



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

ROBUSTEZ Y FRAGILIDAD

en presencia de

PERTURBACIÓN Y RUIDO



TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

*Doctor en Ingeniería
Ingeniería Eléctrica - Control*

Presenta:

Marco Tulio Angulo Ballesteros

Tutores:

Dr. Leonid Fridman y Dr. Jaime A. Moreno

Julio 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez
Secretario: Dr. Luis Agustín Alvarez Icaza Longoría
Vocal: Dr. Leonid Fridman
1^{er} Suplente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez
2^o Suplente: Dr. Jorge Angel Dávila Montoya

Lugar donde se realizó la tesis:
Facultad de Ingeniería, UNAM, México, DF.

TUTOR DE LA TESIS: CO-TUTOR DE LA TESIS
Leonid Fridman Jaime A. Moreno Pérez

Firma

Firma

RESUMEN

Ruido y perturbación están inevitablemente presentes en la mayoría de los sistemas. Usualmente, el objetivo es aumentar la robustez a la perturbación a través del uso de realimentación basada en mediciones ruidosas. Sin embargo, debido a la presencia de mediciones ruidosas, existe un aparente compromiso entre incrementar la robustez a la perturbación e incrementar la fragilidad del sistema al ruido. Esto ocurre debido a que, bajo mediciones ruidosas, el controlador puede generar mas incertidumbre de la que es capaz de remover.

Exploramos este compromiso en el problema de control y diferenciación. Mostramos que en el caso de control no existe ningún compromiso: un controlador discontinuo, que elimina completamente la perturbación en ausencia de ruido, resulta también el mejor cuando hay ruido. En el caso de diferenciación ocurre lo mismo: un diferenciador discontinuo que es exacto en ausencia de ruido, resultan también mejor que un diferenciador lineal en presencia de ruido.

Ademas, se presentan dos variantes adicionales de un diferenciador: con desempeño óptimo \mathcal{H}_∞ ante ruido en la medición y con convergencia uniforme con respecto a la condición inicial. Finalmente, se aplican diferenciadores para construir observadores con entradas desconocidas. Para ello introducimos y caracterizamos la noción de observabilidad fuerte para sistemas no lineales.

El texto usa la fuente *Minion Pro*
diseñada por Robert Slimbach.
Esta letra neohumanística fue
usada primero por Adobe
en 1989 y desde entonces
ha sido revisada en varias ocasiones.

El uso intensivo de notas al margen,
y el uso de figuras a lo largo
de toda la página, fue inspirado por
Edward Tufte en su libro
Beautiful Evidence,
y por la tesis de Eivind Uggedal.



AGRADECIMIENTOS

Fueron cinco años en un parpadeo. ¡Que grata sorpresa! Tuve (una vez más) la fortuna de encontrar mucha gente que está en este trabajo de alguna manera u otra. Gracias a todos.

En especial los Dos Asesores. Al Dr. Leonid Fridman por su firme apoyo, entrega, solidaridad: las palabras no bastan. Al Dr. Jaime Moreno por su infinita paciencia en compartir conmigo: por todas esas horas que pasamos hablando de esto y aquello, y solo a veces de lo que teníamos que hablar. A ambos los he llegado a apreciar como amigos y como personas. La parte de “aplicaciones” fue hecha en colaboración con el Dr. Claude H. Moog¹ y su filosa ironía.

A mis padres y mi familia. Ojalá pueda seguir divirtiendome a su lado por muchos años más. ¿Cómo darles las gracias por todo? Gracias a Tesshin Sanderson y a la gente del Centro Zen de México. Menuda sorpresa me lleve al encontrarme con ellos al llegar al Distrito Federal. A la UNAM, el CONACyT (CVU 229959) y la gente de México. ¡Gracias a todos por ablandarme el Corazón!

1. Del IRCCyN, de la Ecole Centrale de Nantes, Francia.

Que maravilloso! Que maravilloso!
Yo y todos los seres en los diez mundos,
juntos! manifestando
en cada instante,
la sabiduría perfecta
de ser tal y como somos.

– *Shakyamuni Buda,*
*al ver la estrella del amanecer*².

2. He oído repetir a Tesshin esta frase mas veces de las que puedo recordar. Cuando vuelva a leer esto en algunos años, creo me recordará bien esta época.

CONTENIDO

Resumen i

Agradecimientos iii

Contenido v

- 1 Motivación y Resultados Principales 1
 - 1.1 Planteamiento del Problema 1
 - 1.2 El Resultado Principal en dos Figuras 3
 - 1.3 Resumen Ejecutivo 3
 - 1.4 Publicaciones realizadas 8

Los compromisos entre robustez y fragilidad

- 2 No hay compromisos en el Control 13
 - 2.1 Introducción 13
 - 2.2 Formulación del problema 14
 - 2.3 Resultados principales 15
 - 2.4 Interpretaciones y comentarios sobre los resultados 21
 - 2.5 Conclusión 22
- 3 Los compromisos en la Diferenciación 23
 - 3.1 Introducción 23
 - 3.2 Planteamiento del Problema 24
 - 3.3 El error de diferenciación para señales ruidosas 26
 - 3.4 Análisis del error de diferenciación 30
 - 3.5 Ejemplos numéricos 32
 - 3.6 Conclusiones 36
 - 3.7 Prueba de los Teoremas de la Sección 3 36
 - 3.8 Prueba de los Teoremas 3.4 y 3.5 42
 - 3.9 Calculando las Integrales 45

Otras propiedades interesantes en los diferenciadores

- 4 Diferenciador con desempeño \mathcal{H}_∞ 49
 - 4.1 Preliminares y Formulación del Problema 49
 - 4.2 Resultados Principales 53
 - 4.3 Un estudio comparativo 55

- 4.4 Fórmulas para las Ganancias Óptimas 57
- 4.5 Conclusiones 58
- 5 Diferenciador con convergencia uniforme 59
 - 5.1 Introducción 59
 - 5.2 Preliminares y Formulación del problema 60
 - 5.3 Convergencia uniforme 62
 - 5.4 Estabilidad de la parte uniforme 65
 - 5.5 Ejemplo en simulación 66
 - 5.6 Conclusiones 69

Aplicaciones

- 6 La Observabilidad Fuerte 73
 - 6.1 Introducción 73
 - 6.2 Observabilidad Fuerte 74
 - 6.3 El Algoritmo de estructura de Hirschorn 78
 - 6.4 Observabilidad Fuerte y Platitud Diferencial 80
 - 6.5 Conclusión 82
- 7 Conclusiones 83

Bibliografía 85

Appendices

- A Publicaciones realizadas 93

MOTIVACIÓN Y RESULTADOS PRINCIPALES

Ocultos, los beneficios del control automático pasan generalmente desapercibidos. Se han referido al control automático como la “tecnología invisible”¹ o la “tecnología detrás de la tecnología”. En [SA11], se ofrece una muy interesante recopilación del impacto que el control automático ha tenido en varios aspectos de la tecnología.

El control automático estudia el efecto y usos de la realimentación en los sistemas. Para poder realizar un análisis cuantitativo de su efecto, se comienza con una abstracción o modelo del sistema. En particular, los modelos descritos por ecuaciones diferenciales (ordinarias) son muy populares. Por un modelo de un sistema “real”, nos referiremos a un modelo matemático que contiene al menos dos cosas²: perturbaciones y mediciones ruidosas. Ambas incertidumbres son esencialmente inevitables en cualquier sistema real. Grosso-modo, el controlador es el encargado de manejar la realimentación en el sistema. El control debe operar bajo la presencia de ambas incertidumbres y, a pesar de ello, se espera que sea capaz de garantizar el comportamiento requerido en el sistema. Usualmente, el objetivo consiste en mejorar la robustez del sistemas a perturbaciones a través del monitoreo del estado interno del sistema y estimación de la perturbación (observación), para su posterior corrección por realimentación (control).

Este documento explora los compromisos que existen entre mejorar la robustez del sistema ante perturbaciones mediante el uso de realimentación y la fragilidad que esto puede producir debido a la presencia de ruido en la medición. A priori, la robustez contra perturbaciones no garantiza, de ninguna manera, la robustez del sistema ante la presencia de ruido en la medición usada para calcular la realimentación.

Se estudian estos compromisos en dos casos importantes: control y observación. Ambos pueden ser considerados a partir de un mismo problema elemental como se ilustra a continuación.

1.1 Planteamiento del Problema

Consideraremos el modelo probablemente más simple de un sistema real: un acumulador de información (integrador)

$$\dot{x}(t) = u(t) + \rho(t), \quad x(0) = x_0; \quad y(t) = x(t) + \eta(t), \quad (1.1)$$

con todas las variables escalares. La variable $x(t)$ es el estado del sistema, $u(t)$ una entrada conocida, $\rho(t) = \rho(x(t), t)$ una perturbación representando



1. Esta frase se le atribuye al Prof. Karl Åström, [Ast99], de la Universidad de Lund, Suecia.
2. La dinámica incierta o no modelada del sistema será considerada como “perturbación”. Además, a lo largo de este documento nos referiremos a la combinación de perturbación y ruido como “incertidumbres”.

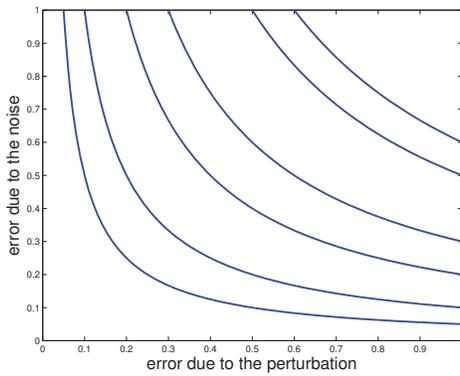


Figura 1.1: Como luce intuitivamente el compromiso entre robustez y fragilidad. El comportamiento de un sistema debe ajustarse a alguna curva azul.

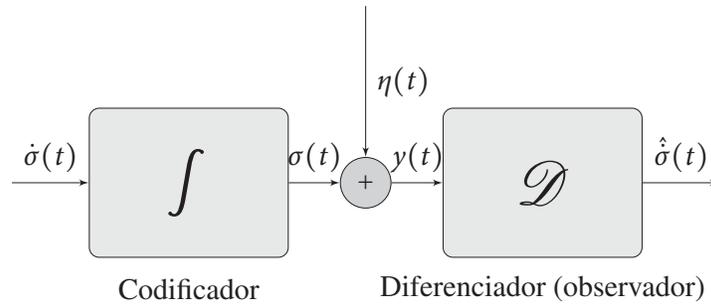


Figura 1.2: Diagrama a bloques del problema de diferenciación.

3. En control automático hay dos grandes enfoques para lidiar con incertidumbres: el estocástico y el determinístico. El enfoque estocástico predominó en los 60' y se basa en describir las incertidumbres como procesos estocásticos. Sin embargo, fuera del caso de variables aleatorias Gaussianas con media y varianza conocidas (y sistemas lineales!), los problemas son casi imposibles de resolver y muestran un pobre desempeño en la práctica.

4. Por un lado, cualquier problema de estabilización en un sistema de una-entrada una-salida puede ser reducido al Problema 1 cuando el sistema es diferencialmente plano con respecto a la salida $x(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. En particular, esto incluye cualquier sistema lineal controlable y una gran cantidad de sistemas no lineales de interés práctico, c.f., [SRA04]. Por otro lado, el problema de diseño de observadores para sistemas con incertidumbres puede ser reducido al Problema 2 de estimar derivadas de la salida del sistema, c.f., [Hau83].

la dinámica real del sistema o una entrada desconocida. La salida $y(t)$ tiene información del estado del sistema corrompida por ruido $\eta(t)$. La única suposición sobre las incertidumbres (ρ, η) es que están uniformemente acotadas

$$\sup_{t \geq 0} |\rho(t)| \leq L, \quad \sup_{t \geq 0} |\eta(t)| \leq \delta,$$

con L y δ constantes conocidas. De esta forma, ambas incertidumbres son descritas como funciones determinísticas acotadas pero desconocidas³.

Para este sistema tan simple, hay al menos dos⁴ problemas muy interesantes:

1. **Control:** elegir la entrada de control $u = u(y)$ para mantener el valor de x lo más cercano a cero, a pesar de la perturbación ρ y el ruido η . Esto ocurre, por ejemplo, cuando x representa temperatura, masa, cantidad de paquetes en un buffer, etc.
2. **Observación:** obtener un estimado de ρ usando únicamente la información de la salida y . Esto es equivalente al problema de construcción de un diferenciador, cuyo objetivo es obtener un estimado de la derivada de una señal que es medida con ruido, vea la Figura 1.2.

Ambos problemas son engañosamente simples, pero lejos de ser triviales. Por un lado, el problema de control con incertidumbre y ruido es difícil debido al compromiso que hay entre hacer el control muy “activo” para eliminar el efecto de la perturbación, y el hecho de que el control siempre puede equivocarse debido a errores provocados por el ruido.

Por otro lado, con respecto al Problema 2, las dificultades para diseñar un diferenciador son ampliamente conocidas, c.f. [DGC00] (*ill-posed problem*, el operador no está acotado en la métrica de $C^0(\mathbb{R})$, etc). Es aún más difícil diseñar un diferenciador que tolere ruido. Esencialmente, un diferenciador exacto (i.e. proporciona la derivada de cualquier señal a su entrada) es inútil pues también deberá de diferenciar el ruido. Sin embargo, ¿el ruido puede no ser diferenciable! Es por ello que en el diseño de un diferenciador también es

imperativo considerar los compromisos entre su exactitud y su fragilidad respecto al ruido.

De esta forma, intuitivamente es irresistible suponer que el aumentar la robustez ante perturbaciones (i.e. disminuir el error que provocan las perturbaciones) naturalmente conlleva a incrementar la sensibilidad al ruido (i.e. aumentar el error que provoca el ruido). Gráficamente, si se dibuja una gráfica del error debido a la perturbación contra el error debido al ruido, esto se representa con un comportamiento similar al presentado en la Figura 1.1.

1.2 El Resultado Principal en dos Figuras

Los dos resultados principales de este trabajo se ilustran en las Figuras 1.3 y 1.4. Ambas pueden ser dibujadas a partir de los resultados de los Capítulos 2 y 3, respectivamente.

La primera de ellas ilustra la forma del compromiso en el caso de control (Problema 1). Muestra que el error debido al ruido es δ independientemente del algoritmo de control usado. La diferencia en los controladores aparece solo en qué tanto pueden eliminar la perturbación. Por tanto, realmente no hay compromiso entre fragilidad y robustez en el problema de control. De esta forma, el mejor controlador⁵ resulta ser aquel que elimina completamente la perturbación.

En la segunda figura se ilustra el compromiso en el caso de diferenciación (Problema 2) para diferenciadores lineales y discontinuos⁶. Muestra en azul que el comportamiento de un diferenciador lineal coincide con el que intuitivamente se obtuvo en la Figura 1.1. La figura muestra en negro el comportamiento de un diferenciador discontinuo. A diferencia del caso lineal, es posible obtener error cero debido a la perturbación con un error acotado debido al ruido. Como sugere la figura, esto no es garantía de que el diferenciador discontinuo resulte mejor que el lineal. La contribución principal en este contexto resulta en mostrar que, de hecho, un diferenciador discontinuo siempre provee un menor error combinado que un diferenciador lineal⁷.

En la siguiente sección, discutimos con más detalles estos dos resultados, junto con algunos otros adicionales, dejando todos los detalles técnicos en su capítulo correspondiente.

1.3 Resumen Ejecutivo

1.3.1 Control.

En ausencia de ruido, existen dos alternativas populares para combatir la perturbación: Modos Deslizantes (SM⁸) y Alta Ganancia (HG) lineal. En la práctica, cual elegir depende de su desempeño con respecto al otro factor: ruido en la medición.

Por ejemplo, en ausencia de ruido, un controlador discontinuo $u = -k \text{sign}(y)$, con $k > L$, asegura estabilidad en tiempo finito. Es decir, proporciona además exactitud: el efecto de la perturbación es totalmente eliminado después de un transitorio. Sin embargo, la naturaleza discontinua del controlador lo hace

5. El mejor controlador es el que proporciona el menor error combinado con respecto a la perturbación y el ruido. En las gráficas, se determina a partir del que se encuentra más cercano en distancia euclidiana al origen.

6. Vea la Sección 1.3.2 y el Capítulo 3 para ver en que sentido son discontinuos.

7. Es decir, se comporta como la línea negra segmentada de la Figura 1.4 y no como la negra punteada.

8. A lo largo del documento, hemos decidido conservar las siglas en inglés que resulten comunes, e.g., “Sliding Mode” (SM) y “High Gain” (HG).

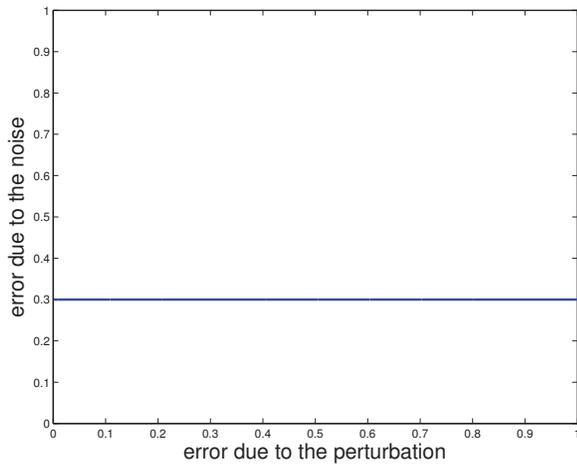


Figura 1.3: Robustez y fragilidad en un sistema de control. Independientemente del control usado, el error debido al ruido es δ . El error debido a la perturbación se hace cero con un controlador discontinuo.

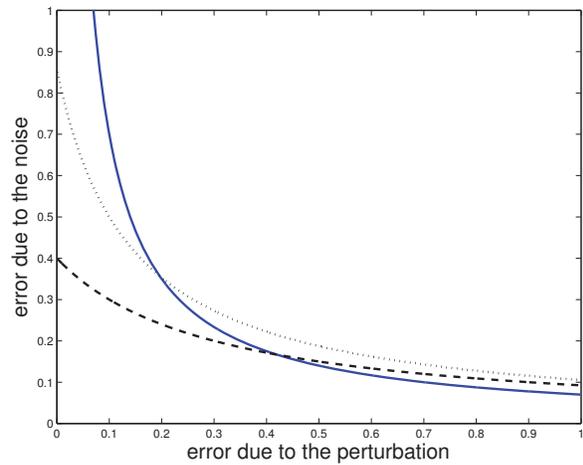


Figura 1.4: Robustez y fragilidad en el problema de diferenciación. En azul: el comportamiento de un diferenciador lineal. En negro el comportamiento de un diferenciador discontinuo.

9. De hecho, ruido infinitesimalmente pequeño puede generar desviaciones con magnitud $2k$ en la señal de control

especialmente sensible al ruido⁹. Por otro lado, si se usa un controlador lineal $u = -ky$, ruido pequeño sólo genera pequeñas desviaciones en la señal de control. Sin embargo, un controlador lineal (o continuo) no será capaz de remover completamente el efecto de la perturbación.

El problema que formulamos consiste en encontrar cual de las dos estrategias proporciona la mejor exactitud en presencia de ambas incertidumbres. Para ello, considere la siguiente familia de controladores

$$u = -k|y|^p \text{sign}(y), \quad k > 0, p \geq 0,$$

que permite considerar el caso de un control discontinuo por SM cuando $p = 0$, un control lineal cuando $p = 1$. El problema que se busca resolver es el siguiente:

¿Cuales son los parámetros (p, k) que proporcionan el mínimo error en estado estacionario en presencia de ruido y perturbación?

El resultado principal obtenido en esta parte es la respuesta a esta pregunta, junto con algunas interpretaciones. Primero, se muestra la existencia de un ruido admisible que genera el mismo error en estado estable para SM y HG, de hecho, para toda $p \geq 0$. Esto permite concluir que los controladores discontinuos y lineales son igualmente sensibles a ruido acotado, cuando su desempeño es medido usando el error en estado estable generado.

Como segundo punto, se muestra que sólo aparecen diferencias en el desempeño de los controladores cuando la perturbación está presente. En tal caso, se muestra que los controladores discontinuos son la selección óptima pues su error en estado estable es debido únicamente al ruido. Cualquier otro controlador tiene el mismo error debido al ruido, junto con un error adicional debido a la perturbación.

Interesantemente, esto muestra que los compromisos entre robustez y fragilidad no están presentes en este caso bajo las hipótesis consideradas: el

mejor controlador bajo ruido y perturbación es aquel diseñado sólo para remover la perturbación (i.e., un controlador exacto). Esto es, para diseñar un controlador óptimo bajo ambas incertidumbres, es suficiente considerar únicamente la presencia de perturbaciones y no de ruido¹⁰.

1.3.2 Diferenciación.

Dos problemas principales deben ser considerados en la construcción de un diferenciador: la presencia de ruido en la medición y la incertidumbre de la señal a ser diferenciada. Mediciones ruidosas están inevitablemente presentes en cualquier aplicación. Mas aún, un diferenciador idealmente exacto diferenciaría la señal junto con el ruido, produciendo grandes errores pues el ruido es de alta frecuencia.

La incertidumbre en la señal a diferenciar se produce por el hecho de que se espera que el mismo diferenciador sirva para una familia completa de señales. La exactitud¹¹ de un diferenciador en ausencia de ruido esta dada directamente por su habilidad de remover el efecto de tal incertidumbre. Note que un diferenciador exacto en una clase de señales también diferencia ruido perteneciente a la misma clase. De esta forma hay un compromiso entre incrementar la clase de señales donde el diferenciador es exacto e incrementar su sensibilidad a pequeño ruido en la medición. Por tanto, en la construcción de un diferenciador, es de nuevo fundamental considerar los compromisos entre robustez con respecto a la señal a diferenciar y la fragilidad que esto puede producir debido al ruido.

Sin alguna información sobre la señal a diferenciar es imposible construir un diferenciador con error acotado¹². Por tanto es necesario introducir algunas hipótesis.

Una hipótesis común en trabajos recientes es asumir que la derivada de la señal a diferenciar es Lipschitz, [Lev98, VK08]. De esta forma, definiendo $x_1 = \sigma$, $x_2 = \dot{\sigma}$, se puede describir la señal a diferenciar usando el modelo

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \rho, \quad y = x_1 + \eta, \quad (1.2)$$

donde la salida medida es y . En este sistema, $\rho := \ddot{\sigma}$ se considera como perturbación, en analogía con el caso de control. Bajo las hipótesis introducidas previamente, las incertidumbres satisfacen¹³

$$\sup_{t \geq 0} |\rho(t)| \leq L, \quad \sup_{t \geq 0} |\eta(t)| \leq \delta.$$

El problema de diferenciación consiste, entonces, en diseñar un observador para el sistema (1.2) bajo las incertidumbres (ρ, η) . Considere la siguiente clase de diferenciadores¹⁴

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon} \phi_1(\hat{x}_1 - y) + \hat{x}_2, \quad \dot{\hat{x}}_2 = -\frac{\alpha_2}{\varepsilon^2} \phi_2(\hat{x}_1 - y),$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ son constantes fijas¹⁵ que seleccionan la dirección de la ganancia y $\varepsilon > 0$ determina la amplitud de la ganancia del observador. Las funciones ϕ_1 y ϕ_2 están definidas por

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \mu_1 |x|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x) + \mu_2 x, \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{2} \mu_1^2 \text{sign}(x) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 |x|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x) + \mu_2^2 x, \end{aligned}$$

10. Argumentamos que esto ocurre dado que la hipótesis de ruido acotado no es suficiente para capturar el efecto de la “filtración del ruido”. Sin embargo, el pago por introducir una hipótesis mas sutil sobre el ruido es un análisis mucho mas complicado.

11. Un diferenciador se dice exacto sobre cierta clase de señales [Lev98], si para cualquiera de ellas $\sigma(t)$ su salida es $\dot{\sigma}(t)$.

12. Esto resulta claro en el esquema de la Figura 1.2, pues en tal caso $\dot{\sigma}(t)$ puede no depender de la información que tiene disponible el diferenciador $\{\sigma(\tau), \tau \in [0, t)\}$.

13. La derivada de una función Lipschitz existe y esta acotada para casi todo tiempo. Por tanto, siendo estrictos, es necesario reemplazar en ρ supremo por supremo esencial. Sin embargo, no perdemos generalidad al considerarlo así, pues solo difieren en un conjunto de medida cero, lo cual no afecta la ecuación diferencial.

14. Conocidos como Super-Twisting Generalizado (GST), vea [Mor11].

15. Una selección popularizada por Levant es $\alpha_1 = 1.5, \alpha_2 = 1.1$.

con $\mu_1, \mu_2 \geq 0$. El diferenciador Super-Twisting Generalizado (GST) incluye un diferenciador puramente lineal (de alta ganancia) cuando $\mu_1 = 0$ y un diferenciador Super-Twisting (ST) [Lev98] cuando $\mu_2 = 0$. En este último caso, el diferenciador tiene una inyección discontinua. Cuando μ_1 y μ_2 son positivos, el diferenciador GST tiene una combinación de términos ST y lineales.

En ausencia de ruido, un diferenciador ST es exacto proporcionando un estimado exacto en tiempo finito de la derivada. Esto a pesar de que la perturbación ρ está solamente uniformemente acotada. Sin embargo, al igual que en el caso de control, los términos discontinuos son más sensibles en presencia de ruido que los términos lineales. Por tanto, cuando la perturbación es muy pequeña con respecto al ruido¹⁶, intuitivamente resulta innecesario usar términos discontinuos para remover la perturbación y un observador lineal ($\mu_1 = 0$) proveerá un menor error.

En [Lev98], Levant muestra que cuando el ruido es pequeño y la ganancia se selecciona $\varepsilon \sim 1/\sqrt{L}$, el error del diferenciador ST es $K_s\sqrt{\delta L}$, para alguna constante $K_s > 0$. Este análisis es únicamente cualitativo, i.e., en términos de órdenes de magnitud. Sorprendentemente, Khalil y Vasiljevic en [VK08] muestran que cuando la ganancia de un simple diferenciador lineal se selecciona óptimamente usando $\varepsilon \sim \sqrt{\delta/L}$, entonces el error resulta también ser $K_l\sqrt{\delta L}$, para una constante $K_l > 0$ determinada explícitamente en su análisis.

Dado este último resultado, la pregunta natural resulta ser si vale la pena o no utilizar inyecciones discontinuas en el diferenciador. Es decir:

¿Es cierto que el uso de inyecciones discontinuas (a-la ST) puede mejorar el desempeño¹⁷ con respecto a un diferenciador lineal? Si es así, ¿Es cierto para todo par (L, δ) ?

La contribución principal en este contexto es contestar, por primera vez, a esta pregunta. La respuesta es contundentemente afirmativa: sin importar los parámetros (L, δ) , agregar inyecciones a la ST mejora el desempeño de un diferenciador lineal, Figura 1.5. Sin embargo, inyecciones lineales no mejoran el desempeño del diferenciador ST.

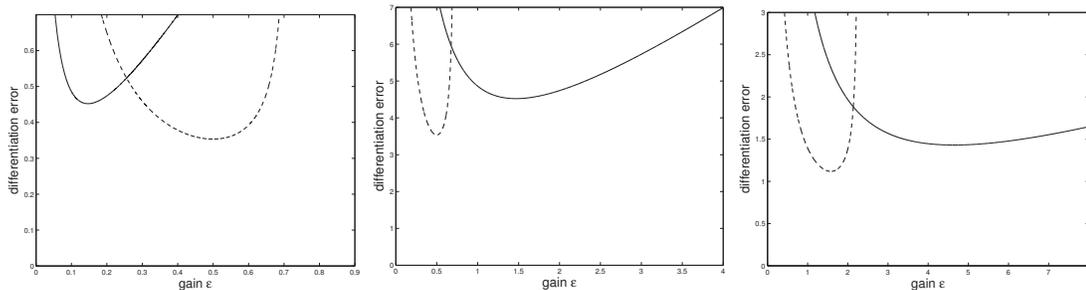


Figura 1.5: Cota final del error de diferenciación en función de ε . Línea sólida: caso lineal $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$; segmentada: ST puro $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$. Izquierda: parámetros $L = 1, \delta = 0.01$; mitad: parámetros $L = 1, \delta = 1$; derecha: parámetros $L = 0.1, \delta = 1$.

Para llegar a esta conclusión, fue necesario obtener un estimado preciso de la

16. Por ejemplo, $L = 0$ si σ está compuesto de segmentos de la forma $\sigma(t) = c_1 t + c_0$.

17. El desempeño de un diferenciador será medido únicamente por la cota final de su error de diferenciación. Mas detalles técnicos: en el Capítulo 3.

cota final del error de diferenciador para la familia de diferenciadores GST. Este constituye el aporte técnico principal de esta sección. Este análisis permite además elegir la ganancia óptima¹⁸ del diferenciador GST que proporciona el menor error de diferenciación.

Además, la constante de proporcionalidad de la precisión del diferenciador ST es explícitamente calculada¹⁹, a diferencia del análisis cualitativo original de Levant.

El análisis realizado también permite explorar la sensibilidad de los diferenciadores GST ante variaciones en la amplitud del ruido o la perturbación.

1.3.3 Otras propiedades en los diferenciadores.

Las ganancias del diferenciador GST del punto anterior también pueden ser seleccionadas para optimizar algún otro criterio. En particular, el criterio²⁰ \mathcal{H}_∞ ha sido ampliamente usado para medir el desempeño de sistemas bajo incertidumbres [RA02].

El problema consiste en seleccionar las ganancias óptimas del diferenciador GST que logren la máxima atenuación del efecto del ruido sobre el estimado de la derivada. Como el criterio \mathcal{H}_∞ usa la integral de la señal, se favorece un error con promedio cero. Esto resulta útil en aplicaciones de realimentación, donde la señal de control es filtrada naturalmente por la planta a controlar.

En general, caracterizar el desempeño \mathcal{H}_∞ de un sistema no lineal requiere resolver una desigualdad diferencial de Hamilton-Jacobi o utilizar Desigualdades Matriciales No-Lineales. Sin embargo, mostramos que para el diferenciador GST el desempeño \mathcal{H}_∞ puede ser caracterizado utilizando una simple Desigualdad Lineal Matricial (LMI), como si se tratara de un sistema lineal. Esto permite reformular el problema original como un problema de optimización en dimensión finita, sujeto a una LMI, que puede ser resuelto eficientemente usando métodos numéricos. Además, se calculan fórmulas analíticas para las ganancias óptimas en función de la cota de la perturbación y el ruido.

La segunda modificación consiste en mejorar el diferenciador de orden arbitrario por Modos Deslizantes de Orden Superior (HOSMs) [Lev03] de modo que su convergencia sea uniforme con respecto al error inicial de diferenciación²¹. Esta modificación es motivada por la construcción de observadores con entradas desconocidas para sistemas con switcheos.

Las derivadas de la salida son necesarias para construir un observador con entradas desconocidas si el grado relativo de la salida con respecto a la entrada desconocida es mayor a uno [Hau83]. Si se usa un diferenciador para estimar las derivadas en sistemas switcheados, es necesario que el diferenciador converja antes del siguiente instante de switcheo, independientemente de cuál fue el error inicial. En general, esto es solo posible ajustando la ganancia del diferenciador de acuerdo al error inicial de diferenciación. Sin embargo, los problemas de observación se basan en la hipótesis de que la condición inicial es desconocida. Por lo tanto, esta última estrategia no es realizable sin introducir antes algún ajuste²² a las hipótesis. Para resolver este problema sin introducir ninguna hipótesis adicional, es necesario que el tiempo de convergencia del diferenciador esté

18. La ganancia óptima puede ser obtenida por simple inspección, al encontrar al encontrar el argumento que minimiza las curvas de las gráficas de la Figura 1.5.

19. Para la selección $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.1$, la (mejor) constante de precisión del diferenciador lineal resulta ser $K_l = 4.522$, mientras que la del ST es $K_s = 3.535$. Uno puede comparar también con la mejor precisión (teórica) que es posible $2\sqrt{2} = 2.828$, c.f. [Lev98].

20. El criterio \mathcal{H}_∞ calcula la “ganancia” del sistema cuando la entrada y la salida son medidas usando la norma \mathbb{L}^2 .

21. El diferenciador HOSMs converge en cierto tiempo finito que depende del error inicial de diferenciación. La convergencia uniforme busca que el tiempo de convergencia desde cualquier error inicial este uniformemente acotado por una constante.

22. Por ejemplo, en [BF10b, SMD⁺06] se asume una cota conocida de la condición inicial. Esto permite que el error de diferenciación siempre inicie en un compacto y por tanto, que el tiempo de convergencia del diferenciador esté uniformemente acotado.

uniformemente acotado con respecto a la condición inicial. Un diferenciador de primer orden con esta propiedad a sido recientemente construido usando funciones de Lyapunov [CZMF11].

Nuestra contribución consiste en construir un diferenciador exacto de orden arbitrario con convergencia uniforme con respecto a la condición inicial. Esto se logra combinando el diferenciador por HOSMs [Lev03] con una nueva parte que converge uniformemente. Se muestra que al invertir simplemente el grado de homogeneidad que caracteriza la convergencia en tiempo finito del diferenciador, se obtiene convergencia uniforme. Esta observación permite construir directamente un diferenciador que converge uniformemente a una vecindad del error cero de diferenciador. Este es luego combinado con el diferenciador por HOSMs para obtener el diferenciador exacto y uniforme. La estabilidad de la nueva parte del diferenciador es deducida usando una forma cuadrática como función de Lyapunov para el sistema lineal y al usar las propiedades de homogeneidad y continuidad de la nueva parte uniforme.

1.3.4 Observabilidad fuerte

El concepto de “Observabilidad Fuerte” fue introducido para resolver el problema de diseño de observadores con entradas desconocidas para sistemas lineales [Mol76, Hau83]. Es una condición necesaria y suficiente para la distinguibilidad²³ del estado usando solo información de la salida.

Sorprendentemente, la observabilidad fuerte no ha sido caracterizada para sistemas no lineales en general. Observadores que usan solo la salida han sido diseñados ya sea para alguna clase específica de sistemas o bajo condiciones suficientes.

Nuestra contribución es introducir la noción de observabilidad fuerte local para sistemas no lineales junto con un criterio constructivo para su decisión. También es presentada una caracterización completa en términos algebro-geométricos. Se muestra que las caracterizaciones geométricas y algebraicas son fundamentalmente distintas. Por tanto, un producto adicional de la observabilidad fuerte es la evidencia de una diferencia fundamental entre los enfoques algebraicos y geométricos para el análisis de sistemas no lineales.

Ademas, se establecen conexiones entre observabilidad fuerte y la existencia de un inverso estático por la izquierda del sistema. En particular, se muestra que la observabilidad fuerte de sistemas cuadrados²⁴ con entradas no triviales se reduce a sistemas diferencialmente planos, i.e., a sistemas que pueden ser completamente linealizados por realimentación. Esto es un tanto sorprendente, pues los sistemas diferencialmente planos son controlables, mientras que, esencialmente, no se ha realizado ninguna hipótesis sobre controlabilidad.

1.4 Publicaciones realizadas

Citas: 8 (Fuente GoogleScholar)

- Artículos de revista: [2 IJSS, 1 Automatica];
- Artículos en conferencias internacionales: [2 CDC, 2 IFAC, 2 VSS, 1 CCE, 1 ACC, 2 ADHS];

23. El concepto de “distinguibilidad” de trayectorias es el cimiento de la observabilidad. Un sistema es observable si dos trayectorias de estado distintas generan trayectorias de medición distintas.

24. Sistemas con el mismo número de entradas que de salidas.

- Artículos en revisión: [1 S&CL, 1 TAC, 1 Automatica, 2 IJRNC, 2 CDC];
- Artículos en preparación: [1 CDC].

El Apéndice A contiene una lista detallada de las publicaciones realizadas.

PARTE I

LOS COMPROMISOS ENTRE ROBUSTEZ Y FRAGILIDAD

NO HAY COMPROMISOS EN EL CONTROL

El desempeño de controladores lineales y discontinuos es discutido. La pregunta que formulamos es cuál de las dos clases de controladores se desempeña mejor bajo ruido y perturbación; además de si existe una mejor clase de controladores que estos dos.

Usando un ejemplo elemental, se muestra que bajo solo la hipótesis de incertidumbres acotadas, los algoritmos lineales y discontinuos son igualmente sensibles al ruido al medir su desempeño usando el error en estado estable que producen. Por tanto, como los controladores discontinuos pueden ser exactos a perturbaciones, resultan ser la elección óptima bajo tanto ruido como perturbación.

2

2.1 Introducción

Ruido en la medición y perturbación¹ están inevitablemente presentes en la mayoría de los sistemas. Usualmente, el objetivo del controlador es atenuar el efecto de la perturbación a pesar de hacer uso de mediciones ruidosas.

Existe un aparente compromiso entre aumentar la robustez del sistema ante perturbaciones (e.g. exactitud) e incrementar su fragilidad al ruido por el uso de mediciones ruidosas. Intuitivamente, es posible hacer al controlador “muy activo” para remover el efecto de las perturbaciones, pero al mismo tiempo, este siempre puede equivocarse debido al ruido en la medición de modo que genera “más perturbación” de la que elimina. Considerar estos compromisos es de fundamental importancia en el diseño del control.

Por un lado, en ausencia de ruido, los controladores discontinuos pueden ser exactos: remueven completamente el efecto de la perturbación. Sin embargo, los controladores discontinuos son más sensibles al ruido que los controladores continuos². Sin embargo, ningún controlador continuo (y por tanto lineal) puede remover completamente el efecto de una perturbación acotada.

En este capítulo, identificaremos este compromiso usando un ejemplo de dos enfoques de control populares: Modos Deslizantes (SM) y lineal por Alta-Ganancia (HG) [Kha07, pp. 610]. El menor error en estado estable³ será usado como índice de desempeño. La única suposición sobre el ruido y la perturbación es que ambos están acotados.

La selección de estas dos estrategias de control está motivada por el hecho de que su desempeño se considera “óptimo” en los casos extremos. Por un lado, en ausencia de ruido, un controlador por SM puede remover completamente el

1. A lo largo de este documento, nos referiremos a la combinación de ruido y perturbación como “incertidumbres”.

2. Ruido pequeño en un controlador continuo causa pequeñas desviaciones en la señal de control. Esto no siempre es cierto en un controlador discontinuo. Además, los controladores lineales son muy usados en presencia de ruido “blanco” pues resultan ser óptimos en sentido “energético promedio”.

3. O menor “cota final” del error.

4. Vea mas detalles en [Ber00].
Además, en la comunidad de control es común la opinión de que los controladores por SM son tan malos bajo ruido que son inservibles en la práctica.
5. Un criterio integral que cuantifica el “calor liberado” o trabajo realizado debido a las oscilaciones resultantes.

6. Y cualquier controlador “entre ellos” obtenido haciendo una homotopia entre la función signo y lineal, vea la ecuación (2.3).

7. Es decir, un controlador “exacto”.

8. La solución del sistema la entenderemos en el sentido de Filippov, [Fil60].

9. Técnicamente, también es necesario que sean funciones Lebesgue-medibles, de forma que la solución de (2.1) esté bien definida.

Es interesante resaltar que estas dos hipótesis son necesarias para asegurar que el sistema tenga soluciones para todo $t \geq 0$ como se había supuesto, c.f., [Gli06].

efecto de la perturbación; HG y cualquier otro controlador continuo solo pueden atenuarla. Por otro lado, cuando no hay perturbación, los controladores lineales son óptimos para sistemas lineales con ruido Gaussiano en el sentido promedio-integral cuadrático⁴.

A partir de estas observaciones, dos preguntas resultan naturales: cuando tanto ruido como perturbación están presentes, ¿Es mejor usar AG (lineal) o SM (discontinuo)? Además, ¿Existe algún controlador mejor que estos dos? Una comparación entre HG y SM de alto orden ha sido hecho en [Lev10] pero usando otro índice de desempeño⁵ en vez del error en estado estable. En [Fri02, UL06], el control por SM es analizado en ausencia de ruido pero considerando la presencia de un actuador rápido. Por tanto, también resulta interesante preguntarse sobre el efecto de incluir un actuador rápido, cuando ya se tiene perturbación y ruido.

Los principales resultados de este capítulo son las respuestas a la preguntas introducidas, así como algunas interpretaciones. Primero, mostramos la existencia de un ruido acotado que genera el mismo error en estado estable para SM y HG⁶. Por tanto, los controladores por SM y lineales resultan ser igualmente sensibles a ruido acotado, cuando el error en estado estable resultante es usado para medir su desempeño.

Solo surgen diferencias en el desempeño cuando la perturbación está presente. En tal caso, se muestra que los controladores por SM son la elección óptima a pesar del ruido. De hecho, se muestra que ellos proveen el mejor desempeño posible que cualquier controlador puede alcanzar dadas las hipótesis consideradas.

Lo más interesante es que esto muestra que el compromiso entre fragilidad y robustez no existe bajo las hipótesis consideradas: el mejor controlador bajo ruido y perturbación es un controlador diseñado solo para remover la perturbación⁷. Argumentaremos que esto ocurre debido a que la hipótesis de ruido acotado no es suficiente para capturar el fenómeno de “filtración de ruido”. Cuando un actuador es incluido, esta conclusión se sigue conservando; sin embargo, la selección del controlador afecta el tamaño de las oscilaciones en el actuador. En este sentido, existe el siguiente compromiso: SM ocasiona las oscilaciones más pequeñas en la planta, pero las más grandes en el actuador.

2.2 Formulación del problema

Considere el sistema elemental de la Fig. 2.1:

$$\dot{x}(t) = u(t) + \rho(t), \quad x(0) = x_0; \quad y(t) = x(t) + \eta(t), \quad (2.1)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}$ el estado del sistema, $y(t)$ la salida medible, $u(t)$ la entrada de control, $\rho(t) = \rho(x(t), t)$ una perturbación (e.g., representando la verdadera dinámica del sistema) y $\eta(t)$ ruido en la medición. Supondremos que las incertidumbres son tales que la solución⁸ del sistema existe para todo $t \geq 0$. Como se anunció previamente, la única hipótesis sobre las incertidumbres (ρ, η) es que ambas están acotadas por constantes conocidas⁹

$$\sup_{t \geq 0} |\rho(t)| \leq L, \quad \sup_{t \geq 0} |\eta(t)| \leq \delta. \quad (2.2)$$

El problema de estabilización para cualquier sistema de una-entrada una-salida, siempre puede ser transformado en la estabilización de un sistema en la forma (2.1). En tal caso, $x(x_1, \dots, x_n)$ representa una salida del sistema con grado relativo uno y dinámica cero estable. Este procedimiento es estándar en el diseño de control por modos deslizantes, tomando x como la superficie deslizante deseada [Utk92].

Consideraremos el sistema (2.1) bajo la siguiente clase de controladores:

$$u = -k|y|^p \text{sign}(y), \quad k > 0, p \in [0, \infty), \quad (2.3)$$

donde (p, k) son parámetros de diseño por ser seleccionados. Esta clase incluye un controlador lineal cuando $p = 1$, un controlador discontinuo cuando $p = 0$ y una “homotopía” entre ambos conforme p varía en $(0, 1)$.¹⁰

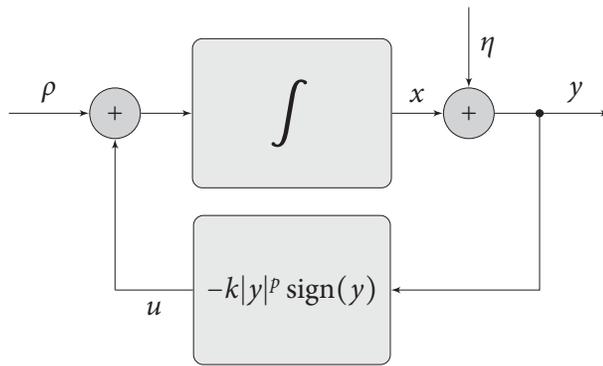


Figura 2.1: Diagrama a bloques del sistema.

Mientras que es imposible estabilizar exactamente el origen del sistema (2.1) en presencia de ambas incertidumbres, es posible tratar de encontrar los parámetros (p, k) que producen el menor error en estado estable posible. Formulando matemáticamente, el problema a considerar consiste en encontrar

$$\arg \min_{(p,k) \in [0, \infty) \times (0, \infty)} \limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)|, \quad (2.4)$$

sujeto a la dinámica (2.1), incertidumbres (2.2) y controles (2.3).

En lo que sigue, denotaremos el error en estado estable¹¹ como $e := \limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)|$.

2.3 Resultados principales

Conectando la realimentación (2.3) en el sistema (2.1) se obtiene la siguiente Ecuación Diferencial (ED)

$$\dot{x} = -k|x + \eta|^p \text{sign}(x + \eta) + \rho, \quad x_0 \text{ está dado.} \quad (2.5)$$

La simetría del problema permite considerar el caso cuando $x(t) \geq 0$. Para resolver el problema (2.4), es necesario calcular el peor error en estado estable

10. En la práctica, frecuentemente ha sido reportado la utilidad reemplazar un signo por una aproximación continua para aliviar las vibraciones. Esto corresponde a elegir $p > 0$ pero cercana a cero.

11. A diferencia de un límite simple,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} f(t) := \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{s \geq t} f(s) \right\}$$

está siempre bien definido como un número real extendido. Cualquier número mayor al límite superior es eventualmente una cota superior de la función.

posible debido a las perturbaciones y luego elegir los parámetros de control para minimizarlo.

Para ello, note que el peor escenario es obtenido al maximizar el lado derecho de (2.5) usando (ρ, η) sujeto a las restricciones (2.2). Por tanto, dichos maximizadores (ρ^*, η^*) son funciones explícitas de x y no de t . Es decir, la ED del peor caso debe ser un sistema autónomo.

Analizaremos dos casos complementarios: primero cuando $x(t) > \delta$ y luego cuando $x(t) \leq \delta$. De hecho, podremos mostrar que el análisis del segundo caso es innecesario.

Primero, bajo la hipótesis $x(t) > \delta$ y dado que $|\eta(t)| \leq \delta$, entonces $x + \eta > 0$ por lo que

$$\text{sign}(x + \eta) = \text{sign}(x) = 1,$$

por tanto, la ED a analizar es de hecho

$$\dot{x} = -k(x + \eta)^p + \rho.$$

El peor caso de la ED está dado por los valores (η^*, ρ^*) que maximizan el lado derecho para cada t . Estos están dados por¹²

$$\eta^*(x) = -\delta, \quad \rho^*(x) = L,$$

debido a que deseamos hacer la cantidad $x + \eta$ tan pequeña como sea posible. Así, la ED del peor caso es

$$\dot{x} = -k(x - \delta)^p + L,$$

cuyas soluciones decrecen mientras $k(x - \delta)^p > L$ o, equivalentemente, mientras $x > (L/k)^{1/p} + \delta$. Por tanto, se puede concluir que

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq \left(\frac{L}{k}\right)^{\frac{1}{p}} + \delta, \quad (2.6)$$

para cualquier incertidumbre admisible. Como las cotas superior e inferior son alcanzadas cuando las incertidumbres son elegidas como los maximizadores, esta estimación es justa.

Al analizar el caso simétrico cuando $x(t) < -\delta$, es directo comprobar que (2.6) se cumple siempre que x_0 se encuentre fuera del intervalo $[-\delta, \delta]$. La única diferencia es que ahora los maximizadores están dados por $\eta^*(x) = \delta$ y $\rho^*(x) = -L$.

Sobre el segundo caso $0 \leq x(t) < \delta$, note que las incertidumbres admisibles $\eta_*(x) = -\delta$ y $\rho_*(x) = L$ causan que la trayectoria eventualmente deje el intervalo $[0, \delta]$ sin importar los parámetros de control, regresando al caso anterior. Por tanto, por la invarianza en el tiempo de la ED del peor caso, podemos eliminar del análisis este transitorio en el que las trayectorias dejaron $[0, \delta]$ y solo considerar el caso anterior.

En base al análisis previo, formulamos el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *En ausencia de ruido, i.e. $\delta = 0$, la selección óptima es SM al tomar $k > L$ y $p = 0$. El mínimo $e = 0$ es alcanzado.*

12. La unicidad de estos maximizadores debe ser entendida modulo la clase de equivalencia “iguales casi en todas partes”. De esta forma, los maximizadores presentados son representantes de las clases.

2. En ausencia de perturbación, i.e. $L = 0$, entonces

a) el mínimo $e \leq \delta$ es alcanzado seleccionando arbitrariamente p y k ;

b) además, para cualquier $p \in [0, \infty)$, el ruido admisible $\eta^*(t) = -\delta \text{sign}(x(t))$ genera el mismo error en estado estable $e = \delta$.

3. En presencia de ruido y perturbación, entonces SM es la selección óptima. Esto pues el ruido $\eta^*(t) = -\delta \text{sign}(x(t))$ y la perturbación $\rho^*(t) = L \text{sign}(x(t))$ generan el error en estado estable $e = \delta$.

Prueba. Directo a partir de la expresión (2.6). □

En ausencia de perturbación, el Teorema muestra que SM y HG tienen el mismo desempeño $e \leq \delta$. De esta forma, SM resulta no ser más sensible que un controlador lineal bajo ruido acotado. Cuando hay tanto ruido como perturbación, la solución óptima es SM garantizando $e \leq \delta$. Cualquier otro controlador de la clase puede producir un error más grande que δ debido a que no elimina completamente la perturbación.

La razón por la que HG no es la solución óptima es porque solo garantiza $e \leq \delta$ en el límite cuando $k \rightarrow \infty$, mientras que SM puede garantizar este desempeño dentro del espacio de parámetros con $p = 0$ y $k > L$. Es decir, la estrategia por HG no es realizable. En este sentido, HG es una solución sub-óptima. El efecto de pico es otra desventaja de HG con respecto a SM que pasa desapercibida en el índice de desempeño usado.

Es aún más interesante lo que el Teorema 2.1 muestra sobre el compromiso entre fragilidad y robustez: ¡no existe! El efecto de la perturbación y del ruido están separados (i.e., son aditivos). Cualquier controlador que se elija tiene el mismo error δ debido al ruido. La única diferencia en los controladores es en su exactitud contra la perturbación. Se puede interpretar esto como la existencia de una clase de “principio de equivalencia cierta”¹³ que permite considerar en el diseño solo la robustez (exactitud) del controlador ante perturbaciones, olvidándose completamente del ruido. De esta forma, un controlador exacto en ausencia de ruido (e.g., SM) resulta ser la selección óptima con o sin presencia de ruido. De hecho podemos ir más allá. El siguiente teorema muestra que este desempeño es el mejor posible y no depende de la clase de controles (2.3) que hemos usado.

Teorema 2.2. *Para el sistema (2.1) bajo la hipótesis (2.2), no existe un controlador u basado en y que provea un error en estado estable menor a δ para todas las incertidumbres.*

Prueba. Por contradicción. Suponga que si existe tal controlador $u = u(y)$ y además le daremos oportunidad de que $\rho(t) \equiv 0$. En particular, para $\eta \equiv 0$ garantiza un error $e = \delta - \epsilon$ para cierto $\epsilon \in (0, \delta]$. El mismo controlador para $\eta(t) \equiv \delta$ garantizaría un error en estado estable $e - \delta = \delta - \epsilon$, pues el efecto del ruido fue solo de mover el equilibrio. Es decir $e = 2\delta - \epsilon$, por tanto $e \geq \delta$, obteniendo la contradicción buscada. □

13. En su forma clásica, este principio afirma que la estrategia óptima de control puede ser encontrada a partir de fijar las incertidumbres en su valor promedio, vea, e.g., [Ber00, pp. 161]. Debido a que en nuestro caso las incertidumbres no están descritas de forma probabilística, podemos interpretar esto último como fijar las incertidumbres en sus valores nominales: ruido cero y perturbación máxima.

14. Una comparación más justa debería usar ruido independiente del sistema (e.g., ruido Gaussiano), como pasa en la realidad, para decidir cual controlador se desempeña mejor. En el capítulo siguiente encontraremos que algo muy similar ocurre en el problema de diferenciación con ruido.

15. Una suposición análoga para la perturbación no tiene motivación física. Por ejemplo, la perturbación debido a fricción mecánica no modelada solo está presente durante el transitorio del sistema.

16. Una vez más, debe interpretarse esta afirmación módulo la clase de equivalencia “iguales en norma casi en todas partes”.

Sin embargo, resulta difícil pensar que el peor “ruido” $\eta^*(t) = -\delta \text{sign}(x(t))$ es realmente un ruido. En primer lugar porque depende de la realización del sistema. Es claro que si el ruido fuese aleatorio, un sistema lineal filtraría mejor que un sistema discontinuo. De esta forma, un controlador lineal debería tener un mejor desempeño que un controlador discontinuo si solo hay ruido. Por tanto, la suposición de ruido acotado no es suficiente para capturar el fenómeno de “filtración de ruido” del sistema. En este sentido, la comparación realizada bajo la hipótesis (2.2) no es justa, pues no considera este último efecto.¹⁴

2.3.1 Una cota fundamental en el desempeño

Bajo la hipótesis de incertidumbres acotadas, la fórmula (2.6) muestra que no existe una cota inferior no trivial para el posible desempeño. Esto ocurre debido a que las incertidumbres cero son admitidas.

En esta sección, se muestra que existe una cota inferior no trivial cuando el ruido está “siempre presente a lo largo del tiempo”¹⁵. Agregando esta nueva hipótesis sobre el ruido, se muestra que SM puede alcanzar el mejor desempeño posible bajo ciertas condiciones.

Junto con la suposición $|\eta(t)| \leq \delta$, $t \geq 0$, introduzcamos la siguiente hipótesis sobre la intensidad del ruido:

$$\int_I |\eta| dm \geq \lambda > 0, \quad \forall I \in \mathcal{I} := \left\{ \text{intervalos con } m(I) \geq h \frac{\lambda}{\delta} \right\}, \quad (2.7)$$

donde m es la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y $h \geq 1$ es una constante que determina el tamaño mínimo de los átomos de \mathcal{I} . El cociente λ/h puede ser interpretado como la intensidad mínima admisible del ruido. Además, esta última suposición implica que el ruido no es la función cero en cualquier intervalo de tiempo con medida mayor o igual a $(h\lambda)/\delta$.

A diferencia del análisis realizado en la sección previa, ahora buscamos calcular las incertidumbres admisibles (ρ_*, η_*) que generan el mínimo error en estado estable. Resulta claro que $\rho_*(t) \equiv 0$, pero un análisis adicional es requerido para encontrar la función η_* .

Lema 2.1. *El ruido admisible que minimiza¹⁶ el error en estado estable es $|\eta_*(t)| = \delta/h$.*

Prueba. Es necesario encontrar el ruido admisible más pequeño en amplitud que satisface (2.7). Es decir, el η_* con amplitud mas pequeña tal que

$$\int_I |\eta_*(t)| dt = \lambda, \quad \forall I \in \mathcal{I} \text{ with } m(I) = h \frac{\lambda}{\delta}.$$

Por un lado, si $|\eta_*(t)| = \delta/h$ se obtiene

$$\int_I |\eta_*(t)| dt = \frac{\delta}{h} \int_I dt = \frac{\delta}{h} m(I) = \lambda.$$

Ahora si existiera otro $\eta'_*(t)$ tal que $|\eta'_*(t)| < |\eta_*(t)| = \delta/h$ para todo el intervalo I , entonces la integral

$$\int_I |\eta'_*(t)| dt < \int_I \frac{\delta}{h} dt = \lambda$$

muestra que η'_* no es admisible pues no satisface (2.7). Por tanto, el ruido solo puede ser menor a δ/h solo cuando su amplitud es mayor a δ/h en algunos intervalos (para compensar por el área perdida). Sin embargo, en tal caso produciría un mayor error en estado estable, c.f., Figura 2.2. \square

Teorema 2.3. *Bajo las hipótesis (2.2) y (2.7), la siguiente es una cota del mínimo error en estado estable*

$$e = \limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \geq \frac{\delta}{h}, \quad (2.8)$$

i.e., ningún controlador puede proveer un error menor a este. En particular, cuando $h = 1$, el controlador por MD con $p = 0$ y $k > L$ alcanza esta cota inferior.

Prueba. Directo al sustituir $(\rho, \eta) = (\rho_*, \eta_*)$ y usar la ecuación (2.6). \square

Note además que cuando la medida de los átomos es fijada a $h = 1$, el ruido está restringido a $\eta(t) = \pm\delta$. Esto puede interpretarse en el sentido de que el desempeño del controlador por SM se acerca al mejor posible conforme el ruido tiende a sus fronteras. Conforme h crece, el ruido puede permanecer periodos más largos de tiempo cerca a cero y el desempeño de SM se deteriora.

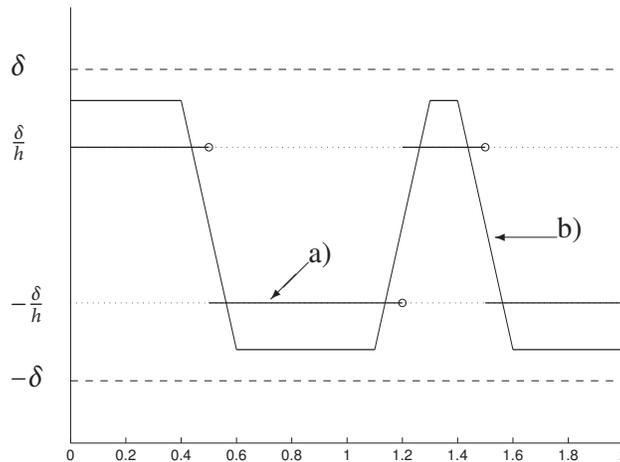


Figura 2.2: Dos ruidos admisibles bajo las hipótesis (2.2) y (2.7). La gráfica a) muestra el ruido admisible que genera el menor error en estado estable. Como se muestra en el Lema 2.1, tal ruido tiene amplitud δ/h y puede tener saltos de valores positivos a negativos. A diferencia, si el ruido se hace más suave como en b), entonces necesariamente debe tener amplitud mayor para compensar el área perdida. Sin embargo, el ruido b) genera un mayor error en estado estable que el ruido a).

2.3.2 El efecto de un actuador rápido

Otro fenómeno inherente en cualquier sistema de control es la presencia de un actuador. Generalmente, su dinámica es omitida durante el diseño del controlador¹⁷. El objetivo de esta sección es extender el análisis previo, al

17. En ausencia de ruido, el efecto de actuadores rápidos en controladores discontinuos ha sido extensivamente estudiado en relación a la generación de vibraciones (chattering) [Fri02, UL06].

incluir un actuador rápido de primer orden al mismo tiempo que conservamos la presencia de ruido y perturbación.

Por tanto, consideraremos el sistema

$$\dot{x} = z + \rho^*, \quad \varepsilon \dot{z} = -z - k|x + \eta^*|^p \text{sign}(x + \eta^*), \quad (2.9)$$

con $\varepsilon > 0$ i-pequeño, $z(t) \in \mathbb{R}$ el estado del actuador, y $\rho^* = \rho^*(x, z)$, $\eta^* = \eta^*(x, z)$ los maximizadores para este caso. Estos maximizadores son análogos al caso interior, pero ahora también dependen del estado del actuador z .

Definimos la “curva lenta” del sistema como los puntos donde la velocidad de la parte rápida se anula:

$$\mathcal{C} := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | z = -k|x + \eta^*|^p \text{sign}(x + \eta^*)\}.$$

18. Aquí hacemos uso de nomenclatura básica de Análisis no Estándar. Fue introducido por Abraham Robinson a principio de 1960 y formula el análisis usando una noción rigurosa de un numero “infinitesimal”. Referimos al lector a [DD95, pp. 205] para más detalles y sorpresas.

Dentro del halo¹⁸ de \mathcal{C} , uno recupera la dinámica original (2.5) que hemos analizado previamente. Tomando (x, z) limitados pero fuera del halo de \mathcal{C} , la velocidad \dot{z} es i-grande mientras que \dot{x} esta limitado pues ρ^* está limitado. Por tanto, la pendiente dz/dx es i-grande, i.e., el campo vectorial fuera del halo de \mathcal{C} es vertical.

Para ver si la curva es atractiva o repulsiva, basta checar el signo de \dot{z} en (2.9) desde cada lado de la curva. Por ejemplo, en el primer cuadrante ($x \geq 0, z \geq 0$), \dot{z} es negativa si $z > |x + \eta^*|^p \text{sign}(x + \eta^*)$ y positiva en otro caso. Esto indica que la curva atrae todas las trayectorias en el primer cuadrante. Aplicando el mismo razonamiento en los otros cuadrantes de plano, se puede concluir que la curva lenta \mathcal{C} es atractiva en todo el plano. El maximizador η^* es entonces elegido para generar las oscilaciones en x con la mayor amplitud. Con estas observaciones, las curvas lentas y retratos fase mostrados en la Figura 2.3 son obtenidos.

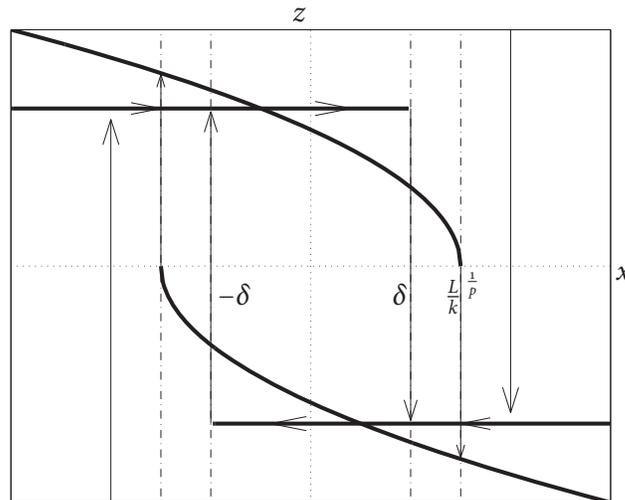


Figura 2.3: Retrato fase del sistema con un actuador rápido, ruido y perturbación. Las curvas lentas para $p = 0$ y $p \in (0, 1)$ son mostradas con líneas sólidas anchas. Las transiciones rápidas entre las ramas de la curva lenta son ilustradas con flechas delgadas. Las trayectorias se acercan rápido a las curvas lentas y luego se deslizan a lo largo de una ε -vecindad (halo) de ellas.

En todos los casos, existe un ciclo límite estable que genera oscilaciones en x con una amplitud $(L/k)^{\frac{1}{p}} + \delta + \varepsilon$ dependiendo de los parámetros (p, k) . De esta forma, la selección óptima es tomar $k > L$ y $p = 0$ generando un error en estado estable $e = \delta + \varepsilon$. Es decir, la estrategia óptima de control que resulta ser SM no se modificó al agregar un actuador.

La diferencia entre controladores también está en la amplitud de las oscilaciones generadas en el actuador. Las oscilaciones están directamente relacionadas con la energía y desgaste del actuador. En particular, para $p = 0$, las oscilaciones en el actuador tienen la misma amplitud que la ganancia de control. Bajo esta observación, note que AG destruye el actuador a pesar de que puede alcanzar el mismo desempeño $e = \delta + \varepsilon$ en el límite cuando $k \rightarrow \infty$. Esto ocurre debido a que a medida de que la ganancia se incrementa, también se incrementan las oscilaciones en el actuador¹⁹.

2.4 Interpretaciones y comentarios sobre los resultados

No es cierto el compromiso en el que incrementar la robustez a la perturbación aumenta la fragilidad al ruido. Esto cuando las incertidumbres están solo uniformemente acotadas y el desempeño es medido usando el error en estado estable.

En particular, se mostró que desviaciones en la medición acotadas por δ generan desviaciones en el error en estado estable también acotadas por δ . Esta continuidad es lo que puede ser interpretada como “robustez” de todos los controladores al ruido. Sin embargo, así como la continuidad de una función depende de la métrica usada, también la robustez de un controlador depende la selección particular de métricas: máxima distancia euclidiana para medir las incertidumbres y error en estado estable para medir su desempeño. Es intuitivamente irresistible asumir que la continuidad del controlador es responsable de su robustez al ruido: ruido pequeño solo generará pequeñas desviaciones en la señal de control. Este mismo razonamiento inevitablemente llevara a creer que los algoritmos discontinuos, $p = 0$ en (2.3), no son robustos al ruido debido a que ruido arbitrariamente pequeño puede provocar desviaciones en la señal de control con amplitud $2k$.

¡El Teorema 2.1 muestra que esta consideración intuitiva es completamente errónea! Lo que la formula (2.6) muestra es que, sin importar si el controlador es continuo o no, ruido acotado por δ produce error en estado estable también acotado por δ . Es decir, para las métricas en particular usadas, la transmisión de ruido a error en estado estable es continua, a pesar que el controlador no lo sea. Por tanto, controladores lineales, continuos y discontinuos resultan ser igualmente sensibles al ruido bajo estas métricas.²⁰

Por otro lado, la continuidad de (2.6) con respecto a L muestra la robustez de todos los controladores con respecto a la perturbación. Sin embargo, solo el discontinuo $p = 0$ es capaz de remover completamente el efecto de una perturbación acotada sobre el error en estado estable: MD son exactos, mas que robustos.

Una propiedad inesperada en la formula (2.6) es que los efectos del ruido y la perturbación sobre el error en estado estable son aditivos, a pesar de que el

19. Uno podría intentar de aliviar esta fenómeno al utilizar AG no lineal haciendo que p crezca más rápido que la ganancia k .

20. Este fenómeno contra-intuitivo también puede ser interpretado en términos de la famosa continuidad de las inclusiones diferenciales (en el sentido de Filippov) con respecto a sus parámetros [Fil60]. Para ello, basta reemplazar las incertidumbres por sus segmentos para encontrar una inclusión diferencial convexa, cerrada y semi-continua por arriba que satisface todas las condiciones de Filippov.

sistema no sea necesariamente lineal cuando $p \neq 1$. Esta peculiaridad hace posible separar la robustez del controlador a las perturbaciones de su fragilidad al ruido. En ausencia de ruido, eligiendo un controlador exacto a perturbaciones, inmediatamente garantiza su robustez a ruido y producirá el menor error en estado estable a pesar de la presencia de ruido. Esta propiedad muestra que el compromiso entre robustez y fragilidad no está presente.

Además, dado que el peor ruido se mostró que es constante, el efecto de filtrado de ruido no es considerado durante el análisis. Esto remueve una ventaja de los algoritmos lineales con respecto a los discontinuos. Dado un ruido representado (formalmente) como su contenido en frecuencia (i.e., su serie de Fourier), un controlador lineal conserva todas las frecuencias cambiando solo su amplitud. Los controladores discontinuos distorsionan completamente las características frecuenciales de la señal original. Esto implica que, por ejemplo, cuando el ruido es una senoide de amplitud δ y $L = 0$, el error en estado estable debido al algoritmo discontinuo tiende acercarse a la frontera δ ; mientras que un controlador continuo atenúa (filtra) parte de las componentes del ruido produciendo un menor error en estado estable.²¹

21. Esto pone en evidencia que las hipótesis y métricas usadas para medir la robustez juegan un papel fundamental para obtener un análisis justo y útil. Un análisis más justo que el realizado aquí debería considerar ruido independiente del sistema, por ejemplo, aproximado por sinusoides o modelado como un proceso estocástico (e.g., ruido blanco). Esta última opción requeriría usar diferentes métricas a las usadas para medir tanto las incertidumbres como el desempeño.

Finalmente, resaltemos que HG no es la selección óptima pues no puede alcanzar el mínimo en ningún conjunto compacto de parámetros. Lo que esto significa es que no es posible implementar (o realizar) una estrategia perfecta HG en la práctica. Sin embargo, también es imposible realizar una función signo perfecta debido a histéresis y retraso inherentes en la medición. En este sentido, tanto SM como HG son ambas estrategias sub-óptimas que solo alcanzan el mejor desempeño posible $e \leq \delta$ en el límite cuando las imperfecciones de switcheo desaparecen en el primero caso, o cuando la ganancia tiende a infinito en el segundo caso.

2.5 Conclusión

No hay compromiso entre aumentar la robustez ante la perturbación e incrementar la fragilidad al ruido. Los algoritmos continuos y discontinuos son igualmente sensibles al ruido. Esto ocurre cuando el ruido solo es acotado y el desempeño se mide usando el error en estado estable. Además, como los controladores discontinuos pueden ser exactos a perturbaciones acotadas, estos producen el menor error en estado estable bajo tanto ruido como perturbación acotada. La presencia de actuadores rápidos no cambia esta conclusión.

Al incluir una hipótesis adicional sobre la intensidad mínima del ruido, se puede obtener una cota inferior del posible desempeño de todos los controladores. El desempeño de un controlador discontinuo puede alcanzar esta cota inferior cuando el ruido toma valores en su frontera.

LOS COMPROMISOS EN LA DIFERENCIACIÓN

3

Se presenta un método para calcular el error de diferenciación, en presencia de ruido, de una familia de diferenciadores discontinuos. La familia de diferenciadores incluye a los diferenciadores lineales por Alta Ganancia y Super-Twisting como casos particulares. El método permite elegir la ganancia óptima para todos los diferenciadores de la familia y comparar analíticamente su desempeño. Se muestra que la adición de inyecciones discontinuas al diferenciador lineal por Alta Ganancia mejora su desempeño en presencia de ruido acotado en la medición.

3.1 Introducción

El uso de diferenciadores es instrumental para la construcción de sistemas de control. Resultan ser fundamentales para la construcción de controladores PID, Observadores con Entradas Desconocidas [Ibr03, BBF09] y en el problema de Detección de Fallas [EZR11], por nombrar solo algunas aplicaciones.

Dos problemas centrales deben ser considerados en la construcción de un diferenciador: la presencia inevitable de ruido en la medición y la incertidumbre en la señal de entrada a ser diferenciada. La incertidumbre en la señal de entrada proviene del hecho de que el mismo diferenciador debe funcionar para toda una clase de señales. Cuando un diferenciador es exacto¹ sobre una clase de señales, entonces diferenciará la señal junto con ruido perteneciente a la misma clase. Por tanto, a medida que crece la clase de señales donde el diferenciador es exacto también crece su sensibilidad a ruido pequeño. De esta forma, existe un compromiso entre incrementar la clase de señales donde el diferenciador es exacto y incrementar su sensibilidad al ruido.

En [Lev98], A. Levant muestra que todo diferenciador exacto sobre la clase de señales con segunda derivada acotada, i.e. $|\ddot{\sigma}(t)| \leq L$, tiene una precisión no mejor² a $2\sqrt{2}\sqrt{L\delta}$, en presencia de ruido uniformemente acotado por δ . Luego introduce el diferenciador Super-Twisting (ST). El diferenciador ST es un algoritmo discontinuo que, en ausencia de ruido, calcula exactamente la derivada de primer orden de una señal con segunda derivada acotada. Se muestra que en presencia de ruido pequeño, el diferenciador ST tiene una precisión $K_s\sqrt{L\delta}$, para $K_s > 0$.

Tradicionalmente los diferenciadores son construidos usando un filtro lineal que aproxima la función de transferencia de un diferenciador ideal. En particular, observadores por Alta Ganancia (AG) pueden ser usados como

1. Un diferenciador es “exacto” [Lev98] para alguna entrada $\sigma(t)$ si provee la derivada verdadera $\dot{\sigma}(t)$ en ausencia de ruido.

2. En [Lev98], de hecho se muestra que no puede ser mejor a $\sqrt{L\delta}$. Sin embargo, una lectura mas cuidadosa revela que una mejor cota es $2\sqrt{2}\sqrt{L\delta}$. Después, resulta ser que esta ultima constante “coincide” con la constantes que Kolmogorov había obtenido [Kol62] en los 60’s. Escribimos “coincide”, pues Kolmogorov considera una señal definida sobre todos los reales y obtiene una constante con la mitad de incertidumbre que esta. Levant solo considera la señal en el semi-eje positivo y obteniendo el doble de incertidumbre.

3. Es decir, provee el mismo orden de precisión que el diferenciador ST. Como anécdota, [Lev98] fue recomendado para su publicación en Automática por Khalil.

4. Es decir, los términos discontinuos del ST que le permiten ser exacto también son responsables de su mayor sensibilidad al ruido.

diferenciadores [VK08]. Como ningún algoritmo lineal (de hecho continuo) puede ser exacto sobre la clase de señales con segunda derivada no cero, i.e. con $L > 0$, los observadores por AG solo pueden aproximar un diferenciador lineal conforme su ganancia tiende a infinito. Sin embargo, en presencia de ruido, su error también crece sin cota conforme la ganancia crece.

Recientemente, Vasiljevic y Khalil mostraron como elegir óptimamente su ganancia para proveer el menor error de diferenciación bajo ruido acotado [VK08]. Para el diferenciador de primer orden, la ganancia óptima provee una precisión $K_I \sqrt{\delta L}$, para³ una constante K_I explícita y finamente calculada en [VK08].

A partir del análisis de [Lev98], el diferenciador ST es más sensible a pequeño ruido que el diferenciador lineal por AG, pues es más grande la clase de señales donde el primero es exacto⁴ De modo que no es obvio a-priori cual de los dos diferenciadores tiene un mejor desempeño en presencia de perturbación y ruido.

Aunque la precisión del diferenciador lineal por AG ha sido cuantitativamente obtenida en [VK08], la precisión del diferenciador ST solo ha sido obtenida cualitativamente (usando notación 'O-grande') en [Lev98]. Por tanto, para comparar el desempeño de los diferenciadores lineal por AG y ST, sólo se han conducido estudios por simulación que apuntan a la conclusión de que su desempeño es comparable [VK08].

La principal conclusión de esta sección es que la precisión de un diferenciador lineal por AG puede ser mejorada al agregar inyecciones a-la ST. Esto ocurre no solo en el caso sin ruido donde se hace al diferenciador exacto, sino también en presencia de ruido en la medición.

Esta conclusión se obtiene de un fino análisis cuantitativo de la precisión de una clase generalizada de diferenciadores que incluye al ST y al lineal como casos particulares. Esto es la contribución técnica de esta sección. Para un par (L, δ) dado, el análisis permite calcular la ganancia óptima para toda la clase de diferenciadores que minimiza el error de diferenciación. La comparación en el desempeño de dos diferenciadores, y en particular del AG y ST, puede ser analíticamente hecha sin recurrir a simulaciones como en [VK08]. A través del estudio numérico de varios escenarios, se muestra que el diferenciador generalizado óptimamente diseñado tiene mejor desempeño que un diferenciador por AG óptimamente diseñado, pero nunca mejor que un diferenciador puro ST óptimamente diseñado.

3.2 Planteamiento del Problema

Considere el problema de estimar la primera derivada de una señal $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ usando una medición ruidosa $y(t) = \sigma(t) + \eta(t)$. Solo dos suposiciones⁵ son hechas:

- (i) la segunda derivada de la señal base $\sigma(\cdot)$ está uniformemente acotada⁶ por una constante conocida L ;
- (ii) el ruido en la medición $\eta(\cdot)$ está uniformemente acotado por δ .

5. Tecnicamente, también se requiere que $\ddot{\sigma}(\cdot)$ y $\eta(\cdot)$ sean funciones Lebesgue-medibles.

6. En sistemas mecánicos, donde se requiera una estimación de la velocidad basada en la posición, esta suposición es equivalente a que su aceleración esté uniformemente acotada.

Definiendo $x_1 := \sigma$ y $x_2 := \dot{\sigma}$, el problema se transforma en diseñar un observador para el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\rho, \quad y = x_1 + \eta, \quad (3.1)$$

basado en la salida medida y . En este sistema, $\rho := -\ddot{\sigma}$ se considera como una perturbación. Bajo las hipótesis introducidas arriba, las incertidumbres satisfacen

$$|\rho(t)| \leq L, \quad |\eta(t)| \leq \delta, \quad \forall t \geq 0.$$

Para resolver el problema bajo las hipótesis dadas, Levant introdujo el diferenciador Super-Twisting [Lev98]. Este toma la siguiente forma

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon} |\hat{x}_1 - y|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{x}_1 - y) + \hat{x}_2, \quad \dot{\hat{x}}_2 = -\frac{\alpha_2}{\varepsilon^2} \text{sign}(\hat{x}_1 - y),$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ son constantes⁷ que determinan la “dirección” de la ganancia y $\varepsilon > 0$ fija su amplitud.⁸ Además, también se mostró que en presencia de ruido pequeño y cuando la ganancia satisface $\varepsilon \propto 1/\sqrt{L}$, el diferenciador ST ofrece una precisión $O(\sqrt{\delta L})$.

Diez años después de Levant, Vasilejevic y Khalil [VK08] sorprendentemente mostraron que un simple diferenciador lineal por AG

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon} (\hat{x}_1 - y) + \hat{x}_2, \quad \dot{\hat{x}}_2 = -\frac{\alpha_2}{\varepsilon^2} (\hat{x}_1 - y),$$

puede proveer el mismo orden de precisión que el ST cuando su ganancia se selecciona⁹ $\varepsilon \propto \sqrt{\delta/L}$.

La pregunta natural a hacer es cual de los dos diferenciadores es mejor, o si una combinación de ambos puede funcionar mejor que ellos por separado. Una posible combinación que considera todos estos casos es el algoritmo ST Generalizado (GST)¹⁰, que toma la siguiente forma

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon} \phi_1(\hat{x}_1 - y) + \hat{x}_2, \quad \dot{\hat{x}}_2 = -\frac{\alpha_2}{\varepsilon^2} \phi_2(\hat{x}_1 - y),$$

donde las funciones ϕ_1 y ϕ_2 están definidas por

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \mu_1 |x|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x) + \mu_2 x, \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{2} \mu_1^2 \text{sign}(x) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 |x|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x) + \mu_2^2 x, \end{aligned}$$

con $\mu_1, \mu_2 \geq 0$. El GST se reduce a un diferenciador lineal por AG cuando $\mu_1 = 0$ y a un diferenciador ST cuando $\mu_2 = 0$. Cuando μ_1 y μ_2 son ambas positivas, el GST tiene una combinación de términos lineales y ST.

3.2.1 Formulación del problema.

Este capítulo compara el desempeño de diferenciadores lineales por AG y ST. El objetivo es poder decidir cual de ellos provee mejor desempeño, o si el diferenciador combinado GST resulta mejor. El desempeño del diferenciador se medirá usando “cota final uniforme global”¹¹ del error de diferenciación $\hat{x}_2 - x_2$. En otras palabras, lo mediremos usando el máximo error asintótico que el diferenciador cometerá debido a las incertidumbres acotadas.

7. Una selección que ha mostrado ser buena en la práctica fue sugerida por Levant $\alpha_1 = 1.5, \alpha_2 = 1.1$.

8. La propiedad llamativa del diferenciador ST es el uso de una inyección discontinua. Es esta propiedad la que le permite obtener un estimado exacto de la derivada en ausencia de ruido a pesar de que la perturbación ρ solo está uniformemente acotada.

9. Note que a diferencia del ST, el diferenciador lineal requiere conocer la cota del ruido para poder proveer esta precisión.

10. El GST fue propuesto por Jaime Moreno en [Mor11]. Su versión “lineal más ST” es usada aquí, pero tiene muchas otras variantes. Por ejemplo, la versión “uniforme” proporciona una convergencia independiente de la condición inicial, vea Capítulo 5.

11. Esta es una pobre traducción de la nomenclatura precisa “global uniform ultimate bound”, vea [VK08]. De ahora en adelante, usaremos el nombre “cota final” para referirnos a ella.

Por tanto, el problema técnico consiste en obtener un estimado preciso de la cota final del error de diferenciación en términos de los parámetros del diferenciador y las cotas de las incertidumbres. Una vez que esta expresión es obtenida para el diferenciador GST, el desempeño de los diferenciadores lineales, ST y GST pueden ser analíticamente comparadas bajo las hipótesis consideradas.

Comentario sobre las Figuras. En todas las figuras y ejemplos de este capítulo, los parámetros son fijados como $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.1$, $L = 1$, $\delta = 0.01$, si lo contrario no se especifica.

3.3 El error de diferenciación para señales ruidosas

La dinámica del error de diferenciación $\tilde{x} = \hat{x} - x$ está descrita por

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon} \phi_1(\tilde{x}_1 - \eta) + \tilde{x}_2, \quad \dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{\alpha_2}{\varepsilon^2} \phi_2(\tilde{x}_1 - \eta) + \rho,$$

y el definir

$$w_1(t) = \phi_1(\tilde{x}_1(t)) - \phi_1(\tilde{x}_1(t) - \eta(t)), \quad w_2(t) = \phi_2(\tilde{x}_1(t)) - \phi_2(\tilde{x}_1(t) - \eta(t)),$$

permite reescribir el error de diferenciación como

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon} \phi_1(\tilde{x}_1) + \tilde{x}_2 + \frac{\alpha_1}{\varepsilon} w_1, \quad \dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{\alpha_2}{\varepsilon^2} \phi_2(\tilde{x}_1) + \frac{\alpha_2}{\varepsilon^2} w_2 + \rho. \quad (3.2)$$

El objetivo es obtener una cota superior de la cota-final del error de diferenciación \tilde{x}_2 debido a la presencia de las incertidumbres η y ρ . La siguiente caracterización nos dice cuando existe una cota final y cuando no.

Teorema 3.1. *Suponga que $\alpha_i > 0$. Entonces*

- a) *si $\mu_2 > 0$ siempre existe una cota final;*
- b) *si $\mu_2 = 0$ existe una cota final finita solo si la ganancia es suficientemente grande.*

Prueba. Vea la Sección 3.7. □

El Teorema muestra que el error del diferenciador GST con inyecciones lineales es global y uniformemente acotado independientemente de las ganancias seleccionadas. En cambio, el error de un diferenciador ST puro (i.e. $\mu_2 = 0$) puede crecer sin cotas cuando la amplitud de la función signo de la inyección ϕ_2 no es suficientemente grande para dominar la perturbación. Ambas afirmaciones han sido probadas previamente usando el método de Lyapunov en [Mor11].

3.3.1 El error de Diferenciación para el diferenciador GST.

También es posible encontrar una cota final del error de Lyapunov usando una función de Lyapunov. Sin embargo, cuando es importante el valor de la cota final, el enfoque basado en Lyapunov requiere realizar una optimización¹² En esta sección, el método de [VK08], válido estrictamente para sistemas lineales invariantes en el tiempo, es extendido para calcular la cota final del sistema no lineal y discontinuo (3.2), evitando toda optimización. La cota final del error de diferenciación \tilde{x}_2 es obtenida en términos de la cota final para \tilde{x}_1 . Este ultimo valor es encontrado como la solución mas grande de una ecuación algebraica.

Teorema 3.2. *La cota final para \tilde{x}_1 , denotada como $\tilde{x}_{1,ss}$, es la solución más grande a la ecuación*

$$\begin{aligned} \mu_1 x^{1/2} + \mu_2 x &= P_1 L \Gamma(x) \varepsilon^2 + Q_{12} \Gamma(x) \left[\frac{1}{2} \mu_1^2 \Delta_o(x) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \Delta_1(x) + \mu_2^2 \delta \right] + \\ &+ Q_{11} (\mu_1 \Delta_1(x) + \mu_2 \delta), \end{aligned} \quad (3.3)$$

en la incógnita x . Una vez este valor es calculado, la cota final para \tilde{x}_2 está dada por

$$\tilde{x}_{2,ss} = P_2 L \Gamma(x) \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \Xi(x, \delta), \quad (3.4)$$

donde

$$\Xi(x, \delta) = Q_{12} \Gamma(x) \frac{P_2}{P_1} \left[\frac{1}{2} \mu_1^2 \Delta_o(x) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \Delta_1(x) + \mu_2^2 \delta \right] + Q_{21} (\mu_1 \Delta_1(x) + \mu_2 \delta).$$

Prueba. Vea la Sección 3.7. □

En el Teorema 3.2, las funciones Δ_i y Γ están dadas por

$$\Delta_o(x) := 1 - \text{sign}(|x| - \delta), \quad \Delta_1(x) := |x|^{1/2} - ||x| - \delta|^{1/2} \text{sign}(|x| - \delta), \quad \Gamma(x) := \frac{2|x|^{1/2}}{\mu_1 + 2\mu_2|x|^{1/2}}.$$

y note que, de hecho, Δ_i es una función tanto de x como de δ . Las constantes P_i , Q_{ij} están dadas por

$$P_i = \int_0^\infty |\{e^{At} B\}_i| dt, \quad Q_{ij} = \int_0^\infty |\{e^{At} D_j\}_i| dt,$$

donde la notación $\{\cdot\}_k$ representa el k -ésimo elemento de un vector bi-dimensional. Los vectores B , D_1 y D_2 estan definidos por

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

El Apéndice C ilustra los cálculos necesarios para encontrar el valor explícito de todas estas constantes.

La forma de la expresión (3.4) es muy sugerente. La cota final tiene dos componentes, uno depende de la perturbación L y el otro depende del ruido δ . Conforme la ganancia del diferenciador $1/\varepsilon$ crece, el término debido a la

12. Se requiere buscar sobre la familia de funciones de Lyapunov la que mejor se ajusta a la “forma” de la cota final. Este problema de optimización es difícil aun en el caso lineal, [VK08].

13. El comportamiento exacto de la cota final $\tilde{x}_{2,ss}$ dada por (3.4) es mas complicada de lo que aparenta la expresión, pues el valor de x también depende de ε , L y δ . Sin embargo, este compromiso cualitativo es valido en general.

14. Estos dos resultados permiten comparar el desempeño de ambos diferenciadores en forma analítica y no solo por medio de simulaciones, como se hace en [VK08].

perturbación decrece pero el término debido al ruido se incrementa. Esto indica un compromiso entre la exactitud en ausencia de ruido y la amplificación del ruido en presencia de ruido. Este compromiso será cuantificado para el diferenciador GST (3.2) en esta sección, extendiendo los resultados cuantitativos de [VK08] para el diferenciador lineal por AG y los resultados cualitativos de [Lev98] para el diferenciador ST.¹³

Geoméricamente, las soluciones de (3.3) son los puntos de intersección de las gráficas de las dos funciones a la izquierda y derecha de la ecuación (3.3), vea la Figura 3.1. En general, es difícil obtener una expresión analítica para la solución máxima. Sin embargo, hay al menos tres casos importantes donde sí es posible resolverla analíticamente.

El resto de esta sección presenta el caso más simple: cuando no hay ruido. La conclusión principal a ser obtenida es que cuando el diferenciador tiene términos ST (i.e. $\mu_1 > 0$) es posible obtener cero error de diferenciación con una ganancia *finita*. Esta última propiedad es imposible sin el uso de inyecciones discontinuas.

La siguiente sección presenta los otros dos casos: cuando hay ruido y perturbación pero el diferenciador solo tiene o inyecciones lineales (i.e., $\mu_1 = 0$) o inyecciones ST i.e. $\mu_2 = 0$). El caso lineal ha sido previamente analizado en [VK08]. Se muestra que el método propuesto es coherente dando exactamente los mismos resultados. Para el caso ST, se obtienen expresiones analíticas del error de diferenciación mejorando en análisis cualitativo hecho por Levant en [Lev98].¹⁴

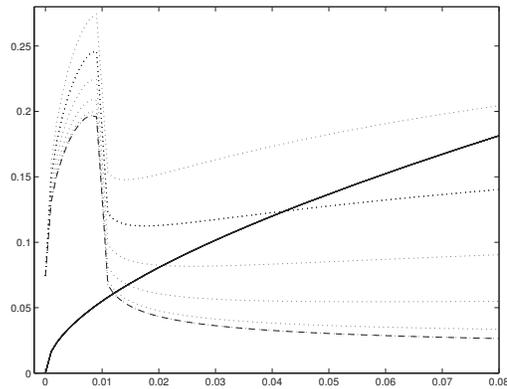


Figura 3.1: Encontrar la solución a la ecuación (3.3) del teorema 3.2 significa encontrar la intersección de dos gráficas. Esto da la cota final para \tilde{x}_1 . La línea sólida muestra la gráfica del lado derecho de (3.3). La línea segmentada muestra la gráfica del lado derecho de (3.3) para $\varepsilon = 0$. Las líneas punteadas muestran la gráfica de la misma función para otros valores de $\varepsilon > 0$. Los parámetros son fijados en $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$.

3.3.2 El error de diferenciación en ausencia de ruido.

En ausencia de ruido, i.e. cuando $\delta = 0$, la ecuación (3.3) se reduce a

$$\mu_1 x^{1/2} + \mu_2 x = \frac{2|x|^{1/2}}{\mu_1 + 2\mu_2|x|^{1/2}} P_1 L \varepsilon^2 \quad (3.5)$$

la cual tiene a lo más dos soluciones no-negativas, una de ellas es cero, vea Figura 3.2. Sólo nos interesa la más grande de entre ellas dos. Además, como $\Xi(x, 0) = 0$, la expresión para $\tilde{x}_{2,ss}$ se simplifica a $\tilde{x}_{2,ss} = P_2 L \Gamma(x) \varepsilon$.

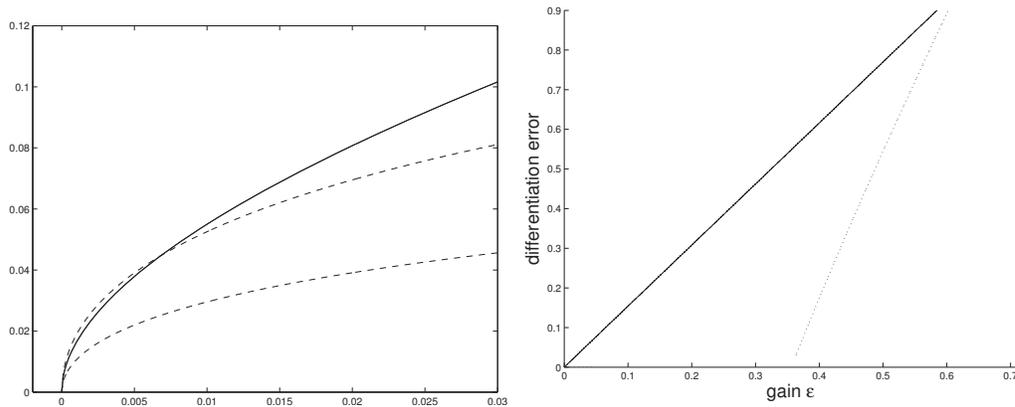


Figura 3.2: *Izquierda.* En línea sólida: el lado derecho de (3.5); Segmentada: el lado izquierdo para $\varepsilon = 0.3$ y $\varepsilon = 0.4$. Los parámetros son $L = 1$ y $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$. *Derecha:* Cota final del error de diferenciación en ausencia de ruido como función de ε . Línea sólida: diferenciador lineal $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$, punteada: diferenciador GST con $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$.

En el Apéndice A.3, se muestra que existe una solución positiva a (3.5) distinta de cero. Conforme la ganancia se incrementa, esta solución positiva se acerca a cero. Interesantemente, en presencia de términos discontinuos ($\mu_1 > 0$), se vuelve negativa para un ε positivo. Esto significa que, cuando $\mu_1 > 0$, la cota final para \tilde{x}_1 puede hacerse cero con una ganancia finita. Por tanto, esto permite a su vez hacer cero la cota del error de diferenciación con una ganancia finita, pues $\tilde{x}_{2,ss}$ es proporcional a $\Gamma(x)$ y $\Gamma(0) = 0$. Estas propiedades son traducidas como el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *En ausencia de ruido, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- independientemente de la selección de μ_1, μ_2 , el efecto de la perturbación decrece conforme la ganancia crece, es decir,*

$$\tilde{x}_{2,ss} \rightarrow 0 \quad \text{conforme} \quad \varepsilon \rightarrow 0;$$
- cuando $\mu_1 = 0$, el efecto de la perturbación es removido solo en el límite cuando la ganancia es infinita (i.e. cuando $\varepsilon = 0$). En cambio, cuando $\mu_1 > 0$, la condición en la ganancia $\varepsilon^2 \leq \frac{\mu_1^2}{2P_1L}$ es suficiente para garantizar $\tilde{x}_{2,ss} = 0$.*
- cuando $\mu_2 = 0$ y $\varepsilon^2 > \frac{\mu_1^2}{2P_1L}$, la cota final es infinita, i.e., el error de diferenciación es inestable.*

Prueba. Vea la Sección 3.7. □

Con un diferenciador lineal por AG nunca hay problemas de inestabilidad. Sin embargo, para un diferenciador ST puro, ¡el error es cero si la ganancia es suficientemente grande o infinito de otra forma! No hay término medio¹⁵. El diferenciador GST resuelve este inconveniente: el error siempre permanece acotado y, mejor aun, puede hacerse cero con una ganancia finita.

15. En la práctica, el valor verdadero de L nunca es perfectamente conocido, de modo que la ganancia del diferenciador ST necesita ser seleccionada más grande de lo que realmente es necesario.

3.4 Análisis del error de diferenciación

Esta sección usa el método del Teorema 3.2 para calcular la cota final del error de diferenciación en dos casos. El primero es cuando solo hay términos lineales (i.e., $\mu_1 = 0$). En este caso, se muestra que el método es coherente al recuperar los resultados de [VK08]. En segundo lugar, el error para el caso ST ($\mu_2 = 0$) es obtenido. El análisis del caso del diferenciador GST con términos lineales y ST se realiza numéricamente en la próxima sección.

3.4.1 Diferenciador lineal por AG.

Cuando $\mu_1 = 0$, $\Gamma(x)$ y $\Xi(x, \delta)$ se vuelven independientes de x :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\mu_2}, \quad \Xi(x, \delta) = \left(\frac{P_2}{P_1} Q_{12} + Q_{21} \right) \mu_2 \delta.$$

16. Note que no se requiere calcular x para encontrar $\tilde{x}_{2,ss}$ pues Γ y Ξ no dependen de ella.

La solución a la ecuación (3.3) está dada¹⁶ por la única intersección

$$x = \frac{LP_1}{\mu_2^2} \varepsilon^2 + (Q_{11} + Q_{12}) \delta.$$

De acuerdo al Teorema 3.2, la cota final del error de diferenciación es

$$\tilde{x}_{2,ss} = \frac{P_2 L}{\mu_2} \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{P_2}{P_1} Q_{12} + Q_{21} \right) \mu_2 \delta. \quad (3.6)$$

En esta última fórmula, el efecto de la perturbación y el ruido son lineales. Al incrementar la ganancia (decrementar ε), el efecto de la perturbación es reducido pero, al mismo tiempo, el efecto del ruido se ve amplificado. Por tanto, existe un valor óptimo para ε que provee la menor cota final del error de diferenciación. Este valor puede ser directamente¹⁷ calculado como

17. Toma la derivada, iguala a cero y resuelve para ε .

$$\varepsilon^* = \sqrt{\frac{\mu_2^2}{P_2} \left(\frac{P_2}{P_1} Q_{12} + Q_{21} \right) \frac{\delta}{L}},$$

18. Para la selección $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.1$, resulta que $c = 2.2610$.

que produce un error mínimo¹⁸

$$\min_{\varepsilon > 0} \tilde{x}_{2,ss} = 2c \sqrt{L\delta}, \quad c = \sqrt{P_2 \left(\frac{P_2}{P_1} Q_{12} + Q_{21} \right)}.$$

3.4.2 Diferenciador Super-Twisting.

Cuando $\mu_2 = 0$, la ecuación (3.3) del Teorema 3.2 se reduce a

$$\left(\mu_1 - \frac{2\varepsilon^2 LP_1}{\mu_1} \right) x^{1/2} = Q_{11} \mu_1 \Delta_1(x) + \frac{1}{2} \mu_1^2 Q_{12} \Gamma(x) \Delta_0(x),$$

y el error de diferenciación a

$$\tilde{x}_{2,ss} = 2P_2 L \Gamma(x) \varepsilon + \frac{\mu_1}{\varepsilon} \left(\frac{P_2 Q_{12} \mu_1}{2P_1} \Gamma(x) \Delta_0(x) + Q_{21} \Delta_1(x) \right).$$

Al analizar las propiedades de estas dos expresiones, el siguiente teorema puede ser obtenido.

Teorema 3.4. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- a) *si la ganancia satisface $\varepsilon^2 \leq \mu_1^2/(2LP_1)$, entonces existe una cota final para \tilde{x}_2 . De otra forma, la cota final es “infinita”;*
- b) *la cota final para \tilde{x}_1 no puede ser menor a δ ;*
- c) *$\tilde{x}_{2,ss} \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, y cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$.*

Prueba. Vea la Sección 3.8. □

El teorema muestra que la ganancia requerida para estabilizar el diferenciador ST en ausencia del ruido también la estabiliza en presencia de él¹⁹. Además, el teorema también muestra que es imposible hacer la cota final para \tilde{x}_1 menor que la amplitud del ruido, sin importar las ganancias elegidas²⁰. Finalmente, como el error tiende a infinito cuando la ganancia tiende a cero a infinito, se puede concluir que existe una (o muchas) ganancias óptimas que proporcionan el menor error de diferenciación.

Teorema 3.5. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- a) *Existe una selección óptima para la ganancia que provee la menor cota del error de diferenciación;*
- b) *para cualquier $\varepsilon^2 \leq \frac{\mu_1^2}{2LP_1}$, la precisión del diferenciador ST es $O(\sqrt{\delta})$. Más específicamente,*

$$\tilde{x}_{2,ss} \leq \left(\frac{2P_2L\varepsilon}{\mu_1} \sqrt{c} + \frac{1}{\varepsilon} \mu_1 Q_{21} \sqrt{2} \right) \sqrt{\delta},$$

donde

$$c = c(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{Q_{11}^2} & \text{if } Q_{11} < 1 \text{ y } \varepsilon^2 \leq \frac{\mu_1^2}{2LP_1}(1 - Q_{11}) \\ Q_{11}^2 - \left(\frac{2LP_1}{\mu_1^2} \varepsilon^2 + Q_{11} - 1 \right)^2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- c) *cuando la ganancia es seleccionada de acuerdo a la amplitud de la perturbación usando*

$$\frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{P_1\theta}{\mu_1^2} L, \quad \theta > 2,$$

donde θ es un nuevo parámetro, entonces la precisión del diferenciador es $O(\sqrt{\delta L})$. Más específicamente,

$$\tilde{x}_{2,ss} \leq \left(\frac{2P_2}{\sqrt{P_1\theta}} \sqrt{c} + \sqrt{2P_1\theta} Q_{21} \right) \sqrt{\delta L}$$

donde

$$c = c(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{Q_{11}^2} & \text{if } Q_{11} < 1 \text{ y } \varepsilon^2 \leq \frac{\mu_1^2}{2LP_1}(1 - Q_{11}) \\ Q_{11}^2 - \left(\frac{2}{\theta} + Q_{11} - 1 \right)^2 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Prueba. Vea la Sección 3.8. □

19. Cuando la ganancia es menor a este valor, el diferenciador ST es inestable, al igual que en el caso sin ruido

20. Esto mismo fenómeno ocurre en el caso lineal. Esto pues $\tilde{x}_{1,ss} > (Q_{11} + Q_{12})\delta$. De nuevo, el diferenciador ST puede alcanzar su cota con una ganancia finita y un diferenciador lineal no.

21. Vea el Teorema 2 en [Lev98].

Con este teorema, se concluye que para cualquier ganancia que estabiliza, la precisión del ST respecto al ruido es proporcional a $\sqrt{\delta}$. Además, cuando la ganancia que estabiliza es proporcional a $1/\sqrt{L}$, entonces la precisión obtenida es proporcional a $\sqrt{\delta L}$. Ambas conclusiones cualitativas han sido previamente obtenidas por Levant²¹. El Teorema 3.5 mejora esos resultados en dos aspectos. Primero, provee los valores explícitos de las constantes de proporcionalidad, vea también la sección siguiente para su evaluación numérica. Segundo, no requiere la suposición de ruido “suficientemente pequeño”, como se hace en [Lev98].

3.4.3 Comparación entre diferenciadores lineales y ST.

22. Esta afirmación es clara al comparar la precisión del diferenciador lineal y ST al ruido: $O(\delta)$ y $O(\sqrt{\delta})$, respectivamente.

Por un lado, como es de esperarse, el diferenciador ST que usa inyecciones discontinuas es más sensible a ruido pequeño que un diferenciador lineal. La sensibilidad muestra cuánto cambia la cota final para \tilde{x}_2 cuando la amplitud del ruido δ cambia²². Sin embargo, esto no significa que un diferenciador lineal por AG ofrezca mejor precisión que un diferenciador ST cuando $L > 0$. Por ejemplo, en el caso extremo cuando $L = 0$ y δ es pequeña, el diferenciador lineal por AG provee mejor desempeño que el diferenciador ST conforme el ruido crece, independientemente de las ganancias. Cuando $L > 0$, el diferenciador ST provee mejor desempeño que el diferenciador lineal para ruidos suficientemente pequeños, vea la Figura 3.6. Regresaremos a este punto con más detalle en la siguiente sección.

Además, el diferenciador ST no requiere conocer el valor real de la amplitud del ruido para alcanzar una precisión $O(\sqrt{L\delta})$. Es suficiente con fijar $\varepsilon \propto 1/\sqrt{L}$. La misma precisión puede ser alcanzada con un diferenciador lineal por AG solo cuando la amplitud del ruido es conocida, pues se necesita que $\varepsilon \propto \sqrt{\delta/L}$.

Por otro lado, se mostró que el diferenciador ST puede alcanzar la cota $\tilde{x}_{1,ss} = \delta$ cuando $Q_{11} < 1$. Esta cota no puede ser mejorada a través de la selección de ningún parámetro, incluyendo las α_i 's. Para el diferenciador lineal por AG, la cota análoga es $\tilde{x}_1 > (Q_{11} + Q_{12})\delta$ que si depende de los parámetros α_i 's.

3.5 Ejemplos numéricos

Esta sección presenta los resultados de cuatro experimentos distintos. El objetivo del primero es comparar el desempeño de los diferenciadores lineales y ST con respecto a la relación que existe entre la amplitud del ruido y la perturbación. El segundo experimento ilustra el efecto de combinar inyecciones lineales y ST en el diferenciador. El tercero discute el efecto del desconocimiento de la amplitud del ruido en el error de diferenciación. El cuarto considera la misma pregunta con respecto a la amplitud de la perturbación.

3.5.1 El desempeño de diferenciadores lineales y ST.

En la Figura 3.3 se presenta la gráfica del error de diferenciación como función de la ganancia en tres distintos escenarios: cuando la perturbación es

más grande que el ruido ($L > \delta$), cuando son iguales ($L = \delta$) y cuando la perturbación es mas pequeña que el ruido ($L < \delta$).

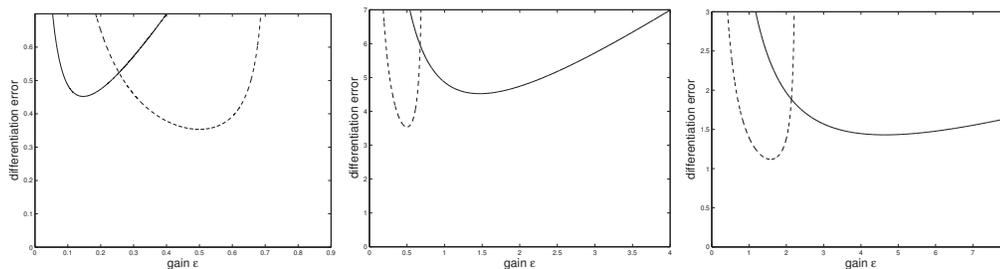


Figura 3.3: Cota final del error de diferenciación en función de ϵ . Solido: caso lineal $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$; segmentado: caso ST $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$. Izquierda: parámetros $L = 1, \delta = 0.01$; mitad: parámetros $L = 1, \delta = 1$; derecha: parámetros $L = 0.1, \delta = 1$.

En este experimento, el diferenciador ST provee menor error que un diferenciador lineal en cualquiera de los tres casos. Esto significa que a pesar de que la perturbación sea pequeña comparada con el ruido, uno puede seleccionar la ganancia del ST suficientemente pequeña para obtener un menor error que el producido por un diferenciador lineal.²³

23. Para clarificar este último punto, considere las gráficas de la Figura 3.4. En ella el desempeño del diferenciador ST y lineal es comparado conforme L decrece para una amplitud fija de ruido. En el caso límite cuando $L = 0$, un error arbitrario

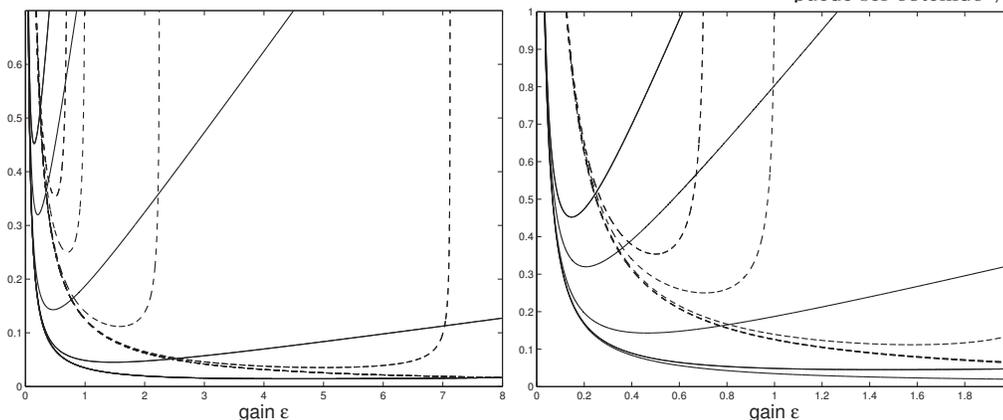


Figura 3.4: Cota final del error de diferenciación en función de ϵ . Se varía de $L = 1, \delta = 0.01$ hasta $L = 0.001, \delta = 0.01$. La figura a la derecha es un acercamiento de la figura de la izquierda. Solido: caso lineal $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$; segmentado: caso ST $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$.

Otra información importante que se puede obtener a partir de este experimento es el valor explícito de la mejor constante de proporcionalidad en la precisión del diferenciador ST. Esta puede ser obtenida al dividir el valor mínimo de la gráfica por $\sqrt{L\delta}$. De la imagen media de la Figura 3.3, la mejor constante de proporcionalidad resulta ser 3.535. Uno puede compararla²⁴ con la constante respectiva para el diferenciador lineal 4.522.

Note también que este primer experimento evidencia que el diferenciador ST puede hacerse inestable si su ganancia no es suficientemente grande.

puede ser obtenido ya sea por el di-
 ¶ al hacer su
 nte pequeña.

24. También resulta interesante
 compararla con la mejor precisión
 teórica $2\sqrt{2} = 2.828$, c.f. [Lev98].

3.5.2 Ventajas del diferenciador GST.

La Figura 3.5 presenta el error de diferenciación como función de la ganancia para los diferenciadores lineales, ST y GST²⁵.

25. El caso GST es resuelto numéricamente al encontrar la solución a (3.3) usando la función *fzero* de MATLAB.

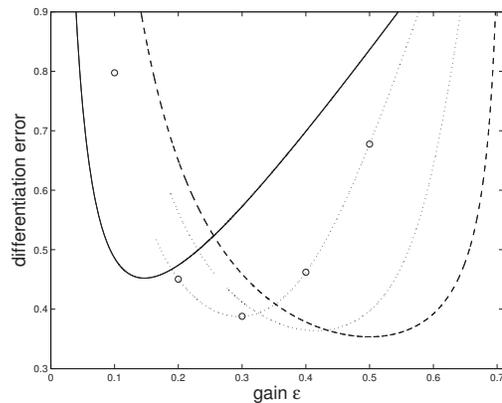


Figura 3.5: Cota final del error de diferenciación en función de ϵ para $L = 1$ y $\delta = 0.01$. Sólido: caso lineal $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$; segmentado: caso ST $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$; punteado: dos experimentos para $\mu_1 = 0.8, \mu_2 = 0.2$ y $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.5$ (con círculos).

La figura muestra que la gráfica de desempeño del diferenciador GST se acerca al desempeño del diferenciador lineal cuando μ_1 tiende a cero. De forma análoga, cuando μ_2 se acerca a cero, la gráfica de desempeño se acerca a la del diferenciador ST. En general, cuando $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 > 0$, el desempeño del diferenciador GST se encuentra “entre” el lineal y el ST de modo que no puede proporcionar un menor error de diferenciación que el diferenciador ST solo. Hasta este punto, parece no haber ventajas de usar un diferenciador GST. Sin embargo, las gráficas muestran que la adición de términos lineales al diferenciador ST elimina la inestabilidad cuando la ganancia no es suficientemente grande²⁶.

26. Esto es importante cuando el valor exacto de L no es exactamente conocido, como frecuentemente ocurre en la práctica.

3.5.3 La sensibilidad a variaciones en la amplitud del ruido.

Un diferenciador ST provee una precisión $O(\sqrt{\delta L})$ al seleccionar su ganancia $\epsilon \propto 1/\sqrt{L}$. Esta selección no requiere del conocimiento de la amplitud del ruido. En cambio, un diferenciador lineal por AG puede proveer la misma precisión pero requiere el conocimiento del ruido, dado que requiere $\epsilon \propto \sqrt{\delta/L}$.

En este experimento, se selecciona un valor nominal para la amplitud del ruido y se calculan las ganancias óptimas para los diferenciadores lineales, ST y GST. Luego, el desempeño de todos ellos es estudiado a medida que el ruido cambia de su valor nominal.

La Figura 3.6 presenta los resultados de este experimento cuando la amplitud nominal del ruido es $\delta = 0.01$ y $L = 1$, en la izquierda y $L = 0$ en la derecha. Para estos parámetros, las ganancias óptimas son $\epsilon^* = 0.145$, $\epsilon^* = 0.5$ y $\epsilon^* = 0.295$ para los diferenciadores lineal, ST y GST, respectivamente.

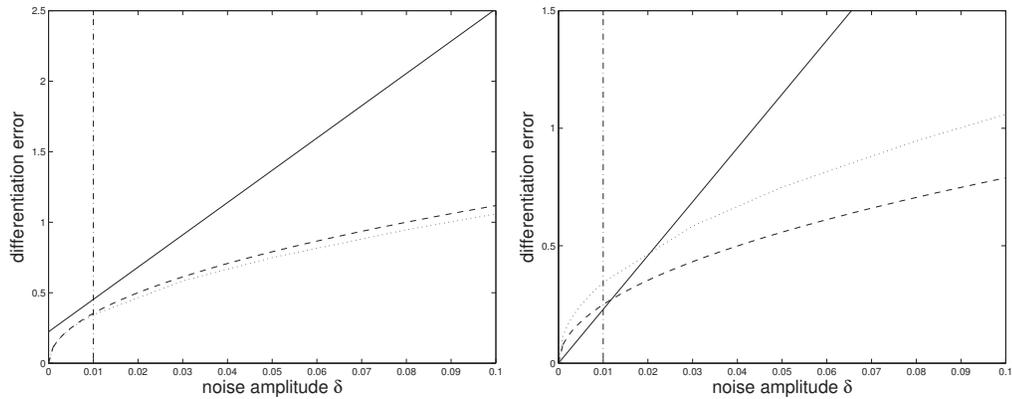


Figura 3.6: Cota final del error de diferenciación como función de la amplitud del ruido. Solido: caso lineal $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$; segmentado: caso ST $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$; punteado: caso GST con $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$. Segmento-punto: ruido nominal 0.01 para el cual se eligen las ganancias óptimas. *Izquierda: $L = 1$, Derecha: $L = 0$.*

Cuando $L = 1$ el experimento muestra que a pesar de que el ruido cambie, el diferenciador ST permanece garantizando mejor desempeño que el diferenciador lineal o GST. A diferencia, cuando $L = 0$, el diferenciador lineal provee mejor desempeño cuando el ruido se incrementa a partir de cero, independientemente de las ganancias seleccionadas. Esto ocurre debido a que en una vecindad de cero $O(\delta)$ es siempre menor que $O(\sqrt{\delta})$.²⁷

27. Note también que cuando $L = 0$ no hay una ganancia óptima: cualquier error arbitrario puede ser obtenido al ajustar la ganancia suficientemente pequeña.

3.5.4 Sensibilidad con respecto a variaciones en la amplitud de la perturbación.

Para cualquier L dada, el diferenciador lineal por AG mantiene su estabilidad sin importar la ganancia seleccionada. Sin embargo, el diferenciador ST puede perder su estabilidad cuando su ganancia no es suficientemente grande. En este experimento, realizamos el análogo del experimento anterior pero variando la amplitud de la perturbación y no del ruido.

La amplitud del ruido es fijada en $\delta = 0.01$ y el valor nominal de la perturbación es elegido como $L = 1$. Las ganancias del diferenciador lineal, ST y GST son elegidas óptimamente como en el experimento anterior. La Figura 3.7 presenta la gráfica del error de diferenciación como función de la amplitud de la perturbación.

Cuando $L = 0$, el diferenciador lineal provee mejor desempeño, como hemos discutido en el experimento anterior. Para el valor nominal $L = 1$, el diferenciador ST provee menor error que los otros dos diferenciadores.

A medida que la amplitud de la perturbación crece, el error del diferenciador ST también crece hasta que se hace inestable. El diferenciador GST elimina este inconveniente al precio de un pequeño deterioro del desempeño en el caso nominal. También es interesante señalar que el diferenciador ST permanece dando el mejor desempeño en una vecindad del valor nominal de la perturbación.

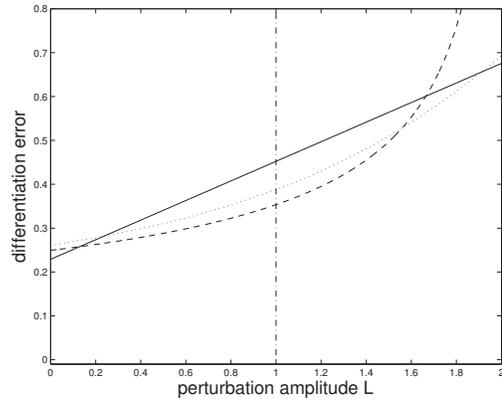


Figura 3.7: Cota final del error de diferenciación en función de la amplitud de la perturbación, para $\delta = 0.01$. Sólida: lineal $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$; segmentada: ST $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$; punteada: GST $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$. Segmento-punto: perturbación nominal $L = 1$ para la cual se eligen las ganancias óptimas.

3.6 Conclusiones

Hemos mostrado que agregar términos discontinuos a un diferenciador lineal por AG mejora su desempeño bajo ruido y perturbación acotados. Para obtener esta conclusión, se presentó un método para calcular la cota final del error de diferenciación para la familia de diferenciadores GST. Esta familia incluye al diferenciador lineal y ST como casos particulares. El método permite obtener la ganancia óptima para cualquier diferenciador GST y comparar el desempeño entre ellos. En particular, comparamos la menor cota final para el diferenciador lineal, ST y GST, junto con su sensibilidad a variaciones en las cotas de las incertidumbres.

El diferenciador ST puro puede proveer el menor error de diferenciación. Sin embargo, es inestable cuando su ganancia no es suficientemente grande para dominar a la perturbación. Este problema puede ser aliviado al incluir términos lineales pequeños al costo de un error mínimo ligeramente mayor.

3.7 Prueba de los Teoremas de la Sección 3

Prueba del Teorema 3.1. Es un caso particular del análisis general hecho en el Teorema 4.3, pp. 123, de [Mor11]. □

El objetivo técnico en este capítulo es calcular la cota final de error de diferenciación. El primer paso para lograrlo es transformar el sistema en una forma más conveniente, como se muestra en el Teorema 3.6. Para su prueba, requeriremos saber que las incertidumbres (ρ, w) se encuentran uniformemente acotadas.

Proposición 3.7.1. *Las incertidumbres satisfacen*

$$|w_1| \leq \mu_1 \Delta_1(\tilde{x}_1) + \mu_2 \delta, \quad |w_2| \leq \frac{1}{2} \mu_1^2 \Delta_0(\tilde{x}_1) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \Delta_1(\tilde{x}_1) + \mu_2^2 \delta, \quad |\rho| \leq L, \quad (3.7)$$

con las funciones Δ_i definidas después del Teorema 3.2.

Prueba. Por construcción

$$w_1 = \phi_1(\tilde{x}_1) - \phi_1(\tilde{x}_1 - \eta) = \mu_1 \left[|\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) - |\tilde{x}_1 - \eta|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1 - \eta) \right] + \mu_2 \eta.$$

Defina ahora $\Delta_1(\tilde{x}_1, \eta) := |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) - |\tilde{x}_1 - \eta|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1 - \eta)$ y note que $\Delta_1(\tilde{x}_1, \eta)$ tiene el mismo signo que η . Por tanto, como $-\delta < \eta(t) < \delta$ se tiene

$$\Delta_1(\tilde{x}_1, -\delta) \leq \Delta_1(\tilde{x}_1, \eta) \leq \Delta_1(\tilde{x}_1, \delta)$$

y al observar que $\Delta_1(\tilde{x}_1, \eta) = -\Delta_1(-\tilde{x}_1, -\eta)$ se tiene $|\Delta_1(\tilde{x}_1, \eta)| \leq \Delta_1(|\tilde{x}_1|, \delta)$. Definiendo, con un poco de abuso de la notación $\Delta_1(\tilde{x}_1, \delta) := \Delta_1(\tilde{x}_1)$ y usando $\eta \leq \delta$, se obtiene la primera desigualdad de (3.7).

Por otro lado, también por construcción

$$w_2 = \phi_2(\tilde{x}_1) - \phi_2(\tilde{x}_1 - \eta) = \frac{1}{2} \mu_1^2 [\text{sign}(\tilde{x}_1) - \text{sign}(\tilde{x}_1 - \eta)] + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \Delta_1(\tilde{x}_1, \eta) + \mu_2^2 \eta$$

y usando la definición de $\Delta_0(\tilde{x}_1)$ se obtiene directamente la segunda desigualdad de (3.7). \square

Como $\Delta_0(x)$, $\Delta_1(x)$ se encuentran uniformemente acotadas, c.f. Figura 3.8, la incertidumbre w resulta también estar uniformemente acotada cuando se ve como una función del tiempo.

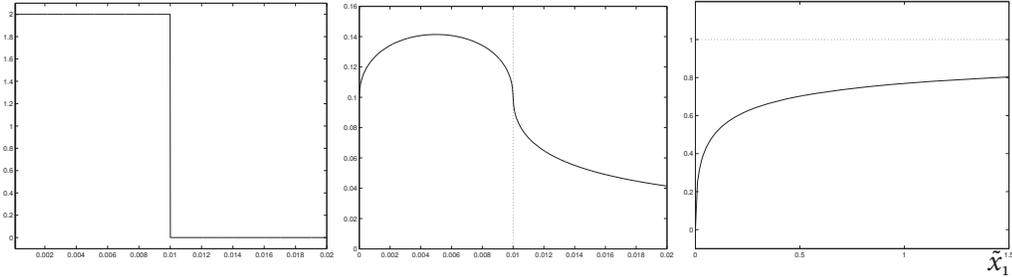


Figura 3.8: Izquierda: gráfica de $\Delta_0(\tilde{x}_1)$ para $\delta = 0.01$. Mitad: gráfica de $\Delta_1(\tilde{x}_1)$ para $\delta = 0.01$. Derecha: gráfica de $\Gamma(\tilde{x}_1)$ para $\mu_1 = 0.6$ y $\mu_2 = 1$, la asíntota $1/\mu_2$ se muestra con línea punteada.

El siguiente teorema provee una forma de analizar el sistema original (3.2) a través del sistema más simple (3.8).

Teorema 3.6. *Considere el sistema*²⁸

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varepsilon^2 \tilde{\rho} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \tilde{w}, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad (3.8)$$

con $\tilde{\rho} = \rho/\phi'_1$ y $\tilde{w} = (w_1, w_2/\phi'_1)^T$. Entonces,

- a) la trayectoria $\zeta(\cdot)$ de cada solución de (3.8) es transformada en una trayectoria $\tilde{x}(\cdot)$ que es una solución (3.2) usando el cambio formal de coordenadas

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \phi^{-1}(\zeta) = \left(\phi_1^{-1}(\zeta_1), \frac{1}{\varepsilon} \zeta_2 \right);$$

²⁸ El sistema (3.8) luce engañosamente lineal aunque no lo es: las incertidumbres transformadas $(\tilde{\rho}, \tilde{w})$ dependen del estado.

b) el sistema (3.8) es completo y tiene trayectorias únicas.

Prueba. a) Seguimos las ideas que Filippov presenta en [Fil60, Capítulo 2, pp. 99]. Sea $\zeta(\tau)$ una solución de (3.8); por tanto, es una función absolutamente continua (AC). Elija

$$t(\tau) = \varepsilon \int_0^\tau \frac{1}{\phi_1'(\tilde{x}_1(s))} ds,$$

donde $\phi_1'(\tilde{x}_1) = 0.5\mu_1|\tilde{x}_1|^{-\frac{1}{2}} + \mu_2$.

Entonces la derivada $t'(\tau) = 2|\tilde{x}_1|^{1/2}/(\mu_1 + 2\mu_2|\tilde{x}_1|^{1/2})$ y suponga, por el momento, que es estrictamente positiva, i.e., $\tilde{x}_1(t) \neq 0$. De esta forma, existe una función inversa $\tau(t)$, con $\tau'(t) = (1/\varepsilon)\phi_1'$. La función²⁹ $\zeta^*(t) = \zeta(\tau(t))$ satisface

$$\frac{d\zeta^*}{dt} = \frac{d\zeta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\zeta}{d\tau} \frac{1}{\varepsilon} \phi_1'$$

casi siempre. Por tanto, la trayectoria de cualquier solución de

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \phi_1' \left(\begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varepsilon^2 \tilde{\rho} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \tilde{w} \right), \quad (3.9)$$

también es la trayectoria de alguna solución de (3.8), c.f., Teorema 3 de [Fil60, Capítulo 2].

Además, la transformación de coordenadas $\phi^{-1} : \zeta \mapsto \tilde{x}$ es uno-a-uno y de clase C^1 . El error original de diferenciación (3.2) es obtenido al usar esa expresión como cambio formal de coordenadas en el sistema (3.9). Entonces, de acuerdo al Teorema 1 de [Fil60, Capítulo 2], cada solución de (3.9) es transformada en una solución de (3.2).

Consideremos ahora que pasa cuando $t'(\tau) = 0$. La función $2|\tilde{x}_1(t)|^{1/2}/(\mu_1 + 2\mu_2|\tilde{x}_1(t)|^{1/2})$ se anula solo en los puntos donde $\tilde{x}_1(t)$ es cero. Cuando esos puntos están aislados, la trayectoria puede ser dividida por ellos en varias trayectorias (algunas veces infinitas de ellas) de la ecuación (3.9).

Cuando la trayectoria $\tilde{x}_1(s) \equiv 0$ para $s \in [a, b]$, el tiempo t se “detiene”. Sin embargo, mostraremos que en tal situación las trayectorias ζ y \tilde{x} en el plano fase también se detienen. La condición $\tilde{x}_1(s) \equiv 0$ en $s \in [a, b]$, implica que $\zeta_1 \equiv 0$ en el mismo intervalo de tiempo. Usando este hecho en el sistema (3.8) se obtiene

$$\dot{\zeta}_2 = -\alpha_1 w_1, \quad \zeta_2 = \text{constante},$$

que significa que la trayectoria de (3.8) vista en el espacio de fase (ζ_1, ζ_2) se detuvo. El argumento análogo muestra que lo mismo ocurre con la trayectoria $\tilde{x}(t)$ de (3.2) cuando es vista en el espacio de fase $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. De esta forma, la relación $\tilde{x} = \phi^{-1}(\zeta)$ permanece siendo válida.

b) Para probar la afirmación basta mostrar que el lado derecho de (3.8) es Lipschitz. Debido a la estructura del sistema y como las

29. Note que también es AC, [Fil60, Capítulo 2, pp. 102].

incertidumbres están uniformemente acotadas, esto es equivalente a mostrar que la función

$$\Gamma(\tilde{x}_1) = \frac{1}{\phi_1'(\tilde{x}_1)} = \frac{|\tilde{x}_1|^{1/2}}{0.5\mu_1 + \mu_2|\tilde{x}_1|^{1/2}}$$

es Lipschitz cuando es escrita en variables ζ . Cuando $\mu_1 = 0$, Γ es evidentemente Lipschitz pues se reduce a la constante $1/\mu_2$.

Recordando que

$$\zeta_1 = \mu_1|\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \mu_2\tilde{x}_1, \quad (3.10)$$

también resulta evidente que Γ es Lipschitz cuando $\mu_2 = 0$, pues

$$\Gamma(\tilde{x}_1) = \frac{2}{\mu_1}|\tilde{x}_1|^{1/2} = \frac{2}{\mu_1}|\zeta_1| = \Gamma(\zeta_1).$$

Cuando $\mu_2 > 0$, la ecuación (3.10) es cuadrática en \tilde{x}_1 y puede ser resuelta

$$|\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) = \frac{-\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + 4\mu_2\zeta_1}}{2\mu_2}.$$

Reemplazando esta expresión en la definición de Γ se obtiene

$$\Gamma(\zeta_1) = \frac{1}{\mu_2} \frac{-\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + 4\mu_2|\zeta_1|}}{\sqrt{\mu_1^2 + 4\mu_2|\zeta_1|}},$$

que es Lipschitz cuando $\mu_1 > 0$ pues su derivada está uniformemente acotada, i.e.,

$$\frac{d\Gamma}{d\zeta_1} = \frac{\partial\Gamma}{\partial|\zeta_1|} \text{sign}(\zeta_1) = \frac{2\mu_1\mu_2}{(\mu_1^2 + 4\mu_1|\zeta_1|)^{3/2}} \text{sign}(\zeta_1) \leq \frac{2\mu_2}{\mu_1}.$$

□

Es fácil obtener una cota para ellas basadas en la cota de las incertidumbres originales.

Proposición 3.7.2. *Las incertidumbres transformadas satisfacen:*

$$|\tilde{w}_1| \leq \mu_1\Delta_1(\tilde{x}_1) + \mu_2\delta, \quad |\tilde{w}_2| \leq \Gamma(x_1) \left[\frac{1}{2}\mu_1^2\Delta_o(\tilde{x}_1) + \frac{3}{2}\mu_1\mu_2\Delta_1(\tilde{x}_1) + \mu_2^2\delta \right], \quad |\tilde{\rho}| \leq \Gamma(\tilde{x}_1)L,$$

donde la función Γ es la introducida después del Teorema 3.2.

Prueba. Es directa usando las cotas de las incertidumbres originales obtenidas en la Proposición 3.7.1 y la definición de las incertidumbres transformadas, junto con el hecho de que $\Gamma(\tilde{x}_1) = 1/\phi_1'(\tilde{x}_1)$. □

Observe que cuando $\mu_2 > 0$, $\Gamma(x)$ está uniformemente acotada por $1/\mu_2$, c.f. Figura 3.8.

3.7.1 La cota final para incertidumbres acotadas.

Para calcular la cota final del error debido a incertidumbres acotadas se puede usar el siguiente resultado:

Lema 3.1 ([VK08]). *Considere el siguiente sistema estable y con una entrada*

$$\dot{z} = Az + Bw,$$

donde A es Hurwitz y $\|z(o)\| \leq a$. Sea $K_k = \int_0^\infty |\{e^{As}B\}_k| ds$ para $k = 1, \dots, n$, donde $\{\cdot\}_k$ es el k -ésimo componente de un vector n -dimensional. Entonces, para todas las entradas uniformemente acotadas y cada $\gamma > 0$, existe un tiempo $T = T(a, \|w\|_\infty, \gamma)$ tal que

$$|z_k(t)| \leq K_k \|w\|_\infty + \gamma, \quad \forall t \geq T,$$

i.e., la cota final de la k -ésima variable es $z_{k,ss} = K_k \|w\|_\infty$.

Usando el sistema transformado del Teorema 3.6 y las cotas uniformes de las incertidumbres $|\tilde{\rho}(t)| \leq \rho^o$, $|\tilde{w}_1(t)| \leq w_1^o$, $|\tilde{w}_2(t)| \leq w_2^o$, la cota final para ζ_1 puede ser calculada usando el Lema 3.1

$$\zeta_{1,ss} = P_1 \varepsilon^2 \rho^o + Q_{11} w_1^o + Q_{12} w_2^o,$$

donde

$$P_1 := \int_0^\infty |\{e^{At}B\}_1| dt, \quad Q_{11} = \int_0^\infty |\{e^{At}D_1\}_1| dt, \quad Q_{12} := \int_0^\infty |\{e^{At}D_2\}_1| dt,$$

y observe que $Q_{12} = \alpha_2 P_1$. También es posible escribirlo en términos de la variable original \tilde{x}_1

$$\mu_1 \tilde{x}_{1,ss}^{1/2} + \mu_2 \tilde{x}_{1,ss} = \zeta_{1,ss} = P_1 \varepsilon^2 \rho^o + Q_{11} w_1^o + Q_{12} w_2^o = P_1 (\varepsilon^2 \rho^o + \alpha_2 w_2^o) + Q_{11} w_1^o.$$

Al usar el mismo procedimiento para ζ_2 se obtiene

$$\zeta_{2,ss} = P_2 \varepsilon^2 \rho^o + Q_{21} w_1^o + Q_{22} w_2^o = P_2 (\varepsilon^2 \rho^o + \alpha_2 w_2^o) + Q_{21} w_1^o,$$

donde

$$P_2 := \int_0^\infty |\{e^{At}B\}_2| dt, \quad Q_{21} = \int_0^\infty |\{e^{At}D_1\}_2| dt, \quad Q_{22} := \int_0^\infty |\{e^{At}D_2\}_2| dt.$$

De esta forma, una vez que el error para la primera variable ha sido calculado, se puede calcular directamente el error para la segunda al usar

$$\zeta_{2,ss} = \frac{P_2}{P_1} \zeta_{1,ss} + \left(Q_{21} - \frac{P_2}{P_1} Q_{11} \right) w_1^o,$$

y, recordando la definición $\zeta_2 = \varepsilon \tilde{x}_2$, la cota final del error de diferenciación

$$\tilde{x}_{2,ss} = \frac{1}{\varepsilon} \zeta_{2,ss}.$$

3.7.2 Prueba del Teorema 3.2.

En principio, el Lema 3.1 puede usarse directamente para calcular la cota final del error de diferenciación usando sólo las cotas uniformes de las incertidumbres. Sin embargo, esto resultaría en una muy mala aproximación, pues los cambios de las incertidumbres de acuerdo al estado serían ignorados³⁰.

Para considerar la dependencia del estado de las incertidumbres, el siguiente algoritmo recursivo basado en el Lemma 3.1 es propuesto:

Paso 0: inicialice las incertidumbres al máximo, i.e., fije

$$\tilde{\rho}^o = \frac{L}{\mu_2}, \quad \tilde{w}_1^o = \mu_1 \sqrt{2\delta} + \mu_2 \delta, \quad \tilde{w}_2^o = \frac{1}{\mu_2} [\mu_1^2 + 1.5\mu_1\mu_2 \sqrt{2\delta} + \mu_2^2 \delta]$$

Paso 1: calcule la cota final correspondiente para \tilde{x}_1 (denotada aquí como x_o) como la única solución a

$$\mu_1 x_o^{1/2} + \mu_2 x_o = P_1 \varepsilon^2 \tilde{\rho}^o + Q_{11} \tilde{w}_1^o + Q_{12} \tilde{w}_2^o$$

Paso 2: actualice las cotas de las incertidumbres usando el valor obtenido de la cota final

$$\tilde{\rho}^1 = L\Gamma(x_o), \quad \tilde{w}_1^1 = \mu_1 \Delta_1(x_o) + \mu_2 \delta, \quad \tilde{w}_2^1 = \Gamma(x_o) \left[\frac{1}{2} \mu_1^2 \Delta_o(x_o) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \Delta_1(x_o) + \mu_2^2 \delta \right].$$

Paso 3: regrese al Paso 1 y repita!

El algoritmo define dos mapas recursivos:

$$v \mapsto x \text{ usando } \mu_1 x^{1/2} + \mu_2 x = v$$

$$x \mapsto v \text{ usando } v(x) = P_1 L \varepsilon^2 \Gamma(x) + Q_{11} [\mu_1 \Delta_1(x) + \mu_2 \delta] + Q_{12} \Gamma(x) \left[\frac{1}{2} \mu_1^2 \Delta_o(x) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \Delta_1(x) + \mu_2^2 \delta \right]$$

donde $v(x)$ puede ser reescrita como

$$v(x) = [P_1 L \varepsilon^2 + Q_{12} \mu_2^2 \delta] \Gamma(x) + Q_{11} \mu_1 \Delta_1(x) + \frac{3}{2} Q_{12} \mu_1 \mu_2 \Gamma \Delta_1(x) + \frac{1}{2} Q_{12} \mu_1^2 \Gamma \Delta_o(x) + Q_{11} \mu_2 \delta$$

Ahora estamos listos para la prueba del Teorema 3.2:

Prueba del Teorema 3.2. El argumento es por inducción. El primer paso del algoritmo obviamente corresponde a una cota superior de la cota final del error. Si en el paso n la cota final es x_n y las incertidumbres son $(\tilde{\rho}^n, \tilde{w}_1^n, \tilde{w}_2^n)$, entonces las incertidumbres están acotadas por $(\tilde{\rho}^{n+1}, \tilde{w}_1^{n+1}, \tilde{w}_2^{n+1})$ de modo que la cota final de hecho es x_{n+1} . Esto muestra que la secuencia $x_n, n \geq 0$ son cotas superiores de la cota final de \tilde{x}_1 . Entonces el límite del algoritmo (punto fijo) también es una cota superior de la cota final de \tilde{x}_1 .

Una vez que la cota final para \tilde{x}_1 ha sido calculada, la cota final para \tilde{x}_2 puede ser obtenida usando

$$\tilde{x}_{2,ss} = \frac{1}{\varepsilon} \zeta_{2,ss} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{P_2}{P_1} (\mu_1 x^{*1/2} + \mu_2 x^*) + \left(Q_{21} - \frac{P_2}{P_1} Q_{11} \right) (\mu_1 \Delta_1(x^*) + \mu_2 \delta) \right]$$

y al reemplazar $\mu_1 (x^*)^{1/2} + \mu_2 x^* = v(x^*)$ en esta última expresión se obtiene la afirmación del Teorema. \square

Una idea similar fue usada por Angeli y Sontag para caracterizar el punto de equilibrio de la interconexión de sistemas monótonos [AS03].

30. Por ejemplo, la incertidumbre producida por el ruido en la función signo desaparece cuando $|\tilde{x}_1|$ es mas grande que la amplitud del ruido δ , c.f., Figura 3.8.

3.7.3 Prueba del Teorema 3.3

Deberemos mostrar que si la ganancia no es suficientemente grande, existe una solución positiva diferente de cero. Conforme la ganancia crece, esta solución positiva se acerca a cero. En presencia de términos discontinuos ($\mu_1 > 0$), esta solución se vuelve negativa para una ε positiva, que significa que el error puede hacerse cero con una ganancia finita.

Prueba del Teorema 3.3. Una solución obvia es $x = 0$. Para obtener las otras dos soluciones, simplemente divide por x para obtener

$$2\mu_2^2x + 3\mu_1\mu_2x^{1/2} + \mu_1^2 - 2P_1L\varepsilon^2 = 0,$$

que es una ecuación cuadrática con dos soluciones. No estamos interesados en la solución que siempre es negativa. La solución que puede ser positiva está dada (después de simplificaciones algebraicas) por

$$\sqrt{x} = \frac{-3\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + 16P_1L\varepsilon^2}}{4\mu_2},$$

que es positiva ssi $\varepsilon^2 > \mu_1^2/(2P_1L)$ y negativa de otra forma. Por tanto, la solución más grande es $x = 0$ cuando $\varepsilon^2 \leq \mu_1^2/(2P_1L)$ y \sqrt{x} de otra forma. Esto significa que el error es cero si $\varepsilon^2 \leq \mu_1^2/(2P_1L)$ y \sqrt{x} de otra forma. En el caso limite cuando $\mu_2 = 0$, $\sqrt{x} = -\infty$ si $\varepsilon^2 \leq \mu_1^2/(2P_1L)$ y $+\infty$ en otro caso. Esto implica que el error es cero si la ganancia satisface $\varepsilon^2 \leq \mu_1^2/(2P_1L)$ e infinito de otro modo. \square

3.8 Prueba de los Teoremas 3.4 y 3.5

Cuando $\mu_2 = 0$, la función $\Gamma(x)$ se reduce a $\Gamma(x) = (2/\mu_1)x^{1/2}$, y la intersección puede ser encontrada al resolver

$$\mu_1x^{1/2} = \varepsilon^2LP_1\frac{2}{\mu_1}x^{1/2} + Q_{11}\mu_1\Delta_1(x) + \frac{1}{2}\mu_1^2Q_{12}\Gamma\Delta_0(x),$$

o, equivalentemente

$$v_o(x) := \left(\mu_1 - \frac{2\varepsilon^2LP_1}{\mu_1}\right)x^{1/2} = Q_{11}\mu_1\Delta_1(x) + \frac{1}{2}\mu_1^2Q_{12}\Gamma\Delta_0(x) := v_1(x).$$

Un análisis simple revela las siguientes propiedades.

Proposición 3.8.1. *La función $v_1(x)$ satisface:*

- i) Si $x > \delta$, entonces $v_1(x) = Q_{11}\mu_1\Delta_1(x)$, esto significa que $v_1(x)$ es estrictamente decreciente después de $x = \delta$ en la misma forma que $\Delta_1(x)$ lo hace. En particular $v_1(\delta^+) = Q_{11}\mu_1\sqrt{\delta}$.
- ii) $v_1(\delta) = \mu_1Q_{11}\sqrt{\delta} + 2\mu_1Q_{12}\sqrt{\delta}$.
- iii) $v_1(0) = Q_{11}\mu_1\sqrt{\delta}$.

iv) existe un punto de inflexión x_* que es un máximo antes de $x = \delta$ dado por

$$x_* = \frac{(0.5Q_{11} + Q_{12})^2}{0.25Q_{11}^2 + (0.5Q_{11} + Q_{12})^2} \delta$$

Proposición 3.8.2. La función $v_o(x)$ satisface:

- i) $v_o(0) = 0$ y $v_o(x)$ es estrictamente creciente o decreciente de acuerdo al signo de $\mu_1 - \frac{2\varepsilon^2 LP_1}{\mu_1}$.
- ii) $v_o(\delta) = \left(\mu_1 - \frac{2\varepsilon^2 LP_1}{\mu_1}\right) \sqrt{\delta}$.

Ahora estamos listos para la prueba de teoremas.

Prueba del Teorema 3.4. a) De otra forma, $v_o(x) < 0$ y $v_1(x) \geq 0$, de modo que no puede haber intersección.

Conforme $\varepsilon^2 \rightarrow \mu_1^2/(2LP_1)$, $v_o(x) \rightarrow 0$ uniformemente, y la solución (intersección) crece, vea Figura 3.9. Cuando $\varepsilon^2 = \mu_1^2/(2LP_1)$, $v_o(x) \equiv 0$ y la única intersección (solución) se encuentra en infinito. Cuando $\varepsilon^2 > \mu_1^2/(2LP_1)$ no existe solución y esto debe ser interpretado como una cota final infinita. De hecho, esta última conclusión ha sido probada usando un análisis de Lyapunov: si la ganancia no es suficientemente grande, el error de diferenciación se vuelve inestable, c.f. [Mor11].

b) La ganancia debe ser suficientemente grande para estabilizar, i.e., $\varepsilon^2 \leq \mu_1^2/(2LP_1)$. Analizamos dos casos:

i) $Q_{11} < 1$. Observe que $v_1(\delta^+) = Q_{11}\mu_1\sqrt{\delta}$ y que

$$v_o(\delta) = \mu_1\sqrt{\delta} - \frac{2\varepsilon^2 LP_1}{\mu_1}\sqrt{\delta}$$

entonces si $Q_{11} < 1$ se tiene que $v_1(\delta^+) < v_o(\delta)$ si

$$\varepsilon^2 \leq \frac{\mu_1^2}{2LP_1}(1 - Q_{11})$$

y para todos los demás casos la intersección es en $x = \delta$.

Cuando $\varepsilon^2 > \frac{\mu_1^2}{2LP_1}(1 - Q_{11})$, pero suficientemente grande para estabilizar, la intersección es con la segunda rama y se encuentra al resolver

$$\mu_1 x^{1/2} = \left(\frac{2LP_1}{\mu_1^2} \varepsilon^2 + Q_{11}\mu_1\right) x^{1/2} - Q_{11}\mu_1(x - \delta)^{1/2}$$

de donde se obtiene

$$x = \frac{Q_{11}^2}{Q_{11}^2 - \left(\frac{2LP_1}{\mu_1^2} \varepsilon^2 + Q_{11} - 1\right)^2} \delta. \quad (3.11)$$

Note que

$$x \rightarrow \frac{Q_{11}^2}{2Q_{11} - 1} \delta > \delta \text{ conforme } \varepsilon \rightarrow 0,$$

de modo que la cota final para \tilde{x}_1 no puede ser menor a δ , como se afirmaba.

- ii) $Q_{11} \geq 1$. En este caso, $v_1(\delta^+) > v_0(\delta)$ de modo que la intersección es únicamente con la segunda rama de $v_1(x)$, vea la Figura 3.9. Por tanto, la intersección es siempre en x obtenida en el punto (i), ecuación (3.11), y no puede ser menor a δ .
- c) Para cualquier $\varepsilon > 0$, el punto (b) muestra que $x \geq \delta$. En particular, x es mayor a un valor positivo cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por tanto, $\Xi(x, \delta)$ tiende a un valor positivo cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Observando que $\tilde{x}_{2,ss} \geq (1/\varepsilon)\Xi(x, \delta)$, se obtiene que $\tilde{x}_{2,ss} \rightarrow \infty$ conforme $\varepsilon \rightarrow 0$.

□

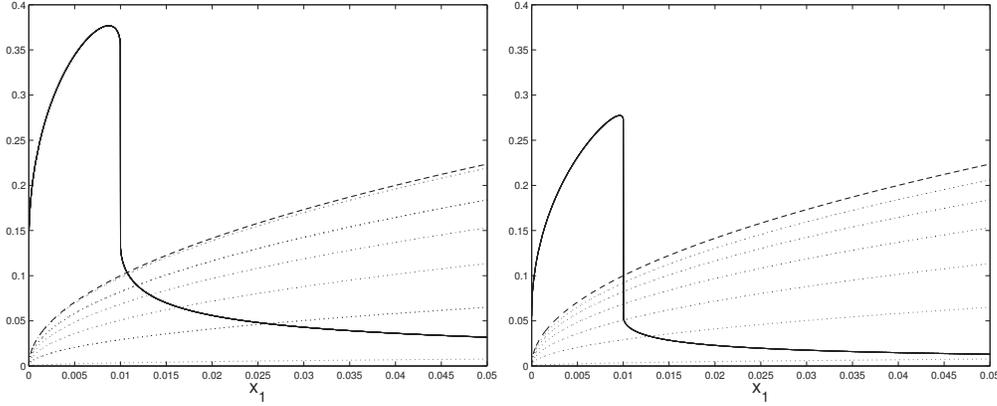


Figura 3.9: Solución a la ecuación algebraica en el caso ST. Sólido $v_1(x)$ para $\mu_1 = 1$ y $\delta = 0.01$. La línea segmentada es $v_0(x)$ para $\varepsilon = 0$, las líneas punteadas son $v_0(x)$ conforme ε crece. En todos los casos $L = 1$. La Figura a la izquierda es con $Q_{11} = 1.3501$ y a la derecha con $Q_{11} = 0.5508$.

Prueba del Teorema 3.5. a) Es consecuencia del Teorema 3.4, pues $\tilde{x}_{2,ss} \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$.

- b) Para cualquier ganancia $\varepsilon^2 \leq \frac{\mu_1^2}{2LP_1}$, existe una solución dada por x . Esta puede ser escrita como $x = c\delta$, donde $c = c(\varepsilon)$ es una constante positiva definida como

$$c = \begin{cases} 1 & \text{si } Q_{11} < 1 \text{ y } \varepsilon^2 \leq \frac{\mu_1^2}{2LP_1}(1 - Q_{11}) \\ \frac{Q_{11}^2}{Q_{11}^2 - \left(\frac{2LP_1}{\mu_1^2}\varepsilon^2 + Q_{11} - 1\right)^2} & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Para escribir la expresión para $\tilde{x}_{2,ss}$, primero observe que $\Gamma(x)\Delta_0(x) = 0$ pues hemos mostrado que $x \geq \delta$. Por tanto, para $\mu_2 = 0$, la fórmula (3.4) se reduce a

$$\tilde{x}_{2,ss} = \frac{2P_2L\varepsilon}{\mu_1}x^{1/2} + \frac{1}{\varepsilon}\mu_1Q_{21}\Delta_1(x).$$

Sustituyendo $x = c\delta$ y usando $\Delta_1(x) \leq \sqrt{2\delta}$ se obtiene

$$\tilde{x}_{2,ss} \leq \left(\frac{2P_2L\varepsilon}{\mu_1}\sqrt{c} + \frac{1}{\varepsilon}\mu_1Q_{21}\sqrt{2} \right) \sqrt{\delta},$$

como se afirmó.

c) Si $\frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{P_1 \theta}{\mu_1^2} L$ con $\theta > 2$, entonces existe una intersección pues se satisface

$$\varepsilon^2 \leq \frac{\mu_1^2}{2LP_1} \Leftrightarrow \frac{1}{\theta} < \frac{1}{2}$$

Por tanto, la intersección está dada por $x = c\delta$, con $c = c(\theta)$ definida como

$$c = \begin{cases} 1 & \text{si } Q_{11} < 1 \text{ y } \varepsilon^2 \leq \frac{\mu_1^2}{2LP_1} (1 - Q_{11}) \\ \frac{Q_{11}^2}{Q_{11}^2 - (\frac{2}{\theta} + Q_{11} - 1)^2} & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

en analogía con la constante del punto (b). Sustituyendo el valor de ε y usando $\Delta_1(x) \leq \sqrt{2\delta}$ en la expresión para $\tilde{x}_{2,ss}$ se obtiene

$$\tilde{x}_{2,ss} \leq \left(\frac{2P_2}{\sqrt{P_1}\theta} \sqrt{c} + \sqrt{2P_1\theta} Q_{21} \right) \sqrt{\delta L}$$

como afirma el teorema. □

3.9 Calculando las Integrales

Esta sección ilustra como calcular el valor numérico de las constantes P_i , Q_{ij} requeridas para usar el Teorema 3.2. Hemos elegido las constantes

$$\alpha_1 = 1.5, \alpha_2 = 1.1.$$

Se aplican las formulas explicitas de [BS93], Corolario 2.4, para el caso cuando $\alpha_1^2 - 4\alpha_2 = -2.15 < 0$. Esto arroja

$$e^{At} = e^{\frac{-\alpha_1}{2}t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) - \frac{\alpha_1}{2\omega} \sin(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\alpha_2 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} & \cos(\omega t) + \frac{\alpha_1}{2\omega} \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

donde $\omega = 0.5\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2} = \sqrt{215}/20 \approx 0.7331$.

De esta forma, el valor para las integrales es aproximadamente

$$P_1 = 0.9852, \quad Q_{11} = 1.3501, \quad Q_{12} = 1.0838,$$

$$P_2 = 1.5399, \quad Q_{21} = 1.6257, \quad Q_{22} = 1.6939.$$

PARTE II

OTRAS PROPIEDADES INTERESANTES EN LOS DIFERENCIADORES

DIFERENCIADOR CON DESEMPEÑO \mathcal{H}_∞

4

Se seleccionan las ganancias del diferenciador Super-Twisting Generalizado para minimizar el efecto de ruido en la medición usando un criterio \mathcal{H}_∞ . El procedimiento de diseño está basado en un problema simple de optimización en dimensión finita que puede ser fácilmente resuelto usando software estándar. Además, se muestra que es suficiente resolver el problema de optimización sólo dos veces para calcular el conjunto completo de ganancias óptimas para una amplitud dada de ruido.

Omitimos la motivación pues es esencialmente la misma que la del capítulo anterior. La diferencia principal es el criterio usado para medir el desempeño del diferenciador. En el Capítulo 3 se usó el error en estado estable generado como criterio de desempeño. Ahora, se usa la transmisión de ruido en sentido \mathbb{L}^2 como criterio. Al ser un criterio integral, este naturalmente favorece errores con promedio cero sin importar tanto las oscilaciones. Esto resulta útil, por ejemplo, cuando el estimado de la derivada es usado para control, pues genera un error menor de seguimiento dado que el sistema filtra las oscilaciones.

4.1 Preliminares y Formulación del Problema

Dada una señal $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y una función de ruido diferenciable $\eta(t)$, el problema consiste en estimar la primera derivada de $\sigma(t)$ basada en su medición ruidosa $y(t) = \sigma(t) + \eta(t)$.

Se asumen dos cosas sobre el ruido

- i) $\eta(t)$ es una función diferenciable¹;
- ii) se conoce una cota δ para la amplitud del ruido, de modo que $\eta(t) = \delta \cdot \eta_0(t)$ donde $\sup_{t \geq 0} |\eta_0(t)| \leq 1$.

La amplitud del ruido de la medición se asume conocido. Como el ruido es diferenciable, podemos introducirlo como variable de estado. De esta forma, definiendo $x_1 := \sigma + \eta$ y $x_2 := \dot{\sigma}$ el problema se transforma en diseñar un observador para el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2 + \delta w, \quad \dot{x}_2 = \rho, \quad y = x_1, \quad (4.1)$$

donde $\rho(t) := \ddot{\sigma}(t)$ y $w(t) := \dot{\eta}_0(t)$ son incertidumbres.

1. Podemos relajar un poco esta restricción al considerar que solo es débilmente diferenciable. Una función Lebesgue integrable η tiene derivada débil v si $\int \eta \phi dt = -\int v \phi dt, \forall \phi \in C^\infty$.

De la misma forma que en el Capítulo anterior, la única hipótesis sobre la señal $\sigma(t)$ es que su segunda derivada esta uniformemente acotada por una constante conocida:

$$\sup_{t \geq 0} |\ddot{\sigma}(t)| \leq L,$$

Consideramos como diferenciador el Super-Twisting Generalizado [Mor11] que toma la siguiente forma:

$$\dot{\hat{x}}_1 = -k_1 \phi_1(\hat{x}_1 - y) + \hat{x}_2, \quad \dot{\hat{x}}_2 = -k_2 \phi_2(\hat{x}_1 - y),$$

donde (k_1, k_2) son las ganancias del algoritmo por ser seleccionadas y ϕ_i , $i = 1, 2$ son las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \phi_1(\tilde{x}_1) &= |\tilde{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \tilde{x}_1, \\ \phi_2(\tilde{x}_1) &= \frac{1}{2} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \frac{3}{2} |\tilde{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \tilde{x}_1, \end{aligned}$$

con $\tilde{x}_1 := \hat{x}_1 - x_1 = \hat{x}_1 - y$.² Definiendo el error de observación $\tilde{x} := \hat{x} - x$ se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -k_1 \phi_1(\tilde{x}_1) + \tilde{x}_2 + \delta w, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -k_2 \phi_2(\tilde{x}_1) + \rho. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note que a diferencia del problema en el Capitulo 2 donde el ruido no es necesariamente diferenciable, aquí el efecto del ruido w solo aparece en el primer canal. Además, el efecto del ruido no crece con la ganancia de algoritmo.

Recientemente, en ausencia de ruido, se obtuvieron condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad del sistema (4.2) en términos de la semi-negatividad de una Desigualdad Lineal Matricial (LMI) [Mor11]. La parte fundamental es usar $\zeta = (\phi_1(\tilde{x}_1), \tilde{x}_2)^T$, no como cambio de coordenadas³, sino para introducir la forma cuadrática $V = \zeta^T P \zeta$, $P > 0$, como Función de Lyapunov.

Teorema 4.1 ([Mor11]). *En ausencia de ruido, si la LMI*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + R + \epsilon I & PB \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} \leq 0,$$

con $R := \text{diag}\{4L^2, 0\}$ y

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tiene una solución con respecto a $P = P^T > 0$ y $\epsilon > 0$, entonces el error de observación es estable en tiempo finito a pesar de la perturbación ρ .

Prueba. La prueba de este Teorema puede ser obtenida como un caso particular del análisis de [Mor11]. Sin embargo, hemos decidido presentar una breve prueba de modo que este documento este más autocontenido. Usando $V = \zeta^T P \zeta$, $P > 0$, su derivada temporal (o total) fuera de $\tilde{x}_1 = 0$ es

$$\dot{V} = \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix},$$

donde $\tilde{\rho} := \rho / \phi_1'$.

2. A diferencia del Capítulo 2, hemos fijado los parámetros que balancean los términos ST y lineales como $\mu_1 = 1 = \mu_2$. Sin embargo, no consideramos ninguna parametrización en específico para la ganancia.

3. Pues no es un difeomorfismo, como se discutió en el Capitulo 2.

Ahora observe que la condición $|\rho(t)| \leq L$ está contenida en $|\rho(t)| \leq 2L|\phi_2|$ pues ϕ_2 tiene un signo. Esta última desigualdad se traduce en la siguiente condición para $\tilde{\rho}$

$$|\tilde{\rho}| = \left| \frac{\rho}{\phi_1'} \right| \leq |\rho| \left| \frac{1}{\phi_1'} \right| \leq \frac{2L|\phi_1'| |\phi_1|}{|\phi_1'|} = 2L|\phi_1|,$$

donde se ha usado el hecho de que $|\phi_2| \leq |\phi_1'| |\phi_1|$. Elevando al cuadrado ambos lados, esta última expresión se puede escribir como la siguiente condición de sector

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4L^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix} \geq 0,$$

ya al definir $R := \text{diag}(4L^2, 0)$, como

$$\omega(\zeta, \tilde{\rho}) := \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Regresando a \dot{V} , agregaremos el término positivo $\phi_1' \omega(\zeta, \tilde{\rho})$ (pues $\phi_1' > 0$) a su lado derecho, al mismo tiempo que sumamos y restamos $\epsilon \phi_1' \zeta^T P \zeta$ para obtener

$$\dot{V} \leq \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + R + \epsilon P & PB \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix} - \epsilon \phi_1' V.$$

Cambiar ϵP por ϵI no afecta las soluciones de la desigualdad, c.f., [Mor11]. Por tanto, bajo las hipótesis del Teorema se tiene $\dot{V} \leq -\epsilon \phi_1' V < 0$. De hecho, se puede mostrar que $\dot{V} \leq -c\sqrt{V}$ para algún $c > 0$, de donde se puede obtener estabilidad en tiempo finito, vea [Mor11]. \square

4.1.1 Formulación del Problema

El objetivo es seleccionar las ganancias (k_1, k_2) de forma que provean el mejor desempeño a pesar del ruido $\eta(t)$.

Hemos considerado un criterio \mathcal{H}_∞ ponderado (vea por ejemplo [RA02, PMZ05a]) entre el efecto del ruido $w(\cdot)$ y una combinación lineal $H\zeta$, con H una matriz⁴.

Para la señal escalar w , introduzcamos la siguiente “norma \mathbb{L}^2 -ponderada”:

$$\|w\|_{\mathbb{L}_\phi^2}^2 := \int_0^\infty \left| \left(\sqrt{\phi_1'} \circ \tilde{x}_1(t) \right) \cdot w(t) \right|^2 dt, \quad (4.3)$$

similar a la norma \mathbb{L}^2 generalizada introducida en [RA02]. La norma ponderada (4.3) pesa el ruido de forma natural: de acuerdo a la amplitud del error de observación de $x_1 = y$. De este modo, si el error de observación es grande el ruido no es considerado tan importante como cuando el error de observación se acerca a cero. Además, a pesar de que $\phi_1'(\tilde{x}_1)$ tiene un polo⁵ en $\tilde{x}_1 = 0$, esta norma no se hace infinito cuando $\tilde{x}_1(t)$ pasa por cero, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. *A pesar de que la trayectoria $\tilde{x}(\cdot)$ cruce por $\tilde{x}_1 = 0$, la integral*

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_1' \circ \tilde{x}_1(s) ds, \quad \tilde{x}_1(t_1) < 0, \quad \tilde{x}_1(t_2) > 0, \quad (4.4)$$

4. De esta forma, por ejemplo, es posible considerar el problema \mathcal{H}_∞ sólo con respecto al error de estimación de la derivada cuando $H = [0, 1]$ o con respecto a ambas variables cuando $H = I_{2 \times 2}$

5. Pues $\phi_1'(\tilde{x}_1) := \frac{\partial \phi_1(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} = \frac{1}{2|\tilde{x}_1|^{\frac{1}{2}}} + 1$.

permanece acotada. Es decir, no está acotada solo en el límite cuando el número cruces es infinito.

Prueba. Argumentamos como sigue: considere el caso cerca de un cruce cuando $\tilde{x}_1(t) \approx 0$, $\tilde{x}_1(0) \approx 0$. Entonces, el error de observación (4.2) para x_1 puede ser aproximado por un doble integrador perturbado

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + dw, \quad \dot{\tilde{x}}_2 = -k_2 + \rho, \quad \tilde{x}_1(0) > 0,$$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + dw, \quad \dot{\tilde{x}}_2 = k_2 + \rho, \quad \tilde{x}_1(0) < 0,$$

o escrito en forma integral

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) = & \pm k_2 t^2 + \tilde{x}_2(0)t + \tilde{x}_1(0) + \int_0^t \int_0^t \rho(s_1) ds_1 ds_2 \\ & + d \int_0^t w(s) ds. \end{aligned}$$

Usando la hipótesis $|\rho(t)| \leq L$ y que $w(t)$ es Lebesgue-integrable, se puede obtener la siguiente cota inferior

$$|\tilde{x}_1(t)| \geq -k_2 t^2 + \tilde{x}_2(0)t + \tilde{x}_1(0) - Lt^2 - W(t),$$

para alguna función diferenciable $W(t)$. Considere ahora una expansión en serie de Taylor de $W(t)$ cerca a $t = 0$, i.e.

$$W(t) = W(0) + \dot{W}(0)t + O(t^2) = w(0)t + O(t^2).$$

Por tanto, motivado por el hecho de que $t \approx 0$, una aproximación de primer orden para la cota inferior es

$$|\tilde{x}_1(t)| \geq [\tilde{x}_2(0) + w(0)]t + \tilde{x}_1(0) := at + b.$$

Usando esta última expresión, podemos acotar la integral por

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{|\tilde{x}_1(s)|^{\frac{1}{2}}} \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{|as + b|^{\frac{1}{2}}} = 2|as + b|^{\frac{1}{2}} \Big|_{s=t_1}^{s=t_2} < \infty,$$

que muestra que la integral (4.4) permanece acotada después de un cruce por \tilde{x}_1 . \square

El problema \mathcal{H}_∞ que consideramos es el siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = 0, \quad & \text{when } w(t) \equiv 0, \\ \|H\zeta\|_{\mathbb{L}^2} \leq \mu \|w\|_{\mathbb{L}_\phi^2}, \quad & \text{when } \tilde{x}(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $\mu \geq 0$ es una constante que caracteriza la ganancia ponderada \mathbb{L}^2 entre el ruido y el error de observación. Por tanto, el objetivo es seleccionar las ganancias (k_1, k_2) para obtener el mínimo valor posible de μ , de modo que se obtenga la máxima atenuación del efecto del ruido.

Para concluir esta sección, presentamos la siguiente caracterización de la ganancia ponderada \mathbb{L}^2 , caracterizada por μ , en términos de una función a-la Lyapunov.

Lema 4.1. Si existe una función de Lyapunov $V(\zeta)$ para el sistema sin ruido con $V(o) = o$, tal que su derivada a lo largo del sistema con ruido satisface

$$\dot{V} + \zeta^T H^T H \zeta - \mu^2 \phi_1' w^2 < o,$$

para algún escalar $\mu \geq o$, entonces el sistema satisface el problema \mathcal{H}_∞ de las ecuaciones (4.5) con ganancia no mayor a μ .

Prueba. Si $w(t) \equiv o$ entonces $\dot{V} < o$ de acuerdo al Teorema 4.1, por lo que $\zeta(t) \rightarrow o$ conforme $t \rightarrow \infty$. Por otro lado cuando $\zeta(o) = o$ entonces $V(\zeta(o)) = o$, e integrando se obtiene

$$V \circ \zeta(t) + \int_0^t \|H\zeta(\tau)\|^2 d\tau - \mu^2 \int_0^t \phi_1' w^2(\tau) d\tau < o,$$

pues $V \circ \zeta(t) \geq o$. Al tomar el límite $t \rightarrow \infty$

$$\|H\zeta\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \int_0^\infty \|H\zeta(\tau)\|^2 d\tau \leq \mu^2 \int_0^\infty \phi_1' w(\tau)^2 d\tau = \mu^2 \|w\|_{\mathbb{L}^2}^2,$$

y finalmente tomar raíz en ambos lados completa la prueba del Lema. \square

4.2 Resultados Principales

Al usar la función de Lyapunov del Teorema 4.1 como función de energía para el sistema con ruido, junto con el Lema 4.1, es posible obtener el siguiente Teorema:

Teorema 4.2. El error de observación (4.2) con $\dot{\eta} \in \mathbb{L}_\phi^2$ satisface el problema de filtrado \mathcal{H}_∞ con ganancia menor $\sqrt{\mu}$ si se cumple la siguiente desigualdad:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + R + H^T H + \epsilon I_{2 \times 2} & PB & PD \\ B^T P & -1 & o \\ D^T P & o & -\mu \end{bmatrix} \leq o,$$

con $D = \begin{bmatrix} \delta & o \end{bmatrix}^T$, para alguna matriz $P = P^T > o$ y constantes $\epsilon > o, \mu \geq o$.

Prueba. Primero observe que $\phi_1' \geq 1$, por lo que

$$\zeta^T H^T H \zeta \leq \phi_1' \zeta^T H^T H \zeta.$$

Por tanto, usando el Lema 4.1, tome $V = \zeta^T P \zeta$ y calcule

$\dot{V} + \zeta^T H^T H \zeta - \mu \phi_1' w^2$ que es igual a:

$$\begin{aligned}
&= \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & PD \\ B^T P & 0 & 0 \\ D^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \\ w \end{bmatrix} + \zeta^T H^T H \zeta - \mu \phi_1' w^2, \\
&\leq \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & PD \\ B^T P & 0 & 0 \\ D^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \\ w \end{bmatrix} + \phi_1' \zeta^T H^T H \zeta - \mu \phi_1' w^2, \\
&\leq \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + H^T H + \epsilon P & PB & PD \\ B^T P & 0 & 0 \\ D^T P & 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \\ w \end{bmatrix} \\
&\quad - \epsilon \phi_1' \zeta^T P \zeta + \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}, \\
&\leq \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\Xi} & PB & PD \\ B^T P & -1 & 0 \\ D^T P & 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \\ w \end{bmatrix} - \epsilon \phi_1' V,
\end{aligned}$$

donde $\tilde{\Xi} := A^T P + PA + \epsilon P + H^T H + R$. Al igual que en la prueba del Teorema 4.1, cambiar ϵP por ϵI en $\tilde{\Xi}$ no afecta la existencia de soluciones de la desigualdad. Por tanto, bajo las condiciones de teorema $\dot{V} + \zeta^T H^T H \zeta - \mu \phi_1' w^2 \leq -\epsilon \phi_1' V < 0$. \square

Como se anunció previamente, el objetivo es encontrar las ganancias (k_1, k_2) de forma que se garantice la máxima atenuación de la incertidumbre w en el sentido \mathbb{L}^2 . Para ello, note que se puede escribir

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} =: A_0 - KC,$$

y entonces es posible usar el siguiente Teorema.

Teorema 4.3. *Si el problema de minimización*

$$\mu \longrightarrow \min$$

sujeto a $\mu \geq 0, \epsilon > 0, P = P^T > 0$ y

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + PA_0 - C^T Y^T - YC + R + H^T H + \epsilon I_{2 \times 2} & PB & PD \\ B^T P & -1 & 0 \\ D^T P & 0 & -\mu \end{bmatrix} \leq 0,$$

tiene una solución respecto a Y, ϵ y P , entonces las ganancias

$$K = P^{-1} Y,$$

proveen de desempeño \mathcal{H}_∞ óptimo del error de observación (5.8) con respecto a ruido diferenciable η .

La prueba de este último teorema puede ser obtenida directamente a partir del Teorema 4.2. Note, que el problema a resolver es lineal en todas las incógnitas y por tanto puede ser fácilmente resuelto usando software estándar⁶.

6. El Listado 4.1 presenta un script de MATLAB para resolver el problema de minimización del Teorema 4.3 usando CVX, un paquete para especificar y resolver programas convexos [GB11]

```

1 A0 = [0 1; 0 0]; C = [1 0]; B = [0; 1]; H = [0 1];
2 D = [1e-3; 0]; L = 1;
3 R = [4*L^2 0; 0 0 ];
4 n = 2; p = 1; r = 1; q = 1;
5
6 cvx_begin sdp
7     variable P(n,n) symmetric
8     variable Y(n, p)
9     variable mu(1,1)
10    variable epsilon(1,1)
11
12    minimize( mu )
13    subject to
14        mu >= 0;
15        P == semidefinite(n);
16        epsilon > 0;
17        [ A0'*P + P*A0 - C'*Y' - Y*C + R + H'*H + epsilon*eye(n,n)
P*B      P*D;
18          B'*P      -1          0;
19          D'*P      0          -mu] <= 0;
20
21 cvx_end
22 K = inv(P)*Y

```

Listing 4.1: Script de MATLAB para resolver la minimización del Teorema 4.3 usando el paquete CVX. La amplitud del ruido es $d = 1 \times 10^{-3}$ y $L = 1$.

4.3 Un estudio comparativo

4.3.1 Ruido sinusoidal

Con propósito de simulación, elegimos la señal $\sigma(t) = \sin(t)$ y el ruido en la medición como $\eta(t) = 10^{-3}[\sin(40t) + \sin(85t)]$, i.e. $L = 1$ y $\delta = 20^{-3}$. Todas las simulaciones son realizadas usando el método de integración de Euler con paso 10^{-4} .

Tres selecciones de ganancias son comparadas. La primera es la selección usando el criterio \mathcal{H}_∞ del Teorema 4.3 que resulta en $k_1 = 37.3954$ y $k_2 = 156.1189$.

Las otras dos elecciones de ganancias están motivadas por la selección de Levant $k_1 = 1.5\sqrt{\tilde{L}}$ y $k_2 = 1.1 \cdot \tilde{L}$. La segunda elección es usando el mínimo valor para L que garantiza que el signo gana a la perturbación. Nos referiremos a esta estrategia como el diferenciador con “ganancia pequeña”. Este valor es $\tilde{L} = 2L$. La tercera elección consiste en elegir la ganancia grande. En varios artículos, Levant señala que esto ayuda al desempeño del diferenciador cuando se usa para realimentación.

La Figura 4.1 presenta los resultados en simulación para este caso. La integral del error cuadrado en el estimación de la derivada fue calculado en el intervalo $[0, 10]$ segundos como índice de desempeño. Los resultados son: 0.0373 para el diferenciador \mathcal{H}_∞ , 0.2472 para el diferenciador con pequeña ganancia y 0.4316 para el de ganancia grande. En este experimento, cuando el ruido es generado por sinusoides⁷, el diferenciador óptimo \mathcal{H}_∞ tiene mejor

7. Note que una señal sinusoidal no pertenece al espacio $\mathbb{L}^2(0, \infty)$ y por tanto tampoco se espera que pertenezca a $\mathbb{L}_\phi^2(0, \infty)$. Sin embargo, como es usual aun en la teoría de sistemas lineales, siempre es posible restringir la atención a un intervalo finito de tiempo usando truncamiento de la entrada o considerando el espacio extendido de funciones \mathbb{L}_e^2

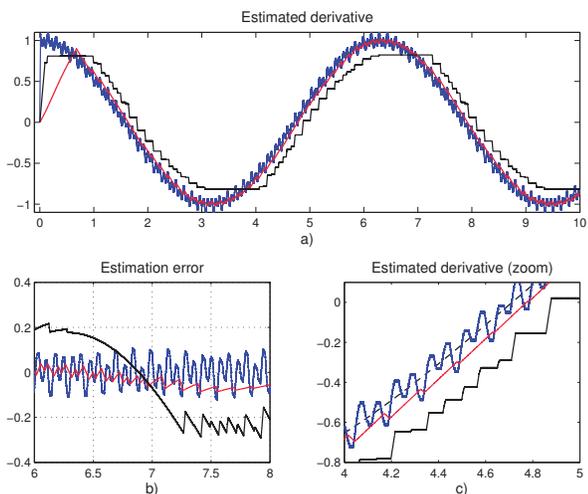


Figura 4.1: Resultados para ruido sinusoidal. Negro segmentado: derivada verdadera; negro solido: diferenciador con ganancia grande; rojo: diferenciador con ganancia pequeña; azul: diferenciador \mathcal{H}_∞ óptimo.

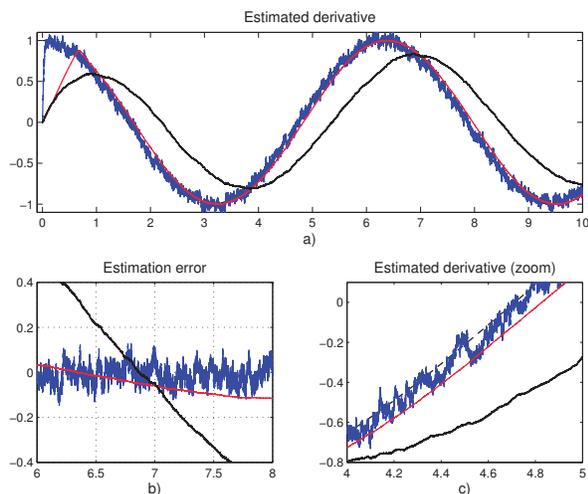


Figura 4.2: Resultados para ruido blanco. Negro segmentado: derivada verdadera; negro solido: diferenciador con ganancia grande; rojo: diferenciador con ganancia pequeña; azul: diferenciador \mathcal{H}_∞ óptimo.

desempeño que los otros dos aun cuando el desempeño se mide usando la métrica \mathbb{L}^2 estándar y no la ponderada.

4.3.2 Ruido blanco

Para este experimento, la señal de ruido η fue generado usando el bloque de MATLAB “ruido-blanco con banda limitada” con una potencia de 50×10^{-10} y tiempo de muestreo 10^{-4} . Esto genera ruido aleatorio con amplitud menor a 10^{-3} en la simulación, como en el caso anterior.

El ruido blanco no es diferenciable en ningún instante tiempo, de modo que la variable w en (4.1) no está apropiadamente definida. Aun así, consideraremos que esta representa el efecto que el ruido tiene en el error de diferenciación.

Con las mismas ganancias que el ejemplo anterior, los resultados en simulación son mostrados en la Figura 4.2. Los índices de desempeño fueron: 0.0348 para el diferenciador \mathcal{H}_∞ , 0.2807 para el diferenciador con ganancia pequeña y 1.908 para el diferenciador con ganancia grande. Al igual que en el experimento pasado, el diferenciador diseñado usando las ganancias óptimas sigue garantizando el mejor desempeño en sentido \mathbb{L}^2 , a pesar de que el ruido fue cambiado de sinusoidal a (pseudo) estocástico.

Después de varios experimentos, fue evidente que las oscilaciones del diferenciador óptimo \mathcal{H}_∞ construido con $\delta \approx 0$ se veían significativamente disminuidas. Para $\delta = 10^{-7}$ las ganancias óptimas son $k_1 = 7.2394$ y $k_2 = 17.1799$. La simulación con estas ganancias es mostrada en la Figura 4.4. A pesar de que los resultados aparentemente son mejores, el índice de desempeño en este caso fue 0.05: casi un 46% más grande que el obtenido al usar la amplitud correcta del ruido.

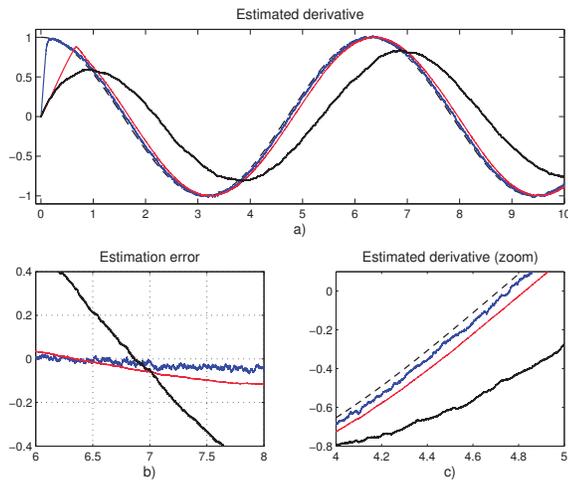


Figura 4.3: Resultados para ruido blanco. Negro segmentado: derivada verdadera; negro sólido: diferenciador con ganancia grande; rojo: diferenciador con ganancia pequeña; azul: diferenciador \mathcal{H}_∞ óptimo con $\delta = 10^{-7}$.

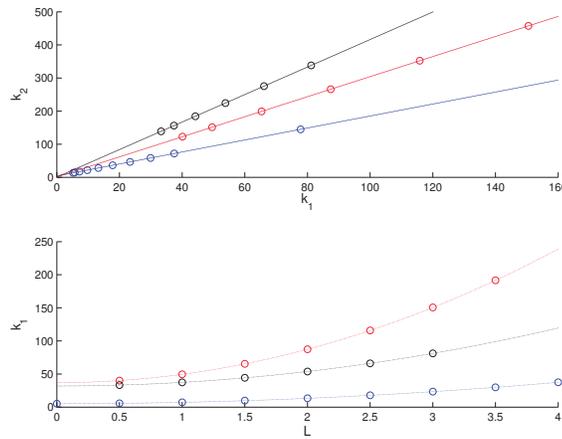
4.4 Fórmulas para las Ganancias Óptimas

Al graficar varias ganancias óptimas k_2 con respecto a k_1 , y k_1 con respecto a L , se descubrió que la relación entre k_1 y k_2 es lineal, mientras que la relación entre k_1 y L es cuadrática, vea la Figura 4.4. Este hecho se describe por las fórmulas (heurísticas)

$$k_1 = a(\delta)L^2 + c(\delta), \quad k_2 = m(\delta)k_1 + b(\delta), \quad i = 1, 2, \quad (4.6)$$

cuyos coeficientes obviamente dependen de la amplitud del ruido δ . Sin embargo, dado δ es posible obtener el conjunto completo de ganancias óptimas al usar dos veces el Teorema 4.3 con dos valores distintos de L y luego interpolando usando las formulas (4.6).⁸ Hemos realizado esto para algunos valores particulares de δ como se muestra en la Tabla 4.1. Desafortunadamente, la funciones a , c , m y b no son monótonas.

8. Varios experimentos muestran que esta interpolación es, de hecho, exacta.



Ruido	Formula de la G
$d = 0$	$k_1 = 2.0160L^2 + 1$ $k_2 = 1.8114k_1 + 4$
$d = 10^{-3}$	$k_1 = 12.6174L^2 + 1$ $k_2 = 3.0320k_1 + 1$
$d = 2 \cdot 10^{-3}$	$k_1 = 5.4716L^2 + 1$ $k_2 = 4.1573k_1 + 0$

Figura 4.4: Gráfica de las ganancias óptimas. Circulos: mediciones experimentales, líneas: interpolación usando las fórmulas (4.6) con los valores de la Tabla 4.1. Azul: $\delta = 0$, rojo: $\delta = 10^{-3}$, negro: $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$.

Table 4.1: Fórmulas para elegir la ξ diferenciador usando el criterio \mathcal{H}_∞

4.5 Conclusiones

Presentamos ganancias \mathcal{H}_∞ óptimas para el diferenciador Super-Twisting Generalizado en presencia de ruido diferenciable. Debido a la simplicidad del sistema, se presentaron fórmulas explícitas de las ganancias óptimas en función de la amplitud del ruido. Simulaciones bajo ruido suave y estocástico muestran que, en general, el uso de las ganancias óptimas provee un menor error en promedio comparado con la selección original de Levant. En particular, el diferenciador GST óptimo tiene un desempeño mucho mejor que el diferenciador con ganancia grande usando las formulas originales de Levant. Sin embargo, como \mathcal{H}_∞ es un criterio integral, el diferenciador óptimo tiende a reducir el área del error de diferenciación, produciendo más oscilaciones si se compara con el diferenciador original usando las ganancias de Levant. Con simulaciones, pudimos mostrar que estas oscilaciones se pueden disminuir drásticamente si se seleccionan las ganancias óptimas asumiendo ruido muy pequeño. En tal caso, el diferenciador GST usando ganancias óptimas provee una menor amplitud de error que el GST usando las ganancias de Levant.

DIFERENCIADOR CON CONVERGENCIA UNIFORME

5

Se presenta un diferenciador de orden arbitrario que en ausencia de ruido converge a las derivadas verdaderas de la señal después de tiempo finito independiente del error inicial de diferenciación. El nuevo diferenciador es obtenido al combinar el diferenciador por HOSM con una nueva parte que converge uniformemente con respecto a la condición inicial.

5.1 Introducción

El diferenciador por Modos Deslizantes de Alto Orden (HOSM) por Levant [Lev03] es un ejemplo popular de un diferenciador discontinuo de orden arbitrario. Desde su introducción, ha sido exitosamente usado para construir observadores con entradas desconocidas mas allá de la restricción de grado relativo uno¹.

En este capítulo, consideraremos el uso del diferenciador HOSM para sistemas switcheados o con algún tipo de “tiempo de vida” estrictamente positivo². Si el diferenciador por HOSM es aplicado en alguna de estas situaciones, debe proveer un estimado de las derivadas requeridas *durante* el tiempo de vida del sistema, independientemente de cual fue la condición inicial.

En general, esto último es posible solo al incrementar la ganancia del diferenciador por HOSM conforme crece la condición inicial del sistema. Desafortunadamente, no es posible implementar esta estrategia debido a que el diferenciador es usado precisamente para construir un observador: la condición inicial no es conocida. Por tanto, la única alternativa es suponer una cota conocida de la condición inicial [BF11, DPU11].

Para resolver este problema sin introducir hipótesis adicionales, es necesario que la convergencia del diferenciador sea uniforme con respecto a la condición inicial. Es decir, que el tiempo de convergencia a partir de una condición inicial arbitraria este uniformemente acotado. Un diferenciador exacto de primer orden ha sido recientemente presentado [CZMF11] al modificar el diferenciador [Lev98] usando métodos de Lyapunov.

La contribución en este capítulo consiste en construir un diferenciador exacto de orden arbitrario con convergencia uniforme con respecto a la condición inicial. Debido a la falta de funciones de Lyapunov para el diferenciador por HOSM, se usan propiedades de homogeneidad para el diseño del diferenciador, en manera similar a [Lev05]. Se muestra que al invertir simplemente el grado de homogeneidad que caracteriza la estabilidad en tiempo finito del diferenciador HOSM se obtiene convergencia práctica

1. Por ejemplo, ha sido utilizado para sistemas lineales en [BF10a], no lineales [EZR11] e híbridos [BF11, DPU11, SMD⁺06].

2. Este tipo de comportamiento se presenta naturalmente en sistemas híbridos pero no está limitado a ellos. Un tiempo de vida también se encuentra presente en dinámicas no lineales con escape en tiempo finito, en el enfoque de ganancias-programadas para controlar sistemas no lineales y, en general, en cualquier modelo cuya validez está limitada a cierto intervalo de tiempo finito.

uniforme. A diferencia de [CZMF11], la estabilidad de la parte uniforme es establecida a partir de una función de Lyapunov cuadrática aplicada a un sistema lineal y luego usando las propiedades de homogeneidad y continuidad de la nueva parte uniforme. En este sentido, la nueva parte no lineal es completamente diseñada usando herramientas lineales.

El resto del Capítulo se organiza así. La sección 5.2 introduce el problema y recuerda algunas propiedades del diferenciador por HOSM. La noción de convergencia uniforme es presentada y analizada en la sección 5.3. La sección 5.4 considera la estabilidad de la nueva parte uniforme del diferenciador. La sección 5.5 presenta un ejemplo en simulación y, finalmente, la sección 5.6 contiene las conclusiones.

5.2 Preliminares y Formulación del problema

Dada una señal $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, el problema consiste en estimar sus derivadas $\sigma^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, n-1$. Asumimos que σ se mide sin ruido y la única información disponible sobre la señal es que $|\sigma^{(n)}(t)| \leq L$ para todo t , con L una constante conocida.

Como en capítulos previos, definiendo $x_1 := \sigma$, $x_2 := \dot{\sigma}$, \dots , $x_n := \sigma^{(n-1)}$ resulta en

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots \quad \dot{x}_n = \sigma^{(n)}, \quad (5.1)$$

y el problema de construir un diferenciador de orden $(n-1)$ para σ ha sido transformado en construir un observador para (5.1), usando la salida medida $x_1 = \sigma$, a pesar de la perturbación acotada $\sigma^{(n)}$. Denote $\hat{x}(t)$ como el estimado de $x(t)$ e introduzca el error de observación $\tilde{x} := x - \hat{x}$.

El diferenciador a diseñar \hat{x} tendrá dos propiedades principales: su exactitud en tiempo finito (i.e., el error de observación converge a cero a pesar de la perturbación) y su convergencia uniforme con respecto a la condición inicial³. El diferenciador por HOSM [Lev03] de orden $(n-1)$ solo garantiza la primera propiedad: es exacto en tiempo finito a pesar de la perturbación. Este toma la siguiente forma no recursiva:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i &= -k_i [\tilde{x}_1]^{n-i} + \hat{x}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\hat{x}}_n &= -k_n \text{sign}(\tilde{x}_1), \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde $[x]^p := |x|^p \text{sign}(x)$. Para garantizar estabilidad, el conjunto de ganancias $\{k_i\}_{i=1}^n$ pueden ser seleccionadas en base a las ganancias propuestas para la forma recursiva [Lev03]. En la sección 5 presentamos un ejemplo para el caso $n = 3$.

El diferenciador por HOSM fue diseñado usando propiedades de homogeneidad [Lev05]. Recordamos brevemente tres de sus conceptos básicos; mas detalles pueden ser encontrados en [BR05].

Definición 5.2.1. a) La familia de dilataciones $\Lambda = \Lambda_\lambda^r$, asociadas al “vector de pesos” $r \in \mathbb{R}_+^n$, es el mapa lineal⁴

$$\Lambda : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\lambda^{r_1} x_1, \lambda^{r_2} x_2, \dots, \lambda^{r_n} x_n),$$

para $\lambda > 0$, donde r_i es el peso de x_i y es denotado como $\text{deg } x_i := r_i$.

3. Es decir, sin importar el error inicial de diferenciación, el tiempo de convergencia del diferenciador estará uniformemente acotado por una constante.

4. Por tanto, se puede representar por una matriz $\Lambda = \text{diag}\{\lambda^{r_1}, \dots, \lambda^{r_n}\}$.

b) Un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es homogéneo con grado p si

$$f(\Lambda \mathbf{x}) = \lambda^p \Lambda f(\mathbf{x}), \quad \forall \lambda > 0, \quad (5.3)$$

y es denotado como $\deg f := p$.

c) Una ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, es homogénea⁵ con grado p si $\deg f = -p$.

En [Lev05], se muestra que un sistema asintóticamente estable con grado de homogeneidad negativo (i.e. $\deg f > 0$) converge en tiempo finito.

La estructura del diferenciador por HOSM (5.2) puede ser fácilmente encontrada a partir de las restricciones de homogeneidad. Para esto, fije el peso de grado de homogeneidad como $\deg t = -\alpha$, o equivalentemente $\deg f = -\alpha$. Debido a la estructura de la cadena de integradores, los pesos de las otras coordenadas quedaran fijas una vez que seleccionemos el peso para una de ellas. Seleccionando $\deg \tilde{x}_1 = n$, produce

$$\deg \tilde{x}_1 = n, \quad \deg \tilde{x}_2 = n + \alpha, \quad \deg \tilde{x}_i = n + \alpha(i - 1).$$

Considere ahora la siguiente forma general de un observador

$$\dot{\hat{x}}_i = -f_i(\tilde{x}_1) + \hat{x}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

y restrinja las funciones f_i a ser las funciones homogéneas más simples $f_i(\tilde{x}_1) = k_i [\tilde{x}_1]^{p_i}$, $k_i, p_i \in \mathbb{R}$. Esto, junto con las restricciones de homogeneidad, arroja la siguiente estructura para un error de diferenciación homogéneo:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -k_1 [\tilde{x}_1]^{\frac{n+\alpha}{n}} + \tilde{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -k_2 [\tilde{x}_1]^{\frac{n+2\alpha}{n}} + \tilde{x}_3, \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} &= -k_{n-1} [\tilde{x}_1]^{\frac{n+(n-1)\alpha}{n}} + \tilde{x}_n, \\ \dot{\hat{x}}_n &= -k_n [\tilde{x}_1]^{1+\alpha} + \sigma^{(n)}(t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

lo que significa que el diferenciador debe tomar la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i &= -k_i [\tilde{x}_1]^{\frac{n+\alpha i}{n}} + \hat{x}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\hat{x}}_n &= -k_n [\tilde{x}_1]^{1+\alpha}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde $\{k_i\}_{i=1}^n$ son las ganancias a ser seleccionadas.

El diferenciador por HOSM (5.2) es obtenido a partir de (5.5) al elegir $\alpha = -1$. Su grado de homogeneidad α es negativo (de modo que $\deg f$ es positivo) para garantizar estabilidad en tiempo finito. Es aun más interesante que es fijado en uno para permitir su exactitud a perturbaciones acotadas [Lev05]. Cualquier otra elección de $\alpha < 0$ resulta en un diferenciador (observador) continuo que no es capaz de remover completamente el efecto de una perturbación acotada. Este capítulo se enfoca en la segunda propiedad deseada del diferenciador: convergencia uniforme con respecto a la condición inicial. Esto se lograra al diseñar un nuevo observador cuyo error converge a un compacto uniformemente en la condición inicial aun en presencia de la perturbación. Su

5. Esta es la notación estándar para sistemas homogeneous, c.f. [Lev05]. El grado de homogeneidad p de la ecuación diferencial es opuesto al grado de homogeneidad del campo vectorial, dado que está asociado al peso del tiempo $\deg t = -p$. De esta forma $\frac{d}{dt} \Lambda \mathbf{x} = \lambda^{-p} f(\Lambda \mathbf{x})$.

diseño también estará basado en propiedades de homogeneidad, por lo que lucirá como (5.5). Mostraremos que solo es necesario invertir el grado de homogeneidad de negativo a positivo para obtener convergencia uniforme en vez de convergencia en tiempo finito. Las dos propiedades del diferenciador son precisadas con la definición debajo:

Definición 5.2.2. *Un diferenciador $\hat{\mathbf{x}}$ se dice uniforme y exacto en tiempo finito si existe tiempo T tal que $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t), \forall t \geq T$, para todos los errores iniciales de diferenciación $\tilde{\mathbf{x}}(0)$; i.e. T es independiente de $\tilde{\mathbf{x}}(0)$.*

La siguiente sección introduce formalmente el concepto de convergencia uniforme junto con su caracterización usando homogeneidad.

5.3 Convergencia uniforme

Considere

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.6)$$

con $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$, el estado y la entrada del sistema, respectivamente. El campo vectorial $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ no es necesariamente continuo en ninguno de sus argumentos y es usado para representar una incertidumbre con respecto a la parte nominal f . La variable \mathbf{w} se usa para representar una entrada conocida o desconocida y se asume que pertenece a determinada clase (abstracta) de funciones que denotamos como \mathcal{W} .⁶

Los siguientes son algunos conceptos centrales a lo largo del capítulo:

Definición 5.3.1. *El sistema (5.6) es (con respecto a la condición inicial):*

- i) *práctica y uniformemente convergente si para cualquier $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, existe $T_w \geq 0$ y $r_w \geq 0$ tales que $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$*

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq r_w \quad \text{si} \quad t \geq T_w;$$

- ii) *exacto y uniformemente convergente si para cualquier $r > 0$, existe $T_r \geq 0$ tal que $\forall (\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{w} \in \mathcal{W})$*

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq r \quad \text{si} \quad t \geq T_r;$$

- iii) *convergente uniformemente exacto en tiempo finito si existe $T \geq 0$ tal que $\forall (\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{w} \in \mathcal{W})$*

$$\mathbf{x}(t) \equiv 0 \quad \text{si} \quad t \geq T.$$

Es posible interpretar los puntos (ii) y (iii) de la definición anterior como uniformidad con respecto a la condición inicial junto con uniformidad respecto a la entrada \mathbf{w} .

Para el caso de un sistema sin incertidumbres (i.e. $g \equiv 0$) con f continuo, la convergencia uniforme ha sido caracterizada basado en la positividad del grado de homogeneidad [APA08]. La convergencia uniforme práctica puede ser caracterizada para sistemas perturbados de la forma (5.6) por medio de las condiciones que la incertidumbre g debe satisfacer con respecto a la parte nominal f .

6. Es posible relacionar (5.6) con (5.4) al identificar $f_i(\mathbf{x}) = -k_i[\tilde{x}_1]^{\frac{n+1-i}{n}} + \tilde{x}_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$, y $g_n(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{w} = \sigma^{(n)}$. Por tanto, en (5.4), \mathcal{W} es la clase de funciones uniformemente acotadas por una constante (i.e. \mathbb{L}^∞).

Teorema 5.1. *El sistema (5.6) es práctica uniformemente convergente si:*

i) con $g \equiv 0$, su origen es asintóticamente estable;

ii) f es continuo y $\deg f = p < 0$;

iii) $\|f(\mathbf{x})\| > \|g(\mathbf{x}, \mathbf{w})\|$ as $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.

El resto de esta sección se enfoca a probar este teorema. Para ello, es necesario introducir primero algunos resultados preliminares.

Denote por $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ la solución del sistema (5.6) con condición inicial \mathbf{x}_0 al tiempo t .

Lema 5.1. *Considere el sistema (5.6). Suponga que $g \equiv 0$ y que $\deg f = p$. Entonces*

$$\Lambda \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\lambda^p t, \Lambda \mathbf{x}_0). \quad (5.7)$$

Prueba. Sin pérdida de generalidad, supondremos que el sistema tiene condición inicial $\mathbf{x}(0) = \Lambda \mathbf{x}_0$. Aplicando la transformación $(t, \mathbf{x}) \mapsto (\tau = \lambda^{-p} t, \mathbf{z} = \Lambda^{-1} \mathbf{x})$ se obtiene

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = \Lambda^{-1} \dot{\mathbf{x}} = \Lambda^{-1} f(\mathbf{x}) = \Lambda^{-1} \lambda^p \Lambda f(\mathbf{z}).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x}(0) &= \Lambda \mathbf{x}_0, \\ \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} &= f(\mathbf{z}), & \mathbf{z}(0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Sus flujos son $\varphi(t, \Lambda \mathbf{x}_0)$ y $\varphi(\tau, \mathbf{x}_0)$, para \mathbf{x} y \mathbf{z} , respectivamente. Como $\mathbf{x} = \Lambda \mathbf{z}$, entonces $\varphi(t, \Lambda \mathbf{x}_0) = \Lambda \varphi(\tau, \mathbf{x}_0)$. Usando $t = \lambda^p \tau$ en el lado izquierdo de esta última igualdad completa la afirmación de lema. \square

Con este lema podemos probar el siguiente resultado preliminar sobre convergencia uniforme sin entradas. Es una extensión de [APA08] donde no se requiere continuidad del campo vectorial f .

Teorema 5.2. *Considere el sistema (5.6) con $g \equiv 0$. Suponga que su origen es asintóticamente estable y que $\deg f = p < 0$. Entonces el sistema converge uniformemente en la condición inicial.*

Prueba. Sea $B_0 \ni \mathbf{o}$ una bola compacta arbitraria en \mathbb{R}^n . Fije $\lambda > 1$ suficientemente grande y considere las dilataciones

$B_1 = \Lambda B_0, B_2 = \Lambda B_1, \dots, B_i = \Lambda B_{i-1}$ para $i \geq 1$. Como λ es positivo y suficientemente grande entonces $B_{i+1} \supset B_i$.

Debido a la estabilidad asintótica del sistema, cualquier trayectoria que comienza en B_1 entra en B_0 antes de cierto tiempo T ; en símbolos $\mathbf{x}(T, B_1) \in B_0$. Aplicando la dilatación a ambos lados de esta última expresión y usando (5.7) se obtiene

$$\Lambda \mathbf{x}(T, B_1) = \mathbf{x}(\lambda^p T, \Lambda B_1) = \mathbf{x}(\lambda^p T, B_2) \in \Lambda B_0 = B_1,$$

i.e., las trayectorias que comienzan en B_2 entran a B_1 antes del tiempo $\lambda^p T$.
Aplicando dilatación de nuevo

$$\Lambda \mathbf{x}(\lambda^p T, B_2) = \mathbf{x}(\lambda^{2p} T, B_3) \in \Lambda B_1 = B_2.$$

Aplicando el mismo procedimiento para cada $i \geq 1$ y sumando cada intervalo de tiempo, se obtiene que para cualquier $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ la trayectoria entra en B_0 antes del tiempo

$$t_{reach} = T \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda^p)^i = T \frac{1}{1 - \lambda^p},$$

donde la convergencia de la serie geométrica ocurre debido a que $\lambda^p < 1$, pues $\lambda > 1$ pero $p < 0$. Como B_0 fue elegida arbitrariamente, se completa la prueba. \square

Ademas del Teorema anterior, necesitaremos el siguiente resultado de [BR05]:

Teorema 5.3. [BR05, Thm. 5.8] *Sea f un campo vectorial continuo tal que el origen de (5.6) con $g \equiv 0$ es localmente asintóticamente estable. Suponga que $\deg f = p$ para algún $r \in (0, \infty)^n$. Entonces para cualquier $s \in \mathbb{N}^*$ y cualquier $m > s \cdot \max r_i$ existe una función de Lyapunov fuerte $V \in C^p$ que es homogénea con $\deg V = m$. Por tanto $\dot{V} = \langle \nabla V, f \rangle$ es también homogénea con grado $m + p$.*

De forma análoga a la Definición 5.1, una función $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado m si $V(\Lambda \mathbf{x}) = \lambda^m V(\mathbf{x})$, $\forall \lambda > 0$, y se denota como $\deg V = m$. Ahora estamos listos para la prueba del Teorema 5.1:

Prueba del Teorema 5.1. Por un lado, con las hipótesis (i)-(ii), y usando el Teorema 5.3, sabemos que existe una función homogénea V con $\deg V = m$ y $\langle \nabla V(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle < 0$.

Por otro lado, la hipótesis (iii) significa que si uno toma la esfera $(n - 1)$ dimensional S , entonces $\forall \epsilon > 0$ existe λ^* suficientemente grande tal que

$$\|g(\Lambda S, \mathbf{w})\| \leq \epsilon \|f(\Lambda S)\|, \quad \forall \lambda \geq \lambda^*, \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}.$$

Calcule ahora la derivada de V a lo largo del sistema con incertidumbres $\dot{V}(\mathbf{x}) = \langle \nabla V(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle + \langle \nabla V(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \rangle$. Tomando $\mathbf{x} \in S$ y fijando $0 < \epsilon < 1$, con su correspondiente λ^* , se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\Lambda \mathbf{x}) &= \langle \nabla V, f \rangle(\Lambda \mathbf{x}) + \langle \nabla V, g \rangle(\Lambda \mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ &\leq -|\langle \nabla V, f \rangle|(\Lambda \mathbf{x}) + \|\nabla V\| \|g\|(\Lambda \mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ &\leq -|\langle \nabla V, f \rangle|(\Lambda \mathbf{x}) + \epsilon \|\nabla V\| \|f\|(\Lambda \mathbf{x}), \\ &\leq -|\langle \nabla V, f \rangle|(\Lambda \mathbf{x}) + \epsilon |\langle \nabla V, f \rangle|(\Lambda \mathbf{x}) \\ &= -(1 - \epsilon) |\langle \nabla V, f \rangle|(\Lambda \mathbf{x}), \quad \forall \lambda \geq \lambda^*. \end{aligned}$$

Esto significa que $\|\mathbf{x}\|$ es suficientemente grande, entonces $\dot{V}|_{pert} = \text{const} \cdot \dot{V}|_{nopert}$. Por tanto, el sistema con incertidumbres hereda el comportamiento del sistema nominal si $\|\mathbf{x}\|$ es suficientemente grande. Con la hipótesis (ii), $p < 0$ y usando el Teorema 5.2, se finaliza la prueba del teorema. \square

5.3.1 Un observador con convergencia uniforme práctica.

Con el Teorema 5.2, podemos afirmar que el observador homogéneo (5.5) converge práctica y uniformemente si $\alpha > 0$ y las ganancias $\{k_i\}_{i=1}^n$ se seleccionan para garantizar estabilidad asintótica cuando $\sigma^{(n)} \equiv 0$. Esto pues la perturbación acotada $\sigma^{(n)}$ siempre es eventualmente dominada por la función $[\tilde{x}_1]^{\alpha+1}$, de modo que se satisface el Teorema 5.1. Un método para seleccionar estas ganancias es presentado en la siguiente sección.

Para obtener un diferenciador uniforme y exacto en tiempo finito, el diferenciador por HOSM puede ser combinado con un diferenciador que converge práctica y uniformemente. Esta combinación puede ser hecha de varias maneras, dos de ellas son:

- iniciar con el diferenciador uniforme y cambiar el diferenciador por HOSM después de un tiempo $T > 0$ fijo;
- usar un observador de la norma del estado (e.g., [POH09]) para cambiar una única vez del diferenciador uniforme al diferenciador por HOSM la primera vez que el estimado de la norma del estado entra en cierta vecindad predefinida.

Con ambas opciones, no es necesario realizar ningún análisis de estabilidad adicional. Note que en la primera opción el switcheo es realizado en “lazo abierto”.⁷

5.4 Estabilidad de la parte uniforme

La convergencia práctica uniforme del error de diferenciación (5.4) necesita mostrarse al seleccionar apropiadamente los parámetros α y $\{k_i\}_{i=1}^n$. Como se discutió en la sección anterior, al usar el Teorema 5.1 esto es equivalente a determinar las ganancias $\{k_i\}_{i=1}^n$ tales que el sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}_1 &= -k_1[\tilde{x}_1]^{\frac{n+\alpha}{n}} + \tilde{x}_2, \\
 \dot{\tilde{x}}_2 &= -k_2[\tilde{x}_1]^{\frac{n+2\alpha}{n}} + \tilde{x}_3, \\
 &\vdots \\
 \dot{\tilde{x}}_{n-1} &= -k_{n-1}[\tilde{x}_1]^{\frac{n+(n-1)\alpha}{n}} + \tilde{x}_n, \\
 \dot{\tilde{x}}_n &= -k_n[\tilde{x}_1]^{1+\alpha},
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

es asintóticamente estable para $\alpha > 0$.

Cuando $\alpha = 0$, el sistema no lineal (5.8) se reduce a uno lineal, cuya estabilidad está completamente determinada por la estabilidad de la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -k_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Este hecho puede ser fácilmente probado usando una forma cuadrática como función de Lyapunov. Sin embargo, en tal caso el compensador no converge

7. Después de varias simulaciones, se observó que el diferenciador uniforme y por HOSM cooperan mutuamente sin necesidad de switcheo entre ellos. Desafortunadamente, por el momento no tenemos pruebas de este hecho.

uniformemente pues α no es positiva. Para analizar la estabilidad cuando $\alpha > 0$, la idea es utilizar la información de la misma función de Lyapunov cuadrática en el sistema no lineal junto con la continuidad de la derivada con respecto al parámetro α . Esta idea clásica puede ser encontrada en [BB05].

Teorema 5.4. *Si $\alpha > 0$ es suficientemente pequeña y los parámetros $\{k_i\}_{i=1}^n$ son seleccionados de modo que A es Hurwitz, entonces el error de diferenciación (5.8) es asintóticamente estable.*

Prueba. Considere $V(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}$ con \mathbf{P} positiva definida (i.e. solución a $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0$), entonces

$$\dot{V}(\alpha = 0, \tilde{\mathbf{x}}) < 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in S,$$

para cualquier conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, pues es una función de Lyapunov para el sistema lineal obtenido cuando $\alpha = 0$.

Además, note que $\dot{V}(\alpha, \tilde{\mathbf{x}})$ es continua en sus dos argumentos α y $\tilde{\mathbf{x}}$. En particular, cuando S es compacto, $\dot{V}(\alpha, \tilde{\mathbf{x}})$ es uniformemente continua en el conjunto $\{(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \alpha = 0, \tilde{\mathbf{x}} \in S\}$. Esto significa que existen vecindades \mathcal{N}_S y $\mathcal{N}_{\alpha=0}$ tales que

$$\dot{V}(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}) < 0, \quad \forall (\alpha, \tilde{\mathbf{x}}) \in \mathcal{N}_{\alpha=0} \times \mathcal{N}_S.$$

Escoja ahora S como una curva de nivel de V , i.e. $S = V^{-1}(\delta)$, $\delta > 0$. Entonces, existe $\alpha > 0$ y una vecindad \mathcal{N}_S (i.e. un anillo alrededor de la curva de nivel), tales que las trayectorias cruzan desde fuera hacia dentro del anillo. Por homogeneidad, esto también sucede en cualquier versión dilatada de este anillo. Como $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ puede ser cubierto por anillos dilatados, esto asegura que el sistema es global y asintóticamente estable. \square

En el caso particular de un diferenciador de segundo orden ($n = 3$), el siguiente corolario muestra como seleccionar las ganancias.

Corolario 5.4.1. *Para el sistema (5.8) con $n = 3$ y $\alpha > 0$ suficientemente pequeña, las ganancias elegidas para satisfacer*

$$k_1 > 0, \quad k_3 > 0, \quad k_2 > k_3/k_1,$$

son condiciones suficientes para estabilidad asintótica.

5.5 Ejemplo en simulación

Un diferenciador de segundo orden fue probado usando la señal $\sigma(t) = 5t + \sin(t) + 0.01 \cos(10t)$. Para $n = 3$, la parte uniforme toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -k_1[\hat{x}_1 - \sigma]^{1+\frac{\alpha}{3}} + \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -k_2[\hat{x}_1 - \sigma]^{1+\frac{2\alpha}{3}} + \hat{x}_3, \\ \dot{\hat{x}}_3 &= -k_3[\hat{x}_1 - \sigma]^{1+\alpha}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

mientras que el diferenciador por HOSM tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -\kappa_1[\hat{x}_1 - \sigma]^{2/3} + \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\kappa_2[\hat{x}_1 - \sigma]^{1/3} + \hat{x}_3, \\ \dot{\hat{x}}_3 &= -\kappa_3 \text{sign}(\hat{x}_1 - \sigma).\end{aligned}\quad (5.10)$$

Sus ganancias $\{\kappa_i\}_{i=1}^3$ pueden ser seleccionadas basadas en la forma recursiva de diferenciador por HOSM, como

$$\kappa_1 = \theta_2 L^{1/3}, \quad \kappa_2 = \theta_1 \theta_2^{1/2} L^{1/2+1/6}, \quad \kappa_3 = \theta_0 L,$$

con $\theta_0 = 1.1$, $\theta_1 = 1.5$, $\theta_2 = 2$ y L tal que $|\sigma^{(3)}(t)| \leq L$, vea [Lev03].

La condición inicial del diferenciador fue elegida como $\hat{x}(0) = (100, 200, 300)$ y las ganancias fueron seleccionadas usando el corolario 5.4.1 como $k_1 = 7$, $k_2 = 1/7 + 2$, $k_3 = 1$, $L = 30$. Por tanto, el Teorema 5.4, garantiza la existencia de una $\alpha > 0$ suficientemente pequeña que garantiza convergencia uniforme con estas ganancias. Ahora, mostramos adicionalmente que es posible calcular el valor explícito del parámetro $\alpha > 0$.

Usando la prueba del Teorema 5.4, se elige una curva de nivel $S = V^{-1}(\delta)$ y se checa si $\dot{V}(\alpha, \tilde{x}) < 0$ sobre esa curva para el valor dado de α . El valor más grande de α que satisface esta condición puede ser calculado iterativamente, comenzando con $\alpha = 0$ e incrementando su valor mientras⁸

$V^{-1}(\delta) \cap \dot{V}_\alpha^{-1}(0) = \emptyset$. Cuando $\alpha = 0$, i.e. para el sistema lineal, no existe intersección para cualquier $\delta > 0$ pues $V^{-1}(\delta)$ es una elipsoide y $\dot{V}_0^{-1}(0)$ es únicamente el punto $\tilde{x} = 0$.

Ilustraremos este procedimiento para nuestro ejemplo en particular. Primero, seleccionando P como solución a $A^T P + PA = Q = -I$ se obtiene

$$P = \begin{bmatrix} 71/196 & 57/28 & 1/2 \\ 57/28 & 9965/686 & 757/196 \\ 1/2 & 757/196 & 87/28 \end{bmatrix}.$$

La superficie $\dot{V}_\alpha^{-1}(0)$ para $\alpha = 0.06$ se muestra en la Figura 5.1. Esta consiste de dos partes: un lóbulo central y dos hiperboloides externos. Conforme α tiende a cero, el lóbulo central se encoge y los hiperboloides externos se retraen a infinito; en el límite cuando $\alpha = 0$, $\dot{V}_\alpha^{-1}(0)$ solo consiste del punto $\tilde{x} = 0$. Las elipsoides $V^{-1}(\delta)$ resultan estar alineadas horizontalmente, sin importar la selección de Q en la ecuación de Lyapunov. Para $\alpha = 0.06$, la elipsoide $V^{-1}(10)$ no tiene intersecciones con el lóbulo interior, ni con los hiperboloides exteriores de $\dot{V}_{0.06}^{-1}(0)$, vea la Figura 5.2. De acuerdo con la discusión previa, esto muestra que el sistema es estable para $\alpha = 0.06$ usando las ganancias $\{k_i\}_{i=1}^3$ previamente seleccionadas. Por tanto, el diferenciador combinado converge exacta y uniformemente. En la Figura 5.3 se muestra la convergencia de las trayectorias del diferenciador.

Para confirmar la propiedad de convergencia uniforme, se midió el tiempo de convergencia a partir de varias condiciones iniciales. Las condiciones iniciales fueron elegidas a lo largo del subespacio $(1, 2, 3)$ usando la iteración $\mathbf{x}_{0,i+1} := 10\mathbf{x}_{0,i}$ con $\mathbf{x}_{0,0} = (0.1, 0.2, 0.3)^T$. La Figura 5.4 presenta una gráfica del tiempo de convergencia del diferenciador como función de la condición inicial. Como se esperaba, muestra la presencia de una asíntota en el tiempo de convergencia conforme la condición inicial aumenta.

8. Usamos la notación $\dot{V}_\alpha^{-1}(0) := \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(\alpha, \tilde{x}) = 0\}$.

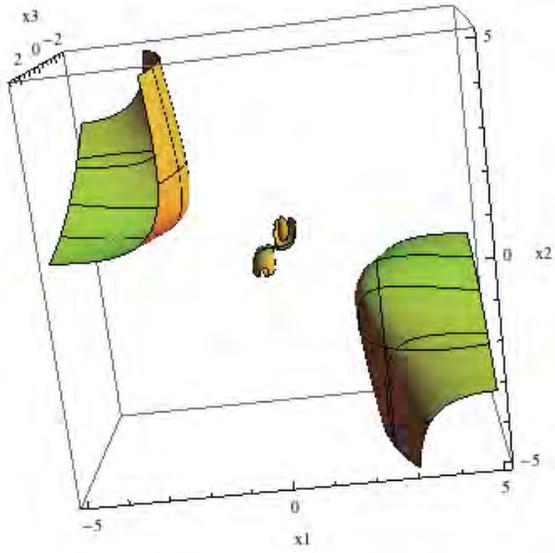


Figura 5.1: La superficie $\dot{V}_\alpha^{-1}(0)$ para $\alpha = 0.06$.

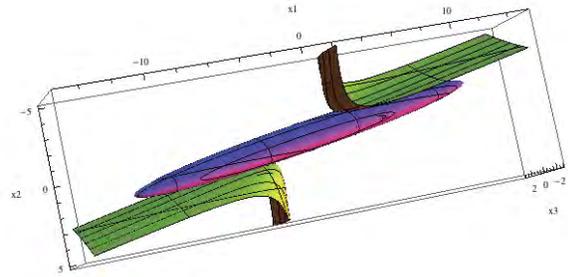


Figura 5.2: $\dot{V} = 0$ para $\alpha = 0.06$ (en amarillo) y a elipsoide $V = 10$ (en magenta). No hay intersección de $\dot{V} = 0$ con $V = 10$, por tanto $\dot{V} < 0$ en $V = 10$.

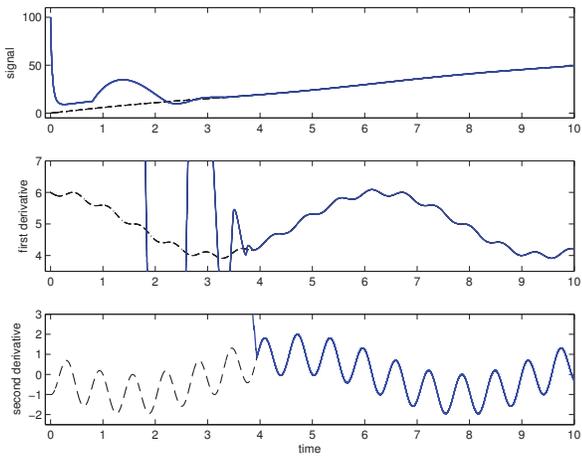


Figura 5.3: Derivadas reales: negro, derivadas estimadas: azul.

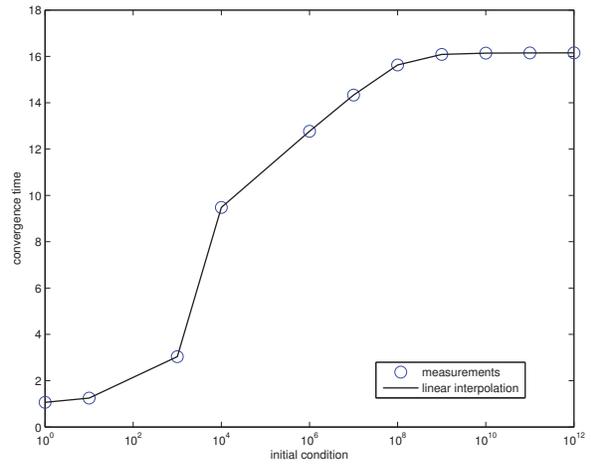


Figura 5.4: Gráfica del tiempo de convergencia como función de la condición inicial.

5.6 Conclusiones

Se presentó un diferenciador de orden arbitrario que converge a las derivadas reales de la señal después de un tiempo finito que es independiente del error inicial de diferenciación. El diferenciador fue construido combinando el diferenciador por HOSM con una nueva parte que converge práctica y uniformemente. Para esto, la convergencia uniforme fue caracterizada en términos de la homogeneidad de los campos vectoriales. Además, se mostró que la convergencia uniforme es robusta (en el sentido de convergencia práctica) a cualquier incertidumbre que sea eventualmente dominada por la parte nominal. La estabilidad de la nueva parte uniforme fue analizada usando una “función de Lyapunov” cuadrática, junto con la continuidad y homogeneidad del error de diferenciación. Usando este análisis, se ilustró en el ejemplo un método simple para calcular todos los parámetros requeridos para esta nueva parte del diferenciador.

PARTE III

APLICACIONES

LA OBSERVABILIDAD FUERTE

La observabilidad fuerte ha sido introducida para sistemas lineales. Como caracteriza la observabilidad que no depende del conocimiento de la entrada, la observabilidad fuerte es requerida para el diseño de observadores con entradas desconocidas. Esta noción es extendida y caracterizada para sistemas no lineales en este capítulo. Además, se muestra que sistemas cuadrados (i.e. sistemas con el mismo número de entradas que de salidas) fuertemente observables son diferencialmente planos, o equivalentemente, linealizables por realimentación dinámica.

6

6.1 Introducción

El concepto de “Observabilidad Fuerte” fue introducido para resolver el problema de diseño de observadores con entradas desconocidas para sistemas lineales [Mol76, Hau83]. Es una condición necesaria y suficiente para la distinguibilidad¹ del estado usando sólo información de la salida. Los observadores con entradas desconocidas han encontrado numerosas aplicaciones: desde el diseño de observadores robustos hasta en el problema de detección y aislamiento de fallas [Pat97].

Sorprendentemente, la observabilidad fuerte no ha sido caracterizada para sistemas no lineales en general. Observadores que usan solo la salida han sido diseñados ya sea para alguna clase específica de sistemas o bajo condiciones suficientes. Por ejemplo, sistemas de una-entrada una-salida [Mor00], una forma triangular [BBF09], grado relativo vectorial completo [DFPU09], no linealidades Lipschitz [PMZ05b], sistemas de reacciones bioquímicas [MD08] o una forma canónica especial [HT10].

Nuestra contribución es introducir la noción de observabilidad fuerte local para sistemas no lineales junto con un criterio constructivo para su decisión. También es presentada una caracterización completa en términos algebro-geométricos. Motivados por el caso lineal, uno podría esperar que la observabilidad fuerte es equivalente a que la distribución más grande controlada-invariante dentro del kernel de la salida es cero². Usualmente, esta es denotada como Δ^* en el contexto no lineal [Isi95, pp. 317] y como \mathcal{V}^* en el contexto lineal [TSH01, pp. 105].

Se muestra que observabilidad fuerte sí implica $\Delta^* = 0$ pero que, a diferencia del caso lineal, lo converso no es cierto para sistemas no lineales en general. Por tanto, un producto adicional de la observabilidad fuerte es la evidencia de una diferencia fundamental entre los enfoques algebraicos y geométricos para el análisis de sistemas no lineales.

Además, se establecen conexiones entre observabilidad fuerte y la existencia

1. La distinguibilidad es el cimiento de la noción de Observabilidad. Un sistema es observable si dos trayectorias de estado distintas generan trayectorias de medición distintas.

2. Esta es una pobre traducción al español de “zero largest controlled invariant distribution contained in the kernel of the output”.

3. Sistemas con el mismo número de entradas que de salidas.

de un inverso estático por la izquierda del sistema. En particular, se muestra que la observabilidad fuerte de sistemas cuadrados³ con entradas no triviales se reduce a sistemas diferencialmente planos, i.e., a sistemas que pueden ser completamente linealizados por realimentación.

6.2 Observabilidad Fuerte

Consideraremos

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w, & x(0) = x_0, \\ y = h(x), \end{cases} \quad (6.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $w(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son el estado, la entrada y la salida medida, respectivamente. Se asume que los campos vectoriales f , g y h son funciones meromorfas⁴ con $\text{rank } h = p$ and $\text{rank } g = m$.

4. Una función meromorfa es el cociente de dos funciones analíticas, i.e., ella misma es analítica excepto en un conjunto de puntos aislados (polos).

Bajo estas hipótesis, es posible usar herramientas algebro-diferenciales para estudiar las propiedades estructurales del sistema [CMP07]. Este enfoque está basado en introducir espacios de dimension finita de 1-formas sobre el campo \mathcal{K} de funciones meromorfas de x : $\mathcal{Y}^0 = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dy\}$, $\mathcal{X} = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx\}$, $\mathcal{W} = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dw^{(j)}, j \geq 0\}$. Tanto \mathcal{X} como \mathcal{Y}^0 son espacios vectoriales sobre el campo \mathcal{K} .

Denote por $x_w(t, x_0)$ la solución de Σ con condición inicial x_0 y entrada $w(t)$, y por $y_w(t, x_0)$ su correspondiente salida.

Definición 6.2.1. Sea U un subconjunto conexo de \mathbb{R}^n que contiene a x_0^1 y x_0^2 . El estado x_0^1 se dice U -fuertemente-indistinguible de x_0^2 (escrito como $x_0^1 \mathcal{I}_U x_0^2$) si existen dos entradas w_1, w_2 cuyas trayectorias $x_{w_1}(t, x_0^1), x_{w_2}(t, x_0^2) \in U$ y tales que $y_{w_1}(t, x_0^1) \equiv y_{w_2}(t, x_0^2)$.

5. Note que \mathcal{I} es una relación (le falta transitividad), pero requiere al menos controlabilidad con respecto a la entrada para ser una relación de equivalencia.

El conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ puede ser interpretado como el conjunto que se permite que las trayectorias exploren.⁵ Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene una vecindad abierta \mathcal{N} de x_0 , denote como

$$I_{\mathcal{N}}^U(x_0) := \{x \in \mathcal{N} \text{ tal que } x \mathcal{I}_U x_0\}.$$

Como \mathcal{I} no es una relación de equivalencia, en general $I_{\mathcal{N}}(x_0)$ resulta no ser abierto.

Definición 6.2.2. Σ es localmente fuertemente observable en x_0 si existen dos vecindades abiertas $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ de x_0 , con $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$, tales que $I_{\mathcal{N}_1}^{\mathcal{N}_2}(x_0) = \{x_0\}$.

Esta última definición se reduce a la original de Hautus [Hau83] en el caso de sistemas lineales. Esto pues en el caso lineal la distinguibilidad del estado cero implica distinguibilidad con respecto a cualquier otro par de estados. Observabilidad fuerte implica observabilidad, pero lo converso no es cierto.

Ejemplo 6.2.1. El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 + w_1, \\ \dot{x}_2 &= x_3^3 + w_1, & y_1 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_4(1 + x_1) + w_1, & y_2 &= x_2, \\ \dot{x}_4 &= \sin(x_1 x_2) + w_2, \end{aligned}$$

es lo localmente fuertemente observable en cualquier x_0 sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^4 | x_1 \neq -1\}$.

Considere dos sistemas idénticos, identificados por $i = 1, 2$, que producen salidas idénticas y_i pero pueden tener distintas entradas $(w_{i,1}, w_{i,2})$ y trayectorias de estado $(x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, x_{i,4})$. Entonces, la condición $y_1(t, x_0^1, w_1) \equiv y_2(t, x_0^2, w_2)$ implica que

$$x_{1,1}x_{1,2} + w_{1,1} = x_{2,1}x_{2,2} + w_{2,1}, \quad x_{1,3}^3 + w_{1,1} = x_{2,3}^3 + w_{2,1}.$$

Para mostrar que el sistema es fuertemente observable necesitamos probar que $x_{1,3} = x_{2,3}$ y $x_{1,4} = x_{2,4}$. Como $x_{1,1} = x_{2,1}$ y $x_{1,2} = x_{2,2}$ concluimos a partir de la primera ecuación que $w_{1,1} = w_{2,1}$. Al usar esto en la segunda ecuación se obtiene $x_{1,3} \equiv x_{2,3}$. Estas dos conclusiones en la dinámica del sistema implican que

$$x_{1,4}(1 + x_{1,1}) + w_{1,1} = x_{2,4}(1 + x_{2,1}) + w_{2,1},$$

de donde concluimos que $x_{1,4} = x_{2,4}$ si $x_{1,1} = x_{2,1} \neq -1$.

Es interesante notar que todas las variables de estado pueden ser escritas únicamente en términos de la salida, independientemente de la entrada:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, & x_2 &= y_2, & x_3 &= (y_1 y_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2)^{\frac{1}{3}}, \\ x_4 &= \frac{1}{3(1 + y_1)(y_1 y_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2)^{2/3}} [\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 + y_2 \dot{y}_1 + y_1 \dot{y}_2 + \\ &\quad - 3(\dot{y}_1 - y_1 y_2)(y_1 y_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2)^{\frac{2}{3}}], \end{aligned}$$

válido fuera de $x_1 = -1$ y $x_3 = 0$. Es decir, la distribución controlada-invariante Δ^* más grande contenida en el kernel de la salida es cero [Isi95]. La singularidad en $x_3 = 0$ no es intrínseca del sistema: “desaparece” cuando x_4 es re-escrita como

$$x_4 = \frac{y_1 y_2 - \dot{y}_1 + \frac{d}{dt}(y_2 - \dot{y}_1 + y_1 y_2)^{\frac{1}{3}}}{1 + y_1}.$$

Ejemplo 6.2.2. El sistema $\dot{x} = 0$, $x(0) = x_0$, $y = x^2$ es localmente fuertemente observable sobre $(\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. De hecho, $x = \sqrt{y}$ sobre el primer rayo y $x = -\sqrt{y}$ sobre el segundo. Sin embargo, no es globalmente fuertemente observable.

Considere ahora el mismo sistema pero con entrada: $\dot{x} = w$, $x(0) = x_0$, $y = x^2$. Este sistema es localmente fuertemente observable sobre los mismo rayos pero no sobre todo \mathbb{R} . Esto pues si $x_0 > 0$ las entradas $w_1 = -1$ y

$$w_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \leq x_0, \\ +1 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

generan trayectorias de estado distintas pero salidas idénticas. Lo mismo ocurre cuando $x_0 < 0$.

Usando la intuición obtenida en los dos ejemplos anteriores, no es sorprendente que el siguiente teorema sea cierto. Presenta una caracterización algebraica de la observabilidad fuerte.

Teorema 6.1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Σ es localmente fuertemente observable;

(b) existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la filtración $\mathcal{Y}^k := \text{span}\{d y, \dots, d y^{(k)}\}$ satisfice $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^k = \mathcal{X}$. Es decir, existe localmente F tal que

$$x = F(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}). \quad (6.2)$$

Prueba. (a) \Rightarrow (b) Primero observe que siempre es posible hacer la siguiente descomposición:

$$\mathcal{X} = [\mathcal{X} \cap (\mathcal{Y}^k + \mathcal{W})] \oplus \mathcal{X}_o = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^k \oplus \mathcal{X}_w \oplus \mathcal{X}_o$$

donde \mathcal{X}_o es el complemento de $\mathcal{X} \cap (\mathcal{Y}^k + \mathcal{W})$ con respecto a \mathcal{X} , y \mathcal{X}_w es el complemento de $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^k \oplus \mathcal{X}_o$ con respecto a \mathcal{X} . Por ejemplo, un elemento en $\mathcal{X} \cap (\mathcal{Y}^k + \mathcal{W})$ es una variable de estado observable pues puede ser escrita en términos de la entrada y la salida (y sus derivadas). Sin embargo, un elemento \mathcal{X}_o es una variable de estado que no puede ser escrita únicamente en términos de la salida y la entrada y por tanto, no es observable. Como asumimos que el sistema es localmente fuertemente observable, también lo es cuando $w = 0$ y por tanto es observable. De esta forma, necesariamente $\mathcal{X}_o = \emptyset$, c.f., [CMP07, pp. 57]. Ahora debemos mostrar que $\mathcal{X}_w = \emptyset$.

Si esto no fuera así, existiría al menos una variable de estado x_i que tiene dependencia no trivial de la entrada, i.e.,

$$x_i = \varphi(y, \dots, y^{(k)}, w, \dots, w^{(l)}),$$

con $\partial \varphi / \partial w_j^{(l_i)} \neq 0$ para algún $l_i \in [0, l]$. Por tanto, dos entradas diferentes que generan salidas idénticas necesariamente generan trayectorias de estado distintas, contradiciendo la suposición de observabilidad fuerte.

(b) \Rightarrow (a) Antes de probar la afirmación, observe que $\mathcal{Y}^k \cap \mathcal{X} = \mathcal{X}$ es solo una notación para decir

$$\text{rank} \left. \frac{\partial(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})}{\partial x} \right|_{x=x_o} = n$$

debido a que $\{d y, d \dot{y}, \dots, d y^{(k)}\}$ es una base para \mathcal{Y}^k . Por tanto el Teorema de la Función Implícita garantiza que existe una vecindad de x_o y una función F tal que (6.2) es válida, c.f., [CMP07, pp. 58].

Ahora probamos la afirmación del teorema por contradicción, asumiendo no (a) pero (b). Si Σ no es fuertemente observable existen estados x_o^1, x_o^2 y entradas w_1, w_2 tales que

$$x_{w_1}(t, x_o^1) \neq x_{w_2}(t, x_o^2) \text{ pero } y_{w_1}(t, x_o^1) \equiv y_{w_2}(t, x_o^2)$$

y al aplicar la fórmula (6.2) se obtiene

$$x_{w_1}(t, x_o^1) = F(y_{w_1}(t, x_o^1), \dots) = F(y_{w_2}(t, x_o^2), \dots) = x_{w_2}(t, x_o^2),$$

que es una contradicción. \square

Ahora se explora la observabilidad fuerte en términos geométricos. En particular, re-escribimos algunas conclusiones que aparecían al margen en [IM88] en términos de observabilidad fuerte.

Teorema 6.2. Si Σ es localmente fuertemente observable entonces $\Delta^* = 0$.

Prueba. Use coordenadas locales $x = (x_1, x_2)$ sobre la vecindad \mathcal{N}_{x_0} donde $\Delta^* = \text{span} \frac{\partial}{\partial x_2}$ es la distribución controlada-invariante más grande contenida dentro de $\ker d h$. Elija x_1 para completar una base local. Como por definición $\text{span} \frac{\partial}{\partial x_2}$ está dentro de $\ker d h$, directamente se obtiene que h no depende de x_2 .

Como Δ^* es controlada-invariante, existe una realimentación de estado invertible $w = \alpha + \beta v$ tal que el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tilde{f}_1(x_1, x_2) + \tilde{g}_1(x_1, x_2)v, & \dot{x}_2 &= \tilde{f}_2(x_1, x_2) + \tilde{g}_2(x_1, x_2)v, \\ y &= h(x_1), \end{aligned}$$

es invariante con respecto a Δ^* . Podemos asumir que desde un inicio el sistema luce así, simplemente introduciendo w primero y luego seleccionando v para removerla, i.e., $w = \alpha + \beta v$, $v = \beta^{-1}(w - \alpha)$.

Además, como Δ^* es invariante con respecto a este último sistema se debe de cumplir

$$[\tilde{f}, \Delta] = - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_2} \end{array} \right) \subset \Delta, \quad [\tilde{g}, \Delta] = - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial x_2} \end{array} \right) \subset \Delta.$$

Como $\Delta^* = \text{span} \frac{\partial}{\partial x_2}$, esto muestra que ni \tilde{f}_1 ni \tilde{g}_1 dependen de x_2 . Por tanto, el sistema en realidad luce como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tilde{f}_1(x_1) + \tilde{g}_1(x_1)v, & \dot{x}_2 &= \tilde{f}_2(x_1, x_2) + \tilde{g}_2(x_1, x_2)v, \\ y &= h(x_1), \end{aligned}$$

donde v es la nueva entrada. Esta descomposición es válida sobre \mathcal{N}_{x_0} .

Además, resulta claro que x_2 no es observable. Por tanto, si el sistema original era fuertemente observable, necesariamente x_2 debe tener dimensión cero, o equivalentemente, $\Delta^* = 0$. \square

La afirmación converso ($\Delta^* = 0$ implica observabilidad fuerte) no es cierta en general, como muestra el siguiente contra-ejemplo.

Nota 6.2.1. El siguiente ejemplo es tomado de [IM88].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + w_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2 x_3 + x_4 + x_3 w_1, & y_1 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= w_2, & y_2 &= x_2, \\ \dot{x}_4 &= x_3, \end{aligned}$$

Por un lado, es posible checar que x_3 puede ser escrita como una función de la salida pero también explícitamente depende de la entrada:

$$x_3 = \frac{\ddot{y}_2 - w_2 \dot{y}_1}{1 + \ddot{y}_1},$$

y por tanto, de acuerdo al Teorema 6.1, el sistema no es localmente fuertemente observable.

Por otro lado, usando el algoritmo Δ^* , [Isi95, pp. 375], se obtiene $\Omega_0 = \text{span}\{d x_1, d x_2\}$, $G^\perp = \text{span}\{x_3 d x_1 - d x_2, d x_4\}$ entonces

$$\Omega_0 \cap G^\perp = \text{span}\{x_3 d x_1 - d x_2\} =: \text{span}\{\omega\},$$

por tanto $L_f(\Omega_o \cap G^\perp) = f^T \left(\frac{\partial \omega^T}{\partial x} \right)^T + \omega \frac{\partial f}{\partial x} = -x_2 dx_3 - dx_4$. Análogamente $L_{g_1}(\Omega_o \cap G^\perp) = dx_3$, $L_{g_2}(\Omega_o \cap G^\perp) = dx_1$ y entonces $\Omega_1 = \text{span}\{dx_1, dx_2, dx_3, x_2 dx_3 + dx_4\} = (\mathbb{R}^4)^*$, para toda x . Como consecuencia $\Delta^* = \Omega_1^\perp = o$.

Por otro lado, $\Delta^* = o$ si implica observabilidad fuerte para el caso una-entrada una-salida: en tal caso la salida tiene grado relativo n . Esto permanece cierto para sistemas de múltiples-entradas múltiples-salidas siempre que la matriz de acoplamiento sea invertible por la izquierda (o tenga rango completo por renglón). Cabe resaltar que para sistemas lineales esta afirmación también es cierta: el sistema es fuertemente observable si y solo si el subespacio débilmente inobservable (i.e. el subespacio controlado-invariante más grande dentro del kernel de la salida) es cero [TSH01, pp. 159].

6. Un poco de historia de acuerdo a Prof. Claude Moog: Hirschorn y su algoritmo fueron pioneros para calcular el inverso de sistemas no lineales. Respondía la pregunta de cuándo y cómo se puede invertir un sistema no lineal. Sin embargo, pocos meses después, apareció el hoy famoso Algoritmo de Singh que usaba un algoritmo más general y el de Hirschorn cayo al olvido. Oh, triste realidad!

7. Los simbolos b^\perp , $b^{\perp\perp}$ denotan el kernel de la matrix b y su complemento, respectivamente. Vea el Ejemplo 6.3.1.

6.3 El Algoritmo de estructura de Hirschorn

Es posible realizar cálculos constructivos para verificar la observabilidad fuerte de un sistema. Con mas precisión, presentamos un algoritmo que permite construir una base para \mathcal{Y}^k del Teorema 6.1. Es decir, permite encontrar la función F de la ecuación (6.2).

El algoritmo es el “dual” de una modificación al algoritmo de Hirschorn⁶ [Hir79]. Es dual en el sentido de que intentamos encontrar direcciones ortogonales a la entrada, en oposición al algoritmo original. De hecho, esencialmente, es la versión no lineal de [Mol76] para sistemas lineales.

Paso 0. Define $\hat{y}_o := y$ y $M_o(x) := h(x)$.

Paso 1. Calcula $\dot{M}_o(x) = \dot{\hat{y}}_o = L_f M_o(x) + L_g M_o(x)w := a_1(x) + b_1(x)w$, introduzca⁷

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{y}}_1 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} b_1^{\perp\perp}(x) \\ b_1^\perp(x) \end{bmatrix} \dot{M}_o(x) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1(x) + \tilde{b}_1(x)w \\ \hat{a}_1(x) \end{bmatrix},$$

y define

$$M_1(x) := \begin{bmatrix} \hat{y}_o \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ \hat{a}_1(x) \end{bmatrix}.$$

Paso $k + 1$. Calcula

$$\dot{M}_k(x) = \begin{bmatrix} \dot{\hat{y}}_o \\ \vdots \\ \dot{\hat{y}}_k^{(k+1)} \end{bmatrix} := a_{k+1}(x) + b_{k+1}(x)w,$$

introduce

$$\begin{bmatrix} \tilde{\hat{y}}_{k+1}^{(k+1)} \\ \hat{y}_{k+1}^{(k+1)} \\ \hat{y}_{k+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} b_{k+1}^{\perp\perp}(x) \\ b_{k+1}^\perp(x) \end{bmatrix} \dot{M}_k(x) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{k+1}(x) + \tilde{b}_{k+1}(x)w \\ \hat{a}_{k+1}(x) \end{bmatrix},$$

y define

$$M_{k+1}(x) := \begin{bmatrix} \hat{y}_o \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+1}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ \vdots \\ \hat{a}_{k+1}(x) \end{bmatrix}.$$

El algoritmo anterior garantiza que $M_k(x)$ tiene rango completo si y solo si el sistema es fuertemente observable.

Teorema 6.3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Σ es localmente fuertemente observable;
- (b) $\text{rank d } M_k(x) = n$, para algún entero $k \leq n - p$.

Prueba. (a) \Rightarrow (b). Por construcción, se tiene $\text{span}\{d M_i(x)\} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^i$. De esta forma los vectores $M_i(x)$ definen una secuencia de subespacios $(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^0) \subset \dots \subset (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^i) \subset (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^{i+1}) \subset \dots$ que es no decreciente y acotada⁸ por \mathcal{X} . Por tanto, la secuencia tiene un único límite. Como observabilidad fuerte local implica que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^k = \mathcal{X}$ para algún k finito, la cota superior de la secuencia es alcanzada y por tanto debe coincidir con el límite de la secuencia. Además, la notación $\text{span}\{d M_k(x)\} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^k = \mathcal{X}$ es equivalente a $\text{rank d } M_k(x) = n$.

Por otro lado, la dimensión de cada subespacio debe incrementarse al menos en uno en cada paso del algoritmo. Esto pues la condición $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^{i-1} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^i$ implicaría que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^{i+1} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^i$ y que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^{i-1}$ es otro límite. Además, como se comienza con dimensión p , se necesitan a lo mas $n - p$ pasos del algoritmo para alcanzar \mathcal{X} .

(b) \Rightarrow (a). Como $\text{rank d } M_k(x) = n$ puede ser re-escrito como $\text{span}\{d M_k(x)\} = \mathcal{X}$ y por construcción del algoritmo $\text{span}\{d M_k(x)\} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^k$, se obtiene la igualdad $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^k = \mathcal{X}$. Por tanto, el sistema es localmente fuertemente observable. \square

Al aplicar el algoritmo, se calcula una secuencia de igualdades de la forma

$$[\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k^{(k)}]^T = M_k(x), \quad k \leq n - p,$$

con $\text{rank d } M_{n-p}(x) = n$. Entonces, el Teorema de la Función Implícita, garantiza de nuevo la existencia (al menos local) de un inverso para M_{n-p} como se necesita en (6.2). Sin embargo, el cálculo del inverso de M_{n-p} es un problema difícil en general. Es posible simplificar su cálculo si se reemplaza en cada paso del algoritmo las funciones del estado por funciones de la salida, como se muestra en el Ejemplo abajo.

Finalmente, note que el problema de diseñar un observador con entradas desconocidas simplemente consiste en evaluar las derivadas necesarias en (6.2). Esto puede ser hecho con los diferenciadores introducidos en los capítulos anteriores.

Ejemplo 6.3.1. Aplicamos el algoritmo al ejemplo previo 6.2.1.

Paso 0: Definimos $\hat{y}_0 = y$ y $N_0(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \hat{y}_0$. Trivialmente lo simplificamos y fijamos $M_0(x) = N_0(x)$.

Paso 1: Calculamos $\dot{M}_0(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w = a_1(x) + b_1 w$. Por tanto $b_1^\perp = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b_1^{\perp\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, e introducimos

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{y}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \dot{M}_0(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} w \\ x_3^3 - x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

Fijamos

$$N_1(x) = \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^3 - x_1 x_2 \end{bmatrix}.$$

8. Acotada usando el orden inducido por inclusión de subespacios.

y simplificamos reemplazando funciones del estado por funciones de la salida

$$M_1(x) := \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \phi_1(\hat{y}_0, \hat{y}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ (\hat{y}_1 + \hat{y}_{0,1}\hat{y}_{0,2})^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Calcule

$$\dot{M}_1(x) = \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ x_3^3 \\ x_4(1+x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w := a_2(x) + b_2w.$$

Entonces $b_2^\perp = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b_2^{\perp\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, e introduzca

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} b_2^{\perp\perp} \\ b_2^\perp \end{bmatrix} \dot{M}_1(x) = \begin{bmatrix} x_1x_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} w \\ x_3^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} w \\ x_4(1+x_1) - x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

Fijamos

$$N_2(x) = \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \phi_1(\hat{y}_0, \hat{y}_1) \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4(1+x_1) - x_1x_2 \end{bmatrix}$$

y simplificamos

$$M_2(x) := \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \phi_1(\hat{y}_0, \hat{y}_1) \\ \phi_2(\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ (\hat{y}_1 + \hat{y}_{0,1}\hat{y}_{0,2})^{\frac{1}{3}} \\ \frac{\ddot{y}_2 + \hat{y}_{0,1}\hat{y}_{0,2}}{1 + \hat{y}_{0,1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Como $\text{rank } dM_2(x) = 4$, el algoritmo finaliza y concluimos que el sistema es localmente fuertemente observable.

6.4 Observabilidad Fuerte y Platitud Diferencial

9. Muchos ejemplos con motivación práctica pueden ser encontrados en [SRA04].

La Platitud es un enfoque muy exitoso para resolver muchos problemas de control para una gran variedad de sistemas no lineales⁹. El mayor problema consiste en determinar si el sistema en cuestión es plano o no, y si lo es con respecto a que salida.

El resultado sorprendente (y principal) de esta sección es mostrar que sistemas cuadrados con entradas no triviales (i.e. $\text{rank } g = m$) resultan inmediatamente ser planos con respecto a la salida medida. Es un tanto sorprendente obtener platitud diferencial (y por tanto controlabilidad) bajo estas hipótesis, debido a que un sistema fuertemente observable puede ni siquiera tener entradas! Además, mágicamente se obtiene la controlabilidad! Comenzaremos por recordar el concepto de inverso estático por la izquierda del sistema, i.e., una inversa sin dinámica¹⁰.

10. En términos de observabilidad, la existencia de un inverso estático del sistema por la izquierda puede ser interpretado como la posibilidad de distinguir la entrada usando únicamente la salida.

Definición 6.4.1 ([CMP07], pp. 73). *El sistema Σ se dice que tiene un inverso estático por la izquierda si existe una función ψ tal que $w = \psi(y, \dots, y^{(k+1)})$.*

Lema 6.1. Las siguiente lista de implicaciones es válida:

- (a) si Σ es localmente fuertemente observable y $\text{rank } g = m$, entonces el sistema tiene un inverso por la izquierda estático;
- (b) si Σ es observable y tiene un estático inverso por la izquierda, entonces es localmente fuertemente observable;
- (c) observabilidad fuerte local y $\text{rank } g = m$ implican que hay más o igual número de salidas que de entradas, i.e., $p \geq m$.

Prueba. Para lo prueba de (a) observe que como $\text{rank } g = m$ y g es meromorfo, $g^T g(x)$ es una matriz cuadrada de rango completo para casi todo x , lo que permite calcular

$$w = g^+(x)[\dot{x} - f(x)],$$

con¹¹ $g^+ = (g^T g)^{-1} g^T$. Por la suposición de observabilidad fuerte, x es una función de y y sus derivadas hasta el k -ésimo orden. Por tanto \dot{x} es una función de y y sus derivadas hasta el orden $k + 1$. La prueba de (b) es directa, dado que observabilidad implica que x es una función de y y w . Pero por hipótesis w es una función de y también. Para la prueba de (c), basta recordar que cualquier sistema invertible por la izquierda necesariamente satisface $p \geq m$. \square

La noción de plitud diferencial está estrechamente ligada tanto a observabilidad fuerte como a la existencia de un inverso estático por la izquierda. El sistema Σ se dice plano si existe una salida plana $z = \varphi(x, w, \dots, w^{(s)})$ con la misma dimensión que la entrada (i.e. $z(t) \in \mathbb{R}^m$) tal que

$$x = F(z, \dot{z}, \dots, z^{(k)}), \quad w = G(z, \dot{z}, \dots, z^{(k+1)}), \quad (6.3)$$

Sin embargo, la salida plana también puede depender de la entrada y sus derivadas, de modo que plitud es un concepto mas general¹² que observabilidad fuerte. Más aún, todo sistema plano es controlable por definición [Lea09].

La ecuación de observabilidad fuerte (6.2) es simplemente la primera ecuación en (6.3), por lo que cualquier sistema plano es fuertemente observable con $y = z$. La segunda ecuación (6.3) es la existencia de un inverso estático para el sistema. De esta forma, observabilidad fuerte, la existencia de una inverso junto con la condición $\dim z(t) = \dim w(t)$ garantizan la controlabilidad del sistema [Lea09, Proposition 6.1]. Obviamente, las dos últimas condiciones no son consideradas en la observabilidad fuerte pues el sistema puede ni siquiera tener entradas.

Con estos comentarios, formulamos el siguiente teorema:

Teorema 6.4. Suponga que Σ satisface

- (a) localmente fuertemente observable con respecto a y ,
- (b) tiene el mismo número de entradas que de salidas (i.e. $p = m$) y $\text{rank } g(x) = m$,

entonces Σ es diferencialmente plano y y es una salida plana.

11. Como los componentes de g son funciones meromorfas, el conjunto de puntos singulares de $g^T g(x)$ tiene medida cero y por tanto g^+ esta bien definida en un conjunto denso abierto de \mathbb{R}^n .

12. Cuando la salida plana no depende de la entrada, algunos autores le llaman "0-plitud".

Prueba. Sigue a partir del Lema 6.1.a y al observar que la condición $p = m$ garantiza que el sistema lineal equivalente (módulo una transformación de Lie-Backlund) es controlable c.f. [Lea09, Proposición 6.1]. \square

Sorprendentemente, hemos obtenido controlabilidad de gratis. Hay otra interpretación posible a la platitude del sistema. Esta puede ser considerada como la existencia de dos mapas inyectivos: uno del espacio de funciones de estado al espacio de funciones de salidas planas, y el otro del espacio de funciones de entrada al espacio de salidas planas. La restricción de que el número de salidas planas sea igual al número de entradas garantiza entonces la controlabilidad del sistema. En este sentido, el Teorema 6.4 indica que tipo de controlabilidad es necesario agregar a la observabilidad fuerte para obtener platitude. De hecho, la controlabilidad necesaria es bastante simple y elemental: mismo número de entradas que de salidas.

Ejemplo 6.4.1 (6.2.1 continuado). *El ejemplo 6.2.1 es plano con y como salida plana. Como ya hemos mostrado previamente que es fuertemente observable, la conclusión es inmediata al notar que $p = 2 = m$ y que $\text{rank } g = 2$. De hecho*

$$w_1 = \dot{y}_1 - y_1 y_2, \quad w_2 = f_4(\dot{f}_3, y, \dot{y}) - \sin(y_1 y_2),$$

con f_3 y f_4 funciones dadas, respectivamente, por los últimos dos renglones de M_2 en el Ejemplo 2.3.

6.5 Conclusión

La observabilidad fuerte fue extendida y caracterizada para sistemas no lineales en términos geométricos y algebraicos. Además, se mostró que los sistemas cuadrados fuertemente observables son planos. La observabilidad fuerte es instrumental para construir observadores con entradas desconocidas y un algoritmo para construirlos fue presentado.

CONCLUSIONES

El compromiso entre aumentar la robustez a perturbaciones y aumentar la fragilidad ante el ruido fue estudiado para el caso de control y diferenciación. Este es un problema de optimización sobre el espacio de controladores/diferenciadores, bajo la hipótesis de incertidumbres acotadas, usando como índice de desempeño el error en estado estable¹.

El compromiso en el control no está presente. Un control exacto (i.e. elimina completamente la perturbación en ausencia de ruido) es el óptimo presencia de ruido y perturbación.

El compromiso en la diferenciación sí existe. Entonces, las características con respecto a la perturbación y al ruido del diferenciador resultan fundamentales en su diseño. Mostramos, por primera vez, que un diferenciador discontinuo (a-la Super-Twisting) tiene mejores características que un diferenciador lineal por Alta Ganancia. Así, podemos diferenciar y lo podemos hacer cerca de lo mejor posible. De hecho, cuantificamos también por primera vez que tan cerca de lo mejor posible está el diferenciador ST. Además, presentamos dos modificaciones adicionales a este tipo de diferenciadores discontinuos: óptimo en criterio \mathcal{H}_∞ y con convergencia uniforme con respecto a la condición inicial.

Sobre el alcance de nuestro análisis: es limitado, como cualquier análisis. Muchos otros aspectos afectan el desempeño de un controlador/diferenciador al momento de implementarse. Uno importante y que no es considerado es la forma de realizar el algoritmo² usando un computador. Euler es el método de discretizar la ecuación diferencial más simple y usada para algoritmos discontinuos. Sin embargo, es desconocido que tan eficiente es este método y si existe uno mejor.

Animados por el hecho de que podemos diferenciar bien si es necesario, abordamos el problema de observación de sistemas con entradas desconocidas. Ya es conocido, que si el grado relativo es mayor a uno es indispensable derivar la salida del sistema para construir el observador. Esta conclusión anterior y muchas otras fueron obtenidas a partir de caracterizar la observabilidad de sistemas lineales con entradas desconocidas: la observabilidad “fuerte”. Extendimos este análisis y concepto a sistemas no lineales obteniendo dos conclusiones centrales. La primera, es posible caracterizar la observabilidad fuerte solo en términos algebraicos. La caracterización geométrica da solo condiciones suficientes. Además, sorprendentemente, se obtuvo que los sistemas fuertemente observables con el mismo número de entradas que de salidas son planos. Es decir, un sistema fuertemente observable también se vuelve controlable si el número de entradas y salidas coinciden.

7

1. Este enfoque es totalmente distinto a los problemas de control/observación óptima usuales. En los problemas típicos de control/observación óptima el índice de desempeño es o el tiempo o una funcional del estado y la entrada. Además, las incertidumbres son variables aleatorias Gaussianas o no están presentes.

2. La ecuación diferencial es solo una forma de describir el algoritmo.

BIBLIOGRAFIA

- [APA08] V. Andrieu, L. Praly, and A. Astolfi. Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4):1814–1850, 2008. Citado en pp. 62 and 63.
- [AS03] D. Angeli and E.D. Sontag. Monotone control systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(10):1684 – 1698, oct. 2003. Citado en p. 41.
- [Ast99] Karl Astrom. Automatic control - the hidden technology. In P. Franck, editor, *Advances in Control - Highlights of ECC'99*, pages 122–131. Springer-Verlag, 1999. Citado en p. 1.
- [BB05] S. Bhat and D. Bernstein. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Math. Control Signals Systems*, pages 17: 101–127 DOI 10.1007/s00498–005–0151–x, 2005. Citado en p. 66.
- [BBF09] Jean-Pierre Barbot, Driss Boutat, and Thierry Floquet. An observation algorithm for nonlinear systems with unknown inputs. *Automatica*, 45(8):1970–1974, 2009. Citado en pp. 23 and 73.
- [Ber00] D. P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control, Vol. I*. Atena Scientific, 3rd edition, 2000. Citado en pp. 14 and 17.
- [BF10a] F. J. Bejarano and L. Fridman. High order sliding mode observer for linear systems with unbounded unknown inputs. *International Journal of Control*, 83(9):1920–1929, 2010. Citado en p. 59.
- [BF10b] Francisco J. Bejarano and Leonid Fridman. State exact reconstruction for switched linear systems via a super-twisting algorithm. *International Journal of Systems Science*, 9(4):1920 – 1924, 2010. Citado en p. 7.
- [BF11] F.J. Bejarano and L. Fridman. State exact reconstruction for switched linear systems via a super-twisting algorithm. *International Journal of Systems Science*, 42(5):717–724, 2011. Citado en p. 59.
- [BR05] Andrea Bacciotti and Lionel Rosier. *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer, London, 2nd edition, 2005. Citado en pp. 60 and 64.

- [BS93] D.S. Bernstein and W. So. Some explicit formulas for the matrix exponential. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 38(8):1228–1232, aug 1993. Citado en p. 45.
- [CMP07] G. Conte, C. Moog, and A. Perdon. *Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems*. Springer, 2nd edition, may 2007. Citado en pp. 74, 76, and 80.
- [CZMF11] E. Cruz-Zavala, J.A. Moreno, and L.M. Fridman. Uniform robust exact differentiator. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(11):2727–2733, nov. 2011. Citado en pp. 8, 59, and 60.
- [DD95] F. Diener and M. Diener. *Nonstandard analysis in practice*. Universitext Series. Springer, 1995. Citado en p. 20.
- [DFPU09] Jorge Davila, Leonid Fridman, Alessandro Pisano, and Elio Usai. Finite-time state observation for non-linear uncertain systems via higher-order sliding modes. *International Journal of Control*, 82(8):1564–1574, 2009. Citado en p. 73.
- [DGC00] S. Diop, J. W. Grizzle, and F. Chaplais. On numerical differentiation algorithms for nonlinear estimation. In *Proceedings of the 39nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1133 – 1138, 2000. Citado en p. 2.
- [DPU11] Jorge Davila, Alessandro Pisano, and Elio Usai. Continuous and discrete state reconstruction for nonlinear switched systems via high-order sliding-mode observers. *International Journal of Systems Science*, 42(5):725 – 735, 2011. Citado en p. 59.
- [EZR11] Denis V. Efimov, Ali Zolghadri, and Tarek Raïssi. Actuator fault detection and compensation under feedback control. *Automatica*, 47(8):1699–1705, 2011. Citado en pp. 23 and 59.
- [Fil60] A.F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand side*. Krowler, London, 1960. Citado en pp. 14, 21, and 38.
- [Fri02] L.M. Fridman. Singularly perturbed analysis of chattering in relay control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(12):2079 – 2084, December 2002. Citado en pp. 14 and 19.
- [GB11] M. Grant and S. Boyd. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 1.21. <http://cvxr.com/cvx>, April 2011. Citado en p. 54.
- [Gli06] Yuri E. Gliklikh. Necessary and sufficient conditions for global-in-time existence of solutions of ordinary, stochastic, and parabolic differential equations. *Abstract and Applied Analysis*, 2006:17 pages, 2006. Citado en p. 14.
- [Hau83] M. Hautus. Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, 50:353–468, apr 1983. Citado en pp. 2, 7, 8, 73, and 74.

- [Hir79] R. Hirschorn. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 24(6):855 – 865, dec 1979. Citado en p. 78.
- [HT10] Hassan Hammouri and Zied Tmar. Unknown input observer for state affine systems: A necessary and sufficient condition. *Automatica*, 46:271–278, February 2010. Citado en p. 73.
- [Ibr03] Salim Ibrir. Online exact differentiation and notion of asymptotic algebraic observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(11):2055–2060, 2003. Citado en p. 23.
- [IM88] A. Isidori and C. Moog. On the nonlinear equivalent of the notion of transmission zeros. In Christopher Byrnes and Alexander Kurzhanski, editors, *Modelling and Adaptive Control*, volume 105 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 146–158. Springer Berlin / Heidelberg, 1988. Citado en pp. 76 and 77.
- [Isi95] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 3rd edition, 1995. Citado en pp. 73, 75, and 77.
- [Kha07] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3rd edition, 2007. Citado en p. 13.
- [Kol62] A. N. Kolmogorov. On inequalities between upper bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function defined on an infinite interval. *Amer. Math. Soc. Transl*, 2(9):233–242, 1962. Citado en p. 23.
- [Lea09] Jean Leavine. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: a Flatness-based Approach*. Springer, Berlin, 2009. Citado en pp. 81 and 82.
- [Lev98] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384, 1998. Citado en pp. 5, 6, 7, 23, 24, 25, 28, 32, 33, and 59.
- [Lev03] A. Levant. High-order sliding modes: differentiation and output feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10):1924–041, nov 2003. Citado en pp. 7, 8, 59, 60, and 67.
- [Lev05] A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823–830, 2005. Citado en pp. 59, 60, and 61.
- [Lev10] A. Levant. Chattering analysis. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(6):1380–1389, 2010. Citado en p. 14.
- [MD08] Jaime A. Moreno and Denis Dochain. Global observability and detectability analysis of uncertain reaction systems and observer design. *International Journal of Control*, 81(7):1062–1070, 2008. Citado en p. 73.

- [Mol76] B. P. Molinari. A strong controllability and observability in linear multivariable control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 91(5):761 – 764, 1976. Citado en pp. 8, 73, and 78.
- [Mor00] J. Moreno. Unknown input observers for siso nonlinear systems. In *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, volume 1, pages 790 –801 vol.1, 2000. Citado en p. 73.
- [Mor11] J. A. Moreno. Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms. In L. Fridman, J. Moreno, and R. Iriarte, editors, *Sliding Modes after the first decade of the 21st Century*, pages 113–150. Springer-Verlag, 2011. Citado en pp. 5, 25, 26, 36, 43, 50, and 51.
- [Pat97] R. Patton. Observer-based fault detection and isolation: Robustness and applications. *Control Engineering Practice*, 5(5):671–682, May 1997. Citado en p. 73.
- [PMZ05a] A. M. Pertew, H. J. Marquez, and Q. Zhao. H[inf] synthesis of unknown input observers for non-linear lipschitz systems. *International Journal of Control*, 78(15):1155–1165, 2005. Citado en p. 51.
- [PMZ05b] A.M. Pertew, H.J. Marquez, and Q. Zhao. Design of unknown input observers for lipschitz nonlinear systems. In *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, pages 4198 – 4203 vol. 6, june 2005. Citado en p. 73.
- [POH09] A. J. Peixoto, T. R. Oliveira, and Liu Hsu. Global tracking output-feedback sliding mode control design via norm estimators and variable high gain observer. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, CDC/CCC 2009*, pages 6083 – 6088, 2009. Citado en p. 65.
- [RA02] Alain Rapaport and Alessandro Astolfi. Practical l2 disturbance attenuation for nonlinear systems. *Automatica*, 38(1):139 – 145, 2002. Citado en pp. 7 and 51.
- [SA11] T. Samad and A.M. Annaswamy. The impact of control technology. IEEE Control Systems Society, available at www.ieeecss.org, January 2011. Citado en p. 1.
- [SMD⁺06] H. Saadaoui, N. Manamanni, M. Djemai, J.P. Barbot, and T. Floquet. Exact differentiation and sliding mode observers for switched lagrangian systems. *Nonlinear Analysis*, 65(5):1050 – 1069, 2006. Hybrid Systems and Applications (4) - Hybrid Systems and Applications (4). Citado en pp. 7 and 59.
- [SRA04] H. Sira-Ramírez and S.K. Agrawal. *Differentially flat systems*. Control engineering. Marcel Dekker, 2004. Citado en pp. 2 and 80.

- [TSH01] H. L. Trentelman, A. A. Stoorvogel, and M. Hautus. *Control theory for linear system*. Springer, may 2001. Citado en pp. 73 and 78.
- [UL06] Vadim I. Utkin and Hoon Lee. The chattering analysis. In *Power Electronics and Motion Control Conference, 2006. EPE-PEMC 2006. 12th International*, pages 2014–2019, 2006. Citado en pp. 14 and 19.
- [Utk92] V. I. Utkin. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer, 1992. Citado en p. 15.
- [VK08] L. K. Vasiljevic and H.K. Khalil. Error bounds in differentiation of noisy signals by high-gain observers. *Systems & Control Letters*, 57(10):856 – 862, 2008. Citado en pp. 5, 6, 24, 25, 27, 28, 30, and 40.

APPENDICES

PUBLICACIONES REALIZADAS

- [1] M. T. Angulo, L. Fridman and A. Levant, “*Output-feedback exact finite-time stabilization of disturbed LTI systems*”. Accepted as Brief Paper for Automatica, June 2011.
- [2] M. T. Angulo, L. Fridman and A. Levant, “*Robust Exact Finite-Time Output Based Control using High-Order Sliding Modes*”. International Journal of Systems Science, Vol. 42, Issue 11 (Special Issue: Variable structure methods for hybrid systems), pp. 1847-1857, 2011.
- [3] V. Azhmyakov and M. T. Angulo, “*Applications of the Strong Approximability Property to a Class of Affine Switched Systems and to Relaxed Differential Equations with Affine Structure*”. International Journal of Systems Science , International Journal of Systems Science, Vol. 42, Issue 11 (Special Issue: Variable structure methods for hybrid systems), pp. 1899-1907, 2011.
- [4] M. Angulo and L. Fridman, “*Output based finite time control of LTI systems with matched perturbations using HOSMs*”, in Proc. of the IFAC Conference on Decision and Control (CDC) 2009, pp. 6095 - 6100, Shangai, China.
- [5] M. Angulo and A. Levant, “*On robust output based finite-time control of LTI systems using HOSMs*”, in Proc. of the 2009 IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (AHDS09), Volume 3, part 1, 2009 pp. 222-227, Zaragoza, España.
- [6] Marco Tulio Angulo, Leonid Fridman, Claude Moog and Jaime Moreno, “*Output Feedback Design for Robust Finite-Time State Stability of Flat Nonlinear Systems*”, in Proc. of the 11th edition of the IFAC Conference on Variable Structure Systems (VSS 2010), pp. 32-38, México, January 2010.
- [7] Marco T. Angulo, Jaime Moreno and Ricardo Lazaro. “*Robust Dissipative Observer Design for Nonlinear Systems*”, 7th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2010), pp. 111-115, Chiapas, México, August 2010.
- [8] Marco T. Angulo, Jaime A. Moreno and Leonid Fridman. “*On Functional Observers for Linear Systems with Unknown Inputs and HOSM Differentiators*”, In Proc. of the 18th IFAC World Congress, pp. 1922-1927, Milano, Italy, August 2011.



- [9] M. T. Angulo, J. A. Moreno and L. Fridman, “*An Exact and Uniformly Convergent Arbitrary Order Differentiator*”. Accepted for CDC 2011.
- [10] M. T. Angulo, J. A. Moreno and L. Fridman, “*On the trade-offs between exactness and robustness in observation and control*”. Accepted for the 12th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS), Bombay, India, 2012.
- [11] M. T. Angulo, C. H. Moog and J. A. Moreno, “*Strong Observability of Nonlinear Systems*”. Submitted to Systems & Control Letters, October 2011.
- [12] M. T. Angulo, J. A. Moreno and L. Fridman, “*A Super-Twisting Differentiator with Optimal \mathcal{H}_∞ performance against Measurement Noise*”. Submitted to IEEE-TAC, 2011 and for ACC12.
- [13] M. T. Angulo, J. A. Moreno and L. Fridman, “*A Uniformly Convergent HOSM differentiator*”. Submitted to Automatica, October 2011.
- [14] M. T. Angulo, J. A. Moreno and L. Fridman, “*Output-feedback finite-time stabilization of disturbed feedback linearizable nonlinear systems*”. Submitted the 4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS12), Eindhoven, The Netherlands, November 2011.
- [15] M. T. Angulo, J. A. Moreno and L. Fridman, “*On Functional Observers for Linear Systems with Unknown Inputs and HOSM Differentiators*”. Submitted to the International Journal of Robust and Nonlinear Control (IJRNC), January 2011.
- [16] M. T. Angulo, “*Signal Differentiation as a Decodification problem and its relation to Witsenhausen’s counterexample*”. To be Submitted for CDC 2012.
- [17] M. T. Angulo, J. A. Moreno and L. Fridman, “*Including Discontinuous Injections improves the performance of the Optimal Linear High-Gain Differentiator*”. To be Submitted for the Special Issue on High-Gain Observers at the IJRNC, February 2012.