



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**Descripción de un Átomo Hidrogenoide
Gravitando**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A:

José Alexander Caicedo

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Luis F. Urrutia Ríos

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Dr. Daniel E. Sudarsky Saionz

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Dr. Alejandro Corichi
Rodríguez-Gil



Ciudad Universitaria

Junio, 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



El autor, sin perjuicio de la legislación de la Universidad Nacional Autónoma de México, otorga a esta obra la siguiente licencia:

Esta obra está licenciada bajo una **Licencia Atribución-No Comercial-Licenciamiento Recíproco 2.5 México** de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/mx/>

o envíenos una carta a

Creative Commons
171 Second Street, Suite 300,
San Francisco, California,
94105, USA.

*A toda mi familia, con especial cariño para mi abuelita, mi madre, mi esposa y mi hijo Emmanuel.
También para aquellos que no creían que lo lograría (y que se fueron acumulando con el tiempo).*

RESUMEN

DESCRIPCIÓN DE UN ÁTOMO HIDROGENOIDE GRAVITANDO

José Alexander Caicedo

Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México

Doctor en Ciencias (Física)

Se presenta una construcción del potencial efectivo de interacción entre dos fermiones de cargas opuestas que se propagan en un espaciotiempo curvo estacionario caracterizado por un campo gravitacional de fondo débil, pero arbitrario, que satisface las ecuaciones de Einstein. Esta construcción extiende, vía la prescripción de acople mínimo, uno de los procedimientos para obtener el potencial de Coulomb-Breit en el espaciotiempo de Minkowski. El procedimiento estudiado, usa el elemento covariante de matriz S para la dispersión entre las cargas que involucra el intercambio de un fotón, que al escribirse como el valor esperado entre los estados inicial y final del sistema compuesto, da lugar a un potencial efectivo hermítico que depende de las posiciones y de los espines de los fermiones considerados.

En el caso particular de un observador en caída radial dentro del espaciotiempo de Schwarzschild, el tratamiento de dos cuerpos del problema permite identificar correcciones gravitacionales \hat{H}_{γ^2} a la interacción, cuya estimación produce corrimientos en el espectro sólo de algunos órdenes de magnitud bajo las correcciones de estructura fina. Estas correcciones son proporcionales al parámetro γ^2 que va como el cuadrado de la distancia l_R del átomo al origen de coordenadas, dentro de la validez del parche de coordenadas. Una estimación más detallada del nivel

$n = 2$ del átomo de hidrógeno conduce a un rompimiento de la degeneración de los niveles $^2S_{1/2}$ y $^2P_{1/2}$ de la estructura fina del Hidrógeno. Este resultado produce una clara violación de la expresión para el corrimiento al rojo gravitacional. Repitiendo el análisis en el caso más sencillo del nivel fundamental se recupera la misma inconsistencia.

Se conjetura que el origen de ésta se encuentra en la elección de las variables usadas para describir el átomo, que no separan adecuadamente el movimiento relativo del sistema con respecto al movimiento del centro de masa. Aún cuando se espera que el error cometido, debido a dicha elección, en la estimación de los órdenes de magnitud de los corrimientos inducidos por la interacción \hat{H}_{γ^2} sea muy pequeño, el empleo de las coordenadas relativa y centro de masa correctas podría producir cancelaciones entre las diversas contribuciones del mismo orden al espectro. De este modo, para verificar la validez de la expresión del corrimiento al rojo en el contexto considerado en el trabajo se requiere un estudio más detallado de las correcciones \hat{H}_{γ^2} en particular, que va más allá de una simple estimación de órdenes de magnitud.

ABSTRACT

DESCRIPTION FOR A GRAVITATING HIDROGENIC ATOM

José Alexander Caicedo

Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México

Doctor en Ciencias (Física)

We present a construction of the effective potential of interaction between two fermions with opposite charges propagating in a stationary curved spacetime characterized by a weak background gravitational field, but arbitrary, satisfying the Einstein equations. This construction extends via the minimal coupling prescription at least one of the procedures to obtain the Coulomb-Breit potential in the Minkowski's spacetime. The procedure studied, uses the covariant S matrix element for the scattering that involves the interchange of only one photon among the particles, which when written as the expected value between the states initial and final composite system gives rise to a Hermitian effective potential which depends on the positions and spins of the considered fermions.

In the case of an inertial observer radially infalling into a Schwarzschild spacetime, the two body treatment allows to identify gravitational corrections \hat{H}_{γ^2} to the interaction, whose estimation produces spectral shifts that are few orders below the fine structure corrections. These corrections are proportional to the γ^2 parameter that goes as the square of the distance l_R from the atom to the coordinate origin, always in the valid coordinate patch. A detailed estimation for the level $n = 2$ of Hidrogen shows a splitting between the $^2S_{1/2}$ and $^2P_{1/2}$ fine structure levels. This result produces a clear violation of the gravitational redshift formula. Repeating the analisis for the fundamental level of the Hidrogen the same inconsistency ap-

pears.

It is conjectured that the origin of this problem is in the choice of the variables used to describe the atom, which do not adequately separate the relative motion of the system with respect to movement of the center mass. Even when it is expected that the error due to such election in the estimate of the orders of magnitude of the shifts induced by the interaction \hat{H}_{γ^2} is very small, the use of right relative and center of mass coordinates could produce cancellations between teh various contributions to the spectrum which are of the same order. Thus, to verify the validity of the redshift expression in the context considered in this work a more detailed study is required, in particular for the \hat{H}_{γ^2} corrections, that extended study goes far beyond than a simple order of magnitude estimation.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a El que ha puesto en mi camino un gran número de personas que han hecho posible que hoy concluya éste trabajo.

Agradezco también a todas las personas que han querido ser apoyo (y han perseverado en el intento) durante toda ésta etapa de mi vida: mi abuelita Susana, mi madre Alicia, mi esposa Carolina, mi maestro y asesor el Dr. Luis Urrutia, el Dr. Sudarsky, mis amigos y compañeros dentro y fuera del posgrado, todo el personal administrativo del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM y del Posgrado en Ciencias Físicas.

Agradezco también a la DGAPA (proyecto PAPIIT-IN-109107), a la DGEP y al CONACYT (Proyecto No.55310) por los apoyos económicos en forma de becas que me han brindado durante mi estancia en México.

Gracias a la UNAM, a éste país y a su gente noble, por recibirme con los brazos abiertos y tratarme con tanto aprecio.

Índice general

1. Física No Gravitacional en Relatividad General	11
1.1. La prescripción de acople mínimo gravitacional	11
1.2. Electrodinámica de fermiones de Dirac en relatividad especial	13
1.3. La interacción de Coulomb-Breit en el espaciotiempo de Minkowski	20
1.4. Electrodinámica de fermiones de Dirac en un espaciotiempo curvo	27
1.5. El límite no-relativista	36
2. La Interacción de Coulomb-Breit entre Fermiones Cargados descrita por un Observador Inercial que usa Coordenadas Normales de Fermi	41
2.1. El Observador y sus coordenadas	41
2.2. Interacción Efectiva	43
3. Efectos de la Curvatura del Espaciotiempo en Átomos Hidrogenoides dentro del Sistema Solar	57
3.1. CNF para la caída radial en el espaciotiempo de Schwarzschild . . .	58
3.2. Estimación de los corrimientos inducidos en el espectro por el término dominante de las correcciones gravitacionales: interacción $\hat{\mathcal{W}}_e^C$	72
3.3. El problema del corrimiento al rojo gravitacional	85
4. Conclusiones y Perspectivas	93

Lista de Apéndices

A. Lista de Convenciones	99
B. La Construcción de Hadamard	101
C. Potencial Effectivo de Interacción en las variables (R, r)	107
D. Funciones de Onda del Hamiltoniano de Estructura Fina e Integrales Relacionadas	111
E. Conmutadores para el cálculo del potencial efectivo	115
Bibliografía	121

Introducción

Desde hace algunos años la comunidad de la física teórica ha retomado con un interés renovado la idea de la unificación, buscando construir una teoría que haga armonizar a la Mecánica Cuántica (MC) [1–5] y a la Relatividad General (RG) [6–9]. Estas dos teorías son pilares fundamentales de la física contemporánea, pues se han convertido en las dos teorías más verosímiles de la actualidad. Cada una, por separado, describe muy bien una amplia gama de fenómenos que van desde un espectro atómico hasta la expansión del universo, todo dentro de la precisión experimental presente.

Quizá la evidencia a favor de cada una de ellas, favorece la idea de que trabajando juntas se podría alcanzar una descripción completa de los eventos físicos dentro del universo. Sin embargo, esta tarea de hacerlas trabajar juntas no es algo sencillo, pues parecen existir “inconsistencias fundamentales” entre ellas. Así es como una teoría, llamémosla *Gravedad Cuántica* (GC), que las pueda unificar, que las haga trabajar juntas en todo su esplendor, se convierte en un deseo que no será satisfecho hasta que evidencia contundente diga que tal teoría no es posible.

Justamente la búsqueda de tal evidencia, a favor o en contra de la GC, ha abierto la puerta a aproximaciones prácticas que suponen que esa teoría fundamental se manifiesta, en experimentos muy sensibles, por medio de nuevos efectos físicos, bastante suprimidos, en escalas experimentalmente posibles [10]. A esta aproximación se le conoce como *fenomenología de Gravedad Cuántica* (FGC) y uno de los campos de investigación que ha surgido de ella es el de la búsqueda experimental de *violaciones de la simetría de Lorentz*.

En este campo de la violación a la simetría de Lorentz, se busca aprovechar que la

simetría de Lorentz es un ingrediente fundamental tanto de RG como del Modelo Estándar de partículas (el cual representa a la MC), de modo que si dicha violación es un rasgo fundamental de la GC podríamos observar violaciones en experimentos que involucren tanto fuerzas gravitacionales como no gravitacionales [11–14].

Uno puede también optar por buscar efectos de esa GC de forma más conservadora, respetando simetrías [15], o considerando desde el comienzo los principios de la MC y de la RG intentando, por ejemplo, una cuantización en un espaciotiempo curvado como en las referencias [16–19]. Esta es la línea de trabajo que se siguió durante esta investigación; la de considerar en conjunto las dos teorías procurando respetar sus campos de acción y sus principios tanto como sea posible.

El interés principal para el desarrollo de este trabajo es encontrar predicciones, experimentalmente verificables, que por medio de la evidencia puedan señalar hacia dónde debemos dirigir los estudios de la interfase entre la RG y la MC. Consideramos que con el estudio de esta interfase, quizá incluyendo regímenes diferentes a los considerados aquí, se puede llegar a concluir de manera más contundente que es necesario modificar a la MC, a la RG o a ambas, para describir mejor el universo observado, para encontrar esa GC o para dejar de buscarla.

Partiendo de ecuaciones de onda completamente covariantes se puede predecir la existencia de efectos inerciales y gravitacionales que se pueden confrontar con el experimento [20]. Hasta ahora, los experimentos confirman que la inercia y la gravedad newtoniana influyen en las partículas cuánticas de forma consistente con la relatividad general hasta distancias del orden de 10^{-4} cm para electrones superconductores [21] y de 10^{-8} cm para neutrones [22–24].

Es importante señalar que estos experimentos no son pruebas en si de la RG, pero confirman que el comportamiento de la inercia y la gravedad Newtoniana es el que se predice de las ecuaciones que satisfacen el principio de covariancia general. Por ejemplo, Kasevich and Chu [25] y Shimizu *et al.* [26] han observado la influencia de la aceleración gravitacional homogénea en la interferencia de haces atómicos. El efecto Sagnac para este mismo tipo de haces sobre una mesa giratoria fue medido por Rhiele *et al.* [27] y para electrones por Hasselbach and Nicklaus [28].

Una prueba de RG que usa sistemas atómicos es el experimento Hughes-Drever [29–32]. Una gran expectativa ha surgido de la interferometría atómica y molecu-

lar [33–35], donde se espera que los límites de consistencia bajen hasta 10^{-11} cm o menos, e incluso que se puedan proponer nuevas pruebas de la RG. Por ejemplo, los corrimientos de fase inducidos por curvatura y los patrones de interferencia inducidos por ellos parecen ofrecer escenarios promisorios para el estudio de la interrelación entre la MC y la RG [36].

Para explorar la relación entre los fenómenos gravitacionales y los cuánticos, este trabajo se enfoca en sistemas atómicos; de hecho un solo átomo, de hecho el más simple, el de hidrógeno e intenta una descripción del mismo usando fundamentalmente la prescripción de acople mínimo en algunos resultados conocidos de la Electrodinámica Cuántica (QED por sus siglas en inglés), sin toda la formalidad de otras investigaciones sobre QED en presencia de un espaciotiempo curvo como fondo [37]. La posibilidad de usar los números cuánticos internos de los átomos como parámetros adicionales dentro del experimento ofrece ventajas si lo comparamos con experimentos que usan partículas sin estructura cómo el fotón o el neutrón.

Desde el punto visto teórico, la descripción de átomos en un campo gravitacional no es un problema nuevo como se puede ver en los trabajos de las referencias [36, 38–43]. Dentro de la literatura de este campo, podemos distinguir dos líneas de trabajo:

- **La aproximación de un cuerpo:** en la que el átomo se considera como un electrón en movimiento en un campo de Coulomb fijo. Ese campo es producido por un centro de fuerzas fijo también, que se suele asociar con el centro de masa del átomo el cual se supone ubicado en la posición del protón. Este electrón y el campo de Coulomb interactúan con el campo gravitacional externo.
- **La aproximación de dos cuerpos:** aquí el átomo se describe por medio del protón, del electrón y de su interacción electromagnética mutua, y a todas estas componentes se les permite interactuar con el campo gravitacional externo. El único ejemplo de este tratamiento lo hemos encontrado en la ref. [43].

En estas dos líneas debemos resaltar que la componente electromagnética es tratada de manera clásica, es decir, mediante potenciales electromagnéticos que son

soluciones a las ecuaciones de Maxwell covariantes. En particular, es frecuente encontrarse con soluciones que contienen explícitamente funciones de Green electromagnéticas retardadas, lo cual contrasta con la idea de que una descripción mecánico-cuántica adecuada de las interacciones electromagnéticas debe considerar las condiciones de frontera que satisface la función de Green de Feynman.

En esta investigación usamos la aproximación de dos cuerpos y procuramos una descripción un poco más adecuada de la naturaleza cuántica de todas las componentes de un átomo de Hidrógeno, en especial de la del campo electromagnético que intercambian los fermiones. Nuestro principal punto de comparación será el trabajo presentado en la ref. [43], por lo que describiremos brevemente a continuación parte de ese trabajo.

El tema principal del trabajo de Fischbach y Freeman en la ref.[43] es el análogo gravitacional relativista del efecto Stark (RGS en su notación). Este efecto es producido por un conjunto de términos post-Newtonianos de la métrica del espaciotiempo en el Hamiltoniano de los estados ligados que ellos estudian. Las razones que motivaron la búsqueda de ese tipo de efectos fueron: en primer lugar, la escasez de experimentos sobre efectos gravitacionales en sistemas atómicos de su tiempo; el experimento más significativo era COW [22] que demostró que hay acuerdo entre las predicciones de la gravedad Newtoniana y la ecuación de Schrödinger.

En segundo lugar, ese tipo de tratamientos teóricos (Schrödinger + Newton) no permiten discriminar entre diferentes teorías de gravitacionales pues todas ellas deben tener el mismo límite Newtoniano. La diferencias entre las diferentes teorías de la gravedad deben implicar efectos gravitacionales relativistas que sobre sistemas atómicos dependerán de algún modo de los espines y/o momentos de las partículas estudiadas. Esto constituye una motivación para estudiar los efectos gravitacionales relativistas en sistemas atómicos y el átomo de Hidrógeno es un buen candidato.

Restringen su atención a teorías gravitacionales convencionales, que son deducibles de un Lagrangiano y que conservan las simetrías discretas del espaciotiempo. Finalmente se especializan en campos estáticos y esféricamente simétricos, descritos en el formalismo Post-Newtoniano Parametrizado (PPN) [44]. Ellos ven al átomo de Hidrógeno como un sistema de 2 cuerpos con electrón, protón y su interacción electromagnética mutua, todos interactuando con un campo gravitacional

externo.

Aunque Fischbach y Freeman reconocen que puede ser cierta la suposición de que el retroceso del protón (o el movimiento del centro de masa) puede ser despreciado, y por tanto válida la aproximación de un cuerpo para el átomo, argumentan que ese movimiento corresponde a un efecto relativista que corrige los resultados de más bajo orden, el cual en principio puede resultar del mismo orden que los efectos gravitacionales post-newtonianos que se quieren estudiar. Ellos estiman que ésto puede ser particularmente cierto en sistemas fermión-antifermión.

La interacción del protón y del electrón con el campo gravitacional la describen partiendo de la ecuación de Dirac covariante. Deducen un Hamiltoniano efectivo para un fermión en un campo gravitacional débil corregido hasta orden $(v/c)^2$, donde v es la velocidad del fermión. El Hamiltoniano efectivo para el fermión libre se obtiene utilizando la transformación de Foldy-Wouthuysen (F-W) para un cuerpo. La ecuación de Dirac covariante, en el límite de campo gravitacional débil conduce a un Hamiltoniano H que es hermítico en el producto interno

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int \Phi^* H \Psi \sqrt{\tilde{g}} d^3x = \langle H^\dagger \rangle, \\ \tilde{g} &\equiv \det(g_{ij}) \approx 1 + 6\phi, \end{aligned} \quad (1)$$

donde ϕ es el potencial gravitacional Newtoniano, $*$ denota el transpuesto complejo conjugado y \dagger se usa para denotar el adjunto. Para los autores resulta conveniente absorber el factor $\sqrt{\tilde{g}}$ en las funciones de onda para que el producto interno se vea como el usado en el espaciotiempo de Minkowski. Este requerimiento lo logran implementando la transformación

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &\equiv \sqrt[4]{\tilde{g}} \Psi \equiv \theta \Psi, \\ \tilde{H} &\equiv \theta H \theta^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Al Hamiltoniano \tilde{H} le aplican la transformación F-W de una partícula hasta orden $m^{-2}c^{-4} \equiv \mu^{-2}$, el Hamiltoniano resultante es llamado por ellos *Hamiltoniano efectivo de una partícula*, de donde se identifica un potencial V dado por

$$V = -\mu\phi + \frac{3}{2\mu} \left(i\hbar \vec{g} \cdot \vec{p} - c^2 \phi p^2 + \frac{\hbar}{2} \vec{g} \cdot \vec{\sigma} \times \vec{p} \right), \quad (3)$$

que resulta ser todo aquello que no es masa en reposo ni energía cinética no-

relativista. Para el caso de campo gravitacional débil, Fischbach y Freeman muestran que V puede especificarse sin ambigüedades. Esto lo hacen usando dos métodos para deducirlo; el primero es la transformación de F-W hasta orden $m^{-2}c^{-4}$ y el segundo es la matriz S covariante para la dispersión elástica de una partícula de espín 1/2 y una de espín 0 (la fuente del campo gravitacional) por medio del intercambio de un gravitón.

Los autores separan en dos los términos de V ; el primero es llamado *término newtoniano* y corresponde a $-\mu\phi$, el segundo término es el que da lugar al operador RGS. Ellos quieren hacer esta separación para diferenciar bien entre las contribuciones del término newtoniano a nivel no-relativista tanto para el movimiento del centro de masa como para el operador RGS.

Para ellos esta separación es necesaria pues ocurre que el término newtoniano que aparece en la ecuación de Dirac covariante en el límite de campo débil, cuando se aplica la transformación F-W, contribuye en términos de ordenes de aproximación diferentes; el término $[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]]$ y el término newtoniano tal cual. Los autores estiman que después de la transformación F-W el término newtoniano contribuirá solamente al movimiento del centro de masa y aquellos proporcionales a $[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]]$ inducirán las transiciones entre estados.

El campo electromagnético mutuo y su interacción con el campo gravitacional se describe por medio de las ecuaciones covariantes de Maxwell. Las soluciones a esas ecuaciones para los potenciales (solo la interacción eléctrica es presentada explícitamente) se usan para construir la energía de interacción entre las cargas. Esa energía de interacción se separa en dos términos: $H^{(em)}(e-p)$ que describe la interacción Coulombiana estandar y $H^{(ge)}(e-p)$ que describe las correcciones gravitacionales al potencial de Coulomb original. Con todo esto el Hamiltoniano del átomo de hidrógeno se puede escribir como:

$$H^{(0)}(e-p) = H(e) + H(p) + H^{(em)}(e-p) + H^{(ge)}(e-p). \quad (4)$$

Aquí $H(e)$ y $H(p)$ son esencialmente la versión F-W a orden μ^{-2} de \tilde{H} en las coordenadas respectivas del electrón y del protón y cada uno contiene al potencial V de la ecuación (3) que le corresponde.

El Hamiltoniano (4) es un Hamiltoniano de dos cuerpos para el átomo de Hidrógeno en un campo gravitacional externo. Fischbach y Freeman, usando los resulta-

dos del trabajo de Close y Osborn en la ref. [45], introducen diferentes definiciones del centro de masa a nivel relativista en el Hamiltoniano de la ecuación (4) para corregir con ello la inconsistencia en la descripción de sistemas ligados usando Hamiltonianos de una sola partícula transformados por medio de la prescripción de F-W. En las diferentes definiciones para el centro de masa, calculan los elementos de matriz de las correcciones gravitacionales al potencial de Coulomb entre estados de paridad opuesta. Con ello obtienen una correlación entre la aceleración local de la gravedad y la polarización del fotón asociado a los decaimientos electromagnéticos.

Con esta antesala de nuestro principal punto de referencia y para tener una visión más adecuada de nuestro trabajo, describimos a continuación las suposiciones básicas que usaremos durante nuestros desarrollos y que permitirán justificar las técnicas y algunos resultados que invocaremos.

1. El campo gravitacional externo es descrito por RG, de modo que la métrica satisface las ecuaciones de campo de Einstein. Adicionalmente, ignoramos todos los efectos de retro-acción gravitacional y de creación de partículas por el campo gravitacional.
2. Todas las componentes del átomo interactúan a nivel cuántico con el campo gravitacional de fondo. Por esta razón, construiremos un operador efectivo de interacción electromagnética usando principios mecánico-cuánticos, evitando tanto como sea posible el uso de potenciales puramente clásicos.
3. Cómo nuestro punto de partida es la RG, usaremos ecuaciones covariantes para describir a los fermiones libres y su interacción mutua. Esto introduce de manera directa la interacción gravitacional con el campo externo.
4. Supondremos que existe un observador ideal en caída libre, en una región libre de fuentes del campo gravitacional. Este observador usa coordenadas normales de Fermi en su descripción del átomo, así las frecuencias de transición o energías entre niveles corresponderían a los de algún detector usado por este observador y por tanto se espera que presenten corrimientos gravitacionales y Doppler, comparados con los que se obtienen habitualmente

en la aproximación de un cuerpo para el átomo de Hidrógeno. Además, estas coordenadas son particularmente sensibles a las componentes del tensor de Riemann del espaciotiempo de fondo, por lo que esperamos que los efectos que podamos encontrar sean interacciones genuinas entre los grados de libertad del sistema cuántico y los del campo gravitacional.

5. Supondremos que los tiempos en que ocurren las transiciones en el átomo y los tiempos que duran las mediciones respectivas, son muy pequeños comparados con el lapso de tiempo en que la posición del origen del sistema de coordenadas cambia apreciablemente. De modo que la curvatura del espaciotiempo, que percibe el observador no cambia de manera apreciable durante las mediciones.
6. Supondremos que el tamaño del parche coordinado de nuestro observador es tal que en su métrica y en toda descripción de los procesos físicos que se haga, es suficiente considerar solo el primer orden de las desviaciones de la métrica de Minkowski.

Nuestras aproximaciones, en particular la quinta y la sexta, pretenden ser más una restricción sobre los procesos de medición que sobre el campo gravitacional de fondo. Estas aproximaciones nos permiten introducir de manera práctica ciertas simetrías, la noción de estacionaridad por ejemplo, convenientes para nuestros procedimientos sin que ello implique que el campo gravitacional de fondo deba poseer dicha simetría.

Nuestro trabajo se orienta a resolver un problema físico que consideramos interesante para entender más la interfase entre la MC y RG; no es, ni pretende ser un trabajo sobre el marco matemático riguroso que describe los sistemas cuánticos en un espaciotiempo curvo.

El problema del átomo cuántico en un campo gravitacional externo, es un problema propuesto por Mark P. Haugan en 1979 [46], esta investigación pretende ser un paso hacia la culminación de dicha tarea. De paso podremos también sentar bases para estudios posteriores sobre la validez de principios como el de equivalencia para átomos individuales, protones, positrones e incluso para sistemas que contengan antimateria [47].

El contenido de ésta tesis está distribuido de la siguiente forma: en el capítulo 1, se presenta un resumen de las ideas necesarias para modelar, desde un sistema de

coordenadas particular, el problema del átomo hidrogenoide que gravita. En ese capítulo se menciona la Electrodinámica de fermiones de Dirac en el espaciotiempo de Minkowski prestando particular atención sobre la formulación covariante de la matriz S y el problema dispersivo entre dos fermiones interactuando todo a primer orden en la interacción. En este capítulo se muestra cómo se construye el potencial efectivo de interacción en el espaciotiempo plano. Se presentan también los requerimientos y las construcciones necesarias para extender el estudio de la electrodinámica de fermiones de Dirac al caso campos gravitacionales estacionarios de fondo.

En el capítulo 2, se extiende al caso de un espaciotiempo curvo estacionario, el método para obtener la interacción efectiva, pseudo-relativista, entre fermiones cargados que se presentó en el capítulo 1 para el espaciotiempo de Minkowski. Esta extensión se desarrolla dentro de la aproximación estática-adiabática y para un observador inercial que usa un sistema de coordenadas muy particular: las coordenadas normales de Fermi (CNF).

En el capítulo 3, se exploran algunas de las consecuencias del potencial efectivo de interacción encontrado en el capítulo 2. Allí se considera el caso particular de un observador inercial sobre una geodésica radial del espaciotiempo de Schwarzschild. Para ese observador se obtienen los términos dominantes en el Hamiltoniano de dos cuerpos que describe al átomo, se introducen coordenadas para la parte electrónica y para la posición media del átomo, además, se encuentra el límite no-relativista de dicho Hamiltoniano. Bajo la aproximación de Born-Oppenheimer se estudia el movimiento del átomo como un todo considerando solo los dos primeros niveles electrónicos del átomo de Hidrógeno. El último capítulo de ésta tesis presenta nuestras conclusiones y algunas de las perspectivas de trabajo futuro en ésta línea de investigación.

Los apéndices incluyen las convenciones que usamos en los desarrollos (apéndice A), algunos detalles sobre la construcción de la función de Green de Hadamard (apéndice B), la transformación de nuestro resultado principal a variables $(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ que son las que describen la parte electrónica y la posición media del átomo (apéndice C). El apéndice D, presenta detalles sobre las funciones de onda propias del Hamiltoniano de estructura fina, así como algunos resultados útiles para el cálculo perturbativo que presentamos en el capítulo 3. Finalmente, en el apéndice E, presentamos algunos de los pasos intermedios del cálculo del poten-

cial efectivo de interacción en presencia del campo gravitacional de fondo.

Durante la mayor parte de ésta Tesis se usan unidades en las que $\hbar = 1 = c$, sólo en algunos resultados se transforman las unidades a las del SI presentando explícitamente los factores de \hbar y de c .

Capítulo 1

Física No Gravitacional en Relatividad General

En este capítulo se presenta un resumen de las ideas necesarias para modelar, desde un sistema de coordenadas particular, el problema del átomo hidrogenoide que gravita. En el capítulo se menciona la Electrodinámica de fermiones de Dirac en el espaciotiempo de Minkowski, prestando particular atención sobre la formulación covariante de la matriz S y el problema de la dispersión entre dos fermiones interactuando, todo a primer orden en la interacción. En este capítulo se muestra cómo se construye el potencial efectivo de interacción en el espaciotiempo plano. Se presentan también los requerimientos y las construcciones necesarias para extender el estudio de la electrodinámica de fermiones de Dirac al caso de campos gravitacionales estacionarios de fondo.

1.1. La prescripción de acople mínimo gravitacional

La Relatividad General es una teoría métrica de la gravedad y lo métrico de la teoría se entiende de la siguiente manera. En primer lugar, la evidencia experimental en favor del principio de equivalencia de Einstein y de su versión restringida o débil [44], nos sugiere optar por una teoría gravitacional en la que, cuando nos ocupemos de experimentos que hablan solamente del movimiento de partículas de prueba, deduzcamos que en un sistema de coordenadas suficientemente local dichas partículas siguen trayectorias rectilíneas. Esto conduce a que la teoría debe

ser tal que describa el movimiento de partículas de prueba por medio de las geodésicas de la métrica de una variedad curvada que se suele llamar *espaciotiempo* [8].

Preferimos, no por lo plausible sino por lo verosímil, una teoría de gravedad en la que además, la influencia de la gravedad en sistemas o procesos físicos pueda introducirse localmente con una precisión arbitraria seleccionando un sistema de coordenadas adecuado [9]. En otras palabras, no sólo la física de las trayectorias de partículas de prueba, sino toda la física local en un marco en caída libre debe ser la misma que en Relatividad Especial. Localmente la gravedad no debe introducir nada nuevo; todos los efectos de gravedad se deben percibir en regiones extendidas del espaciotiempo. Matemáticamente, lo que ésto significa es, en una forma sencilla, que si tenemos una ley local de la física que se expresa en notación tensorial en relatividad especial, entonces, su forma matemática debe ser la misma en un marco local inercial de un espaciotiempo curvo. Para expresar estas leyes tensoriales de la física en cualquier sistema de coordenadas [6, 7] basta con:

1. Escribirlas en forma independiente de coordenadas, usando invariantes de Lorentz, vectores, tensores, etc.
2. Reemplazar $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$.
3. Reemplazar cualquier derivada parcial ordinaria ∂_μ por la derivada covariante ∇_μ adecuada.
4. Reemplazar $\sqrt{-\eta}d^4x$ por $\sqrt{-g}d^4x$; donde $\eta \equiv \det(\eta_{\mu\nu})$ y $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$.

Este procedimiento es lo que se conoce usualmente como el *principio de acople mínimo* y es una manera simple de generalizar las leyes de la física de la relatividad especial, de modo que no incluyan acoples directos con la curvatura sino solamente acoples con la métrica [7]. Toda teoría gravitacional en la que la materia y los campos no-gravitacionales responden solo a la métrica del espaciotiempo, se denomina *teoría métrica de la gravedad*. Relatividad General es una teoría métrica de la gravedad que solo contiene un campo gravitacional, la métrica, que se relaciona con la materia y los demás campos no-gravitacionales por medio de las ecuaciones de campo de Einstein [44].

Las secciones siguientes se dedican a presentar de manera concisa los resultados

relevantes para esta investigación sobre los sistemas electromagnéticos-cuánticos en presencia de campos gravitacionales externos.

1.2. Electrodinámica de fermiones de Dirac en relatividad especial

En el contexto de la relatividad especial, toda la dinámica de un sistema de cargas y campos electromagnéticos puede obtenerse del principio de mínima acción [48, 49]. La acción para la electrodinámica de un sistema de fermiones de Dirac cargados se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
S_{ED} &= \int_{\Omega} \left(\sqrt{-\eta} d^4x \right) \mathcal{L}_{ED} \left(\psi_{(k)}, \partial_{\mu} \psi_{(k)}, A_{\mu}, \partial_{\nu} A_{\mu} \right) \\
&= \int_{\Omega} \left(\sqrt{-\eta} d^4x \right) \sum_k \left[\bar{\psi}_{(k)} \left(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m \right)_{(k)} \psi_{(k)} \right] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&\quad - \int_{\Omega} \left(\sqrt{-\eta} d^4x \right) \sum_k \left[q_k \bar{\psi}_{(k)} \gamma^{\mu} \psi_{(k)} \right] A_{\mu},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

donde Ω es un volumen espacio-temporal que contiene los campos de la teoría, los $\psi_{(k)}$ son campos de Dirac con carga $q_{(k)}$, las γ^{μ} son las matrices de Dirac correspondientes, que satisfacen el álgebra de Clifford

$$\{ \gamma^{\mu}, \gamma^{\nu} \} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{1.2}$$

El objeto $\bar{\psi} \equiv \psi^* \gamma^0$, con ψ^* el transpuesto conjugado de ψ , es el conjugado de Dirac. Los objetos A_{μ} son los campos dinámicos de la teoría electromagnética y se relacionan con los potenciales electromagnéticos escalar (ϕ) y vectorial (\vec{A}) mediante [49, 50]

$$A^{\mu} \equiv \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right). \tag{1.3}$$

El objeto

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}, \tag{1.4}$$

es el llamado *tensor de Faraday-Maxwell*¹. Para cada espinor de Dirac la llamada *corriente de Dirac*

$$J^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.5)$$

se conserva, es decir,

$$\int_{\Omega} \left(\sqrt{-\eta} d^4x \right) \partial_\mu J^\mu = 0 \rightarrow \int_{\partial\Omega} d\Sigma_0 \left(\bar{\psi}\gamma^0\psi \right) = - \int_{\partial\Omega} d\Sigma_0 \left(\psi^*\psi \right) = \text{const.} \quad (1.6)$$

La cantidad $J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi$ es definida positiva y es usada como densidad de probabilidad. El producto interno para espinores de Dirac se define usando la ley de conservación (1.6) de la siguiente manera

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \left(\bar{\phi}\gamma^0\psi \right) = - \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \left(\phi^*\psi \right), \quad (1.7)$$

donde la integral se realiza sobre una hipersuperficie espacial Σ .

Las ecuaciones de movimiento para esta teoría de campo se obtienen del principio de acción estacionaria, considerando como campos dinámicos a los fermiones y al 4-vector A_μ . Para obtener la ecuación de movimiento de los ψ de manera sencilla se varia la acción respecto de $\bar{\psi}$, y para obtener la ecuación del campo electromagnético se varia la acción respecto de A_μ , lo cual da lugar a:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{ED}}{\delta \bar{\psi}_{(k)}} = 0 &\rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{(k)} \psi_{(k)} - (q\gamma^\mu \psi)_{(k)} A_\mu = 0 \\ \frac{\delta S_{ED}}{\delta A_\mu} = 0 &\rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} - \sum_k \left[q_k \bar{\psi}_{(k)} \gamma^\mu \psi_{(k)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos fermiónicos son simplemente ecuaciones de Dirac inhomogéneas

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{(k)} \psi_{(k)} = (q\gamma^\mu \psi)_{(k)} A_\mu. \quad (1.9)$$

Las ecuaciones para los A^α requieren un poco más de atención; las ecuaciones de

¹Se esta usando la notación estándar para las derivadas parciales en relatividad especial: $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ y $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$

movimiento para este campo son:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= J_{(T)}^\nu \equiv \sum_k \left[q_k \bar{\psi}_{(k)} \gamma^\nu \psi_{(k)} \right] \\ \partial_\mu [\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] &= J_{(T)}^\nu \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) - [\partial_\mu, \partial^\nu] A^\mu &= J_{(T)}^\nu,\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde el subíndice “(T)” se refiere a “Total”. Aprovechando que las derivadas parciales ordinarias conmutan e imponiendo la condición de norma

$$\partial_\nu A^\nu = 0,\tag{1.11}$$

se encuentra que la ecuación de movimiento para los campos A^μ puede reducirse a

$$\square A^\nu = J_{(T)}^\nu,\tag{1.12}$$

siendo

$$\square \equiv \partial_\nu \partial^\nu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2},\tag{1.13}$$

el *D’Alambertiano* en la signatura +2 de la métrica $\eta_{\mu\nu}$. Las ecuaciones en la primera línea de (1.10) implican la conservación covariante de la carga, es decir,

$$\partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu}) = 0 \rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0,\tag{1.14}$$

con $x^\mu \equiv (x^0 \equiv ct, \vec{x})$ lo cual es consistente con las propiedades de la corriente de Dirac.

Una solución para la ecuación de onda inhomogenea en (1.12), se puede escribir en términos de funciones de Green adecuadas al problema. Si proponemos que

$$A^\mu = \int_\Omega \left(\sqrt{-\eta} d^4x \right) G^\mu{}_{\nu'}(x, x') J_{(T)}^{\nu'}(x') = \sum_k A_{(k)}^\mu,\tag{1.15}$$

donde cada potencial electromagnético $A_{(k)}$ es de la forma:

$$A_{(k)}^\mu = \int_\Omega \left(\sqrt{-\eta} d^4x \right) G^\mu{}_{\nu'}(x, x') J_{(k)}^{\nu'}(x'),\tag{1.16}$$

la función de Green $G^\mu{}_{\nu'}$ debe satisfacer entonces la ecuación de onda inhomoge-

nea

$$\partial_\beta \partial^\beta G^\mu_{\nu'}(x, x') = \delta^\mu_{\nu'} \delta^4(x, x'), \quad (1.17)$$

sujeta a las condiciones de frontera, temporales y espaciales, adecuadas al problema. En el espaciotiempo de Minkowski se suelen imponer dos tipos de condiciones de frontera: las condiciones de *frontera espaciales*, que son aquellas que hablan del comportamiento de las funciones de Green en alguna región espacial concreta para cualquier instante de tiempo, habitualmente son aquellas en las que para una separación entre los puntos x y x' que tiende a infinito la función de Green tiende a cero. Adicionalmente, se imponen condiciones de *frontera temporales* que determinan la relación temporal entre las fuentes en el punto x' y los campos electromagnéticos en x . Las condiciones de frontera temporales conducen a las funciones de Green avanzada, retardada y de Feynman.

Las ecuaciones (1.9), (1.12) y (1.14), son las ecuaciones de movimiento que determinan la dinámica de una distribución de cargas y corrientes de Dirac acopladas por campos electromagnéticos, en el contexto de la relatividad especial. Estas mismas ecuaciones se pueden usar para el tratamiento del problema de la dispersión entre fermiones cargados [51], como se describe a continuación.

1.2.1. Formulación covariante de la matriz S

Usando las ecuaciones de movimiento (1.9) para los campos fermiónicos y la forma expresada en (1.15) para los potenciales A_μ podemos escribir

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{(k)} \psi_{(k)} = \sum_{k'} (q\gamma^\mu \psi)_{(k)} A_\mu^{(k')} \equiv \hat{\mathcal{V}}_{(kk')} \psi_{(k)}. \quad (1.18)$$

Si ignoramos las auto-interacciones electromagnéticas del fermion, la suma en el término de fuente se extiende sobre índices $k' \neq k$. Consideremos además que el efecto electromagnético de los demás fermiones se puede introducir de manera perturbativa, y para tener control del orden perturbativo introducimos el parámetro adimensional λ .

Proponemos una solución para ψ de la forma

$$\psi = \psi^{(0)} + \lambda \tilde{\psi}, \quad (1.19)$$

con $\psi^{(0)}$ una solución de la ecuación de Dirac libre

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi^0 = 0. \quad (1.20)$$

A primer orden en el parámetro perturbativo obtenemos la ecuación diferencial

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \tilde{\psi} = \hat{\mathcal{V}} \psi^{(0)}. \quad (1.21)$$

La solución de la ecuación (1.21) se puede escribir como

$$\tilde{\psi}(x) = \int \sqrt{-\eta} d^4 y \mathcal{S}_F(x, y) \hat{\mathcal{V}}(y) \psi^{(0)}(y), \quad (1.22)$$

donde la función de Green $\mathcal{S}_F(x, y)$ satisface la ecuación diferencial

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \mathcal{S}_F(x, y) = \delta^4(x, y) \quad (1.23)$$

y es conocida como el *propagador espinorial libre*. Las condiciones de frontera temporales para \mathcal{S}_F son aquellas de Stückelberg-Feynman, es decir, \mathcal{S}_F propaga las frecuencias positivas de un espinor de Dirac hacia el futuro y las frecuencias negativas hacia el pasado. La forma del espinor ψ a orden λ es entonces

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) + \lambda \int_{\Omega_V} \sqrt{-\eta} d^4 y \mathcal{S}_F(x, y) \hat{\mathcal{V}}(y) \psi^{(0)}(y). \quad (1.24)$$

El problema dispersivo

En la ecuación (1.24), $\psi^{(0)}$ es una solución de la ecuación libre de Dirac y el segundo término del lado derecho representa la onda dispersada a primer orden en la perturbación. Esta onda dispersada contiene solo frecuencias positivas en el futuro distante y solo frecuencias negativas en el pasado distante.

En particular, podemos estudiar la probabilidad de que un estado inicial dado ψ_i sea dispersado en varios estados finales $\psi_f^{(0)}$, para esto nos es suficiente calcular

los elementos de matriz S dados por

$$\begin{aligned}
S_{fi} &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_f^{(0)} | \psi_i \rangle \\
&= - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_t} d\Sigma_0 \left(\psi_f^{(0)} \right)^* \left[\psi_i^{(0)}(x) + \lambda \int_{\Omega_V} \left(\sqrt{-\eta} d^4 y \right) \mathcal{S}_F(x, y) \hat{\mathcal{V}}(y) \psi^{(0)}(y) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_f^{(0)} | \psi_i^{(0)} \rangle - \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega_V} \left(\sqrt{-\eta} d^4 y \right) \left[\int_{\Sigma_t} d\Sigma_0 \mathcal{S}_F(x, y) \psi_f^{(0)}(x) \right]^* \hat{\mathcal{V}}(y) \psi_i^{(0)}(y) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_f^{(0)} | \psi_i^{(0)} \rangle - \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega_V} \left(\sqrt{-\eta} d^4 y \right) \left(\psi_f^{(0)} \right)^* \hat{\mathcal{V}}(x') \psi_i^{(0)},
\end{aligned} \tag{1.25}$$

donde $\psi_f^{(0)}$ representa la onda libre con números cuánticos f que se observa al final del proceso de dispersión. La integral en (1.25) sobre la hipersuperficie Σ_t se interpreta de la siguiente manera:

$$\int_{\Sigma_t} d\Sigma_0 \mathcal{S}_F(x, y) \psi_f^{(0)}(x), \tag{1.26}$$

es la propagación libre del espinor $\psi_f^{(0)}$ desde cualquier punto de la hipersuperficie Σ_t hasta el punto y donde el espinor siente la perturbación debida a $\hat{\mathcal{V}}$. En otras palabras, esta integral selecciona justo aquellas componentes del espinor $\tilde{\psi}$ que concuerdan con las de $\psi_f^{(0)}$.

Ahora vamos a utilizar la forma explícita del potencial de interacción y a reinsertar el índice de la partícula, con ello encontramos

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle \psi_f^{(0)} | \psi_i^{(0)} \rangle_{(k)} + \lambda \sum_{k' \neq k} \int_{\Omega_V} \left(\sqrt{-\eta'} d^4 x' \right) \left(\psi_f^{(0)} \right)^*_{(k)} \left(q \gamma^0 \gamma_\mu \right)_{(k)} A_\mu^{(k')} (x') \psi_{i(k)}^{(0)} \\
&= \langle \psi_f^{(0)} | \psi_i^{(0)} \rangle_{(k)} + \lambda \sum_{k' \neq k} \int_{\Omega_V} \left(\sqrt{-\eta'} d^4 x' \right) \left(q \psi_f^{(0)*} \gamma^0 \gamma^\mu \right)_{(k)} A_\mu^{(k')} (x') \psi_{i(k)}^{(0)} \\
&= \langle \psi_f^{(0)} | \psi_i^{(0)} \rangle_{(k)} + \lambda \sum_{k' \neq k} \int_{\Omega_V} \left(\sqrt{-\eta'} d^4 x' \right) \left(q \bar{\psi}_f^{(0)} \gamma^\mu \psi_i^{(0)} \right)_{(k)} A_\mu^{(k')} (x') \\
&= \langle \psi_f^{(0)} | \psi_i^{(0)} \rangle_{(k)} + \lambda \sum_{k' \neq k} \int_{\Omega_V} \left(\sqrt{-\eta'} d^4 x' \right) J_{fi}^{\mu(k)} (x') A_\mu^{(k')} (x').
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Finalmente nos especializamos al caso de dos partículas y escribimos explícita-

mente la solución de los potenciales electromagnéticos,

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle \psi_f^{(0)} | \psi_i^{(0)} \rangle_{(1)} + \lambda \int_{\Omega_V} \left(\sqrt{-\eta'} d^4 x' \right) J_{fi}^{\mu(1)}(x') A_\mu^{(2)}(x') \\
&= \langle \psi_f^{(0)} | \psi_i^{(0)} \rangle_{(1)} \\
&+ \lambda \iint_{\Omega} \left(\sqrt{-\eta'} d^4 x' \right) \left(\sqrt{-\eta''} d^4 x'' \right) J_{fi}^{\mu(1)}(x') G_{\mu\nu''}(x', x'') (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)_{(2)}(x''),
\end{aligned} \tag{1.28}$$

o equivalentemente, podemos escribir el elemento de matriz S hasta primer orden en la perturbación como

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle \psi_f^{(0)} | \psi_i^{(0)} \rangle_{(1)} \\
&+ \lambda \iint_{\Omega} \left(\sqrt{-\eta'} d^4 x' \right) \left(\sqrt{-\eta''} d^4 x'' \right) J_{fi}^{\mu(1)}(x') G_{\mu\nu''}(x', x'') J_{(2)}^{\nu''}(x'').
\end{aligned} \tag{1.29}$$

donde las corrientes vienen dadas por

$$J_{fi}^\mu \equiv q\bar{\psi}_f^{(0)}\gamma^\mu\psi_i^{(0)} \quad \text{y} \quad J^\mu \equiv q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{1.30}$$

Parece natural, por lo que hemos visto al considerar la propagación de la partícula 1, que al considerar la propagación de los dos fermiones la corriente $J_{(2)}^\mu$ tenga la forma típica de una corriente de transición, es decir, al introducir una segunda línea fermiónica en el diagrama asociado a la ecuación (1.29), la expresión para S_{fi} conserva la forma pero la corriente de la partícula 2 cambia según $J_{(2)}^\mu \rightarrow J_{fi}^{\mu(2)}$. Así se obtiene que a primer orden en λ el elemento de matriz S para la dispersión de dos fermiones dinámicamente interactuantes es

$$\boxed{S_{fi}^{(\lambda)} = \lambda \iint_{\Omega} \left(\sqrt{-\eta'} d^4 x' \right) \left(\sqrt{-\eta''} d^4 x'' \right) J_{fi}^{\mu(1)}(x) G_{\mu\nu'}(x, x') J_{fi}^{\nu'(2)}(x').} \tag{1.31}$$

En el contexto de la relatividad especial y partiendo de la expresión (1.31) es posible obtener un potencial efectivo de interacción entre fermiones de Dirac cargados, como se encuentra en la referencia [52] y en la siguiente sección. Esperamos que partiendo de esta expresión, covariante en el sentido de la relatividad especial e implementando la prescripción de acople mínimo, podamos obtener también un potencial efectivo de interacción electromagnética entre fermiones de Dirac cargados cuando el espaciotiempo en el que se propagan es curvo.

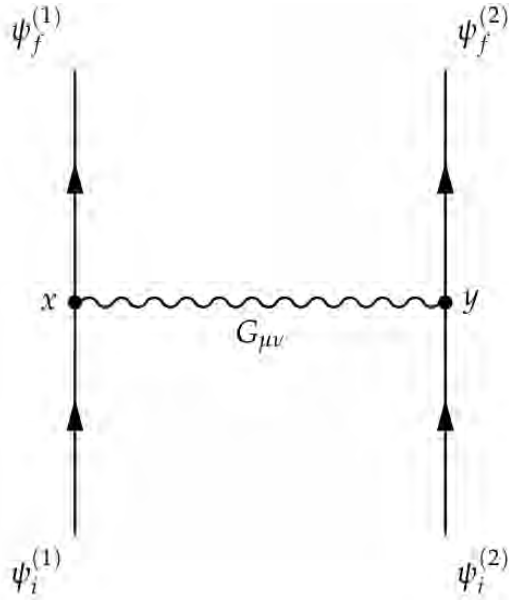


Figura 1.1: Diagrama del intercambio de un fotón que conduce al potencial efectivo de interacción $U(\mathbf{r})$.

1.3. La interacción de Coulomb-Breit en el espaciotiempo de Minkowski

En el contexto de la relatividad especial, la interacción entre 2 partículas de Dirac se describe covariantemente mediante el intercambio de fotones virtuales. Aunque esta descripción covariante es lo más exacta teóricamente, en situaciones prácticas que involucran regímenes de bajas energías, conviene intentar describir esta interacción mediante una aproximación no relativista, introduciendo un potencial efectivo U que dependa de los grados de libertad de ambas partículas [52].

Cuando interactúan fermiones cargados, se espera que el potencial efectivo de lugar al potencial de Coulomb, en un cierto límite estático, y que adicionalmente contenga correcciones relativistas dependientes de parámetros adimensionales de la forma: $\eta \equiv (v/c)$, donde v es la velocidad de alguna de las partículas.

Para calcular dicho potencial efectivo el procedimiento es el siguiente:

1. Se calcula el elemento de matriz S correspondiente al intercambio de un fotón entre los fermiones.

2. Se busca el operador hermítico U cuyo elemento de matriz entre los estados inicial y final del sistema de fermiones, sea igual al elemento de matriz S anterior.

A continuación describimos el método propuesto en la ref. [52] para obtener dicho potencial efectivo en el espaciotiempo de Minkowski, ya que posteriormente implementaremos su generalización al espaciotiempo curvo.

En la figura 1.1 tenemos el diagrama de Feynman correspondiente al intercambio de un fotón entre partículas distinguibles. Como vimos en la sección anterior, la ecuación (1.31) nos dice que a primer orden en la perturbación el elemento de matriz S asociado a ese diagrama tiene la forma:

$$S_{fi} = -i \int d^4x \int d^4y J_{fi}^{(1)} D_F(x-y) J_{fi}^{(2)}, \quad (1.32)$$

donde D_F es una función de Green para el campo electromagnético. En el tratamiento habitual de la teoría cuántica de campos esa función de Green es propagador de Feynman para el fotón. Las corrientes de transición se pueden escribir en términos de las funciones de onda espinoriales $\psi^{(n)}(x)$ propias del Hamiltoniano libre de Dirac [4, 51]:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial t} &= \hat{H}_0^{(n)} \psi^{(n)} \equiv [\vec{\alpha}_n \cdot \hat{\mathbf{p}}_n + m_n \beta_n] \psi^{(n)}, \\ &= E^{(n)} \psi^{(n)}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Estas funciones de onda se eligen ortonormales en el producto interno (1.7)

$$\langle \psi | \phi \rangle \equiv - \int \bar{\psi} \gamma^0 \phi d^3x = \int \psi^* \phi d^3x, \quad (1.34)$$

donde $*$ denota el transpuesto-complejo conjugado. En términos de estas funciones de onda y sabiendo que la corriente covariantemente conservada, presentada en la ecuación (1.5), es de la forma $J^\mu \equiv q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ donde q es la carga del fermion, se pueden escribir las corrientes de transición

$$\begin{aligned} J_{fi}^{\mu(n)}(x) &= q_n \bar{\psi}_f^{(n)}(x) \gamma^{\mu(n)} \psi_i^{(n)}(x) \\ &= q_n \left(\psi_f^{(n)*}(\mathbf{x}) e^{iE_f^{(n)} t_x} \gamma^{0(n)} \right) \gamma^{\mu(n)} \left(\psi_i^{(n)}(\mathbf{x}) e^{-iE_i^{(n)} t_x} \right) \\ &= j_{fi}^{\mu(n)}(\mathbf{x}) \exp(iw_{fi}^{(n)} t_x), \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.35)$$

En la segunda línea de la ecuación (1.35) se ha separado explícitamente la dependencia temporal, definiendo así las frecuencias de transición $w_{fi}^{(n)} \equiv E_f^{(n)} - E_i^{(n)}$, donde los $E_{i,f}^{(n)}$ son valores propios del Hamiltoniano de Dirac para la función de onda de cada partícula en el estado correspondiente.

Siguiendo el desarrollo en [52], se usan: la expresión (1.35) y la representación de Fourier del propagador del fotón en la norma de Feynman, en la ecuación (1.32) para obtener:

$$S_{fi} = -i \iiint d^4x d^4y \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-4\pi \exp[-ik \cdot (y-x)]}{k^2 + i\epsilon} \times \\ j_{fi}^{(1)}(\mathbf{x}) j_{fi}^{(2)}(\mathbf{y}) \exp\left(iw_{fi}^{(1)}t_x + iw_{fi}^{(2)}t_y\right). \quad (1.36)$$

Dado que $x = (t_x, \mathbf{x})$, $y = (t_y, \mathbf{y})$ y $k = (\omega, \mathbf{k})$ al integrar sobre t_y se obtiene

$$S_{fi} = 4\pi i \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \int dt_x \int \frac{d\omega}{2\pi} 2\pi \delta(\omega - w_{fi}^{(2)}) \exp\left[i(w_{fi}^{(1)} + \omega)t_x\right] \times \\ j_{fi}^{(1)}(\mathbf{x}) j_{fi}^{(2)}(\mathbf{y}) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp[+i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})]}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon}. \quad (1.37)$$

Después de introducir coordenadas esféricas es posible efectuar la integración sobre el momento \mathbf{k} :

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp[+i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})]}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} = \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty K^2 dK \int_{-1}^1 d(\cos \theta_k) \frac{\exp(+iKr \cos \theta_k)}{\omega^2 - K^2 + i\epsilon}, \\ = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty dK \frac{K [\exp(+iKr) - \exp(-iKr)]}{K^2 - \omega^2 - i\epsilon}, \\ = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty dK \frac{K}{K^2 - \omega^2 - i\epsilon} \exp(+iKr). \quad (1.38)$$

Los polos que nos interesan están en $K = \pm \left(\omega + i\epsilon' \frac{|\omega|}{\omega}\right)$. La integral de residuos, que debe cerrarse en el semiplano superior, encierra sólo un polo y da lugar a:

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp[+i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})]}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(+i|\omega|r)}{r}. \quad (1.39)$$

Al integrar ahora sobre ω y t_x en la expresión (1.37), el elemento de matriz S toma

la forma:

$$S_{fi} = -2\pi i \delta(w_{fi}^{(1)} + w_{fi}^{(2)}) \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} j_{fi}^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\exp(+i|w_{fi}||\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j_{fi}^{(2)}(\mathbf{y}), \quad (1.40)$$

donde w_{fi} representa igualmente a $w_{fi}^{(1)}$ o a $w_{fi}^{(2)}$ y la presencia de $\delta(w_{fi}^{(1)} + w_{fi}^{(2)})$ asegura la conservación de la energía. Aparte de eso, la magnitud de S_{fi} está determinada por un acople entre las corrientes de transición $j_{fi}^{(1)}$ y $j_{fi}^{(2)}$ mediante una *interacción dependiente de la frecuencia*.

El origen de la interacción

Para entender mejor de donde proviene esta interacción dependiente de la frecuencia, regresamos a la ecuación (1.40) y expresamos la delta de Dirac como una integral sobre una coordenada temporal de modo que

$$S_{fi} = -i \int d\mathbf{x} \int dt \exp(iw_{fi}^{(1)}t) j_{fi}^{(1)}(\mathbf{x}) \int d\mathbf{y} \frac{\exp(iw_{fi}^{(2)}t + i|w_{fi}^{(2)}||\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j_{fi}^{(2)}(\mathbf{y}). \quad (1.41)$$

Sí consideramos el proceso en que la energía es transferida de la partícula 2 a la partícula 1, entonces $w_{fi}^{(2)} < 0$ y $|w_{fi}^{(2)}| = -w_{fi}^{(2)}$, de modo que con ayuda de las ecuaciones (1.35) y (1.41) puede escribirse la ecuación (1.40) en la forma:

$$S_{fi} = -i \int d\mathbf{x} \int dt J_{fi}^{(1)}(\mathbf{x}, t) A_{fi}^{(2)}(\mathbf{x}, t), \quad (1.42)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{fi}^{(2)}(\mathbf{x}, t) &= \int d\mathbf{y} \frac{\exp[iw_{fi}^{(2)}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)]}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j_{fi}^{(2)}(\mathbf{y}), \\ &= \int d\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} J_{fi}^{(2)}(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Esto se interpreta de la siguiente forma: la ecuación (1.42) nos dice que la corriente de transición $J_{fi}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ interactúa con un campo electromagnético que fue producido por la partícula 2. La ecuación (1.43) nos dice que ese campo con el que interactúa la partícula 1, se produce por la corriente $J_{fi}^{(2)}(\mathbf{y}, t)$ en un instante anterior $t' = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Por tanto, la ecuación (1.43) es justamente *el potencial retardado*. El

factor dependiente de la frecuencia en la ecuación (1.40) contiene información del retardo debido a la velocidad de propagación finita de la interacción.

La aproximación de bajas velocidades

Para velocidades de las partículas pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, es decir para $(\eta_1, \eta_2) \ll 1$, esta justificado² reemplazar la exponencial en la expresión (1.40) por los términos de más bajo orden en su serie de Taylor³:

$$\frac{\exp\left(i|w_{fi}|\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + i\left(\frac{|w_{fi}|}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{|w_{fi}|}{c}\right)^2 |\mathbf{x}-\mathbf{y}|. \quad (1.44)$$

El elemento de matriz S aproximado toma la forma:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -2\pi i \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} q_1 \bar{\psi}_f^{(1)} \gamma_\mu^{(1)} \psi_i^{(1)} \eta^{\mu\nu} \frac{\exp(i|w_{fi}||\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} q_2 \bar{\psi}_f^{(2)} \gamma_\nu^{(2)} \psi_i^{(2)}, \\ &= -2\pi i \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} q_1 q_2 \psi_f^{(1)*} \psi_f^{(2)*} \gamma_0^{(1)} \gamma_\mu^{(1)} \eta^{\mu\nu} \gamma_0^{(2)} \gamma_\nu^{(2)} \frac{\exp(i|w_{fi}||\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \psi_i^{(1)} \psi_i^{(2)}, \\ &\approx -2\pi i \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} q_1 q_2 \psi_f^{(1)*} \psi_f^{(2)*} (\mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2 - \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2) \frac{\exp(i|w_{fi}||\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \psi_i^{(1)} \psi_i^{(2)}, \\ &\equiv -2\pi i \iint d\mathbf{x} d\mathbf{y} q_1 q_2 \psi_f^{(1)*} \psi_f^{(2)*} U(|w_{fi}|, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \psi_i^{(1)} \psi_i^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

lo cual se sigue de la identidad

$$\begin{aligned} &(\mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2 - \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2) \left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + i\left(\frac{|w_{fi}|}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{|w_{fi}|}{c}\right)^2 |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \right], \\ &\approx \left(\frac{\mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + i\frac{|w_{fi}|}{c} \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2 - \frac{\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \frac{|w_{fi}|^2}{2c^2} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2 \right) \equiv U(|w_{fi}|, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|), \end{aligned} \quad (1.46)$$

²Nótese que la cantidad $|w_{fi}|\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}$, es adimensional y produce correcciones de potencias de $1/c$ en el desarrollo.

³Durante lo que queda de esta sección sólo se escriben explícitamente todas las potencias de la velocidad de la luz c y se omite la delta de conservación de la energía.

que es una aproximación hasta orden $\frac{v_1 v_2}{c^2}$. Esto último es cierto porque $c\vec{\alpha}$ es el operador velocidad en la teoría de Dirac. Para verificarlo basta con calcular el operador velocidad:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}} &= i [\hat{H}, \mathbf{x}] + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \\
&= i [\vec{\alpha} \cdot (c\hat{\mathbf{p}}) + mc^2\beta, \mathbf{x}], \\
&= i\vec{\alpha} \cdot [(c\hat{\mathbf{p}}), \mathbf{x}] = \vec{\alpha}c,
\end{aligned} \tag{1.47}$$

de modo que podemos estimar el orden de magnitud de cada $\vec{\alpha}$ como η y así, el término proporcional a $\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2$ resulta de orden $\eta_1 \eta_2 \sim c^{-2}$. El término de orden c^{-1} de la expresión (1.46) no contribuye al potencial efectivo dada la ortogonalidad de las funciones de onda $\psi_i^{(n)}$ y $\psi_f^{(n)}$. Por esto, el orden más bajo de las correcciones relativistas es c^{-2} . El término de corrección que sobrevive en la ecuación (1.46) resulta no tener una forma conveniente para definir un potencial efectivo, *ya que contiene a w_{fi} y depende por tanto de los estados inicial y final.*

Aquí se toma ventaja del hecho siguiente: dado que las funciones de onda son estados propios estacionarios del Hamiltoniano, se puede reemplazar cada energía en w_{fi} por el Hamiltoniano correspondiente, si uno se asegura de que cada operador actúe directamente sobre la función de onda adecuada, de modo que se pueda reproducir el respectivo valor propio. Por efecto de la conservación de la energía, representada en la delta de Dirac en la expresión (1.40), se cumple que $w_{fi}^{(1)} = -w_{fi}^{(2)}$ y se puede encontrar [52] que

$$\begin{aligned}
-w_{fi}^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= (E_f^{(1)} - E_i^{(1)}) (E_f^{(2)} - E_i^{(2)}) |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \\
&= |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \hat{H}^{(1)} \hat{H}^{(2)} - \hat{H}^{(1)} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \hat{H}^{(2)} - \hat{H}^{(2)} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \hat{H}^{(1)} + \hat{H}^{(1)} \hat{H}^{(2)} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \\
&= \left[\hat{H}^{(1)}, \left[\hat{H}^{(2)}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right] \right],
\end{aligned} \tag{1.48}$$

igualdad que es válida cuando se calcula el elemento de matriz entre los estados inicial y final. Los Hamiltonianos de la ecuación (1.48) son de la forma $\hat{H}^{(n)} =$

$\hat{H}_0^{(n)}$. Usando $[\hat{\mathbf{p}}, f(\mathbf{x})] = -i\nabla f(\mathbf{x})$ se obtiene directamente:

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}^{(1)}, \left[\hat{H}^{(2)}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right] \right] &= c^2 (-i\vec{\alpha}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \left[(-i\vec{\alpha}_2) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right], \\ &= c^2 \left[\frac{\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{\vec{\alpha}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \vec{\alpha}_2 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Combinando los resultados de las ecuaciones (1.49) y (1.45) se llega finalmente a que:

$$\begin{aligned} S_{fi} &\approx \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} q_1 q_2 \psi_f^{(1)*} \psi_f^{(2)*} \left[\frac{\mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2 + (\vec{\alpha}_1 \cdot \mathbf{n})(\vec{\alpha}_2 \cdot \mathbf{n})}{2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] \psi_i^{(1)} \psi_i^{(2)}, \\ &\equiv \langle \psi_f^{(1)} \otimes \psi_f^{(2)} | U(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) | \psi_i^{(1)} \otimes \psi_i^{(2)} \rangle, \end{aligned} \quad (1.50)$$

siendo \mathbf{n} el vector unitario en la direcci3n de $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, usando la hermiticidad de las matrices $\vec{\alpha}$ en el producto interno de la expresi3n (1.7) y omitiendo el t3rmino proporcional a la delta de Dirac de la conservaci3n de energ3a. La ecuaci3n (1.50) puede ser interpretada de tal manera que se entiende que las part3culas se dispersan entre s3 debido a una *interacci3n efectiva, pseudo-relativista, retardada* U dada por

$$U = \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{q_1 q_2}{2} \frac{\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2 + (\vec{\alpha}_1 \cdot \mathbf{n})(\vec{\alpha}_2 \cdot \mathbf{n})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \equiv U_C + U_B. \quad (1.51)$$

Como se esperaba, el primer t3rmino U_C es el potencial de Coulomb entre las part3culas. Adicionalmente se obtiene el t3rmino de correcci3n U_B , cuadr3tico en las velocidades y que es conocido como la *interacci3n de Breit*⁴ [54, 55]. Si uno efectúa una aproximaci3n no-relativista tambi3n sobre las funciones de onda $\psi_{i,f}^{(n)}$, la interacci3n en la expresi3n (1.51) puede reducirse a una suma de contribuciones en las que se pueden identificar interacciones del tipo esp3n-3rbita y esp3n-esp3n. *La aproximaci3n de Breit es muy 3til en el c3lculo de corrimientos de energ3a en sistemas de muchas part3culas y el positronio*⁵. Sin embargo, siempre debe tenerse en cuenta que la ecuaci3n (1.51) es s3lo una aproximaci3n, su uso est3 estrictamente justificado s3lo en teor3a de perturbaciones [56, 57].

⁴Es interesante notar que la ecuaci3n (1.51) coincide con la interacci3n retardada de dos part3culas cl3sicas si uno invoca el llamado *principio de correspondencia* [53], reemplazando $c\vec{\alpha}_n \rightarrow \mathbf{v}_n$.

⁵En cuyo caso hay que considerar tambi3n el diagrama de aniquilaci3n de pares virtuales.

1.4. Electrodinámica de fermiones de Dirac en un espaciotiempo curvo

En RG la materia ejerce su influencia gravitacional curvando el espaciotiempo y por eso se estudia la propagación de partículas y ondas sobre este fondo curvo. La métrica se trata como un campo externo no cuantizado y los métodos utilizados en el de espaciotiempo de Minkowski se trasladan tanto como sea posible [58].

Entidades locales, tales como las ecuaciones de movimiento son en gran parte determinadas por el principio de covariancia general y el principio de equivalencia. [58–60]. Usualmente, se supone que el espaciotiempo tiene una estructura causal bien definida y un conjunto de hipersuperficies de Cauchy [8]. La dinámica se deduce de una acción S y la acción se construye de forma tal que sea invariante ante transformaciones generales de coordenadas (difeomorfismos). La forma más sencilla de construir una acción de éste tipo es la prescripción de acople mínimo.

El requerimiento de que las variaciones de la acción respecto de los campos dinámico, se anule en la región de integración conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange que dan lugar a las ecuaciones de movimiento de los campos y la covariancia general de la acción garantiza la covariancia general de las ecuaciones de movimiento.

Análogamente a lo que ocurre en el espaciotiempo plano, las *isometrías* del espaciotiempo suelen implicar una ley de conservación. Las isometrías son generadas infinitesimalmente por vectores de *Killing* [58, 61] del espaciotiempo y la invariancia de la acción ante estas transformaciones conduce a la ecuación de conservación

$$\nabla_{\mu} (T^{\mu\nu} \xi_{\nu}) = 0, \quad (1.52)$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento, asociado al sistema descrito con la acción S y ξ_{ν} es un vector de Killing del espaciotiempo. Esta ley de conservación puede expresarse como la constancia de

$$P_{\xi} \equiv \int T^0_{\nu} \xi^{\nu} \sqrt{-g} d^3x. \quad (1.53)$$

En el caso en que las coordenadas son tales que $g_{\mu\nu}(x)$ es independiente de una coordenada particular, por ejemplo x^{τ} , entonces $\xi^{\nu} = \delta^{\nu}_{\tau}$ es un campo vectorial

de Killing y la ecuación (1.53) se reduce a que

$$P_\tau \equiv \int T^0_\tau \sqrt{-g} d^3x, \quad (1.54)$$

es un 4-momento conservado asociado al sistema. De aquí se puede apreciar que nociones como las de conservación de energía, de momento lineal o angular, en una teoría de campos inmersos en un espaciotiempo curvo, dependen fundamentalmente de las simetrías del espaciotiempo mismo.

Para nuestra construcción resulta importante la noción de energía conservada, particularmente para sustentar la idea de los niveles atómicos de energía bien definidos, esto nos lleva a buscar un vector de Killing tipo tiempo en nuestro espaciotiempo. Esta isometría temporal que induce la noción de estacionaridad no debe ser necesariamente exacta, es decir, no hace falta que se tenga un campo vectorial de Killing definido en todo el espaciotiempo, sino que puede ser suficiente contar con un vector tipo tiempo que en la región de eventos de interés sea de Killing, de modo que la métrica en esa región particular se pueda considerar independiente del tiempo en las coordenadas adecuadas [61].

En este trabajo, esta noción aproximada la logramos suponiendo que la duración de todos los procesos, que da lugar a las transiciones atómicas observadas, o que los procesos de medición son suficientemente cortos, comparados con el tiempo necesario para que nuestro observador detecte cambios en la curvatura del espaciotiempo en su sistema de coordenados.

Cuando se estudian los fermiones de Dirac en el espaciotiempo de Minkowski, los resultados más relevantes provienen de una teoría donde los fermiones son interactuantes. Cuando el espaciotiempo está curvado lo mismo ha de esperarse aunque en este caso los fermiones libres presentan interacciones con el fondo. El estudio de estos acoplamientos entre los fermiones libres y el fondo curvo ha dado lugar a nuevas propuestas para test cuánticos de la gravedad [62].

El tratamiento habitual de fermiones interactuantes en fondos curvos es similar al de Minkowski. Se consideran primero los fermiones libres, sólo interactuando con la métrica, y posteriormente mediante una aproximación perturbativa, uno espera poder describir las interacciones usando conjuntos de fermiones libres, que aparecen en instantes muy anteriores y emergen en instantes muy posteriores al de la interacción. Esto evoca la noción de matriz de dispersión que se puede definir

[61, 63] bajo la suposición de estacionaridad de la métrica, lo cual permite extender la noción Minkowskiana de matriz de dispersión presentada en las ecuaciones (1.27) y (1.29) vía la prescripción de acople mínimo.

A continuación describimos las generalizaciones necesarias para estudiar la dinámica de fermiones de Dirac cargados en un espaciotiempo curvo, partiendo de una acción covariante y siguiendo el procedimiento presentado para el caso de Minkowski.

1.4.1. Ecuaciones de movimiento en un espaciotiempo curvo

Partiendo de la acción (1.1), podemos escribir la acción de un campo gravitacional externo sobre un sistema de fermiones de Dirac cargados mediante la acción

$$\begin{aligned}
S_{ED} &= \int_{\Omega} \left(\sqrt{-g} d^4x \right) \mathcal{L}_{ED} \left(\Psi_{(k)}, \hat{\nabla}_{\mu} \Psi_{(k)}, A_{\mu}, \nabla_{\nu} A_{\mu} \right) \\
&= \int_{\Omega} \left(\sqrt{-g} d^4x \right) \sum_k \left[\bar{\Psi}_{(k)} \left(i\gamma^{\mu}(x) \hat{\nabla}_{\mu} - m \right)_{(k)} \Psi_{(k)} \right] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&\quad - \int_{\Omega} \left(\sqrt{-g} d^4x \right) \sum_k \left[q_k \bar{\Psi}_{(k)} \gamma^{\mu}(x) \Psi_{(k)} \right] A_{\mu},
\end{aligned} \tag{1.55}$$

donde ahora las matrices γ^{μ} dependen de x y las derivadas ∇ y $\hat{\nabla}$ son derivadas covariantes gravitacionales para un vector y para un espinor, respectivamente. Los Ψ siguen siendo campos fermionicos con carga q y los A_{μ} campos vectoriales asociados a la interacción electromagnética. En el caso electromagnético, el tensor de Faraday-Maxwell es ahora de la forma

$$F^{\mu\nu} = \nabla^{\mu} A^{\nu} - \nabla^{\nu} A^{\mu}. \tag{1.56}$$

Al variar la acción (1.55) respecto de los campos $\bar{\Psi}$ y A^{μ} se encuentran las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_{ED}}{\delta \bar{\Psi}_{(k)}} &= 0 \rightarrow \left(i\gamma^{\mu} \hat{\nabla}_{\mu} - m \right)_{(k)} \Psi_{(k)} - \left(q\gamma^{\mu}(x) \Psi \right)_{(k)} A_{\mu} = 0 \\
\frac{\delta S_{ED}}{\delta A_{\mu}} &= 0 \rightarrow \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} - \sum_k \left[q_k \bar{\Psi}_{(k)} \gamma^{\mu}(x) \Psi_{(k)} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Cada una de estas ecuaciones merece ser estudiada con cierto detalle para entender mejor las diferencias entre el tratamiento en un espaciotiempo curvo y el de

Minkowski.

1.4.2. Campos de Dirac libres en un espaciotiempo curvo

En un espaciotiempo curvo se puede construir la teoría de campos de Dirac libres Ψ [42]. En primer lugar, se introducen matrices de Dirac locales $\gamma^\nu(x)$ que satisfacen una versión local álgebra de Clifford que satisfacen las matrices $\gamma^{\bar{\mu}}$ en el espaciotiempo de Minkowski. El álgebra local

$$\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} = 2g^{\mu\nu}(x), \quad (1.58)$$

se puede entender como una generalización, vía la prescripción de acople mínimo del álgebra:

$$\{\gamma^{\bar{\mu}}, \gamma^{\bar{\nu}}\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (1.59)$$

Una elección conveniente de las matrices gamma locales es

$$\gamma^\mu(x) \equiv e^\mu_{\bar{\rho}}(x) \gamma^{\bar{\rho}}, \quad (1.60)$$

siendo $e^\mu_{\bar{\rho}}(x)$ una tétrada para el espaciotiempo. La dinámica de los campos libres Ψ se obtiene de las soluciones a la ecuación de Dirac generalizada que aparece en la primera línea de (1.57), es decir

$$\{i\gamma^\mu(x) [\nabla_\mu - \Gamma_\mu(x)] - m\} \Psi = 0, \quad (1.61)$$

donde $\Gamma_\mu(x)$ es la conexión de espín que se define como

$$\Gamma_\mu(x) \equiv -\frac{1}{4} \gamma_{\bar{\alpha}} \gamma_{\bar{\beta}} e^{\bar{\alpha}\nu}(x) [\nabla_\mu e^{\bar{\beta}}_\nu(x)], \quad (1.62)$$

en términos de la tétrada $e^\mu_{\bar{\rho}}$ y la derivada covariante ∇_μ actuando sobre un vector [36].

Volviendo a la ecuación de Dirac, de la expresión (1.61), es importante notar que dicha ecuación se puede escribir *a la Schrödinger* de modo que los espinores de interés son solución a

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \equiv \hat{\mathcal{H}}_0 \Psi(x) = \left[\frac{1}{g^{00}} \left(\gamma^0 \gamma^k \hat{p}_k + i \gamma^0 \gamma^\mu \Gamma_\mu - im \gamma^0 \right) \right] \Psi(x). \quad (1.63)$$

La expresión (1.63) permite asociar el operador $\hat{\mathcal{H}}_0$ con el generador de la evolución temporal de los campos. El operador $\hat{\mathcal{H}}_0$, en un espaciotiempo estacionario, también se puede considerar el Hamiltoniano del sistema pues es hermítico y corresponde a la componente *cero-cero* de algún tensor de energía-momento que se conserva, como se muestra en la ref. [64].

Para la ecuación de Dirac (1.61) el producto escalar conservado es:

$$\langle \phi, \psi \rangle = - \int \phi^* \sqrt{-g} \gamma^0 \psi d^3x \equiv \int \phi^* \mathbf{M}(x) \psi d^3x. \quad (1.64)$$

Es importante no perder de vista que ahora las propiedades de hermiticidad, unitaridad y los elementos de matriz se han de evaluar respecto al producto interno de la ecuación (1.64), usando la métrica que nos interesa. En este producto interno se pueden encontrar las condiciones bajo las que el operador $\hat{\mathcal{H}}_0$ es hermítico. Para ello se calcula:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{H}}_0 \psi, \psi \rangle - \langle \psi, \hat{\mathcal{H}}_0 \psi \rangle &= \\ &= - \int \left[(\hat{\mathcal{H}}_0 \psi)^* \gamma^0 \gamma^0(x) \psi - \psi^* \gamma^0 \gamma^0(x) (\hat{\mathcal{H}}_0 \psi) \right] \sqrt{-g} d^3x, \\ &= - \int \left[(i\partial_0 \psi)^* \gamma^0 \gamma^0(x) \psi - \psi^* \gamma^0 \gamma^0(x) (i\partial_0 \psi) \right] \sqrt{-g} d^3x, \\ &= i \int \left[\partial_0 \left(\sqrt{-g} \psi^* \gamma^0 \gamma^0(x) \psi \right) - \psi^* \partial_0 \left(\sqrt{-g} \gamma^0 \gamma^0(x) \psi \right) \right] d^3x, \\ &= -i\partial_0 \langle \psi, \psi \rangle - i\hbar \int \psi^* \partial_0 \left(\gamma^0(x) \sqrt{-g} \right) \psi, \\ &= -i \int \psi^* \frac{\partial}{\partial x^0} \left[\gamma^0(x) \sqrt{-g} \right] \psi d^3x, \end{aligned} \quad (1.65)$$

usando la conservación del producto escalar en el tiempo del observador. Se puede ver que $\hat{\mathcal{H}}_0$ en general no es hermítico a menos que

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left[\gamma^0(x) \sqrt{-g} \right] = 0, \quad (1.66)$$

lo cual se cumple en general cuando la métrica del espaciotiempo no depende de la coordenada temporal del observador [42, 64]. Esto último es posible cuando el espaciotiempo posee un vector de Killing tipo tiempo o cuando en la región de eventos de interés uno puede construir vectores de Killing tipo tiempo aproximados.

1.4.3. Electrodinámica en un espaciotiempo curvo

Para introducir la electrodinámica en el contexto de la relatividad general, acudimos a la prescripción de acople mínimo. Partimos de las ecuaciones para $F^{\mu\nu}$ en (1.10) y de la definición en la expresión (1.4) [6]. En ellas usamos la prescripción y obtenemos

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu \quad \text{donde} \quad F^{\mu\nu} = \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu, \quad (1.67)$$

las cuales equivalen al sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\Delta A^\alpha - \nabla^\alpha (\nabla_\beta A^\beta) - \mathcal{R}^\alpha{}_\beta A^\beta = J^\alpha, \quad (1.68)$$

donde se usa $\Delta \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$. La invariancia de norma de las ecuaciones (1.67) se aprovecha para redefinir los campos dinámicos como aquellos que satisfagan

$$\nabla_\beta A^\beta = 0, \quad (1.69)$$

que generaliza la condición de Lorentz (1.11). Para estos campos las ecuaciones de movimiento son:

$$\Delta A^\alpha - \mathcal{R}^\alpha{}_\beta A^\beta = J^\alpha, \quad \text{junto con} \quad \nabla_\beta A^\beta = 0, \quad (1.70)$$

las cuales son la generalización correcta de las ecuaciones (1.12), pues garantizan el cumplimiento de la ecuación de continuidad $\nabla_\mu J^\mu = 0$, que generaliza la expresión (1.14). La presencia del término de curvatura en la ecuación (1.70) es debida a la no-conmutatividad de las derivadas covariantes y es necesaria para garantizar la conservación covariante de la carga [8].

La función de Green de Feynman en un espaciotiempo curvo

En el caso de un espaciotiempo curvo las corrientes son evaluadas en puntos distintos, como en el caso del espaciotiempo de Minkowski, pero ahora esto impacta en la elección de la función de Green que conecta dichos puntos. Particularmente importa, la elección de una noción de transporte que conecte los puntos de interés. En el trabajo que se presenta aquí se ha elegido la forma de Hadamard de la función de Green de Feynman; esto porque esta función de Green tiene una forma análoga a la del espaciotiempo de Minkowsky, su forma bitensorial nos permite

hablar de ella como propagador sin recurrir a la noción de valores de expectación en el vacío de campos que NO cuantizamos y adicionalmente esperamos que el carácter tensorial de esta función de Green nos permita extender nuestros resultados a otros sistemas coordenados o a otro tipo de espaciotiempo diferentes a los tratados en este trabajo.

Cuando se estudian interacciones entre fermiones en el espaciotiempo de Minkowski, la covariancia y la causalidad determinan que es la función de Green de Feynman para el campo mediador de la interacción, la que se debe usar al calcular elementos de matriz S como el de la ecuación (1.31) que corresponde al proceso que nos interesa.

Cuando pasamos al espaciotiempo curvo debemos elegir una extensión adecuada de esa función de Green. La función de Green de Feynman para el campo electromagnético que se propaga en un espaciotiempo curvo satisface la ecuación de onda:

$$\Delta G_{\alpha\beta'}(x, x') - \mathcal{R}_\alpha^\gamma G_{\gamma\beta'}(x, x') = -4\pi\kappa_{\alpha\beta'}(x, x') \delta_4(x, x'), \quad (1.71)$$

qué proviene de la expresión (1.70), donde

$$\kappa_{\alpha\beta'}(x, x') \equiv \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} e_{\alpha}^{\bar{\mu}}(x) e_{\beta'}^{\bar{\nu}}(x') \quad (1.72)$$

es el *propagador paralelo* y $e_{\alpha}^{\bar{\mu}}$ es una tétrada que se transporta paralelamente desde el punto x hasta el punto x' . En la ecuación (1.71) aparece la distribución *delta de Dirac invariante*

$$\begin{aligned} \delta_4(y, y') &\equiv \sqrt{-g(y)} \delta^{(4)}(y - y') = \sqrt{-g(y')} \delta^{(4)}(y - y'), \\ &= \sqrt[4]{g(y)g(y')} \delta^{(4)}(y - y'), \end{aligned} \quad (1.73)$$

siendo $\delta^{(4)}(y - y')$ la distribución delta de Dirac 4-dimensional ordinaria y las identidades son válidas distribucionalmente. La presencia del propagador paralelo en la expresión (1.71), nos habla ya de la noción de transporte que adoptaremos para nuestra función de Green, el transporte paralelo. La función de Green de Feynmann en su forma de Hadamard [59] está dada por

$$G_{\alpha\beta'}(x, x') = \frac{U_{\alpha\beta'}(x, x')}{\sigma(x, x') + i\epsilon} + V_{\alpha\beta'}(x, x') \ln[\sigma(x, x') + i\epsilon] + W_{\alpha\beta'}(x, x'), \quad (1.74)$$

donde $\sigma(x, x')$ es la función de Synge, la cuál a su vez es un medio del cuadrado de la distancia geodésica entre los puntos x y x' , $U_{\alpha\beta'}$, $V_{\alpha\beta'}$ y $W_{\alpha\beta'}$ son bitensores por determinar⁶. Es sabido que $U_{\alpha\beta'}$ se escribe en términos del propagador paralelo y el determinante de VanVleck-Pauli-Morette. El bitensor $W_{\alpha\beta'}$ se determina con las condiciones de frontera que se impongan sobre $G_{\alpha\beta'}$ y satisface la ecuación homogénea.

Se verifica que el tensor $V_{\alpha\beta'}$ es de primer orden en la curvatura. Uno puede suponer que es la curvatura quien dota a la función de Green de soporte dentro del cono de luz pasado del punto de observación, esto porque esperamos que la función de Green de Feynmann (1.74) tome la forma de la función de Green de Feynmann en el espaciotiempo de Minkowski

$$G_{\alpha\beta}^{(F)}(x, x') = \frac{\eta_{\alpha\beta}}{\eta_{\mu\nu}(x-x')^\mu(x-x')^\nu + i\epsilon'} \quad (1.75)$$

cuando $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$. Se debe mencionar que en el espaciotiempo de Minkowski se puede dar soporte a la función de Green en (1.75) dentro del cono de luz siempre que los fotones se consideren masivos. En dicho caso el término logarítmico resulta proporcional a la masa del fotón. Salvo este efecto de la masa de los fotones, que no es considerado en este trabajo, esperamos que al menos para el régimen de pequeñas desviaciones de Minkowski la principal diferencia en la electrodinámica en un espaciotiempo curvo la haga la curvatura del espaciotiempo. Lo que queda es decir qué objeto relacionado con la curvatura es el que debería considerarse. En el régimen de pequeñas desviaciones de la métrica plana no esperamos distinciones entre los índices del objeto $V_{\alpha\beta'}$, es decir, esperamos que sea un tensor con sus índices referidos al mismo punto del espaciotiempo, si además ese objeto debe dar información sobre la curvatura del espaciotiempo, esperamos y verificamos (ver apéndice B) que en general sea proporcional al tensor de Einstein. Otras opciones o bien son de orden superior al primero en la curvatura o bien incluyen directamente al tensor de Riemann rompiendo de entrada la metricidad de la teoría.

En este trabajo, se consideran observaciones fuera de las fuentes del campo gravitacional; así, en la práctica impondremos las ecuaciones de campo de Einstein

⁶En el apéndice B, se muestra el conjunto de ecuaciones que satisfacen estos bitensores y se desarrolla el cálculo explícito de una solución hasta primer orden en la curvatura para la métrica del observador que usa CNF.

para el vacío, implicando con ello que $R_{\mu\nu} = 0$ pero con $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \neq 0$, pues buscamos efectos debidos a grados de libertad puramente gravitacionales. Así, dado que nos encontramos en regiones que no contienen a las fuentes del campo gravitacional, esperamos que el tensor de Einstein se anule y con ello que se anule también el término que da soporte a la función de Green dentro del cono de luz. Este análisis *a posteriori* sobre la forma de la función de Green de Feynman, proviene de los resultados obtenidos en el apéndice B.

La condición de norma en la función de Green

Cuando el tensor de Ricci del espaciotiempo es nulo se espera, por analogía con el espaciotiempo de Minkowski, que nuestra $G_{\alpha\beta'}(x, x')$ se pueda seguir expresando como una combinación lineal de las funciones de Green electromagnéticas avanzada $G_{\alpha\beta'}^{(+)}(x, x')$ y retardada $G_{\alpha\beta'}^{(-)}(x, x')$, correspondientes al espaciotiempo considerado. Las funciones de Green $G_{\alpha\beta'}^{(\pm)}(x, x')$ en un espaciotiempo con $R_{\alpha\beta} = 0$, satisfacen las identidades [65]:

$$\nabla_\alpha G^{(\pm)\alpha}{}_{\beta'}(x, x') = -\nabla_{\beta'} G^{(\pm)}(x, x'), \quad (1.76)$$

donde $G^{(\pm)}(x, x')$ son las funciones de Green escalares avanzada y retardada que, en general, satisfacen la ecuación de onda generalizada

$$(\Delta - \zeta R) G^{(\pm)}(x, x') = -4\pi\delta_4(x, x'), \quad (1.77)$$

donde R es el escalar de Ricci y ζ una constante de acoplamiento entre el campo escalar que se propaga con la función de Green G y el escalar de Ricci. Ahora podemos verificar que la condición plasmada en la ecuación (1.76) es suficiente

para que los campos dinámicos se encuentren en la norma de Lorentz:

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha A^\alpha(x) &= \int \left[\nabla_\alpha G^{\alpha}_{\beta'}(x, x') \right] j^{\beta'}(x') \sqrt{-g'} d^4 x' \\
&= \int \left[-\partial_{\beta'} G(x, x') \right] j^{\beta'}(x') \sqrt{-g'} d^4 x' \\
&= - \int \left\{ \partial_{\beta'} \left[G(x, x') j^{\beta'}(x') \sqrt{-g'} \right] - G(x, x') \partial_{\beta'} \left[j^{\beta'}(x') \sqrt{-g'} \right] \right\} d^4 x' \\
&\equiv - \int \left\{ \partial_{\beta'} \left[H^{\beta'}(x') \sqrt{-g'} \right] - G(x, x') \underbrace{\left[\nabla_{\beta'} j^{\beta'}(x') \right]}_{\equiv 0} \sqrt{-g'} \right\} d^4 x' \\
&= 0 - \oint_{\Sigma} H^{\beta'}(x') d\Sigma_{\beta'}.
\end{aligned} \tag{1.78}$$

De esta forma, cualquier campo escrito como

$$A^\alpha(x) \equiv \int G^{\alpha}_{\beta'}(x, x') j^{\beta'}(x') \sqrt{-g'} d^4 x', \tag{1.79}$$

se encuentra en la norma de Lorentz, hasta términos de frontera, siempre que la función de Green cumpla con

$$\nabla_\alpha G^{\alpha}_{\beta'}(x, x') + \partial_{\beta'} G(x, x') \equiv \nabla_\alpha G^{\alpha}_{\beta'}(x, x') + \nabla_{\beta'} G(x, x') = 0. \tag{1.80}$$

Estamos interesados en soluciones $G^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$ que satisfagan esta condición, con una función de Green escalar que tenga también la forma de Hadamard

$$G(x, x') = \frac{U(x, x')}{\sigma(x, x') + i\epsilon} + V(x, x') \ln[\sigma(x, x') + i\epsilon] + W(x, x'), \tag{1.81}$$

con $U(x, x')$, $V(x, x')$ y $W(x, x')$ funciones escalares suaves de los puntos x y x' .

1.5. El límite no-relativista

La representación de Foldy-Wouthuysen (F-W) ocupa un lugar especial en la teoría cuántica. Esto debido principalmente a que el Hamiltoniano y todos los operadores son diagonales por bloques para los espinores de Dirac. Para las partículas relativistas en campos externos, los operadores tienen la misma forma que en la

teoría cuántica no-relativista. Por lo tanto la representación F-W en la teoría cuántica relativista es similar a la teoría cuántica no-relativista [4, 66].

La transformación a la representación F-W es válida incluso para partículas ultra-relativista, si el campo externo es tan débil, que la probabilidad de que la producción de pares o pérdidas por *bremstrahlung* pueden ser ignoradas para una energía de interacción de una partícula dada [67].

El rango de aplicabilidad de esta descripción es bastante amplio e incluye, en particular, la dispersión relativista de partículas y la interacción de partículas relativistas con la materia y campos externos [67]. Aunque nosotros consideramos la mayor parte del tiempo al átomo como un sistema de dos cuerpos, en las aplicaciones prácticas es razonable reducir las ecuaciones de 4×4 componentes a aquellas que son dominantes en el límite no-relativista. Se espera que ésto además proporcione claridad en la interpretación física de los resultados [52, 66].

En presencia de campos externos, aparecen términos de acoplamiento que mezclan las componentes de energía positiva y negativa del espinor de Dirac. A estos términos se les llama *impares* y típicamente contienen matrices $\vec{\alpha}$. En el caso de los campos externos débiles, la importancia de los términos impares se pueden reducir sistemáticamente y de manera recursiva. La transformación F-W puede verse como una aproximación a la solución exacta, que se mejora en cada paso la aproximación.

La transformación F-W fue generalizada al caso de 2 partículas por Chaplyvy en la Ref.[68]. Aquí, solo se presentan las expresiones que resultan útiles para el desarrollo de éste trabajo. Partimos de un Hamiltonian relativista de 2 cuerpos, separado de la siguiente forma:

$$\hat{H} = \beta_{(1)}m_1c^2 + \beta_{(2)}m_2c^2 + \mathcal{O}\mathcal{E} + \mathcal{E}\mathcal{O} + \mathcal{O}\mathcal{O} + \mathcal{E}\mathcal{E}, \quad (1.82)$$

donde $\mathcal{O}\mathcal{E}$, $\mathcal{E}\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}\mathcal{O}$ son los términos impares que pueden aparecer, a saber, $\mathcal{O}\mathcal{E}$ (impar-par) mezcla las 4 componentes del espinor correspondiente a la partícula 1, $\mathcal{E}\mathcal{O}$ (par-impar) mezcla las 4 componentes del espinor correspondiente a la partícula 2 y $\mathcal{O}\mathcal{O}$ (impar-impar) mezcla las 16 componentes de la función de onda de los 2 cuerpos. Los términos $\mathcal{E}\mathcal{E}$ (par-par) son aquellos que son diagonales respecto a las componentes mayores (energía positiva) y menores (energía negativa) de cada función de onda.

Para el caso particular presentado en éste trabajo resulta muy importante la situación en la que $\mathcal{O}\mathcal{E} = \mathcal{O}_{(1)}\mathbf{1}_{(2)}$ y $\mathcal{E}\mathcal{O} = \mathbf{1}_{(1)}\mathcal{O}_{(2)}$, donde cada $\mathcal{O}_{(1,2)}$ es el término impar del Hamiltoniano libre para cada partícula. Bajo esta condición $[\mathcal{O}\mathcal{E}, \mathcal{E}\mathcal{O}] = 0$ y, como se muestra en la referencia [68], el Hamiltoniano transformado de los 2 cuerpos toma la forma

$$\hat{H}_{FW} = \hat{H}_{FW}^D(\mathbf{1}) + \hat{H}_{FW}^D(\mathbf{2}) + \mathcal{E}\mathcal{E} - \frac{[\mathcal{O}_{(1)}, [\mathcal{O}_{(1)}, \mathcal{E}\mathcal{E}]]}{8(m_1c^2)^2} - \frac{[\mathcal{O}_{(2)}, [\mathcal{O}_{(2)}, \mathcal{E}\mathcal{E}]]}{8(m_2c^2)^2} + \frac{\beta_{(1)} + \beta_{(2)}}{4(m_1 + m_2)c^2} (\mathcal{O}\mathcal{O})^2, \quad (1.83)$$

donde $\mathcal{E}\mathcal{E}$ y $\mathcal{O}\mathcal{O}$ provienen solamente del potencial efectivo de interacción y cada Hamiltoniano \hat{H}_{FW}^D tiene la forma

$$\hat{H}_{FW}^D = \beta mc^2 + \mathcal{E} + \frac{\beta\mathcal{O}^2}{2mc^2} - \frac{\beta\mathcal{O}^4}{8(mc^2)^3} - \frac{[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]]}{8(mc^2)^2}, \quad (1.84)$$

es el Hamiltoniano transformado del Hamiltoniano libre de Dirac de cada partícula en la métrica bajo consideración. Un detalle importante aquí es que la transformación F-W debe ser unitaria, por lo tanto, importa el producto interno que se esté usando para las funciones de onda. Un producto interno en el que se sabe que la transformación F-W resulta unitaria es el de la expresión (1.7) y por eso, cuando se trabaja en espaciotiempo curvo se suele implementar una transformación de semejanza

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = \hat{A}\Psi, \\ \hat{O} &\rightarrow \hat{O}' = \hat{A}^{-1}\hat{O}\hat{A}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

sobre operadores y campos de manera que para estos nuevos campos el producto interno de la ecuación (1.64) se vea como en la ecuación (1.7) [36].

El operador A que implementa esta transformación debe satisfacer en particular

$$\langle \psi, \phi \rangle \equiv \int \psi^* \mathbf{M} \phi d^3x = \int \psi'^* \phi' d^3x \equiv \langle \psi' | \phi' \rangle, \quad (1.86)$$

que es el correspondiente cambio de forma del producto interno. La ecuación (1.86) conduce a que

$$\hat{A}^* \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{A} = 1, \quad (1.87)$$

con la cual se determina el operador \hat{A} . Una solución de la ecuación (1.87) se puede encontrar de forma directa si se impone una condición adicional:

$$\hat{A} = \hat{A}^*. \quad (1.88)$$

En este caso la ecuación (1.87) se reduce a

$$\begin{aligned} \hat{A} \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{A} &= 1, \\ \mathbf{M} \cdot \hat{A} &= \hat{A}^{-1}, \\ \mathbf{M} &= (\hat{A} \cdot \hat{A})^{-1}, \end{aligned} \quad (1.89)$$

cuya solución es

$$\hat{A} = \sqrt{\mathbf{M}^{-1}}. \quad (1.90)$$

La transformación en la ecuación (1.86) respeta los valores esperados y la hermiticidad, es decir, si un operador es hermítico en el producto interno $\{ , \}$ también lo será en el producto $\langle | \rangle$. Este cambio de producto interno, de momento, es una conveniencia matemática para simplificar algunos procedimientos que aparecen en el límite no-relativista y para poder verificar algunas propiedades de manera habitual y directa. Sin embargo, la mayoría de los resultados de la física atómica y de altas energías están escritas en un producto interno del tipo presentado en la expresión (1.7), de modo que para poder comparar con resultados conocidos y con nociones físicas estándar va a resultar necesaria la transformación plasmada en la ecuación (1.86) con el cambio de producto interno que involucra.

Resumen

Se ha presentado una construcción del potencial efectivo de interacción entre dos fermiones cargados, que se encuentran dentro de un espaciotiempo de Minkowski. Esta construcción se basa en el elemento covariante de la matriz de dispersión que involucra el intercambio de un fotón entre los fermiones, utiliza una noción de bajas velocidades que proviene de la teoría libre de Dirac en el espaciotiempo de Minkowski, utiliza la función de Green de Feynman del campo mediador y toma en cuenta la hermiticidad del Hamiltoniano libre de Dirac. El operador efectivo resultante, contiene correcciones relativistas debidas al movimiento relativo entre

las cargas.

Una construcción similar para fermiones dentro de un espaciotiempo curvo requiere de varias suposiciones o aproximaciones adicionales. La existencia de la matriz S y la hermiticidad del Hamiltoniano libre requieren de una noción de estacionaridad, cuando menos dentro de la región del espaciotiempo que contiene los eventos de interés.

El producto espinorial conservado es importante para toda noción de hermiticidad de operadores actuando sobre espinores y la noción de estacionaridad permite que en dicho producto interno el Hamiltoniano de los fermiones libres sea hermítico y pueda asociarse con la energía de los fermiones libres.

En la función de Green de Feynman electromagnética, se involucra una noción de transporte que une los puntos asociados con la fuente del campo y con el punto de observación del campo.

Hemos seleccionado la función de Green de Feynman en su forma de Hadamard, la cual involucra la noción de transporte paralelo. En un espaciotiempo cuyo tensor de Ricci sea nulo o en regiones de observación dentro de un espaciotiempo que satisfaga las ecuaciones de campo de Einstein y que no contengan fuentes del campo gravitacional, podemos esperar que sea una combinación de las funciones de Green electromagnéticas avanzada y retardada, en analogía con el caso Minkowskiano.

Finalmente, se presenta la transformación de F-W que es el procedimiento habitual para encontrar la forma no-relativista de los Hamiltonianos de partículas relativistas en campos externos. Con estas construcciones como base, en el siguiente capítulo se presenta la construcción del potencial efectivo de interacción entre fermiones cargados vistos por un observador inercial que usa coordenadas normales de Fermi. Esta construcción es la extensión del procedimiento presentado en la sección 1.3.

Capítulo 2

La Interacción de Coulomb-Breit entre Fermiones Cargados descrita por un Observador Inercial que usa Coordenadas Normales de Fermi

En este capítulo se extiende al caso de un espaciotiempo curvo, el método para obtener la interacción efectiva, pseudo-relativista, entre fermiones cargados que se presentó en el capítulo anterior. Esta extensión se desarrolla dentro de la aproximación estática-adiabática y para un observador inercial que usa un sistema de coordenadas muy particular: las coordenadas normales de Fermi (CNF). Empezaremos con una descripción de las CNF y luego entraremos de lleno a la construcción del potencial efectivo de interacción.

2.1. El Observador y sus coordenadas

Consideraremos un observador inercial, es decir un observador en caída libre dentro de un campo gravitacional externo. El hecho de ser inercial implica que su presencia no es suficiente para modificar apreciablemente el campo gravitacional. Para este tipo de observadores se pueden introducir coordenadas $x^\mu = (t, x^a)$

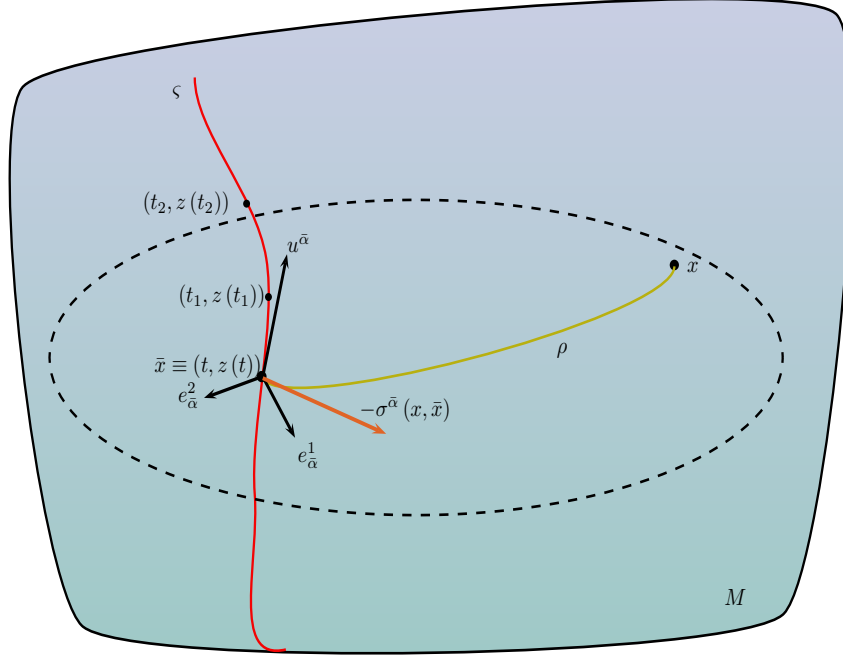


Figura 2.1: Ilustración de la situación considerada en la construcción de las CNF del punto x por un observador inercial que se mueve sobre la geodésica ζ que está parametrizada por el tiempo propio t

de un punto x en la vecindad normal convexa de su geodésica ζ (ver figura 2.1). Para ello, tomamos la única geodésica tipo espacio ρ que pasa por el punto x e intersecta normalmente a ζ . Sea $\bar{x} \equiv z(t)$ el punto de intersección y t el valor del parámetro tiempo propio en ese punto. Las CNF de x se definen por¹

$$\hat{x}^0 = t, \quad \hat{x}^a = -e_{\bar{\alpha}}^a(\bar{x}) \sigma^{\bar{\alpha}}(x, \bar{x}), \quad \text{y} \quad \sigma_{\bar{\alpha}}(x, \bar{x}) u^{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 0, \quad (2.1)$$

donde $\sigma(x, \bar{x})$ es la función de Synge, $e_{\bar{\alpha}}^a(\bar{x})$ es la tétrada ortonormal en \bar{x} ² y se denota $\sigma_{\bar{\alpha}} \equiv \nabla_{\bar{\alpha}} \sigma$. La última condición en (2.1); el requerimiento de que $-\sigma_{\bar{\alpha}}$, el vector tangente a ρ en \bar{x} , sea ortogonal a $u^{\bar{\alpha}}$, el vector tangente a ζ , determina el punto \bar{x} .

En éstas coordenadas la métrica alrededor de cualquier punto en la geodésica ζ

¹A los tensores en \bar{x} les asignamos los índices $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$

²En la tétrada: a un índice espaciotemporal que va de 1 a 3 y $\bar{\alpha}$ el índice de tétrada que puede ir entre 0 y 4.

puede expresarse como

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x), \quad (2.2)$$

siendo:

$$h_{\mu\nu}(x) \equiv \mathcal{Q}_{\mu\alpha\nu\beta}(t) x^{\alpha} x^{\beta} = \begin{cases} h_{00} = -\check{R}_{0a0b}(t) x^a x^b & +\mathcal{O}(x^3) \\ h_{0a} = -\frac{2}{3}\check{R}_{0bac}(t) x^b x^c & +\mathcal{O}(x^3) \\ h_{ab} = -\frac{1}{3}\check{R}_{abcd}(t) x^c x^d & +\mathcal{O}(x^3) \end{cases} \quad (2.3)$$

y $\check{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es la proyección del tensor de Riemann del espaciotiempo de fondo, sobre la tétrada ortonormal del observador en el punto de la geodésica ζ etiquetado con el tiempo propio t [69].

Consideraremos situaciones en las que los $\check{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ son un conjunto de valores pequeños en cada punto de la geodésica y sus alrededores. Adicionalmente, los valores de las coordenadas de los eventos considerados tales que $\|h_{\mu\nu}\| \ll 1$, por tanto en todas las expresiones, retendremos términos de primer orden en $h_{\mu\nu}$ y en $\check{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Para ignorar la dependencia temporal implícita en el tensor de Riemann, supondremos también que los tiempos que requieren las transiciones entre estados del sistema son suficientemente cortos como para que los $\check{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ no cambien de manera apreciable durante el movimiento a lo largo de ζ . De esta forma $g_{\alpha\beta}$ en (2.2) no depende de la coordenada t , pues en (2.3) el tiempo propio entra ahora como un parámetro, que si bien es arbitrario, es constante durante las observaciones. Con esta suposición ganamos una noción de estacionaridad, que nos ayuda a justificar la existencia de la matriz S y la hermiticidad del Hamiltoniano libre de Dirac.

2.2. Interacción Efectiva

Intentaremos extender los cálculos que involucran elementos de matriz S asociados a diagramas como el de la Fig.1.1. La guía principal para dicha extensión es la prescripción de acople mínimo, que generaliza a (1.31) en

$$S_{fi} = -i \iint J_{fi}^{\mu}(x_2) G_{\mu\nu'}(x_1, x_2) J_{fi}^{\nu'}(x_1) \sqrt{g(x_2)g(x_1)} d^4x_2 d^4x_1. \quad (2.4)$$

Como en el ejemplo de Minkowski: $G_{\mu\nu'}$ es la función de Green de Feynman para el campo electromagnético y las J_{fi}^μ son las corrientes de transición asociadas con cada campo fermiónico.

En el caso de Minkowski, la corriente de transición está asociada con la corriente de probabilidad de la teoría de Dirac ($\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$), que transforma como un 4-vector de Minkowski y es conservada. En el caso de un espaciotiempo curvo está estacionario se puede definir una 4-corriente de probabilidad que permite generalizar la expresión (1.35) bajo el producto interno (1.64) mediante la combinación [42]

$$J_{fi}^\mu(x) = q \left[\Psi_f^*(\mathbf{x}) \gamma^{\bar{0}} \gamma^\mu \Psi_i(\mathbf{x}) \right] e^{i\Delta_{fi}x^0}. \quad (2.5)$$

Aquí, debido a la estacionaridad podemos separar la dependencia temporal de la espacial en los espinores Ψ de (1.63) con una constante de separación que corresponde a la energía conservada. Se han definido también $\Delta_{fi} \equiv (E_f - E_i)$ y $E_{i,f}$ que son los valores propios reales del Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_0$ y la función propia correspondiente a cada valor propio es la parte espacial del espinor $\Psi(\mathbf{x})$, es decir:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \Psi_{i,f}(\mathbf{x}) = E_{i,f} \Psi_{i,f}(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

El Hamiltoniano libre $\hat{\mathcal{H}}_0$ en el punto x toma la forma explícita:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} \doteq & -\frac{c}{4} \gamma^{\bar{a}} \gamma^{\bar{b}} h_{0a} \hat{p}_b + c \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{a}} \left(-\hat{p}_a + \frac{1}{2} h^c{}_a \hat{p}_c + \frac{1}{2} h_{00} \hat{p}_a \right) \\ & - i\hbar c \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{\mu}} \Gamma_\mu(x) - \frac{3c}{4} h^a{}_0 \hat{p}_a + imc^2 \left(1 - \frac{1}{2} h_{00} \right) \gamma^{\bar{0}} + \frac{i}{4} mc^2 h_{0a} \gamma^{\bar{a}} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_h, \end{aligned} \quad (2.7)$$

que es hermítico en el producto interno (1.64) y donde se identifican a

$$-i\hbar \partial_a = \hat{p}_a \quad (2.8)$$

y

$$\hat{H}_0 = -\gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{a}} (c \hat{p}_a) + imc^2 \gamma^{\bar{0}}, \quad (2.9)$$

que es el Hamiltoniano libre de Dirac para el espaciotiempo de Minkowski.

En lo que a la función de Green respecta, por la condición $\|h_{\mu\nu}(x)\| \ll 1$ en la métrica (2.2), resulta suficiente conocer la solución de los bitensores $\sigma(x, x')$,

$\kappa_{\alpha\beta'}(x, x')$, $U_{\alpha\beta'}$, $V_{\alpha\beta'}$ y $W_{\alpha\beta'}$ que aparecen en (1.74), hasta primer orden en la curvatura³. El propagador paralelo viene dado por

$$\begin{aligned}\kappa_{00} &\doteq \eta_{00} + \frac{1}{2} [h_{00}(x) + h_{00}(x')], \\ \kappa_{0a} &\doteq \frac{1}{4} [3h_{0a}(x) + h_{0a}(x')], \\ \kappa_{a0} &\doteq \frac{1}{4} [h_{0a}(x) + 3h_{0a}(x')], \\ \kappa_{ab} &\doteq \eta_{ab} + \frac{1}{2} [h_{ab}(x) + h_{ab}(x')].\end{aligned}\tag{2.10}$$

Para el bitensor $U_{\alpha\beta'}$ se conoce una solución exacta

$$\begin{aligned}U_{\alpha\beta'}(x, x') &= \kappa_{\alpha\beta'}(x, x') \sqrt{\Delta(x, x')} \\ &\approx \kappa_{\alpha\beta'}(x, x') \left[1 - \frac{1}{12} \mathcal{R}_{\mu\nu}(\sigma_0)^\mu (\sigma_0)^\nu \right]\end{aligned}\tag{2.11}$$

donde $\Delta(x, x')$ es el *determinante de VanVleck-Morette*, $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci evaluado en \bar{x} (el origen de las coordenadas del observador) y es el mismo para cualquier punto dentro del parche de coordenadas; σ_0 es la función de Synge en el espaciotiempo de Minkowski y se ha usado la notación $\sigma^\mu \equiv \nabla^\mu \sigma$ para las derivadas de función de Synge. En regiones, tanto para x como para x' , donde no hay fuentes del campo externo se encuentra de manera directa que

$$U_{\alpha\beta'}(x, x') \doteq \kappa_{\alpha\beta'}(x, x').\tag{2.12}$$

Con el bitensor $V_{\alpha\beta'}$ la situación es diferente, pues no se conoce para él una forma cerrada cómo la de la primera línea en (2.11), pero se conocen soluciones aproximadas en potencias de $\sigma(x, x')$, y a primer orden en la curvatura [70] se sabe que:

$$V_{\alpha\beta'} \doteq -\frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \eta_{\alpha\beta} \mathcal{R} \right),\tag{2.13}$$

donde $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ es el tensor de Einstein y \mathcal{R} es el escalar de Ricci. En este caso también resulta conveniente suponer regiones externas de las fuentes del campo gravitacional.

Para completar la construcción de la función de Green (1.74), se necesita la expresi-

³Denotaremos con el símbolo " \doteq " igualdad hasta primer orden en la curvatura.

sión explícita para la función de Synge en nuestra métrica. A primer orden en la curvatura se encuentra que

$$\begin{aligned}\sigma(x, x') &\equiv \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} g_{\mu\nu} \dot{y}^\mu(\lambda) \dot{y}^\nu(\lambda) d\lambda \\ &\equiv \sigma_0(x, x') + \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\mu\nu ab} \mathcal{A}^{ab} (\sigma_0)^\mu (\sigma_0)^\nu,\end{aligned}\tag{2.14}$$

donde $y^\mu(\lambda)$ es la geodésica que une los puntos x y x' , λ es el parámetro sobre dicha geodésica y σ_0 denota la función de Synge Minkowskiana, que viene dada por

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (x - x')^\mu (x - x')^\nu \equiv \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\sigma_0)^\mu (\sigma_0)^\nu.\tag{2.15}$$

En (2.14) se ha definido también al objeto

$$\mathcal{A}^{ab} \equiv \left[\frac{1}{2} (x'^a x^b + x^a x'^b) + \frac{1}{3} (\sigma_0)^a (\sigma_0)^b \right].\tag{2.16}$$

Con la ecuaciones (2.12) y (2.13) evaluada en $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$, solo basta determinar el bi-tensor $W_{\alpha\beta'}$ en (1.74) y lo hacemos imponiendo condiciones de frontera. Pidiendo que para todo tiempo los campos se anulen cuando la separación espacial entre los puntos x y x' sea muy grande, en analogía con el caso Minkowskiano, uno encuentra que $W_{\alpha\beta'}$ se anula y la función de Green toma una forma singular dada por:

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\kappa_{\alpha\beta}(x, x')}{\sigma(x, x') + i\epsilon} \right).\tag{2.17}$$

Vamos ahora a definir los estados de dos partículas $\Phi(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ como el producto directo de las funciones de onda espinoriales $\Psi^{(n)}(\mathbf{x})$ de cada partícula. Podemos escribir a (2.4) como el elemento matricial de un operador $\mathcal{W}^{(1,2)}$ entre los estados inicial y final del sistema de dos partículas, de modo que

$$\begin{aligned}S_{fi} &= \iint (\Phi_f)^* \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{M}_{(1)} \mathcal{W}^{(1,2)} \Phi_i d\Sigma_0 d\Sigma'_0 \\ &\equiv \langle \Phi_f | \mathcal{W}^{(1,2)} | \Phi_i \rangle.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Reemplazando (2.5) en (2.4) y con ayuda de (2.18), se identifica el operador

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(2,1)} &= -q_1 q_2 \frac{\gamma_{(2)}^0 \gamma_{(2)}^{\bar{\mu}}}{g^{00}(\mathbf{x})} \mathcal{G}_{\mu\nu'}(\mathbf{2}, \mathbf{1}) \frac{\gamma_{(1)}^0 \gamma_{(1)}^{\bar{\nu}'}}{g^{00}(\mathbf{x}')}, \\ &\equiv \alpha_e A_{(2)}^{\bar{\mu}} \mathcal{G}_{\mu\nu'}(\mathbf{2}, \mathbf{1}) A_{(1)}^{\bar{\nu}'},\end{aligned}\quad (2.19)$$

donde α_e es la constante de estructura fina,

$$\mathcal{G}_{\mu\nu'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \iint \mathfrak{G}_{\mu\nu'} e^{i(\Delta_{fi}^{(2)} x^0 + \Delta_{fi}^{(1)} x'^0)} dx^0 dx'^0 \quad (2.20)$$

y

$$A_{(n)}^{\bar{\nu}} = \frac{\gamma_{(n)}^0 \gamma_{(n)}^{\bar{\nu}}}{g^{00}(\mathbf{x}_n)}, \quad (2.21)$$

las cuales satisfacen $(A^{\bar{\mu}})^\dagger = A^{\bar{\mu}}$ en el producto interno (1.64), donde \dagger denota el adjunto. Además, se introdujo en (2.20) a $\mathfrak{G}_{\alpha\beta'} \equiv e^{\mu}_{\bar{\alpha}} G_{\mu\nu'} e^{\nu'}_{\bar{\beta}}$, que es la proyección de la función de Green de Feynman sobre la tétrada en el punto de observación y en el punto de la fuente del campo, la cual por construcción se reduce a $\mathfrak{G}_{\mu\nu'} = \eta_{\mu\nu}$, con lo que

$$\mathcal{G}_{\mu\nu'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \eta_{\mu\nu} \iint \frac{e^{i(\Delta_{fi}^{(2)} x^0 + \Delta_{fi}^{(1)} x'^0)}}{\sigma(x, x') + i\epsilon} dx^0 dx'^0. \quad (2.22)$$

En analogía con el caso Minkowskiano, debemos ahora evaluar las integrales (2.22). A primer orden en $|h_{\mu\nu}|$, los ceros de la función de Synge (2.14) están ligeramente desplazados, a lo largo de la recta real, respecto de aquéllos que aparecen en σ_0 . Debido a esto, podemos usar el mismo contorno de integración que se usa en el caso Minkowskiano para la función de Green electromagnética pero considerando los polos correctos, que corresponden a los ceros de $\sigma(x, x') + i\epsilon$, al evaluar la integral. La integración por residuos de (2.22) conduce a

$$\begin{aligned}I \equiv \iint \frac{e^{i(\Delta_{fi}^{(2)} x^0 + \Delta_{fi}^{(1)} x'^0)}}{(2\pi)^2 (\sigma(x, x') + i\epsilon)} dx^0 dx'^0 = \\ -i\delta(\Omega) \frac{e^{\frac{iw b_0}{(1-a_{00})}}}{\rho(1-a_{00})} \left[\theta(w) e^{i w \rho} + \theta(-w) e^{-i w \rho} \right],\end{aligned}\quad (2.23)$$

donde $w \equiv \Delta_{fi}^{(2)} - \Delta_{fi}^{(1)}$, $\Omega \equiv \Delta_{fi}^{(2)} + \Delta_{fi}^{(1)}$ y a demás,

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{b_0^2 + (1 - a_{00})(r^2 + \xi_h)}{(1 - a_{00})^2}}, \\ &\doteq r \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_{00} + \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (2.24)$$

introduciendo la notación

$$\begin{aligned} r^2 &= \delta_{ij} (x - x')^i (x - x')^j, \\ a_{00} &= Q_{0a0b} \mathcal{A}^{ab}, \\ b_0 &= Q_{0akb} \mathcal{A}^{ab} (x - x')^k, \\ \xi_h &= Q_{iajb} \mathcal{A}^{ab} (x - x')^i (x - x')^j. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En analogía con el caso Minkowskiano, la presencia de $\delta(\Omega)$ garantiza la conservación de la energía en el proceso de intercambio del fotón entre los fermiones. Aquí ρ juega el papel de la separación instantánea entre los puntos de fuente y de observación del campo, similar al papel de r en el ejemplo Minkowskiano.

El desarrollo en serie de Taylor de la integral en la ecuación (2.23), hasta segundo orden en w y primero en la curvatura, que se usa al tomar el límite de bajas velocidades, es

$$\begin{aligned} I \approx - (2\pi i) \delta(\Omega) \left\{ \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] + i \left(\frac{w}{2} \right) \left(\frac{b_0}{r} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{w^2}{4} \right) \left(r \left[1 + \frac{1}{2} \left(3a_{00} + \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Esto es el análogo al desarrollo en la expresión (1.44) del caso Minkowskiano. Hacemos notar que la expresión (2.23), y consecuentemente la expresión (2.26), es simétrica ante el intercambio $1 \leftrightarrow 2$ o $x \leftrightarrow x'$.

2.2.1. El límite de bajas velocidades

En la construcción del operador efectivo (1.51) se introdujo un límite de bajas velocidades en el operador (1.46). Al tomar ese límite fue importante identificar el operador velocidad en la teoría de Dirac, que resultó ser el operador $\vec{\alpha}$. El opera-

donde la velocidad para los fermiones libres Ψ con Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_0$ de (1.63) es

$$\begin{aligned} \dot{x}^m &= [\hat{\mathcal{H}}_0, x^m] + \frac{\partial x^m}{\partial t} = i \left[\frac{1}{g^{00}} \left(\gamma^0 \gamma^k (c \hat{p}_k) + ic \gamma^0 \gamma^\mu \Gamma_\mu - ime^2 \gamma^0 \right), x^m \right] \\ &= i \frac{\gamma^0 \gamma^k}{g^{00}} [(c \hat{p}_k), x^m] = c \frac{\gamma^0 \gamma^m}{g^{00}} \equiv c \mathfrak{A}^m, \end{aligned} \quad (2.27)$$

de modo que las \mathfrak{A}^m se pueden estimar de orden η . Sin embargo, estamos pensando que los efectos gravitacionales producidos por $h_{\mu\nu}$ en (2.2) sobre el potencial de interacción efectivo son suficientemente pequeños como para poder ser considerados una perturbación de: el Hamiltoniano \hat{H}_0 en (1.33), o del operador U en (1.51), o incluso del Hamiltoniano no-relativista del átomo de Hidrógeno. Esto nos lleva a considerar, igual que como se hizo en el espaciotiempo de Minkowski, que el límite de bajas velocidades se toma estimando $\vec{a} \sim \eta$.

2.2.2. La construcción del operador efectivo

Continuando con el elemento de transición (2.18), escribimos ahora

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \iint \Phi_f^*(1, 2) \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \hat{W}(1, 2) \Phi_i(1, 2) d^3 x_1 d^3 x_2 \\ &\equiv \langle \Phi_f^* | \hat{W} | \Phi_i \rangle \\ &= \langle \Phi_f^* | \alpha_e A_2^{\bar{\mu}} A_1^{\bar{\nu}} \mathcal{G}_{\mu\nu} | \Phi_i \rangle \\ &= \langle \Phi_f^* | \alpha_e A_2^{\bar{\mu}} A_1^{\bar{\nu}} \eta_{\mu\nu} \left(\phi_C + \left(\frac{i\omega}{2} \right) F_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{i\omega}{2} \right)^2 r (1 + F_2) \right) | \Phi_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde se ha omitido la delta de conservación de la energía y se ha usado la expresión (2.26). En (2.28) se ha definido

$$\phi_C \equiv \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_{00} - \frac{\tilde{\zeta} \hbar}{r^2} \right) \right] \quad (2.29)$$

y $F_{1,2}$ que son funciones de las coordenadas de primer orden en la curvatura dadas por

$$F_1 = \frac{b_0}{r}, \quad F_2 = \frac{1}{2} \left(3a_{00} + \frac{\tilde{\zeta} \hbar}{r^2} \right). \quad (2.30)$$

Además

$$\begin{aligned}
w &= \Delta_{fi}^{(2)} - \Delta_{fi}^{(1)}, \\
&= \frac{1}{\hbar c} \left[\left(E_f^{(2)} - E_f^{(1)} \right) - \left(E_i^{(2)} - E_i^{(1)} \right) \right] \equiv \frac{1}{\hbar c} \left(\omega_{21}^{(f)} - \omega_{21}^{(i)} \right), \\
&\equiv \Delta_{21}^{(f)} - \Delta_{21}^{(i)}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

El operador que actúa sobre Φ_i en la segunda línea de (2.28) es hermítico porque cada termino lo es. Además, la revisión de las propiedades de simetría bajo el intercambio $\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{2}$ de las expresiones (2.18) y (2.19) conducen a $I(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = I(\mathbf{2}, \mathbf{1})$, de modo que el operador efectivo será simétrico ante el intercambio de partículas. Dada la forma que tiene w en (2.31) vemos que es de orden c^{-1} . Este factor de c es el mismo que aparece en cada término de (1.44). Hasta primer orden en la curvatura y segundo en las velocidades, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\hat{O} &\equiv \eta_{\mu\nu} A_2^{\bar{\mu}} A_1^{\bar{\nu}} \approx \left[1 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \right] \left(-\mathbf{1}_2 \mathbf{1}_1 + \delta_{ab} \alpha_2^a \alpha_1^b \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} \left\{ \left(h_{0a}^{(2)} + h_{0a}^{(1)} \right) \left(\alpha_2^a + \alpha_1^a \right) - i \delta_{ab} \epsilon^{acd} \left[\alpha_2^a \left(h_{0c} \Sigma_d \right)_1 + \alpha_1^a \left(h_{0c} \Sigma_d \right)_2 \right] \right\}, \tag{2.32}
\end{aligned}$$

siendo $-2i\epsilon^{acd}\Sigma_d = [\alpha^a, \alpha^c]$ y que en potencias de c^{-1} debe ser considerado de $\mathcal{O}(0)$ para tener consistencia en el conteo de potencias de c^{-1} de la expresión:

$$\alpha^a \alpha^b = \delta^{ab} \mathbf{1} - i\epsilon^{abc} \Sigma_c,$$

cuyo primer término, en potencias de c^{-1} , es de orden cero. La lección importante es que si bien α^a es de orden c^{-1} , la cantidad $\alpha^a \alpha^b$ referida a la misma partícula **NO** es de orden c^{-2} ; sin embargo la cantidad $\alpha_2^a \alpha_1^b$ **SI** lo es.

¿Cómo obtenemos el límite de bajas velocidades y la expresión para el potencial efectivo?. En analogía con el caso plano, necesitamos el equivalente a la ecuación (1.46) en la que antes de introducir operadores podamos descartar las potencias de c^{-1} que no deseamos. A partir de (2.28) y usando (2.32) se encuentra que la

aproximación consistente⁴ viene dada por:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &\approx \langle \Phi_f^* | \alpha_e \left[\hat{O}\phi_C + (\hat{O}_0 + \hat{O}_{-1}) \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right) F_1 - \frac{\mathbf{1}_{21}}{2} \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right)^2 r (1 + F_2) \right] | \Phi_i \rangle. \\
&\equiv \langle \Phi_f^* | (\hat{W}_C + \hat{W}_{-1} + \hat{W}_{-2}) | \Phi_i \rangle,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

en donde los subíndices indican la potencia de c de cada operador y se han definido:

$$\begin{aligned}
\hat{W}_C &\equiv \alpha_e \hat{O}_0 \phi_C, \\
\hat{W}_{-1} &\equiv \alpha_e \left[\hat{O}_{-1} \phi_C + \hat{O}_0 \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right) F_1 \right], \\
\hat{W}_{-2} &\equiv \alpha_e \left[\hat{O}_{-2} \phi_C + \hat{O}_{-1} \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right) F_1 - \frac{\mathbf{1}_{21}}{2} \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right)^2 r (1 + F_2) \right],
\end{aligned} \tag{2.34}$$

que son de orden c^0 , c^{-1} y c^{-2} respectivamente, en términos de

$$\begin{aligned}
\phi_C &\equiv \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_{00} - \frac{\xi h}{r^2} \right) \right], \\
\hat{O}_0 &\equiv -\mathbf{1}_{21} \left[1 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \right], \\
\hat{O}_{-1} &\equiv -\frac{1}{4} \left\{ \left(h_{0a}^{(2)} + h_{0a}^{(1)} \right) (\alpha_2^a + \alpha_1^a) - i\epsilon^{cd}{}_a [\alpha_2^a (h_{0c}\Sigma_d)_1 + \alpha_1^a (h_{0c}\Sigma_d)_2] \right\} \\
\hat{O}_{-2} &\equiv \left[1 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \right] (\vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\alpha}_1).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Estos son los elementos básicos para la construcción del operador efectivo hasta orden c^{-2} , a primer orden en la curvatura y en la velocidad⁵ de cada una de las partículas. Ahora es cuando usamos la prescripción de ordenamiento, para que los Hamiltonianos aparezcan en el lugar correcto del potencial efectivo y den lugar a los factores de ω tal y como aparecen en (2.33). Esto lo sabemos hacer, la

⁴En el mismo sentido de potencias de c^{-1} que se usó en el caso de Minkowski.

⁵En el sentido de la teoría de Dirac sobre Minkowski.

prescripción es:

$$\begin{aligned}\omega\hat{Q} &\rightarrow \hat{Q} = [\hat{\mathcal{H}}^{(2)} - \hat{\mathcal{H}}^{(1)}, \hat{Q}] \\ \omega^2\hat{U} &\rightarrow \hat{U} = (2i)^2 [\hat{\mathcal{H}}^{(2)}, [\hat{\mathcal{H}}^{(1)}, \hat{U}]],\end{aligned}\tag{2.36}$$

que tras evaluar los conmutadores, da lugar a los términos del operador efectivo de interacción [71]:

$$\begin{aligned}\hat{W}_C &\rightarrow \hat{\mathcal{W}}_e^C \approx -\frac{\alpha_e}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{00} - \frac{\tilde{\xi}h}{r^2} \right) \right] \\ \hat{W}_{-1} &\rightarrow \hat{\mathcal{W}}_e^{CU} \approx -\frac{\alpha_e}{2} \left[\alpha_{(2)}^a \partial_a^{(2)} \left(\frac{b_0}{r} \right) - \alpha_{(1)}^a \partial_a^{(1)} \left(\frac{b_0}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left\{ \left(h_{0a}^{(2)} + h_{0a}^{(1)} \right) \left(\alpha_{(2)}^a + \alpha_{(1)}^a \right) - i\epsilon^{mnk} \left[\alpha_{(2)}^k \left(h_{0m}\Sigma_n \right)_{(1)} + \alpha_{(1)}^k \left(h_{0m}\Sigma_n \right)_{(2)} \right] \right\} \frac{1}{r} \right] \\ \hat{W}_{-2} &\rightarrow \hat{\mathcal{W}}_e^B \approx +\alpha_e \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{00} - \frac{\tilde{\xi}h}{r^2} \right) \right] \frac{(\tilde{\alpha}_2 \cdot \tilde{\alpha}_1)}{r} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\left(1 + F_{2s} \right) \alpha_{(2)}^k \alpha_{(1)}^m + \alpha_{(2)}^k \left(\tilde{h}\gamma \right)_{(1)}^m + \left(\tilde{h}\gamma \right)_{(2)}^k \alpha_{(1)}^m \right] \left(\partial_{km}^{(2)} r \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \alpha_{(2)}^k \alpha_{(1)}^m \left[r \left(\partial_k^{(2)} \partial_m^{(1)} F_{2s} \right) + \left(\partial_k^{(2)} r \right) \left(\partial_m^{(1)} F_{2s} \right) + \left(\partial_m^{(1)} r \right) \left(\partial_k^{(2)} F_{2s} \right) \right] \right\},\end{aligned}\tag{2.37}$$

que con la notación

$$\begin{aligned}\partial_a^{(1,2)} F_2 &\equiv \frac{1}{r} \Theta_a^{(1,2)} \rightarrow \frac{1}{r} \vec{\Theta}_{(1,2)}, \quad \partial_a^{(2)} \partial_b^{(1)} F_2 \equiv \frac{1}{r^2} \mathcal{B}_{ab} \rightarrow \frac{\overleftarrow{\mathcal{B}}}{r^2}, \quad \partial_a^{(n)} = \frac{\partial}{\partial x_n^a}, \\ \mathbf{r} &\equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \tilde{a}_{00} \equiv a_{00} - h_{00}^{(2)} - h_{00}^{(1)}, \quad h_{0a}^{(1,2)} \rightarrow \mathbf{h}_{(1,2)}, \\ z^a &\equiv x_2^a + x_1^a, \quad \tilde{F}_2 \equiv F_2 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(1)} + h_{00}^{(2)} \right), \quad h_{ab}^{(1,2)} \rightarrow \overleftarrow{\mathbf{H}}_{(1,2)}\end{aligned}\tag{2.38}$$

del apéndice E, conduce al potencial tipo Coulomb-Breit:

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\mathcal{W}}_e}{-\alpha_e} &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{00} - \frac{\tilde{\xi}_h}{r^2} \right) \right] \mathbf{1} \\
&+ \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{0amb} \left[\frac{\mathcal{A}^{ab}}{r} \left(\alpha_{(2)}^m + \alpha_{(1)}^m \right) + \mathcal{Z}^{ab} (2, 1) \hat{\mathbf{n}}^m + \frac{r}{12} (\hat{\mathbf{n}}^a \hat{\mathbf{n}}^m) \left(\alpha_{(2)}^b + \alpha_{(1)}^b \right) \right] \\
&- \frac{b_0}{2r^2} \left[\left(\vec{\alpha}_{(2)} + \vec{\alpha}_{(1)} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] - \frac{3}{4r} \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \mathbf{h}_{(1)} + \mathbf{h}_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \right) - \frac{1}{4r} \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \mathbf{h}_{(2)} + \mathbf{h}_{(1)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \right) \\
&- \frac{3i}{8r} \left[\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(1)} + \left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \right] + \frac{1}{2r} \left[\left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \left(\mathbf{h}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) + \left(\mathbf{h}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \left(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \right] \\
&- \frac{1}{2r} \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \left[\left(1 + \tilde{a}_{00} - \frac{\tilde{\xi}_h}{r^2} - \tilde{F}_2 \right) \overleftarrow{\mathbf{1}} + \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} + \overleftarrow{\mathcal{B}}(\mathbf{z}, \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \left(\overleftarrow{\mathbf{H}}_{(2)} + \overleftarrow{\mathbf{H}}_{(1)} \right) + \hat{\mathbf{n}}\tilde{F}_2\hat{\mathbf{n}} \right] \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \\
&+ \frac{1}{2r} \left\{ \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \left[\left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \overleftarrow{\mathbf{H}}_{(1)} \right) \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \right] + \frac{i}{4} \left[\left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] + \left(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \overleftarrow{\Theta}_{(1)} \right) \right\} \\
&+ \left[\left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \overleftarrow{\mathbf{H}}_{(2)} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] + \frac{i}{4} \left[\left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] + \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \overleftarrow{\Theta}_{(2)} \right) \left(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \Big\}, \quad (2.39)
\end{aligned}$$

donde se ha definido el operador

$$\mathcal{Z}^{ab} (2, 1) \equiv \frac{1}{4} \left[\left(\alpha_{(2)}^a - \alpha_{(1)}^a \right) z^b + z^a \left(\alpha_{(2)}^b - \alpha_{(1)}^b \right) \right]. \quad (2.40)$$

El operador presentado en la ecuación (2.39) es el operador efectivo que buscábamos para describir la interacción de dos fermiones cargados, distinguibles, en un espaciotiempo curvo dentro del parche coordenado de un observador inercial, que se encuentra fuera de las fuentes del campo externo, que puede considerar el campo gravitacional cómo estacionario y que usa coordenadas normales de Fermi.

La primera línea de (2.39) es el potencial de Coulomb modificado por curvatura, las líneas 2 a 4 son términos de orden c^{-1} que desaparecen en el límite de curvatura cero. Estos son fundamentales para la hermiticidad de $\hat{\mathcal{W}}_e$ en el producto interno (1.64). Las últimas 3 líneas dan lugar al potencial de Breit modificado por curvatura. Partiendo de (2.39) se llega directamente el potencial (1.51) tomando el límite de curvatura cero, ya que en dicho límite solo sobreviven el primer término de la primera línea así como el primero y el quinto de la quinta línea. Una expresión más compacta para (2.39) que resalta un poco más la simetría ante el

intercambio de partículas es:

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\mathcal{W}}_e}{(-\alpha_e)} &= \frac{1}{2r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{00} - \frac{\tilde{\zeta}_h}{r^2} \right) \right] \mathbf{I}_{4 \times 4} \\
&- \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{0abd} \left[\frac{\mathcal{A}^{ab}}{r} \left(\delta^{cd} - \hat{n}^c \hat{n}^d \right) - \frac{r}{12} \hat{n}^a \hat{n}^b \delta^{cd} \right] \alpha_{(2)}^{\bar{c}} + \frac{1}{8} \mathcal{Q}_{0acb} \left[\alpha_{(2)}^{\bar{a}} z^b + z^a \alpha_{(2)}^{\bar{b}} \right] \hat{n}^c \\
&+ \frac{1}{4r} \alpha_{(2)}^{\bar{a}} \left(h_{0b}^{(1)} \left[2\hat{n}^a \hat{n}^b - 3\delta^{ab} \right] - h_{0b}^{(2)} \delta^{ab} \right) + \frac{1}{8r} \alpha_{(2)}^{\bar{a}} \left[\hat{n}^a \hat{n}^b - 3\delta^{ab} \right] (\mathbf{h} \times i\boldsymbol{\Sigma})_{(1)}^b \\
&\quad - \frac{1}{4r} \alpha_{(2)}^{\bar{b}} \left[\left(1 + \tilde{a}_{00} - \frac{\tilde{\zeta}_h}{r^2} - \tilde{F}_2 \right) \delta_{bc} + (1 + \tilde{F}_2) \hat{n}_b \hat{n}_c \right. \\
&\quad \left. + \left(\delta^{bd} + 2\hat{n}^b \hat{n}^d \right) h_{dc}^{(1)} + 2\hat{n}^b \Theta_c^{(1)} + \mathcal{B}_{bc} \right] \alpha_{(1)}^{\bar{c}} + (\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{2}), \quad (2.41)
\end{aligned}$$

que es el resultado principal de éste trabajo de investigación [71]. El potencial efectivo corregido por curvatura, presenta dos rasgos especiales, que están ausentes en las discusiones previas sobre el problema que consideran al sistema como un solo cuerpo:

- (i) El acoplamiento de los grados de libertad espaciales y espinoriales.
- (ii) El acoplamiento de las coordenadas usuales para el movimiento relativo y del centro de masa.

Otro escenario donde estos efectos aparecen también, es el de sistemas de dos partículas cargadas dentro de un campo magnético inhomogéneo [72]. Allí, por ejemplo, se estudian técnicas que permiten separar los movimientos relativos y del centro de masa. Esto podría ofrecer posibilidades adicionales para estudiar efectos gravitacionales a nivel cuántico. Usando (2.41) se construye el Hamiltoniano pseudo-relativista para dos cargas en un campo gravitacional externo estacionario, incluyendo correcciones gravitacionales al intercambio de un fotón, y para un observador inercial que usa CNF, cómo

$$\hat{\mathfrak{H}}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \hat{\mathcal{H}}_{(1)} + \hat{\mathcal{H}}_{(2)} + \hat{\mathcal{W}}_e, \quad (2.42)$$

donde cada Hamiltoniano libre de Dirac $\hat{\mathcal{H}}$ viene dado por (2.7). El Hamiltoniano (2.42) es por construcción hermítico en el producto interno (1.64), de modo que lo asociamos con la energía del sistema de campos interactuantes medible por el observador inercial en sus coordenadas. Por conveniencia, la aplicación de nuestro

resultado para un átomo de Hidrógeno en un espaciotiempo concreto, ocupará las expresiones para $\hat{\mathcal{W}}_e$ que aparecen en el apéndice C en lugar de la ecuación (2.41).

Resumen

Se ha construido un Hamiltoniano cuántico pseudo-relativista de dos cuerpos que describe la interacción electromagnética entre dos campos fermionicos en presencia de un campo gravitacional arbitrario pero descrito como estático por un observador en caída libre fuera de las fuentes del campo gravitacional.

Por analogía con el caso Minkowskiano este Hamiltoniano considera efectos de retardo en el potencial por el movimiento de las cargas hasta orden $(v/c)^2$, en la velocidad de cada una de las partículas, y hermítico en el producto escalar (1.64). Las correcciones gravitacionales fueron calculadas sólo hasta orden lineal en la curvatura y las velocidades fueron estimadas con los operadores de la teoría de Dirac libre en Minkowski.

La extracción de consecuencias físicas más concretas del Hamiltoniano (2.42) requiere el uso de la aproximación no-relativista, tarea que presentamos en el siguiente capítulo. La estrategia general es empezar seleccionando y estimando el orden de magnitud de los distintos términos que aparecen en (2.42). Esto permite aislar las contribuciones dominantes de los términos inducidos gravitacionalmente, los cuales se consideran posteriormente como perturbaciones del Hamiltoniano de orden cero resultante.

Capítulo 3

Efectos de la Curvatura del Espaciotiempo en Átomos Hidrogenoides dentro del Sistema Solar

En este capítulo se estiman los órdenes de magnitud de las correcciones al potencial efectivo de interacción encontrado en el capítulo anterior. Se considera el caso particular de un observador inercial sobre una geodésica radial del espaciotiempo de Schwarzschild. Para este observador se obtienen los términos dominantes en el Hamiltoniano de dos cuerpos, se introducen la coordenada relativa \mathbf{r} y la coordenada del "centro de masa" \mathbf{R} para el sistema protón-electrón empleadas en la mecánica Newtoniana y se encuentra el límite no-relativista del Hamiltoniano. Como se verá más adelante, dichas coordenadas no resuelven el problema de la separación del movimiento relativo del sistema con respecto al del átomo como un todo. De este modo esperamos que la coordenada "centro de masa" corresponda más bien a una localización aproximada del átomo con un error estimado del orden del radio de Bohr entre la magnitud de \mathbf{R} . Finalmente bajo la aproximación de Born-Oppenheimer se estima el movimiento del átomo como un todo en el estado base de la parte electrónica. Se estudian también las correcciones gravitacionales dominantes a los dos primeros niveles electrónicos de estructura fina del átomo de Hidrógeno.

3.1. CNF para la caída radial en el espaciotiempo de Schwarzschild

Para desarrollar algo de intuición sobre nuestro Hamiltoniano general (2.42), resulta conveniente considerar uno de los casos más estudiados de átomos en un espaciotiempo curvo de fondo, el de los átomos hidrogenoides en un espaciotiempo de Schwarzschild [36, 38, 41, 73]. El elemento de línea para el espaciotiempo de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild está dada por

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2Y(r)}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Y(r)}{c^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

donde $Y(r)$ es el potencial gravitacional Newtoniano producido a una distancia r de la fuente del campo.

En este espaciotiempo seleccionaremos un observador inercial en caída radial hacia la fuente del campo gravitacional, con su eje z apuntando en la dirección de la caída. En las CNF, la métrica del observador toma la forma

$$\begin{aligned} h_{00}(\mathbf{x}) &= D^{-2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 3z^2), \quad h_{0a} = 0, \\ h_{ab}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{3D^2} \begin{pmatrix} z^2 - 2y^2 & 2xy & -zx \\ 2xy & z^2 - 2x^2 & -zy \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Al proyectar el tensor de Riemann sobre la tétrada atada a la geodésica del observador, que viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 &= \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r}} \frac{\partial}{\partial t}, \\ \vec{e}_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \vec{e}_3 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1 + \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r}}}{1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r}} \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde ε es la energía por unidad de masa en el infinito, \mathcal{M} es la fuente del espacio-

tiempo de Schwarzschild y (t, r, θ, ϕ) son las coordenadas de Schwarzschild [73]; encontramos las componentes no nulas

$$\begin{aligned}\check{R}_{0101} &= \frac{GM}{c^2 a^3} \equiv \frac{1}{D^2} = \check{R}_{0202}, & \check{R}_{0303} &= -\frac{2}{D^2}, \\ \check{R}_{3131} &= -\frac{1}{D^2} = \check{R}_{3232}, & \check{R}_{1212} &= \frac{2}{D^2},\end{aligned}\quad (3.4)$$

donde a es la distancia desde la fuente del campo hasta el origen del sistema coordenado del observador. En la ecuación (3.4), resalta que todas las componentes del tensor de Riemann son del mismo orden de magnitud y además son constantes dentro del parche coordenado. La distancia a en la expresión (3.4) depende del tiempo propio del observador, pero como se especificó antes, supondremos que todos los procesos atómicos de interés ocurren en intervalos de tiempo que son muy pequeños comparados con aquéllos en que a cambia de manera apreciable. En otras palabras, supondremos válida la aproximación adiabática y consideraremos a como una constante. Podemos estimar el tamaño del error introducido por esta aproximación de la siguiente manera, sea

$$K(t) = \frac{GM}{c^2 a^3(t)} \quad (3.5)$$

el valor típico de la curvatura en la posición a en el instante t . Al tomar la derivada temporal de K nos encontramos con

$$\dot{K}(t) = -\frac{3GM}{c^2 a^4(t)} \dot{a}. \quad (3.6)$$

Ahora podemos estimar el cambio en la curvatura ΔK durante una medición que dura Δt en el tiempo propio del observador. Considerando $\dot{a} \sim V_0$, con V_0 la velocidad del observador en el instante t a la distancia a , se encuentra

$$\Delta K \equiv \dot{K} \Delta t \approx K(t) \left(\frac{V_0}{c} \right) \left(\frac{c \Delta t}{a(t)} \right) \approx K(t) \left(\frac{V_0}{c} \right) \left(\frac{a_0}{a(t)} \right), \quad (3.7)$$

donde se ha estimado que la distancia $c \Delta t$ asociada a una transición atómica es del orden de un radio de Bohr a_0 . Con esto estimamos el cambio relativo de la curvatura durante el movimiento del observador

$$\frac{\Delta K}{K} \approx \left(\frac{V_0}{c} \right) \left(\frac{a_0}{a(t)} \right), \quad (3.8)$$

que para movimientos no-relativistas del observador y para distancias entre el observador y la fuente del campo gravitacional mucho mayores que el radio de Bohr, condiciones que son realistas para satélites naturales y artificiales en el sistema solar, es una cantidad mucho menor que 1.

3.1.1. Consistencia del uso de las CNF en el espaciotiempo de Schwarzschild

La expresión (2.2) de la métrica en CNF alrededor de la geodésica de un observador inercial tiene la forma

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^{(2)}(x), \quad (3.9)$$

donde

$$h_{\alpha\beta}^{(2)}(x) \sim \check{R}_{\alpha i \beta j} x^i x^j, \quad (3.10)$$

siendo $\check{R}_{\alpha i \beta j}$ la proyección del tensor de Riemann sobre la tétrada del observador. La forma exacta para los términos en (3.10) aparece en la ecuación (2.3). Para que (3.9) sea una buena aproximación a la métrica se tienen que cumplir dos condiciones: la primera es que efectivamente $|h_{\alpha\beta}^{(2)}(x)| \ll 1$, pero además debemos pedir que

$$h_{\alpha\beta}^{(3)}(x) \sim g_{\alpha\beta,ijk}|_{\zeta} x^i x^j x^k \quad \text{sea tal que} \quad |h_{\alpha\beta}^{(3)}(x)| \ll |h_{\alpha\beta}^{(2)}(x)|, \quad (3.11)$$

siendo $g_{\alpha\beta,ijk}|_{\zeta}$ la proyección sobre la tétrada del observador de las terceras derivadas parciales del tensor métrico. La condición (3.11) implica que el término cuadrático (3.10) es suficiente en el desarrollo de la métrica $g_{\alpha\beta}$. Para poder ver las restricciones explícitas que implica la ecuación (3.11) en el caso del observador en caída libre radial dentro del espaciotiempo de Schwarzschild debemos evaluar las derivadas parciales $g_{\alpha\beta,ijk}$. Usando los resultados de la Ref. [74], las expresiones para las terceras derivadas de la métrica en términos de las primeras derivadas

covariantes del tensor de Riemann son:

$$\begin{aligned}
g_{00,ijk} &= -\frac{1}{3} (R_{0i0j;k} + R_{0j0i;k} + R_{0k0i;j} + R_{0i0k;j} + R_{0k0j;i} + R_{0j0k;i}), \\
g_{0i,jkl} &= \frac{1}{4} (R_{ijk0;l} + R_{ikl0;j} + R_{ijl0;k} + R_{ilj0;k} + R_{ijk0;l} + R_{ilk0;j}), \\
g_{ij,jln} &= -\frac{1}{6} (R_{kjli;n} + R_{kjni;l} + R_{ljki;n} + R_{njki;l} + R_{njli;k} + R_{ljni;k}),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

las cuales deben ser proyectadas sobre la tétrada del observador y luego contraídas con las $x^a x^b x^c$ para construir los $h_{\mu\nu}^{(3)}$ correctos. Usando *GRTensorII* en *Maple 12*, se encuentra que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{h_{00}^{(3)}}{h_{00}^{(2)}} \right| &= \frac{18|\varepsilon z|}{a} \left| 1 - \frac{2G\mathcal{M}}{ac^2} \right| \frac{\left| x^2 + y^2 - \frac{2\varepsilon^2 z^2}{3} \left(1 - \frac{2G\mathcal{M}}{ac^2} \right)^{-1} \right|}{|x^2 + y^2 - 2z^2|}, \\
\left| \frac{h_{11}^{(3)}}{h_{11}^{(2)}} \right| &= \frac{24|\varepsilon z| |4y^2 - z^2|}{a |2y^2 - z^2|} = \left| \frac{h_{22}^{(3)}}{h_{22}^{(2)}} \right|, \\
\left| \frac{h_{12}^{(3)}}{h_{12}^{(2)}} \right| &= \frac{12|\varepsilon z|}{a} = \left| \frac{h_{23}^{(3)}}{h_{23}^{(2)}} \right| = \left| \frac{h_{33}^{(3)}}{h_{33}^{(2)}} \right|.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Con las componentes cruzadas (0i) ocurre que los términos cúbicos o son idénticamente cero o son proporcionales a

$$\begin{aligned}
|h_{0k}^{(3)}| &\equiv \sqrt{\delta^{ab} h_{0a}^{(3)} h_{0b}^{(3)}} \\
&= \frac{9G\mathcal{M}|\varepsilon z|}{a^4 c^2} \sqrt{\left(\varepsilon^2 - 1 + \frac{2G\mathcal{M}}{ac^2} \right) \left[z^2 (x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 \right]}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ahora estimamos cada una de las componentes en las expresiones (3.13) y (3.14) usando los siguientes valores de referencia:

$$\begin{aligned}
x &\equiv l \operatorname{sen} \Theta \cos \Phi, \quad y \equiv l \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \Phi, \quad z \equiv l \cos \Theta, \\
\frac{r_s}{a} &\equiv \frac{2G\mathcal{M}}{ac^2} \ll 1, \quad \frac{r_s}{a^3} \equiv \frac{1}{D^2},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

siendo l la distancia entre el origen de coordenadas y el punto de observación. Encontramos pues que las condiciones son ahora: para la componente $0i$

$$|h_{0i}^{(3)}| \approx \frac{9|\varepsilon|}{2} \left(\frac{r_s l^2}{a^3} \right) |\cos \Theta \sin \Theta| \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + \frac{2GM}{ac^2}}, \quad (3.16)$$

pero la raíz es directamente proporcional a la derivada de la posición del origen de coordenadas respecto del tiempo propio, que dentro de nuestras aproximaciones es cero. Para las demás componentes el sistema de desigualdades es

$$\begin{aligned} \left| \frac{h_{00}^{(3)}}{h_{00}^{(2)}} \right| &\approx \left(\frac{18l|\varepsilon \cos \Theta|}{a} \right) \frac{|1 - \frac{2\varepsilon^2}{3} (\text{ctg } \Theta)^2|}{|1 - 2(\text{ctg } \Theta)^2|} \ll 1, \\ \left| \frac{h_{11}^{(3)}}{h_{11}^{(2)}} \right| &= \left(\frac{24l|\varepsilon \cos \Theta|}{a} \right) \frac{|1 - \left(\frac{\text{ctg } \Theta}{4\text{sen } \Phi} \right)^2|}{|1 - \left(\frac{\text{ctg } \Theta}{2\text{sen } \Phi} \right)^2|} = \left| \frac{h_{22}^{(3)}}{h_{22}^{(2)}} \right| \ll 1, \\ \left| \frac{h_{12}^{(3)}}{h_{12}^{(2)}} \right| &= \frac{12l|\varepsilon \cos \Theta|}{a} = \left| \frac{h_{23}^{(3)}}{h_{23}^{(2)}} \right| = \left| \frac{h_{33}^{(3)}}{h_{33}^{(2)}} \right| \ll 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para resolver las condiciones (3.17) y (3.16) basta con notar que la cantidad

$$q \equiv \left(\frac{24|\varepsilon|l}{a} \right), \quad (3.18)$$

determina el orden de magnitud máximo de todas las expresiones en las condiciones (3.17) y (3.16). Por otro lado, la ecuación (3.10) y la condición $|h_{\alpha\beta}^{(2)}| \ll 1$ pueden estimarse en la forma

$$h_{\alpha\beta}^{(2)} \sim \frac{r_s}{a} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \ll 1. \quad (3.19)$$

Hay que notar que para resolver consistentemente las desigualdades (3.19) y (3.18) basta con garantizar que el punto de observación se encuentra a una distancia del origen de coordenadas tal que

$$l \ll a. \quad (3.20)$$

Así se puede asegurar que truncar el desarrollo de la métrica alrededor de la geodésica del observador en el término cuadrático es adecuado. Vale la pena resaltar que la condición (3.20) NO implica necesariamente que los puntos de observación

deben estar en el origen del sistema de coordenadas, el hacerlo así garantiza que la desigualdad (3.20) se cumple trivialmente. Es justamente el determinar que tanto menor que a puede o debe ser l lo que mantiene la libertad de observar puntos más allá del origen coordenado.

3.1.2. Hamiltoniano libre de Dirac

Una tétrada ortonormal correspondiente a la métrica (3.2) es:

$$\begin{aligned} e_{\bar{0}0} &= -1 + \frac{1}{2}h_{00}, & e_{\bar{a}b} &= \delta_{ab} + \frac{1}{2}h_{ab}, \\ e_{\bar{0}}^0 &= 1 + \frac{1}{2}h_{00}, & e_{\bar{a}}^b &= \delta_a^b - \frac{1}{2}h_a^b, \end{aligned} \quad (3.21)$$

que se encuentra en la referencia [36] y está expresada en las coordenadas normales de Fermi. Con esta tétrada se encuentra que las matrices de Dirac en este espaciotiempo vienen dadas por:

$$\gamma^0 = \left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right) \gamma^{\bar{0}}, \quad \gamma^k = \left(\delta^k_m - \frac{1}{2}h^k_m\right) \gamma^{\bar{m}} \quad (3.22)$$

y la contracción $\gamma^{\bar{\mu}}\Gamma_\mu$ que aparece en el Hamiltoniano libre de Dirac (2.7), escrita en términos de los coeficientes de rotación de Ricci $\tilde{\gamma}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\delta}} \equiv e^{\tau_{\bar{\alpha}}}(e_{\bar{\beta}\tau\rho})e^\rho_{\bar{\delta}}$, se escribe cómo

$$\begin{aligned} \gamma^{\bar{\mu}}\Gamma_\mu &\equiv \frac{\gamma^{\bar{\rho}}}{2} \left[e_{\bar{\rho}}^\mu i_{;\mu} + i \frac{\gamma^5}{2} \epsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\delta}}{}_{\bar{\rho}} \tilde{\gamma}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\delta}} \right] = \frac{\gamma^{\bar{\rho}}}{2} e_{\bar{\rho}}^\mu i_{;\mu} \\ &\approx \frac{\gamma^{\bar{k}}}{2\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[\sqrt{-g} \left(\delta_k^a - \frac{1}{2}h_k^a \right) \right] \delta_a^\mu = \frac{3}{8} \gamma^{\bar{k}} (\partial_k h_{00}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde la igualdad en la primera línea se debe a que en la métrica (3.2) los coeficientes de rotación de Ricci no-nulos resultan ser:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\bar{1}\bar{2}\bar{1}} &= -\frac{y}{D^2} = -\tilde{\gamma}_{\bar{2}\bar{0}\bar{0}}, & \tilde{\gamma}_{\bar{1}\bar{2}\bar{2}} &= -\frac{4x}{3D^2} = -\frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{\bar{1}\bar{3}\bar{3}}, \\ \tilde{\gamma}_{\bar{1}\bar{3}\bar{1}} &= -\frac{z}{2D^2} = \tilde{\gamma}_{\bar{2}\bar{3}\bar{2}}, & \tilde{\gamma}_{\bar{2}\bar{3}\bar{3}} &= -\frac{2y}{3D^2}, & \tilde{\gamma}_{\bar{3}\bar{0}\bar{0}} &= -\frac{2z}{D^2}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

los cuales tienen siempre dos índices repetidos y por tanto al contraerse con el símbolo de Levi-Civita anulan su contribución a (3.23). Con estos elementos podemos

escribir el Hamiltoniano de Dirac libre (2.7) en la forma

$$\hat{\mathcal{H}} \doteq \left(1 - \frac{h_{00}}{2}\right) \left[c\alpha^{\bar{k}} \left(\hat{p}_k - \frac{i\hbar}{8} \partial_k h_{00} \right) + mc^2\beta - \frac{c}{2} \alpha^{\bar{a}} h_a^k \hat{p}_k \right]. \quad (3.25)$$

En el primer capítulo se mencionó la conveniencia de trabajar con un producto interno que tuviera la forma estándar, implementando la transformación (1.86). En este caso particular, la forma explícita del operador que genera esta transformación es

$$\hat{A} = \sqrt{\mathbf{M}^{-1}} = \left(\sqrt{1 - \frac{5}{6} h_{00}} \right) \mathbf{1} \doteq 1 - \frac{5}{12} h_{00} \equiv 1 + \hat{A}_h, \quad (3.26)$$

que fue encontrada en la Ref.[36]. Al usar este operador sobre las funciones de onda, se logra que el producto interno escrito en CNF

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int \phi^* \mathbf{M} \psi d^3x \doteq \int \phi^* \left[1 + \frac{5}{6} h_{00} \right] \psi d^3x, \quad (3.27)$$

se reduzca a (1.7) y que el Hamiltoniano libre transformado

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}' &= \hat{A}^{-1} \hat{\mathcal{H}} \hat{A} \doteq \hat{\mathcal{H}} + [\hat{H}_0, \hat{A}_h] \\ &= \left(1 - \frac{h_{00}}{2}\right) \left[c\alpha^{\bar{k}} \left(\hat{p}_k - \frac{7i\hbar}{24} \partial_k h_{00} \right) + mc^2\beta - \frac{c}{2} \alpha^{\bar{a}} h_a^k \hat{p}_k \right] \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_h, \end{aligned} \quad (3.28)$$

se siga separando en una parte \hat{H}_0 de orden cero en la curvatura dada por (2.9) y una parte \hat{H}_h que es de primer orden en la curvatura, que en este espaciotiempo se reduce a

$$\hat{H}_h = -\frac{c}{2} \alpha^b \left(h_{00} \delta_b^k + h_b^k \right) \hat{p}_k - \frac{mc^2\beta}{2} h_{00} - \frac{7ic\hbar}{24} \vec{\alpha} \cdot \mathbf{g}, \quad (3.29)$$

donde se ha definido

$$g_m \equiv \partial_m h_{00} = 6\partial_b h^b_m. \quad (3.30)$$

Conviene señalar que como $h_{0a} = 0$, el Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}'$ de la ecuación (3.28) no contiene términos impares proporcionales a la masa; lo cual resultará de mucha utilidad en la reducción no-relativista usando la transformación de F-W. Nuestra expresión para el potencial efectivo de interacción, también se simplifica de manera importante pues $\hat{\mathcal{V}}_e^{CU} \propto \mathbf{h} = 0$, sin afectar la hermiticidad. Además el operador \hat{A} en (3.26) resulta proporcional a la identidad. De esta forma, el Hamiltoniano en

(2.42) toma la forma

$$\hat{\mathfrak{H}}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \sum_{n=1,2} \left(\hat{H}_0^{(n)} + \hat{H}_h^{(n)} \right) + \hat{\mathcal{W}}_e^C + \hat{\mathcal{W}}_e^B. \quad (3.31)$$

La interacción efectiva fue construida suponiendo implícitamente que el campo gravitacional induciría efectos observacionales muy pequeños, de modo que de antemano uno podría considerar todos los efectos gravitacionales en la interacción como completamente despreciables con respecto a todas las correcciones debidas a efectos de relatividad especial. Sin embargo, vamos a estimar cuidadosamente el tamaño de los efectos gravitacionales para cada situación particular en la que uno esté interesado. A continuación se presentan los estimados para dos casos específicos que se consideran con potencial de observabilidad.

3.1.3. Estimaciones de Ordenes de Magnitud

Varias de las situaciones observacionales de interés se pueden simplificar, como aquélla de un observador inercial interesado en estudiar un gas de átomos a temperatura T ubicado a una distancia l_R del origen de su sistema en caída libre. La métrica descrita en la ecuación (3.2) presenta una dependencia explícita con la curvatura en la ubicación del observador y que es constante en todo el parche de coordenadas. Por esto, para hacernos una idea de los órdenes de magnitud de estos efectos gravitacionales podemos estimar las fuerzas de marea Newtonianas en diferentes situaciones que pueden ser de interés. Por la aparente cercanía con situaciones observables consideramos:

1. El centro galáctico (C-G) y los efectos de marea a una distancia $a \sim 4 \times 10^{19}$ m (correspondiente al tamaño del denominado bulbo galáctico) del mismo. Consideraremos también los efectos de marea del centro galáctico en regiones alrededor del sistema solar (SS).
2. Dentro del sistema Solar: los efectos de marea del Sol cerca de su superficie, de la tierra cerca de su superficie y de Júpiter cerca de su superficie. Cada uno de éstos los compararemos con los efectos de marea del Sol cerca de la Tierra y de Júpiter.

Estimamos usando la gravedad Newtoniana, las aceleraciones de marea sobre objetos del tamaño de un radio de Bohr a_0 a una distancia a de la fuente del campo

gravitacional. En términos de la masa \mathcal{M} que produce el campo gravitacional, el orden de magnitud de la aceleración de marea es

$$\delta g \approx \frac{G\mathcal{M}a_0}{a^3}. \quad (3.32)$$

Para estimar el efecto gravitacional sobre el espectro atómico comparamos estas aceleraciones gravitacionales con la aceleración instantánea debida al campo Coulombiano entre protón y electrón cuando están separados una distancia a_0 , esta aceleración es

$$A_C = \frac{\alpha_e \hbar c}{m_e a_0^2}, \quad (3.33)$$

donde m_e es la masa del electrón. Definimos ahora el parámetro

$$\varpi \equiv \frac{\delta g}{A_C} \approx \left(\frac{2G\mathcal{M}}{c^2} \right) \left(\frac{m_e c}{2\alpha_e \hbar} \right) \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (3.34)$$

el cuál nos da una idea del tamaño de los efectos gravitacionales en la aceleración en relación a los electrostáticos. Con el valor de ϖ en los diferentes escenarios podemos preseleccionar el escenario más interesante para estudiar los efectos de marea gravitacionales sobre el espectro atómico.

En los escenarios del centro galáctico ($\mathcal{M} \approx 10^{42}$ kg y $a \approx 10^{19}, 10^{20}$ m) se encuentra $\varpi \sim 10^{-60}$ para los efectos sobre el borde del bulbo galáctico y $\varpi \sim 10^{-63}$ para los efectos sobre el sistema solar. En los escenarios del sistema solar encontramos que los efectos producidos por el Sol ($\mathcal{M} \approx 10^{30}$ kg y $a \approx 10^9, 10^{11}, 10^{12}$ m) son de orden $\varpi \sim 10^{-40}$ sobre la superficie del Sol, $\varpi \sim 10^{-47}$ sobre la superficie de la Tierra y $\varpi \sim 10^{-49}$ sobre la superficie de Júpiter. Dentro del sistema Solar falta decir que los efectos de los planetas (Tierra y Júpiter) cerca de sus respectivas superficies son de orden $\varpi \sim 10^{-40}$. Esto nos hace pensar que el escenario más prometedor es el del Sistema Solar.

Sin embargo los estimados con fuerzas de marea Newtonianas no son precisamente una estimación de efectos debidos a la desviación de la métrica Minkowskiana que queremos incluir en nuestra descripción del átomo. Es decir, las estimaciones anteriores se pueden asociar de manera directa sólo con acoples del tensor de Riemann, pero es posible tener también acoplamientos de las componentes de $h_{\alpha\beta}$ con los grados de libertad de los fermiones que conforman el átomo, que serán los de interés en las estimaciones de las contribuciones de los términos gravitacio-

nales al espectro. Estos últimos no se estiman usando las aceleraciones de marea Newtonianas sino las desviaciones de la métrica de Minkowski.

Para estimar los efectos de las desviaciones de la métrica plana en los casos previamente considerados, al menos cinco longitudes son relevantes y deben considerarse: el radio local de curvatura D , el tamaño característico del parche coordinado l_O , la posición estimada de un átomo l_R , la distancia entre partículas a_0 y la longitud de onda de de Broglie para el átomo λ_v . Con estas longitudes, los parámetros que miden los efectos gravitacionales son:

$$\bar{\gamma}^2 = \left(\frac{l_O}{D}\right)^2, \gamma^2 = \left(\frac{l_R}{D}\right)^2, \gamma_0^2 = \left(\frac{a_0}{D}\right)^2, \check{\gamma}^2 = \left(\frac{\lambda_v}{D}\right)^2. \quad (3.35)$$

En la práctica estimamos a_0 como el radio de Bohr del átomo. De forma directa podemos identificar la jerarquía de parámetros: $\gamma^2, \gamma_0^2, \check{\gamma}^2 \ll \bar{\gamma}^2 \ll 1$. A pesar de esto, en comparación con la formulación de una partícula para este problema, la presencia del parámetro adicional γ^2 , que se relaciona con la posición del átomo, nos permite explorar regiones donde los efectos gravitacionales debidos al aplanamiento de la métrica dentro del átomo se hacen importantes. Este parámetro puede proporcionar factores amplificadores que podrían conducir a situaciones donde se puede mejorar la observabilidad.

Aunque para el espaciotiempo de Schwarzschild se tienen simplificaciones importantes en nuestras expresiones generales, aún no es posible trabajar de manera directa con el caso más general, principalmente por las diversas escalas que aparecen en el problema. Por esta razón efectuamos estimados de orden de magnitud en los escenarios previamente descritos para determinar qué términos de la interacción efectiva resultarán dominantes para nuestro observador. Para cada escenario, los parámetros γ^2, γ_0^2 y $\check{\gamma}^2$ estiman el tamaño de los distintos efectos gravitacionales que el observador puede encontrar en su sistema de referencia. Las longitudes y los parámetros necesarios para la estimación son aquéllos que aparecen en (3.35).

El parámetro $\bar{\gamma}$ se usa para estimar el tamaño del parche coordinado del observador; dado un radio de curvatura D y fijando $\bar{\gamma}^2$, se determina la longitud $l_O = \bar{\gamma}D$. En los estimados se ha considerado $\bar{\gamma}^2 = 10^{-8}$, que es consistente con la aproximación $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ y que establece una cota superior para nuestro parámetro γ^2 . En las estimaciones que aparecen en la tabla 3.1 para l_R tomamos en cuenta la condición expresada en la ecuación (3.20). Dado que realizaremos la aproximación

	l_O (m)	γ^2	γ_0^2	$\check{\gamma}^2$
C-G - BG	$a \sim 10^{19}$ m, $l_R \sim 10^{-1}a$, $T \sim 10^4$ K			
	10^{18}	$\leq 10^{-8}$	10^{-64}	10^{-43}
C-G - SS	$a \sim 10^{20}$ m, $l_R \sim 10^{-2}a$, $T \sim 10^4$ K			
	10^{18}	$\leq 10^{-8}$	10^{-67}	10^{-43}
Sol-Sol	$a \sim 10^9$ m, $l_R \sim 10^{-1}a$, $T \sim 10^4$ K			
	10^8	$\leq 10^{-8}$	10^{-44}	10^{-20}
Sol-Tierra	$a \sim 10^{11}$ m, $l_R \sim 10^{-3}a$, $T \sim 10^2$ K			
	10^{11}	10^{-17}	10^{-51}	10^{-22}
Sol-Júpiter	$a \sim 10^{12}$ m, $l_R \sim 10^{-3}a$, $T \sim 10^2$ K			
	10^{12}	10^{-21}	10^{-53}	10^{-22}
Tierra-Tierra	$a \sim 10^7$ m, $l_R \sim 10^{-3}a$, $T \sim 10^2$ K			
	10^7	10^{-15}	10^{-44}	10^{-22}
Júpiter-Júpiter	$a \sim 10^8$ m, $l_R \sim 10^{-3}a$, $T \sim 10^2$ K			
	10^8	10^{-14}	10^{-44}	10^{-22}

Tabla 3.1: Estimaciones para el Hidrógeno de los parámetros l_O y γ en los escenarios considerados. Se especifican las cantidades a , T y l_R consideradas. Se usa para el Hidrógeno $m \sim 10^{-27}$ kg, siempre se usa $a_0 \sim 10^{-8}$ m. Las masas usadas para las fuentes del campo gravitacional son: 10^{42} kg para el centro galáctico (C-G), 10^{30} kg para el Sol, 10^{27} kg para Júpiter y 10^{23} kg para la Tierra. La notación **A-B** significa: “ La masa de la fuente A produce desviaciones de la métrica plana alrededor de B”.

no-relativista en nuestro Hamiltoniano (3.31), deben considerarse también parámetros adimensionales relacionados con la velocidad del átomo $\eta \equiv V_R \cdot c^{-1}$ y la del electrón $\eta_0 \sim \alpha_e \approx 7,3 \times 10^{-3}$. En condiciones de laboratorio $\eta \sim 10^{-11} - 10^{-6}$ y para $T \sim 10^4 - 10^2$ K, que corresponde con buena parte de los objetos observables en los escenarios considerados, encontramos $\eta \sim 10^{-5} - 10^{-6}$. Así, estamos estimando que $\eta\eta_0 \sim 10^{-7} - 10^{-8}$ para los efectos relativistas en el átomo fuera del laboratorio y a las temperaturas consideradas.

3.1.4. Condiciones que determinan la corrección gravitacional dominante

Aprovechando la libertad en la elección de l_R , que incluye la restricción (3.20), podemos encontrar configuraciones para las que las desviaciones de la métrica plana que van como $\sim \gamma^2$ resultan a lo más del mismo orden, que las correcciones relativistas $\sim \eta\eta_0$. Estos casos particulares corresponden a:



Figura 3.1: Ilustración de la situación considerada en los escenarios para los que se estiman los diferentes parámetros gravitacionales. En particular se ilustran los casos en los que, de manera natural, el tamaño del parche coordenado permite consistencia en el uso de las CNF y un $l_R \neq 0$.

- Un observador en los alrededores del Sol ($a \sim 10^{20}$ m), que cae radialmente hacia el centro galáctico y que observa los átomos cerca del borde de su parche coordenado ($l_R \sim l_O \sim 10^{-2}a$). Este caso está denotado por “**C-G Sistema Solar**” en la tabla 3.1.
- Un observador en los alrededores del Sol ($a \sim 10^8$ m), que cae radialmente hacia el Sol y que observa los átomos cerca del borde de su parche coordenado ($l_R \sim l_O \sim 10^{-1}a$). Este caso está denotado por “**Sol-Sol**” en la tabla 3.1.

Los demás casos cuyos estimados aparecen en la tabla 3.1, aunque cumplen la condición $l \ll a$ conducen a situaciones irreales en las que el observador debe estar adentro de la masa o bien no satisfacen la situación ideal en la que $\gamma^2 \sim \eta\eta_0$.

Con esto en mente, consideraremos la situación idealizada en la que nuestro observador cae radialmente hacia el centro galáctico y que mientras se encuentra alrededor del Sol observa un gas ideal de átomos Hidrogenoides a unos 10^{18} m del Sol. Para este observador se cumplen las siguientes relaciones entre los parámetros gravitacionales que miden las desviaciones de la métrica de Minkowski:

$$\gamma^2 \gg \gamma_0^2, \check{\gamma}^2, \eta^2, \quad \gamma^2 \lesssim \eta\eta_0, \quad \gamma^2 \ll \eta_0^2. \quad (3.36)$$

Esta situación ideal nos permite estimar el orden de magnitud de varios términos en $\hat{\mathcal{W}}_e$.

Con el espaciotiempo de Schwarzschild como fondo, el potencial de interacción es invariante ante la transformación (1.86) y cada uno de los términos que sobreviven de (2.37) es hermítico por sí mismo en la nueva forma del producto interno.

Los términos relevantes para las estimaciones son las expresiones (C.2) a (C.4) del apéndice, cuyas convenciones se emplean en las estimaciones que siguen. Con las sustituciones

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow a_0, & \mathbf{R} &\rightarrow l_R, & -\frac{Z\alpha_e\hbar c}{a_0} &\rightarrow E_0, \\ h_{\alpha\beta}^{(r)} &\rightarrow \gamma_0^2, & h_{\alpha\beta}^{(R)} &\rightarrow \gamma^2, & \mathcal{Q}_{\alpha a\beta b} \mathbf{R}^{(a\mathbf{r}^b)} &\rightarrow \gamma\gamma_0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

en (C.2), encontramos que la parte electrostática del potencial de interacción se puede estimar como

$$\frac{\hat{\mathcal{W}}_e^C}{E_0} \simeq 1 - \left[\gamma^2 + (1 + \zeta) \gamma_0^2 + (1 - \zeta) \gamma\gamma_0 \right] + \left(\gamma^2 \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \right), \quad (3.38a)$$

siendo $\zeta \equiv \mu/M$ y donde hemos escrito solamente los ordenes de magnitud de cada contribución. Además, se retuvo el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ para identificar los términos que lo contienen. En el régimen (3.36), el término electrostático puede reducirse a

$$\frac{\hat{\mathcal{W}}_e^C}{E_0} \sim 1 - \gamma^2 + \left(\gamma^2 \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \right), \quad (3.38b)$$

que se traduce en

$$\hat{\mathcal{W}}_e^C \simeq -\frac{Z\alpha_e\hbar c}{r} \left[1 - \frac{1}{2} h_{00}^{(R)} + \zeta_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) \right]. \quad (3.38c)$$

De forma similar, e introduciendo además $\vec{\alpha}_{(1)} \sim \eta$ y $\vec{\alpha}_{(2)} \sim \eta_0$ en (3.37), se encuentra que la contribución dominante del término magnético (C.4) es

$$\frac{\hat{\mathcal{W}}_e^B}{E_0/2} \sim \eta\eta_0 + (\eta\hat{\mathbf{n}})(\eta_0\hat{\mathbf{n}}), \quad (3.38d)$$

que equivale a

$$\hat{\mathcal{W}}_e^B \simeq \frac{Z\alpha_e\hbar c}{2r} \left[\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)} + \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \left(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \right]. \quad (3.38e)$$

Recordamos que en el caso de Schwarzschild $h_{0a} = 0$ ($\mathbf{h} = 0$), lo que anula la contribución de (C.3). La expresión (3.38e) es justamente el término de Breit de la relatividad especial. Dado que γ^2 es del mismo orden que $\eta\eta_0$, nuestro observador puede determinar que $\hat{\mathcal{W}}_e^C \sim \hat{\mathcal{W}}_e^B$. En otras palabras, bajo las hipótesis anteriores,

aun cuando las correcciones gravitacionales a la componente fina del espectro resultan ser varios ordenes de magnitud menores que las correcciones hiperfinas, estas son significativamente mayores que las correcciones de orden γ_0^2 que se estudian al abordar el problema dentro de la aproximación de un cuerpo.

Este tipo de efectos no son estudiados comúnmente en la literatura, principalmente porque se suele considerar al átomo en el origen de coordenadas y con ello las correcciones tipo γ^2 son nulas; lo que a su vez deja como parámetro dominante a γ_0^2 , que aún acompañado por términos del orden de la energía en reposo no da lugar a efectos observables. Nosotros vamos a explorar algunas de las consecuencias sobre el espectro atómico debidas a $\hat{\mathcal{W}}_e^C$ que corrige la interacción electrostática entre los fermiones que forman al átomo. Es básicamente por la libertad adicional que provee la distancia entre el átomo y el origen del sistema inercial, que podemos amplificar los efectos de la métrica en las vecindades del átomo.

En particular estudiamos los efectos gravitacionales codificados en $\hat{\mathcal{W}}_e^C$ que en nuestras estimaciones resultan ser los efectos gravitacionales dominantes. Esto es similar a lo que se ha propuesto en la referencia [75]. Al intentar efectuar reducciones similares a las hechas en $\hat{\mathcal{W}}_e$, mediante la estimación de magnitudes relativas, para los Hamiltonianos libres de cada partícula, nos encontramos con que la eliminación de algunos términos daña la hermiticidad. Esto se debe a que en la parte libre cada término no es hermítico por si solo bajo la nueva forma del producto interno. Debido a esto, dejamos la parte libre sin reducción alguna y sólo cuando se haya tomado el límite no-relativista estudiaremos las reducciones que puedan ser pertinentes en esta parte del Hamiltoniano total.

3.2. Estimación de los corrimientos inducidos en el espectro por el término dominante de las correcciones gravitacionales: interacción $\hat{\mathcal{W}}_e^C$

El Hamiltoniano relativista de dos cuerpos que tomamos como punto de partida es

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \sum_{n=1,2} \left[c\vec{\alpha}_{(n)} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{(n)} + m_{(n)}c^2\beta_{(n)} - c\alpha_{(n)}^b \left(h_{00}\delta_b^k + h_b^k \right)_{(n)} \hat{p}_k^{(n)} - \frac{m_{(n)}c^2\beta_{(n)}}{2} h_{00}^{(n)} - \frac{3ic\hbar}{4} \vec{\alpha}_{(n)} \cdot \mathbf{g}_{(n)} \right] - \frac{Z\alpha_e\hbar c}{r} \left[1 - \frac{1}{2}h_{00}^{(R)} + \zeta_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) \right]. \quad (3.39)$$

Para estimar los corrimientos de algunas líneas espectrales, debemos realizar primero una transformación F-W de dos partículas sobre nuestro Hamiltoniano de dos cuerpos. Las expresiones más generales para el Hamiltoniano transformado se presentan en la Ref.[68] y en (1.83), pero para nuestro caso particular resulta suficiente considerar sólo

$$\hat{H}_{FW} = \sum_{n=1,2} \left\{ \beta_{(n)}m_{(n)}c^2 + \mathcal{E}_{(n)} + \frac{\beta_{(n)}\mathcal{O}_{(n)}^2}{2m_{(n)}c^2} - \frac{\beta_{(n)}\mathcal{O}_{(n)}^4}{8(m_{(n)}c^2)^3} - \frac{[\mathcal{O}_{(n)}, [\mathcal{O}_{(n)}, \mathcal{E}_{(n)}]]}{8(m_{(n)}c^2)^2} \right\} + (\mathcal{E}\mathcal{E})_{\mathcal{W}} - \frac{[\mathcal{O}_{(1)}, [\mathcal{O}_{(1)}, (\mathcal{E}\mathcal{E})_{\mathcal{W}}]]}{8(m_1c^2)^2} - \frac{[\mathcal{O}_{(2)}, [\mathcal{O}_{(2)}, (\mathcal{E}\mathcal{E})_{\mathcal{W}}]]}{8(m_2c^2)^2}. \quad (3.40)$$

En el cálculo del Hamiltoniano transformado, todos los operadores de momento lineal se mueven hacia la derecha, de modo que actúan directamente sobre la función de onda. Los términos requeridos en el Hamiltoniano transformado de la ecuación (3.40) son

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(n)} &= c\alpha_{(n)}^b \left[\delta_b^k - \frac{1}{2} \left(h_{00}\delta_b^k + h_b^k \right) \right]_{(n)} \hat{p}_k^{(n)} - \frac{7ic\hbar}{24} \vec{\alpha}_{(n)} \cdot \mathbf{g}_{(n)}, \\ \mathcal{E}_{(n)} &= -\frac{m_{(n)}c^2}{2} h_{00}^{(n)} \beta_{(n)}, \\ (\mathcal{E}\mathcal{E})_{\mathcal{W}} &= -\frac{Z\alpha_e\hbar c}{r} \left[1 - \frac{1}{2}h_{00}^{(R)} + \zeta_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) \right] \equiv -\frac{Z\alpha_e\hbar c}{r} + \Phi_e^C \equiv \mathcal{E}\mathcal{E}_C^{(0)} + \Phi_e^C, \end{aligned} \quad (3.41a)$$

con h_{00} y h_{ab} dados por (3.2) y evaluados en las coordenadas correspondientes a cada partícula.

A continuación, usamos las expresiones generales (1.84), transformamos todos los operadores de posición y momento de las partículas de modo que $(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, usando las expresiones que aparecen en (C.1). Por abuso de notación, nos referimos a (\mathbf{R}, \mathbf{P}) como las variables asociadas a la posición media del átomo, que no deben confundirse con las variables asociadas a algún centro de masa.

La magnitud de los diferentes términos se estiman con ayuda de las identificaciones

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(R)} &\sim \gamma^2, & h_{\mu\nu}^{(r)} &\sim \gamma_0^2, \\ \hat{\mathbf{P}} &\sim \mu c \eta_0, & \mathbf{L}_{(r)} &\sim \hbar, & \mathbf{S}_{(2)} &\sim \hbar, \\ \hat{\mathbf{P}} &\sim M c \eta, & \mathbf{L}_{(R)} &\sim M c l_R \eta, & \mathbf{S}_{(1)} &\sim \hbar. \end{aligned} \quad (3.41b)$$

A modo de ejemplo, veamos como se trabaja el Hamiltoniano libre de una partícula. Empecemos con

$$\mathcal{O}_{(1)}^2 = c^2 \left\{ (1 - h_{00}) \hat{\mathbf{p}}^2 - h^{ab} \hat{p}_a \hat{p}_b - \frac{\hbar}{2} \epsilon^{abc} \Sigma_c \left[g_a \hat{p}_b - (\partial_a h_b^d) \hat{p}_d \right] + \frac{35i\hbar}{12} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right\}, \quad (3.41c)$$

ahora transformamos a las coordenadas $(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ y encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(1)}^2 &\rightarrow c^2 \left\{ \left(1 - h_{00}^R + \frac{2\mu}{M} \mathcal{Q}_{0i0j} R^{(i} r^{j)} \right) (\hat{\mathbf{P}}^2 - 2\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}^2) \right. \\ &\quad \left. - \left(h_{ab}^R - \frac{2\mu}{M} \mathcal{Q}_{aibj} R^{(i} r^{j)} \right) (\hat{P} - \hat{p})_a (\hat{P} - \hat{p})_b \right. \\ &\quad \left. - \epsilon^{abc} S_c \left[\left(\frac{2}{D^2} (\delta_{ab} - 3\delta_{a3}\delta_{b3}) \left(R - \frac{\mu}{M} r \right)^b \right) (\hat{P} - \hat{p})_b + (\partial_a h_b^d) (\hat{P} - \hat{p})_d \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.41d)$$

En la última línea no se evaluó explícitamente $\partial_a h_b^d$ ni se incluyó el término proporcional a $\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{p}}$, pues para efectos de órdenes de magnitud éstos tienen la misma magnitud que el primer término de la última línea. En la estimación de magnitudes no necesitamos toda la expresión (3.41d), basta con elegir 2 términos represen-

tativos: tomamos la primera línea y el primer término de la última línea

$$\mathcal{O}_{(1)}^2 \rightarrow c^2 \left\{ \left(1 - h_{00}^R + \frac{2\mu}{M} \mathcal{Q}_{0i0j} R^{(i)rj} \right) (\hat{\mathbf{P}}^2 - \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}^2) - \epsilon^{abc} S_c \left[\left(\frac{2}{D^2} (\delta_{ab} - 3\delta_{a3}\delta_{b3}) \left(R - \frac{\mu}{M} r \right)^b \right) (\hat{P} - \hat{p})_b \right] \right\}. \quad (3.41e)$$

Ahora, con ayuda de (3.41b) estimamos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(1)}^2 &\sim \\ M^2 c^4 &\left\{ \left(1 - \gamma^2 + 2\zeta\gamma\gamma_0 \right) \left(\eta^2 - 2\zeta\eta\eta_0 + \zeta^2\eta_0^2 \right) - \frac{\hbar}{McD} [(\gamma - \zeta\gamma_0) (\eta - \zeta\eta_0)] \right\} \\ &\sim M^2 c^4 \left[\left(1 - \gamma^2 \right) \eta^2 - \frac{v\hbar}{Mv c D} (\gamma\eta) \right] = M^2 c^4 \left[\left(1 - \gamma^2 \right) \eta^2 - \frac{\lambda_v}{D} (\gamma\eta^2) \right] \\ &= M^2 c^4 \left[\left(1 - \gamma^2 \right) \eta^2 - \check{\gamma}\gamma\eta^2 \right] \sim M^2 c^4 \left(1 - \gamma^2 \right) \eta^2 \\ &\Rightarrow \boxed{\mathcal{O}_{(1)}^2 \sim M^2 c^4 \left(1 - \gamma^2 \right) \eta^2}, \quad (3.41f) \end{aligned}$$

lo cuál se traduce en la aproximación

$$\frac{\mathcal{O}_{(1)}^2}{2m_1 c^2} \approx \left[\left(1 - h_{00}^{(R)} \right) \delta_{ab} - h_{ab}^{(R)} \right] \frac{\hat{\mathbf{P}}^a \hat{\mathbf{P}}^b}{2M}. \quad (3.41g)$$

De forma completamente análoga se demuestra

$$\frac{\mathcal{O}_{(2)}^2}{2m_2 c^2} \approx \left[\left(1 - h_{00}^{(R)} \right) \delta_{ab} - h_{ab}^{(R)} \right] \frac{\hat{\mathbf{P}}^a \hat{\mathbf{P}}^b}{2\mu} \quad (3.41h)$$

y los demás términos dominantes que presentamos a continuación.

A partir de este punto, consideramos cero el espín protón ($\mathbf{S}_{(1)} = 0$) debido a que posteriormente se hará un análisis semi-clásico del problema donde las coordenadas ($\mathbf{R}, \hat{\mathbf{P}}$) se tratan clásicamente.

Los siguientes términos dominantes que obtenemos son: para los operadores im-

pares al cuadrado que aparecen en (3.40) sobreviven

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}_{(1)}^2}{2m_1c^2} + \frac{\mathcal{O}_{(2)}^2}{2m_2c^2} &\approx \left[(1 - h_{00}^{(R)}) \delta_{ab} - h_{ab}^{(R)} \right] \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2\mu} \right) + \dots, \\ &\sim (1 + \gamma^2) \left(\frac{Mc^2}{2} \eta^2 + \frac{\mu c^2}{2} \eta_0^2 \right) + \dots. \end{aligned} \quad (3.41i)$$

De los operadores impares a la cuarta potencia en (3.40) nos quedamos con

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}_{(1)}^4}{8(m_1c^2)^3} + \frac{\mathcal{O}_{(2)}^4}{8(m_2c^2)^3} &\approx (1 - 2h_{00}^{(R)}) \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8\mu^3c^2} - (2h_{ab}^{(R)} \hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{8\mu^3c^2} + \dots, \\ &\sim (1 - 2\gamma^2) \frac{\mu c^2}{8} \eta_0^4 - (2\gamma^2 \eta_0^2) \frac{\mu c^2}{8} \eta_0^2 + \dots. \end{aligned} \quad (3.41j)$$

Las contribuciones de los operadores tipo $[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]]$ en (3.40) para cada partícula conducen a

$$\begin{aligned} \frac{[\mathcal{O}_{(1)}, [\mathcal{O}_{(1)}, \mathcal{E}_{(1)}]]}{8(m_1c^2)^2} + \frac{[\mathcal{O}_{(2)}, [\mathcal{O}_{(2)}, \mathcal{E}_{(2)}]]}{8(m_2c^2)^2} &\approx -\frac{1}{8} \cdot 4h_{00}^{(R)} \delta_{ab} \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2\mu} \right) + \dots, \\ &\sim -\frac{1}{2} \gamma^2 \left(\frac{Mc^2}{2} \eta^2 + \frac{\mu c^2}{2} \eta_0^2 \right) + \dots. \end{aligned} \quad (3.41k)$$

Las primeras contribuciones al acoplamiento espín-órbita y a la interacción de Darwin, provenientes del término de Coulomb usual en (3.40), son

$$\begin{aligned} -\frac{[\mathcal{O}_{(1)}, [\mathcal{O}_{(1)}, \mathcal{E}\mathcal{E}_C^{(0)}]]}{8Z\alpha_e \hbar c (m_1c^2)^2} - \frac{[\mathcal{O}_{(2)}, [\mathcal{O}_{(2)}, \mathcal{E}\mathcal{E}_C^{(0)}]]}{8Z\alpha_e \hbar c (m_2c^2)^2} &\approx \\ &\left(1 - h_{00}^{(R)} \right) \left[\frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{\mu^2 c^2} \right) \mathbf{L}_{(r)} \cdot \mathbf{S}_{(2)} + \left(\frac{\pi \hbar^2}{2\mu^2 c^2} \right) \delta^3(\mathbf{r}) \right] \\ &+ \frac{1}{16r^3} \left(\frac{\hbar}{\mu c} \right)^2 \left(h_{00}^{(R)} + 3h_{ab}^{(R)} \hat{\mathbf{n}}^a \hat{\mathbf{n}}^b \right) + \dots, \\ &\sim (1 - \gamma^2) \left[\mu c^2 \frac{(Z\alpha_e)^3}{\hbar c} \right] + \frac{\mu c^2 (Z\alpha_e)^3}{16 \hbar c} \gamma^2 (1 + 3\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}). \end{aligned} \quad (3.41l)$$

Resaltamos la tercera línea en la ecuación anterior, pues presenta una corrección efectiva a la interacción electrostática de orden $\mu c^2 \gamma^2 (Z\alpha_e)^4$. Pues en efecto, este

término, con las dimensiones correctas de energía, es

$$\begin{aligned}
\frac{Z\alpha_e\hbar c}{16r^3} \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \left(h_{00}^{(R)} + 3h_{ab}^{(R)} \hat{\mathbf{n}}^a \hat{\mathbf{n}}^b\right) &\sim \frac{Z\alpha_e\hbar c}{a_0^3} \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \gamma^2 \\
&= Z\alpha_e\hbar c \left(\frac{Z\alpha_e\mu c}{\hbar c}\right)^3 \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \gamma^2 \quad (3.41m) \\
&= \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \gamma^2.
\end{aligned}$$

En comparación con otros términos, éste resulta ser menor que el término modificado de Coulomb $\Phi_e^C \sim \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \gamma^2$ por un factor de 10^{-4} . Esta corrección electrostática que aparece en la ecuación (3.41m) no se ha presentado antes en la literatura relacionada con efectos gravitacionales en sistemas atómicos.

Por último, las contribuciones restantes a las interacciones de Darwin y de espín-órbita, que provienen del término modificado de Coulomb en (3.40), resultan ser

$$\begin{aligned}
&-\frac{[\mathcal{O}_{(1)}, [\mathcal{O}_{(1)}, \Phi_e^C]]}{8Z\alpha_e\hbar c (m_1c^2)^2} - \frac{[\mathcal{O}_{(2)}, [\mathcal{O}_{(2)}, \Phi_e^C]]}{8Z\alpha_e\hbar c (m_2c^2)^2} \approx \\
&\left(\xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) - \frac{1}{2}h_{00}^{(R)}\right) \left[\frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{\mu^2c^2}\right) \mathbf{L}_{(r)} \cdot \mathbf{S}_{(2)} + \left(\frac{\pi\hbar^2}{2\mu^2c^2}\right) \delta^3(\mathbf{r})\right] + \dots \\
&\sim \gamma^2 \left(\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}\right) \left[\mu c^2 \frac{(Z\alpha_e)^3}{\hbar c}\right]. \quad (3.41n)
\end{aligned}$$

Reuniendo las ecuaciones (3.41) para completar (3.40), obtenemos un Hamiltoniano del sistema en el régimen no-relativista

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{FW} &= (M + \mu) c^2 \left(1 - \frac{h_{00}^{(R)}}{2}\right) + \left[\left(1 - \frac{3}{2}h_{00}^{(R)}\right) \delta_{ab} - h_{ab}^{(R)}\right] \left(\frac{\hat{\mathbf{P}}^a \hat{\mathbf{P}}^b}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2\mu}\right) \\
&- \left(1 - 2h_{00}^{(R)}\right) \frac{\hat{\mathbf{P}}^4}{8\mu^3c^2} + \left(2h_{ab}^{(R)} \hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b\right) \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{8\mu^3c^2} - \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r}\right) \left[1 - \frac{1}{2}h_{00}^{(R)} + \xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}})\right] \\
&+ \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left(1 - \frac{5}{2}h_{00}^{(R)} + \xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}})\right) \left[\left(\frac{a_0}{r}\right)^3 \mathbf{L}_{(r)} \cdot \mathbf{S}_{(2)} + \left(\frac{\pi}{2}a_0^3\right) \delta^3(\mathbf{r})\right] \\
&+ \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left(\frac{a_0}{2r}\right)^3 \left(h_{00}^{(R)} + 3h_{ab}^{(R)} \hat{\mathbf{n}}^a \hat{\mathbf{n}}^b\right). \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Con el objeto de estimar los órdenes de magnitud de los corrimientos en las líneas espectrales inducidos por la gravitación, este operador puede reducirse un poco

más. En primer lugar podemos estimar sus contribuciones cómo

$$\hat{H}_{FW} \sim Mc^2 (1 + \gamma^2) (1 + \eta^2) + \mu c^2 (1 + \gamma^2) \left[1 + \eta_0^2 (1 + \eta_0^2) + Z^2 \alpha_e^2 + Z^4 \alpha_e^4 \right]. \quad (3.43a)$$

Aquí se presenta la posibilidad de una reducción adicional, pues $\gamma^2 (Z\alpha_e)^4 \mu c^2$ puede despreciarse comparado con $\gamma^2 (Z\alpha_e)^2 \mu c^2$. Esto implica que el operador en la ecuación (3.41m), que todo el operador en (3.41n), que el término proporcional a $h_{00}^{(R)}$ en la ecuación (3.41l) y que aquellos términos en la expresión (3.41j) proporcionales a $h_{\mu\nu}^{(R)}$ pueden ser despreciados. Así finalmente nos quedamos con

$$\hat{H}_{FW} \approx Mc^2 (1 + \gamma^2) (1 + \eta^2) + \mu c^2 \gamma^2 (1 + \eta_0^2 + Z^2 \alpha_e^2) + \mu c^2 \left[1 + \eta_0^2 (1 + \eta_0^2) + Z^2 \alpha_e^2 (1 + Z^2 \alpha_e^2) \right], \quad (3.43b)$$

que corresponde al operador

$$\begin{aligned} \hat{H}_{FW} = & Mc^2 \left(1 - \frac{h_{00}^{(R)}}{2} \right) - \frac{\mu c^2}{2} h_{00}^{(R)} + \left[\left(1 - \frac{3}{2} h_{00}^{(R)} \right) \delta_{ab} - h_{ab}^{(R)} \right] \frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2M} \\ & + \mu c^2 + \left[\left(1 - \frac{3}{2} h_{00}^{(R)} \right) \delta_{ab} - h_{ab}^{(R)} \right] \frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2\mu} - \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8\mu^3 c^2} - \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \\ & + \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left[\left(\frac{a_0}{r} \right)^3 \frac{\mathbf{L}_{(r)} \cdot \mathbf{S}_{(2)}}{\hbar^2} + \left(\frac{\pi}{2} a_0^3 \right) \delta^3(\mathbf{r}) \right] \\ & + \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \left[\frac{1}{2} h_{00}^{(R)} + \xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) \right]. \quad (3.44) \end{aligned}$$

En la primera línea de (3.44) se identifica una energía en reposo ($\sim Mc^2$), una energía cinética no-relativista ($\sim Mc^2 \eta^2$) y las siguientes correcciones gravitacionales: corrimientos¹ de las energías en reposo ($\sim \gamma^2 \mu c^2, \gamma^2 Mc^2$) y de la energía cinética ($\sim \gamma^2 Mc^2 \eta^2$). En la segunda línea, una energía en reposo ($\sim \mu c^2$), una energía cinética ($\sim \mu c^2 \eta_0^2$), una corrección relativista a la energía cinética ($\sim \mu c^2 \eta_0^4$), la interacción de Coulomb ($\sim \mu c^2 (Z\alpha_e)^2$) y el corrimiento gravitacional de la energía cinética ($\sim \mu c^2 \gamma^2 \eta_0^2$). La tercera línea presenta el Hamiltoniano no-relativista de estructura fina ($\sim \mu c^2 (Z\alpha_e)^4$) con los términos de interacción espín-órbita y de Darwin.

¹El término *corrimiento* se usa sólo por la analogía con las expresiones para el corrimiento al rojo de las frecuencias de fotones en un campo gravitacional débil.

La última línea presenta la interacción modificada de Coulomb ($\sim \mu c^2 \gamma^2 (Z\alpha_e)^2$).

La reducción presentada en (3.44) puede considerarse análoga al llamado *régimen de fuerzas de marea pequeñas* que se estudia en la Ref.[40]. Sin embargo, hay que resaltar que en nuestro caso, la perturbación gravitacional se evalúa en la posición estimada del átomo, que se encuentra muy lejos del origen del sistema coordenado. El término de corrimiento de masa $\sim \mu c^2 \gamma^2$ ciertamente es el más importante en la parte electrónica de (3.43b) pero no influye sobre el espectro. Estos términos dominantes son proporcionales a γ^2 y NO a γ_0^2 , que son las contribuciones estudiadas con más frecuencia en la literatura. De acuerdo a nuestro análisis, la contribución gravitacional más importante al espectro electrónico proviene de los términos proporcionales a $\xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}})$ que dan cuenta del acoplamiento del electrón a la métrica en la ubicación del átomo.

Ahora podemos fijar el esquema en el que estudiamos las consecuencias de nuestro Hamiltoniano reducido de dos cuerpos. Puesto que las variables \mathbf{R} y \mathbf{r} no están desacopladas, y por lo tanto no hemos identificado el centro de masa correcto tratamos el problema de los dos cuerpos usando la aproximación de Born-Oppenheimer, en la que se considera a \mathbf{R} como la *variable lenta*, que representa la posición clásica del átomo, y a \mathbf{r} como la *variable rápida*. De este modo, para el movimiento relativo $(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}})$ las variables lentas entran como parámetros en la perturbación y la posición del átomo podrá describirse con un Hamiltoniano clásico

$$H_R(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = H_0(\mathbf{R}, \mathbf{P}) + \varepsilon(\mathbf{R}), \quad (3.45)$$

donde

$$H_0 \equiv \left[\left(1 - \frac{3}{2} h_{00}(\mathbf{R}) \right) \delta^{ab} - h^{ab}(\mathbf{R}) \right] \frac{\mathbf{P}_a \mathbf{P}_b}{2M} + \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{M} \right) h_{00}(\mathbf{R}) \right] M c^2, \quad (3.46)$$

por la separación de contribuciones en (3.44). Los $\varepsilon(\mathbf{R})$ en la ecuación (3.45) son los valores propios del Hamiltoniano electrónico, que escribiremos como

$$\hat{H}_e(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}) = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}_{\gamma^2}. \quad (3.47)$$

Usando la expresión (3.44), se identifica el Hamiltoniano no-perturbado con

$$\hat{H}^{(0)} \equiv \mu c^2 + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r}\right) - \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8\mu^3 c^2} + \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left[\left(\frac{a_0}{r}\right)^3 \frac{\mathbf{L}_{(r)} \cdot \mathbf{S}_{(2)}}{\hbar^2} + \left(\frac{\pi}{2} a_0^3\right) \delta^3(\mathbf{r}) \right], \quad (3.48a)$$

que corresponde a los términos no-relativistas que describen a los átomos hidrogenoides con toda la interacción que da lugar a la estructura fina. Las correcciones gravitacionales dominantes sobre la estructura electrónica que se consideran son

$$\hat{H}_{\gamma^2} \equiv -\frac{1}{2} h_{00}(\mathbf{R}) \left[3 \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} \right) - \frac{Z\alpha_e \hbar c}{r} \right] - h_{ab}(\mathbf{R}) \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2\mu} - Z\alpha_e \hbar c \frac{\hat{\mathbf{n}}^a \hat{\mathbf{n}}^b}{r} \right]. \quad (3.48b)$$

Espectro del Hamiltoniano electrónico $\hat{H}^{(0)} + \hat{H}_{\gamma^2}$

Antes de estudiar dicho espectro vale la pena dedicar algunas líneas a un detalle importante en el tratamiento que haremos del problema de dos cuerpos y que no hemos aclarado suficientemente. Cuando en se habla del *espectro* de un átomo libre compuesto por 2 cargas interactuantes es necesario separar primero el problema en 2 movimientos independientes, uno asociado al centro de masa del sistema que describe el movimiento del sistema como un todo y otro asociado al movimiento relativo. Lograda esa separación los valores propios y las funciones propias de los grados de libertad del movimiento relativo se asocian directamente con el espectro y la configuración electrónica del átomo. Así, cuando no es posible la separación del problema la noción de espectro pierde sentido estricto y los tratamientos perturbativos que se hagan del problema acoplado de los dos cuerpos son sólo aproximaciones cuya interpretación en términos del espectro verdadero se hace complicada.

En nuestro Hamiltoniano (3.44) las variables $(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ no separan el problema en dos independientes porque nos son variables suficientemente adecuadas para describir el movimiento del centro de masa y el movimiento relativo. Hasta el momento hemos supuesto que en el límite de bajas energías las coordenadas $(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ son únicas en la separación de un problema de dos cuerpos con interacción mutua puramente electrostática, sin embargo la presencia de la gravedad implica que aún en el límite de bajas energías y de campo gravitacional débil esas

coordenadas no son las adecuadas para una descripción completa del átomo en términos del espectro atómico verdadero y del movimiento del átomo como un todo.

En consecuencia, a partir de este momento no podemos conectar directamente muchas de las conclusiones de nuestro ejercicio académico con observaciones que tienen claramente asociadas nociones que nuestra descripción actual no satisface. Esto no representa de ninguna manera un retroceso en nuestro trabajo sino que más bien resalta la necesidad de encontrar una descripción mecánico cuántica correcta que permita mostrar explícitamente, en situaciones más generales que las encontradas en la literatura, que los sistemas atómicos satisfacen principios tan fundamentales como el de equivalencia.

Parte importante de estudiar sistemas cuánticos en campos gravitacionales es mostrar de qué modo se satisfacen los principios fundamentales de las teorías de gravedad, cómo es que dentro de las libertades que la RG y la MC permiten se puede verificar de manera universal que se cumplen los postulados iniciales de las teorías gravitacionales. Este ejercicio no es fácil, hasta donde sabemos no ha sido resuelto y la referencia que logra algo cercano a ello se restringe a espaciotiempos con simetría esférica y al régimen de campo débil [76].

Sin embargo, esperamos que mientras el verdadero centro de masa se encuentre dentro del átomo y el tamaño del átomo se pueda seguir estimando como el de una esfera con radio a_0 , los ordenes magnitud de las correcciones gravitacionales en teoría de perturbaciones que desarrollamos a continuación den una idea realista de los efectos de los campos gravitacionales sobre los espectros atómicos. Por ello continuamos estudiando el problema del átomo en las variables $(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p})$.

Con este objeto consideramos al operador $\hat{H}_{\gamma 2}$ como una perturbación de $\hat{H}^{(0)}$, cuya solución exacta conocemos. Como se menciona en el apéndice E, los estados propios no-perturbados vienen dados por (D.13) y sus valores propios correspondientes $E_{n\kappa}^{(0)}$ están dados por (D.11). Los niveles de energía de $\hat{H}^{(0)}$ presentan dos tipos de degeneración:

1. Una degeneración *gruesa* tal que dados n y j existen dos estados con la misma energía. Esos estados corresponden a aquéllos con $\kappa = \pm (j + 1/2)$ o equivalentemente a $l = j \pm 1/2$.
2. La degeneración habitual del número cuántico magnético m .

Para ilustrar algunas consecuencias de la perturbación gravitacional sobre la degeneración gruesa, denotamos por \hat{V} aquél término en (3.48b) proporcional a $h_{ab}^{(R)}$ y lo reescribiremos como un operador tensorial respecto al momento angular orbital. Siguiendo la Ref.[1] encontramos la descomposición

$$\hat{V} = - \left[A \hat{V}_{+2}^{(2)} + A^* \hat{V}_{-2}^{(2)} \right] + \left[B \hat{V}_{+1}^{(2)} - B^* \hat{V}_{-1}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(h_{00}^{(R)} - 9h_{33}^{(R)} \right) \hat{V}_0^{(2)} + \frac{2}{3} h_{00}^{(R)} \hat{V}_0^{(0)}, \quad (3.48c)$$

donde se han definido

$$\begin{aligned} A &\equiv h_{11}^{(R)} - h_{22}^{(R)} - 2ih_{12}^{(R)}, \\ B &\equiv h_{13}^{(R)} - ih_{23}^{(R)} \end{aligned} \quad (3.48d)$$

y cada $\hat{V}_q^{(k)}$ es de la forma

$$\hat{V}_q^{(k)} \equiv \frac{1}{2\mu} T_q^{(k)}(\mathbf{p}) - \frac{Z\alpha_e \hbar c}{r} T_q^{(k)}(\mathbf{n}), \quad (3.48e)$$

siendo $T_q^{(k)}(\mathbf{p})$ y $T_q^{(k)}(\mathbf{n})$ los tensores esféricos asociados a los operadores

$$\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{n}}^a \hat{\mathbf{n}}^b, \quad (3.48f)$$

respectivamente. Para cualquier vector cartesiano $\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$ la forma explícita de los operadores tensoriales $T_q^{(k)}(\mathbf{v})$ es:

$$\begin{aligned} T_0^{(0)} &= \frac{1}{3} [v_+ v_- + v_- v_+ - (v_0)^2], \quad T_{-2}^{(2)} = (v_-)^2, \\ T_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [v_+ v_- + v_- v_+ + 2(v_0)^2], \quad T_{+2}^{(2)} = (v_+)^2, \\ T_{+1}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [v_+ v_0 + v_0 v_+], \quad T_{-1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [v_- v_0 + v_0 v_-], \end{aligned} \quad (3.48g)$$

donde se han definido:

$$v_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (v_x + iv_y), \quad v_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_x - iv_y), \quad v_0 = v_z. \quad (3.48h)$$

La expresión (3.48c) muestra que la perturbación gravitacional $\hat{H}_{\gamma 2}$, en general,

mezcla estados con $\Delta l = 0, \pm 2$ y $\Delta m_l = 0, \pm 1, \pm 2$, con lo que se remueve parte de la degeneración gruesa de los niveles no-perturbados. En la literatura, se consideran las correcciones de los niveles de energía más bajos del átomo de hidrógeno de los términos del tipo γ_0^2 , que sólo mezclan estados con $\Delta l = \pm 2$ y por tanto remueven degeneraciones para niveles con $n \geq 3$.

En virtud de la componente $\hat{V}_0^{(0)}$ del operador en (3.48c) y que está dada por

$$\hat{V}_0^{(0)} = -\frac{1}{3} \left[\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} \right) + \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \right], \quad (3.48i)$$

nuestra perturbación (3.48b) permite ver efectos en los niveles $n = 1$ y $n = 2$. En estos niveles del Hamiltoniano no-perturbado (3.48a), la perturbación resulta ser diagonal en los subespacios degenerados de cada nivel. Los elementos de matriz no nulos son aquéllos que corresponden a $\Delta l = 0$, de modo que (3.48b) se puede reducir a un término de corrimiento dado por

$$\boxed{\hat{H}_{\gamma^2} \equiv -\frac{1}{2} h_{00}^{(R)} \left[\frac{31}{9} \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \frac{13}{9} \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \right]}. \quad (3.48j)$$

Usando la notación y los resultados del apéndice E se encuentra, hasta orden $(\gamma Z\alpha_e)^2$,

$$\begin{aligned} \langle nl_j, m | \hat{H}_{\gamma^2} | nl_j, m' \rangle &= -\frac{57}{18} h_{00}(\mathbf{R}) E_n \left\{ 1 - \frac{2\Gamma(n + |\kappa| + 1)}{n \cdot n'} \left[(n - \kappa) \times \right. \right. \\ &\left. \left(\kappa(\kappa + 1) \mathcal{S}_{n',n'}^{(2|\kappa|+1)-2} - n \mathcal{S}_{n',n'}^{(2|\kappa|+1)-1} \right) - n' \left(\kappa(\kappa + 1) \mathcal{S}_{n',n'-1}^{(2|\kappa|+1)-2} - n \mathcal{S}_{n',n'-1}^{(2|\kappa|+1)-1} \right) \right. \\ &\left. \left. + \frac{n'^2}{(n - \kappa)} \left(\kappa(\kappa + 1) \mathcal{S}_{n'-1,n'-1}^{(2|\kappa|+1)-2} - n \mathcal{S}_{n'-1,n'-1}^{(2|\kappa|+1)-1} \right) \right] \right\} \delta_{m,m'} \\ &\equiv h_{00}(\mathbf{R}) E_{n\kappa}^{(1)} \delta_{m,m'}, \quad (3.48k) \end{aligned}$$

donde

$$E_n = -\frac{\mu c^2}{2} \left(\frac{Z\alpha_e}{n} \right)^2 \quad \text{y} \quad n' = n - |\kappa|.$$

La ecuación (3.48k) muestra que la degeneración gruesa del Hamiltoniano $\hat{H}^{(0)}$ se remueve por la presencia de la dependencia en κ . La estructura de los niveles $n = 1, 2$ del Hamiltoniano electrónico $\hat{H}_{(e)}$ de la ecuación (3.47) se puede apreciar en la figura 3.2.

Allí sobresale que para nuestro observador los estados $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$, que corresponden a los números cuánticos $(n = 2, n' = 1, \kappa = -1)$ y $(n = 2, n' = 1, \kappa = 1)$ respectivamente, ya no están degenerados. Los dos niveles aumentan su energía, pero el nivel $2S_{1/2}$ lo hace casi 3 veces más que el nivel $2P_{1/2}$. La diferencia de energía entre ellos es $\Delta E_{2S-2P} \sim 2 \times 10^{-7}$ eV, que está 2 ordenes de magnitud por abajo de la energía asociada al corrimiento Lamb ($4,1 \times 10^{-6}$ eV) y de la separación hiperfina del estado base del Hidrógeno ($5,9 \times 10^{-6}$ eV).

Es importante resaltar que si hubiéramos usado de forma ingenua los polinomios de Laguerre no-relativistas en la parte radial de la función de onda, en lugar de las funciones \tilde{g}_κ de la ecuación (D.10), hubiéramos obtenido algo proporcional al primer término de $E_{n\kappa}^{(1)}$ sin términos que rompan la degeneración gruesa.

Regresando a los valores propios del Hamiltoniano electrónico, para $n = 1$ y $n = 2$ podemos escribir

$$\varepsilon_{[n,\kappa]}(\mathbf{R}) = E_{n|\kappa|}^{(0)} + E_{n\kappa}^{(1)} h_{00}(\mathbf{R}). \quad (3.48l)$$

El Hamiltoniano del objeto compuesto

Ahora vamos explorar algunas consecuencias de la expresión (3.48l) sobre el movimiento del átomo como un todo. En esta tarea seguimos los argumentos de la

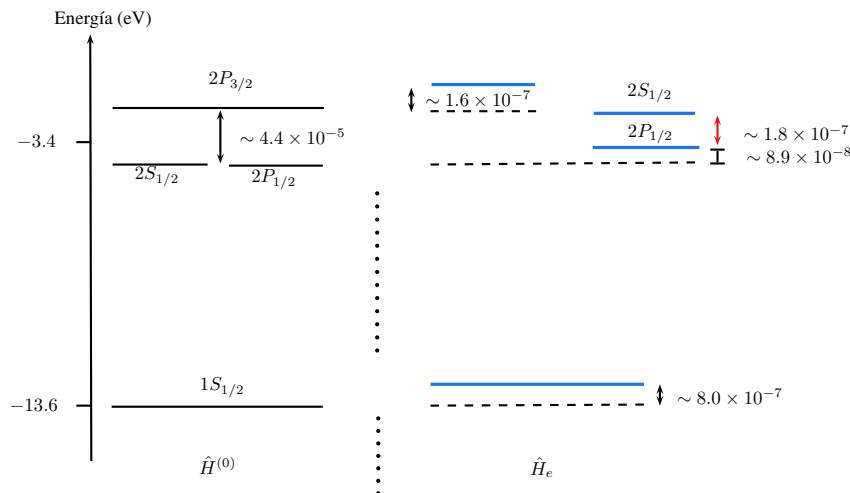


Figura 3.2: Comparación entre la estructura de niveles asociados a los Hamiltonianos $\hat{H}^{(0)}$ de la ecuación (3.48a) y a \hat{H}_e de la ecuación (3.47). Este último Hamiltoniano contiene las correcciones gravitacionales dominantes debidas a $\hat{H}_{\gamma 2}$ de la ecuación (3.48j). Este diagrama no está a escala.

Ref.[46]. Con ayuda de las ecuaciones de movimiento de Hamilton resultantes de la ecuación (3.46), es posible escribir la energía para la ubicación del átomo como

$$E_R (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) \equiv E_B^{(0)} + \frac{M}{2} Y_{ab} \dot{\mathbf{R}}^a \dot{\mathbf{R}}^b + \frac{Mc^2}{2} h_{00} (\mathbf{R}) - E_{n,\kappa}^{(1)} h_{00} (\mathbf{R}), \quad (3.49a)$$

donde se han definido

$$\begin{aligned} E_B^{(0)} &\equiv Mc^2 + E_{n\kappa}^{(0)}, \\ Y_{ab} (\mathbf{R}) &\equiv \left[1 + \frac{3}{2} h_{00} (\mathbf{R}) \right] \delta_{ab} + h_{ab} (\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (3.49b)$$

Usando el argumento de la conservación de la energía y la hipótesis de Haugan en la Ref. [46], consideramos ahora al cuerpo compuesto cayendo desde el reposo en la posición \mathbf{R} hasta la posición $\mathbf{R} - \mathbf{d}$, con $|\mathbf{d}|$ pequeña comparada con $|\mathbf{R}|$. Identificando la energía total del átomo con (3.49a) (denotada con E_c en la Ref.[46]), obtenemos para la magnitud al cuadrado de la velocidad final del objeto

$$\dot{\mathbf{R}}_f^2 \approx \frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{2E_{n,\kappa}^{(1)}}{Mc^2} \delta_k^j \right) \left(-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \right) \Big|_{\mathbf{R}} \mathbf{d}^k. \quad (3.49c)$$

Si la aceleración \mathbf{A} se supone constante durante el movimiento tenemos que $\dot{\mathbf{R}}_f^2 = 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}$ y se encuentra que la aceleración del objeto compuesto es

$$A_k = g_k - \frac{2E_{n,\kappa}^{(1)}}{Mc^2} \delta_k^j g_j \equiv g_k (1 + \delta g), \quad (3.49d)$$

hasta orden \mathbf{d} y definiendo

$$g_k \equiv -\frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \right) \Big|_{\mathbf{R}}.$$

Este resultado implica que el objeto compuesto sufre un aceleración anómala dependiente del estado interno del mismo, lo cual viola el principio de equivalencia débil. La magnitud de esta aceleración anómala se puede estimar, por ejemplo para el estado base del Hidrógeno, dando lugar a

$$\delta g \sim 10^{-14}. \quad (3.50)$$

3.3. El problema del corrimiento al rojo gravitacional

De acuerdo con las teorías métricas de la gravitación, dos relojes atómicos ideales en reposo colocados en diferentes posiciones \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 en presencia de un campo gravitacional estático difieren en sus frecuencias de acuerdo a

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(1)}{g_{00}(2)}}. \quad (3.51)$$

Si pensamos en relojes atómicos, donde la emisión de fotones al cambiar el estado del átomo entre dos niveles de energía produce las frecuencias requeridas, la expresión anterior se reduce a

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\Delta E_n(1)}{\Delta E_n(2)} = \sqrt{\frac{g_{00}(1)}{g_{00}(2)}}, \quad (3.52)$$

donde $\Delta E_n(i)$ denota la diferencia de energía de la transición atómica en el punto \mathbf{x}_i . La verificación explícita de esta expresión a partir del Hamiltoniano atómico en presencia del campo gravitacional es un problema complicado que implica un cálculo mucho más fino que la estimación del orden de magnitud de las transiciones respectivas. Hemos podido localizar solo la referencia [76], donde se lleva a cabo esta verificación en el caso del átomo de hidrógeno considerado como un sistema de un cuerpo en presencia de un campo gravitacional con simetría esférica usando el formalismo $TH\epsilon\mu$. A continuación se presenta un resumen de la verificación de la fórmula de (3.52) hecha en la referencia [76] para el caso particular de un reloj atómico basado en transiciones de Balmer o de estructura fina.

Para relojes basados en transiciones de estructura fina, el cálculo puede hacerse de manera exacta con base en la solución correspondiente de la ecuación de Dirac. El punto de partida para estas dos transiciones es el Hamiltoniano

$$H_W = T^{1/2}\mu + T^{-1/2}\frac{p^2}{2\mu} - \frac{1}{8\mu^3}T^{-3/2}p^4 - \frac{e^2}{r} + T^{-1}\frac{e^2}{4\mu^2r^3}\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} + T^{-1}\frac{\pi e^2}{2\mu^2}\delta^3(\mathbf{r}), \quad (3.53)$$

con

$$T = g_{00} = 1 - h, \quad |h| \ll 1. \quad (3.54)$$

Para el caso de transiciones de Balmer, que son las únicas consideradas aquí, H_W se simplifica a

$$H_{WB} = T^{1/2}\mu + T^{-1/2}\frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}, \quad (3.55)$$

que tratamos de manera perturbativa introduciendo $T = 1 - h$. De este modo tenemos

$$H_{WB} = \left(1 - \frac{h}{2}\right)\mu + \left(1 + \frac{h}{2}\right)\frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}. \quad (3.56)$$

En todo el calculo se considera h constante en la vecindad del átomo. De este modo basta considerar

$$\begin{aligned} H_{WB} &= H_{WB0} + H_{WB1}, \\ H_{WB0} &= \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}, \quad H_{WB1} = \frac{h}{2} \left(\frac{p^2}{2\mu} \right), \\ H_{WB0}|nlm\rangle &= \epsilon_n|nlm\rangle. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Por el teorema del virial tenemos que para el potencial de Coulomb se cumple

$$\langle T \rangle_n = -\epsilon_n, \quad \langle V \rangle_n = 2\epsilon_n. \quad (3.58)$$

Entonces la corrección a orden uno de cada nivel será

$$\Delta E_n^{(1)} = \frac{h}{2} \langle nlm | \frac{p^2}{2\mu} | nlm \rangle = \frac{h}{2} \langle T \rangle_n = -\frac{h}{2} \epsilon_n, \quad (3.59)$$

de tal manera que la energía de cada nivel será

$$E_n = \epsilon_n \left(1 - \frac{h}{2}\right) = \epsilon_n \sqrt{g_{00}}. \quad (3.60)$$

De este modo se recupera explícitamente la relación de corrimiento al rojo expresada en la ecuación (3.52).

3.3.1. Reloj atómico basado en transiciones de Balmer bajo nuestra aproximación

Dentro de las aproximaciones que hemos incorporado, el caso correspondiente a este reloj atómico se puede estudiar con ayuda de la Eq.(3.44) considerando

solamente los siguientes términos

$$\begin{aligned}
H_B = & Mc^2 \left(1 - \frac{h_{00}(\mathbf{R})}{2}\right) + \left[\left(1 - \frac{3}{2}h_{00}(\mathbf{R})\right) \delta^{ab} - h^{ab}(\mathbf{R})\right] \frac{\mathbf{P}_a \mathbf{P}_b}{2M} \\
& + \mu c^2 \left(1 - \frac{h_{00}(\mathbf{R})}{2}\right) + \left[\left(1 - \frac{3}{2}h_{00}(\mathbf{R})\right) \delta^{ab} - h^{ab}(\mathbf{R})\right] \frac{\mathbf{P}_a \mathbf{P}_b}{2\mu} \\
& - \left(\frac{e^2}{r}\right) \left[1 - \frac{1}{2}h_{00}(\mathbf{R}) + 2h^{ab}(\mathbf{R}) n^a n^b\right].
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Aun cuando no tenemos la separación correcta entre los movimientos relativo y del centro de masa, procedemos al cálculo del corrimiento al rojo debida al estado fundamental, con base en la separación tipo Born-Oppenheimer que se empleó anteriormente para estimar los ordenes de magnitud de las correcciones gravitacionales dominantes. De este modo separamos H_B de la siguiente manera

$$H_B = Mc^2 \left(1 - \frac{h_{00}(\mathbf{R})}{2}\right) + \left[\left(1 - \frac{3}{2}h_{00}(\mathbf{R})\right) \delta^{ab} - h^{ab}(\mathbf{R})\right] \frac{\mathbf{P}_a \mathbf{P}_b}{2M} + \epsilon(\mathbf{R}), \tag{3.62}$$

donde $\epsilon(\mathbf{R})$ son los valores propios de

$$\begin{aligned}
H_e(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}) = & \mu c^2 \left(1 - \frac{h_{00}(\mathbf{R})}{2}\right) + \left[\left(1 - \frac{3}{2}h_{00}(\mathbf{R})\right) \delta^{ab} - h^{ab}(\mathbf{R})\right] \frac{\hat{\mathbf{p}}_a \hat{\mathbf{p}}_b}{2\mu} \\
& - \left(\frac{e^2}{r}\right) \left[1 - \frac{1}{2}h_{00}(\mathbf{R}) + 2h^{ab}(\mathbf{R}) n^a n^b\right].
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Recordamos que la variable lenta \mathbf{R} entra como parámetro constante. A su vez, con el objeto de emplear teoría de perturbaciones, separamos $H_e(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}})$ en

$$\begin{aligned}
\hat{H}_e(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}) = & H^{(0)} + H_{\gamma^2} \\
\hat{H}^{(0)} = & \mu c^2 + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r} \\
\hat{H}_{\gamma^2} = & -\mu c^2 \frac{h_{00}(\mathbf{R})}{2} - \left[\frac{3}{2}h_{00}(\mathbf{R}) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + h^{ab}(\mathbf{R}) \frac{\hat{\mathbf{p}}_a \hat{\mathbf{p}}_b}{2\mu}\right] \\
& + \left[\frac{1}{2} \frac{e^2}{r} h_{00}(\mathbf{R}) - 2e^2 h^{ab}(\mathbf{R}) \frac{x^a x^b}{r^3}\right].
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Para el estado fundamental, que tiene simetría esférica, tenemos

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\hat{\mathbf{p}}_a \hat{\mathbf{p}}_b}{2\mu} \right\rangle &= \frac{1}{3} \delta_{ab} \left\langle \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} \right\rangle = \frac{1}{3} \delta_{ab} \langle T \rangle \\ \left\langle e^2 \frac{x^a x^b}{r^3} \right\rangle &= -\delta_{ab} \frac{1}{3} \left\langle -\frac{e^2}{r} \right\rangle = -\delta_{ab} \frac{1}{3} \langle V \rangle.\end{aligned}\quad (3.65)$$

La corrección a primer orden resulta

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{(1)} = \langle 100 | H_{\gamma^2} | 100 \rangle &= - \left[\frac{3}{2} h_{00}(\mathbf{R}) \langle T \rangle_1 + h^{ab}(\mathbf{R}) \frac{1}{3} \delta_{ab} \langle T \rangle_1 \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{2} \langle V \rangle_1 h_{00}(\mathbf{R}) + 2e^2 h^{ab}(\mathbf{R}) \delta_{ab} \frac{1}{3} \langle V \rangle_1 \right],\end{aligned}\quad (3.66)$$

que por el uso del teorema del virial se transforma en

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{(1)} &= - \left[-\frac{3}{2} h_{00}(\mathbf{R}) \epsilon_1 - h^{ab}(\mathbf{R}) \frac{1}{3} \delta_{ab} \epsilon_1 \right] + \left[-\frac{1}{2} 2\epsilon_1 h_{00}(\mathbf{R}) + 2h^{ab}(\mathbf{R}) \delta_{ab} \frac{1}{3} 2\epsilon_1 \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} h_{00}(\mathbf{R}) + \frac{5}{3} h^{ab}(\mathbf{R}) \delta_{ab} \right) \epsilon_1.\end{aligned}\quad (3.67)$$

La condición

$$h^{ab}(\mathbf{R}) \delta_{ab} = \frac{1}{3} (2z^2 - x^2 - y^2) = -\frac{1}{3} h_{00},\quad (3.68)$$

produce finalmente

$$\Delta E_n^{(1)} = \left(\frac{1}{2} h_{00}(\mathbf{R}) - \frac{5}{9} h_{00} \right) \epsilon_1 = -\frac{1}{18} h_{00} \epsilon_1.\quad (3.69)$$

Con el objeto de obtener el corrimiento al rojo esperado, el resultado de (3.69) debería ser

$$\Delta E_n^{(1)} = -\frac{1}{2} h_{00} \epsilon_1,\quad (3.70)$$

que permite recuperar el factor de corrimiento al rojo

$$\left(1 - \frac{1}{2} h_{00} \right),\quad (3.71)$$

dictado por los términos de masa. El resultado incorrecto de (3.69) se magnifica en los niveles excitados, donde la degeneración en l será detectada por los términos tensoriales de \hat{H}_{γ^2} produciendo corrimientos que dependen de este número

cuántico en cada nivel. Por esto es claro que las correcciones no van a salir proporcionales a la energía del estado degenerado inicial y por lo tanto las frecuencias dependerán de la estructura interna. Lo mismo ocurre con la contribución el término $\hat{H}_{\gamma 2}$ a las correcciones del nivel $n = 2$ discutidas previamente.

Esta inconsistencia entre nuestros resultados del corrimiento al rojo gravitacional y las hipótesis iniciales que nos planteamos parece estar fuertemente ligada al hecho de haber elegido a $(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ como las variables que describen al átomo.

Se puede pensar también que otra fuente de inconsistencias es el no considerar el átomo en la descripción de una partícula y poner al electrón lejos del origen de las coordenadas, estimando “inadecuadamente” la curvatura en la vecindad del átomo por medio del valor de la curvatura en la geodésica del observador. Sin embargo, al menos en la aproximación de campos gravitacionales débiles como los considerados aquí, se ha mostrado que el uso de las CNF, donde la curvatura es constante dentro de todo el parche coordenado, es suficientemente adecuado y consistente con las hipótesis de movimiento de nuestro observador.

Por otro lado, la utilidad de las coordenadas normales de Fermi en un entorno apreciable del origen queda de manifiesto en la Ref. [74]. En ella se estudia, por ejemplo, la ruptura por efectos de marea debidos a campos gravitacionales fuertes, en enanas blancas de radio del orden de 10^4 km, orbitando a una distancia del orden de 10^6 km en torno a agujeros negros supermasivos. Como el origen del sistema coordenado está en el centro de la enana blanca, esto significa que la validez del parche coordenado es al menos de 10^6 km.

Uno de los objetivos del trabajo fue comprobar de manera directa si dentro de nuestra descripción los átomos satisfacen o no las hipótesis fundamentales de las teorías métricas para la gravedad. Después de haber verificado que las coordenadas usadas eran suficientemente buenas para la situación considerada, nos hemos encontrado con un problema que sigue abierto en la literatura: el de la separación completa del problema en un movimiento relativo y uno del sistema como un todo. Esperamos pues que la separación correcta del problema en variables para el CM y para la coordenada relativa permitan recuperar la expresión universal para el corrimiento al rojo gravitacional.

Resumen

En este capítulo se ha presentado un análisis completo, no-relativista, de las consecuencias del potencial efectivo $\hat{\mathcal{W}}_e$, cuando el observador se mueve sobre una geodésica radial del espaciotiempo de Schwarzschild. El análisis contempla escenarios en los que la descripción de la métrica en las vecindades de la geodésica del observador considerando hasta términos cuadráticos en las CNF es adecuado. El escenario más interesante resulta ser el un observador dentro del sistema solar que estudia los efectos gravitacionales del centro galáctico; pues allí es posible encontrar un tamaño de parche coordinado consistente con la condición (3.20) y que deja los efectos gravitacionales algunos ordenes de magnitud bajo las correcciones de la estructura hiperfina.

Después de una cuidadosa estimación de los términos dominantes en el Hamiltoniano no-relativista de dos cuerpos, el problema fue tratado de forma semi-clásica a la Born-Oppenheimer, en la que se considera a \mathbf{R} como una *variable lenta*, que representa la posición clásica del átomo y a \mathbf{r} como la *variable rápida*. De este modo, para el movimiento relativo $(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}})$ las variables lentas entran como parámetros en la perturbación y la posición del átomo puede describirse con un Hamiltoniano clásico.

Esta elección de coordenadas no resulta ser la más conveniente, a pesar de que se efectúa en el límite de bajas energías y de campo gravitacional débil, pues no desacopla el problema de dos cuerpos en dos problemas independientes de un cuerpo, afectando con ello de manera importante la noción de espectro y la relación de nuestros resultados con posibles observaciones astronómicas. Sin embargo, este contratiempo señala la importancia de la definición adecuada de variables para el Centro de Masa y para el movimiento relativo en la demostración general de que los sistemas atómicos satisfacen los postulados fundamentales de las teorías métricas de la gravedad, problema que hasta donde sabemos no está resuelto.

Mediante teoría de perturbaciones no-degenerada, obtuvimos parte de las correcciones a las energías finas de los niveles $n = 1, 2$ y con ello encontramos que además de los corrimientos esperados, aparece un desdoblamiento de los niveles $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ que originalmente son degenerados. La energía de separación encontrada para éstos niveles está aproximadamente 2 ordenes de magnitud por abajo de energía asociada al corrimiento Lamb.

Con un análisis basado en la conservación de la energía se encuentra que, además del desdoblamiento anterior, nuestro observador detecta, usando las variables (\mathbf{R}, \mathbf{P}) , una aceleración anómala de la posición media del átomo dependiente de su estructura interna. Si los átomos observados se encuentran en el estado base del Hamiltoniano electrónico descrito con variables $(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}})$, hemos estimado que esa aceleración anómala es del orden de 10^{-14} .

Finalmente, comparamos nuestro resultado con un tratamiento de un cuerpo que recupera explícitamente la fórmula de corrimiento al rojo gravitacional. Encontramos discrepancias entre nuestro resultado y la ley universal de corrimiento al rojo gravitacional, que consideramos son debidas principalmente al problema de no haber separado completamente el problema del átomo en dos movimientos independientes, uno asociado al verdadero centro de masa y otro a la coordenada relativa.

Capítulo 4

Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo se ha presentado una construcción del potencial efectivo de interacción entre dos fermiones cargados que se propagan en un espaciotiempo curvo arbitrario que satisface las ecuaciones de Einstein. El principal motivo de este desarrollo es la exploración de la interfase entre la Relatividad General y la Mecánica Cuántica, una exploración que permita ver de forma explícita los acoples entre los grados de libertad del sistema cuántico y los del campo gravitacional.

Dicha construcción está basada en la extensión, vía la prescripción de acople mínimo del procedimiento para obtener la interacción de Coulomb-Breit presentado en la Ref. [52]. El punto de partida es el elemento de matriz covariante de la dispersión $q^+q^- \rightarrow q^+q^-$ que involucra el intercambio de un fotón y que se reescribe como el valor esperado (entre los estados inicial y final del sistema compuesto) de un operador hermítico que depende de los grados de libertad de los fermiones considerados.

La construcción se realiza en un sistema de referencia en caída libre empleando coordenadas normales de Fermi y en la región del espaciotiempo fuera de las fuentes que generan el campo gravitacional de fondo. Este sistema coordinado se restringe de modo tal que los tiempos en que ocurren las transiciones en el átomo y los tiempos que duran las mediciones respectivas, son muy pequeños comparados con el lapso de tiempo en que la posición del origen del sistema de coordenadas cambia apreciablemente. Además, el tamaño del parche coordinado de nuestro observador es tal que en su métrica y en toda descripción de los procesos físicos, es suficiente considerar solo el primer orden de las desviaciones de la métrica

de Minkowski, así como la aproximación de segundo orden en las coordenadas normales de Fermi.

Bajo estas condiciones, se obtienen las correcciones gravitacionales al potencial de Coulomb-Breit a primer orden en la curvatura y hasta orden cuadrático en las velocidades de cada fermion. Estas correcciones corresponden a los tiempos finitos de propagación de la interacción electromagnética en el fondo curvo.

En contraste con el trabajo de la ref.[43], el campo gravitacional que consideramos de fondo puede ser arbitrario; en la práctica imponemos restricciones sobre los procesos de medición o sobre el sistema coordinado para lograr simetrías convenientes al desarrollo, más que sobre el campo gravitacional en sí. No tenemos restricciones a las simetrías espaciales del espaciotiempo.

Dentro de las simetrías que logramos con nuestras suposiciones sobre el sistema coordinado, está la noción de estacionaridad de la región del espaciotiempo estudiada, que resulta fundamental en la construcción del potencial efectivo, pues permite hablar de la matriz de dispersión, de la hermiticidad del Hamiltoniano libre e incluso de una teoría de perturbaciones cuántica bien definida.

En la descripción del átomo, usamos la aproximación de dos cuerpos y la interacción mutua, todos interactuando con el campo gravitacional. Esta aproximación se prefiere porque los tratamientos de *un cuerpo* suelen asociar la posición del centro de fuerzas con la del centro de masa. En la teoría general de la relatividad, descripción de la posición y del movimiento del centro de masa de un sistema compuesto interactuante sigue siendo un problema abierto.

Aunque en el ejemplo concreto presentado en el capítulo 3, usamos definiciones Newtonianas para la coordenada relativa y para el centro de masa, como buenas variables asociadas a los grados de libertad electrónicos y de la posición media del átomo, respectivamente, lo hacemos en el régimen de bajas energías y de campo gravitacional débil. Sin embargo esto no es suficiente para un adecuado estudio del espectro atómico y para la verificación explícita de que un átomo satisface los principios de las teorías métricas de la gravedad, en particular la fórmula para el corrimiento al rojo gravitacional. Una discusión más completa del problema del centro de masa o de las definiciones asociadas a él en diferentes escalas de energía, como la presentada en la ref.[43], forman parte del trabajo futuro que se puede desarrollar para este sistema atómico dentro de un espaciotiempo curvo.

Análogamente al trabajo de Fischbach y Freeman partimos de la ecuación de Dirac covariante para describir la interacción del protón y el electrón con el campo gravitacional externo. La forma del Hamiltoniano y del producto interno en el que dicho Hamiltoniano es hermítico también se transforma al lenguaje usado en el espaciotiempo de Minkowski. La interacción electromagnética y la influencia gravitacional sobre ella, es estudiada por medio de la función de Green de Feynman en su forma de Hadamard y especializada a la métrica de nuestro interés.

La obtención de esta interacción electromagnética efectiva es un aporte importante de nuestro trabajo. Se obtiene un operador que describe esa interacción electromagnética efectiva hasta orden $\left(\frac{v_1 v_2}{c^2}\right)^2$, donde $v_{1,2}$ es la velocidad de la partícula respectiva. El operador efectivo contiene explícitamente términos que se asocian con la interacción eléctrica y la interacción magnética, ambas influenciadas por el campo gravitacional. También escribimos el Hamiltoniano efectivo de interacción como la suma de los Hamiltonianos relativistas de los fermiones libres (en el sentido gravitacional) y del operador efectivo de interacción electromagnética.

El potencial efectivo $\hat{\mathcal{W}}_e$ escrito en la forma del producto interno usado en el espaciotiempo de Minkowski, que contiene interacción de Coulomb-Breit, muestra correcciones gravitacionales en los términos de interacción eléctrica y magnética, pero además incorpora los términos $\hat{\mathcal{W}}_e^{CU}$ que denominamos “de curvatura”. Estos términos tienen su origen en la hermiticidad que pedimos para el potencial en el producto interno curvo y pueden proporcionar acoplamientos adicionales sujetos a las posibilidades de observación.

Nuestro potencial $\hat{\mathcal{W}}_e$ fue obtenido de forma general y expresado en términos de los grados de libertad de cada uno de los fermiones. Al escribirlo en las coordenadas Newtonianas para la posición relativa y para el centro de masa, se hizo evidente el papel de un grado de libertad adicional en el problema, la posición media del átomo, que hemos denotado por \mathbf{R} . Normalmente en la literatura se considera que el átomo se encuentra en el origen del sistema de coordenadas. Esta variable adicional produce un efecto amplificador en las transiciones electromagnéticas del átomo corregidas gravitacionalmente. Esta propiedad se estudió en el capítulo 3 estimando los ordenes de magnitud correspondientes. Sin embargo, la no separación del problema de los dos cuerpos destruye toda noción de espectro por lo que la libertad adicional introducida por el parámetro γ^2 debe estudiarse de manera más cuidadosa.

Por otro lado, la correcta elección de las coordenadas centro de masa y relativa podría producir cancelaciones entre diversas contribuciones perturbativas del mismo orden, que modifiquen sustancialmente la estructura del espectro final.

En el caso particular del espaciotiempo de Schwarzschild como fondo, que presentamos en el capítulo 3, introducimos también la transformación de F-W de dos cuerpos para identificar el límite no-relativista del Hamiltoniano del sistema compuesto. Una vez obtenido ese límite, usamos las definiciones Newtonianas para las coordenadas y los momentos de las variables relativa (\mathbf{r}, \mathbf{p}) y de centro de masa (\mathbf{R}, \mathbf{P}) , para estudiar el espectro electrónico y el movimiento de la posición media del átomo en la aproximación de Born-Openheimer.

Es importante recalcar que las variables (\mathbf{R}, \mathbf{P}) son consideradas como las variables canónicas asociadas a la posición media del átomo. Estas variables, en particular \mathbf{R} , pueden no coincidir con la verdadera posición y el verdadero momento del centro de masa del sistema. Sin embargo, la variación $\Delta\varepsilon_{[n,\kappa]}$ en la estimación del orden magnitud de los niveles de energía obtenidos, debida a correcciones $\Delta\mathbf{R}$ en la estimación de la posición del centro de masa

$$\Delta\varepsilon_{[n,\kappa]} = E_{[n,\kappa]}^{(1)} \gamma^2 \left| \frac{\Delta\mathbf{R}}{\mathbf{R}} \right| \sim E_{[n,\kappa]}^{(1)} \gamma^2 \left(\frac{a_0}{|\mathbf{R}|} \right) \sim E_{[n,\kappa]}^{(1)} \gamma^2 \times 10^{-21}, \quad (4.1)$$

es muy pequeña, siempre que el verdadero centro de masa se encuentre dentro del tamaño promedio del átomo.

El ejemplo con el espaciotiempo de Schwarzschild, ilustra también algunas de las diferencias con consecuencias prácticas, entre la aproximación de una y de dos partículas en la descripción del átomo. La presencia de nuevos parámetros perturbativos $(\eta, \gamma^2 \text{ y } \tilde{\gamma}^2)$ abre la posibilidad de encontrar fenómenos adicionales accesibles mediante un espectro atómico.

Más aún, pudimos ver que hay condiciones en las que los efectos gravitacionales ($\sim \gamma^2$) sobre el espectro, debidos al acoplamiento gravitacional vía la métrica en la posición del átomo, pueden estar alrededor de dos órdenes de magnitud abajo de las correcciones provenientes de la relatividad especial ($\sim \eta\eta_0$) siendo ciertamente mucho mayores que las estudiadas ($\sim \gamma_0^2$) en la mayoría de los trabajos que se encuentran en la literatura.

La degeneración gruesa del Hamiltoniano de estructura fina ($\hat{H}^{(0)}$) se remueve

debido a la perturbación \hat{H}_{γ^2} , en virtud de la dependencia en el número cuántico de Dirac (κ) de las correcciones perturbativas a la energía. Solamente hemos estudiado la estructura de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ del Hamiltoniano electrónico ($\hat{H}_{(e)}$) porque en esos niveles basta con considerar la teoría de perturbaciones no-degenerada. Es importante hacer notar que estos niveles no son estudiados en la literatura, pues la perturbación usualmente considerada ($\sim \mu c^2 \gamma_0^2$) que afecta la estructura electrónica tiene elementos de matriz nulos en los niveles con $\Delta l \neq \pm 2$. La estructura de los dos primeros niveles de energía del Hamiltoniano (3.47) descrito en las variables $(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}})$, vista por un observador inercial que se mueve sobre una geodésica radial de Schwarzschild hacia la fuente del campo gravitacional, se puede apreciar en la figura 3.2.

En particular, nuestro observador se encuentra con que los estados $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$, ya no están degenerados. Los dos niveles aumentan su energía, pero el nivel $2S_{1/2}$ lo hace casi 3 veces más que el nivel $2P_{1/2}$. La diferencia de energía entre ellos es $\Delta E_{2S-2P} \sim 2 \times 10^{-7}$ eV está 2 ordenes de magnitud abajo de la energía asociada al corrimiento Lamb ($4,1 \times 10^{-6}$ eV) y de la separación hiperfina del estado base del Hidrógeno ($5,9 \times 10^{-6}$ eV).

Esta contribución a la estructura del espectro resulta inconsistente con el resultado esperado del corrimiento al rojo gravitacional. Lo mismo puede verificarse en el nivel fundamental $n = 1$.

Es interesante resaltar que si en nuestro tratamiento del Hamiltoniano electrónico hubiéramos usado de forma ingenua los polinomios de Laguerre no-relativistas en la parte radial de la función de onda, en lugar de las funciones \tilde{g}_κ de la ecuación (D.10), hubiéramos obtenido algo proporcional al primer término de $E_{n\kappa}^{(1)}$, es decir, sin términos que rompieran la degeneración gruesa.

Otros sistemas cuánticos a los que en el futuro podríamos extender nuestro procedimiento o estudiar en ellos consecuencias de nuestro potencial efectivo de interacción incluyen: fermiones indistinguibles, el positronio, el anti-Hidrógeno, gases de Fermi y condensados de Bose-Einstein.

Nos resulta de gran interés aplicar nuestro método a una métrica tipo PPN y al sistema coordinado que la misma tiene asociado; pues el contacto con parámetros medidos y medibles es directo. Además, al menos para observaciones dentro del sistema solar, ésta es la métrica aceptada por la comunidad científica. Así mismo,

la métrica PPN nos permite estudiar otras teorías gravitacionales más allá de la de Einstein.

Motivados por las inconsistencias en nuestro calculo del corrimiento al rojo gravitacional provenientes de la no separación del problema de dos cuerpos, es claro que un primer aspecto a mejorar en nuestro trabajo será el de intentar separar el problema en dos movimientos independientes revisando las definiciones alternativas para el centro de masa de partículas interactuando electromagnéticamente. Esto permitirá una adecuada comparación con espectros observados y dará luz sobre la forma concreta en que los sistema atómicos pueden llegar a respetar los principios fundamentales de la Relatividad General.

También con miras en la generalización de los resultados encontrados, sería de interés introducir adiabáticamente la dependencia temporal del tensor de Riemann, al menos para un tratamiento cuántico perturbativo, que nos dé pistas sobre lo que podemos esperar en campos gravitacionales dependientes del tiempo. Otra generalización que puede resultar interesante, es la de la no imponer las ecuaciones de campo de Einstein, abriendo así la posibilidad de incluir otras teorías métricas dentro de nuestros resultados.

Como se mencionó en la introducción, una de las principales metas de esta investigación es contribuir a encontrar más evidencias que guíen el desarrollo de la interrelación entre la Relatividad General y la Mecánica Cuántica, y que cuando menos nos permitan entender mejor cómo deben trabajar juntas ambas teorías. La búsqueda directa de la Gravedad Cuántica es de momento un objetivo a muy largo plazo.

Apéndice A

Lista de Convenciones

Estas son las convenciones que usamos frecuentemente en este trabajo:

- Signatura +2 en la métrica $g_{\mu\nu}$.
- $\eta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$.
- $\bar{\alpha} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} = \{\bar{0}, \bar{a}\}$ son índices de tétrada, mientras que $\mu = \{0, 1, 2, 3\} = \{0, a\}$ son índices coordenados
- La tétrada ortonormal correspondiente a la métrica (2.2) es:

$$\begin{aligned} e_{\bar{0}0} &= -1 - \frac{1}{2}h_{00}, & e_{\bar{0}a} &= -\frac{1}{4}h_{0a}, \\ e_{\bar{a}0} &= \frac{3}{4}h_{0a}, & e_{\bar{a}b} &= \eta_{ab} + \frac{1}{2}h_{ab} \end{aligned} \tag{A.1}$$

que se encuentra en la referencia [36].

- Para el tensor de Riemman usamos la definición

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta,\alpha} - \dots \tag{A.2}$$

y para el tensor de Ricci usamos

$$R_{\nu\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\nu\mu\alpha} \tag{A.3}$$

- Nuestras convenciones para las matrices de Dirac son:

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

donde las σ^k son las matrices de Pauli. Las convenciones consistentes con las elecciones anteriores relacionadas a las matrices gamma de Dirac en la métrica de Minkowski son:

$$\begin{aligned} (\gamma^{\bar{0}})^{T*} &= -\gamma^{\bar{0}} \\ (\gamma^{\bar{k}})^{T*} &= \gamma^{\bar{k}} \\ \alpha^k &= -\gamma^{\bar{0}}\gamma^{\bar{k}} \\ \beta &= i\gamma^{\bar{0}}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

- El símbolo totalmente antisimétrico ϵ^{abc} es tal que $\epsilon^{123} = +1$.
- Para la conexión de espín del observador en caída libre radial en el espacio-tiempo de Schwarzschild usamos las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= -\frac{1}{2}\check{R}_{0k0m}\alpha^k x^m, \\ \Gamma_1 &= \frac{i}{4D^2}(2y\Sigma_3 + z\Sigma_2), \\ \Gamma_2 &= \frac{i}{4D^2}(2x\Sigma_3 + z\Sigma_1), \\ \Gamma_3 &= -\frac{i}{4D^2}(x\Sigma_2 + y\Sigma_1). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Apéndice B

La Construcción de Hadamard

Escribimos el potencial electromagnético $A^\mu(x)$ como en (1.15), en términos de las fuentes $j^{\beta'}(x')$. En la representación de Hadamard, la función de Green de Feynman para el campo electromagnético en un campo gravitacional de fondo, descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$ [70, 77] tiene la forma presentada en (1.74) con $U_{\alpha\beta'}$ dado por (2.11), donde $\Delta^{1/2}$ es la raíz cuadrada del determinante de VanVleck-Morette que se define como

$$\Delta \equiv -\frac{\det \left[\partial_\alpha \partial_{\beta'} \sigma(x, x') \right]}{\sqrt{-g(x)} \sqrt{-g(x')}}. \quad (\text{B.1})$$

Cómo se dijo antes, los bitensores suaves $V^\alpha{}_{\beta'}(x, x')$ y $W^\alpha{}_{\beta'}(x, x')$ deben determinarse de las ecuaciones de campo y de las condiciones de frontera del problema. Para $V^\alpha{}_{\beta'}(x, x')$ no se conoce forma analítica y se ha demostrado [78, 79], que puede removerse de la función de Green por medio de una transformación de norma bajo circunstancias muy particulares. El bitensor $W^\alpha{}_{\beta'}(x, x')$ depende fuertemente de las condiciones de frontera impuestas sobre la función de Green. En un espaciotiempo que satisfaga las ecuaciones de Einstein en el vacío, la condición de norma (1.80) conecta las funciones de Green escalar y vectorial, dando lugar al conjunto de ecuaciones

$$V^\mu{}_{\beta';\mu} + V_{;\beta'} = 0 \quad (\text{B.2a})$$

y

$$\left(\Delta^{1/2} \kappa^\mu{}_{\beta'} \right)_{;\mu} + \Delta^{1/2}{}_{;\beta'} + V^\mu{}_{\beta'} \sigma_\mu + V \sigma_{\beta'} + \sigma \left(W^\mu{}_{\beta';\mu} + W_{;\beta'} \right) = 0. \quad (\text{B.2b})$$

Usualmente (B.2b) se usa como una restricción sobre W y $W^\alpha_{\beta'}$ una vez que $V^\alpha_{\beta'}$ y V han sido determinadas[80]. Para identificar las ecuaciones que debe satisfacer cada bitensor, se sustituyen (1.74) y (1.81) en las ecuaciones de onda (1.71) y (1.77), para $x \neq x'$. Para la función de Green electromagnética estas sustituciones conducen a

$$\begin{aligned}\square V^\alpha_{\beta'} - \mathcal{R}^\alpha_{\mu} V^\mu_{\beta'} &= 0, \\ \square W^\alpha_{\beta'} - \mathcal{R}^\alpha_{\mu} W^\mu_{\beta'} &= 0,\end{aligned}\tag{B.3a}$$

para todo $x \neq x'$, junto con

$$\begin{aligned}2V^\alpha_{\beta';\nu}\sigma^\nu + (\sigma_\tau{}^\tau - 2)V^\alpha_{\beta'} &= -(\delta^\alpha_{\mu}\square - \mathcal{R}^\alpha_{\mu})U^\mu_{\beta'}, \\ 2U^\alpha_{\beta';\nu}\sigma^\nu + (\sigma_\tau{}^\tau - 4)U^\alpha_{\beta'} &= 0,\end{aligned}\tag{B.3b}$$

que debe satisfacerse al menos sobre el cono de luz [77] y donde hemos usado la notación

$$U^\alpha_{\beta'} \equiv \kappa^\alpha_{\beta'} \Delta^{1/2}.\tag{B.3c}$$

Dada la forma de $U^\alpha_{\beta'}$, la segunda ecuación en (B.3b) se satisface sobre el cono de luz y en todo punto dentro de él. Ahora, usando la primera ecuación de (B.3a) y la primera de (B.3b) como condición sobre el cono de luz, es posible determinar a $V^\alpha_{\beta'}$ [65]. Para lograr esto debemos resolver la ecuación de onda homogénea

$$\square V^\alpha_{\beta'} - \mathcal{R}^\alpha_{\lambda} V^\lambda_{\beta'} = 0,\tag{B.4a}$$

con datos característicos determinados por

$$\check{V}^\alpha_{\beta';\gamma}\sigma^\gamma + \frac{1}{2}(\sigma^\lambda{}_\lambda - 2)\check{V}^\alpha_{\beta'} = -K_{\alpha\beta'}(x, x'),\tag{B.4b}$$

donde

$$K_{\alpha\beta'}(x, x') \equiv \left(\square U^\alpha_{\beta'} - \mathcal{R}^\alpha_{\lambda} U^\lambda_{\beta'}\right)\Big|_{\sigma(x, x')=0}.\tag{B.4c}$$

Aquí $\check{V}^\alpha_{\beta'}$ denota la restricción de $V^\alpha_{\beta'}$ al cono de luz. La condición inicial necesaria para resolver (B.4b), proviene del límite de coincidencia¹ de esa misma

¹Es el límite en el que x se acerca a x' . Se denota con corchetes alrededor de la cantidad dependiente de los dos puntos.

ecuación diferencial, y resulta ser

$$\lim_{x \rightarrow x'} V^{\alpha}_{\beta'} \equiv [V^{\alpha}_{\beta'}] = -\frac{1}{2} \left(\mathcal{G}^{\alpha}_{\beta'} - \frac{1}{6} g^{\alpha}_{\beta'} \mathcal{R}' \right). \quad (\text{B.4d})$$

En la ecuación anterior $\mathcal{G}^{\alpha}_{\beta'}$ y $g^{\alpha}_{\beta'}$ son, respectivamente, el tensor de Einstein y el tensor métrico evaluados en el punto x' . Usando (B.4b) y (B.4d), $\check{V}^{\alpha}_{\beta'}$ se determina de manera única sobre el cono de luz. Dentro del cono de luz usamos (B.4a) y elegimos $V^{\alpha}_{\beta'}$ de modo que sobre el cono de luz coincida con $\check{V}^{\alpha}_{\beta'}$. Sólo queda determinar $W^{\alpha}_{\beta'}$, pero para ello usamos una solución a la ecuación de onda homogénea que satisfaga (B.2b) y las condiciones de frontera del problema. Dado que nuestro interés se centra en resolver la función de Green al primer orden en $|h_{\mu\nu}|$, es importante en este punto notar que el bitensor $V_{\alpha\beta'}$ no tiene parte de $\mathcal{O}(0)$, pues la función de Green Minkowskiana no tiene soporte al interior del cono de luz, de modo que considerando sólo el primer orden en nuestro desarrollo, las ecuaciones para este bitensor y su restricción cambian a

$$(\lambda - \lambda_0) \check{V}^{\alpha}_{\beta'} + \check{V}^{\alpha}_{\beta'} = K_{\alpha\beta'}, \quad (\text{B.5a})$$

la cual se debe integrar a lo largo de la geodésica nula Minkowskiana que une los puntos x y x' para los cuales el parámetro toma los valores λ y λ_0 respectivamente. La ecuación (B.5a) puede integrarse de manera directa, notando que el lado izquierdo de la igualdad se puede escribir como una derivada total, dando como resultado

$$(\lambda - \lambda_0) \check{V}^{\alpha}_{\beta'} = C_{\alpha\beta'} + \int_{\lambda_0}^{\lambda} K_{\alpha\beta'} [\bar{y}_0(\lambda')] d\lambda', \quad (\text{B.5b})$$

siendo $\bar{y}_0(\lambda')$ la geodésica nula Minkowskiana y $C_{\alpha\beta'}$ un bitensor constante, que se ha de determinar con el valor inicial $[V^{\alpha}_{\beta'}]$. Hay que notar que el lado derecho de la primera igualdad en (B.4d) se obtiene justamente del límite de coincidencia de $K_{\alpha\beta'}$, razón por la cual podemos escribir, para x' fijo,

$$[V^{\alpha}_{\beta'}] = K_{\alpha\beta'} [\bar{y}_0(\lambda_0)].$$

Esto nos permite encontrar el valor de la constante $C_{\alpha\beta'}$. Así, formalmente es válido el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
(\lambda - \lambda_0) \check{V}_{\alpha\beta'} &= C_{\alpha\beta'} + K_{\alpha\beta'} [\bar{y}_0(\lambda_0)] (\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2} \dot{K}_{\alpha\beta'} [\bar{y}_0(\lambda_0)] (\lambda - \lambda_0)^2 + \dots \\
[V_{\alpha\beta'}] &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\left\{ C_{\alpha\beta'} + K_{\alpha\beta'} [\bar{y}_0(\lambda_0)] (\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2} \dot{K}_{\alpha\beta'} [\bar{y}_0(\lambda_0)] (\lambda - \lambda_0)^2 + \dots \right\}}{(\lambda - \lambda_0)} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left[\frac{C_{\alpha\beta'}}{(\lambda - \lambda_0)} \right] + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left\{ K_{\alpha\beta'} [\bar{y}_0(\lambda_0)] + \frac{1}{2} \dot{K}_{\alpha\beta'} [\bar{y}_0(\lambda_0)] (\lambda - \lambda_0) + \dots \right\}
\end{aligned}$$

de donde podemos ver que, por la suavidad de $V_{\alpha\beta'}$ y por el límite de coincidencia la única opción admisible es que $C_{\alpha\beta'} = 0$. Así nos quedamos con que la solución de (B.4b) está dada por

$$\check{V}_{\alpha\beta'} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\lambda_0}^{\lambda} K_{\alpha\beta'} [\bar{y}_0(\lambda')] d\lambda'. \quad (\text{B.5c})$$

Ahora, solo es necesario calcular $K_{\alpha\beta'}(x, x')$ en nuestra métrica particular. Es conocido, de las propiedades del determinante de VanVleck-Morette y del propagador paralelo, que a primer orden en la curvatura

$$\Box U_{\alpha\beta'} = -\frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \mathcal{Q}_{\rho\alpha\sigma b} \eta^{\rho\sigma} \delta^{ab} = -\frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{3} \mathcal{R} \right) \quad (\text{B.6})$$

que en nuestra métrica es una constante. Para el segundo término de $K_{\alpha\beta'}$ las cosas son más sencillas, pues el tensor de Ricci ya es de primer orden de modo que

$$\mathcal{R}_\alpha{}^\gamma U_{\gamma\beta'} \simeq \mathcal{R}_\alpha{}^\gamma \eta_{\gamma\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta} \quad (\text{B.7})$$

el que también es constante en nuestras coordenadas. Con estos resultados tenemos pues que

$$K_{\alpha\beta'}(x, x') = -\frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \eta_{\alpha\beta} \mathcal{R} \right) \quad (\text{B.8})$$

que en nuestro caso es un tensor constante, independiente del par (x, x') . Así la ecuación (B.5c) nos da como resultado que

$$\check{V}_{\alpha\beta'} = -\frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \eta_{\alpha\beta} \mathcal{R} \right) \quad (\text{B.9})$$

a primer orden en $|h_{\mu\nu}|$. Ahora dado que la restricción $\check{V}_{\alpha\beta'}$ es una constante, la ecuación de onda homogénea que satisface $V_{\alpha\beta'}$ ² tiene por solución a éste tensor constante $\check{V}_{\alpha\beta'}$ ya que solo de ésta manera se puede lograr que al evaluar $V_{\alpha\beta'}$ sobre el cono de luz, resulte en un tensor independiente del punto fuente x' ; esto quiere decir que nuestro bitensor $V_{\alpha\beta'}$ está dado por

$$V_{\alpha\beta'} = -\frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \eta_{\alpha\beta} \mathcal{R} \right), \quad (\text{B.10})$$

que en ausencia de fuentes del campo gravitacional conduce a que $V_{\alpha\beta'}$ es nulo. De manera análoga se encuentra que

$$V = -\frac{1}{6} \mathcal{R}, \quad (\text{B.11})$$

que también se anula en las condiciones consideradas para nuestro observador. Así hasta ahora, las funciones de Green (1.74) y (1.77) se reducen a

$$G^{\alpha}_{\beta'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\kappa^{\alpha}_{\beta'}}{\sigma + i\epsilon} + W^{\alpha}_{\beta'} \right), \quad (\text{B.12})$$

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\sigma + i\epsilon} + W \right), \quad (\text{B.13})$$

ahora decidimos imponer las condiciones de frontera

$$\lim_{\{x^a\} \rightarrow \infty} G^{\alpha}_{\beta'}(x, x') \rightarrow 0 \quad \forall (x^0, x'^0), \quad (\text{B.14})$$

que son las mismas de la función de Green de Feynman en el espaciotiempo de Minkowski, porque esperamos pocas diferencias en el límite de campo gravitacional débil. Si $W^{\alpha}_{\beta'} = 0$ y $W = 0$, las funciones de Green $G_{\alpha\beta'}$ y G satisfacen las ecuaciones de frontera (B.14) y se reducen a las formas singulares que se utilizan en los cálculos del potencial efectivo.

²La cual a primer orden en la curvatura es una ecuación de onda en el espaciotiempo Minkowskiano

Apéndice C

Potencial Effectivo de Interacción en las variables (\mathbf{R}, \mathbf{r})

Para lograr una presentación más familiar de los acoplamientos asociados con la interacción (2.41), escribimos esa ecuación en las variables Newtonianas del centro de masa (\mathbf{R}) y de movimiento relativo (\mathbf{r}) para el sistema de dos partículas. Consideramos el régimen en el que una de las partículas es mucho más masiva que la otra, como resulta adecuado para el caso de átomos hidrogenoides. Consideramos $m_1 \gg m_2$, de modo que podemos aproximar $m_1 \simeq M$ y $m_2 \simeq \mu$, siendo $M = m_1 + m_2$ la masa total y μ la masa reducida. Bajo estas aproximaciones, la transformación que usamos toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &\approx \mathbf{R} - \frac{\mu}{M}\mathbf{r}, & \mathbf{p}_1 &\approx \mathbf{P} - \mathbf{p}, \\ \mathbf{x}_2 &\approx \mathbf{R} + \mathbf{r}, & \mathbf{p}_2 &\approx \mathbf{p} + \frac{\mu}{M}\mathbf{P}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Escribimos (2.39) separando las interacciones en: electrostática ($\hat{\mathcal{W}}_e^C$), mediada por curvatura ($\hat{\mathcal{W}}_e^{CU}$) y magnética ($\hat{\mathcal{W}}_e^B$). Conservamos términos hasta de orden μ/M . Se designan también las matrices alfa de la siguiente forma: $\mathbf{A}_{(1)}$ para el núcleo y $\mathbf{A}_{(2)}$ para electrón. La expresión para el potencial electrostático es

$$\hat{\mathcal{W}}_e^C = -\frac{\alpha_e}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[h_{00}^{(R)} + \left(1 + \frac{\mu}{M} \right) h_{00}^{(r)} + \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) \mathcal{Q}_{0a0b} \mathbf{r}^{(a} \mathbf{R}^{b)} \right] + \frac{1}{r^2} \tilde{\zeta}_h(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \right\}, \tag{C.2}$$

que en el límite de núcleo fijo al origen de coordenadas ($M \rightarrow \infty$ y $\mathbf{R} \rightarrow 0$) se reduce al potencial electrostático de las Refs.[36, 42, 73]. Los términos de interacción mediados por curvatura se reducen a

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{W}}_e^{CU} = & \frac{\alpha_e}{r} \left[\mathcal{Q}_{0amb} \mathcal{Z}_{(R)}^{ab} \mathbf{r}^m + \right. \\
& \frac{1}{2} \left\{ \left[7h_{0m}^{(R)} + \left(\frac{1}{12} + \frac{\mu}{M} \right) h_{0m}^{(r)} - \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) \mathcal{Q}_{0amb} \mathbf{r}^{(a} \mathbf{R}^b) \right] \left(\mathbf{A}_{(2)} + \mathbf{A}_{(1)} \right)^m \right. \\
& \left. - \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) \frac{\mathbf{h}^{(r)}}{2} \cdot \left(\mathbf{A}_{(2)} - \mathbf{A}_{(1)} \right) \right\} + \mathbf{h}^{(r)} \cdot \left(\mathbf{A}_{(2)} + 3\mathbf{A}_{(1)} \right) \\
& + 2\mathcal{Q}_{0akb} \mathbf{r}^{(a} \mathbf{R}^b) \left[\left(\mathbf{A}_{(2)} + 3\mathbf{A}_{(1)} \right)^k - \frac{\mu}{M} \left(3\mathbf{A}_{(2)} + \mathbf{A}_{(1)} \right)^k \right] \\
& - 2\mathcal{Q}_{0akb} \mathbf{r}^{(a} \mathbf{R}^b) \left[\left(\mathbf{A}_{(1)} \times \Sigma_{(2)} \right)^k + \frac{\mu}{M} \left(\mathbf{A}_{(2)} \times \Sigma_{(1)} \right)^k \right] \\
& \left. - \frac{1}{4r} \left(1 + \frac{\mu}{M} \right) \left(\mathbf{h}^{(r)} \cdot \mathbf{R} \right) \left[\left(\mathbf{A}_{(2)} - \mathbf{A}_{(1)} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \right], \quad (\text{C.3})
\end{aligned}$$

y los términos magnéticos transformados son

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{W}}_e^B = & \frac{\alpha_e}{2r} \left\{ \right. \\
& \left[1 - \frac{3}{2} \left[h_{00}^{(R)} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) h_{00}^{(r)} + \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) \mathcal{Q}_{0a0b} \mathbf{r}^{(a} \mathbf{R}^b) \right] - \frac{5}{4r^2} \zeta_h(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \right] \left(\mathbf{A}_{(2)} \cdot \mathbf{A}_{(1)} \right) \\
& + \left(1 + \frac{1}{2} \left[h_{00}^{(R)} - \left(1 + \frac{3\mu}{M} \right) h_{00}^{(r)} + \left(1 + \frac{\mu}{M} \right) \mathcal{Q}_{0a0b} \mathbf{r}^{(a} \mathbf{R}^b) + \frac{1}{r^2} \zeta_h(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \right] \right) \left(\mathbf{A}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \left(\mathbf{A}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \\
& - \left(\mathbf{A}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \left(3r \mathcal{Q}_{0a0k} \left[\mathbf{R}^a + \left(\frac{2}{3} - \frac{\mu}{2M} \right) \mathbf{r}^a \right] \mathbf{A}_{(1)}^k + \frac{i}{4} \left(\mathbf{h}_{(R)} \times \vec{\Sigma}_{(1)} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right. \\
& \left. - \frac{2\mu}{M} \epsilon^{ijk} \mathcal{Q}_{0aib} \mathbf{r}^{(a} \mathbf{R}^b) \Sigma_j^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_k + \frac{1}{r} \left[7h_{am}^{(R)} \mathbf{r}^a - \left(1 - 10\frac{\mu}{M} \right) h_{am}^{(r)} \mathbf{R}^a \right] \mathbf{A}_{(1)}^m \right) \\
& - \left(3r \mathcal{Q}_{0a0k} \mathbf{A}_{(2)}^k \left[\mathbf{R}^a + \left(\frac{1}{3} - \frac{\mu}{2M} \right) \mathbf{r}^a \right] + \frac{i}{4} \left[\left(\mathbf{h}_{(R)} + \mathbf{h}_{(r)} \right) \times \vec{\Sigma}_{(2)} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \right. \\
& \left. + 2\epsilon^{ijk} \mathcal{Q}_{0aib} \mathbf{r}^{(a} \mathbf{R}^b) \Sigma_j^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_k + \frac{1}{r} \mathbf{A}_{(2)}^k \left[3h_{ak}^{(R)} \mathbf{r}^a - \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) h_{ak}^{(r)} \mathbf{R}^a \right] \right) \left(\mathbf{A}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \\
& \left. + \mathbf{A}_{(2)}^k \left[r^2 \mathcal{Q}_{0k0m} + \frac{5}{6} h_{km}^{(r)} - \frac{\zeta(\mathbf{R}, \mathbf{r})}{r^2} \hat{\mathbf{n}}_k \hat{\mathbf{n}}_m \right] \mathbf{A}_{(1)}^m \right\}. \quad (\text{C.4})
\end{aligned}$$

Aquí se ha denotado

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_h(\mathbf{R}, \mathbf{r}) &= 2h_{km}^{(R)} \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m = 2h_{ab}^{(r)} \mathbf{R}^a \mathbf{R}^b, \\ Q^{(aT^b)} &\equiv \frac{1}{2} (Q^a T^b + T^a Q^b).\end{aligned}\tag{C.5}$$

Las expresiones (C.3)-(C.4) se usan en la estimación de los órdenes de magnitud discutidos cuando se estudia el espaciotiempo de Schwarzschild.

Apéndice D

Funciones de Onda del Hamiltoniano de Estructura Fina e Integrales Relacionadas

Para los cálculos perturbativos de los efectos gravitacionales en el espaciotiempo de Schwarzschild, necesitamos las funciones propias no perturbadas del Hamiltoniano de estructura fina para la parte electrónica (3.48a). Usando nuestras convenciones y siguiendo el procedimiento de la Ref. [81], se encuentra que la parte superior del espinor relativista

$$\Phi_{\kappa m} = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r) \chi_{\kappa, m} \\ -i f_{\kappa}(r) \chi_{-\kappa, m} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\kappa m}^{(u)} \\ \psi_{\kappa m}^{(d)} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

que es la solución exacta de la ecuación de Dirac para el átomo de Hidrógeno, es función propia del Hamiltoniano de estructura fina. Es decir,

$$\left[\mu c^2 + \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2\mu} - \frac{\hat{\mathbf{P}}^4}{8\mu^3 c^2} - \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r}\right) + \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left(\frac{a_0}{r}\right)^3 \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2} + \left(\frac{\pi a_0^3}{2}\right) \delta^3(\mathbf{r}) \right] \psi_{\kappa m}^{(u)} = E_{n\kappa}^{(0)} \psi_{\kappa m}^{(u)}, \quad (\text{D.2})$$

con valores propios

$$\frac{E_{n\kappa}^{(0)}}{\mu c^2} = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\delta}{n} \right)^2 + \left(\frac{\delta}{n} \right)^4 \left(\frac{n}{|\kappa|} - \frac{3}{4} \right) \right], \quad (\text{D.3})$$

donde

$$\delta \equiv Z\alpha_e, \quad \text{y} \quad \kappa = \begin{cases} -\left(j + \frac{1}{2}\right) & , l = j + \frac{1}{2} \\ \left(j + \frac{1}{2}\right) & , l = j - \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (\text{D.4})$$

En la ecuación (D.1), $\chi_{\kappa,m}$ son los espinores esféricos, g_κ y f_κ son funciones radiales conocidas. Estas funciones radiales satisfacen el conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} g'_\kappa &= -\frac{\kappa+1}{r} g_\kappa + \left(W_c + k_c + \frac{\delta}{r} \right) f_\kappa, \\ f'_\kappa &= \frac{\kappa-1}{r} f_\kappa - \left(W_c - k_c + \frac{\delta}{r} \right) g_\kappa \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

y usualmente se normalizan de modo que

$$\int_0^\infty \left(|g_\kappa|^2 + |f_\kappa|^2 \right) r^2 dr = 1. \quad (\text{D.6})$$

Dado que en el límite no-relativista las componentes superior e inferior de los espinores no están acopladas, buscamos normalizar esas funciones radiales de manera independiente. Para esto definimos $\tilde{f}_\kappa \equiv \alpha_\kappa f_\kappa$ y $\tilde{g}_\kappa \equiv \beta_\kappa g_\kappa$ con α_κ y β_κ constantes por determinar. Usando (D.6) e imponiendo

$$\int_0^\infty |\tilde{g}_\kappa|^2 r^2 dr = 1, \quad \int_0^\infty |\tilde{f}_\kappa|^2 r^2 dr = 1, \quad (\text{D.7})$$

se encuentra

$$|\alpha_\kappa|^2 = \frac{|\beta_\kappa|^2}{|\beta_\kappa|^2 - 1}, \quad |\beta_\kappa|^2 = \left(\int_0^\infty |g_\kappa|^2 r^2 dr \right)^{-1}. \quad (\text{D.8})$$

Las expresiones que usamos para f_κ y g_κ son

$$\begin{aligned} f_\kappa(r) &= 2\lambda \sqrt{k_c - W_c} e^{-\lambda r} (2\lambda r)^{s-1} N_{n',\kappa} \times \\ &\quad \left[n' {}_1F_1(1 - n'; 2s + 1; 2\lambda r) - \left(\kappa - \frac{\delta k_c}{\lambda} \right) {}_1F_1(-n'; 2s + 1; 2\lambda r) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

y

$$g_\kappa(r) = 2\lambda\sqrt{k_c + W_c}e^{-\lambda r} (2\lambda r)^{s-1} N_{n',\kappa} \times \left[n' {}_1F_1(1 - n'; 2s + 1; 2\lambda r) + \left(\kappa - \frac{\delta k_c}{\lambda} \right) {}_1F_1(-n'; 2s + 1; 2\lambda r) \right] \quad (\text{D.10})$$

que se presentan en la Ref. [5]. En estas expresiones

$$\begin{aligned} n' &= n - |\kappa|, & k_c &= \frac{\mu c}{\hbar}, & W_c &= \frac{E_{n\kappa}^{(0)}}{\hbar c}, \\ \lambda &= \sqrt{k_c^2 - W_c^2}, & s &= +\sqrt{\kappa^2 - \delta^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$N_{n',\kappa} = \frac{-\lambda}{\Gamma(2s + 1)} \sqrt{\left(\frac{\hbar}{\mu c} \right) \frac{\Gamma(n' + 2s + 1)}{2\delta k_c (\delta k_c - \lambda \kappa) n'!}}$$

donde κ es el llamado *número cuántico de Dirac*, n en el *número cuántico principal*, j es el *número cuántico del momento angular total*. La constante de normalización $N_{n',\kappa}$ es tomada de la Ref. [66]. Las funciones hipergeométricas en (D.9) y (D.10) son series finitas porque su primer argumento es un entero negativo, de modo que son en realidad polinomios que pueden asociarse a funciones de Laguerre de índice no-entero, como se muestra en la Ref.[82]. Usando esto, las ecuaciones (D.8) tienen por soluciones

$$\alpha_\kappa = \sqrt{\frac{2k_c}{k_c - W_c}}, \quad \beta_\kappa = \sqrt{\frac{2k_c}{k_c + W_c}}. \quad (\text{D.12})$$

De modo que para llegar a las funciones radiales normalizadas \tilde{f}_κ y \tilde{g}_κ solo es necesario reemplazar las raíces cuadradas $\sqrt{k_c - W_c}$ y $\sqrt{k_c + W_c}$ por $\sqrt{k_c}$ en (D.9) y (D.10). La función propia normalizada del Hamiltoniano de estructura fina viene dada por

$$\psi_{n,\kappa,m} \equiv \tilde{g}_\kappa(r) \chi_{\kappa,m}, \quad (\text{D.13})$$

que es la que se usa en los cálculo de los elementos de matriz de la perturbación gravitacional (3.48j). El cálculo de los elementos de matriz (3.48k) requiere de la

siguiente relación

$$\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2\mu}\tilde{g}_\kappa = -\frac{\mu c^2}{2r^2}\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \left\{ \left[\kappa(\kappa+1) - \delta^2 + r^2(k_c^2 - W_c^2) - 2r\delta W_c \right] \tilde{g}_\kappa - [\delta + \kappa(\kappa-1)] \frac{\beta_\kappa}{\alpha_\kappa} \tilde{f}_\kappa \right\}, \quad (\text{D.14})$$

que hace uso de (D.5). También son necesarias integrales de la forma

$$I_{a,A,b}^{\rho,b-\theta} \equiv \int_0^\infty e^{-\rho t} t^{b-\theta-1} {}_1F_1(-a; b; \rho t) {}_1F_1(-A; b; \rho t) dt = \rho^{\theta-b} \Gamma^2(b) \mathcal{S}_{a,A}^{b-\theta}, \quad (\text{D.15})$$

donde

$$\mathcal{S}_{a,A}^{b-\theta} \equiv \sum_{k,q=0}^{K,Q} (-1)^{k+q} \frac{(a-k+1)_k (A-q+1)_q \Gamma(b-\theta+k+q)}{k! \Gamma(b+k) q! \Gamma(b+q)}. \quad (\text{D.16})$$

Aquí $(x)_k$ es un símbolo de Pochhammer

$$(x)_k = x(x+1)\dots(x+k-1), \quad (\text{D.17})$$

los símbolos K y Q denotan enteros definidos cómo

$$K \equiv 1+a \quad Q \equiv 1+A, \quad (\text{D.18})$$

para a y A enteros positivos. También necesitamos los siguientes desarrollos a más bajo orden en δ para algunas de las cantidades previamente definidas

$$s \approx |\kappa| \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\kappa} \right)^2 \right], \quad \lambda \approx \frac{\delta k_c}{n} \quad (\text{D.19})$$

y

$$(2\lambda)^{2s} 2k_c N_{n',\kappa}^2 I_{a,A,b}^{2\lambda,2s+1-\theta} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{n} \right)^\theta (2k_c)^\theta \frac{\Gamma(n+|\kappa|+1)}{n \cdot n'! \cdot (n-\kappa)} \mathcal{S}_{a,A}^{(2|\kappa|+1)-\theta}. \quad (\text{D.20})$$

Apéndice E

Conmutadores para el cálculo del potencial efectivo

Este apéndice presenta algunos de los pasos principales en la obtención del potencial efectivo $\hat{\mathcal{W}}_e$. Para obtener la expresión (2.39) hace falta desarrollar los operadores que contienen a los $\hat{H}_0^{(1,2)}$ hasta primer orden en la curvatura, para ello escribimos el Hamiltoniano (2.7) de la partícula $s = \{1, 2\}$, como una suma de términos de orden cero y uno en la curvatura

$$\hat{\mathcal{H}}^{(s)} \simeq \hat{H}_0^{(s)} + \left[h_{00}^{(s)} \hat{H}_0^{(s)} + \frac{1}{2} \left(h^k{}_{\beta}{}^{(s)} \gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{\beta}} - h_{0\alpha}{}^{(s)} \gamma_{(s)}^{\bar{\alpha}} \gamma_{(s)}^{\bar{k}} \right) \left(c \hat{p}_k^{(s)} \right) - i\hbar c \left(\gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{i}} \Gamma_i^{(s)} - \Gamma_0^{(s)} \right) + \frac{i}{2} m_s c^2 h_{0\mu}{}^{(s)} \gamma_{(s)}^{\bar{\mu}} \right], \quad (\text{E.1})$$

donde el Hamiltoniano en el espacio Minkowski está dado por

$$\hat{H}_0^{(s)} = -\gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{k}} \left(c \hat{p}_k^{(s)} \right) + i m_{(s)} c^2 \gamma_{(s)}^{\bar{0}} \quad (\text{E.2})$$

y se ha usado la notación

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(s)} &= h_{\mu\nu} \left(x_{(s)} \right) \\ \hat{p}_k^{(s)} &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{(s)}^k}, \end{aligned}$$

donde $x_{(s)}^k$ denota ahora la k -ésima coordenada espacial de la partícula s y $m_{(s)}$ su masa. Ahora, dada la forma del Hamiltoniano (E.2) podemos escribir específicamente los conmutadores asociados a ω y ω^2 en (2.36):

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathcal{H}}^{(s)} - \hat{\mathcal{H}}^{(s')}, F \right] = & -(-i\hbar) \left[\gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{j}} \left(1 + h_{00}^{(s)} \right) (\partial_j F) - \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{j}} \left(1 + h_{00}^{(s')} \right) (\partial_{j'} F) \right] \\ & + \frac{1}{2} (-i\hbar) \left[\left(h^k_{\beta}{}^{(s)} \gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{\beta}} - h_{0\alpha}{}^{(s)} \gamma_{(s)}^{\bar{\alpha}} \gamma_{(s)}^{\bar{k}} \right) (\partial_k F) \right. \\ & \quad \left. - \left(h^k_{\rho}{}^{(s')} \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{\rho}} - h_{0\lambda}{}^{(s')} \gamma_{(s')}^{\bar{\lambda}} \gamma_{(s')}^{\bar{k}} \right) (\partial_{k'} F) \right] \quad (\text{E.3}) \end{aligned}$$

y los dobles conmutadores

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathcal{H}}^{(s)}, \left[\hat{\mathcal{H}}^{(s')}, F \right] \right] = & \left(1 + h_{00}^{(s)} + h_{00}^{(s')} \right) \left[\hat{H}_0^{(s)}, \left[\hat{H}_0^{(s')}, F \right] \right] + \\ & (-i\hbar)^2 \gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{i}} \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{j}} \left(\partial_i h_{00}^{(s')} \right) (\partial_{j'} F) - \frac{1}{2} (-i\hbar) \left(im_s c^2 \right) h_{0\mu}{}^{(s)} \left[\gamma_{(s')}^{\bar{\mu}} \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{k}} \right] (\partial_{k'} F) \\ & - \frac{1}{2} (-i\hbar)^2 \left[\left(h^j_{\mu}{}^{(s)} \gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{\mu}} - h_{0\lambda}{}^{(s)} \gamma_{(s)}^{\bar{\lambda}} \gamma_{(s)}^{\bar{j}} \right) \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{k}} \right. \\ & \quad \left. + \left(h^k_{\beta}{}^{(s')} \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{\beta}} - h_{0\alpha}{}^{(s')} \gamma_{(s')}^{\bar{\alpha}} \gamma_{(s')}^{\bar{k}} \right) \gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{j}} \right] (\partial_{jk'}^2 F) \\ & - \frac{1}{2} (-i\hbar) \left\{ \left[\left[\gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{i}} \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{\mu}} \right] h^j_{\mu}{}^{(s')} - \left[\gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{i}}, \gamma_{(s')}^{\bar{\lambda}} \gamma_{(s')}^{\bar{j}} \right] h_{0\lambda}{}^{(s')} \right) - \right. \\ & \quad \left(\left[\gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{j}}, \gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{\beta}} \right] h^i_{\beta}{}^{(s)} - \left[\gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{j}}, \gamma_{(s)}^{\bar{\alpha}} \gamma_{(s)}^{\bar{i}} \right] h_{0\alpha}{}^{(s)} \right) \left. \right\} (\partial_{j'} F) \left(c \hat{p}_i^{(s)} \right) \\ & - (-i\hbar)^2 \left\{ \left[\left(\gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{i}} \Gamma_i^{(s)} - \Gamma_0^{(s)} \right), \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{k}} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left[\gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{i}} \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{\beta}} \left(\partial_i h^k_{\beta}{}^{(s')} \right) - \gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{i}} \gamma_{(s')}^{\bar{\mu}} \gamma_{(s')}^{\bar{k}} \left(\partial_i h_{0\mu}{}^{(s')} \right) \right] \right\} (\partial_{k'} F), \quad (\text{E.4}) \end{aligned}$$

para cualquier par $(s, s') \in \{1, 2\}$ y cualquier función F de las variables (x, x') . El conmutador entre Hamiltonianos de orden cero que aparece en la primera línea de (E.4) está dado por:

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}_0^{(s)}, \left[\hat{H}_0^{(s')}, F \right] \right] = & (-i\hbar)^2 \gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{i}} \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{j}} \left(\partial_{ij'}^2 F \right) + \\ & (-i\hbar) \left[\gamma_{(s)}^{\bar{0}} \gamma_{(s)}^{\bar{k}}, \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{i}} \right] (\partial_{i'} F) \left(c \hat{p}_k^{(s)} \right) - (-i\hbar) \left(im_s c^2 \right) \left[\gamma_{(s)}^{\bar{0}}, \gamma_{(s')}^{\bar{0}} \gamma_{(s')}^{\bar{k}} \right] (\partial_{k'} F). \quad (\text{E.5}) \end{aligned}$$

Nótese que las líneas 3 y 4 de (E.4) son un término explícitamente simétrico en las variables (s, s') mientras que 5 y 6 forman uno antisimétrico en las mismas variables. Es importante también notar que cuando $s \neq s'$ muchos de los términos

en los conmutadores (E.3)-(E.5) se anulan reduciéndose estos a los explícitamente simétricos en el par (s, s') .

La forma que tiene el potencial efectivo en términos de los conmutadores que acabamos de presentar es

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} \approx & q_1 q_2 \gamma_{(2)}^{\bar{0}} \gamma_{(2)}^{\bar{\mu}} \eta_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} \left(a_{00} + \frac{\xi_h}{r^2} \right) + \frac{1}{2(-ic\hbar)} \left[\hat{H}_0^{(2)} - \hat{H}_0^{(1)}, \left(\frac{b_0}{r} \right) \right] \right. \\
& - \frac{1}{2(2c\hbar)^2} \left(\left[\hat{\mathcal{H}}^{(2)}, \left[\hat{\mathcal{H}}^{(2)}, r \right] \right] - \left(\left[\hat{\mathcal{H}}^{(2)}, \left[\hat{\mathcal{H}}^{(1)}, r \right] \right] + \left[\hat{\mathcal{H}}^{(1)}, \left[\hat{\mathcal{H}}^{(2)}, r \right] \right] \right) + \left[\hat{\mathcal{H}}^{(1)}, \left[\hat{\mathcal{H}}^{(1)}, r \right] \right] \Big) \\
& - \frac{1}{(2c\hbar)^2} \left(\left[\hat{H}_0^{(2)}, \left[\hat{H}_0^{(2)}, \frac{r}{4} \left(a_{00} + \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \right] - \left[\hat{H}_0^{(2)}, \left[\hat{H}_0^{(1)}, \frac{r}{4} \left(a_{00} + \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \right] - \right. \\
& \left. \left[\hat{H}_0^{(1)}, \left[\hat{H}_0^{(2)}, \frac{r}{4} \left(a_{00} + \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \right] + \left[\hat{H}_0^{(1)}, \left[\hat{H}_0^{(1)}, \frac{r}{4} \left(a_{00} + \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \right] \right) \Big\} \gamma_{(1)}^{\bar{0}} \gamma_{(1)}^{\bar{\nu}}, \quad (\text{E.6})
\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que algunas de las funciones ya son de primer orden en la curvatura, con ellas en los conmutadores se reemplazan los Hamiltonianos libres curvos por los Minkowskianos. Para evaluar explícitamente las derivadas parciales que aparecen en (E.4) nos resultarán útiles las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
r & \equiv \sqrt{\delta_{ab} (x - x')^a (x - x')^b}, \quad \hat{\mathbf{r}} \equiv \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r} \\
(\widetilde{h\gamma})^k & \equiv (h\bar{\gamma})^k - \frac{1}{2} h_{00} \alpha^k = -\frac{1}{2} \left(h_{00} \alpha^k + h^k_a \alpha^a + 2h^k_0 + \frac{i}{2} \epsilon^{kmn} h_{0m} \Sigma_n \right) \\
(h\bar{\gamma})^k & \equiv -\frac{1}{2} \left(h^k_a \alpha^a + 2h^k_0 + \frac{i}{2} \epsilon^{mnk} h_{0m} \Sigma_n \right) \quad (\text{E.7}) \\
\partial_{km}^{(2)} r & = \frac{1}{r} (\delta_{km} - \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_m), \quad \partial_k^{(2)} r = \hat{\mathbf{r}}_k = -\partial_k^{(1)} r \\
\partial_k^{(2)} \left(\frac{1}{r^2} \right) & = -2 \frac{\hat{\mathbf{r}}_k}{r^3} = -\partial_k^{(1)} \left(\frac{1}{r^2} \right), \quad \partial_{km}^{(2,1)} \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{1}{2r^4} (\delta_{km} - 4\hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_m).
\end{aligned}$$

Reescribimos ahora las derivadas de las funciones F_1 y F_2 cómo:

$$\begin{aligned}
\partial_m^{(1)} F_1 &= \frac{1}{2} \left[\left(3\mathcal{Q}_{0a0b} + \mathcal{Q}_{aibj} \hat{\mathbf{r}}^i \hat{\mathbf{r}}^j \right) \left(\partial_m^{(1)} \mathcal{A}^{ab} \right) + \frac{1}{r} \mathcal{Q}_{aibj} z^a \hat{\mathbf{r}}^i z^b \left(\hat{\mathbf{r}}^j \hat{\mathbf{r}}_m - \delta_m^j \right) \right] \equiv \frac{1}{r} \Theta_m^{(1)} \\
\partial_k^{(2)} F_1 &= \frac{1}{2} \left[\left(3\mathcal{Q}_{0a0b} + \mathcal{Q}_{aibj} \hat{\mathbf{r}}^i \hat{\mathbf{r}}^j \right) \left(\partial_k^{(2)} \mathcal{A}^{ab} \right) - 2 \left(\frac{\tilde{\xi}_h}{r^3} \hat{\mathbf{r}}_k - \frac{\hat{\mathbf{r}}^i}{r} \mathcal{Q}_{aibk} \mathcal{A}^{ab} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(3\mathcal{Q}_{0a0b} + \mathcal{Q}_{aibj} \hat{\mathbf{r}}^i \hat{\mathbf{r}}^j \right) \left(\partial_k^{(2)} \mathcal{A}^{ab} \right) - \frac{1}{r} \mathcal{Q}_{aibj} z^a \hat{\mathbf{r}}^i z^b \left(\hat{\mathbf{r}}^j \hat{\mathbf{r}}_k - \delta_k^j \right) \right] \equiv \frac{1}{r} \Theta_k^{(2)} \\
\partial_{km}^{(21)} F_2 &= \left(\mathcal{Q}_{0k0m} + \frac{1}{3} \mathcal{Q}_{akbm} \hat{\mathbf{r}}^a \hat{\mathbf{r}}^b \right) \\
&\quad - 2 \mathcal{Q}_{aibj} \frac{z^a z^b}{r^2} \left[\hat{\mathbf{r}}^i \hat{\mathbf{r}}_k \left(\hat{\mathbf{r}}^j \hat{\mathbf{r}}_m - \delta_m^j \right) - \frac{1}{4} \left(\hat{\mathbf{r}}^i \hat{\mathbf{r}}^j \delta_{km} - \delta_k^i \delta_m^j \right) \right] \equiv \frac{1}{r^2} \mathcal{B}_{km}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),
\end{aligned} \tag{E.8}$$

en las que se ha hecho uso de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{ab} &= \frac{1}{2} \left(z^a z^b - \frac{r^2}{3} \hat{\mathbf{r}}^a \hat{\mathbf{r}}^b \right), \quad z^a \equiv x^a + x'^a \\
\partial_m^{(1)} \mathcal{A}^{ab} &= \frac{1}{2} \left[\left(z^a + \frac{r}{3} \hat{\mathbf{r}}^a \right) \delta_m^b + \left(z^b + \frac{r}{3} \hat{\mathbf{r}}^b \right) \delta_m^a \right] \\
\partial_k^{(2)} \mathcal{A}^{ab} &= \frac{1}{2} \left[\left(z^a - \frac{r}{3} \hat{\mathbf{r}}^a \right) \delta_k^b + \left(z^b - \frac{r}{3} \hat{\mathbf{r}}^b \right) \delta_k^a \right] \\
\partial_{km}^{(21)} \mathcal{A}^{ab} &= \frac{1}{3} \delta_k^a \delta_m^b \\
\tilde{\xi}_h &= \frac{r^2}{2} \mathcal{Q}_{aibj} z^a \hat{\mathbf{r}}^i z^b \hat{\mathbf{r}}^j.
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Con las expresiones anteriores podemos ver que en el potencial efectivo se combinan algunos de los términos que aparecen en los operadores $\hat{\mathcal{W}}$. Empecemos escribiendo explícitamente a $\hat{\mathcal{W}}_{-2}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{W}}_{-2} &= +\alpha_e \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{00} - \frac{\tilde{\xi}_h}{r^2} \right) \right] \frac{(\vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\alpha}_1)}{r} - \frac{1}{2} (1 + F_{2s}) \left[\frac{\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)}}{r} - \frac{(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \left[\alpha_{(2)}^k \left(h_{00} \alpha^m + h^m{}_a \alpha^a + 2h^m{}_0 + \frac{i}{2} \epsilon^{man} h_{0a} \Sigma_n \right)_{(1)} + (1 \longleftrightarrow 2) \right] \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{r} (\delta_{km} - \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_m) + \frac{1}{2} \alpha_{(2)}^k \alpha_{(1)}^m \left[r \left(\partial_k^{(2)} \partial_m^{(1)} F_{2s} \right) + \hat{\mathbf{r}}_k \left(\partial_m^{(1)} F_{2s} \right) - \hat{\mathbf{r}}_m \left(\partial_k^{(2)} F_{2s} \right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{E.10}$$

si definimos: a los vectores $\mathbf{h}_{(I)}$ cuyas componentes son los $\mathbf{h}_a^{(I)} \equiv h_{a0}^{(I)}$ para la partícula denotada por el índice I y a los objetos de dos entradas vectoriales $\overleftarrow{\mathbf{H}}_{(I)}$ cuyas componentes son los $h_{ab}^{(I)}$ para la partícula correspondiente, podemos reescribir a $\hat{\mathcal{W}}_{-1}$ como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}_{-1} \approx & -\frac{\alpha_e}{2} \left\{ \mathcal{Q}_{0amb} \left[\frac{\mathcal{A}^{ab}}{r} \left(\alpha_{(2)}^m + \alpha_{(1)}^m \right) + \mathcal{Z}^{ab}(2,1) \hat{\mathbf{r}}^m + \frac{r}{12} (\hat{\mathbf{r}}^a \hat{\mathbf{r}}^m) \left(\alpha_{(2)}^b + \alpha_{(1)}^b \right) \right] \right. \\ & - \frac{b_0}{r^2} \left[\left(\vec{\alpha}_{(2)} + \vec{\alpha}_{(1)} \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] - \frac{1}{2r} \left(\mathbf{h}_{(2)} + \mathbf{h}_{(1)} \right) \cdot \left(\vec{\alpha}_{(2)} + \vec{\alpha}_{(1)} \right) \\ & \left. - \frac{i}{2r} \left[\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(1)} + \left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \right] \right\}, \quad (\text{E.11}) \end{aligned}$$

en donde se ha definido el operador:

$$\mathcal{Z}^{ab}(2,1) \equiv \frac{1}{4} \left[\left(\alpha_{(2)}^a - \alpha_{(1)}^a \right) z^b + z^a \left(\alpha_{(2)}^b - \alpha_{(1)}^b \right) \right]. \quad (\text{E.12})$$

También vamos a reescribir (E.10) para ver cuáles son los términos que se combinan con los que aparecieron en (E.11), lo que se encuentra es:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathcal{W}}_{-2}}{\alpha_e} = & \left[1 + \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{00} - \frac{\tilde{\zeta}_h}{r^2} \right) \right] \frac{(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)})}{r} - \frac{1}{2} (1 + F_2) \left[\frac{\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)}}{r} - \frac{(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r} \right] \\ & + \frac{1}{4} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \left[\frac{\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)}}{r} - \frac{(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r} \right] \\ & + \frac{1}{4r} \left[\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \left(\overleftarrow{\mathbf{H}}_{(2)} + \overleftarrow{\mathbf{H}}_{(1)} \right) \cdot \vec{\alpha}_{(1)} - (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \overleftarrow{\mathbf{H}}_{(1)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \right) - (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \overleftarrow{\mathbf{H}}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right] \\ & + \frac{1}{2r} \left[(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \mathbf{h}_{(1)} + \mathbf{h}_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)}) - (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{h}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - (\mathbf{h}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right] \\ & + \frac{i}{8r} \left[\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(1)} - (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \left[\left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] + \mathbf{1} \longleftrightarrow \mathbf{2} \right] \\ & + \frac{1}{2r} \left[\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \overleftarrow{\mathcal{B}}(\mathbf{z}, \mathbf{r}) \cdot \vec{\alpha}_{(1)} + (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\Theta}_{(1)}) - (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\Theta}_{(2)}) (\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right], \quad (\text{E.13}) \end{aligned}$$

definiendo para cada partícula

$$\vec{\alpha}_{(I)} \cdot \vec{\Theta}_{(I)} \equiv \alpha_{(I)}^m \Theta_m^{(I)}, \quad (\text{E.14})$$

podemos agrupar términos y escribir el potencial efectivo de interacción en la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{W}_e}{-\alpha_e} &\approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{0amb} \left[\frac{\mathcal{A}^{ab}}{r} \left(\alpha_{(2)}^m + \alpha_{(1)}^m \right) + \mathcal{Z}^{ab} (2,1) \hat{\mathbf{r}}^m + \frac{r}{12} (\hat{\mathbf{r}}^a \hat{\mathbf{r}}^m) \left(\alpha_{(2)}^b + \alpha_{(1)}^b \right) \right] \\
&- \frac{b_0}{2r^2} \left[\left(\vec{\alpha}_{(2)} + \vec{\alpha}_{(1)} \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] - \frac{3}{4r} \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \mathbf{h}_{(1)} + \mathbf{h}_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \right) - \frac{1}{4r} \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \mathbf{h}_{(2)} + \mathbf{h}_{(1)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \right) \\
&\quad - \frac{3i}{8r} \left[\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(1)} + \left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \right] \\
&- \left[1 + \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \frac{(\vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\alpha}_1)}{r} + \frac{1}{2} (1 + F_{2s}) \left[\frac{\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)}}{r} - \frac{(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r} \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \left[\frac{\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)}}{r} - \frac{(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r} \right] \\
&- \frac{1}{4r} \left[\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \left(\overleftarrow{\mathbf{H}}_{(2)} + \overleftarrow{\mathbf{H}}_{(1)} \right) \cdot \vec{\alpha}_{(1)} - \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \overleftarrow{\mathbf{H}}_{(1)} \cdot \vec{\alpha}_{(1)} \right) - \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \overleftarrow{\mathbf{H}}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \left(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2r} \left[\left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \left(\mathbf{h}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) + \left(\mathbf{h}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \left(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{i}{8r} \left(\left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \left[\left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] + \left[\left(\mathbf{h} \times \vec{\Sigma} \right)_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] \left(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \right) \\
&- \frac{1}{2r} \left[\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \overleftarrow{\mathcal{B}}(\mathbf{z}, \mathbf{r}) \cdot \vec{\alpha}_{(1)} + \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \left(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \overleftarrow{\Theta}_{(1)} \right) - \left(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \overleftarrow{\Theta}_{(2)} \right) \left(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \right], \\
\end{aligned} \tag{E.15}$$

que es la forma casi final del potencial efectivo. Las reducciones adicionales pueden lograrse usando la simetría ante el intercambio de etiquetas de las partículas.

Bibliografía

- [1] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., revised edition, 1994.
- [2] A. Galindo and P. Pascual. *Quantum mechanics I*. Texts and monographs in physics. Springer-Verlag, 1990.
- [3] A. Galindo and P. Pascual. *Quantum mechanics II*. Texts and monographs in physics. Springer-Verlag, 1991.
- [4] J.D. Bjorken and S.D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 1964.
- [5] Paul Strange. *Relativistic Quantum Mechanics with applications in condensed matter and atomic physics*. Cambridge University Press, 1998.
- [6] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. Physics Series. W. H. Freeman, 1973.
- [7] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd edition, May 2009.
- [8] Robert M. Wald. *General Relativity*. University Of Chicago Press, 1st edition, June 1984.
- [9] P. Hájíček. *An Introduction to the Relativistic Theory of Gravitation*, volume 750 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 2008.
- [10] Quentin G. Bailey and V. Alan Kostelecký. Signals for Lorentz violation in post-Newtonian gravity. *Phys. Rev. D*, 74:045001, Aug 2006.

- [11] D. Colladay and V. Alan Kostelecký. Lorentz-violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, 58:116002, Oct 1998.
- [12] V. Alan Kostelecký. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, 69:105009, May 2004.
- [13] V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes. Signals for Lorentz violation in electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 66:056005, Sep 2002.
- [14] Kostelecký V. Alan, editor. *Meeting on CPT and Lorentz Simetry*, volume 1-5. Indiana University, USA, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001-2005.
- [15] Yuri Bonder and Daniel Sudarsky. Quantum gravity phenomenology without Lorentz invariance violation: a detailed proposal. *Class. Quant. Grav.*, 25:105017, 2008.
- [16] E.A. Tagirov. Quantum mechanics in curved configurational space. *Int.J.Theor.Phys.*, 42:465–497, 2003.
- [17] E.A. Tagirov. Quantum mechanics in Riemannian space-times: I. the canonical approach. *Grav.Cosmol.*, 5:23–30, 1999.
- [18] E.A. Tagirov. Quantum mechanics in Riemannian space-times: II. field-theoretical approach. *Grav.Cosmol.*, 5:31–39, 1999.
- [19] E.A. Tagirov. General covariant quantum mechanics of Dirac particle in curved space-times. (JINR-E2-94-323), 1994. Fermilab Library Only.
- [20] G. Papini. Quantum systems in weak gravitational fields. *arXiv:gr-qc/0110056*, v1:22, 2001. To be published in Proceedings of the 17th Course of the International School of Cosmology and Gravitation: *Advances in the interplay between quantum and gravity physics* edited by V. De Sabbata and A. Zheltukhin, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [21] J.E. Zimmerman and J.E. Mercereau. Compton wavelength of superconducting electrons. *Phys.Rev.Lett.*, 14:887–888, 1965.
- [22] R. Colella, A. W. Overhauser, and S. A. Werner. Observation of gravitationally induced quantum interference. *Phys. Rev. Lett.*, 34(23):1472–1474, Jun 1975.

- [23] S. A. Werner, J. L. Staudenmann, and R. Colella. Effect of earth's rotation on the quantum mechanical phase of the neutron. *Phys. Rev. Lett.*, 42(17):1103–1106, Apr 1979.
- [24] Ulrich Bonse and Thomas L. Wroblewski. Measurement of neutron quantum interference in noninertial frames. *Phys. Rev. Lett.*, 51(16):1401–1404, Oct 1983.
- [25] Mark Kasevich and Steven Chu. Atomic interferometry using stimulated Raman transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 67(2):181–184, Jul 1991.
- [26] Fujio Shimizu, Kazuko Shimizu, and Hiroshi Takuma. Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms. *Phys. Rev. A*, 46(1):R17–R20, Jul 1992.
- [27] F. Riehle, Th. Kisters, A. Witte, J. Helmcke, and Ch. J. Bordé. Optical Ramsey spectroscopy in a rotating frame: Sagnac effect in a matter-wave interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 67(2):177–180, Jul 1991.
- [28] F. Hasselbach and M. Nicklaus. An electron optical Sagnac experiment. *Physica B+C*, 151(1-2):230–234, Jul 1988.
- [29] V. W. Hughes, H. G. Robinson, and V. Beltran-Lopez. Upper limit for the anisotropy of inertial mass from nuclear resonance experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 4:342–344, Apr 1960.
- [30] R.W.P. Drever. Upper limit to anisotropy of inertial mass from nuclear resonance. *Philosophical Magazine*, 5(52):409–411, 1960.
- [31] R. W. P. Drever. A search for anisotropy of inertial mass using a free precession technique. *Philosophical Magazine*, 6(65):683–687, 1961.
- [32] V.W. Hughes. *Mach's Principle and Experiments on Mass Anisotropy in: Gravitation and Relativity*. Benjamin, New York, 1964.
- [33] Paul R. Berman. *Atom Interferometry*. Academic Press, 1st edition, Dec 1996.
- [34] Mark P. Haugan and C. Lämmerzahl. *Lectures Notes in Physics. Gyros, Clocks, Interferometers ...: Testing Relativistic Gravity in Space.*, volume 562. Springer, April 2001.

- [35] Savas Dimopoulos, Peter W. Graham, Jason M. Hogan, Mark A. Kasevich, and Surjeet Rajendran. Atomic gravitational wave interferometric sensor. *Phys. Rev. D*, 78(12):122002, Dec 2008.
- [36] Jürgen Audretsch and Karl-Peter Marzlin. Ramsey fringes in atomic interferometry: Measurability of the influence of space-time curvature. *Phys. Rev. A*, 50(3):2080–2095, Sep 1994.
- [37] Piotr Marecki. *Quantum electrodynamics on background external fields*. PhD thesis, Universität Hamburg, 2003.
- [38] J. Audrescht and G. Schäfer. Quantum mechanics of electromagnetically bounded spin-1/2 particles in an expanding universe:I. influence of the expansion. *Gen. Rel. and Grav.*, 9(3):243–255, 489–500, March 1978.
- [39] J. Audrescht and G. Schäfer. Quantum mechanics of electromagnetically bounded spin-1/2 particles in an expanding universe: II. energy spectrum of hydrogen atom. *Gen. Rel. and Grav.*, 9(6):489–500, Jun 1978.
- [40] E Gill, G Wunner, M Soffel, and H Ruder. On hydrogen-like atoms in strong gravitational fields. *Class. Quantum Grav.*, 4(4):1031–1042, Jul 1987.
- [41] Leonard Parker. One-electron atom in curved space-time. *Phys. Rev. Lett.*, 44:1559–1562, 1980.
- [42] Leonard Parker. One electron atom as a probe of space-time curvature. *Phys. Rev. D*, 22:1922–1934, 1980.
- [43] Ephraim Fischbach, Belvin S. Freeman, and Wen-Kwei Cheng. General relativistic effects in hydrogenic systems. *Phys. Rev. D*, 23(10):2157, 1981.
- [44] Clifford Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, revised edition, 1993.
- [45] Francis E. Close and Hugh Osborn. Relativistic center-of-mass motion and the electromagnetic interaction of systems of charged particles. *Phys. Rev. D*, 2:2127–2140, Nov 1970.
- [46] M. P. Haugan. Energy conservation and the principle of equivalence. *Annals Phys.*, 118:156–186, 1979.

- [47] T. E. O. Ericson and A. Richter. Empirical limits to antigravity. *Europhys. Lett.*, 11(4):295–300, 1990.
- [48] D.J. Griffiths. *Introduction to elementary particles*. Wiley-VCH, first edition, 1987.
- [49] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. 1999.
- [50] D.J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [51] Michael E. Peskin and Dan V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*. Westview Press, 1995.
- [52] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Quantum Electrodynamics*. Springer-Verlag Heidelberg, 3d edition, Dec 2003.
- [53] J.S. Schwinger. *Classical electrodynamics*. Advanced book program. Perseus Books, 1998.
- [54] G. Breit. The effect of retardation on the interaction of two electrons. *Phys. Rev.*, 34:553–573, Aug 1929.
- [55] H.A. Bethe and E.E. Salpeter. *Quantum mechanics of one- and two-electron atoms*. Springer-Verlag, 1957.
- [56] G.W. Series. *The spectrum of atomic hydrogen*. Oxford library of the physical sciences. Oxford University Press, 1957.
- [57] Walter R. Johnson and Walter Robertson. Johnson. *Atomic structure theory: lectures on atomic physics*. Springer, 2007.
- [58] L.E. Parker and D.J. Toms. *Quantum field theory in curved spacetime: quantized fields and gravity*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 2009.
- [59] S.A. Fulling. *Aspects of quantum field theory in curved space-time*. London Mathematical Society student texts. Cambridge University Press, 1989.
- [60] N.D. Birrell and P.C.W. Davies. *Quantum fields in curved space*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 1984.

- [61] R.M. Wald. *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. Chicago lectures in physics. University of Chicago Press, 1994.
- [62] Yuri N. Obukhov. Spin, gravity, and inertia. *Phys. Rev. Lett.*, 86:192–195, 2001.
- [63] John Preskill. Preskill lecture notes on quantum field theory. <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/notes.html>, Abril 2010. Physics 236c.
- [64] M Leclerc. Hermitian Dirac hamiltonian in the time-dependent gravitational field. *Class. Quantum Grav.*, 23(12):4013–4019, Jun 2006.
- [65] Eric Poisson. The motion of point particles in curved spacetime. *Living Reviews in Relativity*, 7(6), 2004.
- [66] Walter Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations*. Springer, 3 edition, 2000.
- [67] Alexander J. Silenko. Foldy–Wouthuysen transformation for relativistic particles in external fields. *J. Math. Phys.*, 44(7):2952–2967, 2003.
- [68] Zeno V. Chraplyvy. Reduction of relativistic two-particle wave equations to approximate forms 1. *Phys. Rev.*, 91(2):388–391, 1953.
- [69] E. Poisson. *A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [70] Yves Décanini and Antoine Folacci. Off-diagonal coefficients of the deWitt-Schwinger and Hadamard representations of the Feynman propagator. *Phys. Rev. D*, 73(4):044027, Feb 2006.
- [71] J. A. Caicedo and L. F. Urrutia. Relativistic two-body Coulomb–Breit hamiltonian in an external weak gravitational field. *Physics Letters B*, 705:143–147, 2011.
- [72] Igor Lesanovsky, Jörg Schmiedmayer, and Peter Schmelcher. Rydberg atoms in a magnetic quadrupole field. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 38:S151–S170, Jan 2005.
- [73] L. Parker and L. O. Pimentel. Gravitational perturbation of the hydrogen spectrum. *Phys. Rev. D*, 25:3180–3190, 1982.

- [74] Masaki Ishii, Masaru Shibata, and Yasushi Mino. Black hole tidal problem in the fermi normal coordinates. *Phys. Rev. D*, 71:044017, Feb 2005.
- [75] Timothy P Krisher. Gravitational redshift in a local freely falling frame: A proposed new null test of the equivalence principle. *Physical Review D*, 53(4):R1735–R1739, 1996.
- [76] Clifford M. Will. Gravitational red-shift measurements as tests of nonmetric theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 10(8):2330–2337, October 1974.
- [77] Bryce S. De Witt and Robert W. Brehme. Radiation damping in a gravitational field. *Ann. Phys. (N.Y)*, 9(2):220, Feb 1960.
- [78] S. Sonogo and V. Faraoni. Huygens' principle and characteristic propagation property for waves in curved space-times. *J. Math. Phys.*, 33:625–632, 1992.
- [79] J. M. Hobbs. A vierbein formalism of radiation damping. *Ann. Phys. (N.Y)*, 47(1):141–165, Mar 1968.
- [80] M. R. Brown and A. C. Ottewill. Photon propagators and the definition and approximation of renormalized stress tensors in curved space-time. *Phys. Rev. D*, 34(6):1776–1786, Sep 1986.
- [81] E. U. Condon and G. H. Shortley. *The Thoery of Atomic Spectra*. Cambridge University Press, 1959.
- [82] R.P. Martínez y Romero. Relativistic hydrogen atom revisited. *Am. J. Phys.*, 68(11):1050–1055, Nov 2000.