1} sobre el segundo y tercer estados, respectivamente. En ambos casos se obtiene el primero. Por otro lado si se toma $\sigma_2 = +$, implica que $m_2 = -2$; se puede mostrar que éste también es de máximo peso en el grupo $\mathcal{U}(5)$ y porta la RI [21111]. Lo denotamos por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger |0\rangle = |21111, 2111, 211, 21, 2; 51, 5\rangle. \quad (5.91)$$

La RI del grupo complementario es {51} y con la ayuda de (5.42) podemos decir que el espín total es $S = 2$. Por último tenemos la acción de C_+^- sobre el tercer estado

de (5.88), esto es,

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger d_{m_3\sigma_3}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_3}^- d_{2+}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger d_{m_3+}^\dagger |0\rangle.$$

Para que esta ecuación se haga cero se debe tomar $\sigma_3 = -$, lo que implica que $m_3 = 2, 1, 0, -1, -2$. Podemos ver que si $m_3 = 2$, se tiene el estado de máximo peso (5.91), mientras que si se actúa con el generador de ascenso \mathcal{C}_2^i sobre el estado con $m_3 = i$ para $i = 1, 0, -1, -2$, se obtiene el estado (5.91), es decir, que no son de peso máximo.

Utilizando los estados obtenidos, se construyen las bases para cada una de las particiones. Esto se hace mediante la acción de los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky de la cadena canónica del grupo $\mathcal{U}(5)$. Con este procedimiento el número de estados que se pueden obtener para la primer partición son 50, para la segunda 45 y para la tercera 5. A partir de las bases se obtienen las representaciones matriciales de los operadores $\Gamma(5)$, $\Phi(5)$ y L^2 , y sus eigenvalores.

RI [222] de $\mathcal{U}(5)$

El eigenvalor del operador de Casimir de segundo orden correspondiente al grupo $\mathcal{U}(5)$ es $\gamma(5) = 24$. De la diagonalización de los operadores $\Phi(5)$ y L^2 se obtuvieron los siguientes eigenvalores:

$$\phi(5) = 0, 10, 16, \quad L = 0, 0, 2, 2, 3, 4, 4, 6.$$

Utilizando la tabla (5.10) se pueden dar las RI's del grupo $SO(5)$ asociadas con cada uno de los eigenvalores del operador de Casimir de segundo orden. De esta manera tenemos que la partición [222] de $\mathcal{U}(5)$ contiene las particiones (0, 0), (2, 0) y (2, 2) del grupo $SO(5)$.

La partición (0, 0), está relacionada con el eigenvalor $\phi(5) = 0$ y contiene el momento angular $L = 0$, mientras que (2, 0), está asociada con el eigenvalor $\phi(5) = 10$ e incluye los momentos angulares $L = 2, 4$. Por último tenemos que la partición (2, 2) correspondiente al eigenvalor $\phi(5) = 16$, contiene los momentos angulares $L = 2, 3, 4, 6$.

RI [2211] de $\mathcal{U}(5)$

En este caso el eigenvalor del operador de Casimir de segundo orden del grupo $\mathcal{U}(5)$ es $\gamma(5) = 20$. Para los otros dos operadores fue necesario diagonalizar las respectivas representaciones matriciales, obteniendo los siguientes eigenvalores:

$$\phi(5) = 6, 12, \quad L = 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5.$$

En esta ocasión se tiene que la partición [2211] incluye o contiene a las particiones (1, 1) y (2, 1) de $SO(5)$, la primera relacionada con el eigenvalor $\phi(5) = 6$, mientras

que la segunda con $\phi(5) = 12$, que a su vez contienen a los momentos angulares $L = 1, 3$ y $L = 1, 2, 3, 4, 5$, respectivamente.

RI [21111] de $\mathcal{U}(5)$

En esta ocasión todas las representaciones matriciales de los operadores mencionados son diagonales con los eigenvalores

$$\gamma(5) = 12, \quad \phi(5) = 4, \quad L = 2.$$

La representación irreducible de $SO(5)$ correspondiente con el eigenvalor del operador de Casimir de segundo orden es $(1, 0)$ que está relacionada con el momento angular $L = 2$.

El contenido de las RI's de $\mathcal{U}(5)$ para el sistema de 6 electrones en la capa d es el mismo que se tiene para un sistema de 4 electrones, es decir, que puede ser visto como un sistema de 4 agujeros.

7 electrones

Los estados de máximo peso para un sistema de siete electrones en la capa d , se obtienen al añadir un operador fermiónico de creación a cada uno de los estados de máximo peso del sistema anterior, (5.89), (5.90) y (5.91), es decir,

$$\begin{aligned} & d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle, \\ & d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle, \\ & d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2}^\dagger d_{m_3 \sigma_3}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Para que sean de máximo peso, la acción de los generadores de ascenso de los grupos $\mathcal{U}(5)$ y $U(2)$ sobre estos estados debe ser cero, comenzando con

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{m_1 \sigma_1}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_1}^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{m_1+}^\dagger |0\rangle.$$

Para que esta ecuación sea cero debe suceder que $\sigma_1 = +$. Con esto en cuenta se construye la tabla (5.23) donde se muestra la acción de los generadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$. Se observa que el estado de máximo peso porta las RI's [2221] en $\mathcal{U}(5)$ y {43} en el grupo complementario; lo denotamos por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{-1+}^\dagger |0\rangle = |22210, 2221, 222, 22, 2; 43, 4\rangle. \quad (5.93)$$

De acuerdo con (5.42), el espín total es $S = \frac{1}{2}$.

Tomando la acción del generador de ascenso de $U(2)$ sobre el segundo estado de (5.92) se obtiene

$$C_+^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{m_2 \sigma_2}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_2}^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{m_2+}^\dagger |0\rangle.$$

	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{-2+}^\dagger 0\rangle$
\mathcal{C}_0^{-1}	0	0
\mathcal{C}_0^{-2}	0	0
\mathcal{C}_{-1}^{-2}	0	$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{-1+}^\dagger 0\rangle$

Tabla 5.23: Acción de los operadores de ascenso del grupo $\mathcal{U}(5)$ sobre los estados $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{-1+}^\dagger |0\rangle$ y $d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{-2+}^\dagger |0\rangle$. La acción de los operadores \mathcal{C}_2^μ con $\mu = 1, 0, -1, -2$ y $\mathcal{C}_1^{\mu'}$ con $\mu' = 0, -1, -2$, sobre estos estados es cero, por lo que se han omitido en la tabla.

Esta ecuación es cero si $\sigma_2 = -$ con $m_2 = 0, -1$ o si $\sigma_2 = +$. En el primer caso se tienen los estados

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{0-}^\dagger |0\rangle, \quad d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-1-}^\dagger |0\rangle.$$

Al anticonmutar el último operador fermiónico de creación en el primer estado de la ecuación anterior, se obtiene el estado (5.93) salvo un signo. Al actuar con \mathcal{C}_1^0 sobre el segundo, se obtiene el primero, por lo tanto no es de máximo peso en $\mathcal{U}(5)$.

Por otra parte tenemos que $\sigma_2 = +$. Esto implica que $m_2 = -2$; de esta manera se obtiene el estado de máximo peso en el grupo $U(2)$ que porta la RI $\{52\}$. Se puede mostrar que también lo es en $\mathcal{U}(5)$ con RI $[22111]$. A dicho estado lo denotamos por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger |0\rangle = |22111, 2211, 221, 22, 2; 52, 5\rangle. \quad (5.94)$$

El espín total del estado es $S = \frac{3}{2}$.

Por último se toma la acción del operador \mathcal{C}_+^- sobre el tercer estado de (5.92), esto es,

$$\mathcal{C}_+^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger d_{m_3\sigma_3}^\dagger |0\rangle = \delta_{\sigma_3}^- d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger d_{m_3\sigma_3}^\dagger |0\rangle.$$

La única manera de que sea cero es tomando $\sigma_3 = -$ con $m_3 = 1, 0, -1, -2$. Consideremos primero $\sigma_3 = -$, $m_3 = 1$. En este caso se tiene el estado

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger d_{1-}^\dagger |0\rangle.$$

Al anticonmutar tres veces el último operador fermiónico de creación, obtenemos el estado de máximo peso (5.94) salvo un signo. Por otra parte se puede ver que al tomar la acción del generador de ascenso $\mathcal{C}_1^{m_3}$ con $m_3 = 0, -1, -2$, sobre los demás estados obtenemos de nuevo el estado (5.94). Esto quiere decir que los estados con $m_3 = 0, -1, -2$, no son de máximo peso en el grupo $\mathcal{U}(5)$.

Enseguida se darán los eigenvalores de la representación matricial de los operadores $\Gamma(5)$, $SO(5)$ y L^2 construidos con la base canónica.

RI [2221] de $\mathcal{U}(5)$

En la base canónica la representación matricial del operador $\Gamma(5)$ es diagonal con eigenvalor 23. Al diagonalizar las matrices correspondientes con los operadores $\Phi(5)$ y L^2 se obtienen los eigenvalores

$$\phi(5) = 4, 12, \quad L = 1, 2, 2, 3, 4, 5.$$

Utilizando (5.10), podemos decir que la RI. [2221] de $\mathcal{U}(5)$ contiene las representaciones irreducibles $(1, 0)$ asociada con $\phi(5) = 4$, y $(2, 1)$ asociada con $\phi(5) = 12$. La primera incluye el momento angular $L = 2$ mientras que la segunda contiene a los momentos angulares $L = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

RI [22111] de $\mathcal{U}(5)$

En este caso la representaciones matriciales de los operadores $\Gamma(5)$ y $\Phi(5)$ son diagonales con los eigenvalores 17 y 6, respectivamente. Al diagonalizar la matriz correspondiente a L^2 se obtienen los eigenvalores $L = 1, 3$. De lo anterior podemos decir que la partición [22111] de $\mathcal{U}(5)$ contiene la representación irreducible $(1, 1)$ de $SO(5)$, y ésta a su vez contiene a los momentos angulares $L = 1, 3$.

El contenido de las representaciones irreducibles del sistema de 7 electrones es el mismo que se tiene para el de 3, por lo que puede ser visto como un sistema de 3 agujeros.

8 electrones

La construcción de los estados de máximo peso para un sistema de ocho electrones en la capa d es similar a la de los casos anteriores, por lo que a continuación se escribirán los estados.

El primero tiene RI [2222] en $\mathcal{U}(5)$ y $\{44\}$ en el grupo complementario. Lo denotamos por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-1-}^\dagger |0\rangle = |22220, 2222, 222, 22, 2; 44, 4\rangle.$$

Tiene espín total $S = 0$.

El segundo tiene las RI's [22211] en $\mathcal{U}(5)$ y $\{53\}$ en $U(2)$. Lo denotamos por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger |0\rangle = |22211, 2221, 222, 22, 2; 53, 5\rangle,$$

y tiene espín total $S = 1$.

A partir de cada uno de estos estados, se construye la base canónica de $\mathcal{U}(5)$ mediante los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky. Después con las correspondientes bases se obtienen las representaciones matriciales de los operadores $\Gamma(5)$, $\Phi(5)$ y L^2 , y sus eigenvalores.

RI [2222] de $\mathcal{U}(5)$

Como era de esperar, la representación matricial del operador $\Gamma(5)$ es diagonal con el eigenvalor 24. Al diagonalizar las representaciones matriciales de los otros dos operadores se obtuvieron los eigenvalores

$$\phi(5) = 0, 10, \quad L = 0, 2, 4,$$

de (5.10). Se puede decir que la RI [2222] de $\mathcal{U}(5)$ contiene a las representaciones irreducibles $(0, 0)$ relacionada con $\phi(5) = 0$ y $(2, 0)$ con $\phi(5) = 10$, de $SO(5)$, y de acuerdo con [14], la primera contiene al momento angular $L = 0$ mientras que la segunda a los momentos angulares $L = 2, 4$.

RI [22211] de $\mathcal{U}(5)$

En este caso las representaciones matriciales de los operadores $\Gamma(5)$ y $\Phi(5)$ son diagonales, con eigenvalores 20 y 6, respectivamente. Al calcular los eigenvalores de L^2 se obtuvo $L = 1, 3$, es decir, la RI [22211] de $\mathcal{U}(5)$ contiene la RI $(1, 1)$ de $SO(5)$, y ésta a su vez contiene los momentos angulares $L = 1, 3$.

9 electrones

El estado de máximo peso de 9 electrones en la capa d tiene RI [22221] en $\mathcal{U}(5)$ y $\{54\}$ en $U(2)$. Lo denotamos por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-1-}^\dagger d_{-2+}^\dagger |0\rangle = |22221, 2222, 222, 22, 2; 54, 5\rangle.$$

El espín total es $S = \frac{1}{2}$.

RI [22221] de $\mathcal{U}(5)$

En este caso los operadores $\Gamma(5)$, $\Phi(5)$ y L^2 tienen representaciones matriciales diagonales con los eigenvalores

$$\gamma(5) = 21, \quad \phi(5) = 4, \quad L = 2.$$

Es decir, que la partición [22221] del grupo $\mathcal{U}(5)$ contiene la representación irreducible $(1, 0)$ del grupo $SO(5)$, y ésta a su vez contiene la representación irreducible

$L = 2$ de $SO(3)$.

10 electrones

En este caso el estado de máximo peso porta la RI [22222] de $\mathcal{U}(5)$ mientras que la de $U(2)$ es {55}. El estado se denota por

$$d_{2+}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{1+}^\dagger d_{1-}^\dagger d_{0+}^\dagger d_{0-}^\dagger d_{-1+}^\dagger d_{-2+}^\dagger d_{-2-}^\dagger |0\rangle = |22222, 2222, 222, 22, 2; 55, 5\rangle. \quad (5.95)$$

El espín total del sistema es $S = 0$. La acción de los operadores de descenso de ambos grupos sobre éste dan cero; por lo tanto el sistema tiene un solo estado, que es conocido como capa cerrada.

Al calcular los eigenvalores de los operadores $\Gamma(5)$, $\Phi(5)$ y L^2 , se obtienen

$$\gamma(5) = 20, \quad \Phi(5) = 0, \quad L = 0.$$

Es decir, que la RI [22222] de $\mathcal{U}(5)$ contiene la RI (0, 0) de $SO(5)$, y ésta a su vez al momento angular total $L = 0$.

Diagrama de niveles para un sistema de cuatro electrones

Lo que se hará a continuación es mostrar para un caso en particular, cómo el término de interacción del hamiltoniano al que denotaremos por \mathcal{H}_{IN} rompe con la degeneración de estados y cómo se divide el diagrama de niveles energéticos cada que se toma en cuenta uno de los operadores que lo componen. Para hacer esto, restamos el término de partícula independiente al hamiltoniano (5.63) y dividimos todo por el número atómico. Se obtiene así

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{IN} = & \left\{ \frac{1}{2} f^0(n, 2222) - \frac{1}{63} f^4(n, 2222) \right\} \hat{N}^2 \\ & - \left\{ \frac{1}{2} f^0(n, 2222) + \frac{1}{7} f^2(n, 2222) + \frac{1}{7} f^4(n, 2222) \right\} \hat{N} \\ & + a_0 \frac{5}{63} f^4(n, 2222) \Gamma(5) - a_1 \frac{5}{126} f^4(n, 2222) \Phi(5) \\ & + a_2 \frac{2}{7} \left\{ f^2(n, 2222) - \frac{5}{9} f^4(n, 2222) \right\} \sum_{q=-2}^2 (-)^q [b_{n2}^\dagger \otimes b_{n2}]_{q0}^{20} [b_{n2}^\dagger \otimes b_{n2}]_{-q0}^{20}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

La ecuación anterior se ha agrupado en términos de los operadores de Casimir, además se han incluido los parámetros: a_0 , relacionado con el operador de Casimir del grupo $\mathcal{U}(5)$, a_1 con el operador de Casimir de segundo orden del grupo $SO(5)$, y a_2 .

Consideremos el sistema de 4 electrones en la capa d en estado base, es decir, que $N = 4$ y $n = 3$.

Lo primero que hacemos es tomar en cuenta los términos que dependen del operador N , Casimir de primer orden del grupo $\mathbf{U}(10)$. Por lo tanto los parámetros en (5.96) deben ser cero. Calculando los eigenvalores se obtienen 100 estados con energía

$$E_{IN}(a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0) = 0.931742 \text{ Ry},$$

que los representamos por una línea café en las figuras (5.6) y (5.9).

Después se toma en cuenta el término que depende de $\Gamma(5)$, operador de Casimir de segundo orden de $\mathcal{U}(5)$. Escogiendo los valores siguientes para los parámetros $a_0 = 1$ y $a_1 = a_2 = 0$. Se diagonaliza (5.96), y al calcular sus eigenvalores, observamos que el espectro se divide en tres niveles energéticos. Estos son

$$\begin{aligned} [22] \quad E_{IN}(a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0) &= 1.02578, & 50 \text{ estados} & \text{ (línea azul),} \\ [211] \quad E_{IN}(a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2) &= 1.00697, & 45 \text{ estados} & \text{ (línea roja),} \\ [1111] \quad E_{IN}(a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0) &= 0.969358, & 5 \text{ estados} & \text{ (línea purpura).} \end{aligned}$$

En la ecuación anterior se muestra la RI de $\mathcal{U}(5)$, el valor de la energía asociado y el número de estados. Estos tres niveles los representamos por tres líneas: la primera de color azul, la segunda de color rojo, y la tercera de color purpura. Están dispuestas en la figura (5.6)

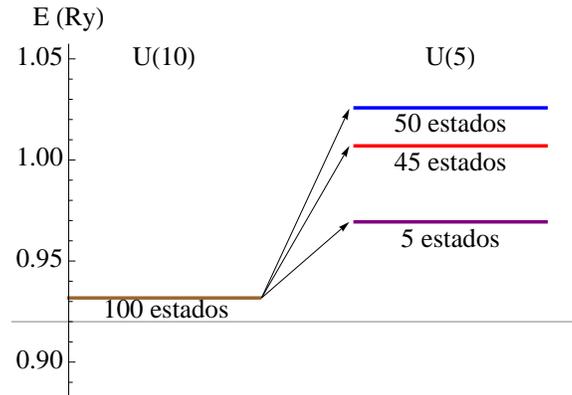


Fig. 5.6: En la figura se muestra el espectro energético relacionado con la RI $[1^4]$ (línea café) que tiene 100 estados. Al incluir el término que depende de $\Gamma(5)$, este se divide en tres niveles el primero (línea azul) tiene 50 estados y está relacionado con la RI [22], el segundo con 45 estados (línea roja) los cuales están relacionados con la RI [211] y el tercero con 5 estados (línea purpura) que están relacionados con la RI [1111].

Para cada una de estas RI veremos cómo se modifica el espectro de energías al añadir el término que depende del operador $\Phi(5)$, Casimir de segundo orden del

grupo $SO(5)$. Esto quiere decir que se tomarán $a_0 = a_1 = 1$ y $a_2 = 0$ en (5.96). Al calcular los eigenvalores de \mathcal{H}_{IN} se obtienen los siguientes resultados: el espectro energético correspondiente con la RI [22] se divide de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} (0, 0) & E_{IN}(a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0) = 1.02578, & 1 \text{ estado}, \\ (2, 0) & E_{IN}(a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0) = 1.00227, & 14 \text{ estados}, \\ (2, 2) & E_{IN}(a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0) = 0.988166, & 35 \text{ estados}. \end{array}$$

En esta ecuación se han colocado las RI's de $SO(5)$ asociadas con cada eigenvalor de \mathcal{H}_{IN} , además del número de estados. Esto se puede ver en la figura (5.7), con líneas azules para indicar que están contenidas en la RI [22].

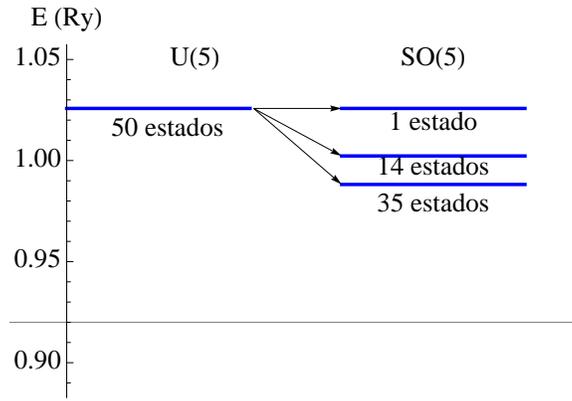


Fig. 5.7: En la figura se muestra como se divide el nivel energético relacionado con la RI [22] cuando consideramos el término que depende de $\Phi(5)$ (operador de Casimir de segundo orden del grupo $SO(5)$). En esta ocasión se divide en tres niveles energéticos, el primero con un estado, el segundo con 14 estados y el tercero con 35 estados, todos se denotan con líneas azules.

Para la RI [211], el espectro de energías se divide en dos niveles. Estos son

$$\begin{array}{lll} (1, 1) & E_{IN}(a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0) = 0.992867, & 10 \text{ estados}, \\ (2, 1) & E_{IN}(a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0) = 0.978762, & 35 \text{ estados}. \end{array}$$

Otra vez hemos incluido la representación irreducible de $SO(5)$ asociada con cada eigenvalor de \mathcal{H}_{IN} junto con el número de estados. Estos dos valores se representan por dos líneas rojas en la segunda columna de la figura (5.8)

Para la partición [1111], el espectro energético se modifica de la siguiente forma:

$$(1, 0) \quad E_{IN}(a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0) = 0.959954, \quad 5 \text{ estados}.$$

Para finalizar, tomamos $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, es decir, se tiene completa la expresión del término de interacción, \mathcal{H}_{IN} . En la figura (5.9), podemos ver de forma sintetizada

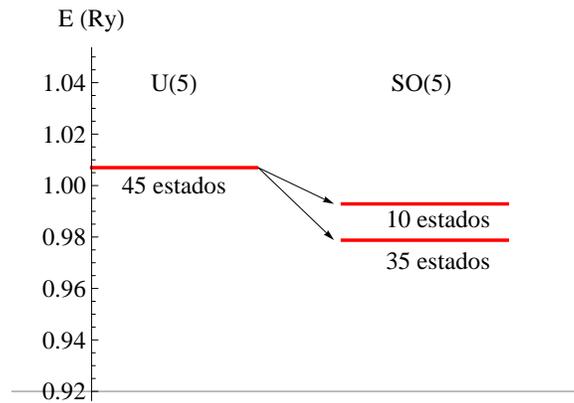


Fig. 5.8: En la figura se muestra como se divide el nivel energético relacionado con la RI [211] cuando consideramos el término que depende de $\Phi(5)$ (operador de Casimir de segundo orden del grupo $SO(5)$). En este caso se divide en dos niveles energéticos, el primero con 10 estados, mientras que el segundo cuenta con 35 estados, que se denotan con dos líneas rojas.

el proceso, desde que se tomo en cuenta el término que depende del operador de Casimir de segundo orden del grupo $U(10)$, hasta la diagonalización del término de interacción \mathcal{H}_{IN} .

En la cuarta columna de la figura (5.9) aparecen las líneas asociadas con los niveles energéticos del operador \mathcal{H}_{IN} , las azules asociadas con la partición [22], las rojas asociadas con la partición [211], y la púrpura asociada con [1111].

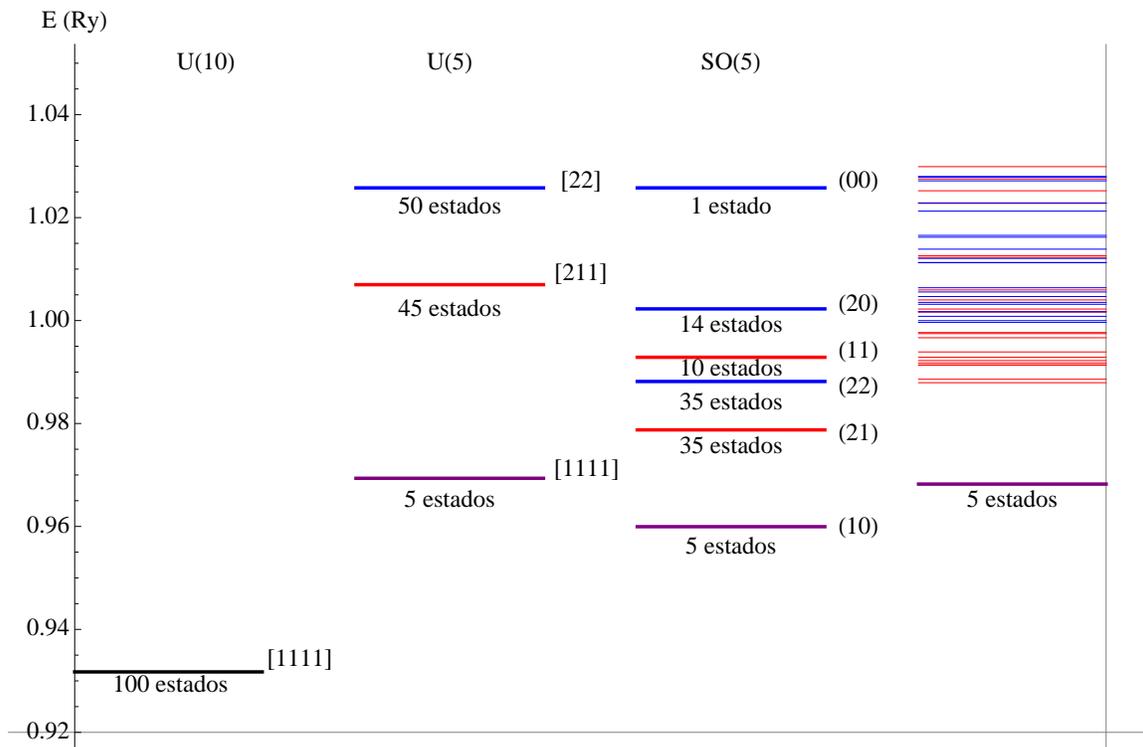


Fig. 5.9: En la figura se muestra como se dividen los niveles de energía, cada vez que se incluyen términos que dependen de los operadores de Casimir de los grupos $U(5)$ y $SO(5)$ en la contribución de la interacción coulombiana para un sistema de 4 electrones en la capa d, con número cuántico principal $n = 3$.

Capítulo 6

Conclusiones

Se estudio un procedimiento general para la construcción de bases polinomiales (de operadores bosónicos o fermiónicos de creación) que portan la representación irreducible de grupos unitarios. Estas bases sirven para caracterizar sistemas de N partículas.

Consideramos un sistema de N cuerpos interactuantes desde el punto de vista de la teoría de grupos. En esta discusión el hamiltoniano consta de dos términos, el primero corresponde al de partícula independiente, donde las partículas están sometidas a un potencial común, mientras que el segundo puede ser visto como un término residual que depende de la interacción entre ellas.

La forma natural de introducir la teoría de grupos, consiste en expresar al hamiltoniano y las observables físicas del sistema utilizando el formalismo de segunda cuantización. Esto permite reescribir los operadores en términos de generadores de grupos unitarios, que pueden realizarse en función de operadores bosónicos o fermiónicos de creación y aniquilación.

Para describir estos sistemas se requiere generalmente calcular el espectro de energías y los elementos de matriz de las observables, por lo que es necesario construir una base (polinomial de operadores de creación) que porte la representación irreducible (RI) de grupos unitarios.

Los sistemas se caracterizan de acuerdo al tipo de partículas que lo conforman y de los grados de libertad que sean considerados. En general los caracterizamos por los grupos unitarios $\mathbf{U}(nr) \supset \mathcal{U}(n) \times U(r)$, y por las cadenas canónicas de cada uno de éstos. El grupo unitario $\mathcal{U}(n)$ está relacionado con los grados de libertad espaciales, mientras que $U(r)$ depende de los grados de libertad internos.

En principio y para que el estado o polinomio de máximo peso represente a un sistema de N cuerpos se le pide que sea homogéneo de grado N en el grupo $\mathbf{U}(nr)$. La representación de dicho grupo por lo general no es irreducible. Para que lo sea se restringe al subgrupo producto directo $\mathcal{U}(n) \times U(r)$. Tomando esto en cuenta, se

pide que la acción de los generadores de ascenso de cada uno de los grupos $\mathcal{U}(n)$ y $U(r)$ sobre tal polinomio sea cero; esto independientemente del tipo de partículas que se tengan.

En el caso de que el sistema esté compuesto por bosones, la RI del grupo $\mathcal{U}(n)$ es $[h_{1n}h_{2n} \cdots h_{nn}]$ donde las $h'_{\mu n}$ s denotan el peso máximo, mientras que en el grupo $U(r)$ la RI es $[\nu_{1r}\nu_{2r} \cdots \nu_{rr}]$. Para este tipo de sistemas el polinomio de máximo peso, está dado en (3.69).

Cuando el sistema está conformado por fermiones de espín $\frac{1}{2}$, r toma el valor de 2, por lo que se caracteriza por la cadena $\mathbf{U}(2n) \supset \mathcal{U}(n) \times U(2)$; el subgrupo $U(2)$ describe los grados de libertad del espín total del sistema. La representaciones irreducibles de los grupos $\mathbf{U}(2n)$, $\mathcal{U}(n)$ y $U(2)$, están dadas por $[1^N]$, $[h_{1n}h_{2n} \cdots h_{nn}]$ y $\{\nu_1\nu_2\}$, respectivamente. Teniendo en cuenta que las dos últimas RI's son conjugadas una de la otra. En este caso la forma del polinomio de máximo peso está dado en (3.58).

La base de cada uno de los sistemas mencionados se obtiene mediante la acción de potencias de los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky L_k^p con $1 \leq k < p \leq n$ sobre los respectivos estados de máximo peso.

El procedimiento es el siguiente: se toma la acción sobre el estado de máximo peso de potencias de $(n-1)$ operadores de descenso de $\mathcal{U}(n)$, obteniéndose todos los estados de máximo peso en el subgrupo $\mathcal{U}(n-1)$ que están contenidos en la RI de $\mathcal{U}(n)$. Se actúa con los $(n-2)$ operadores de descenso de $\mathcal{U}(n-2)$ sobre los estados de máximo peso de $\mathcal{U}(n-2)$. Se repite este procedimiento hasta obtener los estados de $\mathcal{U}(1)$. En la parte de grados de libertad internos se efectúa un procedimiento similar.

Para ilustrar el método, se consideró un sistema de N bosones caracterizados por la cadena de grupos $\mathbf{U}(9) \supset \mathcal{U}(3) \times U(3)$. En la representación bosónica, los generadores del grupo pueden ser reescritos como operadores diferenciales de primer orden. En este contexto se propone que el polinomio sea función de las α 's. Considerando que debe tener peso máximo y que la acción de los generadores de ascenso sea cero, tanto para $\mathcal{U}(3)$ como para $U(3)$ se obtiene el polinomio de máximo peso que porta la RI $[h_{13}h_{23}h_{33}]$ y que está de acuerdo con (3.69).

El grupo $\mathcal{U}(3)$ tiene dos operadores de descenso. Estos son L_3^1 y L_3^2 , mientras que $U(2)$ sólo tiene a L_2^1 . Para esto se debe tomar en cuenta las relaciones de conmutación del grupo $\mathcal{U}(3)$, además de los conmutadores múltiples de los operadores de descenso con sus adjuntos, por ejemplo, $[L_3^{1\dagger}, L_3^1]$, $[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1]$ y $[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1]$.

Tomando la acción de $(\mathbb{L}_2^1)^q(\mathbb{L}_3^1)^n(\mathbb{L}_3^2)^m$ sobre el estado de máximo peso, se obtiene un estado arbitrario de $\mathcal{U}(3)$. Calculando su peso, permite tener una relación entre los estados de la base polinomial y los estados de Gelfand-Tsetlin. Finalmente se calculan los elementos de matriz de los generadores del grupo, que coinciden con

los de [2].

Como ejemplo se discutió el problema de N electrones de las capas s , p y d , que se clasifican mediante los grupos $\mathbf{U}(2(2l+1)) \supset \mathcal{U}(2l+1) \times U(2)$, donde l representa el momento angular orbital, $l = 0$ para la capa s , $l = 1$ para la capa p y $l = 2$ para la capa d .

En la capa s , al sustituir los valores de los momentos angulares orbitales de los electrones en el hamiltoniano expresado en el formalismo en segunda cuantización y después de usar propiedades de simetría de los coeficientes Clebsch-Gordan, el hamiltoniano está dado en términos del operador de número y por las integrales de Slater $F^l(n, l'_1, l'_2, l_1, l_2)$. En esta capa el eigenvalor N sólo puede tomar los valores $N = 1, 2$. En el primer caso se obtiene el espectro de partícula independiente, mientras que en el segundo hay contribución en el espectro de energías por la interacción repulsiva de los electrones.

En la capa p , los términos que componen al hamiltoniano pueden escribirse por los operadores de Casimir de primero y segundo orden de los grupos $\mathbf{U}(6)$, $\mathcal{U}(3)$ y $SO(3)$, por lo tanto, el espectro energético queda determinado por el número de electrones N , el momento angular orbital total L y el espín total del sistema S .

Los estados de máximo peso se obtienen de forma recursiva, es decir, primero se obtiene el estado de máximo peso para el sistema de un electrón en la capa; a partir de éste, se construye un estado que representa dos electrones.

Después de pedir que sea de máximo peso, y que la acción de los generadores de ascenso de los grupos $\mathcal{U}(3)$ y $U(2)$ sean cero, obtenemos los estados de máximo peso que portan las RI de los grupos antes mencionados. Este procedimiento se repite para cada ocupación N hasta llegar al estado de capa cerrada. De esta manera se obtienen todas las RI $[h_{13}h_{23}h_{33}]$ y $\{\nu_1\nu_2\}$ de $\mathcal{U}(3)$ y $U(2)$, respectivamente, contenidas en $[1^N]$.

Para cada una de las RI's de $\mathcal{U}(3)$ y mediante los operadores de descenso L_3^1 , L_3^2 y L_2^1 , se obtiene la base canónica. En esta base el operador L^2 no es diagonal, por lo que es necesario calcular sus eigenvalores y eigenvectores; cabe mencionar que la proyección de momento angular orbital total está bien definida, desde el momento en que los estados se escriben en función de los operadores fermiónicos de creación.

Para el sistema de N electrones en la capa d es necesario introducir el grupo $SO(5)$, por lo que el esquema de clasificación de la base toma la forma $\mathcal{U}(5) \supset SO(5) \supset SO(3)$. En este esquema el momento angular orbital total está bien definido. Teniendo en cuenta lo anterior el hamiltoniano queda determinado por el operador de número \hat{N} , los operadores de Casimir de segundo orden $\Gamma(5)$ y $\Phi(5)$ de los grupos $\mathcal{U}(5)$ y $SO(5)$, respectivamente, además de un término que incluye el producto de dos tensores unitarios de Racah.

Es importante mencionar que si el potencial de interacción es de contacto, el coeficiente que va junto con el producto de los dos tensores unitarios de Racah se hace cero, por lo que no aparece este término en el hamiltoniano.

El número de electrones en esta capa va desde $N = 1$ hasta $N = 10$, y para cada una de las RI's $[h_{15}h_{25}h_{35}h_{45}h_{55}]$ contenida en $[1^N]$ se construye la base canónica mediante los operadores de descenso de Nagel-Moshinsky de la cadena de grupos $\mathcal{U}(5) \supset \mathcal{U}(4) \supset \mathcal{U}(3) \supset \mathcal{U}(2)$. En esta base el único operador diagonal es $\Gamma(5)$, mientras que para $\Phi(5)$ y \hat{L}^2 es necesario construir su representación matricial en la base canónica y diagonalizarlas simultáneamente, ya que conmutan.

Es necesario también construir la representación matricial del término que contiene el producto de dos tensores unitarios de Racah, obteniéndose entonces el espectro de energías del sistema. Para un sistema de 4 electrones en la capa d en el estado base $n = 3$ se mostró como el espectro energético debido a la interacción se divide cada vez que consideramos cada uno de los términos, evitando la degeneración de estados etiquetados con el eigenvalor del momento angular total.

Finalmente, en este modelo se pueden introducir parámetros en el hamiltoniano que permiten ajustar el espectro energético a los datos experimentales, para ciertos tipos de átomos.

Apéndice A

Segunda cuantización

Partículas idénticas

Se dice que dos partículas son idénticas si todas las propiedades intrínsecas son exactamente las mismas (por ejemplo la masa, la carga, el espín, etc.) y no hay manera de distinguirlas mediante algún experimento.

Clásicamente si tenemos un sistema de partículas idénticas basta con etiquetarlas de alguna forma: por ejemplo, las podemos enumerar en el estado inicial y con el paso del tiempo podemos seguir las trayectorias durante la evolución del sistema. De cierta manera es como si tratásemos a las partículas como si fueran de naturaleza diferente.

En mecánica cuántica la situación es totalmente diferente, esto es debido a que las partículas están descritas por ondas por lo que no tenemos trayectorias asociadas a éstas. Aunque inicialmente las partículas estén separadas de tal forma que los paquetes de onda no se traslapen y podamos distinguirlos de cierta manera, al evolucionar el sistema dichos paquetes podrían mezclarse, lo que nos causaría algunos problemas.

Para ver la dificultad que se presenta en mecánica cuántica con este tipo de sistema consideremos el siguiente ejemplo.

Tomemos un sistema de dos partículas de espín $\frac{1}{2}$. Por el momento concentremos la atención en el grado de libertad del espín. Es natural dar por sentado que hacer una medición del espín de cada una de las partículas que conforman al sistema nos permite conocer el estado físico del sistema.

Supongamos que al medir las componentes del espín a lo largo del eje Oz obtenemos $\frac{\hbar}{2}$ para una de las partículas mientras que para la otra se tiene $-\frac{\hbar}{2}$. Para hacer una descripción matemática del sistema, vamos a etiquetar a las partículas de la siguiente forma: S_1, S_2 denotan las observables de espín y $|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle$ (donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ pueden tomar cualquiera de los siguientes valores $\{+, -\}$) es la base ortonormal del espacio conformado por los eigenkets comunes a S_1, S_2 , con eigenvalores $\varepsilon_1 \frac{\hbar}{2}$ y

$\varepsilon_2 \frac{\hbar}{2}$, respectivamente. En este caso tenemos dos estados matemáticamente distintos y que son asociados con un solo estado físico. Cualquiera de los siguientes kets ortonormales

$$|\varepsilon_1 = +; \varepsilon_2 = -\rangle, \quad |\varepsilon_1 = -; \varepsilon_2 = +\rangle, \quad (\text{A.1})$$

pueden describir, a priori, el estado físico considerado aquí. Estos dos kets generan un espacio bidimensional donde los vectores normalizados son de la forma

$$|\psi\rangle = \alpha|+, -\rangle + \beta|-, +\rangle \quad \text{con} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (\text{A.2})$$

Por el principio de superposición, todos los kets de la forma (A.2) representan el mismo estado físico que en (A.1) (un espín apuntando hacia arriba y el otro hacia abajo). Esto es a lo que llaman degeneración de intercambio.

La degeneración de intercambio crea ciertas dificultades a la hora de hacer las mediciones de las observables ya que los diferentes kets de (A.2) nos conducen a diferentes predicciones físicas que dependen de cuál ket se ha elegido, para denotar a las partículas. Problema que se resuelve permitiendo únicamente kets simétricos o antisimétricos.

Para evitar este tipo de problemas, haremos uso de las permutaciones, las cuales nos conducirán posteriormente al simetrizador y al antisimetrizador. Comencemos pues hablando del operador de permutaciones P_{12} de un sistema de dos partículas.

Consideremos un sistema de dos partículas con el mismo espín. Vamos a suponer por el momento que no son del todo idénticas y que de cierta forma las podemos enumerar con (1), (2). También supondremos que los espacios de estados de cada una de las partículas son isomorfos, por lo que al elegir la base $\{|u_i\rangle\}$ de ε_1 de (1) la otra la podemos escoger de forma similar, es decir, $\{|u_j\rangle\}$ de ε_2 para la partícula (2).

El espacio total ε está determinado por el producto tensorial de $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$ y la correspondiente base es de la forma

$$\{|u_i, u_j\rangle\}. \quad (\text{A.3})$$

El operador de permutación se define como el operador lineal que al actuar sobre un estado arbitrario de la base satisface la relación

$$P_{12}|u_i, u_j\rangle = |u_j, u_i\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Propiedades

$$1 \cdot - P_{12}^2 = 1$$

Esto se puede demostrar fácilmente si actuamos con el operador P_{12} a ambos lados de la ecuación (A.4).

$$2 \cdot - P_{12}^\dagger = P_{12}$$

Para mostrar esta igualdad tomemos primero el elemento de matriz de P_{12} , esto es,

$$\langle u_{i'}, u_{j'} | P_{12} | u_i, u_j \rangle = \langle u_{i'}, u_{j'} | u_j, u_i \rangle = \delta_{i'j} \delta_{j'i}.$$

Por otra parte si tomamos el elemento de matriz de P_{12}^\dagger , por definición se debe cumplir con

$$\langle u_{i'}, u_{j'} | P_{12}^\dagger | u_i, u_j \rangle = (\langle u_i, u_j | P_{12} | u_{i'}, u_{j'} \rangle)^* = \langle u_i, u_j | u_{j'}, u_{i'} \rangle = \delta_{ij'} \delta_{j'i'},$$

donde (*) denota el complejo conjugado. Comparando las dos últimas ecuaciones se comprueba la propiedad.

$$3 \cdot - P_{12}^\dagger P_{12} = P_{12} P_{12}^\dagger = 1$$

Esta propiedad se sigue de las dos anteriores.

Simetrizador y Antisimetrizador

En concordancia con las propiedades que se acaban de citar podemos decir que los eigenvalores de P_{12} son ± 1 . Los eigenvectores asociados a $+$ son conocidos como simétricos mientras que los que están asociados con $-$ se les llama antisimétricos. Esto es,

$$\begin{aligned} P_{12} |\psi_S\rangle &= |\psi_S\rangle & \implies & |\psi_S\rangle & \text{Simétrico,} \\ P_{12} |\psi_A\rangle &= -|\psi_A\rangle & \implies & |\psi_A\rangle & \text{Antisimétrico.} \end{aligned}$$

Consideremos ahora los operadores

$$S = \frac{1}{2}(1 + P_{12}), \quad A = \frac{1}{2}(1 - P_{12}).$$

Usando las propiedades de P_{12} se puede mostrar que los operadores antes citados cumplen con

$$S^2 = S, \quad S^\dagger = S; \quad A^2 = A, \quad A^\dagger = A.$$

Adicionalmente satisfacen

$$SA = AS = 0, \quad S + A = 1.$$

Esto nos dice que S y A son proyectores sobre subespacios ortogonales y que son complementarios para este caso de dos partículas. Más adelante vamos a ver que lo último no es cierto para sistemas con $N > 2$, donde N es el número de partículas.

Sea $|\psi\rangle$ un ket arbitrario del espacio \mathcal{E} , $S|\psi\rangle$ es un ket simétrico mientras que $A|\psi\rangle$ es antisimétrico. Esto lo podemos ver en la siguiente ecuación:

$$P_{12}S|\psi\rangle = S|\psi\rangle, \quad P_{12}A|\psi\rangle = -A|\psi\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Por esta razón, A y S son conocidos como simetrizador y antisimetrizador. El mismo resultado se obtiene si tomamos el orden inverso, es decir,

$$SP_{12}|\psi\rangle = S|\psi\rangle, \quad AP_{12}|\psi\rangle = -A|\psi\rangle. \quad (\text{A.6})$$

Transformación de las observables por las permutaciones

Consideremos a la observable B_1 que inicialmente se definió en el espacio ε_1 y que se ha extendido al espacio ε . Supondremos que B_1 constituye un conjunto completo de observables que conmutan. Siempre es posible construir la base $\{|u_i\rangle\}$ de ε_1 con los vectores propios de B_1 (donde los correspondientes valores propios son b_i). Calculemos pues la acción del operador $P_{12}B_1P_{12}^\dagger$ sobre un estado arbitrario de ε , es decir,

$$P_{12}B_1P_{12}^\dagger|u_i, u_j\rangle = P_{12}B_1|u_j, u_i\rangle = b_jP_{12}|u_j, u_i\rangle = b_j|u_i, u_j\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Podemos ver que si actuamos directamente con B_2 sobre el ket inicial se llega al mismo resultado; consecuentemente se tiene

$$P_{12}B_1P_{12}^\dagger = B_2. \quad (\text{A.8})$$

El mismo razonamiento es utilizado para mostrar que

$$P_{12}B_2P_{12}^\dagger = B_1. \quad (\text{A.9})$$

En el espacio ε podemos encontrar observables tales como $B_1 + C_2, B_1C_2$, que dependen de ambos índices. Trivialmente se tiene que

$$P_{12}(B_1 + C_2) = B_2 + C_1. \quad (\text{A.10})$$

De forma similar a (A.7) tenemos que

$$P_{12}B_1C_2P_{12}^\dagger = P_{12}B_1P_{12}^\dagger P_{12}C_2P_{12}^\dagger = B_2C_1, \quad (\text{A.11})$$

Este tipo de resultados se puede generalizar a observables que se expresen en términos de funciones de B_1 C_2 y que denotaremos por \mathcal{O}_{12} , por lo que

$$P_{12}\mathcal{O}_{12}P_{12}^\dagger = \mathcal{O}_{21}, \quad (\text{A.12})$$

en donde \mathcal{O}_{21} es la observable que se obtiene de intercambiar los índices $1 \leftrightarrow 2$ de la observable \mathcal{O}_{12} . Una observable \mathcal{O}_{12}^S se dice que es simétrica si

$$\mathcal{O}_{21}^S = \mathcal{O}_{12}^S. \quad (\text{A.13})$$

Tomando en cuenta a (A.12) se puede ver que todas las observables simétricas satisfacen

$$P_{21}\mathcal{O}_s(1,2) = \mathcal{O}_s(1,2)P_{21}, \quad \implies \quad [P_{21}, \mathcal{O}_s(1,2)] = 0. \quad (\text{A.14})$$

Es decir, que las observables simétricas conmutan con el operador de permutación.

En el espacio de estados de un sistema de N partículas con el mismo espín (por el momento supondremos que son de naturaleza diferente), se pueden definir $N!$ operadores de permutaciones. Si N es más grande que 2 las propiedades son más complejas de las que se tiene para P_{12} . Para tener una idea de cómo cambia, se discutirá brevemente el caso para el que $N = 3$.

Consideremos un sistema de tres partículas que necesariamente no son idénticas pero tienen el mismo espín. Como en el caso anterior, construiremos la base del sistema tomando el producto tensorial, esto es,

$$\{|u_i, u_j, u_k\rangle\}. \quad (\text{A.15})$$

En este caso existen 6 operadores de permutaciones incluyendo a la identidad, a los que denotaremos como

$$\mathbb{I}, P_{12}, P_{13}, P_{23}, P_{123}, P_{132}. \quad (\text{A.16})$$

Existen dos formas en las que las permutaciones actúan sobre los estados; éstas son pasiva y activa. Para dar una idea de la diferencia que existe entre las dos consideremos el siguiente ejemplo.

Utilizando el sistema de tres partículas descrito por (A.15) vamos a actuar con el siguiente par de permutaciones siguiendo este orden $P_{12}P_{13}$ sobre un estado arbitrario de la base. Si lo hacemos de forma pasiva obtenemos

$$P_{12}P_{13}|u_i, u_j, u_k\rangle = P_{12}|u_k, u_j, u_i\rangle = |u_j, u_k, u_i\rangle. \quad (\text{A.17})$$

Por otra parte si lo hacemos de forma activa se tiene que

$$P_{12}P_{13}|u_i, u_j, u_k\rangle = P_{12}|u_k, u_j, u_i\rangle = |u_k, u_i, u_j\rangle. \quad (\text{A.18})$$

Notamos primero que ambas formas de hacerlo conducen a resultados totalmente diferentes; para la forma pasiva podemos ver que los lugares se mantienen fijos, es decir, que se toma en cuenta el orden en que los objetos aparecen a la hora de intercambiarlos, mientras que en la permutación activa este orden no es respetado al momento de intercambiar los objetos. Cuando tenemos un sistema de dos partículas las dos maneras de permutar coinciden.

Siguiendo con la discusión, enunciaremos algunas propiedades que cumplen las permutaciones

- i. Entre los operadores de permutación contamos con el operador identidad.
- ii. El producto de dos operadores de permutación da por resultado otro operador de permutación.
- iii. El producto de permutaciones es asociativo.
- iv. Cada operador de permutación tiene un inverso que por supuesto corresponde a un operador de permutación.

Esto quiere decir que las permutaciones forman un grupo.

Transposiciones

Una transposición es una permutación en la cual sólo se intercambia el rol de dos de las partículas sin modificar las demás. Como ejemplo de transposiciones tenemos a P_{12}, P_{13}, P_{23} , etc.

Los operadores asociados a las transposiciones son hermíticos y cada uno tiene como su inverso a sí mismo. La prueba de esta aseveración es similar a la dada para P_{12} . Cualquier operador de permutación puede ser descompuesto como producto de transposiciones. Por ejemplo

$$P_{132} = P_{23}P_{12} = P_{13}P_{23} = P_{12}P_{13}, \dots, \text{etc.}$$

Como se observa en la ecuación anterior, esta descomposición no es única; sin embargo, para una permutación dada se puede mostrar que la paridad, es decir, el número de transposiciones en que puede ser descompuesto, es el mismo, por lo que en (A.16) P_{12}, P_{23}, P_{13} son impares y los otros tres son pares. Para cualquier N siempre hay el mismo número de permutaciones pares como impares.

Finalmente podemos notar que el adjunto de una permutación tiene la misma paridad que la permutación ya que es igual al producto de las mismas transposiciones

tomadas en el orden opuesto.

Kets totalmente simétricos y totalmente antisimétricos

Como los operadores de permutación no conmutan para $N > 2$, no es posible construir una base formada por los eigenvectores comunes a todos los operadores de permutación. Sin embargo existen ciertos tipos de kets que son eigenvectores simultáneos de todos los operadores de permutación.

Denotemos por P_α un operador arbitrario de permutación asociado con un sistema de N partículas con el mismo espín; α representa la permutación de los primeros N enteros. Sea el ket $|\psi_S\rangle$ tal que

$$P_\alpha|\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle,$$

para cualquier permutación; se dice que es totalmente simétrico. De forma similar se define el ket totalmente antisimétrico. Así, tenemos

$$P_\alpha|\psi_A\rangle = \varepsilon_\alpha|\psi_A\rangle,$$

donde

$$\varepsilon_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{si } P_\alpha \text{ es una permutación par,} \\ -1, & \text{si } P_\alpha \text{ es una permutación impar.} \end{cases}$$

El conjunto de kets totalmente simétricos (antisimétrico) constituye un subespacio ε_S (ε_A) del espacio de estados ε . Ahora consideremos el par de operadores

$$S = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} P_{\alpha}, \quad A = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} P_{\alpha},$$

donde la suma se hace sobre las $N!$ permutaciones de los primeros N enteros. Enseguida se mostrará que S y A son los proyectores sobre los subespacios ε_S ε_A , respectivamente. Por esta razón son conocidos como simetrizador y antisimetrizador.

S y A son operadores hermiticos, es decir,

$$S^\dagger = S, \quad A^\dagger = A. \quad (\text{A.19})$$

Tomando el adjunto de la definición de S y A tenemos

$$S^\dagger = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} P_{\alpha}^\dagger, \quad A^\dagger = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} P_{\alpha}^\dagger.$$

El adjunto de una permutación P_α es, como vimos anteriormente, otro operador de permutación con la misma paridad; por esta razón se conserva el valor de ε_α y

como la suma se hace sobre todas las permutaciones del grupo lo único que estamos haciendo es cambiar el orden en que ésta se realiza. Con esto se corrobora la ecuación (A.19).

Por otra parte si se tiene una permutación P_{α_0} se satisface que

$$P_{\alpha_0}S = SP_{\alpha_0} = S, \quad P_{\alpha_0}A = AP_{\alpha_0} = \varepsilon_{\alpha_0}A. \quad (\text{A.20})$$

Esto se debe al hecho de que $P_{\alpha_0}P_\alpha = P_\beta$ es otro operador de permutación con $\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\alpha_0}\varepsilon_\alpha$.

Para una P_{α_0} fija al tomar todas las permutaciones P_α del grupo podemos ver que cada una de las permutaciones P_β aparecen una sola vez en el grupo anterior pero en orden diferente; consecuentemente se tiene que

$$\begin{aligned} P_{\alpha_0}S &= \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} P_{\alpha_0}P_\alpha = \frac{1}{N!} \sum_{\beta} P_\beta = S, \\ P_{\alpha_0}A &= \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha P_{\alpha_0}P_\alpha = \varepsilon_{\alpha_0} \sum_{\beta} \varepsilon_\beta P_\beta = \varepsilon_{\alpha_0}A. \end{aligned}$$

De forma análoga se muestra cuando se multiplica el mismo operador de permutación ahora por la derecha.

Utilizando las ecuaciones (A.20), demostramos

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} SP_\alpha = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} S = S, \\ A^2 &= \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha AP_\alpha = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha^2 A = A. \end{aligned}$$

Adicionalmente se demuestra que

$$AS = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} AP_\alpha = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha A = \frac{1}{N!} A \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha = 0. \quad (\text{A.21})$$

Esto se debe al hecho de que hay el mismo número de permutaciones pares que de impares en el grupo. De la misma manera se demuestra para $SA = 0$.

Por lo tanto A, S son los proyectores sobre los subespacios $\varepsilon_A, \varepsilon_S$.

De acuerdo con la ecuación (A.20), la acción de estos dos operadores sobre cualquier ket $|\psi\rangle$ del espacio de estados da como resultado un estado completamente simétrico o completamente antisimétrico:

$$P_{\alpha_0}S|\psi\rangle = S|\psi\rangle, \quad P_{\alpha_0}A|\psi\rangle = \varepsilon_{\alpha_0}A|\psi\rangle.$$

Postulado de simetrización

Cuando un sistema incluye varias partículas idénticas, sólo dos tipos de kets del espacio de estados pueden describir el estado físico: los estados físicos dependen de la naturaleza de las partículas idénticas, completamente simétricas o completamente antisimétricas con respecto a los operadores de permutación del sistema. Aquellas partículas las cuales están descritas por estados totalmente simétricos se conocen como bosones, mientras que las que están descritas por estados totalmente antisimétricos son fermiones.

El postulado de simetrización limita el espacio de estados para un sistema de partículas idénticas. Todas las partículas que comúnmente se conocen, obedecen la siguiente regla empírica: aquéllas que tienen espín semi-entero (electrones, protones, neutrones, etc.) son fermiones, mientras que las que tiene espín entero (fotones, mesones, etc.) son bosones [15].

A continuación veremos cómo este postulado de simetrización remueve la degeneración de intercambio y sus dificultades. Este nuevo postulado restringe considerablemente el número de clases de kets capaces de describir al sistema físico. Estos kets deben pertenecer a los subespacios ε_S para bosones y ε_A para fermiones.

Debemos de ser capaces de afirmar que las dificultades ocasionadas por la degeneración de intercambio son erradicadas si podemos mostrar que ε_u contiene un solo ket del espacio ε_S o del espacio ε_A . Para demostrar lo anterior haremos uso de las siguientes relaciones $SP_\alpha = S$ o $AP_\alpha = A$, por lo que

$$S|u\rangle = SP_\alpha|u\rangle, \quad A|u\rangle = \varepsilon_\alpha AP_\alpha|u\rangle. \quad (\text{A.22})$$

Esta relación expresa el hecho de que la proyección sobre los espacios ε_S y ε_A de los kets que expanden al espacio ε_u son colineales. El postulado de simetrización sin ambigüedad indica (salvo una constante) el ket de ε_u que debe ser asociado con el estado físico considerado: $S|u\rangle$ para bosones y $A|u\rangle$ para fermiones. Este ket es conocido como el estado físico.

Espacio de Fock

Para partículas distinguibles la descripción adecuada del espacio de estados estará dada por el producto directo del espacio de una sola de ellas. La misma estrategia puede ser empleada para un sistema de n partículas indistinguibles, pero a expensas de marcar o numerar las partículas idénticas. El orden en que las partículas sean numeradas no tiene significado físico aunque los vectores de estado que difieren en la permutación de sus etiquetas, definen al mismo estado. Así en este modo de descripción tenemos una simetría bajo $n!$ permutaciones del etiquetado, violando el

principio de que sólo hay exactamente un vector de estado para cada estado físico de un sistema (excepto por una fase). La redundancia en la descripción de partículas idénticas debe ser removida limitando el espacio vectorial de estados a un subespacio que sea invariante bajo la permutación de sus etiquetas. Consideremos la existencia de un conjunto completo de variables dinámicas K , apropiadas para una partícula y caracterizamos el correspondiente conjunto de eigenvalores colectivamente por k_i . Un estado particular se especifica afirmando que de las n partículas, n_1 tienen el valor k_1 , n_2 tienen el valor k_2 , etc. Estados más generales son obtenidos de la superposición de dichos estados. Por otra parte es imposible decir que partícula tiene el valor k_1 , cual otra tiene el valor k_2 , etc.

En el desarrollo del marco de referencia matemático para estos conceptos, se define el espacio de estados para un sistema de n partículas en la suposición de que **cualquier conjunto completo de operadores K , que describa el comportamiento de una sola partícula, puede ser empleado para n partículas del mismo tipo**. Esta mínima suposición postulada como cierta aún en presencia de interacciones entre partículas, implica que el sistema compuesto mantiene las propiedades individuales de sus constituyentes.

Desde que hemos supuesto que el sistema compuesto de n partículas es meramente una colección de las partículas que lo forman, podemos suponer que a cada eigenvalor k_i de K le corresponde un operador conocido como número de ocupación denotado por N_i , cuyos eigenvectores caracterizan el estado en el cual un número definido, n_i , de partículas tienen el valor k_i . Los eigenvalores de N_i son los números de ocupación n_i . Como postulado fundamental, supondremos que la totalidad de operadores N_i forman un conjunto completo de operadores Hermitianos que conmutan. Teniendo esto en cuenta se escribe la base del sistema como el producto directo de los estados de cada una de las partículas; este espacio es conocido como **espacio de Fock**¹, i.e.,

$$|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle \otimes \cdots \otimes |n_i\rangle \cdots = |n_1, n_2, n_3, \cdots, n_i, \cdots\rangle, \quad (\text{A.23})$$

donde n_i denotan los eigenvalores de N_i . En particular se tiene el estado sin partículas, comunmente llamado vacío,

$$|0\rangle = |0, 0, 0, \cdots\rangle. \quad (\text{A.24})$$

Después tenemos los estados con una partícula,

$$|\Psi_i^{(1)}\rangle = |0, 0, 0, \cdots, n_i = 1, \cdots\rangle. \quad (\text{A.25})$$

¹Este espacio es una generalización de la mecánica cuántica a sistemas para los cuales el número de partículas no es una constante de movimiento.

Operadores de creación y aniquilación

Para una especie dada de partículas es útil definir los operadores de creación b_i^\dagger y aniquilación b_i que cumplan con las siguientes propiedades:

$$b_i^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots\rangle \propto |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i + 1, n_{i+1}, \dots\rangle, \quad (\text{A.26})$$

$$b_i |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots\rangle \propto |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots\rangle. \quad (\text{A.27})$$

Esto significa que añade o remueve una partícula al i -ésimo número de ocupación según sea el caso. Comenzando con el estado de una partícula se tiene que

$$\begin{aligned} b_i^\dagger |0\rangle &= |0, 0, 0, \dots, n_i = 1, \dots\rangle = |\Psi_i^{(1)}\rangle, \\ b_i |\Psi_j^{(1)}\rangle &= b_i |0, 0, 0, \dots, n_j = 1, \dots\rangle = \delta_{i,j} |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Como el vacío no tiene partículas que puedan ser destruidas, entonces el vacío se define con la condición

$$b_i |0\rangle = 0. \quad (\text{A.29})$$

Veamos ahora cómo se pueden expresar estos operadores bajo una transformación unitaria. Introduciendo un segundo conjunto completo de observables L con el conjunto de eigenvalores caracterizados colectivamente por l_q , los correspondientes operadores de número de ocupación serán denotados por \tilde{N}_q con eigenvalores \tilde{n}_q . La transformación está dada por

$$|\Psi_i^{(1)}\rangle = \sum_q |\Phi_q^{(1)}\rangle \langle \Phi_q^{(1)} | \Psi_i^{(1)} \rangle, \quad (\text{A.30})$$

donde los coeficientes complejos $\langle \Phi_q^{(1)} | \Psi_i^{(1)} \rangle$ forman una matriz unitaria. Por otra parte el vacío debe ser el mismo para las dos bases. El estado de una partícula en esta base se expresa

$$|\Phi_q^{(1)}\rangle = |0, 0, 0, \dots, n_q = 1, \dots\rangle. \quad (\text{A.31})$$

Introducimos los operadores de creación a_q^\dagger y de aniquilación a_q , que en esta nueva base deben de satisfacer

$$\begin{aligned} a_q^\dagger |\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{q-1}, \tilde{n}_q, \tilde{n}_{q+1}, \dots\rangle &\propto |\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{q-1}, \tilde{n}_q + 1, \tilde{n}_{q+1}, \dots\rangle, \\ a_q |\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{q-1}, \tilde{n}_q, \tilde{n}_{q+1}, \dots\rangle &\propto |\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{q-1}, \tilde{n}_q - 1, \tilde{n}_{q+1}, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Para el subespacio de estados con una partícula los operadores están relacionados por

$$\begin{aligned} b_i^\dagger |0\rangle &= |\Psi_i^{(1)}\rangle = \sum_q |\Phi_q^{(1)}\rangle \langle \Phi_q^{(1)} | \Psi_i^{(1)} \rangle = \sum_q a_q^\dagger |0\rangle \langle \Phi_q^{(1)} | \Psi_i^{(1)} \rangle \\ &= \left(\sum_q a_q^\dagger \langle \Phi_q^{(1)} | \Psi_i^{(1)} \rangle \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

comparando el primer término con el último se obtiene

$$b_i^\dagger = \sum_q a_q^\dagger \langle \Phi_q^1 | \Psi_i^1 \rangle; \quad (\text{A.34})$$

y tomando su adjunto

$$b_i = \sum_q \langle \Psi_i^{(1)} | \Phi_q^{(1)} \rangle a_q. \quad (\text{A.35})$$

La creación de una partícula con número cuántico k_i es equivalente a la superposición lineal de partículas creadas con números cuánticos l_q , cada uno de ellos contribuyendo con una amplitud $\langle \Phi_q | \Psi_i \rangle$. Vamos a suponer que las ecuaciones (A.34) y (A.35) se conservan más allá de los subespacios de una partícula y del vacío como ecuaciones entre operadores para el espacio completo de un sistema con cualquier número de partículas idénticas.

Álgebra de los operadores de creación y aniquilación

Lo primero es derivar las propiedades algebraicas de los operadores. Notamos que cuando dos operadores de creación $b_i^\dagger b_j^\dagger$ se aplican a un vector del espacio de estados, producen el mismo estado físico que $b_j^\dagger b_i^\dagger$, aunque la normalización de dicho estado depende del orden en que las partículas son creadas. Por lo tanto para cualquier estado $|\varphi\rangle$

$$b_i^\dagger b_j^\dagger |\varphi\rangle = \lambda b_j^\dagger b_i^\dagger |\varphi\rangle. \quad (\text{A.36})$$

Se mostrará que λ no depende de la representación ni de los subíndices i, j . Para hacer esto utilizamos las ecuaciones (A.34) y (A.35) de las cuales se obtiene

$$(b_i^\dagger b_j^\dagger - \lambda b_j^\dagger b_i^\dagger) |\varphi\rangle = \sum_{k,l} \langle \Phi_k | \Psi_i \rangle \langle \Phi_l | \Psi_j \rangle (a_k^\dagger a_l^\dagger - \lambda a_l^\dagger a_k^\dagger) |\varphi\rangle = 0, \quad (\text{A.37})$$

con la condición

$$\sum_k \langle \Psi_i | \Phi_k \rangle \langle \Phi_k | \Psi_j \rangle = \delta_{i,j}. \quad (\text{A.38})$$

Como la teoría debe de tener la misma forma en cualquier representación, entonces tiene que ser satisfecha para todos los estados $|\varphi\rangle$ sólo si para cada valor de (k, l) sucede

$$b_k^\dagger b_l^\dagger - \lambda b_l^\dagger b_k^\dagger = 0, \quad b_l^\dagger b_k^\dagger - \lambda b_k^\dagger b_l^\dagger = 0. \quad (\text{A.39})$$

De estas dos ecuaciones tenemos que $\lambda^2 = 1$, lo cual implica que $\lambda = \pm 1$. De aquí se sigue que hay dos clases de relaciones algebraicas para los operadores de creación de diferentes especies de partículas; estos deben de satisfacer las relaciones de conmutación o las relaciones de anticonmutación,

$$b_i^\dagger b_j^\dagger - b_j^\dagger b_i^\dagger = 0, \quad b_i^\dagger b_j^\dagger + b_j^\dagger b_i^\dagger = 0. \quad (\text{A.40})$$

Tomando el adjunto de las dos ecuaciones anteriores,

$$b_i b_j - b_j b_i = 0, \quad b_i b_j + b_j b_i = 0. \quad (\text{A.41})$$

Un argumento similar puede hacerse para dos operadores b_i y b_j^\dagger , i.e.,

$$b_i b_j^\dagger |\varphi\rangle = \mu b_j^\dagger b_i |\varphi\rangle. \quad (\text{A.42})$$

Para $i \neq j$ nos queda que

$$b_i b_j^\dagger - \mu b_j^\dagger b_i = 0; \quad (\text{A.43})$$

y para $i = j$,

$$b_i b_j^\dagger - \mu b_j^\dagger b_i = A. \quad (\text{A.44})$$

Para saber qué tipo de operador es A , lo hacemos actuar sobre el vacío. Utilizando la ecuaciones (A.26), (A.27) y (A.29), obtenemos

$$A|0\rangle = b_i b_i^\dagger |0\rangle - \mu b_i^\dagger b_i |0\rangle = b_i b_i^\dagger |0\rangle = |0\rangle. \quad (\text{A.45})$$

Comparando el primer término con el último se tiene que

$$A = \mathbf{I}. \quad (\text{A.46})$$

Completando el marco de referencia teórico, definimos el operador de número como $N_i = b_i^\dagger b_i$ cuyos eigenvalores son los número de ocupación n_i de las partículas para el cual K tiene el valor k_i ; además

$$N = \sum_i N_i, \quad (\text{A.47})$$

y no depende de la representación que se use:

$$\begin{aligned} N &= \sum_i N_i = \sum_i b_i^\dagger b_i = \sum_{i,q,r} a_q^\dagger \langle \Phi_q | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \Phi_r \rangle a_r = \sum_{q,r} a_q^\dagger \langle \Phi_q | \Phi_r \rangle a_r \\ &= \sum_q a_q^\dagger a_q = \sum_q \tilde{N}_q. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Si el vector base (A.23) es un eigenestado del operador N_i , se puede ver fácilmente que para $i \neq j$

$$N_i b_k - b_k N_i = 0, \quad N_i b_k^\dagger - b_k^\dagger N_i = 0; \quad (\text{A.49})$$

y para $i=j$ se tiene que

$$N_i b_i - b_i N_i = -b_i, \quad N_i b_i^\dagger - b_i^\dagger N_i = b_i^\dagger. \quad (\text{A.50})$$

Usando la ecuación (A.49) y con ayuda de las relaciones de conmutación y anti-conmutación ya obtenidas (Ecs. A.40 - A.41) y de la ecuación (A.43),

$$\begin{aligned} N_i b_k - b_k N_i &= b_i^\dagger b_i b_k - b_k b_i^\dagger b_i = b_i^\dagger b_i b_k - \mu b_i^\dagger b_k b_i = b_i^\dagger b_i b_k \mp \mu b_i^\dagger b_i b_k \\ &= b_i^\dagger b_i b_k (1 \mp \mu) = (1 \mp \mu) N_i b_k = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Esto implica que $\mu = \pm 1$; el +1 corresponde a partículas que obedecen la estadística de **Bose-Einstein**, y el -1 a partículas que obedecen la estadística de **Fermi-Dirac**. El mismo resultado se obtiene utilizando la ecuación (A.51) y las respectivas relaciones de conmutación.

Hemos llegado a la conclusión que sólo hay dos formas de relaciones de conmutación de operadores de creación y aniquilación para partículas idénticas:

$$\begin{array}{cc} \text{Bosones} & \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j^\dagger - \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_i^\dagger = \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j - \mathbf{b}_j \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j^\dagger - \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_i = \delta_i^j \end{array}} & \text{Fermiones} & \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j^\dagger + \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_i^\dagger = \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j + \mathbf{b}_j \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j^\dagger + \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_i = \delta_i^j \end{array}} \end{array}$$

Como las relaciones de conmutación para los bosones tienen la misma estructura que la de los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico, podemos escribir las ecuaciones (A.26) y (A.27) con sus coeficientes:

$$\begin{aligned} b_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots\rangle, \\ b_i^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Para fermiones consideramos una sola especie de partículas y utilizando la ecuación

$$bb^\dagger + N = I \quad (\text{A.53})$$

Se demostrará que los únicos números de ocupación n posibles son el 0, 1:

$$\begin{aligned} N^2 &= (I - bb^\dagger)^2 = I - 2bb^\dagger + bb^\dagger bb^\dagger = I - 2bb^\dagger + bb^\dagger (I - b^\dagger b) \\ &= I - 2bb^\dagger + bb^\dagger - bb^\dagger b^\dagger b = I - bb^\dagger - bb^\dagger b^\dagger b. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

De las relaciones de conmutación para partículas de la misma especie se tiene que $b^\dagger b^\dagger = 0$. La ecuación (A.54) se convierte en

$$N^2 = I - bb^\dagger = N \implies N^2 - N = 0. \quad (\text{A.55})$$

Por lo que $n = 0, 1$. Con este resultado y escogiendo una fase de tal forma que cumpla con las relaciones de conmutación tenemos que los estados para fermiones satisface

$$\begin{aligned} b|0\rangle &= 0, & b^\dagger|0\rangle &= |1\rangle, \\ b|1\rangle &= |0\rangle, & b^\dagger|1\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Variables Dinámicas

Se pueden construir variables dinámicas para un sistema de un número arbitrario de partículas. Sea el operador \mathcal{K} que mide el valor total de una cantidad aditiva K , como por ejemplo la energía cinética

$$\mathcal{K} = \sum_i K_i N_i = \sum_i K_i b_i^\dagger b_i. \quad (\text{A.56})$$

Es conveniente expresar \mathcal{K} en términos de un conjunto arbitrario de operadores de creación y aniquilación a_q^\dagger, a_q :

$$\mathcal{K} = \sum_i K_i b_i^\dagger b_i = \sum_i K_i \sum_{q,r} \langle \Phi_q | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \Phi_r \rangle a_q^\dagger a_r = \sum_{q,r} a_q^\dagger \langle \Phi_q | K | \Phi_r \rangle a_r. \quad (\text{A.57})$$

Un operador aditivo que representa la relación entre dos partículas, como por ejemplo la energía potencial, se puede escribir como

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} N_i N_j V_{ij} + \frac{1}{2} \sum_i N_i (N_i - 1) V_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (N_i N_j - N_i \delta_{ij}) V_{ij}. \quad (\text{A.58})$$

Se ha asumido sin pérdida de generalidad que los números V_{ij} forman una matriz real simétrica. Vamos a escribir $N_i N_j - N_i \delta_{ij}$ en términos de operadores de creación y aniquilación. Para $i \neq j$,

$$N_i N_j = b_i^\dagger b_i b_j^\dagger b_j = b_i^\dagger (\pm b_j^\dagger b_i) b_j = \pm b_i^\dagger b_j^\dagger (\pm b_j b_i) = b_i^\dagger b_j^\dagger b_j b_i; \quad (\text{A.59})$$

en el caso en que $i = j$ tenemos que

$$N_i^2 - N_i = b_i^\dagger b_i b_i^\dagger b_i - b_i^\dagger b_i = b_i^\dagger (1 + b_i^\dagger b_i) b_i - b_i^\dagger b_i = b_i^\dagger b_i^\dagger b_i b_i. \quad (\text{A.60})$$

Se observa que las expresiones son las mismas para bosones y fermiones. Esto implica que

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_i^\dagger b_j^\dagger b_j b_i V_{ij}. \quad (\text{A.61})$$

Mediante una transformación unitaria, y las ecuaciones (A.34) y (A.35), se obtiene

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{qr} \sum_{st} V_{ij} \langle \Phi_q | \Psi_i \rangle \langle \Phi_r | \Psi_j \rangle \langle \Psi_i | \Phi_s \rangle \langle \Psi_j | \Phi_t \rangle a_q^\dagger a_r^\dagger a_s a_t. \quad (\text{A.62})$$

Podemos ver que

$$\sum_{ij} V_{ij} \langle \Phi_q | \Psi_i \rangle \langle \Phi_r | \Psi_j \rangle \langle \Psi_i | \Phi_s \rangle \langle \Psi_j | \Phi_t \rangle = \langle \Phi_q \Phi_r | V | \Phi_s \Phi_t \rangle. \quad (\text{A.63})$$

Por lo tanto la ecuación (A.62) toma la forma

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{qrst} \langle \Phi_q \Phi_r | V | \Phi_s \Phi_t \rangle a_q^\dagger a_r^\dagger a_s a_t. \quad (\text{A.64})$$

con q,t denotando los índices de una partícula, y r,s los de la otra. La importancia del formalismo presentado radica en el hecho de que permite realizar cálculos que automáticamente toman en cuenta los aspectos combinatorios que surgen de las estadísticas de Bose-Einstein y Fermi-Dirac.

Apéndice B

Tensores irreducibles

B.1. Operadores tensoriales

Un operador tensorial irreducible de rango L se define como un conjunto de $2L+1$ funciones T_{LM} ($M = -L, -L+1, \dots, L$), tales que bajo el grupo de rotaciones $SO(3)$ se transforma de la siguiente manera

$$RT_{LM}R^{-1} = \sum_{M'} D_{M'M}^L(\alpha\beta\gamma)T_{LM'}, \quad (\text{B.1})$$

donde $R = \exp(-i\theta\hat{n} \cdot J)$ es el operador de rotación, que transforma funciones de onda ψ en $R\psi$ y operadores Ω en $R\Omega R^{-1}$. Los ángulos de *Euler* $\alpha\beta\gamma$ que describen la rotación y $D_{M'M}^L(\alpha\beta\gamma)$ son los elementos de matriz en la representación L . La ecuación (B.1) implica que un tensor irreducible de rango L debe transformarse simplemente como un armónico esférico de grado L .

Ahora consideremos la suma y el producto de tensores como los que aparecen en la ecuación (B.1). Sean $T_{L_1M_1}(A_1)$ y $T_{L_2M_2}(A_2)$ dos tensores esféricos de rango L_1 y L_2 respectivamente. Los símbolos A_1 y A_2 representan las otras variables de las cuales dependen los tensores. Por ejemplo, para armónicos esféricos A_1 y A_2 son las coordenadas angulares de dos puntos diferentes en el espacio. Para poder sumar los tensores antes mencionados, estos deben de tener el mismo rango, es decir, que para $T_{LM}(A_1)$ y $T_{LM}(A_2)$, la suma $T_{LM}(A_1) + T_{LM}(A_2)$ da otro tensor de rango L . Esto se sigue de la naturaleza lineal de la transformación (B.1).

Mediante el producto de dos tensores de rango L_1 y L_2 se puede construir un tensor de rango L , de la siguiente manera

$$T_{LM}(A_1A_2) = \sum_{M_1} \langle L_1M_1; L_2M - M_1 | LM \rangle T_{L_1M_1}(A_1)T_{L_2M-M_1}(A_2), \quad (\text{B.2})$$

el rango del tensor L se obtiene como la suma vectorial de los rangos L_1 y L_2 , mientras que la proyección resultante M se obtiene de la suma algebraica de M_1 y M_2 .

Ahora se prueba que el tensor T_{LM} definido en (B.2) es una componente del tensor irreducible de rango L si $T_{L_1M_1}$ y $T_{L_2M_2}$ son componentes de tensores irreducibles de rangos L_1 y L_2 respectivamente.

Haciendo una rotación de los ejes coordinados y utilizando (B.1) en el lado derecho de (B.2), tenemos

$$RT_{LM}(A_1A_2)R^{-1} = \sum_{M'_1M'_2} T_{L_1M'_1}(A_1)T_{L_2M'_2}(A_2) \\ \times \sum_{M_1} \langle L_1M_1; L_2M - M_1 | LM \rangle D_{M'_1M_1}^{L_1} D_{M'_2, M-M_1}^{L_2}.$$

Utilizando la series Clebsch-Gordan ¹ se obtiene

$$RT_{LM}(A_1, A_2)R^{-1} = \sum_{M'_1M'_2} T_{L_1M'_1}(A_1)T_{L_2M'_2}(A_2) \sum_{M_1} \langle L_1M_1; L_2M - M_1 | LM \rangle \\ \times \sum_{L'} \langle L_1M'_1; L_2M'_2 | LM'_1 + M'_2 \rangle \langle L_1M_1; L_2M - M_1 | L'M \rangle D_{M'_1+M'_2, M}^{L'},$$

reagrupando términos que involucran la M_1 y utilizando las propiedades de ortonormalización de los Clebsch-Gordan se tiene

$$RT_{LM}(A_1, A_2)R^{-1} = \sum_{M'_1M'_2} D_{M'_1+M'_2, M}^L \langle L_1M'_1; L_2M'_2 | LM'_1 + M'_2 \rangle T_{L_1M'_1}(A_1)T_{L_2M'_2}(A_2).$$

Denotando $M' = M'_1 + M'_2$, la ecuación anterior se expresa como

$$RT_{LM}(A_1, A_2)R^{-1} = \sum_{M'} D_{M'M}^L \sum_{M'_1} \langle L_1M'_1, L_2M' - M'_1 | LM' \rangle T_{L_1M'_1}(A_1)T_{L_2M'_2}(A_2) \\ = \sum_{M'} D_{M'M}^L T_{LM'}(A_1, A_2),$$

donde en la última expresión se utiliza (B.1); concluyendo la demostración.

La multiplicación y contracción de dos tensores esféricos de rango L_1 y L_2 , se puede llevar a cabo haciendo uso de la ecuación (B.2). El rango L del tensor resultante puede tomar los valores $|L_1 - L_2|, |L_1 - L_2| + 1, \dots, L_1 + L_2$.

¹ $D_{\mu_1 m_1}^{j_1} D_{\mu_2 m_2}^{j_2} = \sum_j \langle j_1 \mu_1; j_2 \mu_2 | j \mu_1 + \mu_2 \rangle \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j m_1 + m_2 \rangle D_{\mu_1 + \mu_2, m_1 + m_2}^j$, ver [5]

Si $L_1 = L_2$, es posible construir un invariante, es decir, un tensor de rango cero. Sustituyendo $L = 0$ y $L_1 = L_2$ en (B.2) se obtiene

$$T_{00}(A_1, A_2) = \sum_{M_1} \langle L_1 M_1; L_1 - M_1 | 00 \rangle T_{L_1 M_1}(A_1) T_{L_1 - M_1}(A_2) \quad (\text{B.3})$$

utilizando las propiedades de simetría de los coeficientes Clebsch-Gordan

$$\langle L_1 M_1; L_1 - M_1 | 00 \rangle = (-)^{L_1 - M_1} (2L_1 + 1)^{-\frac{1}{2}},$$

reemplazando este resultado en (B.3) y sacando los factores que no dependen de M_1 en la suma

$$T_{00}(A_1, A_2) = (-)^{L_1} (2L_1 + 1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{M_1} (-)^{M_1} T_{L_1 M_1}(A_1) T_{L_1 - M_1}(A_2),$$

al prescindir del subíndice en L y M ; y absorbiendo las constantes tenemos que

$$\mathcal{G}_L = \sum_M (-)^M T_{LM}(A_1) T_{L-M}(A_2),$$

donde $\mathcal{G}_L = (-)^L (2L + 1)^{\frac{1}{2}} T_{00}(A_1, A_2)$. Este invariante se obtuvo por medio de la contracción de dos tensores del mismo rango, de acuerdo con (B.2) y comúnmente se le conoce como el producto escalar de dos tensores. Para $L = 1$ es el producto escalar de dos vectores.

Por su parte Racah definió las componentes de un operador tensorial irreducible mediante las relaciones de conmutación con los operadores de momento angular. El conjunto de componentes T_{LM} constituye un tensor irreducible de rango L , si las relaciones de conmutación

$$[J_x \pm iJ_y, T_{LM}] = [(L \mp M)(L \pm M + 1)]^{\frac{1}{2}} T_{LM \pm 1}, \quad [J_z, T_{LM}] = MT_{LM},$$

son satisfechas. La prueba de que la definición de tensor irreducible es equivalente con la dada en (B.1) se pueden ver en [5].

B.2. Teorema de Wigner-Eckart

Habiendo definido las componentes de los tensores irreducibles y las relaciones de conmutación con los operadores de momento angular, la discusión se centra en la obtención de los elementos de matriz de T_{LM} entre dos estados que tienen momento angular bien definido. Para realizar estos cálculos es de utilidad e importancia el teorema de Wigner-Eckart, que dice

$$\langle j' m' | T_{LM} | j m \rangle = \langle j m; LM | j' m' \rangle \langle J' || T_L || j \rangle. \quad (\text{B.4})$$

La cantidad $\langle j' || T_M || j \rangle$ es llamada elemento de matriz reducido del tensor T_L y de acuerdo con la notación no depende de las proyecciones de los momentos angulares m, m' y M .

De la ecuación anterior podemos decir que las características geométricas o de simetría están incluidas totalmente en el coeficiente Clebsch-Gordan, mientras que las físicas se encuentran en el elemento de matriz reducido, lo que permite separarlas, además la conservación del momento angular esta implícita en el coeficiente Clebsch-Gordan.

Apéndice C

Elementos de matriz del operador Runge-Lenz

A continuación se obtendrán los elementos de matriz de las componentes del operador de Runge-Lenz respecto a la base del átomo hidrogenoide. El procedimiento a seguir es el siguiente. Tomando en cuenta la transformación (2.39), vemos que podemos escribir a los operadores de momento angular y de Runge-Lenz en función de un acoplamiento de dos momentos angulares J_1, J_2 con sus respectivas bases. Usando la teoría de momento angular, esto es, considerando las propiedades de simetría de los coeficientes de Clebsch-Gordan, el teorema de Wigner-Eckart, además de utilizar la relación que existe ente los coeficientes de Clebsch-Gordan con los de Racah (W), se obtendrá los elementos deseados.

La relación entre las bases $|nlm\rangle$ estados del átomo hidrogenoide y $|j\mu_1; j\mu_2\rangle$ estados de dos momentos angulares, es

$$|nlm\rangle = \sum_{\mu_1, \mu_2} \langle j\mu_1; j\mu_2 | lm \rangle |j\mu_1\rangle |j\mu_2\rangle. \quad (\text{C.1})$$

Teniendo en cuenta la relación de ortogonalidad de los coeficientes Clebsch-Gordan, podemos despejar la base $|j_1\mu_1\rangle |j_2\mu_2\rangle$

$$|j\mu_1\rangle |j\mu_2\rangle = \sum_{lm} \langle j\bar{\mu}_1; j\bar{\mu}_2 | lm \rangle |nlm\rangle. \quad (\text{C.2})$$

Utilizando el teorema de Wigner-Eckart, el elemento de matriz A_μ se escribe como

$$\langle nl'm' | A_\mu | nlm \rangle = \langle lm1\mu | l'm' \rangle \langle nl' || A || nl \rangle. \quad (\text{C.3})$$

Haciendo uso de la base $|j\mu_1\rangle |j\mu_2\rangle$, el elemento de matriz toma la forma

$$\langle nl'm' | A_\mu | nlm \rangle = \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu'_1 \mu'_2} \langle j\mu_1; j\mu_2 | lm \rangle \langle j\mu'_1; j\mu'_2 | l'm' \rangle \langle j\mu'_1; j\mu'_2 | A_\mu | j\mu_1; j\mu_2 \rangle. \quad (\text{C.4})$$

Considerando que $A_\mu = J_{1\mu} - J_{2\mu}$, junto con las relaciones

$$\begin{aligned} \langle j\mu'_1; j\mu'_2 | J_{1\mu} | j\mu_1; j\mu_2 \rangle &= \delta_{\mu_2\mu'_2} \langle j\mu'_1 | J_{1\mu} | j\mu_1 \rangle = \delta_{\mu_2\mu'_2} \langle j\mu_1 1\mu | j\mu'_1 \rangle \sqrt{j(j+1)}, \\ \langle j\mu'_1; j\mu'_2 | J_{1\mu} | j\mu_1; j\mu_2 \rangle &= \delta_{\mu_1\mu'_1} \langle j\mu'_2 | J_{2\mu} | j\mu_2 \rangle = \delta_{\mu_1\mu'_1} \langle j\mu_2 1\mu | j\mu'_2 \rangle \sqrt{j(j+1)}, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

el elemento de matriz de A_μ se escribe

$$\begin{aligned} \langle nl'm' | A_\mu | nlm \rangle &= \sum_{\mu_1\mu_2\mu'_1} \sqrt{j(j+1)} \langle j\mu_1; j\mu_2 | lm \rangle \langle j\mu_1 1\mu; j\mu_2 | l'm' \rangle \langle j\mu_1, 1\mu | j\mu'_1 \rangle \\ &- \sum_{\mu_1\mu_2\mu'_2} \sqrt{j(j+1)} \langle j\mu_1; j\mu_2 | lm \rangle \langle j\mu_1; j\mu_2 | l'm' \rangle \langle j\mu_2, 1\mu | j\mu'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Utilizando las propiedades de simetría de los coeficientes Clebsch-Gordan [5], podemos escribir la segunda parte de la ecuación (C.6) de la forma

$$(-)^{l+l'} \langle j\mu_2; j\mu_1 | lm \rangle \langle j\mu'_2; j\mu_1 | l'm' \rangle \langle j\mu_2, 1\mu | j\mu'_2 \rangle \sqrt{j(j+1)}. \quad (\text{C.7})$$

Intercambiando μ_1 por μ_2 , μ_2 por μ_1 , y μ'_2 por μ'_1 , se reescribe el elemento de matriz como

$$\langle nl'm' | A_\mu | nlm \rangle = [1 - (-)^{l+l'}] \sqrt{j(j+1)} I, \quad (\text{C.8})$$

donde

$$I = \sum_{\mu_1\mu_2\mu'_1} \langle j\mu_1; j\mu_2 | lm \rangle \langle j\mu_1; 1\mu | l'm' \rangle \langle j\mu'_1; j\mu_2 | l'm' \rangle. \quad (\text{C.9})$$

Usando nuevamente las propiedades de simetría de los coeficientes Clebsch-Gordan, se reescriben de tal forma que sea inmediata la identificación de I con un coeficiente W de Racah, esto es,

$$\begin{aligned} \langle j\mu_1; j\mu_2 | lm \rangle &= (-)^{j-\mu_1} \sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}} \langle lm; j - \mu_1 | j\mu_2 \rangle, \\ \langle j\mu'_1; j\mu_2 | l'm' \rangle &= (-)^{l'} \langle j\mu_2; j\mu'_1 | l'm' \rangle, \\ \langle j\mu_1; 1\mu | j\mu'_1 \rangle &= (-)^{j-\mu_1-1} \sqrt{\frac{2j+1}{3}} \langle j - \mu_1; j\mu'_1 | 1\mu \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Reemplazando lo anterior en I y reorganizando términos se obtiene

$$I = -(-)^{l'} \sqrt{(2l+1)(2j+1)} \langle lm; 1\mu | l'm' \rangle W(lj'l'j; j1). \quad (\text{C.11})$$

Por lo tanto el elemento de matriz tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle nl'm' | A_\mu | nlm \rangle &= -(-)^{l'} [1 - (-)^{l+l'}] \sqrt{j(j+1)(2l+1)(2j+1)} \\ &\times \langle lm; 1\mu | l'm' \rangle W(l'l'jj; 1j). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

En la ecuación anterior se ha utilizado la propiedad de simetría $W(abcd : ef) = W(acbd; fe)$ [5]. Podemos ver de aquí que el elemento de matriz reducido es

$$\langle nl' \| A \| nl \rangle = -(-)^{l'} [1 - (-)^{l'+l}] \sqrt{j(j+1)(2j+1)(2l+1)} W(l'jj; 1j). \quad (\text{C.13})$$

También puede verse que cuando $l' = l$, lo que está dentro del corchete es cero, y por lo tanto el elemento de matriz reducido es nulo.

Para el caso en que $l' = l + 1$ el elemento de matriz reducido toma la forma

$$\langle nl + 1 \| A \| nl \rangle = 2(-)^l \sqrt{j(j+1)(2j+1)(2l+1)} W(ll + 1jj; 1j). \quad (\text{C.14})$$

Aprovechando las propiedades de los coeficientes de Racah [5], se tiene que

$$\begin{aligned} W(ll + 1jj; 1j) &= (-)^{-l} W(l1jj; l + 1j) \\ &= (-)^{-l} \left[\frac{(l+1)(2j+2+l)(2j-l)}{(2l+1)(2l+3)2j(2j+1)(2j+2)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (C.14) se obtiene

$$\langle nl + 1 \| A \| nl \rangle = \left[\frac{(l+1)(2j+2+l)(2j-l)}{(2l+3)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.15})$$

Y recordando que

$$j = \frac{n-1}{2} \quad \implies \quad j(j+1) = \frac{1}{4}(n^2 - 1), \quad (\text{C.16})$$

se concluye con

$$\langle nl + 1 \| A \| nl \rangle = \left[\frac{(l+1)(n+l+1)(n-l-1)}{(2l+3)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.17})$$

En el caso para el cual $l' = l - 1$, el elemento de matriz reducido es

$$\langle nl - 1 \| A \| nl \rangle = 2(-)^{l+1} \sqrt{j(j+1)(2j+1)(2l+1)} W(ll - 1jj; 1j). \quad (\text{C.18})$$

Considerando que

$$\begin{aligned} W(ll - 1jj; 1j) &= W(l - 1ljj; 1j) = (-)^{1-l} W(l - 11jj; lj) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(2j+1-l)(2j+1+l)l}{j(j+1)(2j+1)(2l+1)(2l-1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

y sustituyendo (C.16), de la misma manera que en el caso anterior, se obtiene

$$\langle nl - 1 \| A \| nl \rangle = \left[\frac{l(n-l)(n+l)}{2l-1} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.19})$$

Apéndice D

Elementos de teoría de representaciones

Introduciendo un grupo de operadores $\{\mathbf{P}_R\}$ isomorfo al grupo de transformaciones $\{R\}$, los operadores \mathbf{P}_R se van a definir por su acción sobre una función escalar arbitraria $f(x)$ como

$$\mathbf{P}_R f(x) \equiv f'(x); \quad f'(x)|_{x=x_0} = f(x)|_{x=R^{-1}x_0}. \quad (\text{D.1})$$

El contenido físico de esta ecuación se puede ilustrar por medio de la figura (D.1), donde los contornos $f(x) = c$ y $\mathbf{P}_R f(x) = c$ representan las curvas de nivel. Bajo la acción de la operación R el punto A del sistema se traslada al B , pero la propiedad física descrita por la función escalar $f(x)$ tiene el mismo valor en los puntos A y B , esto es precisamente lo que la ecuación expresa.

Para que la correspondencia $R \longrightarrow \mathbf{P}_R$ sea un isomorfismo, la siguiente propiedad debe cumplirse: $P_S P_R = P_{SR}$. Pero esto es efectivamente cierto, ya que de la definición se tiene que

$$\mathbf{P}_{SR} f(x) \equiv g(x), \quad g(x)|_{x=x_0} = f(x)|_{x=(SR)^{-1}x_0}. \quad (\text{D.2})$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_S \mathbf{P}_R f(x) &= \mathbf{P}_S f'(x) \equiv f''(x); \\ f''(x)|_{x=x_0} &= f'(x)|_{x=S^{-1}x_0} = f(x)|_{x=R^{-1}(S^{-1}x_0)} = f(x)|_{x=(SR)^{-1}x_0}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

y como f es una función arbitraria, pedimos que $f'' = g$ con lo que se concluye que $\mathbf{P}_S \mathbf{P}_R = \mathbf{P}_{SR}$. Con esto queda establecido que \mathbf{P}_R es un grupo de operadores isomorfos al grupo de transformaciones físicas R .

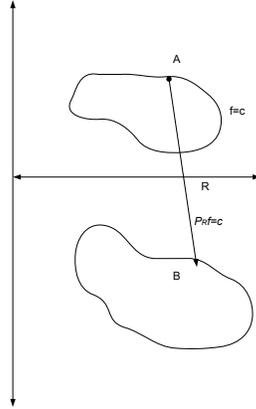


Fig. D.1: diagrama

El operador \mathbf{P}_R definido por la ecuación (D.1) es un operador unitario y lineal, es decir, satisface las condiciones

$$\begin{aligned} (f, g) &= (\mathbf{P}_R f, \mathbf{P}_R g), \\ \mathbf{P}_R\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} &= \alpha \mathbf{P}_R f(x) + \beta \mathbf{P}_R g(x). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Si tenemos un operador H , por ejemplo el hamiltoniano de nuestro sistema, y sucede

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad y \quad [\mathbf{P}_R, H] = 0, \quad (\text{D.5})$$

esto implica que

$$\mathbf{P}_R H|\psi\rangle = E \mathbf{P}_R|\psi\rangle = H \mathbf{P}_R|\psi\rangle. \quad (\text{D.6})$$

Ahora si suponemos que el eigenvalor E es degenerado con multiplicidad l y $\{\psi_1, \dots, \psi_l\}$ son eigenfunciones independientes asociadas a este valor, la ecuación (D.6) nos dice que $\mathbf{P}_R \psi_i$ es también eigenvalor del operador H , por lo que podemos escribir a $\mathbf{P}_R \psi_i$ como combinación lineal de las ψ^s , ie.,

$$\mathbf{P}_R \psi_i(x) = \sum_{j=1}^l D_{ji}(R) \psi_j(x), \quad i, j = 1, \dots, l. \quad (\text{D.7})$$

Se puede visualizar a $D_{ji}(R)$ como los elementos de una matriz $l \times l$. ¿Es $\{D(R)\}$ isomorfo a \mathbf{P}_R ? La respuesta es en sentido afirmativo. Para demostrarlo hacemos lo siguiente. Primero multiplicamos el operador \mathbf{P}_S a la izquierda de la ecuación (D.7)

y se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_S \mathbf{P}_R \psi_i &= \sum_j D_{ji}(r) \mathbf{P}_S \psi_j(x) = \sum_j \sum_k D_{ji}(R) D_{kj}(S) \psi_k(x) \\ &= \sum_k [D(S)D(R)]_{ki} \psi_k(x). \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Por la propiedad de grupos de \mathbf{P}_R tenemos que

$$\mathbf{P}_S \mathbf{P}_R \psi_i = \mathbf{P}_{SR} \psi_i(x) = \sum_k [D(SR)]_{ki} \psi_k(x). \quad (\text{D.9})$$

Comparando las ecuaciones (D.8) y (D.9) se llega a

$$D(SR) = D(S)D(R). \quad (\text{D.10})$$

El conjunto de matrices $D(R)$ de dimensión $l \times l$ es conocida como una representación del grupo $\{R\}$. Las l eigenfunciones independientes ψ_1, \dots, ψ_l asociadas al eigenvalor E se dice que portan la representación $\{D(R)\}$ del grupo de simetrías $\{R\}$ del Hamiltoniano H .

Las l eigenfunciones pueden ser ortonormalizadas; i.e., que deben satisfacer la condición $(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$. Entonces de las ecuaciones anteriores se deduce

$$\begin{aligned} (\psi_i, \psi_j) &= \delta_{ij} = (\mathbf{P}_R \psi_i, \mathbf{P}_R \psi_j) = \sum_{kmn} D_{mi}^\dagger(R) D_{nj}(R) (\psi_m, \psi_n) \\ &= \sum_m D_{mi}^\dagger(R) D_{mj}(R) = [D^\dagger(R)D(R)]_{ij}, \end{aligned}$$

es decir,

$$D^\dagger(R)D(R) = \mathbb{I}. \quad (\text{D.11})$$

Con esto se muestra que la representación es unitaria.

Propiedades Generales

Dado un grupo $G: \{E, A, B, \dots\}$ una representación de G es un grupo de matrices $\bar{G}: \{D(E), D(A), D(B), \dots\}$ tal que G es homomórfo sobre \bar{G} . Entonces existe una correspondencia $A \rightarrow D(A)$ y la condición

$$D(A) \cdot D(B) = D(AB) \quad (\text{D.12})$$

queda satisfecha para cualquier elemento del grupo. Si elementos distintos de G son representados por matrices distintas, se dice que la representación es fiel y en ese caso el mapeo $G \rightarrow \bar{G}$ es un isomorfismo. Sea M una matriz arbitraria no singular,

de la misma dimensión que $D(A)$; con la ayuda de M se construyen las siguientes matrices

$$\bar{D}(R) = M \cdot D(R) \cdot M^{-1}, \quad R \in G, \quad (\text{D.13})$$

donde las matrices \bar{G} Satisfacen la relación

$$\begin{aligned} \bar{D}(A)\bar{D}(B) &= (M \cdot D(A) \cdot M^{-1})(M \cdot D(B) \cdot M^{-1}) = M \cdot (D(A)D(B)) \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot D(AB) \cdot M^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

En el último paso se hizo uso la ecuación (D.12). Si se compara el primer termino con el último se obtiene

$$\bar{D}(A)\bar{D}(B) = \bar{D}(AB). \quad (\text{D.15})$$

Por lo tanto constituyen también una representación de G . Las dos representaciones $\{G\}$ y $\{\bar{G}\}$ relacionadas vía ecuación (D.13), se dice que son equivalentes. Desde el punto de vista de eigenfunciones del hamiltoniano H , el significado de representaciones equivalentes es el siguiente. Las eigenfunciones degeneradas del hamiltoniano, ψ_1, \dots, ψ_l no quedan unívocamente determinadas por H . Cualquier conjunto de funciones independientes ϕ_1, \dots, ϕ_l , formadas por una combinación lineal de las ψ'_s son eigenfunciones de H tan buenas como las ψ'_s mismas. Sea

$$\phi_i = \sum_{j=1}^l (M^{-1})_{ji} \psi_j \quad \Longrightarrow \quad \psi_i = \sum_{j=1}^l M_{ji} \phi_j. \quad (\text{D.16})$$

Usando las ecuaciones (D.7), (D.16) y la linealidad de \mathbf{P}_R , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_R \phi_i &= \sum_j (M^{-1})_{ji} \mathbf{P}_R \psi_j = \sum_{jk} (M^{-1})_{jk} D_{kj}(R) \psi_k \\ &= \sum_{jkm} (M^{-1})_{ji} D_{kj}(R) M_{mk} \phi_m = \sum_{m=1}^l (M \cdot D(R) M^{-1})_{mi} \phi_m, \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

y por lo tanto las funciones ϕ_1, \dots, ϕ_l , definidas por la ecuación (D.16) portan la representación $\{\bar{D}(R)\} \equiv \{M \cdot D(R) \cdot M^{-1}\}$ equivalente a la representación $\{D(R)\}$ portadas por las ψ'_s . Si el sistema ψ_1, \dots, ψ_l es ortonormal, la representación que porta, $D(R)$, es unitaria. Si queremos mantener la ortonormalidad en el conjunto ϕ_1, \dots, ϕ_l entonces la matriz M debe ser unitaria, por lo que la representación $\{\bar{D}(R)\} = \{M \cdot D(R) \cdot M^{-1}\}$ será unitaria.

Dadas dos representaciones $\{D(R_1)\}$ y $\{D(R_2)\}$ de G , podemos construir una nueva representación $\{\Delta(R)\}$ de G cuyas matrices son la suma directa de $D(R_1)$ y $D(R_2)$, es decir,

$$\Delta(R) = \left(\begin{array}{c|c} D(R_1) & 0 \\ \hline 0 & D(R_2) \end{array} \right), \quad R \in G. \quad (\text{D.18})$$

Una representación $\{D(R)\}$ para la cual no existe alguna transformación de semejanza que dé a todas las matrices $D(R)$ una forma de suma directa de matrices como en la expresión anterior, se dice que es irreducible.

Para finalizar esta sección haremos mención de los lemas de Schur

Lema I

Sean $D(R)$ y $D'(R)$ dos representaciones irreducibles del grupo G con diferentes dimensiones, si la matriz A satisface

$$D(R)A = AD'(R), \quad (\text{D.19})$$

para toda R en G , se sigue que $A = 0$.

Un caso especial sucede cuando la dimensión de las dos representaciones son iguales, en tal situación se sigue que para toda R en G , o $D(R)$ y $D'(R)$ son equivalentes o $A = 0$. Si consideramos una sola representación del grupo G podemos nombrar el segundo lema.

Lema II

Si las matrices $D(R)$ son una representación irreducible del grupo G , y si

$$AD(R) = D(R)A \quad (\text{D.20})$$

para toda R en G , esto implica que $A = c \cdot \mathbb{I}$.

Consideremos ahora la ecuación $Ax = \lambda x$, donde x es un vector en el espacio. La solución nos proporciona los eigenvalores y eigenvectores de A . Si x es un eigenvector correspondiente a λ , entonces usando la ecuación (D.20), encontramos que $D(R)x$ también es eigenvector correspondiente a λ . Así el subespacio de eigenvectores de A correspondientes a una λ dada es invariante bajo todas las transformaciones del grupo G . Esto significa que $D(R)$ es irreducible, a menos que este subespacio sea el espacio completo o el vector cero. La primer posibilidad implica que A tiene un único eigenvalor λ , esto es, que $Ax = \lambda \cdot \mathbb{I}$; la segunda implica que $A = 0$.

Este lema es muy útil como prueba de irreducibilidad. Dada una representación $D(R)$, se querrá encontrar una A tal que la ecuación (D.20) sea satisfecha. Si podemos mostrar que A debe ser un múltiplo de la matriz unidad, entonces $D(R)$ es irreducible.

Funciones base de representaciones irreducibles

Supongamos que conocemos todas las k representaciones irreducibles unitarias inequivalentes $\{D^{(1)}(R), \dots, D^{(k)}(R)\}$ de un grupo finito \mathcal{G} . con sus dimensiones $l_1, l_2 \dots l_k$ respectivamente.

Se vió al inicio del capítulo que para un grupo de operaciones físicas $\{R\}$ podemos definir un grupo isomorfo de operadores $\{P_R\}$. Sea $D^j(R)$ una representación unitaria de este grupo. Si para todo $R \in \mathcal{G}$, las l_j funciones $f_1^{l_j}(X), \dots, f_{l_j}^{l_j}(X)$, satisfacen las ecuaciones

$$P_R f_\mu^j(X) = \sum_{\lambda=1}^{l_j} D_{\lambda\mu}^{(j)}(R) f_\lambda^{(j)}(X); \quad \mu = 1, 2, \dots, l_j, \quad (\text{D.21})$$

entonces se dice que las f 's portan la representación irreducible $D^{(l_j)}(R)$, o bien que pertenecen a una base para la representación irreducible $D^{(j)}$, o alternatively que las f 's son funciones asociadas en la representación irreducible y que las $f_\mu^{(j)}(X)$ pertenecen al renglón μ de esa representación irreducible. Dada una función arbitraria $F(X)$ sobre la cual los operadores P_R pueden aplicarse, se puede obtener un conjunto de funciones base de representaciones irreducibles por el siguiente procedimiento. Se define la siguiente función

$$\phi_{j\lambda\mu}(X) \equiv \frac{l_j}{g} \sum_{s \in \mathcal{G}} D_{\lambda\mu}^{(j)*}(S) P_s F(X). \quad (\text{D.22})$$

Entonces usando la propiedad de grupo de los operadores P_R , de la ecuación (D.22) se obtiene

$$P_R \phi_{j\lambda\mu}(X) = \frac{l_j}{g} \sum_s D_{\lambda\mu}^{(j)*}(S) P_{RS} F(x). \quad (\text{D.23})$$

Escribiendo a S como $R^{-1}RS$ y usando la unitariedad de la representación irreducible se tendrá $D(R^{-1}RS) = D^\dagger(R) \cdot D(RS)$. Substituyendo en la ecuación anterior tenemos que

$$P_R \phi_{j\lambda\mu}(X) = \sum_{\nu=1}^{l_j} D_{\nu\lambda}^j(R) \left\{ \frac{l_j}{g} \sum_S D_{\mu\nu}^{(j)*}(RS) P_{RS} F(X) \right\}. \quad (\text{D.24})$$

Como es un grupo, se puede reordenar, ya que la suma sobre s contiene los mismos términos que la suma en la ecuación (D.22), sólo que en orden distinto. Por lo tanto

$$P_R \phi_{j\lambda\mu}(X) = \sum_{\nu=1}^{l_j} D_{\nu\lambda}^{(j)*}(R) \phi_{j\nu\mu}(X), \quad (\text{D.25})$$

lo cual demuestra que las ϕ 's definidas en (D.22) satisfacen las condiciones impuestas en la ecuación (D.21).

Hemos demostrado que para una $F(X)$ arbitraria, el conjunto de funciones

$${}_{\mu}f_{\lambda}^{(j)}(X) = \frac{l_j}{g} \sum_R D_{\lambda\mu}^{(j)*}(R) P_R F(X), \quad \lambda = 1, 2, \dots, l_j, \quad \mu \text{ fijo}, \quad (\text{D.26})$$

pertenecen a una base para la RI $\{D^j(R)\}$ del grupo finito \mathcal{G} . Además asignando los valores $1, 2, \dots, l_j$, al índice μ en forma consecutiva, podemos generar por este procedimiento l_j conjuntos de funciones base de la RI D^j . Puede ocurrir que, dependiendo de la función $F(x)$ elegida, algunos de estos conjuntos sean idénticamente nulos o dependan linealmente de ciertos conjuntos fundamentales. El operador que aparece aplicado a $F(x)$ en la ecuación (D.26) se le llama operador de proyección para el renglón λ de la RI D^j , y parámetro μ .

Apéndice E

Elemento de matriz del generador \mathcal{C}_2^3

En este apéndice se mosstrará cómo obtener los elementos de matriz de los generadores de ascenso respecto de la base de los estados de Gelfand-Tsetlin, haciendo uso de la ecuación (3.109). Con la ayuda de (3.108) se verá cuáles son los elementos diferentes de cero y con la ecuación antes citada se obtendrá el valor para cada caso. En este ejemplo seconsiderará al generador \mathcal{C}_2^3 .

Comenzaremos escribiendo el estado mas general para la representación del grupo $\mathcal{U}(3)$:

$$|(h)\rangle = \begin{vmatrix} h_{13} h_{23} h_{33} \\ h_{12} h_{22} \\ h_{11} \end{vmatrix}. \quad (\text{E.1})$$

De acuerdo a las ecuaciones (3.107) y (3.108) del capítulo 2, se tiene que

$$\langle (h') | \mathcal{C}_2^3 | (h) \rangle = 0, \quad (\text{E.2})$$

a menos de que

$$\begin{aligned} [h]_l &= [h]_l & \text{para } l &= 1, 3, \\ [h']_2 &= [h]_2 + \Delta_2(\tau_2) & \text{con } \tau_2 &= 1, 2; \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

esto es

$$[h'_{11}] = [h_{11}], \quad [h'_{13} h'_{23} h'_{33}] = [h_{13} h_{23} h_{33}], \quad [h'_{12} h'_{22}] = [h_{12} + \delta_{1\tau_2} h_{22} + \delta_{2\tau_2}]. \quad (\text{E.4})$$

Esto nos dice que tenemos dos posibles elementos de matriz: uno para $\tau_2 = 1$ y otro para $\tau_2 = 2$, con los correspondientes estados primados; esto es,

$$|(h')\rangle_{(\tau_2=1)} = \begin{vmatrix} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ h_{12} + 1 & h_{22} \\ h_{11} \end{vmatrix}, \quad |(h')\rangle_{(\tau_2=2)} = \begin{vmatrix} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ h_{12} & h_{22} + 1 \\ h_{11} \end{vmatrix}. \quad (\text{E.5})$$

Usando la ecuación (3.109) vamos a calcular los elementos de matriz del operador en cuestión; primero para el caso en que $\tau_2 = 1$ y después para $\tau_2 = 2$.

$${}_{(\tau_2=1)}\langle(h')|\mathcal{C}_2^3|(h)\rangle = \left[\frac{(-) \prod_{s=1}^3 (P_{s3} - P_{12} - 1) \prod_{s=1}^1 (P_{s1} - P_{12})}{\prod_{s=1, s \neq 1}^2 (P_{s2} - P_{12} - 1) \prod_{s=1, s \neq 1}^2 (P_{s2} - P_{12})} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{E.6})$$

Desarrollando, rearrreglando términos y sustituyendo el valor de los hooks se llega a la ecuación

$${}_{(\tau_2=1)}\langle(h')|\mathcal{C}_2^3|(h)\rangle = \left[\frac{(h_{13} - h_{12})(h_{12} - h_{23} + 1)(h_{12} - h_{33} + 2)(h_{12} - h_{11} + 1)}{(h_{12} - h_{22} + 1)(h_{12} - h_{22} + 2)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{E.7})$$

Para el segundo caso $\tau_2 = 2$ se tiene

$${}_{\tau_2=2}\langle(h')|\mathcal{C}_2^3|(h)\rangle = \left[\frac{\prod_{s=1}^3 (P_{s3} - P_{22} - 1) \prod_{s=1}^1 (P_{s1} - P_{22})}{\prod_{s=1, s \neq 2}^2 (P_{s2} - P_{22} - 1) \prod_{s=1, s \neq 2}^2 (P_{s2} - P_{22})} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{E.8})$$

Desarrollando y sustituyendo el valor de los hooks involucrados, se obtiene la expresión

$${}_{\tau_2=2}\langle(h')|\mathcal{C}_2^3|(h)\rangle = \left[\frac{(h_{13} - h_{22} + 1)(h_{23} - h_{22})(h_{22} - h_{33} + 1)(h_{11} - h_{22})}{(h_{12} - h_{22})(h_{12} - h_{22} + 1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{E.9})$$

Apéndice F

Diagramas de Young

Un diagrama de Young $Y_{[\lambda]}$ de la forma $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, donde las λ_i son enteros positivos que satisfacen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, es un arreglo que consiste de λ_1 cajas en el renglón primero, λ_2 cajas en el segundo renglón, \dots , λ_n cajas en el n -ésimo renglón, por ejemplo, para $[\lambda] = [5, 4, 3, 3, 2, 1]$

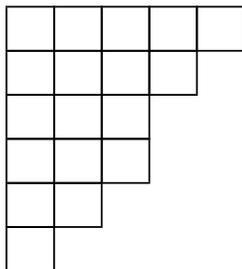


Fig. F.1: Diagrama de Young para $[\lambda] = [5, 4, 3, 3, 2, 1]$

Un patrón de Weyl (Young tableaux) consiste en un diagrama de Young donde se coloca un número entero que va del 1 hasta n en cada una de las cajas. Se dice que un patrón de Weyl es estándar si la secuencia de números enteros que aparecen en cada renglón de $Y_{[\lambda]}$ es no decreciente cuando se lee de izquierda a derecha mientras que la secuencia de números que aparecen en cada columna debe ser estrictamente creciente cuando se lee de arriba hacia abajo. El peso de un patrón de Weyl se define como el vector renglón $(W) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, en donde los w_k son igual al número de veces en que el entero k aparece en el patrón de Weyl. Si se tiene que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = N$ esto implica que $w_1 + w_2 + \dots + w_n = N$. Aquí llamaremos a $[\lambda]$ la partición de N en n partes. Generalmente a la hora de escribir la partición tomamos en cuenta a los ceros. Como un ejemplo de esto tenemos la partición de 4 en tres partes, que se puede escribir como $[400]$, $[310]$, $[220]$ y $[211]$. Cuando el

número de partes se sobreentienda se omiten los ceros por lo que los tres primeros casos del ejemplo anterior, toman la siguiente forma [4], [31] y [22], respectivamente.

Para fijar ideas tomemos los posibles patrones de Weyl correspondientes a

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \tag{F.1}$$

los cuales son

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}. \tag{F.2}$$

Por otra parte si escribimos el peso (w_1, w_2, w_3) de cada uno de los patrones de Weyl siguiendo el mismo orden, tenemos que

$$(210), \quad (120), \quad (201), \quad (111), \quad (021), \quad (102), \quad (012), \quad (111).$$

Puede verse fácilmente que para cada patón se satisface $w_1 + w_2 + w_3 = 3$.

Hooks

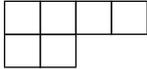
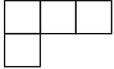
El (i, j) -hook de un diagrama $Y_{[\lambda]}$ consiste en la caja que está en el renglón i ($i = 1, 2, \dots, n$) y columna j ($j = 1, 2, \dots, \lambda_i$), para una i fija junto con las $(\lambda_i - j)$ cajas que se encuentran a la derecha (brazo del hook) y $(\lambda'_j - i)$ cajas hacia abajo (pierna del hook); el largo del hook P_{ij} es el número de cajas en el hook, esto es,

$$P_{ij} = (\lambda_i - j) - (\lambda'_j - i) + 1 = \lambda_i - \lambda_j + i - j + 1, \tag{F.3}$$

donde λ'_j corresponde al número de cuadros del j -ésimo renglón del diagrama conjugado de $Y_{[\lambda]}$ (intercambio de renglones por columnas) como ejemplo consideremos el siguiente diagrama de Young:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array}. \tag{F.4}$$

A continuación enlistaremos los hooks:

	hook	longitud	
(1, 1)		$P_{11} = 5$	
(1, 2)		$P_{12} = 4$	
(1, 3)		$P_{13} = 2$	
(1, 4)		$P_{14} = 1$	
(2, 1)		$P_{21} = 2$	
(2, 2)		$P_{22} = 1$	(F.5)

El diagrama de hooks de $Y_{[\lambda]}$, se obtiene al escribir la longitud P_{ij} en la caja (i, j) . Por ejemplo para el diagrama $Y_{[42]}$ se tiene que

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline \end{array} . \quad (\text{F.6})$$

Apéndice G

Relaciones de conmutación

Tomando en cuenta que $L_3^1 = \mathcal{C}_3^1(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 + 1) + \mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_3^2$, los conmutadores de este operador con los generadores de peso y descenso son

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_1^1, L_3^1] &= -L_3^1, & [\mathcal{C}_2^1, L_3^1] &= \mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_2^1, \\ [\mathcal{C}_2^2, L_3^1] &= 0, & [\mathcal{C}_3^2, L_3^1] &= 0, \\ [\mathcal{C}_3^3, L_3^1] &= L_3^1, & [\mathcal{C}_3^1, L_3^1] &= (\mathcal{C}_3^1)^2. \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

Mientras que con los de ascenso tienen la forma

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_1^2, L_3^1] &= -2\mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_1^2, \\ [\mathcal{C}_2^3, L_3^1] &= \mathcal{C}_2^1(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3 + 1) + \mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_2^3, \\ [\mathcal{C}_1^3, L_3^1] &= (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2)(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3 + 1) - \mathcal{C}_3^2\mathcal{C}_2^3 - \mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_1^3 + \mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2. \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Usando la ecuación (G.1) se calculará el conmutador de los generadores de peso con $(L_3^1)^n$, es decir,

$$[\mathcal{C}_1^1, (L_3^1)^n] = \sum_{r=0}^{n-1} (L_3^1)^{n-r-1} [\mathcal{C}_1^1, L_3^1] (L_3^1)^r = -n(L_3^1)^n, \quad (\text{G.3})$$

$$[\mathcal{C}_2^1, (L_3^1)^n] = 0, \quad (\text{G.4})$$

$$[\mathcal{C}_3^1, (L_3^1)^n] = \sum_{r=0}^{n-1} (L_3^1)^{n-r-1} [\mathcal{C}_3^1, L_3^1] (L_3^1)^r = n(L_3^1)^n. \quad (\text{G.5})$$

Lo que se hará a continuación es calcular el conmutador de $[\mathcal{C}_1^3, L_3^1]$ con L_3^1 , después el conmutador de este resultado con L_3^1 , y así sucesivamente. Para hacer esto vamos a escribir el conmutador de \mathcal{C}_1^3 con L_3^1 en términos de generadores de peso y el operador de Casimir del grupo. Consideremos el operador de Casimir del grupo $\mathcal{U}(3)$, es decir,

$$\Gamma_2^{(3)} = (\mathcal{C}_1^1)^2 + (\mathcal{C}_2^2)^2 + (\mathcal{C}_3^3)^2 + \mathcal{C}_1^2\mathcal{C}_2^1 + \mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2 + \mathcal{C}_3^2\mathcal{C}_2^3 + \mathcal{C}_2^3\mathcal{C}_3^2 + \mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_1^3 + \mathcal{C}_1^3\mathcal{C}_3^1, \quad (\text{G.6})$$

que mediante relaciones de conmutación entre los generadores puede ser escrito como

$$\Gamma_3 = (\mathcal{C}_1^1)^2 + (\mathcal{C}_2^2)^2 + (\mathcal{C}_3^3)^2 + 2(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3) + 2\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2 + 2\mathcal{C}_3^2\mathcal{C}_2^3 + 2\mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_1^3. \quad (\text{G.7})$$

Despejando y sustituyendo en la tercer línea de la ecuación (G.2), se obtiene

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_1^3, L_3^1] &= (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2)(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3 + 1) + \frac{1}{2}\{(\mathcal{C}_1^1)^2 + (\mathcal{C}_2^2)^2 + (\mathcal{C}_3^3)^2 + 2(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3) - \Gamma_2^{(3)}\} \\ &\quad + 2\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2. \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Si tomamos el conmutador de cada término con L_3^1 , considerando a (G.1) y que además el operador de casimir conmuta con todos los generadores del grupo, y por ende con cualquier operador de descenso, se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} [(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2)(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3 + 1), L_3^1] &= -2(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2)L_3^1 - L_3^1(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3 + 1) \\ &= -2L_3^1(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - 1) - L_3^1(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3 + 1) \\ &= -L_3^1(3\mathcal{C}_1^1 - 2\mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_3^3 - 1), \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

$$\begin{aligned} [(\mathcal{C}_1^1)^2, L_3^1] &= \mathcal{C}_1^1[\mathcal{C}_1^1, L_3^1] + [\mathcal{C}_1^1, L_3^1]\mathcal{C}_1^1 = -\mathcal{C}_1^1L_3^1 - L_3^1\mathcal{C}_1^1 = -2L_3^1\mathcal{C}_1^1 + L_3^1, \\ [(\mathcal{C}_2^2)^2, L_3^1] &= 0, \\ [(\mathcal{C}_3^3)^2, L_3^1] &= \mathcal{C}_3^3[\mathcal{C}_3^3, L_3^1] + [\mathcal{C}_3^3, L_3^1]\mathcal{C}_3^3 = \mathcal{C}_3^3L_3^1 + L_3^1\mathcal{C}_3^3 = 2L_3^1\mathcal{C}_3^3 + L_3^1, \\ [\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3, L_3^1] &= -2L_3^1, \end{aligned}$$

$$[\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2, L_3^1] = \mathcal{C}_2^1[\mathcal{C}_1^2, L_3^1] + [\mathcal{C}_2^1, L_3^1]\mathcal{C}_1^2 = -2\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_1^2 + \mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2 = -\mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2. \quad (\text{G.10})$$

Juntando las partes y reorganizando los términos se encuentra

$$[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1] = -2L_3^1(2\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_3^3) - 2\mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2. \quad (\text{G.11})$$

Repetiendo el proceso vamos a calcular el conmutador de la ecuación anterior con L_3^1 , tomando cada termino por separado, esto es

$$\begin{aligned} -2[L_3^1(2\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_3^3), L_3^1] &= -2L_3^1[2\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_3^3, L_3^1] = 6(L_3^1)^2, \\ [\mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2, L_3^1] &= \mathcal{C}_3^1[\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2, L_3^1] + [\mathcal{C}_3^1, L_3^1]\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2 = -(\mathcal{C}_3^1)^2\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2 + (\mathcal{C}_3^1)^2\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Por lo que

$$[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1] = 6(L_3^1)^2. \quad (\text{G.12})$$

De esta expresión se puede ver que

$$[[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1], L_3^1] = 0. \quad (\text{G.13})$$

A continuación se calculará el conmutador del generador \mathcal{C}_1^3 con $(L_3^1)^n$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_1^3, (L_3^1)^n] &= \sum_{r=0}^{n-1} (L_3^1)^{n-r-1} [\mathcal{C}_1^3, L_3^1] (L_3^1)^r \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (L_3^1)^{n-r-1} \{ (L_3^1)^r [\mathcal{C}_1^3, L_3^1] + [[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], (L_3^1)^r] \}. \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

Haciendo el conmutador que aparece en el segundo termino de la ecuación anterior por separado tenemos que

$$\begin{aligned} [[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], (L_3^1)^r] &= \sum_{s=0}^{r-1} (L_3^1)^{r-s-1} [[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1] (L_3^1)^s \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} (L_3^1)^{r-s-1} \{ (L_3^1)^s [[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1] + [[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^s] \}. \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Repetiendo el mismo procedimiento, hallamos que

$$[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^s] = \sum_{t=0}^{s-1} (L_3^1)^{s-t-1} [[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1] (L_3^1)^t. \quad (\text{G.16})$$

De la ecuación (G.13) podemos inferir que $[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1]$ conmuta con $(L_3^1)^t$ por lo que

$$[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^s] = s(L_3^1)^{s-1} [[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1]. \quad (\text{G.17})$$

Sustituyendo este resultado en (G.15) nos queda

$$\begin{aligned} [[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], (L_3^1)^r] &= \sum_{s=0}^{r-1} (L_3^1)^{r-s-1} \{ (L_3^1)^s [[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1] + s(L_3^1)^{s-1} [[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1] \} \\ &= r(L_3^1)^{r-1} [[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1] + \frac{r(r-1)}{2} (L_3^1)^{r-2} [[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1]. \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

En la línea anterior se ha usado la relación $\sum_{i=1}^r i = \frac{r(r-1)}{2}$. Reemplazando (G.18) en (G.14) obtenemos

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_1^3, (L_3^1)^n] &= \sum_{r=0}^{n-1} (L_3^1)^{n-r-1} \left\{ (L_3^1)^r [\mathcal{C}_1^3, L_3^1] + r(L_3^1)^{r-1} [[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{r(r-1)}{2} (L_3^1)^{r-2} [[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

Haciendo las respectivas sumas y reorganizando términos se llega a que

$$[\mathcal{C}_1^3, (L_3^1)^n] = \left\{ n(L_3^1)^{n-1}[\mathcal{C}_1^3, L_3^1] + \frac{n(n-1)}{2}(L_3^1)^{n-2}[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1] \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}(L_3^1)^{n-3}[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1] \right\}, \quad (\text{G.20})$$

en donde hemos usado el hecho de que $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$. Sustituyendo (G.2), (G.11), (G.12) y reorganizando términos encontramos

$$[\mathcal{C}_1^3, (L_3^1)^n] = n(L_3^1)^{n-1} \left\{ (C_1^1 - C_2^2)(C_1^1 - C_3^3 + 1) - (n-1)(2C_1^1 - C_2^2 - C_3^3) \right. \\ \left. + (n-1)(n-2) \right\} - n(L_3^1)^{n-1}(C_3^1 C_1^3 + C_3^2 C_2^3 - C_2^1 C_1^2) \\ - n(n-1)(L_3^1)^{n-2} C_3^1 C_2^1 C_1^2. \quad (\text{G.21})$$

Al actuar sobre el estado de máximo peso con esta ecuación se tiene

$$[\mathcal{C}_1^3, (L_3^1)^n] P|0\rangle = n(h_{13} - h_{23} - n + 1)(h_{13} - h_{33} - n + 2)(L_3^1)^{n-1} P|0\rangle. \quad (\text{G.22})$$

Consideremos ahora los conmutadores del generador \mathcal{C}_1^3 con potencias de los operadores de descenso:

$$[\mathcal{C}_1^3, (\mathbb{L}_2^1)^q] = \frac{1}{N_q} \sum_{r=0}^{q-1} (L_2^1)^{q-r-1} [\mathcal{C}_1^3, L_2^1] (L_2^1)^r = -\frac{1}{N_m} \sum_{r=0}^{q-r} (L_2^1)^{q-r-1} C_2^3 (L_2^1)^r \\ = -q \frac{N_{q-1}}{N_q} (\mathbb{L}_2^1)^{q-1} C_2^3, \quad (\text{G.23a})$$

$$[\mathcal{C}_1^3, (\mathbb{L}_3^2)^m] = \frac{1}{N_m} \sum_{r=0}^{m-1} (L_3^2)^{m-r-1} [\mathcal{C}_1^3, L_3^2] (L_3^2)^r = \frac{1}{N_m} \sum_{r=0}^{m-1} (L_3^2)^{m-r-1} C_1^2 (L_3^2)^r \\ = m \frac{N_{m-1}}{N_m} (\mathbb{L}_3^2)^{m-1} C_1^2. \quad (\text{G.23b})$$

De la misma manera vamos a calcular los conmutadores \mathcal{C}_2^3 y \mathcal{C}_1^2 con potencias de los operadores de descenso:

$$[\mathcal{C}_2^3, (\mathbb{L}_2^1)^q] = 0, \quad [\mathcal{C}_1^2, (\mathbb{L}_3^2)^m] = 0, \quad (\text{G.24})$$

$$[\mathcal{C}_2^3, (\mathbb{L}_3^2)^m] = \frac{1}{N_m} \sum_{r=0}^{m-1} (L_3^2)^{m-r-1} [\mathcal{C}_2^3, L_3^2] (L_3^2)^r = \frac{1}{N_m} \sum_{r=0}^{m-1} (L_3^2)^{m-r-1} (C_2^2 - C_3^3) (L_3^2)^r \\ = \frac{1}{N_m} \sum_{r=0}^{m-1} (L_3^2)^{m-r-1} \{ (L_3^2)^r (C_2^2 - C_3^3) + [C_2^2 - C_3^3, (L_3^2)^r] \}.$$

Pero

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_3^3, (L_3^2)^r] &= \sum_{s=0}^{r-1} (L_3^2)^{r-s-1} [\mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_3^3, L_3^2] (L_3^2)^s = \sum_{s=0}^{r-1} (L_3^2)^{r-s-1} (-2L_3^2) (L_3^2)^s \\ &= -2r(L_3^2)^r. \end{aligned} \quad (\text{G.25})$$

Por lo que

$$[\mathcal{C}_2^3, (\mathbb{L}_3^2)^m] = m \frac{N_{m-1}}{N_m} (\mathbb{L}_3^2)^{m-1} \{\mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_3^3 - m + 1\}, \quad (\text{G.26})$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_1^2, (\mathbb{L}_2^1)^q] &= \frac{1}{N_m} \sum_{r=0}^{q-1} (L_2^1)^{q-r-1} [\mathcal{C}_1^1, L_2^1] (L_2^1)^r \\ &= \frac{1}{N_m} \sum_{r=0}^{q-1} (L_2^1)^{q-r-1} \{(L_2^1)^r (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2) + [\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2, (L_2^1)^r]\}. \end{aligned} \quad (\text{G.27})$$

Pero

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2, (L_2^1)^r] &= \sum_{s=0}^{r-1} (L_2^1)^{r-s-1} [\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2, L_2^1] (L_2^1)^s = \sum_{r=0}^{q-1} (L_2^1)^{q-r-1} (-2L_2^1) (L_2^1)^s \\ &= -2r(L_2^1)^{q-1}. \end{aligned} \quad (\text{G.28})$$

Con esto en cuenta tenemos

$$[\mathcal{C}_1^2, (\mathbb{L}_2^1)^q] = \frac{N_{q-1}}{N_q} (\mathbb{L}_2^1)^{q-1} \sum_{r=0}^{q-1} \{\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - 2r\} = q \frac{N_{q-1}}{N_q} (\mathbb{L}_2^1)^{q-1} \{\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - q + 1\}. \quad (\text{G.29})$$

Para calcular el conmutador de \mathcal{C}_1^2 con $(\mathbb{L}_3^1)^n$ vamos a usar

$$[\mathcal{C}_1^2, L_3^1] = -2\mathcal{C}_3^1 \mathcal{C}_1^2, \quad (\text{G.30a})$$

$$\begin{aligned} [[\mathcal{C}_1^2, L_3^1], L_3^1] &= -2\mathcal{C}_3^1 [\mathcal{C}_1^2, L_3^1] - 2[\mathcal{C}_3^1, L_3^1] \mathcal{C}_1^2 = 4(\mathcal{C}_3^1)^2 \mathcal{C}_1^2 - 2(\mathcal{C}_3^1)^2 \mathcal{C}_1^2 \\ &= 2(\mathcal{C}_3^1)^2 \mathcal{C}_1^2, \end{aligned} \quad (\text{G.30b})$$

$$\begin{aligned} [[[\mathcal{C}_1^2, L_3^1], L_3^1], L_3^1] &= 2[(\mathcal{C}_3^1)^2 \mathcal{C}_1^2, L_3^1] = 2\mathcal{C}_3^1 [\mathcal{C}_3^1 \mathcal{C}_1^2, L_3^1] + 2[\mathcal{C}_3^1, L_3^1] \mathcal{C}_3^1 \mathcal{C}_1^2 \\ &= -2(\mathcal{C}_3^1)^3 \mathcal{C}_1^2 + 2(\mathcal{C}_3^1)^3 \mathcal{C}_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{G.30c})$$

Con esto en cuenta procederemos a hacer el cálculo:

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_1^2, \mathbb{L}_3^1] &= \frac{1}{N_n} \sum_{r=0}^{n-1} (L_3^1)^{n-r-1} [\mathcal{C}_1^2, L_3^1] (L_3^1)^r \\ &= \frac{1}{N_n} \sum_{r=0}^{n-1} (L_3^1)^{n-r-1} \{(L_3^1)^{n-r-1} [\mathcal{C}_1^2, L_3^1] + [[\mathcal{C}_1^2, L_3^1], (L_3^1)^r]\}. \end{aligned} \quad (\text{G.31})$$

Desarrollando en forma similar el conmutador que aparece en el segundo término de la ecuación anterior, se tiene

$$[[\mathcal{C}_1^2, L_3^1], (L_3^1)^r] = \sum_{s=0}^{r-1} (L_3^1)^{r-s-1} \{ (L_3^1)^s [[\mathcal{C}_1^2, L_3^1], L_3^1] + [[[\mathcal{C}_1^2, L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^s] \}. \quad (\text{G.32})$$

Pero de (G.30c) se puede inferir que $[[\mathcal{C}_1^2, L_3^1], L_3^1]$ conmuta con $(L_3^1)^s$ por lo que

$$[[\mathcal{C}_1^2, L_3^1], (L_3^1)^r] = r(L_3^1)^{r-1} [[\mathcal{C}_1^2, L_3^1], L_3^1]. \quad (\text{G.33})$$

Reemplazando (G.33) en (G.31) se obtiene

$$[\mathcal{C}_1^2, (L_3^1)^n] = \sum_{r=0}^{n-1} (L_3^1)^{n-r-1} \{ (L_3^1)^r [\mathcal{C}_1^2, L_3^1] + r(L_3^1)^{r-1} [[\mathcal{C}_1^2, L_3^1], L_3^1] \}. \quad (\text{G.34})$$

Haciendo las respectivas sumas y utilizando (G.30a)(G.30b) hallamos

$$[\mathcal{C}_1^2, (L_3^1)^n] = -2n(L_3^1)^{n-1} \mathcal{C}_3^1 \mathcal{C}_1^2 - \frac{n(n-1)}{2} (L_3^1)^{n-2} (\mathcal{C}_3^1)^2 \mathcal{C}_1^2, \quad (\text{G.35})$$

que al actuar sobre el estado de máximo peso da cero.

Conmutador de $L_3^{1\dagger}$ con $(L_3^1)^n$

$$\begin{aligned} [L_3^{1\dagger}, (L_3^1)^n] &= \sum_{r=0}^{n-1} (L_3^1)^{n-r-1} [L_3^{1\dagger}, L_3^1] (L_3^1)^r \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (L_3^1)^{n-r-1} \{ (L_3^1)^r [L_3^{1\dagger}, L_3^1] + [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], (L_3^1)^r] \}. \end{aligned} \quad (\text{G.36})$$

Desarrollando el conmutador del segundo término en forma análoga, tenemos que

$$\begin{aligned} [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], (L_3^1)^r] &= \sum_{s=0}^{r-1} (L_3^1)^{r-s-1} \{ (L_3^1)^s [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1] + [[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^s] \} \\ &= r(L_3^1)^{r-2} [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1] + \sum_{s=0}^{r-1} (L_3^1)^{r-s-1} [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], (L_3^1)^s]. \end{aligned} \quad (\text{G.37})$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (G.36) y reorganizando términos resulta

$$\begin{aligned} [L_3^{1\dagger}, (L_3^1)^n] &= n(L_3^1)^{n-1} [L_3^{1\dagger}, L_3^1] + \frac{n(n-1)}{2} (L_3^1)^{n-2} [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1] \\ &\quad + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{r-1} (L_3^1)^{n-s-2} [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], (L_3^1)^s]. \end{aligned} \quad (\text{G.38})$$

Desarrollando el conmutador que aparece en el tercer término de la ecuación anterior, tenemos

$$[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^s] = \sum_{t=0}^{s-1} (L_3^1)^{s-t-1} \{ (L_3^1)^t [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1] + [[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^t] \}. \quad (\text{G.39})$$

Haciendo la suma del primer término, el conmutador puede ser escrito como

$$[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^s] = s(L_3^1)^{s-1} [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1] + \sum_{t=0}^{s-1} (L_3^1)^{s-t-1} [[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^t]. \quad (\text{G.40})$$

Sustituyendo este resultado en (G.38) y reorganizando términos, encontramos

$$\begin{aligned} [L_3^{1\dagger}, (L_3^1)^n] &= n(L_3^1)^{n-1} [L_3^{1\dagger}, L_3^1] \\ &+ \frac{n(n-1)}{2} (L_3^1)^{n-2} [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1] \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} (L_3^1)^{n-3} [[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1] \\ &+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{t=0}^{s-1} (L_3^1)^{n-t-3} [[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^t]. \end{aligned} \quad (\text{G.41})$$

Los resultados anteriores nos sugieren hacer los múltiples conmutadores de $L_3^{1\dagger}$ con L_3^1 , es decir, conmutadores de la forma

$$[L_3^{1\dagger}, L_3^1], \quad [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], \quad [[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], \quad \dots$$

Para facilitar los cálculos, primero reescribimos el operador $L_3^{1\dagger}$ de la forma

$$L_3^{1\dagger} = AC_1^3 + B, \quad (\text{G.42})$$

donde $A = (C_1^1 - C_2^2 + 1)$ y $B = C_2^3 C_1^2$. Con esto se ha cambiado el problema de encontrar los múltiples conmutadores de $L_3^{1\dagger}$ con L_3^1 por los de C_1^3 , A y B con L_3^1 .

Los conmutadores de C_1^3 con L_3^1 los podemos ver de las ecuaciones (G.2), (G.11), (G.12) de este apéndice. Para el caso de A tenemos

$$[A, L_3^1] = -L_3^1, \quad [[A, L_3^1], L_3^1] = 0. \quad (\text{G.43})$$

Podemos notar que al segundo conmutador se anula. En el caso de B resulta

$$\begin{aligned} [B, L_3^1] &= -C_3^1 B + (C_1^1 - C_3^3) C_2^1 C_1^2, \\ [[B, L_3^1], L_3^1] &= -2\{(C_1^1 - C_3^3 + 1)C_3^1 + L_3^1\} C_2^1 C_1^2, \\ [[[B, L_3^1], L_3^1], L_3^1] &= 6L_3^1 C_3^1 C_2^1 C_1^2. \end{aligned} \quad (\text{G.44})$$

Teniendo en cuenta a (G.43), (G.44) y que $[[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1],], L_3^1, L_3^1, L_3^1] = 0$, calcularemos los múltiples conmutadores de $L_3^{1\dagger}$ con L_3^1 , comenzando con $[L_3^{1\dagger}, L_3^1]$ y en forma recursiva se obtendrán los demás:

$$[L_3^{1\dagger}, L_3^1] = [AC_1^3 + B, L_3^1] = A[C_1^3, L_3^1] + [A, L_3^1]C_1^3 + [B, L_3^1]. \quad (\text{G.45})$$

Tomando el conmutador del resultado anterior con L_3^1 , es decir,

$$[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1] = 2[A, L_3^1][C_1^3, L_3^1] + A[[C_1^3, L_3^1], L_3^1] + [[B, L_3^1], L_3^1]. \quad (\text{G.46})$$

Tomando nuevamente el conmutador con L_3^1 se tiene que

$$[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1] = 3[A, L_3^1][[C_1^3, L_3^1], L_3^1] + A[[[C_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1]. \quad (\text{G.47})$$

Repitiendo una vez más este proceso tenemos que

$$[[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], L_3^1] = 4[A, L_3^1][[[C_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1]. \quad (\text{G.48})$$

Dado que el doble conmutador de A con L_3^1 es cero y el cuarto conmutador de C_1^3 con L_3^1 también lo es, se sigue que

$$[[[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], L_3^1], L_3^1] = 0. \quad (\text{G.49})$$

El resultado anterior nos será de mucha utilidad en la ecuación (G.36). De regreso a (G.41) desarrollaremos el conmutador que aparece en el último término:

$$[[[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^t] = \sum_{k=0}^{t-1} (L_3^1)^{t-k-1} [[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], (L_3^1)] (L_3^1)^k. \quad (\text{G.50})$$

Y como $[[[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1]$ conmuta con L_3^1 , la expresión anterior se transforma en

$$[[[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], (L_3^1)^t] = t(L_3^1)^{t-1} [[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], L_3^1]. \quad (\text{G.51})$$

Si se reemplaza este resultado en (G.41) y se hacen las respectivas sumas se obtiene

$$\begin{aligned} [L_3^{1\dagger}, (L_3^1)^n] &= n(L_3^1)^{n-1} [L_3^{1\dagger}, L_3^1] \\ &+ \frac{n(n-1)}{2} (L_3^1)^{n-2} [[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1] \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} (L_3^1)^{n-3} [[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1] \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} (L_3^1)^{n-4} [[[[L_3^{1\dagger}, L_3^1], L_3^1], L_3^1], L_3^1]. \end{aligned} \quad (\text{G.52})$$

Sustituyendo el valor de cada conmutador y reorganizando los términos la expresión anterior queda escrita como

$$\begin{aligned}
[L_3^{\dagger}, L_3^1] &= n(L_3^1)^{n-1}(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 2)[\mathcal{C}_1^3, L_3^1] \\
&+ \frac{n(n-1)}{2}(L_3^1)^{n-2}(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 3)[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1] \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6}(L_3^1)^{n-3}(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - n + 4)[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1] \\
&+ n(L_3^1)^{n-2}Q\mathcal{C}_1^2 - n(L_3^1)^n\mathcal{C}_1^3,
\end{aligned} \tag{G.53}$$

donde Q es de la forma

$$Q = L_3^1(\mathcal{C}_1^1 + \mathcal{C}_3^3 - n + 1)\mathcal{C}_2^2 - (n-1)(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3 - n + 3)\mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_2^2 - L_3^1\mathcal{C}_3^1\mathcal{C}_2^3.$$

A continuación se escribirán los múltiples conmutadores de $[\mathcal{C}_1^3, L_3^1]$, $[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1]$ y $[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1]$ con $(\mathbb{L}_3^2)^m$:

$$\begin{aligned}
[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], (\mathbb{L}_3^2)^m] &= [(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2)(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3 + 1) + \frac{1}{2}\{(\mathcal{C}_1^1)^2 + (\mathcal{C}_2^2)^2 + (\mathcal{C}_3^3)^2 - \Gamma\} \\
&+ (\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3) + 2\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2, (\mathbb{L}_3^2)^m].
\end{aligned} \tag{G.54}$$

Tomando cada término por separado se tiene

$$\begin{aligned}
[(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2)(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3 + 1), (\mathbb{L}_3^2)^m] &= m(\mathbb{L}_3^1)^m(\mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_3^3 - m + 1), \\
[(\mathcal{C}_1^1)^2 + (\mathcal{C}_2^2)^2 + (\mathcal{C}_3^3)^2, (\mathbb{L}_3^1)^m] &= -2m(\mathbb{L}_3^2)^m(\mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_3^3 - m), \\
[\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_3^3, (\mathbb{L}_3^2)^m] &= -m(\mathbb{L}_3^2)^m, \\
[\Gamma, (\mathbb{L}_3^2)^m] &= 0, \\
[\mathcal{C}_2^1\mathcal{C}_1^2, (\mathbb{L}_3^2)^m] &= [\mathcal{C}_2^1, (\mathbb{L}_3^2)^m]\mathcal{C}_1^2.
\end{aligned} \tag{G.55}$$

Juntando los resultados previos se obtiene

$$[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], (\mathbb{L}_3^2)^m] = 2[\mathcal{C}_2^1, (\mathbb{L}_3^2)^m]\mathcal{C}_1^2. \tag{G.56}$$

Consideremos el siguiente caso:

$$\begin{aligned}
[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], (\mathbb{L}_3^2)^m &= -2L_3^1[2\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_3^3, \mathbb{L}_3^2] - 2\mathcal{C}_2^1[\mathcal{C}_3^1, (\mathbb{L}_3^2)^m]\mathcal{C}_1^2 \\
&= -2\mathcal{C}_3^1[\mathcal{C}_2^1, (\mathbb{L}_3^2)^m]\mathcal{C}_1^2.
\end{aligned} \tag{G.57}$$

Y finalmente se tiene que

$$[[[[\mathcal{C}_1^3, L_3^1], L_3^1], L_3^1], (\mathbb{L}_3^2)^m] = 6[(L_3^1)^2, (\mathbb{L}_3^2)^m] = 0. \tag{G.58}$$

Se puede ver que la acción de (G.56) y (G.57) sobre el estado de máximo peso es cero.

Apéndice H

Tensores unitarios de Racah

Lo que se hará a continuación es dar una relación entre los operadores unitarios de Racah y la forma acoplada de operadores de creación y aniquilación. Para hacer esto se utilizarán las propiedades de simetría de los coeficientes Clebsh-Gordan así como de la métrica en la base esférica. Con las relaciones dadas se reescribirán los operadores de Casimir de segundo orden de los grupos $\mathcal{U}(2l+1)$ y $SO(2l+1)$, hecho que nos será de utilidad en la discusión del hamiltoniano de un sistema de electrones en la capa d .

Los tensores unitarios de Racah se definen en términos de los generadores del grupo unitario de la siguiente manera:

$$\mathcal{U}_q^k(l', l) = \sum_{m, m'} \langle lm; kq | l' m' \rangle \mathcal{C}_{nl'm'}^{nlm}. \quad (\text{H.1})$$

En general el producto de dos tensores se escribe como

$$\underline{A}^k \cdot \underline{B}^k = \sum_{q=-k}^k (-)^q A_q^k B_{-q}^k.$$

Sustituyendo la expresión (H.1) en lugar de los tensores que aparecen en la ecuación anterior y desarrollando se tiene

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{U}}^k(l, l) \cdot \underline{\mathcal{U}}^k(l, l) &= \sum_{q=-k}^k (-)^q \mathcal{U}_q^k(l, l) \mathcal{U}_{-q}^k(l, l) \\ &= \sum_{q=-k}^k \sum_{m_1, m'_1} \sum_{m_2, m'_2} (-)^q \langle lm_1; kq | lm'_1 \rangle \langle lm_2; k-q | lm'_2 \rangle \mathcal{C}_{nlm'_1}^{nlm_1} \mathcal{C}_{nlm'_2}^{nlm_2}. \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

Separando las sumas junto con las variables de acuerdo con el subíndice y reescribiendo el generador $\mathcal{C}_{nlm'}^{nlm'}$ en términos de operadores de creación y aniquilación, se tiene

$$\sum_{m_1, m'_1} \sum_{m_{s_1}} \langle lm_1; kq | lm'_1 \rangle b_{nlm_1 m_{s_1}}^\dagger b^{nlm'_1 m_{s_1}}.$$

Utilizando las propiedades de simetría de los coeficientes Clebsch-Gordan y la métrica reescribimos la ecuación anterior como

$$(-)^l \sqrt{\frac{2(2l+1)}{2k+1}} \sum_{m_1 m'_1} \sum_{m_{s_1}} \langle lm'_1; l - m_1 | kq \rangle \langle \frac{1}{2} m_{s_1}; \frac{1}{2} - m_{s_1} | 00 \rangle b_{nlm'_1 m_{s_1}}^\dagger b_{nl - m_1 - m_{s_1}}.$$

Acoplando tanto en la parte orbital como de espín, la ecuación anterior se transforma en

$$(-)^l \sqrt{\frac{2(2l+1)}{2k+1}} [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{q0}^{k0}.$$

De forma similar se hace para otro conjunto de sumas y variables con subíndice 2, por lo que al sustituir estos resultados en (H.2) se llega a la expresión

$$\underline{\mathcal{U}}^k(l, l) \cdot \underline{\mathcal{U}}^k(l, l) = \frac{2(2l+1)}{2k+1} \sum_{q=-k}^k (-)^q [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{q0}^{k0} [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{-q0}^{k0}. \quad (\text{H.3})$$

Por ejemplo, para $k = 0$ la ecuación anterior toma la forma

$$\underline{\mathcal{U}}^0(l, l) \cdot \underline{\mathcal{U}}^0(l, l) = 2(2l+1) [b_{nl} \otimes b_{nl}]_{00}^{00} = \hat{N}. \quad (\text{H.4})$$

Seguimos con $k = 1$, esto es,

$$\underline{\mathcal{U}}^1(l, l) \cdot \underline{\mathcal{U}}^1(l, l) = \frac{2}{3} (2l+1) \sum_{q=-1}^1 (-)^q [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{q0}^{10} [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{-q0}^{10} = \frac{1}{l(l+1)} \hat{L}^2. \quad (\text{H.5})$$

Y como último ejemplo tenemos a $k = 2$:

$$\underline{\mathcal{U}}^2(l, l) \cdot \underline{\mathcal{U}}^2(l, l) = \frac{2}{5} (2l+1) \sum_{q=-2}^2 (-)^q [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{q0}^{20} [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{-q0}^{20}. \quad (\text{H.6})$$

Tomando la expresión del operador de Casimir de segundo orden que aparece en [12],

$$\Gamma(2l+1) = \sum_{k=0}^{2l} \left(\frac{2k+1}{2l+1} \right) \underline{\mathcal{U}}^k(l, l) \cdot \underline{\mathcal{U}}^k(l, l) \quad (\text{H.7})$$

y sustituyendo (H.3) se obtiene

$$\Gamma(2l + 1) = 2 \sum_{k=0}^{2l} 2l \sum_{q=-k}^k (-)^q [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{q0}^{k0} [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{-q0}^{k0}. \quad (\text{H.8})$$

De forma análoga se hace para el operador de Casimir de segundo orden del grupo $SO(2l + 1)$, esto es,

$$\begin{aligned} \Phi(2l + 1) &= \sum_{k=0}^{2l} [1 - (-)^k] \left(\frac{2k + 1}{2l + 1} \right) \underline{\mathcal{U}}^k(l, l) \cdot \underline{\mathcal{U}}^k(l, l) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{2l} [1 - (-)^k] \sum_{q=-k}^k (-)^q [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{q0}^{k0} [b_{nl}^\dagger \otimes b_{nl}]_{-q0}^{k0}. \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

Bibliografía

- [1] R. Lemus, *Introducción a la teoría de las representaciones de grupos con aplicaciones a sistemas moleculares y cristalinos*, Monografías de la Real Academia Sevillana de Ciencias, 2006, volumen 1.
- [2] M. Moshinsky, *Group Theory and the Many-Body Problem*, Gordon and Breach, Science Publishers, 1967, pp. 26.
- [3] E.U. Condon, H. Odabasi, *Atomic Structure*, Cambridge University Press, 1980, pp. 347-358
- [4] L. C. Biedenharn, *Quantum theory of angular momentum: A collection of reprints and original papers*, New york: Academic, 1965.
- [5] M.E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, John Wiley & Sons, 1957, pp. 37-38, 85-89, 110-111.
- [6] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, 1962, pp 67-69, 79.
- [7] M. Moshinsky, *Bases for the Irreducible Representations of the Unitary Groups and Some Applications*, Journal of Mathematical Physics **4**,9, 1963.
- [8] C.R. Hagen, A.J. Macfarlane, *Reduction of representations of SU_{mn} with respect to the subgroups $SU_m \otimes SU_n$* , Journal of Mathematical Physics **6**,1355, 1965.
- [9] J. Nagel, M. Moshinsky, *Operators that Lower or Rise the Irreducible Vector Spaces of U_{n-1} Contained in a irreducible vector Spaces of U_n* , Journal of Mathematical Physics **6**, 5, 1965.
- [10] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publications Inc. 1950.
- [11] D. J. Louck, *Recent Progress Toward a Theory of a Tensor Operators in the Unitary Groups*, American Journal of Physics, **38**, 1, 1970.

- [12] E. Chacón, *Introducción a la Teoría de los Grupos y sus Aplicaciones a la Mecánica Cuántica*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2008, pp. 74, 89-90.
- [13] B. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicist*, Arcourt Academic press, 2001, pp. 832,837.
- [14] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1964, pp. 391, 399-402, 414-416.
- [15] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, 1998.
- [16] D. J. Louck, *Group Theory of Harmonic Oscillators in n-Dimensional Space*, Journal of Mathematical Physics **6**, 11, 1965.
- [17] R. D. Cowan, *The Theory of Atomic Structure and Spectra*, University of California Press, 1981, pp. 11