



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**GRUPOIDES Y MÓDULOS CRUZADOS  
EN LA TEORÍA DE HOMOTOPÍA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**OMAR DANIEL ÁLVAREZ SÁNCHEZ**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO\***

**2013**



---

**\*CON EL APOYO DEL PROYECTO PAPIIT IN108712**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

Álvarez

Sánchez

Omar Daniel

15175460

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

409008036

### 2. Datos del tutor

Dr.

Carlos

Prieto

de Castro

### 3. Datos del sinodal 1

Dr.

Marcelo Alberto

Aguilar

González

de la Vega

### 4. Datos del sinodal 2

Dr.

Sergey

Antonyan

Gzabski

### 5. Datos del sinodal 3

Dr.

Octavio

Mendoza

Hernández

### 6. Datos del sinodal 4

Dr.

Jorge Marcos

Martínez

Montejano

### 7. Datos del trabajo escrito

Grupoides y módulos cruzados en la teoría de homotopía

66 p.

2013

# Grupoides y módulos cruzados en la teoría de homotopía

Daniel Álvarez

Diciembre 2012

# Índice general

Índice general	III
Introducción	V
<b>1. Sobre grupoides y topología</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares . . . . .	1
1.2. Definición y construcciones básicas . . . . .	8
1.3. Grupoides dobles . . . . .	13
1.4. Grupoides y simetría . . . . .	19
<b>2. Grupoides dobles y módulos cruzados</b>	<b>21</b>
2.1. Módulos cruzados y grupos de homotopía . . . . .	21
2.2. El grupoide doble fundamental de una terna . . . . .	32
2.3. La equivalencia entre <b>GpdD</b> y <b>ModX</b> . . . . .	37
2.4. Algo de álgebra en <b>ModX/Gru</b> . . . . .	41
<b>3. Teoremas de tipo Seifert-van Kampen</b>	<b>47</b>
3.1. El teorema de SvK 1-dimensional . . . . .	47
3.2. Homotopías y cubos conmutativos . . . . .	51
3.3. El teorema de SvK 2-dimensional . . . . .	56
3.4. Algunas aplicaciones de los teoremas . . . . .	59
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>



# Introducción

La teoría algebraica de homotopía tiene como objetivo *modelar* objetos geométricos y sus morfismos según esta declaración de J.H.C. Whitehead:

The ultimate aim of algebraic homotopy is to construct a purely algebraic theory, which is equivalent to homotopy theory in the same sort of way that ‘analytic’ is equivalent to ‘pure’ projective geometry [...] Classify the homotopy types of polyhedra,  $X, Y, \dots$ , by algebraic data. Compute the set of homotopy classes of maps,  $[X, Y]$ , in terms of the classifying data for  $X, Y^1$ .

Entre las contribuciones de Whitehead se encuentra la noción de *módulo cruzado* que representa un modelo algebraico 2-dimensional de los 2-tipos homotópicos como prueba junto con S. Mac Lane en [11]. Considerando la sucesión de homotopía de una pareja CW conexas  $(K, K^1)$  (donde  $K^1$  es el 1-esqueleto de  $K$ ), se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \pi_2(K) \longrightarrow \pi_2(K, K^1) \xrightarrow{\partial} \pi_1(K^1) \longrightarrow \pi_1(K) \longrightarrow 1$$

dado que  $K^1$  es del tipo de homotopía de una cuña de círculos y entonces tiene cubierta universal contraíble y  $K^1 \hookrightarrow K$  es una 1-equivalencia. Es decir,  $\partial$  determina los invariantes 1 y 2-dimensionales de  $K$ :  $\pi_2(K) \cong \text{nuc}(\partial)$ ,  $\pi_1(K) \cong \text{conuc}(\partial)$ . Como se verá después,  $\partial$  es un ejemplo de módulo cruzado. Mientras que no existe un teorema de tipo Seifert-van Kampen para los grupos de homotopía superiores (es decir, un resultado que permita calcular un invariante global de un espacio en términos de los invariantes locales asociados a los elementos de una cubierta del espacio<sup>2</sup>),  $\partial$  sí satisface un teorema de ese estilo debido a R. Brown y P.J. Higgins. La estructura de módulo cruzado se puede pensar de muchas maneras, una de ellas es la de *grupoide interno en **Gru***. La utilidad del concepto de grupoide en la topología algebraica fue notada en primer lugar por Ronald Brown. En principio su propósito fue dar una versión del teorema de Seifert y van Kampen suficientemente flexible para calcular el grupo fundamental de  $\mathbb{S}^1$ . Una vez formulado ese teorema, la pregunta natural era la posibilidad de generalizarlo a dimensión mayor. El esfuerzo por responder a esa pregunta tuvo éxito y también permitió apreciar la utilidad de algunas estructuras

---

<sup>1</sup>[20].

<sup>2</sup>O dicho de una manera más categórica: que el invariante (functor) conserve ciertos colímites.

categorías superiores<sup>3</sup> para modelar objetos geométricos, pues como veremos un módulo cruzado codifica una suerte de grupoide doble y también la noción de 2-grupo (estricto)<sup>4</sup> o grupo bidimensional<sup>5</sup>.

Este trabajo contiene lo siguiente. En el capítulo 1 se define el concepto de grupoide, se describen algunas construcciones de lo que podría llamarse ‘teoría combinatoria de grupoides’ (en analogía con grupos) y se mencionan algunos ejemplos topológicos. En particular se define *el grupoide fundamental de*  $X \in \mathbf{Top}$ , que consiste en tomar, no sólo las clases de homotopía de lazos basados en un punto, sino las clases de homotopía de caminos entre todos los puntos de  $X$ . El capítulo 2 pasa a describir algunos aspectos de los módulos cruzados, en particular, su equivalencia con una categoría de objetos más manejables topológicamente (mientras que los módulos cruzados son más convenientes para realizar cálculos). El capítulo 3 describe los teoremas de tipo Seifert y van Kampen 1 y 2-dimensionales más generales que se conocen, relativos al cálculo del *grupoide fundamental de una pareja* (§1.2) y del *módulo cruzado fundamental de una pareja punteada* (§2.1) en términos de la información correspondiente a los elementos de una cubierta suficientemente buena del espacio así como algunas aplicaciones sencillas de esos teoremas.

---

<sup>3</sup>[2].

<sup>4</sup>[3].

<sup>5</sup>Los módulos cruzados permiten interpretar geoméricamente una parte de la cohomología de grupos: si  $M$  es un  $G$ -módulo, las clases de equivalencia de extensiones dobles de un grupo  $G$  por  $M$  [15],

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \xrightarrow{\mu} E \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

donde  $\mu$  es un módulo cruzado, están en correspondencia biunívoca con los elementos de  $H^3(G; M)$ . En otras palabras, dado un  $G$ -módulo  $M$ , hay  $|H^3(G; M)|$  maneras de construir una sucesión de grupos que podrían cumplir  $\pi_1(X) = G, \pi_2(X) = M, \pi_n(X) = 0, n > 2$  de alguna pareja punteada  $(X, A)$ . Ahora, dado un módulo cruzado  $\mu$ , sí hay una manera de construir un CW punteado  $X$  con esas características (ver [13] o [6]), aunque aquí sólo lo esbozo para ciertos módulos cruzados. Esta teoría se basa en la construcción de espacios clasificantes para módulos cruzados, algo bastante delicado que se hace en las referencias anteriores.



# Capítulo 1

## Sobre grupoides y topología

Aquí presentamos varias definiciones y algunas construcciones que se usarán posteriormente. La construcción explícita de coigualadores de morfismos de grupoides no es necesaria para la prueba del teorema de SvK 1-dimensional, sin embargo lo es para las aplicaciones. Enseguida se habla sobre grupoides dobles. Finalmente se habla de grupoides y espacios con la acción continua de un grupo en ellos ( $G$ -espacios).

### 1.1. Preliminares

**Definición** Una categoría  $\mathbf{C}$  consta de lo siguiente:

1. Una clase  $Ob(\mathbf{C})$ , cuyos elementos se llaman objetos de la categoría;
2. para toda pareja  $(a, b)$  de objetos, un conjunto  $\mathbf{C}(a, b)$ , cuyos elementos se llaman *morfismos* o *flechas* de  $a$  a  $b$ . Dado  $f \in \mathbf{C}(a, b)$  se dice que  $a$  es el dominio de  $f$  y  $b$  su codominio<sup>1</sup>. La clase de todos los morfismos de  $\mathbf{C}$  la denotamos por  $Mor(\mathbf{C})$ . Una flecha de  $a$  a  $b$  se suele escribir como  $f : a \rightarrow b$ .
3. Para toda terna  $a, b, c$  de objetos, una ley de composición

$$\mathbf{C}(a, b) \times \mathbf{C}(b, c) \rightarrow \mathbf{C}(a, c).$$

La composición de  $(f, g) \in \mathbf{C}(a, b) \times \mathbf{C}(b, c)$  se denota usualmente  $g \circ f$  ó  $gf$ , a esta convención le llamaremos componer por la izquierda. A veces conviene escribirla al revés,  $fg$  ó  $f \circ g$ , a esta convención le llamaremos componer por la derecha.

4. para todo objeto  $a$ , un morfismo  $1_a \in \mathbf{C}(a, a)$ , llamado la identidad en  $a$ .

Y esos datos están sujetos a los siguientes axiomas:

---

<sup>1</sup>O para no sugerir que los morfismos deben ser funciones, se llaman respectivamente *origen* y *destino*.

1. Asociatividad: para todos  $h \in \mathbf{C}(a, b)$ ,  $g \in \mathbf{C}(b, c)$  y  $f \in \mathbf{C}(c, d)$ , se satisface que  $(fg)h = f(gh)$ .
2. Identidad: dados  $f \in \mathbf{C}(a, b)$  y  $g \in \mathbf{C}(c, a)$ , se tiene  $f1_a = f$ ,  $1_ag = g$ .

Cuando  $Ob(\mathbf{C})$  es un conjunto (y por lo tanto también lo es  $Mor(\mathbf{C})$ ), se dice que  $\mathbf{C}$  es *pequeña*.

Un *funtor*  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  entre dos categorías, está dado por:

1. una función  $Ob(\mathbf{C}) \rightarrow Ob(\mathbf{D})$  (que, abusando un poco de notación denotaremos también por  $F$ );
2. para todo par de objetos  $a, a'$  en  $\mathbf{C}$ , una función  $\mathbf{C}(a, a') \rightarrow \mathbf{D}(Fa, Fa')$  que también se denota por  $F$ ;

de manera que se satisfaga

1. para todo par de morfismos componibles:  $F(fg) = F(f)F(g)$ ;
2. para todo objeto  $a \in Ob(\mathbf{C})$ ,  $F(1_a) = 1_{Fa}$ .

$F$  es *fiel* si su restricción a  $\mathbf{C}(x, y)$  es inyectiva  $\forall x, y \in Ob(\mathbf{C})$ ;  $F$  es *pleno* si  $F| : \mathbf{C}(x, y) \rightarrow \mathbf{D}(Fx, Fy)$  es suprayectivo  $\forall x, y \in Ob(\mathbf{C})$ .

Usaremos varias de las siguientes categorías a lo largo del texto.

1. Si  $S$  es un conjunto, se tiene una categoría  $\mathbf{S}$  que se llama discreta cuyos objetos son los elementos de  $S$  y para todos  $a, b \in S$ ,

$$\mathbf{S}(a, b) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a \neq b; \\ \{1\}, & \text{si } a = b. \end{cases}$$

2. Tenemos a  $\mathbf{Con}$  la categoría de conjuntos con todas las funciones entre ellos.
3. La categoría  $\mathbf{Gru}$  de grupos y homomorfismos de grupos.
4. La categoría  $\mathbf{Cat}$  de categorías pequeñas y de funtores.
5. La categoría  $\mathbf{Top}$  de espacios topológicos y funciones continuas.
6. La categoría  $\mathbf{Top}^3$  de ternas de espacios topológicos. Los objetos son ternas  $(X, A, C)$  con  $X$  un espacio topológico y  $C \subset A \subset X$ ; las flechas  $f : (X, A, C) \rightarrow (Y, B, D)$  son funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  tales que  $f(A) \subset B$  y  $f(C) \subset D$ . La categoría de parejas punteadas  $\mathbf{Top}_*^2$  se puede ver como la subcategoría plena de  $\mathbf{Top}^3$  donde los objetos son de la forma  $(X, A, \{x\})$ .

7. La categoría **Graf** de gráficas pequeñas (o multidigráficas). Donde por *gráfica* se entiende una cuarteta ordenada  $(V, A, d_0, d_1)$  donde  $A$  se llama conjunto de aristas,  $V$  conjunto de vértices,  $d_i : A \rightarrow V, i = 1, 2$  son funciones llamadas origen y destino. Los morfismos de gráficas son parejas de funciones que conservan dominios y codominios, es decir, un morfismo  $(g, f) : (V, A, d_0, d_1) \rightarrow (V', A', d'_0, d'_1)$  de gráficas consta de funciones  $g : V \rightarrow V'$  y  $f : A \rightarrow A'$  tales que  $d'_i f = g d_i$  para  $i = 0, 1$ .

**Nota** Las primeras cuatro categorías de la lista son ejemplos de categorías cuyos objetos son esencialmente conjuntos con alguna estructura adicional, en estos casos, escribiremos las composiciones por la izquierda, en categorías abstractas o categorías cuyos objetos no son conjuntos de manera natural como la de gráficas u otras que veremos más adelante como los *grupoides fundamentales* de espacios topológicos, usualmente escribiremos la composición por la derecha.

**Definición** Hay un funtor  $L : \mathbf{Graf} \rightarrow \mathbf{Cat}$  que en objetos está dado de la siguiente manera. Si  $G = (V, A, d_0, d_1)$  es una gráfica, se define la categoría  $L(G)$  cuyo conjunto de objetos es  $V$  y  $\forall x, y \in V$  las flechas de  $x$  a  $y$  son sucesiones finitas de aristas de  $G$ :

$$L(G)(x, y) = \{(a_i)_{i=0}^n : d_0(a_0) = x, d_1(a_i) = d_0(a_{i+1}), d_1(a_n) = y\},$$

y a cada  $L(G)(x, x)$  se añade la palabra vacía  $()$  para que sirva como identidad. La composición  $\circ$  está dada concatenando sucesiones:  $\forall (a_i)_{i=0}^n \in L(G)(x, y), (b_j)_{j=0}^m \in L(G)(y, z)$

$$(a_i)_{i=0}^n \circ (b_j)_{j=0}^m = (c_k)_{k=0}^{m+n+1}$$

$$c_k = \begin{cases} a_k, & \text{si } k \leq n; \\ b_{k-n-1} & \text{si } k \geq n+1. \end{cases}$$

Si se tiene un morfismo de gráficas  $(g, f) : (V, A, d_0, d_1) \rightarrow (V', A', d'_0, d'_1)$ ,  $L(g, f)$  es el funtor que en todo objeto  $x$  de  $L(V, A, d_0, d_1)$  vale  $L(g, f)(x) = g(x)$ , y  $\forall (a_i)_{i=0}^n \in L(G)(x, y)$ , se tiene que  $L(g, f)(a_i)_{i=0}^n = (f(a_i))_{i=0}^n$ .  $L(G)$  se llama la *categoría libre* en  $G$ . Si se requiere construir el grupoide libre en  $G$  se toman como flechas además de las sucesiones anteriores, las sucesiones que contengan los inversos formales de las aristas de  $G$ , en un procedimiento del todo análogo a la construcción del grupo libre en un conjunto.

**Definición** Dados dos funtores  $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ , una transformación natural  $\eta : F \rightarrow G$  consta de una familia de morfismos  $\{\eta_x : Fx \rightarrow Gx\}_{x \in \text{Ob}(\mathbf{C})}$  en  $\mathbf{D}$  tales que para toda flecha  $f : x \rightarrow y$  en  $\mathbf{C}$  el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{F(f)} & Fy \\ \eta_x \downarrow & & \downarrow \eta_y \\ Gx & \xrightarrow{G(f)} & Gy. \end{array}$$

Se dice que una transformación natural  $\eta$  es un isomorfismo natural si cada componente  $\eta_x$  es un isomorfismo. Es decir, para cada  $x \in \text{Ob}(C)$ , existe una flecha  $\theta_x$  tal que  $\theta_x \eta_x = 1_{Fx}$  y  $\eta_x \theta_x = 1_{Gx}$ . Una pareja de funtores  $F, G$  da una equivalencia de categorías si existen isomorfismos naturales  $FG \cong 1_D$  y  $GF \cong 1_C$ .

**Definición** Un objeto  $x$  en  $\mathbf{C}$  es inicial si para todo objeto  $y$ ,  $\mathbf{C}(x, y)$  tiene sólo un elemento (como se demuestra fácilmente que es único salvo un único isomorfismo, entonces se puede hablar de ‘el’ objeto inicial de  $\mathbf{C}$ ). Un objeto  $x$  en  $\mathbf{C}$  es final si para todo otro objeto  $y$ ,  $\mathbf{C}(y, x)$  tiene sólo un elemento. Dado un funtor  $F : J \rightarrow \mathbf{C}$ , un cono sobre  $F$  es una familia de flechas  $\{f_j : c \rightarrow Fj\}_{j \in J}$ , donde  $c$  es el vértice del cono, tal que para todo  $f \in J(i, j)$  el siguiente triángulo conmuta

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ Fi & \xrightarrow{Ff} & Fj \end{array}$$

Podemos considerar a la categoría  $T$ , cuyos objetos son los conos arriba descritos y las flechas los morfismos entre vértices tales que hacen conmutar todos los triángulos correspondientes. Un *límite* para  $F$  es un objeto final en esa categoría, cuyo vértice se denota usualmente como  $\lim F$  ó  $\text{Lim}_J Fi$ . Análogamente, uno considera los coconos  $\{f_i : Fi \rightarrow c\}_{i \in J}$  y la categoría de coconos correspondientes. Un *colímite* de  $F$  es un objeto inicial en esa categoría y se denota  $\text{colim } F$  ó  $\text{colim}_J Fi$ .

**Ejemplo** Si  $D$  es una categoría discreta y  $F : D \rightarrow \mathbf{C}$  es un funtor, un límite de  $F$  se llama un producto, y su objeto correspondiente se denota  $\prod_{i \in D} Fi$ . Análogamente, un colímite de  $F$  se llama un coproducto y se denota  $\coprod_{i \in D} Fi$ .

**Definición** Una categoría  $\mathbf{C}$  es completa si todo funtor  $F : J \rightarrow \mathbf{C}$  con  $J$  categoría pequeña tiene un límite. Análogamente, si todo  $F$  como el anterior tiene un colímite,  $\mathbf{C}$  se llama cocompleta. Si todo funtor  $F : J \rightarrow \mathbf{C}$  con  $J$  una categoría finita (es decir, con una cantidad finita de flechas) tiene un límite, entonces se dice que  $\mathbf{C}$  tiene límites finitos.

**Definición** Sea  $C$  la categoría con exactamente dos objetos  $\star, \square$  y sólo dos flechas no identidades  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\star$  a  $\square$ . Un coigualador de una pareja de flechas en una categoría  $\mathbf{D}$

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} y,$$

es el colímite del funtor  $F : C \rightarrow \mathbf{D}$  dado por  $F(\star) = x$ ,  $F(\square) = y$ ,  $F\alpha = a$  y  $F\beta = b$ . Como cualquier funtor  $F$  de  $C$  a cualquier categoría  $\mathbf{D}$  no es más que un diagrama en  $\mathbf{D}$  de la forma

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} y,$$

se habla, abusando del lenguaje, de un coigualador de un diagrama, en vez del coigualador del funtor asociado. Entonces el coigualador de las flechas  $a, b$  consta de dos flechas  $d, c$  en  $\mathbf{D}$  que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} x & \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} & y \\ & \searrow d & \downarrow c \\ & & C \end{array} .$$

Como  $d = ac = bc$ , típicamente no se denota con otra letra. La propiedad de ser colímite se expresa como sigue: si  $f : y \rightarrow z$  cumple  $af = bf$ , entonces existe una única flecha  $g : C \rightarrow z$  tal que  $cg = f$ .

**Definición** Sea  $\mathbf{I}$  la categoría con exactamente tres objetos  $\{\cdot, \square, \star\}$  y sólo dos flechas que no son identidades representadas en el siguiente diagrama

$$\cdot \longrightarrow \square \longleftarrow \star.$$

Un funtor  $F : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{D}$  no es más que un diagrama

$$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

en  $\mathbf{D}$ ; abusando del lenguaje, podemos hablar de un límite o un colímite de un diagrama

$$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C.$$

Un límite de

$$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

es un objeto  $P$  y una pareja de morfismos  $p_1 : P \rightarrow A$   $p_2 : P \rightarrow C$  tales que, si existe un objeto  $P'$  y morfismos  $p'_1 : P' \rightarrow A$   $p'_2 : P' \rightarrow C$  que hacen conmutar el cuadrado exterior del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} P' & & & & \\ & \searrow^{p'_1} & & & \\ & \phi & & & \\ & \searrow & & & \\ & & P & \xrightarrow{p_1} & A \\ & & \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ & & C & \xrightarrow{g} & B, \end{array}$$

entonces existe un único morfismo  $\phi : P' \rightarrow P$  tal que los triángulos del diagrama anterior conmutan.

El objeto  $P$ , denotado a menudo como  $C \times_B A$ , junto con los morfismos  $p_i$  forma el *producto fibrado o pullback* de

$$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C.$$

Al cuadrado que forma el pullback con el diagrama anterior se le llama *cartesiano*. Análogamente, se pueden considerar colímites de funtores  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{D}$  con  $\mathbf{J}$  la categoría con sólo tres objetos y sólo dos flechas que no son identidades representadas en el diagrama siguiente:

$$\cdot \longleftarrow \square \longrightarrow \star.$$

De nuevo, abusando del lenguaje, se puede hablar del colímite de un diagrama de la forma

$$A \xleftarrow{g} B \xrightarrow{f} C$$

en vez de hablar del colímite de un cierto funtor  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{D}$ . Al colímite de un diagrama como el anterior se le llama *pushout o coproducto fibrado* y al cuadrado que forma con el diagrama interior se le llama *cuadrado cocartesiano*.

**Ejemplo** Hay productos y coproductos en **Cat**. Dadas categorías pequeñas  $\{C_i\}_{i \in I}$ , uno construye  $\prod C_i$  como la categoría cuyo conjunto de objetos es  $\prod_{i \in I} Ob(C_i) = \{a : I \rightarrow \cup_{i \in I} Ob(C_i) : a(i) \in Ob(C_i)\}$  (el producto usual en la categoría de conjuntos); y para cada pareja de objetos  $x, y \in \prod_{i \in I} Ob(C_i)$ , se define  $(\prod C_i)(x, y) = \prod_{i \in I} C_i(x_i, y_i)$ , donde  $x_i = x(i) \in C_i$ . Se tienen evidentes funtores proyecciones  $\pi_i : \prod C_j \rightarrow C_i$ ; y es rutinario verificar que satisfacen la propiedad universal. Se construye  $\coprod C_i$  como la categoría cuyo conjunto de objetos es la unión ajena de  $Ob(C_i)$ , que denotamos  $U$ . Dado un par de elementos de  $U$ ,  $a = (a_i, i), b = (b_j, j)$ , uno pone

$$\prod_{i \in I} C_i(a, b) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } i \neq j; \\ C_i(a_i, b_j), & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Se tienen las obvias inclusiones  $C_i \hookrightarrow \prod C_j$  y de nuevo se verifica fácilmente que satisfacen la propiedad universal.

Frecuentemente las categorías se usan como fundamentos, es decir, como contextos donde hacer construcciones o pruebas; las categorías también se pueden usar como una estructura algebraica más, viéndolas como gráficas con composición.

**Definición** Una *categoría interna u objeto categoría* en una categoría  $\mathbf{C}$  con límites finitos consta de lo siguiente. Dos objetos  $C_0$  y  $C_1$  en  $Ob(\mathbf{C})$ , dos flechas llamadas origen y destino respectivamente  $s, t : C_1 \rightarrow C_0$ , una flecha llamada de identidades  $i : C_0 \rightarrow C_1$  y otra flecha

llamada composición  $\circ : C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1$  que cumplen  $si = ti = 1$  y hacen conmutar los diagramas

$$\begin{array}{ccccc}
 C_1 \times_{C_0} C_1 & \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{1 \times \circ} & C_1 \times_{C_0} C_1 & C_0 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{i \times 1} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xleftarrow{1 \times i} & C_1 \times_{C_0} C_0 \\
 \circ \times 1 \downarrow & & & \downarrow \circ & & & \downarrow \circ & & \downarrow \circ \\
 C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\circ} & C_1 & & & & C_1 & & C_1
 \end{array}$$

$p$    $q$

donde  $p, q$  son las proyecciones canónicas. Una categoría pequeña  $\mathbf{C}$  se puede ver como una categoría interna en  $\mathbf{Con}$ : tomamos  $C_0$  como su conjunto de objetos, se pone  $C_1$  como la unión ajena  $\coprod_{(x,y) \in C_0^2} \mathbf{C}(x,y)$ ,  $s, t : C_1 \rightarrow C_0$  las funciones que restringidas a cada  $\mathbf{C}(x,y)$  cumplen  $f \mapsto x$  y  $f \mapsto y$  respectivamente; la composición  $\circ : C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1$  es la función que restringida a cada  $\mathbf{C}(x,y) \times \mathbf{C}(y,z)$  es la composición de  $\mathbf{C}$  e  $i : C_0 \rightarrow C_1$  está dada por  $a \mapsto 1_a$ . La información de una categoría interna se presenta usualmente como una sexteta ordenada  $(C_0, C_1, i, s, t, \circ)$  (aunque a veces por brevedad, omitiremos la flecha de identidades). Con esta descripción, es claro que se tiene un functor  $O : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Graf}$  que se olvida de las identidades y composiciones: en objetos se pone  $(C_0, C_1, i, s, t, \circ) \mapsto (C_0, C_1, s, t)$  y en flechas, como un functor

$$F : (C_0, C_1, i, s, t, \circ) \rightarrow (D_0, D_1, i', s', t', \circ')$$

está dado por una pareja de flechas  $f_0 : C_0 \rightarrow D_0$  y  $f_1 : C_1 \rightarrow D_1$ , se define  $O(F) = (f_0, f_1)$ .

**Proposición 1.1.1.** *Una categoría  $\mathbf{B}$  es cocompleta si tiene coproductos (pequeños) y coigualadores arbitrarios.*

**Demostración** Sea  $\mathbf{C}$  una categoría pequeña y  $d_i$  con  $i = 0, 1$  las funciones origen y destino en  $\mathbf{C}$ . Sea  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$  un functor. Tomemos  $\coprod_{f \in \mathbf{C}} Fd_0f$  y  $\coprod_{c \in \mathbf{C}} Fc$ . Hay  $u, v : \coprod_{f \in \mathbf{C}} Fd_0f \rightarrow \coprod_{c \in \mathbf{C}} Fc$  dados por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Fd_0g & \xrightarrow{Fg} & Fd_1g \\
 i_{Fd_0g} \downarrow & & \downarrow j_{Fd_1g} \\
 \coprod_{f \in \mathbf{C}} Fd_0f & \xrightarrow[u]{v} & \coprod_{c \in \mathbf{C}} Fc \xrightarrow{q} l \\
 & \searrow hu=hv & \downarrow h \quad \swarrow k \\
 & & a
 \end{array}$$

Es decir,  $u$  es la inducida por  $\{j_{Fd_1f}Ff\}_{f \in \mathbf{C}}$  y  $v$  por  $\{j_{Fd_0f}\}_{f \in \mathbf{C}}$ . Si  $q$  es el coigualador de  $u, v$ , entonces  $l = \text{colim}_{\mathbf{C}} F$  junto con  $\{qj_{Fc}\}_{c \in \mathbf{C}}$ . En efecto, dadas  $\{h_c : Fc \rightarrow a\}_{c \in \mathbf{C}}$  tales que  $\forall f \in \mathbf{C}, h_{Fd_1f}Ff = h_{Fd_0f}$ , si  $h$  es su función inducida en el coproducto,  $hu = hv$ . Luego existe una única  $k$  tal que  $kq = h$ . ■

**Definición** Sea  $\mathbf{C}$  una categoría pequeña. Una familia de relaciones de equivalencia  $\sim_{x,y}$  en  $\mathbf{C}(x,y) \forall x,y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ , tal que, si  $f,g \in \mathbf{C}(x,y)$  y  $f',g' \in \mathbf{C}(y,z)$  satisfacen  $f \sim_{x,y} g$  y  $f' \sim_{y,z} g'$  entonces  $ff' \sim_{x,z} gg'$ , se llama una congruencia en  $\mathbf{C}$ . Se define la *categoría cociente*  $\mathbf{C}/\sim$  como la categoría cuyo conjunto de objetos es  $\text{Ob}(\mathbf{C})$  y  $\forall x,y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ ,  $\mathbf{C}/\sim(x,y) = \mathbf{C}(x,y)/\sim_{x,y}$ . La composición e identidades de  $\mathbf{C}/\sim$  son las inducidas por la composición e identidades de  $\mathbf{C}$  y es inmediato verificar que con esa estructura  $\mathbf{C}/\sim$  es una categoría.

## 1.2. Definición y construcciones básicas

**Definición** Un *grupoide* es una categoría  $G$ , donde todo morfismo es un isomorfismo. Luego  $\forall x \in G \ G(x,x) = G(x)$  en  $\mathbf{Gru}$ . Dado un  $x \in \text{Ob}(G)$ , la componente conexa de  $x$  consta de los objetos de  $G$  que se pueden unir a  $x$  mediante algún morfismo.  $G$  es *conexo*, si  $\text{Ob}(G)$  coincide con la componente conexa de algún objeto y es *totalmente inconexo*, si para cada  $x$ , su componente conexa es  $\{x\}$ .

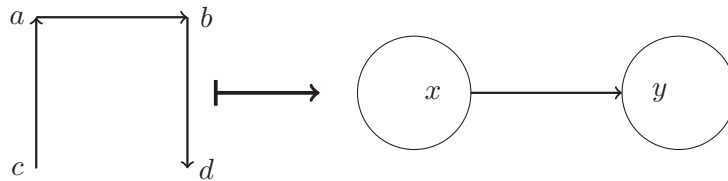
Veremos que la categoría de grupoides pequeños,  $\mathbf{Gpd}$  es cocompleta. Para ello, usaremos que basta verificar que contenga coproductos y coigualadores. Primero resulta conveniente construir un caso especial de colímite. Nos basamos en [9].

**Lema 1.2.1.** *Supongamos que se tiene el siguiente diagrama en  $\mathbf{Gpd}$ :*

$$G \longleftarrow I \xrightarrow{\sigma} J,$$

donde  $I$  es el conjunto de objetos de  $G$  considerado como grupoide discreto y  $J$  es otro grupoide discreto por lo que  $\sigma$  no es más que una función. El diagrama anterior tiene un pushout en  $\mathbf{Gpd}$ .

**Demostración** Como  $\mathbf{Gpd}$  es una subcategoría de  $\mathbf{Cat}$ , se aplica el functor que olvida  $O : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Graf}$  a  $G$ , y a  $O(G)$  se le aplica la siguiente construcción. Consideremos  $A$ , el conjunto de las aristas de  $O(G)$ , con funciones origen y destino  $\delta_0, \delta_1 : A \rightarrow I$  y la función  $\sigma : I \rightarrow J$ . Definimos la gráfica  $B_\sigma = (J, A, \sigma\delta_0, \sigma\delta_1)$ . Por ejemplo, cuando  $\sigma$  cumple  $\sigma(a) = \sigma(c) = x$  y  $\sigma(b) = \sigma(d) = y$  en la primera gráfica del diagrama de abajo,  $B_\sigma$  es la segunda gráfica del diagrama.



Después tomamos la categoría libre  $L(B_\sigma)$  en  $B_\sigma$  (ver §1.1). Ahora se define la siguiente congruencia en  $L(B_\sigma)$ :



$$(f_0, \dots, f_n) \sim (f_0, \dots, g_i, f_{i+2}, \dots, f_n),$$

$$() \sim (1_x)$$

si  $g_i = f_{i+1}f_i$  y  $() \in L(B_\sigma)(x, x)$  es la sucesión vacía. A la categoría cociente  $L(B_\sigma)/\sim$  la denotamos como  $U_\sigma(G)$ . Notemos que  $U_\sigma(G)$  es automáticamente un grupoide. De esta manera tenemos un funtor  $S : G \rightarrow U_\sigma(G)$ , dado por  $\sigma$  en objetos y por  $f \mapsto (f)$  en flechas, que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{S} & U_\sigma(G) \\ \uparrow i_G & & \uparrow i_J \\ I & \xrightarrow{\sigma} & J. \end{array}$$

Para verificar que se trata de un cuadrado cocartesiano, supongamos que hay un par de funtores  $T : J \rightarrow C, U : G \rightarrow C$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\sigma} & J \\ \downarrow i_G & & \downarrow i_J \\ G & \xrightarrow{S} & U_\sigma(G) \end{array} \begin{array}{c} \searrow T \\ \downarrow F \\ \searrow U \end{array} \rightarrow C.$$

Entonces, definimos  $F : U_\sigma(G) \rightarrow C$  como  $T$  en objetos; y como las flechas son clases de equivalencia de sucesiones de flechas de  $G$ , basta definir  $F(f) = U(f)$ ; y la unicidad es clara. ■

**Ejemplo** Como aplicación de esta construcción, si tenemos un grupoide totalmente in-conexo  $G = \{G_i\}_{i \in I}$  y  $J = \{*\}$ , se tiene que  $U_\sigma(G)(*) \cong \coprod_{i \in I} G_i$  en **Gru**. Hemos visto entonces que hay coproductos arbitrarios en **Gru**; pero también existen coigualadores arbitrarios en **Gru** por el lema siguiente (**Gru** es obviamente una subcategoría de **Gpd**), luego la proposición 1.1.1 nos dice que **Gru** es completa y nos da una manera general de construir colímites arbitrarios.

**Lema 1.2.2.** *Hay coigualadores en Gpd.*

**Demostración** Para construir el coigualador en **Gpd** de dos flechas  $\phi, \psi : G \rightarrow H$ , consideramos en primer lugar sus restricciones a objetos y su coigualador  $\sigma$  en la categoría de conjuntos:  $Ob[G] \rightrightarrows Ob[H] \rightarrow c$ . Luego, se construye el cuadrado cocartesiano de  $H \leftarrow Ob[H] \rightarrow c$ :

$$\begin{array}{ccc}
H & \xrightarrow{S} & U_\sigma(H) \\
\uparrow i_H & & \uparrow i_c \\
Ob[H] & \xrightarrow{\sigma} & c
\end{array}$$

Ahora observemos que el coigualador de  $\phi, \psi$ , factoriza el coigualador de  $S\phi, S\psi$ . Y para construir este último, se define una congruencia en  $U_\sigma(H)$ . Si  $f = \phi h, g = \phi h$  para  $h \in G(b_1, b_2)$  se declaran equivalentes  $(f) \sim (g)$ .

La categoría (grupoide) cociente obtenida  $C = U_\sigma(H)/\sim$ , junto con el functor proyección  $\widehat{S} : H \rightarrow U_\sigma(H) \rightarrow C$  resulta un coigualador para  $S\phi, S\psi$ . En efecto, sea  $T : U_\sigma(H) \rightarrow D$  tal que  $T\phi = T\psi$ . Definimos  $U : C \rightarrow D$  de la siguiente manera. A nivel de objetos, existe una única  $U_o : Ob(C) \rightarrow Ob(D)$  tal que  $T_o = U_o \widehat{S}_o$ . Por otro lado, definimos en cada  $U_\sigma(H)(a_1, a_n) : \bar{U}(f) = Tf$ .

Y como  $T$  iguala a  $\phi, \psi$ , se induce un functor  $U : C \rightarrow D$ . ■

Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.3.** *Gpd es cocompleta.*

**Definición** Dos morfismos entre grupoide  $f, g : G \rightarrow G'$  son *homotópicos*, y lo denotamos  $f \simeq g$ , si hay una transformación natural  $\theta$  entre ellos. Como  $G'$  es un grupoide,  $\theta$  es de hecho un isomorfismo natural. Una homotopía  $\theta$  es relativa a un subgrupoide  $H \subset G$ , si  $\theta_h = 1_h \forall h \in H$ ; esta situación la denotamos por  $f \simeq g \text{ rel } A$ . Como es costumbre al conjunto de clases de homotopía de funtores de  $G$  a  $G'$  lo denotamos  $[G, G']$ . Una retracción es un morfismo  $r : G \rightarrow A$ , donde  $A$  es un subgrupoide  $i : A \hookrightarrow G$ , tal que  $ri = 1_A$ .  $A$  es un retracto por deformación de  $G$ , si además de lo anterior  $ir \simeq 1_G \text{ rel } A$ .

**Ejemplo** Cuando  $G, G'$  son grupos, los  $f, f' : G \rightarrow G'$  son homotópicos si difieren por una conjugación, es decir,  $\exists a \in G'$  tal que  $\forall g \in G, f(g) = af'(g)a^{-1}$ .

**Proposición 1.2.4.** *Todo grupoide  $G$  es equivalente a un grupoide totalmente inconexo  $\coprod G(p)$  donde los  $p$  son representantes de las componentes conexas de  $G$ .*

**Demostración** Escojamos un objeto de cada componente conexa de  $G$  y sea  $\{p\}_{p \in P}$  la familia formada por esos representantes. Entonces se escoge para cada  $x \in G$  una flecha  $\theta_x : p \rightarrow x$  (para  $p$  se escoge  $1_p$ ). Luego se pone  $r : G \rightarrow \coprod G(p)$  así  $r(x) = p$  si  $x$  está en la componente de  $p$ , y en morfismos,  $r(a)$  es la flecha que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc}
r(x) & \xrightarrow{\theta_x} & x \\
r(a) \downarrow & & \downarrow a \\
r(y) & \xrightarrow{\theta_y} & y.
\end{array}$$

De esta manera si  $i$  es la inclusión  $\coprod G_p \hookrightarrow G$ , se tiene que  $ri = 1, ir \simeq 1_G$ .  $\blacksquare$

La familia principal de grupoides que se estudiará en este trabajo es la siguiente.

**Definición** Sea  $X \in \mathbf{Top}$ . Se define el *grupoide fundamental de  $X$* ,  $\Pi_1 X \in \mathbf{Gpd}$ , como el grupoide cuyo conjunto de objetos es  $X$  y para cada  $x, y \in X$ , su conjunto de morfismos está dado por  $\Pi_1 X(x, y) = [I, 0, 1; X, x, y]$ , el conjunto de clases de homotopía de caminos de  $x$  a  $y$  relativas a sus extremos. La composición de dos flechas  $[a], [b], a(1) = b(0)$  está dada por el producto usual de caminos.

$$(ab)(t) = \begin{cases} a(2t), & \text{si } t \leq 1/2; \\ b(2t - 1), & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Es fácil ver que se trata efectivamente de un grupoide, basta calcar la prueba análoga para el grupo fundamental.

1. Asociatividad. Si  $a, b, c : I \rightarrow X$  son adecuadamente componibles:  $(ab)c \simeq a(bc)$  mediante la homotopía siguiente.

$$H(s, t) = \begin{cases} a\left(\frac{4s}{2-t}\right), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{2-t}{4}; \\ b(4s + t - 2), & \text{si } \frac{2-t}{4} \leq s \leq \frac{3-t}{4}; \\ c\left(\frac{4s+t-3}{t+1}\right), & \text{si } \frac{3-t}{4} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

2. Identidades. Para cada  $x \in X$ ,  $1_x = [c_x]$  (la clase del camino constante). Entonces, dado  $[a] \in \Pi_1 X(x, y)$ ,  $ac_y \simeq c_x a \simeq a$  mediante las siguientes homotopías.

$$H(s, t) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2}; \\ a\left(\frac{2s+t-1}{t+1}\right), & \text{si } \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$K(s, t) = \begin{cases} a\left(\frac{2s}{t+1}\right), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2}; \\ y, & \text{si } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

3. Inversos. Dado  $a : I \rightarrow X, a(0) = x, a(1) = y$ , se define  $\bar{a}(t) = a(1 - t)$ . Entonces  $a\bar{a} \simeq c_x$  y  $\bar{a}a \simeq c_y$ .

$$H(s, t) = \begin{cases} a(2s(1-t)), & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2; \\ a(2(1-s)(1-t)), & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$K(s, t) = \begin{cases} a(2(1-s)(1-t)), & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2; \\ a(2s(1-t)), & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

**Nota** Como  $\Pi_1 X(x) = \pi_1(X, x)$  escribiremos por la derecha la composición de flechas en  $\Pi_1 X$ .

**Definición** Para muchas aplicaciones conviene usar grupoides con una cantidad razonable de objetos en vez de tomar a todos los puntos del espacio. Para ello se usa la versión para parejas de  $\Pi_1$ . Si  $X_0 \subset X$ ,  $\Pi_1(X, X_0)$  es la subcategoría plena de  $\Pi_1 X$  cuyo conjunto de objetos es  $X_0$ .

**Definición**  $\Pi_1$  es un funtor de **Top** a **Gpd**. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Se define  $\Pi_1 f : \Pi_1 X \rightarrow \Pi_1 Y$  como  $f$  en los objetos. En las flechas, dada  $[\lambda] \in \Pi_1 X(x, y)$ , se define  $\Pi_1 f[\lambda] = [f\lambda] \in \Pi_1 Y(fx, fy)$ . Por lo cual  $\Pi_1 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Gpd}$  es un funtor covariante.

**Proposición 1.2.5.** Si  $f \simeq g : X \rightarrow Y$  en **Top**, entonces  $\Pi_1 f \simeq \Pi_1 g$ .

**Demostración** Sean  $x$  y  $y$  puntos en  $X$  y  $H : X \times I \rightarrow Y$  una homotopía de  $f$  a  $g$ . Probaremos que, poniendo  $\forall z \in X$ ,  $[H|_{\{z\} \times I} = H_z]$  lo que nos da un morfismo de  $f(z)$  a  $g(z)$ , se tiene  $\forall [a] \in \Pi_1 X(x, y)$   $(fa)H_y \simeq H_x(ga)$  (es la condición de naturalidad). Notemos que  $H'(s, t) = H(a(s), t)$  nos da  $fa \simeq ga$  y  $H'(0, t) = H_x(t)$ ,  $H'(1, t) = H_y(t)$ . Tomemos la identificación  $p : I^2 \rightarrow D^2 \subset \mathbb{C}$

$$p(u, v) = (2u - 1, (2v - 1)\sqrt{1 - (2u - 1)^2}),$$

y el homeomorfismo  $f : D^2 \rightarrow D^1 \times D^1$  dado por

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{\|(u, v)\|}{|u|}(u, v), & \text{si } |u| \geq |v|; \\ \frac{\|(u, v)\|}{|v|}(u, v), & \text{si } |u| \leq |v|; \\ (0, 0), & \text{si } (u, v) = (0, 0). \end{cases}$$

$f$  es continua porque su inversa claramente lo es y es biyección de un compacto en un Hausdorff:

$$f^{-1}(u, v) = \begin{cases} \frac{|u|}{\|(u, v)\|}(u, v), & \text{si } |u| \geq |v|; \\ \frac{|v|}{\|(u, v)\|}(u, v), & \text{si } |u| \leq |v|; \\ (0, 0), & \text{si } (u, v) = (0, 0). \end{cases}$$

Poniendo  $R : D^2 \rightarrow D^2$  la rotación  $z \mapsto e^{-i\pi/4}z$  y  $T : D^1 \times D^1 \rightarrow I^2$  como  $T(u, v) = (\frac{u+1}{2}, \frac{v+1}{2})$  se define  $F = T \circ f \circ R \circ p$ . Si  $F_1, F_2$  son las componentes de  $F$ , o sea  $F(y) =$

$(F_1(y), F_2(y))$ , se define  $F' : I^2 \times \{0\} \cup (\partial I^2 \times I) \rightarrow Y$  como

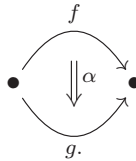
$$F'(u, v, t) = \begin{cases} H' \circ F(u, v), & \text{si } t = 0; \\ H'((1-t)F_1(u, 1) + 2tu, 1), & \text{si } u \leq 1/2 \text{ y } v = 1; \\ H'(1, (1-t)F_2(u, 1) + 2t(1-u)), & \text{si } u \geq 1/2 \text{ y } v = 1; \\ H'(0, (1-t)F_2(u, 0) + t(1-2u)), & \text{si } u \leq 1/2 \text{ y } v = 0; \\ H'((1-t)F_1(u, 0) + t(2u-1), 0), & \text{si } u \geq 1/2 \text{ y } v = 0; \\ H'(0, 1), & \text{si } u = 0; \\ H'(1, 0), & \text{si } u = 1. \end{cases}$$

Como la inclusión  $\partial I^2 \hookrightarrow I^2$  es cofibración, existe una extensión  $G : I^2 \times I \rightarrow Y$  de  $F'$ . Se define  $K : I^2 \rightarrow Y$  como  $K(u, v) = G(u, v, 1)$ .  $K$  es una homotopía de  $(ga)\bar{H}_y$  a  $\bar{H}_x(fa)$  rel  $\partial I$ . ■

### 1.3. Grupos dobles

Mientras que un grupoide es en cierto modo un objeto 1-dimensional pues el grupoide fundamental de un espacio topológico captura solo el número de componentes conexas por trayectorias y el grupo fundamental de cada una de ellas, existen otros objetos algebraicos que sirven para representar más adecuadamente objetos geométricos como superficies u otros espacios de dimensión mayor. Se trata de categorías enriquecidas en cierto modo, que además de flechas 1-dimensionales poseen morfismos 2-dimensionales (parecidos a alguna especie de celda poligonal) que, en el caso de espacios topológicos, pueden representar homotopías entre caminos, es decir morfismos entre morfismos.

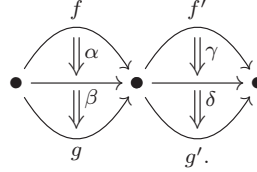
Un ejemplo notable es justo el de la categoría de categorías pequeñas. En este caso además de objetos (categorías) y flechas (funtores) hay otra especie de morfismos, las transformaciones naturales. Estas se pueden dibujar como un polígono de 2 lados así:



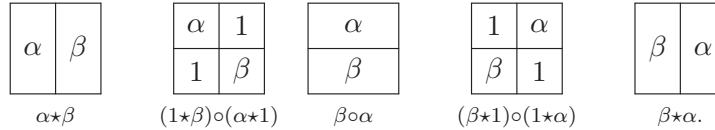
Las transformaciones naturales tienen dos maneras de componerse, que denotamos  $\square$  y  $\circ$ . Si tenemos transformaciones naturales  $\sigma : F \rightarrow G, \tau : G \rightarrow H$  con  $F, G, H : A \rightarrow B$  funtores y  $a \in Ob(A)$ ; se define  $(\sigma \circ \tau)_a = \sigma_a \tau_a$ . Si se tiene otra transformación natural  $\eta : F' \rightarrow G'$  con  $F', G' : B \rightarrow C$ , se define  $(\sigma \square \eta)_a = (F' \sigma_a) \tau_{G'a}$ . Es rutinario comprobar que las transformaciones así definidas son naturales. Estas composiciones satisfacen lo que se llama usualmente *ley de intercambio*:

$$(\alpha \circ \beta) \square (\gamma \circ \delta) = (\alpha \square \gamma) \circ (\beta \square \delta).$$

En el diagrama siguiente esa ecuación significa que uno puede componerlas caminando hacia la derecha o hacia abajo sin ambigüedad

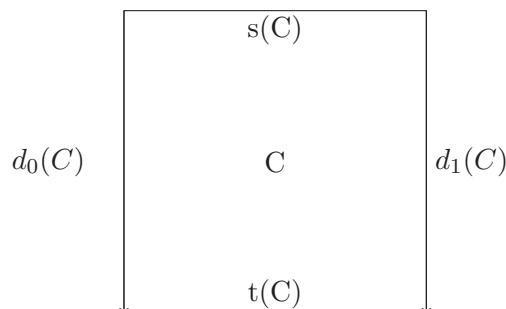


Cuando se considera al funtor identidad  $1_C$  de una categoría en sí misma, si llamamos  $M$  al conjunto de transformaciones naturales de  $1_C$  en sí mismo, observamos que  $M$  tiene dos operaciones que le dan estructura de monoide y un neutro bilateral en común. Y, en general, cuando en un conjunto hay dos operaciones  $\circ$  y  $\star$  que satisfacen la identidad  $(a \circ b) \star (c \circ d) = (a \star c) \circ (b \star d)$  y comparten el mismo neutro, ambas operaciones coinciden y son abelianas [1]. La demostración se puede sugerir geoméricamente con la figura siguiente (que de hecho es el dibujo usual para ilustrar que los grupos de homotopía superiores son abelianos)



En este trabajo consideraremos familias de categorías en las que los morfismos 2-dimensionales tienen forma de cuadrados.

**Definición** Una *categoría doble (pequeña)* es una categoría interna,  $(C_0, C_1, i, d_0, d_1, \circ)$  en **Cat**. Es decir,  $C_0$  y  $C_1$  son categorías, y  $d_i, i, \circ$  son funtores que hacen conmutar los diagramas mencionados en §1.1. Esta estructura se puede entender mejor dibujando sus diversos elementos de la siguiente manera. A las flechas de  $C_1$  las llamamos *2-morfismos o cuadrados* y las dibujamos como cuadrados. Consideremos la frontera de cada cuadrado  $C$  etiquetado por una flecha de  $C_1$ . A los segmentos horizontales los llamamos *1-morfismos* y los etiquetamos con el origen  $s(C)$  y destino  $t(C)$  de  $C$  en la categoría  $C_1$ , es decir, se trata de elementos de  $Ob(C_1)$ ; pongamos como origen al segmento de arriba. A los segmentos verticales también los llamamos *1-morfismos* y los etiquetamos con las flechas de  $C_0$  dadas por  $d_0(C)$  (a la izquierda) y  $d_1(C)$ . El dibujo que queda es el siguiente



Finalmente los vértices del cuadrado se llaman *objetos* se etiquetan con los orígenes y destinos de  $d_i(C)$ , elementos de  $Ob(C_0)$ . Dados dos cuadrados  $A, B$  tales que la cara vertical derecha de  $A$  coincida con la cara vertical izquierda de  $B$ , está definida  $\circ(A, B)$  que nos da otro cuadrado. A esta operación la llamamos composición horizontal  $+_2$ . Si en cambio,  $t(A) = s(B)$ , entonces  $A$  y  $B$  son componibles en  $C_1$  y a esta operación la llamamos composición vertical  $+_1$ . Como  $\circ$  es un functor, se satisface la *ley de intercambio*:

$$(a +_1 b) +_2 (c +_1 d) = \circ(a +_1 b, c +_1 d) = \circ(a, c) +_1 \circ(b, d) = (a +_2 c) +_1 (b +_2 d).$$

Los morfismos de categorías dobles son los funtores internos a **Cat**, es decir, funtores tales que tanto su morfismo en objetos como su morfismo en flechas son funtores a su vez.

En este trabajo solo usaremos variantes del concepto anterior donde también los 2-morfismos son representables como cuadrados pero los 1-morfismos son todos flechas de una misma categoría. Estas estructuras se conocen como *categorías dobles simétricas respecto a las aristas*<sup>2</sup> pero como no habrá riesgo de confusión con las anteriores las llamaremos simplemente categorías dobles. Una categoría doble simétrica respecto a las aristas consta de los siguientes elementos:

1. tres conjuntos  $D_2, D_1$  y  $D_0$ , cuyos elementos se llaman respectivamente 2-morfismos, 1-morfismos y objetos;
2. cuatro funciones llamadas *fronteras* para  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \partial_i^+ &: D_2 \rightarrow D_1, \\ \partial_i^- &: D_2 \rightarrow D_1; \end{aligned}$$

3. dos operaciones  $+_1$  y  $+_2$  llamadas composición vertical y composición horizontal respectivamente tales que cada  $(D_1, D_2, \partial_i^\pm, +_i)$  es una categoría lo que presupone que  $+_i : D_2 \times_{D_1} D_2 \rightarrow D_2$  tiene como dominio al producto fibrado de  $\partial_i^+$  y  $\partial_i^-$ ; luego dada  $f \in D_1$ , hay  $1'_f \in D_2$  su identidad respecto a  $+_1$  y  $1''_f \in D_2$  la identidad de  $f$  respecto a  $+_2$ ;

---

<sup>2</sup>Este tipo de categoría fue introducido en [8].

4. una categoría  $(D_0, D_1, j, \partial^-, \partial^+, \circ)$ .

Esos datos cumplen lo siguiente:  $+_1$  y  $+_2$  satisfacen la ley de intercambio y se satisfacen las identidades siguientes para todos  $a, b, c, d \in D_2$  y  $f \in D_1$ :

$$\begin{aligned}\partial_1^\pm(a +_2 b) &= \partial_1^\pm(a) \circ \partial_1^\pm(b), \\ \partial_2^\pm(c +_1 d) &= \partial_2^\pm(c) \circ \partial_2^\pm(d), \\ \partial^- \partial_1^- &= \partial^- \partial_2^-, \\ \partial^+ \partial_1^+ &= \partial^+ \partial_2^+, \\ \partial^+ \partial_2^- &= \partial^- \partial_1^+, \\ \partial^+ \partial_1^+ &= \partial^+ \partial_2^-, \\ \partial_1^\pm(1_f'') &= 1_{\partial^-(f)}, \\ \partial_2^\pm(1_f') &= 1_{\partial^-(f)}.\end{aligned}$$

La información que determina una categoría doble se presentará más adelante como una 12-ada ordenada  $D = (D_2, D_1, D_0, \partial_i^\pm, \partial^\pm, +_i, \circ)_{i=1,2}$ .

Los morfismos entre dos categorías dobles simétricas respecto a las aristas

$$\begin{aligned}D &= (D_2, D_1, D_0, \partial_i^\pm, \partial^\pm, +_i, \circ)_{i=1,2}, \\ E &= (E_2, E_1, E_0, \partial_i'^\pm, \partial'^\pm, +_i, \circ)_{i=1,2},\end{aligned}$$

son ternas de funciones  $(f_2, f_1, f_0)$

$$\begin{aligned}f_2 &: D_2 \rightarrow E_2, \\ f_1 &: D_1 \rightarrow E_1, \\ f_0 &: D_0 \rightarrow E_0,\end{aligned}$$

que conservan toda la estructura relevante,  $\forall a, b, c, d \in D_2, x, y \in D_1$ :

$$\begin{aligned}f_2(a +_1 b) &= f_2(a) +_1 f_2(b), \\ f_2(c +_2 d) &= f_2(c) +_2 f_2(d), \\ f_1(x \circ y) &= f_1(x) \circ f_1(y);\end{aligned}$$

en breve,  $(f_1, f_2)$  es funtor respecto a  $+_2$  y  $+_1$  y  $(f_0, f_1)$  es funtor respecto a  $\circ$ . Un *grupoide doble simétrico en aristas* es una categoría doble simétrica en aristas que es un grupoide respecto a todas sus composiciones. Denotamos la categoría de grupoides dobles simétricos en aristas como **GpdDS**.

**Ejemplo** Un haz vectorial diferenciable  $\xi = (E, p : E \rightarrow M, M)$  se puede ver como un grupoide totalmente inconexo cuyas flechas son los elementos de  $E$ , sus objetos son los



puntos de  $M$  y sus funciones origen y destino son ambas  $p$ ; la composición es la suma de vectores en las fibras (como de hecho es un grupoide interno en la categoría de variedades diferenciables, se dice que es un grupoide de Lie). Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{\pi_E} & E \\ Tp \downarrow & & \downarrow p \\ TM & \xrightarrow{\pi_M} & M. \end{array}$$

Mediante una conexión afín en  $\xi$  se puede dar un isomorfismo de haces vectoriales sobre  $E$ :  $TE \cong p^*E \oplus p^*TM$  donde  $p^*$  representa tomar el haz pullback con la función  $p$  y  $\oplus$  es la suma de Whitney. En otras palabras, teniendo una manera de elegir subespacios “horizontales” de  $TE$ , se puede encontrar sin usar coordenadas locales un complemento al subhaz “vertical” de  $TE$   $\text{nuc}(Tp) \cong p^*E$ . Los elementos de  $p^*E \oplus p^*TM$  se pueden representar como  $(e, e_1) \oplus (e, v)$  con  $e, e_1 \in E_x$  y  $v \in T_xM$ . Hemos visto que  $(TE, E)$  es un grupoide respecto a la suma usual, pero podemos ver también a  $TE$  como conjunto de flechas de otro grupoide, cuyo conjunto (variedad) de objetos es  $TM$ . Definimos como funciones origen y destino a  $Tp$  o, usando la descripción de  $TE$  como  $p^*E \oplus p^*TM$ , esas funciones están dadas por  $(e, e_1) \oplus (e, v) \mapsto (p(e), v) \in TM$ . Se define entonces la siguiente composición

$$(e, e_1) \oplus (e, v) +_1 (e', e_2) \oplus (e', v) = (e + e', e_1 + e_2) \oplus (e + e', v).$$

Se puede ver que  $+_1$  y la composición (suma) usual

$$(e, e_1) \oplus (e, v) +_2 (e, e_3) \oplus (e, v') = (e, e_1 + e_3) \oplus (e, v + v')$$

satisfacen la ley de intercambio y vuelven a  $(TE, TM, E, +_i, Tp, \pi_E)$  un grupoide doble. Si se toma  $E = TM$  se tiene un grupoide simétrico respecto a las aristas.

**Definición** Dada  $C \in \mathbf{Cat}$ , la categoría doble  $\square C$  tiene como conjunto de 2-morfismos al conjunto de los diagramas en  $C$  no necesariamente conmutativos de la forma

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{a} & x \\ b \downarrow & & \downarrow c \\ y & \xrightarrow{d} & z. \end{array}$$

Denotaremos matricialmente a esos diagramas: al ejemplo anterior lo ponemos como

$$\begin{bmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, en §3.2 también indicaremos a un diagrama como el anterior como la matriz

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}.$$

Las fronteras son las siguientes:

$$\begin{aligned} \partial_1^+ \begin{bmatrix} b & a & c \\ & d & \end{bmatrix} &= d, \partial_1^- \begin{bmatrix} b & a & c \\ & d & \end{bmatrix} = a \\ \partial_2^- \begin{bmatrix} b & a & c \\ & d & \end{bmatrix} &= b, \partial_2^+ \begin{bmatrix} b & a & c \\ & d & \end{bmatrix} = c. \end{aligned}$$

Las reglas de composición son las siguientes, donde por consistencia en la notación componemos por la derecha los 1-morfismos.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & & \\ b & c & \\ & d & \end{bmatrix} +_2 \begin{bmatrix} u & & \\ c & w & \\ & x & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} au & & \\ b & & w \\ & dx & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & & \\ b & c & \\ & d & \end{bmatrix} +_1 \begin{bmatrix} d & & \\ y & w & \\ & x & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & & \\ by & & cw \\ & d & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que vale la ley de intercambio

$$(a +_1 b) +_2 (c +_1 d) = (a +_2 c) +_1 (b +_2 d).$$

Luego, la composición de 2-morfismos se puede escribir sin ambigüedad como la yuxtaposición de cuadrados. Si  $a, b, c, d$  son 2-morfismos adecuadamente componibles,  $(a +_1 b) +_2 (c +_1 d)$  se puede denotar como

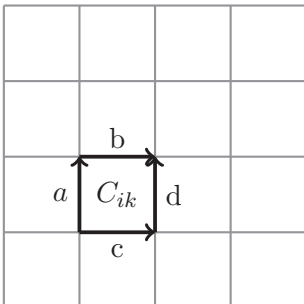
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

También conviene abreviar los 2-morfismos del tipo  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & a & \end{bmatrix}$  como  $\ulcorner$ , y los del tipo  $\begin{bmatrix} 1 & a & \\ & a & 1 \end{bmatrix}$  como  $\llcorner$  (se trata de las identidades verticales); y análogamente:  $\lrcorner = \begin{bmatrix} a & & \\ 1 & a^{-1} & \end{bmatrix}$ ,  $\llcorner = \begin{bmatrix} a & & \\ & a^{-1} & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\lrcorner = \begin{bmatrix} a & & \\ & a & 1 \end{bmatrix}$  y las identidades horizontales  $(=) = \begin{bmatrix} a & 1 & \\ & a & \end{bmatrix}$ . Una identidad útil satisfecha por estos elementos es:

$$\begin{pmatrix} \ulcorner & (=) \\ \llcorner & \lrcorner \end{pmatrix} = \ulcorner.$$

La subcategoría de  $\square C$ , correspondiente a los 2-morfismos dados por diagramas conmutativos, la denotamos  $\square C$ .

**Ejemplo** Cuando se tiene una homotopía entre trayectorias  $H : I^2 \rightarrow X$  rel  $\partial I$  y  $\{U_j\}_{j \in J}$  es una cubierta abierta de  $X$ , se puede subdividir  $I^2$  en una retícula tal que  $H(C_{ik}) \subset U_j$  para algún  $j \in J$  porque  $I^2$  es un espacio métrico compacto (es decir, se toma un número de Lebesgue  $\delta > 0$  de la cubierta de  $I^2$   $\{H^{-1}(U_j)\}_{j \in J}$  y se toma una retícula de cuadrados de lado  $1/n$  con  $1/n < \delta$ , y  $n \in \mathbb{N}$ ).



La frontera de cada subcuadrado, como el remarcado en la figura, nos da un elemento de  $\square\Pi_1(U_j)$ , pues  $H(ab) \simeq H(cd)$  rel  $\partial I$ ; e inductivamente se puede probar que, definiendo funtores  $f_j$  en cada  $\Pi_1(U_j)$  a un grupoide  $G$  que coincidan en las intersecciones  $\Pi_1(U_i \cap U_j)$ , se induce un único  $f : \Pi_1(X) \rightarrow G$  tal que sus restricciones coincidan con los  $f_j$ . El argumento consiste justo en ver que, poner  $f[\gamma] = \prod_j f_j[\gamma_j]$  para una subdivisión apropiada de  $I$ , (i) no depende de la subdivisión, ni (ii) del representante de  $[\gamma]$ . Ver que el cuadrado grande es producto de elementos de  $\square\Pi_1(U_j)$  permite probar (ii). Esta manera de usar grupoides dobles (y después triples) es esencial en la prueba de los teoremas 1 y 2-dimensionales de Seifert-van Kampen, como se ve en el Capítulo 3.

De manera intuitiva, las categorías dobles son el álgebra de los cuadrados.

## 1.4. Grupoides y simetría

Esta sección no es relevante para el resto de este trabajo pero puede resultar interesante ver este uso de los grupoides.

El concepto de grupo está asociado a la idea de simetría, todo grupo es de hecho un subgrupo del grupo de biyecciones de algún conjunto (Teorema de Cayley). El primer gran uso de los grupo fue justo el que hizo É. Galois para estudiar la solubilidad por radicales de ecuaciones polinomiales, se puede decir que una de las ideas subyacentes a la famosa correspondencia de Galois entre subgrupos del grupo de automorfismos de una extensión de campos  $[K, L]$  y subcampos de  $K$  que contienen a  $L$  es la siguiente: hay una correspondencia biunívoca entre clases de conjugación de subgrupos de un grupo  $G$  y clases de isomorfismo de  $G$ -conjuntos transitivos. Esta correspondencia está dada en una dirección por tomar, dado un conjunto  $X$  donde  $G$  actúa transitivamente, un  $x \in X$  y considerar el estabilizador de  $x$  (o subgrupo de isotropía)  $H_x < G$ . En el otro sentido, dado  $H < G$

se toma el conjunto de clases laterales (izquierdas) de  $H$ ,  $G/H$ . En el caso de que  $G$  sea finito, esta correspondencia es útil para problemas de conteo; si uno está más interesado en la geometría, los grupos por considerar son grupos de Lie (o topológicos) y los conjuntos donde interesa estudiar sus acciones son variedades diferenciables (o espacios topológicos arbitrarios). Este enfoque se puede ver como una generalización del “Programa de Erlangen” de F. Klein. Ahora, considerar sólo acciones transitivas es demasiado restrictivo, cuando no hay transitividad, el uso de grupoides es conveniente.

**Definición** Sea  $X$  un  $G$ -conjunto y  $a : G \times X \rightarrow X$  su acción. El *grupoide de acción o cociente débil* de  $G$  es el grupoide  $X//G$  cuyo conjunto de objetos es  $X$  y su conjunto de flechas es  $G \times X$ , la función fuente es la proyección en  $X$ , la función destino es  $a$ , la función de identidades es la dada por  $x \in X \mapsto (e, x)$  y la composición es  $(g, x) \circ (h, gx) = (hg, x)$ .

En otras palabras, en vez de identificar a puntos en la misma órbita, se consideran isomorfos. De esta manera,  $X//G$  es un grupoide basado en  $X$  donde las flechas son traslaciones mediante la acción y es claro entonces que objetos en la misma órbita son isomorfos. Luego las componentes conexas de  $X//G$  son las órbitas de la acción y por lo tanto  $X//G$  es equivalente al grupoide totalmente inconexo  $\coprod_{x \in O} H_x$  donde  $O$  es un conjunto de representantes de cada órbita y los grupos  $H_x$  son los estabilizadores correspondientes. Desde luego, esta descripción puramente algebraica es muy gruesa en general. Cuando  $X$  es un  $G$ -espacio,  $X//G$  es naturalmente un grupoide interno en **Top** y esa estructura extra (que llamaremos de grupoide topológico) lo vuelve no trivial. Usar grupoides de acción puede ser útil cuando los cocientes bajo la acción de un grupo no pertenecen a la categoría de origen, por ejemplo en el estudio de *orbifolds*.

**Ejemplo** Los grupoides de acción permiten describir simetrías locales. Si tenemos la teselación de  $\mathbb{R}^2$  dada por cuadrados de lado 1 digamos, y consideramos  $B = [0, 4] \times [0, 4]$ , el lenguaje de grupos usual, nos permitiría hablar sólo de los elementos del grupo  $G$  de simetrías de la teselación (generado por traslaciones enteras, reflexiones en las líneas horizontales por puntos en  $(1/2)\mathbb{Z} \times (1/2)\mathbb{Z}$  y reflexiones en las diagonales de los cuadrados de la teselación) que mandan a  $B$  en sí mismo. Sin embargo una regularidad mayor en  $B$  es visible. En cambio, con el lenguaje de grupoides, uno puede construir el grupoide de acción total  $\mathbb{R}^2//G$  y luego considerar el subgrupoide (pleno) cuyos objetos son los puntos de  $B$ , cf. [16]. Tenemos un morfismo (functor) fiel  $X//G \rightarrow G$  dado por la proyección  $(g, x) \mapsto g$ , se puede demostrar que si un grupoide admite un functor fiel a algún grupo  $G$ , entonces es equivalente al grupoide de acción de algún  $G$ -conjunto  $X$ .

## Capítulo 2

# Grupoides dobles y módulos cruzados

En este capítulo se introducen las nociones necesarias para formular y probar el teorema bidimensional de Seifert y van Kampen. Este teorema se relaciona con los grupos de homotopía relativos no abelianos de una pareja punteada. J.H.C. Whitehead intentó entender cómo es  $\pi_2(A \cup e^2, A, x)$  en términos de  $A$  y la función característica de la 2-celda. Estudiando ese fenómeno, Whitehead introdujo la noción de módulo cruzado<sup>1</sup>. Sucesivamente, R. Brown y P.J. Higgins, en la búsqueda de un Teorema de SvK bidimensional e influenciados por el carácter relativo de los resultados de Whitehead, notaron la conveniencia de definir un grupoide doble fundamental en términos relativos, es decir, de  $n$ -adas de espacios [5]. En primer lugar, se define el módulo cruzado fundamental de una pareja punteada en  $\mathbf{Top}_*^2$ ; y más en general, se habla de la categoría de módulos cruzados sobre grupoides  $\mathbf{ModX}$ . En seguida se construye el grupoide doble fundamental de una terna y se prueba que la categoría de grupoides dobles con estructura delgada,  $\mathbf{GpdD}$ , es equivalente a  $\mathbf{ModX}$ . Seguimos principalmente la exposición de [6].

### 2.1. Módulos cruzados y grupos de homotopía

En la sucesión exacta de homotopía de una pareja punteada  $(X, A, a_0)$  [1] se tiene una acción de  $\pi_1(A, a_0)$  en los grupos  $\pi_k(X, a_0), \pi_k(X, A, a_0)$  de forma que sus morfismos sean equivariantes respecto a ella.

**Definición** Definimos los grupos de homotopía relativos como las clases de homotopía de ternas  $\pi_k(X, A, a_0) = [I^k, I^{k-1} \times \{1\}, J^{k-1}; X, A, a_0]$  donde  $J^{k-1} = \partial I^k - \overset{\circ}{I}^{k-1} \times \{1\}$  y para

---

<sup>1</sup>[17, 18, 19]

$k > 1$ , si  $[\sigma], [\tau] \in \pi_k(X, A, a_0)$ , se define  $[\sigma] + [\tau] = [v]$  con  $v$  dada por:

$$v(s_1, s_2, \dots, s_k) = \begin{cases} \sigma(2s_1, s_2, \dots, s_k), & \text{si } s_1 \leq 1/2; \\ \tau(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_k), & \text{si } s_1 \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Llamaremos  $v = \sigma + \tau$ . En particular nos interesa el morfismo frontera

$$\pi_2(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, a_0),$$

dado por  $\partial[\sigma] = [\sigma|_{I \times \{1\}}]$ . Se tiene una acción derecha

$$\alpha : \pi_k(X, A, a_0) \times \pi_1(A, a_0) \longrightarrow \pi_k(X, A, a_0)$$

que se puede definir de la siguiente manera. Sean  $[a] \in \pi_1(A, a_0)$  y  $[s] \in \pi_k(X, A, a_0)$ . Como la inclusión  $\partial I^{k-1} \hookrightarrow I^{k-1}$  es una cofibración, si se definen las funciones  $f : I^{k-1} \times \{0\} \rightarrow A$  con  $f(x, 0) = s(x, 1)$  y  $h : \partial I^{k-1} \times I \rightarrow A$  con  $h(x, t) = a(t)$ , entonces existe una función continua  $H : I^{k-1} \times I \rightarrow A$  que extiende a  $f$  y a  $h$ . Ahora, la inclusión  $\partial I^k \hookrightarrow I^k$  también es cofibración por lo que considerando  $s : I^k \times \{0\} \rightarrow X$  y  $F : \partial I^k \times I \rightarrow X$  dada por

$$F(x, t) = \begin{cases} a(t), & \text{si } x \in J^{k-1}; \\ H(y, t), & \text{si } x = (y, 1) \text{ con } y \in I^{k-1}; \end{cases}$$

existe  $G : I^k \times I \rightarrow X$  que extiende a  $s$  y a  $F$ . Es claro que  $s \cdot a : I^k \rightarrow X$  con  $(s \cdot a)(x) = G(x, 1)$ , satisface  $[s \cdot a] \in \pi_k(X, A, x)$ . Se define  $\alpha([s], [a]) = [s \cdot a]$ . Usaremos la notación  $\alpha([s], [a]) = [s] \cdot [a]$ .

**Lema 2.1.1.** *La función  $\alpha : \pi_k(X, A, a_0) \times \pi_1(A, a_0) \longrightarrow \pi_k(X, A, a_0)$  está bien definida y determina una acción derecha, es decir,  $\forall [a], [b] \in \pi_1(A, a_0)$  y  $[\sigma] \in \pi_k(X, A, a_0)$  se tiene que*

$$\begin{aligned} [\sigma] \cdot ([a][b]) &= ([\sigma] \cdot [a]) \cdot [b], \\ [\sigma] \cdot [\text{constante } a_0] &= [\sigma]. \end{aligned}$$

**Demostración** Usaremos la notación de la definición anterior. Primero veamos que  $\alpha([s], [a])$  no depende de la extensión  $G$  usada para definirla. Si  $H'$  es otra extensión de  $f$  y  $h$ , entonces definimos

$$E : (I^{k-1} \times \partial I \times I) \cup (\partial I^{k-1} \times I \times I) \cup I^{k-1} \times I \times \{0\} \rightarrow A$$

$$E(x, u, t) = \begin{cases} H(x, t), & \text{si } u = 0; \\ H'(x, t), & \text{si } u = 1; \\ a(t), & \text{si } x \in \partial(I^{k-1}); \\ f(x, 0), & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

$E$  tiene una extensión  $T : I^{k-1} \times I \times I \rightarrow A$  y observemos que  $\forall x \in \partial(I^{k-1}), T(x, s, 1) = a_0$ . Ahora, si  $G'$  es una extensión de  $s$  y  $H'$ , definimos  $R : I^k \times I \times I \rightarrow X$  como una extensión de

$$R' : \partial(I^k \times I) \times I \cup I^k \times I \times \{0\} \rightarrow X$$

$$R'(y, u, t) = \begin{cases} s(y, 1), & \text{si } t = 0; \\ T(x, u, t), & \text{si } y = (x, 1) \text{ con } x \in I^{k-1}; \\ a(t), & \text{si } y \in J^{k-1}; \\ G(y, t), & \text{si } u = 0; \\ G'(y, t), & \text{si } u = 1. \end{cases}$$

Se tiene que  $S : I^k \times I \rightarrow X$  con  $S(y, u) = R(y, u, 1)$  es una homotopía de ternas

$$S : (I^k \times I, I^{k-1} \times \{1\} \times I, J^{k-1} \times I) \rightarrow (X, A, a_0)$$

con  $S(y, 0) = G(y, 1)$  y  $S(y, 1) = G'(y, 1)$ .

Fijemos una retracción  $r : I^{k-1} \times I \rightarrow I^{k-1} \times \{0\} \cup \partial I^{k-1} \times I$ . Ahora, si se tiene una homotopía de ternas

$$L : (I^k \times I, I^{k-1} \times \{1\} \times I, J^{k-1} \times I) \rightarrow (X, A, a_0)$$

de  $s$  a  $s'$ , consideremos para cada  $u \in I$  las siguientes familias de funciones:

$$Q_u : I^{k-1} \times \{0\} \cup \partial I^{k-1} \times I \rightarrow A,$$

$$F_u : \partial I^k \times I \rightarrow A,$$

dadas por  $\forall x \in I^{k-1}, Q_u(x, 0) = L((x, 1), u)$  y  $\forall z \in \partial I^{k-1}, Q_u(z, t) = a(t)$ ; por otro lado

$$F_u(x, v) = \begin{cases} Q_u \circ r(y, v), & \text{si } x = (y, 1) \text{ con } y \in I^{k-1}; \\ a(v), & \text{si } x \in J^{k-1}. \end{cases}$$

Notemos que  $F_0$  y  $F_1$  junto con  $s$  y  $s'$  respectivamente se extienden a funciones  $G^0, G^1 : I^k \times I \rightarrow X$ . Ahora, ponemos  $j' : I^k \times I \times \{0\} \cup \partial(I^k \times I) \times I \rightarrow X$  dada por

$$j'(x, u, v) = \begin{cases} F_u(x, v), & \text{si } v \geq 0 \text{ y } x \in \partial I^k; \\ G^0(x, v), & \text{si } u = 0; \\ G^1(x, v), & \text{si } u = 1; \\ L(x, u), & \text{si } v = 0. \end{cases}$$

$j'$  se extiende a  $j : I^k \times I \times I \rightarrow X$ . Tenemos que  $P : I^k \times I \rightarrow X$  dada por  $P(x, u) = j(x, u, 1)$  es una homotopía de ternas de  $s \cdot a$  a  $s' \cdot a$ .

Finalmente hay que ver que  $[s \cdot a]$  solamente depende de  $[a] \in \pi_1(A, a_0)$ . Sea  $K : I \times I \rightarrow A$  una homotopía de  $a$  a  $a'$  rel  $\partial I$ . Consideramos las siguientes funciones  $\forall v \in I$ :

$$S_v : I^{k-1} \times \{0\} \cup \partial I^{k-1} \times I \rightarrow A,$$

$$T_v : \partial I^k \times I \rightarrow A,$$

dadas por  $\forall x \in I^{k-1}, S_v(x, 0) = s(x, 1)$  y  $\forall z \in \partial I^{k-1}, S_v(z, u) = K(u, v)$ ; por otro lado

$$T_v(x, u) = \begin{cases} S_v \circ r(y, u), & \text{si } x = (y, 1) \text{ con } y \in I^{k-1}; \\ K(u, v), & \text{si } x \in J^{k-1}. \end{cases}$$

Notemos que  $T_0$  y  $T_1$  junto con  $s$  se extienden a funciones  $H^0, H^1 : I^k \times I \rightarrow X$ . Ahora, ponemos  $B' : I^k \times \{0\} \times I \cup (\partial I^k \times I \times I) \cup (I^k \times I \times \partial I) \rightarrow X$  dada por

$$B'(x, u, v) = \begin{cases} T_v(x, u), & \text{si } u \geq 0 \text{ y } x \in \partial I^k; \\ H^0(x, u), & \text{si } v = 0; \\ H^1(x, u), & \text{si } v = 1; \\ s(x, v), & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

$B'$  se extiende a  $B : I^k \times I \times I \rightarrow X$ . Tenemos que  $P' : I^k \times I \rightarrow X$  dada por  $P'(x, v) = B(x, 1, v)$  es una homotopía de ternas de  $s \cdot a$  a  $s \cdot a'$ .

Ahora, sean  $[a], [b] \in \pi_1(A, a_0)$  y recordemos que  $[s] \in \pi_k(X, A, a_0)$ . Como la inclusión  $\partial I^{k-1} \hookrightarrow I^{k-1}$  es una cofibración, si se definen las funciones  $f : I^{k-1} \times \{0\} \rightarrow A$  con  $f(x, 0) = s(x, 1)$  y  $h : \partial I^{k-1} \times I \rightarrow A$  con  $h(x, t) = (ab)(t)$ , entonces existe una función continua  $H : I^{k-1} \times I \rightarrow A$  que extiende a  $f$  y a  $h$ . Ahora, la inclusión  $\partial I^k \hookrightarrow I^k$  también es cofibración por lo que considerando  $s : I^k \times \{0\} \rightarrow X$  y  $F : \partial I^k \times I \rightarrow X$  dada por

$$F(x, t) = \begin{cases} (ab)(t), & \text{si } x \in J^{k-1}; \\ H(y, t), & \text{si } x = (y, 1) \text{ con } y \in I^{k-1}; \end{cases}$$

existe  $G : I^k \times I \rightarrow X$  que extiende a  $s$  y a  $F$ . Notemos que  $[G_{1/2}] = [s] \cdot [a]$  con  $G_{1/2}(x) = G(x, 1/2)$  pues restringida a  $I^{k-1} \times \{1\}$  está dada por una extensión de  $f$  y  $h|_{\partial I^{k-1} \times [0, 1/2]}$  y en todo  $I^k$  está dada por  $G| : I^k \times [0, 1/2] \rightarrow X$  que es extensión de  $G(x, 0) = s(x)$  y  $F|_{\partial I^k \times [0, 1/2]}$ . Análogamente,  $d : I^k \rightarrow X$  con  $d(x) = G(x, 1)$  representa  $([s] \cdot [a]) \cdot [b]$ , por lo tanto

$$[\sigma] \cdot ([a][b]) = ([\sigma] \cdot [a]) \cdot [b].$$

Finalmente aplicando los pasos anteriores para construir  $[\sigma] \cdot [\text{constante } a_0]$  se obtiene que  $G : I^k \times I \rightarrow X$  es de hecho una homotopía de ternas  $(I^k \times I, I^{k-1} \times \{1\} \times I, J^{k-1} \times I) \rightarrow (X, A, a_0)$ , por lo que

$$[\sigma] \cdot [\text{constante } a_0] = [\sigma].$$

■



**Nota** Con el argumento del lema anterior se puede definir una función

$$\alpha_{a_0}^{a_1} : \pi_k(X, A, a_0) \times \Pi_1(A)(a_0, a_1) \longrightarrow \pi_k(X, A, a_1).$$

Además, la prueba de 2.1.1 implica que si  $[s] \in \pi_k(X, A, a_0)$ ,  $[a] \in \Pi_1(A)(a_0, a_1)$  y  $[b] \in \Pi_1(A)(a_1, a_2)$ , entonces

$$\alpha_{a_0}^{a_2}([s], [a][b]) = \alpha_{a_1}^{a_2}(\alpha_{a_0}^{a_1}([s], [a]), [b]).$$

Denotaremos también  $\alpha_{a_0}^{a_1}([s], [a]) = [\sigma] \cdot [a]$ . Por lo dicho anteriormente  $\beta : \pi_k(X, A, a_0) \longrightarrow \pi_k(X, A, a_1)$ , dada por  $[\sigma] \mapsto [\sigma] \cdot [a]$ , es una biyección y por la propiedad 1 de la siguiente proposición, es un isomorfismo. Se tienen acciones

$$\alpha : \pi_k(X, a_0) \times \pi_1(A, a_0) \longrightarrow \pi_k(X, a_0),$$

$$\alpha : \pi_k(A, a_0) \times \pi_1(A, a_0) \longrightarrow \pi_k(A, a_0).$$

Estas acciones están dadas de la siguiente manera. Si  $[s] \in \pi_k(X, a_0)$  y  $[a] \in \pi_1(A, a_0)$ , la función  $F : I^k \times \{0\} \cup (\partial I^k \times I) \rightarrow X$

$$F(x, t) = \begin{cases} s(x), & \text{si } t = 0; \\ a(t), & \text{si } x \in \partial I^k; \end{cases}$$

tiene una extensión  $G : I^k \times I \rightarrow X$ . Se define  $[s] \cdot [a] = [G_1]$  con  $G_1(x) = G(x, 1)$ . Para  $\pi_k(A, a_0)$  el procedimiento es el mismo.

**Proposición 2.1.2.** *La acción  $\alpha : \pi_k(X, A, a_0) \times \pi_1(A, a_0) \longrightarrow \pi_k(X, A, a_0)$  tiene las siguientes propiedades.*

1.  $\forall [\sigma], [\tau] \in \pi_k(X, A, a_0)$ ,  $k > 1$  y  $[a] \in \pi_1(A, a_0)$ , se tiene que

$$([\sigma] + [\tau]) \cdot [a] = [\sigma] \cdot [a] + [\tau] \cdot [a].$$

2. La acción  $\alpha : \pi_1(A, a_0) \times \pi_1(A, a_0) \longrightarrow \pi_1(A, a_0)$  satisface  $[b] \cdot [a] = [a]^{-1}[b][a]$ .

3.  $\forall [\sigma], [\tau] \in \pi_2(X, A, a_0)$  y  $[a] \in \pi_1(A, a_0)$  se tiene que

$$\partial([\sigma] \cdot [a]) = [a]^{-1}\partial([\sigma])[a];$$

$$[\tau] \cdot \partial[\sigma] = [\sigma]^{-1} + [\tau] + [\sigma].$$

**Demostración** Veamos la propiedad 1. Sean  $[\sigma], [\tau] \in \pi_k(X, A, a_0)$ ,  $k > 1$  y  $[a] \in \pi_1(A, a_0)$ . Recordemos que  $\sigma \cdot a$  y  $\tau \cdot a$  están dadas como en la definición anterior, es decir mediante  $G_\sigma : I^k \times I \rightarrow X$  que extiende a  $\sigma$  y a  $F_\sigma :: \partial I^k \times I \rightarrow X$  y  $G_\tau : I^k \times I \rightarrow X$  que extiende a  $\tau$  y a  $F_\tau : \partial I^k \times I \rightarrow X$ . Donde  $F_\sigma$  está dada por

$$F_\sigma(x, t) = \begin{cases} a(t), & \text{si } x \in J^{k-1}; \\ H_\sigma(y, t), & \text{si } x = (y, 1) \text{ con } y \in I^{k-1}; \end{cases}$$

$H : I^{k-1} \times I \rightarrow A$  extensión de  $f : I^{k-1} \times \{0\} \rightarrow A$  con  $f(x, 0) = \sigma(x, 1)$  y  $h : \partial I^{k-1} \times I \rightarrow A$  con  $h(x, t) = a(t)$ . Análogamente está definida  $F_\tau$ . Se tiene pues  $(\sigma \cdot a)(x) = G_\sigma(x, 1)$  y  $(\tau \cdot a)(x) = G_\tau(x, 1)$ . Se define  $K : I^k \times I \rightarrow X$  como sigue

$$K(s_1, s_2, \dots, s_k, t) = \begin{cases} G_\sigma(2s_1, s_2, \dots, s_k, t), & \text{si } s_1 \leq 1/2; \\ G_\tau(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_k, t), & \text{si } s_1 \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Es claro que  $K(x, 0) = (\sigma + \tau)(x)$ ,  $K|_{I^{k-1} \times \{1\} \times I}$  es una extensión de  $\sigma|_{I^{k-1} \times \{1\}} + \tau|_{I^{k-1} \times \{1\}}$  y  $K' : \partial I^{k-1} \times \{1\} \times I \rightarrow A$  con  $K'(y, t) = a(t)$ ; además  $K|_{J^{k-1} \times I} \rightarrow A$  se calcula como  $K(z, t) = a(t)$ . Por lo tanto,  $([\sigma] + [\tau]) \cdot [a]$  está representada por  $K|_{I^k \times \{1\}}$  y  $K|_{I^k \times \{1\}}$  por construcción también representa a  $[\sigma] \cdot [a] + [\tau] \cdot [a]$ .

Pasemos a la propiedad 2. Sean  $[b], [a] \in \pi_1(A, a_0)$ .  $[b] \cdot [a]$  se puede calcular de la siguiente manera. Tomamos  $F : I \times \{0\} \cup (\partial I \times I) \rightarrow A$  y  $r : I \times I \rightarrow I \times \{0\} \cup (\partial I \times I)$  una retracción dadas por

$$F(x, t) = \begin{cases} a(t), & \text{si } x \in \partial I; \\ b(x), & \text{si } t = 0; \end{cases}$$

$$r(x, y) = \begin{cases} (0, 2 - \frac{y-2}{2x-1}), & \text{si } 4x \leq y; \\ (1/2 - \frac{2x-1}{y-2}, 0), & \text{si } y \leq 4x \text{ y } y \leq -4x + 4; \\ (1, 2 + \frac{y-2}{2x-1}), & \text{si } -4x + 4 \leq y. \end{cases}$$

Luego  $F \circ r$  es una extensión de  $F$  por lo que cumple  $[F \circ r|_{I \times \{1\}}] = [b] \cdot [a]$ . Pero  $[F \circ r|_{I \times \{1\}}] = [a]^{-1}[b][a]$  ya que  $P : I^2 \rightarrow A$

$$P(u, v) = \begin{cases} F(0, v(\frac{4u-1}{2u-1}) + (1-v)(-4u+1)), & \text{si } u \leq 1/4; \\ F(2u - 1/2, 0), & \text{si } 1/4 \leq u \leq 3/4; \\ F(1, v(\frac{4u-3}{2u-1}) + (1-v)(4u-3)), & \text{si } 3/4 \leq u; \end{cases}$$

es una homotopía rel  $\partial I$  que cumple  $P(u, 1) = F \circ r(u, 1)$  y  $P(u, 0)$  es claramente homotópica a  $(a^{-1}b)a$ .

Finalmente, sean  $[\sigma], [\tau] \in \pi_2(X, A, a_0)$  y  $[a] \in \pi_1(A, a_0)$ . Es claro que

$$\partial([\sigma] \cdot [a]) = \partial([\sigma]) \cdot [a],$$

y, por la propiedad 2, se tiene  $\partial([\sigma]) \cdot [a] = [a]^{-1}\partial([\sigma])[a]$ .

Por otro lado, denotamos  $s' = \sigma + C$ ,  $t' = C + \tau$  con  $C : I^2 \rightarrow X$  la constante  $a_0$ . Ahora consideremos la identificación  $q : I^2 \rightarrow D^2 \subset \mathbb{C}$  dada por

$$q(u, v) = ve^{-2\pi iu} + 1 - v$$

(es identificación porque es una función continua y suprayectiva de un compacto en un espacio de Hausdorff) que cumple  $q^{-1}(1) = J^1$  y fuera de  $J^1$  es inyectiva. Luego  $s'$ ,  $t'$  y  $\sigma + \tau$  inducen respectivamente funciones continuas  $s, t, h : D^2 \rightarrow X$ . Ahora consideremos las homotopías  $S : D^2 \times I \rightarrow X$ ,  $T : D^2 \times I \rightarrow X$  y  $H : D^2 \times I \rightarrow X$  dadas por

$$\begin{aligned} S(z, r) &= s(e^{-\pi ir} z), \\ T(z, r) &= t(e^{-\pi ir} z), \\ H(z, r) &= h(e^{-\pi ir} z). \end{aligned}$$

Notemos que, poniendo  $T' = T \circ q \times 1_I$  y  $T'_1 : I^2 \rightarrow X$  con  $T'_1(x) = T'(x, 1)$ , se tiene que  $[T'_1] = [\tau]$ . Por otro lado  $S(1, r) = s'(r)$  y  $S(e^{2\pi iu}, 0) = s'(u)$ , por lo que  $S'_1 : I^2 \rightarrow X$  con  $S'_1(x) = S(q(x), 1)$  satisface

$$[S'_1] = [\sigma] \cdot \partial[\sigma]$$

ya que la acción no depende de la extensión de  $s'|_{I \times \{1\} \times \{0\}}$  y  $p : \partial I \times \{1\} \times I \rightarrow A$ ,  $p(x, 1, r) = s'(r)$  a  $I \times \{1\} \times I$  que se tome. Análogamente  $H'_1 : I^2 \rightarrow X$  con  $H'_1(x) = H(q(x), 1)$  representa

$$([\sigma] + [\tau]) \cdot \partial[\sigma],$$

y como  $H'_1|_{I^2_-} = T'_1|_{I^2_-}$ ,  $H'_1|_{I^2_+} = S'_1|_{I^2_+}$  con  $I^2_- = \{(u, v) \in I^2 : u \leq 1/2\}$ ,  $I^2_+ = \{(u, v) \in I^2 : u \geq 1/2\}$ ,  $H'_1$  también representa

$$[\tau] + [\sigma] \cdot \partial[\sigma].$$

Luego  $([\sigma] + [\tau]) \cdot \partial[\sigma] = [\tau] + [\sigma] \cdot \partial[\sigma]$ , de donde se deduce por la propiedad 1 que

$$[\tau] \cdot \partial[\sigma] = ([\sigma] \cdot \partial[\sigma])^{-1} + [\tau] + [\sigma] \cdot \partial[\sigma].$$

Pero la homotopía  $\Sigma : I^2 \times I \rightarrow X$  dada por  $\Sigma(x, t) = s(e^{\pi ir} q(x))$  empieza en  $s'$  y acaba en  $S'_1$  y es de ternas  $(I^2 \times I, I \times \{1\} \times I, J^1 \times I) \rightarrow (X, A, a_0)$  por lo que

$$[\sigma] = [S'_1] = [\sigma] \cdot \partial[\sigma]$$

y por lo tanto se tiene el resultado. ■

La propiedad 3 de la proposición anterior motiva la siguiente definición.

**Definición** Un *módulo cruzado*  $(M, \mu, G)$  consta de un morfismo de grupos  $\mu : M \rightarrow G$  y una acción derecha<sup>2</sup>  $M \times G \xrightarrow{\gamma} M$  que denotamos por  $\gamma(m, g) = m^g$  tales que valen las identidades  $\forall m, n \in M, g \in G$ :

$$n^{\mu(m)} = m^{-1}nm, \quad (2.1)$$

$$\mu(m^g) = g^{-1}\mu(m)g, \quad (2.2)$$

$$(mn)^g = m^g n^g. \quad (2.3)$$

Se prefiere denotar la acción de un grupo en otro con exponentes para no confundirla con la multiplicación en el grupo. Cuando en un grupo  $M$  se tiene una acción derecha de  $G$ , diremos que  $M$  es un  $G$ -grupo. Otra manera de definir un  $G$ -grupo es como un grupo en la categoría de  $G$ -conjuntos.  $G$  es un  $G$ -grupo con la acción  $b^c = c^{-1}bc$ . Un morfismo  $(h, f)$  entre dos módulos cruzados  $(M, \mu, G)$  y  $(N, \nu, Q)$  consta de una pareja de homomorfismos de grupos  $h, f$  tales que  $h(m^g) = h(m)^{f(g)}$  y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ \mu \downarrow & & \downarrow \nu \\ G & \xrightarrow{f} & Q. \end{array}$$

La categoría de módulos cruzados la denotamos como  $\mathbf{ModX}/\mathbf{Gru}$  y a la subcategoría con un mismo grupo base  $G$  la denotamos  $\mathbf{ModX}/\mathbf{G}$ . A los morfismos en esta última categoría los llamaremos *morfismos de  $G$ -grupos*.

**Ejemplo** Dado un subgrupo normal  $N \triangleleft G$ , la inclusión  $N \hookrightarrow G$  nos da un módulo cruzado con la acción dada por conjugación.

**Ejemplo**  $\iota : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ , donde  $\iota(g) = c_g$  (conjugación por  $g$ ) es otro ejemplo importante.

**Ejemplo** Notemos que en un módulo cruzado  $(M, \mu, G)$ ,  $\text{nuc } \mu$  es abeliano, entonces si tomamos  $A$  un  $G$ -módulo derecho (es decir, un grupo abeliano que es un  $G$ -grupo) con el homomorfismo constante  $A \rightarrow G$  obtenemos un módulo cruzado. Si  $G$  es un grupo de matrices, es decir, un subgrupo de  $GL_R(n)$  el grupo de matrices invertibles de  $n \times n$  con coeficientes en  $R$  un anillo conmutativo con 1, obtenemos una amplia familia de módulos cruzados de la forma  $C_1 : R^n \rightarrow G$ , con  $C_1$  dada por  $\forall x \in R^n, x \mapsto 1$  y con acción  $(x, A) \mapsto xA$ ,  $x$  pensado como vector renglón. De hecho, si  $(M, \mu, G)$  es un módulo cruzado, entonces  $(\text{nuc } \mu, \text{constante } 1, \text{conuc } \mu)$  es un módulo cruzado ( $\text{Im}(\mu)$  es un subgrupo normal de  $G$ ).

Se tiene que un objeto categoría en  $\mathbf{Gru}$  se puede ver como un módulo cruzado (XII, §8, [10]). Viceversa, un módulo cruzado se puede codificar como un objeto categoría en  $\mathbf{Gru}$ .

<sup>2</sup>Se puede pedir que la acción sea izquierda y la teoría obtenida es análoga.

**Proposición 2.1.3.** Si  $\mu : M \rightarrow G$  es un módulo cruzado, entonces  $\chi(\mu) = (G, G \times M, i, s, t, \circ)$  es un objeto grupoide en **Gru**, donde  $i$  es la inclusión de  $G$  en  $G \times M$ ,  $s : G \times M \rightarrow G$  es el morfismo cociente y  $t : G \times M \rightarrow G$  está dada por  $t(p, m) = p\mu(m)$ .

**Demostración** El producto en  $G \times M$  es el usual en un producto semidirecto

$$(x, a)(y, b) := (xy, a^y b).$$

Observemos que

$$t((x, a)(y, b)) = xy\mu(a^y b) = xy y^{-1} \mu(a) y \mu(b) = t(x, a)t(y, b)$$

y  $si = ti = 1_G$ . Se define  $\circ : (G \times M) \times_G (G \times M) \rightarrow G \times M$  (el producto fibrado de  $s, t$ ) de la siguiente manera:

$$(x, a) \circ (y, b) = (x, a)(y^{-1}, 1)(y, b).$$

Como  $b^{x'\mu(a')} = b^{y'}$  por la componibilidad de las flechas,

$$((x, a)(x', a')) \circ ((y, b)(y', b')) = (xx', a^{x'} a' b^{y'} b') = (xx', (ab)^{x'} a' b'),$$

es decir,  $\circ$  es homomorfismo. Como  $\circ$  está definida en términos de la multiplicación del grupo, es asociativa y es claro que los  $i(p)$  son identidades para  $\circ$ . Como

$$(x, a) \circ (x\mu(a), a^{-1}) = (x, 1), (x\mu(a), a^{-1}) \circ (x, a) = (x\mu(a), 1),$$

entonces  $\chi(\mu)$  es un grupoide.  $\blacksquare$

Observemos que  $G$  es un grupoide con un objeto y los elementos de  $G \times M$  son morfismos entre las flechas de  $G$  con dos composiciones:  $\circ$  y el producto usual, que satisfacen la ley de intercambio. Esta estructura se conoce como 2-grupo estricto. También se puede pensar en esta estructura como una categoría monoidal estricta con inversos estrictos. Ahora, se puede generalizar la idea de módulo cruzado, usando grupoides en vez de grupos; escribiendo las composiciones por la derecha, se tiene la siguiente noción.

**Definición** Un *módulo cruzado sobre un grupoide* consta de los siguientes elementos.

1. Un grupoide  $\mathcal{G} = (G_0, G_1, d_0, d_1, i, \circ)$ ,
2. Un morfismo de grupoides que es la identidad en objetos

$$\mu : \mathcal{M} = (G_0, M, \delta_0, \delta_1, j, \cdot) \rightarrow \mathcal{G},$$

donde  $\mathcal{M}$  es totalmente inconexo y tiene el mismo conjunto de objetos que  $\mathcal{G}$ ;

3. Una acción derecha de  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{M}$  que respete composición.

Esto último significa que existe una función del producto fibrado de  $1_{G_0}$  y  $d_0$ :

$$G_0 \times_{G_0} G_1 \rightarrow G_0$$

tal que  $(g, f) \mapsto d_1(f)$ ; y una función

$$M \times_{G_0} G_1 \rightarrow M$$

cuyo dominio es el vértice del producto fibrado de  $\delta_1$  y  $d_0$ , que denotamos  $(x, y) \mapsto x^y$  y satisface  $x^1 = x, y \forall p, q \in G_0$ , si  $x \in \mathcal{M}(p), a \in \mathcal{G}(p, q)$ , entonces  $x^a \in \mathcal{M}(q)$ . En otras palabras, la acción está determinada por una familia de funciones definidas para todos  $p, q \in G_0$ :

$$\mathcal{M}(p) \times \mathcal{G}(p, q) \rightarrow \mathcal{M}(q).$$

Esta acción satisface las identidades  $\forall x, y \in \mathcal{M}(p)$ :

$$\begin{aligned} (xy)^a &= x^a y^a, \\ x^{\mu(y)} &= y^{-1}xy, \\ \mu(x^a) &= a^{-1}\mu(x)a. \end{aligned}$$

Como en el caso de módulos cruzados sobre grupoides, denotamos a la estructura descrita anteriormente por  $(\mathcal{M}, \mu, \mathcal{G})$ . Los morfismos de módulos cruzados sobre grupoides son parejas de funtores compatibles con su estructura. Es decir, un morfismo  $(h, f)$  entre dos módulos cruzados  $(\mathcal{M}, \mu, \mathcal{G})$  y  $(\mathcal{N}, \nu, \mathcal{Q})$  consta de una pareja de morfismos de grupoides  $h, f$  tales que  $\forall m \in \mathcal{M}(p), \forall a \in \mathcal{G}(p, q)$  se tiene  $h(m^a) = h(m)^{f(a)}$  y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{h} & \mathcal{N} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Q}. \end{array}$$

De esta manera se tiene la categoría **ModX**.

**Ejemplo** Un haz vectorial diferenciable  $\xi = (E, p : E \rightarrow M, M)$  se puede ver como un grupoide totalmente inconexo cuyas flechas son los elementos de  $E$ , sus objetos son los puntos de  $M$  y sus funciones origen y destino son ambas  $p$ ; la composición es la suma de vectores en las fibras (como de hecho es un grupoide interno en la categoría de variedades diferenciables, se dice que es un grupoide de Lie). Si  $p$  admite una conexión afín plana, entonces  $\xi$  y  $\Pi_1(M)$  forman un módulo cruzado sobre un grupoide. Se toma  $\mu : \xi \rightarrow \Pi_1(M)$  como  $\forall v \in E, v \mapsto [c_{p(v)}]$ , es decir, se manda cada vector a la clase del camino

constante en su proyección. La acción de  $\Pi_1(M)$  en  $\xi$  está dada por el transporte paralelo.  $\forall (v, [\alpha]) \in E_x \times \Pi_1(x, y), (x, [\alpha]) \mapsto y, (v, [\alpha]) \mapsto P_\alpha(v)$  donde  $\alpha$  es diferenciable por pedazos y  $P_\alpha$  es el transporte paralelo sobre  $\alpha$ . Como la conexión es plana el transporte no depende del representante tomado de la clase de homotopía y como se están considerando funciones continuas entre variedades, cada clase de homotopía contiene un representante diferenciable. Si la conexión no es plana, se puede definir un módulo cruzado sobre el grupoide “débil” de caminos diferenciables (por pedazos) en  $M$ , se le llama débil porque la composición no es asociativa ni las identidades e inversos lo son estrictamente.

La estructura que motiva la definición anterior es topológica. Hemos visto que las parejas punteadas dan lugar a un módulo cruzado. Si se desea en cambio reemplazar al grupo fundamental de esa definición con un grupoide basado en un cierto conjunto de puntos, se tiene la siguiente situación.

**Definición** Sea  $(X, A, C)$  una terna en **Top** ( $C \subset A \subset X$ ). El *módulo cruzado fundamental de una terna de espacios*  $\Pi_2(X, A, C)$  consiste en lo siguiente. Tomamos  $\coprod_{x \in C} \pi_2(X, A, x)$  donde el coproducto es el de grupoides (es decir, se está tomando la unión ajena de esos grupos de homotopía relativos y se le considera un grupoide totalmente inconexo). Consideremos el morfismo de grupoides

$$\Delta : \coprod_{x \in C} \partial_x : \coprod_{x \in C} \pi_2(X, A, x) \rightarrow \coprod_{x \in C} \pi_1(A, x)$$

donde los morfismos  $\partial_x$  son los morfismos frontera definidos al inicio de la sección. Condicionamos la inclusión

$$i : \coprod_{x \in C} \pi_1(A, x) \hookrightarrow \Pi_1(A, C),$$

donde recordemos que  $\Pi_1(A, C)$  es el subgrupoide de  $\Pi_1(A)$  cuyos objetos son los elementos de  $C$  y sus flechas son todas las flechas entre ellos de  $\Pi_1(A)$ . Consideremos el morfismo de grupoides  $i\Delta$  como primer elemento de un módulo cruzado sobre un grupoide. Con la familia de funciones

$$\alpha_{c_0}^{c_1} : \pi_k(X, A, c_0) \times \Pi_1(A)(c_0, c_1) \longrightarrow \pi_k(X, A, c_1).$$

definidas para todos  $c_0, c_1 \in C$ , se tiene una acción de  $\Pi_1(A, C)$  en el grupoide totalmente inconexo formado por los grupos de homotopía relativos  $\coprod_{x \in C} \pi_2(X, A, x)$ ; lo cual completa la definición de  $\Pi_2(X, A, C)$ . Se tiene un funtor

$$\Pi_2 : \mathbf{Top}^3 \rightarrow \mathbf{ModX}.$$

Se pone en objetos  $(X, A, C) \mapsto \Pi_2(X, A, C)$ ; en flechas  $f : (X, A, C) \rightarrow (Y, B, D)$ , se tiene el morfismo de módulos cruzados  $(\coprod_{x \in C} \pi_2(f, x), \Pi_1(f))$ , donde  $\pi_2(f, x) : \pi_2(X, A, x) \rightarrow \pi_2(Y, B, f(x))$  es el morfismo inducido usual  $[s] \mapsto [fs]$ . Para ver que es un morfismo

de módulos cruzados sólo falta ver que es compatible con la acción. Recordemos que si  $[a] \in \Pi_1(A)(a_0, a_1)$  y  $[s] \in \pi_k(X, A, a_0)$ ,  $[s] \cdot [a]$  está dado por  $G|_{I^2 \times \{1\}}$  con  $G : I^k \times I \rightarrow X$  que extiende a  $s$  y a  $F$  con  $F : \partial I^k \times I \rightarrow X$  dada por

$$F(x, t) = \begin{cases} a(t), & \text{si } x \in J^{k-1}; \\ H(y, t), & \text{si } x = (y, 1) \text{ con } y \in I^{k-1}; \end{cases}$$

$H : I^{k-1} \times I \rightarrow A$  que extiende a  $f$  y a  $h$ , donde  $f : I^{k-1} \times \{0\} \rightarrow A$  con  $f(x, 0) = s(x, 1)$  y  $h : \partial I^{k-1} \times I \rightarrow A$  con  $h(x, t) = a(t)$ . Es claro que  $f \circ G$  satisface  $[f \circ G|_{I^2 \times \{1\}}] = [fs] \cdot [fa]$  porque se ha probado que la acción así definida no depende de la extensión usada ( $f \circ G$  en este caso).

## 2.2. El grupoide doble fundamental de una terna

**Definición** Sea  $(X, A, C)$  una terna de espacios topológicos ( $C \subset A \subset X$ ). Consideremos el siguiente conjunto de funciones continuas, donde  $\partial^2 I^2$  denota al conjunto de vértices de  $I^2$ :

$$R_2(X, A, C) = \{(I^2, \partial I^2, \partial^2 I^2) \rightarrow (X, A, C)\}.$$

Ahora introducimos en  $R_2$  la relación  $\sim$  de homotopía de parejas relativa a los vértices de  $I^2$ , es decir,  $a, b \in R_2$  están relacionadas mediante  $\sim$  si hay una función continua

$$H : (I^2 \times I, \partial I^2 \times I, \partial^2 I^2 \times I) \rightarrow (X, A, C)$$

tal que  $H(0, 0, t), H(1, 0, t), H(0, 1, t)$  y  $H(1, 1, t)$  son constantes. Llamaremos *homotopías delgadas* a las homotopías  $H$  de este tipo. A  $R_2 / \sim$ , el conjunto de clases de homotopía delgada lo llamamos  $\rho_2(X, A, C)$  e indicamos sus elementos como  $\langle a \rangle$ .

**Definición** El *grupoide doble fundamental*  $\rho(X, A, C)$  es el grupoide doble cuyo conjunto de 2-morfismos es  $\rho_2(X, A, C)$ , su conjunto de 1-morfismos es  $Mor(\Pi_1(A, C))$  y su conjunto de objetos es  $C$ . Las funciones frontera de  $\rho(X, A, C)$  son las cuatro distintas restricciones a la frontera de  $I^2$ :  $\partial_1^+$  consiste en restringir un representante de la clase de homotopía a  $I \times \{0\}$ ,  $\partial_1^-$  consiste en restringir a  $I \times \{1\}$  y  $\partial_2^+, \partial_2^-$  están dadas por las restricciones a  $\{1\} \times I$  y a  $\{0\} \times I$  respectivamente. Las composiciones son las siguientes. Sean  $a, b \in R_2$ . Si  $\partial_2^+ \langle a \rangle = \partial_2^- \langle b \rangle$ , ponemos  $a_1(t) = a(1, t)$  y  $b_0(t) = b(0, t)$ . Como hay una homotopía de  $a_1$  a  $b_0$ ,  $h : I^2 \rightarrow A$  rel  $\partial I$ , se define  $a +_2 b \in R_2$  mediante la siguiente fórmula

$$a +_2 b(s, t) = \begin{cases} a(3s, t), & \text{si } s \leq 1/3; \\ h(t, 3s - 1), & \text{si } 1/3 \leq s \leq 2/3; \\ b(3s - 2, t), & \text{si } s \in [2/3, 1]. \end{cases}$$



Se define

$$\langle a \rangle +_2 \langle b \rangle = \langle a +_2 b \rangle.$$

Mediante un argumento usual de retracción, se ve que esta composición está bien definida. Las identidades de esta composición son las funciones constantes en la dirección horizontal, es decir, si  $[\alpha] \in \Pi_1(A, C)$ , se pone  $id''_\alpha = \langle 1''_\alpha \rangle$  con

$$1''_\alpha(s, t) = \alpha(t).$$

Los inversos son como en  $\Pi_1(A, C)$ , si  $a \in R_2$  denotamos  $-_2\langle a \rangle$  al inverso de  $\langle a \rangle$  y está dado por

$$-_2a(s, t) = a(1 - s, t).$$

La misma prueba que para  $\Pi_1$  nos dice que  $+_2$  es asociativa y los elementos de arriba funcionan como identidades e inversos. Análogamente se define  $+_1$ . Si  $\partial_1^+\langle a \rangle = \partial_1^-\langle b \rangle$ , ponemos  $a_0(t) = a(t, 0)$  y  $b_1(t) = b(t, 1)$ . Como hay una homotopía de  $b_1$  a  $a_0$ ,  $h : I^2 \rightarrow A$  rel  $\partial I$ , se define  $a +_1 b \in R_2$  mediante la siguiente fórmula

$$a +_1 b(s, t) = \begin{cases} b(s, 3t), & \text{si } t \leq 1/3; \\ h(s, 3t - 1), & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3; \\ a(s, 3t - 2), & \text{si } t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Se define

$$\langle a \rangle +_1 \langle b \rangle = \langle a +_1 b \rangle.$$

Las identidades de esta composición son las funciones constantes en la dirección vertical, es decir, si  $[\alpha] \in \Pi_1(A, C)$ , se pone  $id'_\alpha = \langle 1'_\alpha \rangle$  con

$$1'_\alpha(s, t) = \alpha(s).$$

Los inversos son como en  $\Pi_1(A, C)$ , si  $a \in R_2$  denotamos  $-_1\langle a \rangle$  al inverso de  $\langle a \rangle$  y está dado por

$$-_1a(s, t) = a(s, 1 - t).$$

Es fácil ver que con esta estructura  $\rho(X, A, C)$  es un grupoide doble.  $\rho$  determina un functor  $\mathbf{Top}^3 \rightarrow \mathbf{GpdDS}$ . En objetos, se define  $(X, A, C) \mapsto \rho(X, A, C)$ , si  $f : (X, A, C) \rightarrow (Y, B, D)$  es un morfismo en  $\mathbf{Top}^3$ , definimos  $\rho(f)_2 : \rho_2(X, A, C) \rightarrow \rho_2(Y, B, D)$  como  $\rho(f)\langle s \rangle = \langle fs \rangle$ . En 1-morfismos  $[a] \in \Pi_1(A, C)(x, y)$  se pone  $[a] \mapsto [fa]$ . En objetos,  $\rho(f)_0 = f|_C$ .

**Nota** Una manera frecuente en que aparecen las identidades de  $+_1$  (y análogamente para  $+_2$ ) es la siguiente. Si  $h : I^2 \rightarrow A$  es una homotopía rel  $\partial I$ , entonces  $\langle h \rangle$  es una identidad vertical. En efecto, podemos definir una homotopía delgada  $H : I^3 \rightarrow A$  como sigue:

$$H(u, v, w) = h(u, (1 - w)v + w).$$

$H|_{I^2 \times \{1\}}$  representa claramente una identidad vertical.

**Lema 2.2.1.** *Las operaciones  $+_1$  y  $+_2$  en  $\rho(X, A, C)$  satisfacen la ley de intercambio, es decir,  $\forall a, b, c, d \in R_2$  adecuadamente componibles, se tiene*

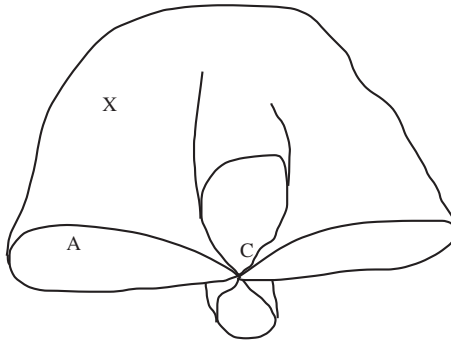
$$\langle (a +_2 b) +_1 (c +_2 d) \rangle = \langle (a +_1 c) +_2 (b +_2 d) \rangle.$$

**Demostración** Sean  $h_1, h_2, k_1$  y  $k_2 : I^2 \rightarrow A$  homotopías rel  $\partial I$  de  $c|_{I \times \{1\}}$  a  $a|_{I \times \{0\}}$ , de  $d|_{I \times \{1\}}$  a  $b|_{I \times \{0\}}$ , de  $a|_{\{1\} \times I}$  a  $b|_{\{0\} \times I}$  y de  $c|_{\{1\} \times I}$  a  $d|_{\{0\} \times I}$  respectivamente. La función  $F : I^2 \rightarrow X$

$$F(s, t) = \begin{cases} c(3s, 3t), & \text{si } t \leq 1/3 \text{ y } s \leq 1/3; \\ k_2(3t, 3s - 1), & \text{si } 1/3 \leq s \leq 2/3 \text{ y } t \leq 1/3; \\ d(3s - 2, 3t), & \text{si } s \in [2/3, 1] \text{ y } t \leq 1/3. \\ h_1(3s, 3t - 1), & \text{si } s \leq 1/3 \text{ y } 1/3 \leq t \leq 2/3; \\ a(3s, 3t - 2), & \text{si } s \leq 1/3 \text{ y } 2/3 \leq t \leq 1; \\ k_1(3t - 2, 3s - 1), & \text{si } 1/3 \leq s \leq 2/3 \text{ y } 2/3 \leq t \leq 1; \\ b(3s - 2, 3t - 2), & \text{si } 2/3 \leq s \leq 1 \text{ y } 2/3 \leq t \leq 1; \\ h_2(3s - 2, 3t - 1), & \text{si } 2/3 \leq s \leq 1 \text{ y } 1/3 \leq t \leq 2/3; \\ h_1(1, 0), & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

representa tanto  $\langle (a +_2 b) +_1 (c +_2 d) \rangle$  como  $\langle (a +_1 c) +_2 (b +_2 d) \rangle$ . ■

Cuando  $C$  es un punto se puede ilustrar la imagen de un elemento del doble grupoide como en la figura de abajo.



$\rho(X, A, C)$  posee algo de estructura adicional.

**Definición** Una estructura delgada en un grupoide doble

$$D = (D_2, D_1, D_0, \partial_i^\pm, \partial^\pm, +_i, \circ)_{i=1,2}$$

es un morfismo de grupoides dobles

$$\Theta : \square D_1 \longrightarrow D,$$

el cual es la identidad en  $(D_1, D_0)$ . Si tomamos la clase de grupoides dobles con estructura delgada junto con los funtores compatibles con ella, se tiene la categoría **GpdD**.

**Proposición 2.2.2.**  $\rho(X, A, C)$  tiene una estructura delgada.

**Demostración** Sean  $a, b, c, d : (I, \partial I) \rightarrow (A, C)$  funciones continuas que determinan un diagrama conmutativo en  $\Pi_1(A, C)$ , es decir,  $a(1) = b(0)$ ,  $c(1) = d(0)$  y  $ab \simeq cd$  rel  $\partial I$  a través de una homotopía  $h : I^2 \rightarrow A$ .  $h$  nos permite definir  $\Theta : \square \Pi_1(A, C) \rightarrow \rho(X, A, C)$  de la siguiente manera. Recordemos de §1.2 las siguientes funciones: la identificación  $p : I^2 \rightarrow D^2 \subset \mathbb{C}$

$$p(u, v) = (2u - 1, (2v - 1)\sqrt{1 - (2u - 1)^2}),$$

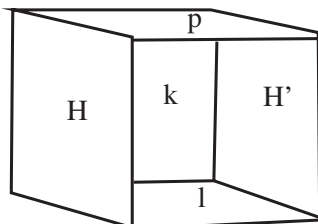
y el homeomorfismo  $f : D^2 \rightarrow D^1 \times D^1$  dado por

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{\|(u,v)\|}{|u|}(u, v), & \text{si } |u| \geq |v|; \\ \frac{\|(u,v)\|}{|v|}(u, v), & \text{si } |u| \leq |v|; \\ (0, 0), & \text{si } (u, v) = (0, 0). \end{cases}$$

Poniendo  $R : D^2 \rightarrow D^2$  la rotación  $z \mapsto e^{-i\pi/4}z$  y  $T : D^1 \times D^1 \rightarrow I^2$  como  $T(u, v) = (\frac{u+1}{2}, \frac{v+1}{2})$  se define  $F = T \circ f \circ R \circ p$ .  $F$  es identificación pues es composición de una identificación y homeomorfismos, luego  $h$  induce una función continua  $H : I^2 \rightarrow A$ . Definimos

$$\Theta \left[ \begin{array}{c} [a] \\ [c] \quad [b] \\ [d] \end{array} \right] = \langle H \rangle.$$

Ahora, mediante un argumento de retracción se ve que  $\Theta$  está bien definida. Si  $H' : I^2 \rightarrow A$  es inducida mediante  $F$  por una homotopía entre distintos representantes de las clases  $[a], [b], [c], [d]$  en  $\Pi_1(A, C)$ , entonces las restricciones de  $H$  y de  $H'$  a cada lado de  $I^2$  son homotópicas. Tomamos homotopías correspondientes a tres de esas restricciones:  $p, k, l$ . Esas homotopías nos dan junto con  $H$  y  $H'$  una función en el subespacio de  $I^3$  indicado en la figura de abajo. Esta función se puede extender a todo  $I^3$  (pues  $I^3$  se retrae a ese subespacio). Esa extensión es una homotopía delgada entre  $H$  y  $H'$ . ■



El teorema 2-dimensional de SvK se formuló basándose en una estructura algo más manejable topológicamente que la de módulos cruzados, la de grupoide doble con estructura delgada que veremos más adelante. Luego, para interpretar ese resultado en  $\mathbf{ModX}$  se requiere una traducción de  $\mathbf{ModX}$  a  $\mathbf{GpdD}$ , es decir, una equivalencia de categorías. El primer paso en esa dirección es la definición de un functor  $\gamma : \mathbf{GpdD} \rightarrow \mathbf{ModX}$ .

**Definición** Sea  $D = (D_2, D_1, D_0, \partial_i^\pm, \partial^\pm, +_i, \circ)$  un grupoide doble simétrico en aristas. Construimos un módulo cruzado sobre el grupoide  $D' = (D_0, D_1, \partial^\pm, \circ)$  como sigue. Se pone como grupoide totalmente inconexo a  $\gamma D = (D_0, \gamma D_2)$ , con

$$\gamma D_2(x) = \{u \in D_2 : \partial_2^+ u = \partial_2^- u = \partial_1^+ u = 1_x, x = \partial \partial_1^-(u)\}$$

y la composición, identidades e inversos están dados por la restricción de  $+_2$ . Si  $(u, a) \in \gamma D_2(x) \times D_1(x, y)$ , la acción  $\gamma D_2(x) \times D_1(x, y) \rightarrow \gamma D_2(y)$  se define como sigue

$$u^a = \begin{pmatrix} & a^{-1} & \\ 1_y & & 1_x \\ & a^{-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \partial_1^-(u) & \\ 1_x & & 1_x \\ & 1_x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & a & \\ 1_x & & 1_y \\ & a & \end{pmatrix}$$

Es rutinario verificar que esa acción junto con el morfismo  $\partial_1^-$  forman un módulo cruzado

$$\partial_1^- : \gamma D \rightarrow D'.$$

En morfismos de grupoides dobles  $\phi : D \rightarrow E$ , como  $\gamma D_2$  es un subgrupoide de  $(D_1, D_2, \partial_2^\pm, +_2)$ ,  $\gamma(\phi)$  es la restricción de  $\phi$  a  $\gamma D_2$  de  $\gamma D$  a  $\gamma E$  y es  $\phi_1$  de  $D'$  a  $E'$ .

**Proposición 2.2.3.** *Se tiene un isomorfismo natural  $\phi : \Pi_2 \rightarrow \gamma\rho$ .*

**Demostración** Tenemos la inclusión

$$i : J_2 = \{\mathbf{Top}^3((I^2, \partial I^2, J^1), (X, A, c))\}_{c \in C} \hookrightarrow R_2(X, A, C)$$

que induce un morfismo  $\phi_{(X, A, C)} : \Pi_2(X, A, C) \rightarrow \gamma\rho(X, A, C)$  que claramente es la identidad en 1-morfismos y en objetos y es natural. Ahora,  $\gamma\rho(X, A, C) = (M, \Pi_1(A, C))$  donde  $M$  consta de las clases de homotopía delgada  $\langle s \rangle$  tales que  $\partial_2^+ \langle s \rangle = \partial_2^- \langle s \rangle = \partial_1^+ \langle s \rangle = [\text{constante } c]$  para algún  $c \in C$ . Es decir, se trata de elementos en  $\rho_2$  con representantes con 3 lados que corresponden a lazos nulhomotópicos. Es decir, hay nulhomotopías  $h, k, l : I^2 \rightarrow A$  que empiezan en  $s|_{\{1\} \times I}, s|_{I \times \{0\}}$  y en  $s|_{\{0\} \times I}$  respectivamente. Definimos  $F : I^2 \times \{0\} \cup J^1 \times I \rightarrow X$  como

$$F(t, u, v) = \begin{cases} s(t, u), & \text{si } v = 0; \\ h(u, v), & \text{si } t = 1; \\ k(t, v), & \text{si } u = 0; \\ l(u, v), & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Existe una extensión  $F' : I^2 \times \{0\} \cup \partial I^2 \times I \rightarrow X$  de  $F$  y una extensión  $G : I^2 \times I \rightarrow X$  de  $F'$ .  $G|_{I^2 \times \{1\}} \in J_2$  y  $G$  es una homotopía delgada. Por lo tanto  $\phi_{(X,A,C)}$  es suprayectiva en 2-morfismos. Para verificar inyectividad, como  $\phi$  restringida a 2-morfismos no es más que una colección de morfismos de grupos, se puede verificar que los núcleos son triviales. Sea  $[s] \in \pi_2(X, A, c)$  con  $c \in C$  y  $\langle s \rangle = 0$ . Es decir, existe una homotopía delgada  $H : I^2 \times I \rightarrow X$  de  $s$  a la función constante  $c$ . Fijamos una retracción  $r : I^2 \rightarrow I \times \{0\} \cup \partial I \times I$  cuyas componentes denotamos como  $r_1$  y  $r_2$ , es decir,  $r(t, u) = (r_1(t, u), r_2(t, u))$ . Definimos  $K : I^3 \times \{0\} \cup \partial I^3 \times I \rightarrow X$  como

$$K(t, u, v, w) = \begin{cases} H(t, u, v), & \text{si } w = 0; \\ s(t, u), & \text{si } v = 0; \\ c, & \text{si } v = 1; \\ H(0, u, (1-w)v + w), & \text{si } t = 0; \\ H(1, u, (1-w)v + w), & \text{si } t = 1; \\ H(t, 0, (1-w)v + w), & \text{si } u = 0; \\ K(r_1(t, w), 1, v, r_2(t, w)), & \text{si } u = 1. \end{cases}$$

(No hay circularidad en la definición).  $K$  tiene una extensión  $L : I^4 \rightarrow X$ . La homotopía  $P(t, u, v) = L(t, u, v, 1)$  nos dice que  $[s] = 0$  en  $\pi_2(X, A, c)$ . Para terminar la prueba falta verificar que  $\phi_{(X,A,C)}$  es compatible con las acciones. Los pasos son análogos a los de la prueba de la propiedad 3 de la proposición 2.1.2. salvo que en vez de la identificación  $q(u, v) = ve^{-2\pi iu} + 1 - v$  se usa la identificación

$$p(u, v) = (-(2v-1)\sqrt{1-(2u-1)^2}, 2u-1).$$

■

### 2.3. La equivalencia entre GpdD y ModX

**Definición** Sea  $(M, \mu, P) \in \mathbf{ModX}$ , definimos un grupoide doble simétrico en aristas con estructura delgada  $\lambda M = (G_2, P)$  como

$$G_2 = \{(m, \begin{bmatrix} a & c \\ & d \end{bmatrix}) : m \in M, \begin{bmatrix} a & c \\ & d \end{bmatrix} \in \square P, \mu(m) = b^{-1}a^{-1}cd\},$$

donde recordemos que  $\begin{bmatrix} a & c \\ & d \end{bmatrix}$  denota a un diagrama (no necesariamente conmutativo) en  $P$  de la forma:

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{c} & x \\ a \downarrow & & \downarrow d \\ y & \xrightarrow{b} & z. \end{array}$$

Denotamos  $(m, \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix})$  por  $\begin{bmatrix} a & c \\ m & b & d \end{bmatrix}$ . Las fronteras  $\partial_i^\pm$  se definen como las fronteras de  $\square P$ . Las composiciones están dadas por las siguientes fórmulas:

$$\begin{bmatrix} g \\ f & u & e \\ c \end{bmatrix} +_1 \begin{bmatrix} c \\ a & m & d \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ fa & mu^d & ed \\ b \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} g \\ h & n & a \\ k \end{bmatrix} +_2 \begin{bmatrix} c \\ a & m & d \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gc \\ h & n^b m & d \\ kb \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Se puede ver, mediante cálculos sencillos, que éste es efectivamente un grupoide doble; pero además, que  $\lambda(M, \mu, P)$  tiene una estructura delgada  $\Theta : \square P \rightarrow G_2$

$$\begin{bmatrix} c \\ a & d \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} c \\ a & 1_x & d \\ b \end{bmatrix}.$$

Ahora, sea  $(f, g)$  un morfismo entre dos módulos cruzados  $(M, \mu, G)$  y  $(N, \nu, Q)$ .

$$\lambda(f, g) : \lambda(M, \mu, G) \rightarrow \lambda(N, \nu, Q)$$

está dado por

$$\begin{bmatrix} c \\ a & m & d \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} g(c) \\ g(a) & f(m) & g(d) \\ g(b) \end{bmatrix}.$$

De esa manera se tiene un funtor  $\lambda : \mathbf{ModX} \rightarrow \mathbf{GpdD}$ .

**Nota** Más adelante denotaremos los 2-morfismos de un grupoide doble como matrices con paréntesis redondos  $\left( \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right)$  para no confundirlas con elementos de un grupoide de diagramas  $\square C$ . Es importante señalar que en general los 2-morfismos de un grupoide doble no están determinadas por su frontera pero por simplicidad de notación usaremos esta convención.

**Teorema 2.3.1.**  $\gamma$  y  $\lambda$  son equivalencias de categorías, una inversa de la otra.

**Demostración** Primero notemos que  $\gamma\lambda(\partial : M \rightarrow P) = \partial_1^- : \left\{ \begin{bmatrix} \partial(m) \\ 1 & m & 1 \end{bmatrix} : m \in M \right\} \rightarrow P$  es isomorfo a  $\partial : M \rightarrow P$  mediante  $(\Psi_2, \Psi_1)$  con  $\Psi_2 \begin{bmatrix} \partial(m) \\ 1 & m & 1 \end{bmatrix} = m$  y  $\Psi_1 = 1_P$ . Sólo hay que ver que la acción es conservada por  $\Psi$ :

$$\Psi_2 \left[ \begin{bmatrix} c \\ 1 & m & 1 \end{bmatrix} \right]^p = \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} p^{-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ p^{-1} \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} c \\ 1 & m & 1 \end{bmatrix} \right] \left( \begin{bmatrix} p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) = \Psi_2 \left[ \begin{bmatrix} c \\ 1 & m^p & 1 \end{bmatrix} \right] = p,$$

donde se usó la fórmula 2.5. La naturalidad de  $\Psi$  es clara. Ahora, ponemos  $\Phi : G \rightarrow \lambda\gamma G$  con  $G = (G_2, G_1, G_0) \in \mathbf{GpdD}$  como la identidad en  $G_1, G_0$  y en  $G_2$  se define:

$$\Phi_2 \left( \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right) = \left( \left( \begin{array}{cc} 1 & b^{-1} \\ & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} 1 & a^{-1} \\ & a \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} d \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} 1 & b^{-1}a^{-1}cd \\ & 1 \end{array} \right), \left[ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right] \right)$$

que tiene sentido pues  $G$  tiene una estructura delgada (2-morfismos dados por cuadros conmutativos). Para verificar que  $\Phi$  es un isomorfismo de grupoides dobles primero veamos el comportamiento de la función  $\Phi'$  dada por

$$\left( \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{cc} 1 & b^{-1} \\ & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} 1 & a^{-1} \\ & a \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} d \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} 1 & b^{-1}a^{-1}cd \\ & 1 \end{array} \right).$$

Definimos una acción de  $G_1$  en  $G_2$  como en la sección anterior: si  $a \in G_1(x, y)$  y  $u \in \text{Im}(\Phi') \subset G_2$  se pone

$$u^a = \left( \begin{array}{ccc} & a^{-1} & \\ 1_y & & 1_x \\ & a^{-1} & \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc} & \partial_1^-(u) & \\ 1_x & & 1_x \\ & 1_x & \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} a & \\ 1_x & 1_y \\ a & \end{array} \right).$$

Luego tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \Phi' \left( \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right)^e +_2 \Phi' \left( \begin{array}{c} f \\ e \end{array} \begin{array}{c} g \\ \end{array} \right) &= \Phi' \left[ \left( \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right) +_2 \left( \begin{array}{c} f \\ e \end{array} \begin{array}{c} g \\ \end{array} \right) \right] \\ \Phi' \left( \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right) +_2 \Phi' \left( \begin{array}{c} f \\ c \end{array} \begin{array}{c} g \\ e \end{array} \right)^d &= \Phi' \left[ \left( \begin{array}{c} f \\ c \end{array} \begin{array}{c} g \\ e \end{array} \right) +_1 \left( \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right) \right]. \end{aligned}$$

Pero por las fórmulas 2.4 y 2.5 estas identidades implican que  $\Phi$  es morfismo de grupoides dobles. Es fácil ver que  $\Phi_2$  conserva la estructura delgada y es biyectivo, luego, como es un morfismo entre grupoides dobles, es isomorfismo. Veamos la naturalidad de  $\Phi_2$ . Si  $f : G \rightarrow G'$  es un morfismo en  $\mathbf{GpdD}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \lambda\gamma f \Phi_2 \left( \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right) &= \lambda\gamma f \left( \left( \begin{array}{cc} 1 & b^{-1}a^{-1}cd \\ & 1 \end{array} \right), \left[ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right] \right) = \\ \left( \left( \begin{array}{ccc} & f(b)^{-1}f(a)^{-1}f(c)f(d) & \\ 1 & & 1 \end{array} \right), \left[ \begin{array}{cc} f(a) & f(c) \\ f(b) & f(d) \end{array} \right] \right) &= \Phi_2 \left( \begin{array}{cc} f(a) & f(c) \\ f(b) & f(d) \end{array} \right). \end{aligned}$$

■

Lo relevante de esta proposición, para este trabajo, es que  $\gamma$  conserva colímites y por 2.2.3, manda grupoides dobles fundamentales en módulos cruzados fundamentales. Que una equivalencia de categorías conserve (co)límites se puede probar viendo que las equivalencias de categorías son importantes casos particulares de una noción más general.

**Definición** Una *adjunción* es una terna  $(F, G, \phi)$  donde  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  y  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  son funtores, y  $\phi$  consta de una familia de biyecciones

$$\phi_{x,a} : \mathbf{D}(Fx, a) \rightarrow \mathbf{C}(x, Ga)$$

que son naturales en ambas variables. Es decir, para toda flecha  $f : x' \rightarrow x$  en  $\mathbf{C}$  y toda flecha  $g : a \rightarrow a'$  en  $\mathbf{D}$ , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}(Fx, a) & \xrightarrow{\phi_{x,a}} & \mathbf{C}(x, Ga) \\ Ff^* \circ g_* \downarrow & & \downarrow f^* \circ Gg_* \\ \mathbf{D}(Fx', a') & \xrightarrow{\phi_{x',a'}} & \mathbf{C}(x', Ga') \end{array}$$

Esta condición significa que  $\forall h \in \mathbf{D}(Fx, a)$  se tiene que

$$\phi_{x',a'}(Ff \circ h \circ g) = f \circ \phi_{x,a}(h) \circ Ga.$$

En esta situación se dice que  $F$  es adjunto izquierdo de  $G$  y  $G$  es adjunto derecho de  $F$ .

**Proposición 2.3.2.** *Si  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  tiene un adjunto derecho, entonces  $F$  conserva colímites; si  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  tiene un adjunto izquierdo, entonces  $G$  conserva límites. Si  $F$  y  $G$  son equivalencias de categorías, con  $F$  inverso de  $G$ , entonces  $F$  es adjunto derecho de  $G$  y viceversa.*

**Demostración** Sea  $(F, G, \phi)$  una adjunción. Dado  $L : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$  un funtor, denotamos por brevedad  $Li = i'$ ,  $Lf = f'$  para todo objeto  $i$  de  $\mathbf{I}$  y toda flecha  $f$  en  $Mor(\mathbf{I})$ . Sean  $\{l_i : i' \rightarrow T\}_{i \in \mathbf{I}}$  un colímite de  $L$  y  $D$  un objeto de  $\mathbf{D}$  tal que para cada  $i$  en  $\mathbf{I}$  existe un morfismo  $d_i$  tal que el siguiente diagrama conmuta  $\forall f \in Mor(\mathbf{I})$ :

$$\begin{array}{ccc} Fi' & \xrightarrow{Fl_i} & FT \\ \downarrow Ff' & \searrow d_i & \uparrow \tau \\ Fj' & \xrightarrow{Fl_j} & D \end{array}$$

Queremos construir un morfismo  $\tau$  que haga conmutar los triángulos correspondientes.



Usando la naturalidad de la adjunción tenemos el diagrama conmutativo en  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 i' & \xrightarrow{l_i} & T \\
 \downarrow f' & \searrow \phi(d_i) & \downarrow \tau' \\
 j' & \xrightarrow{\phi(d_j)} & GD
 \end{array}$$

donde  $\tau'$  es el único morfismo que hace conmutar todos los triángulos (existe porque  $\{l_i \rightarrow T\}_{i \in \mathbf{I}}$  es un colímite). Definimos  $\tau$  como  $\phi^{-1}(\tau')$  y por la naturalidad de  $\phi$  hace conmutar los triángulos del diagrama de arriba y es la única flecha que lo hace. La prueba para límites es dual. Ahora, sean  $F$  y  $G$  equivalencias de categorías, una inversa de la otra. Entonces hay isomorfismos naturales  $\eta : 1_{\mathbf{C}} \rightarrow GF$  y  $\epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ . Definimos  $\forall h \in \mathbf{D}(Fx, a)$ ,

$$\phi(h) = \eta_x \circ G(h \circ \epsilon_a^{-1}) \circ \eta_{Ga}^{-1} \in \mathbf{C}(x, Ga).$$

Como está definida en términos de transformaciones naturales,  $\phi$  es natural. Para concluir se aplica el argumento anterior a los isomorfismos naturales inversos  $\eta^{-1}$  y  $\epsilon^{-1}$ . ■

## 2.4. Algo de álgebra en ModX/Gru

**Definición** Un morfismo de grupos  $\mu : M \rightarrow P$  es un *módulo precruzado* si  $M$  es un  $P$ -grupo<sup>3</sup> y  $\mu(m^p) = p^{-1}\mu(m)p$ . Un morfismo entre dos módulos precruzados  $(M, \mu, P), (N, \nu, Q)$  consta de una pareja de homomorfismos de grupos  $(g, f)$  tales que  $g(m^p) = g(m)^{f(p)}$  y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{g} & N \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \nu \\
 P & \xrightarrow{f} & Q.
 \end{array}$$

La categoría de módulos precruzados la denotamos como  $\mathbf{ModX}/\mathbf{Gru}^{pre}$ . A menudo conviene considerar la categoría con un mismo grupo base  $P$  que denotamos  $\mathbf{ModX}/\mathbf{P}^{pre}$ . Como  $\mu(m^{\mu(n)}) = \mu(n^{-1})\mu(m)\mu(n)$ , se tiene que  $n^{-1}m^{-1}nm^{\mu(n)} \in \text{nuc}(\mu)$ . Llamaremos a  $n^{-1}m^{-1}nm^{\mu(n)} = [n, m]$  un conmutador de Peiffer<sup>4</sup>. Al subgrupo que generan los conmutadores de Peiffer lo denotamos  $[M, M]$ .

<sup>3</sup>En el sentido de §2.1, no en términos del orden de sus elementos.

<sup>4</sup>Observemos que cuando la acción es trivial, se tienen los conmutadores usuales, luego cuando la acción es trivial, realizar el cociente  $M/[M, M]$  consiste en abelianizar.

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $\mu : M \rightarrow P$  un módulo precruzado.  $[M, M]$  es normal y  $P$ -invariante (es decir,  $\forall p \in P$ , se tiene que  $[M, M]^p \subset [M, M]$ ).*

**Demostración** Se tiene mediante un cálculo que

$$[a, b]^p = [a^p, b^p], \quad (2.6)$$

$$x^{-1}[a, b]x = [ax, b][x, b^{\mu(a)}]^{-1}. \quad (2.7)$$

■

**Proposición 2.4.2.** *Sea  $\mu : M \rightarrow P$  un módulo precruzado. Si  $S \subset M$  es un conjunto generador  $P$ -invariante, entonces la cerradura normal de  $[S, S] = \{[s, t] : s, t \in S\}$  genera  $[M, M]$ .*

**Demostración** Como  $[s^p, t^p] = [s, t]^p$ ,  $[S, S]$  es  $P$ -invariante y por ello también lo es  $N$ , la cerradura normal de  $[S, S]$ . Entonces  $M/N$  es un  $P$ -grupo, y se induce un homomorfismo de grupos  $\mu' : M/N \rightarrow P$ , pues  $N \subset [M, M] \subset \text{nuc}(\mu)$  que resulta un módulo precruzado. Mostrar que  $\mu'$  es un módulo cruzado nos daría la contención faltante  $[M, M] \subset N$ . Denotando con  $S'$  al conjunto de clases laterales correspondiente a  $S$ , si  $x, y \in S'$  entonces  $y^{\mu'(x)} = x^{-1}yx$ . Ahora, se observa que el conjunto de los  $z \in M/N$  que satisfacen la relación anterior, en el lugar de  $y$ , es un grupo y análogamente para la posición de  $x$  (esto equivale a verificar en  $M$  las relaciones  $[a, bc] = a^{-1}c^{-1}a[a, b]a^{-1}ca[a, c]$  y 2.7 de la prueba anterior), como  $S'$  genera  $M/N$  se tiene el resultado. ■

**Proposición 2.4.3.** *Con las hipótesis de la proposición anterior, el morfismo inducido  $\bar{\mu} : M/[M, M] = M^{cr} \rightarrow P$  es un módulo cruzado con la acción inducida en el cociente; y si  $\alpha : M \rightarrow N$  es un morfismo de  $P$ -módulos precruzados con  $\nu$  un  $P$ -módulo cruzado, entonces existe un único  $\bar{\alpha} : M^{cr} \rightarrow N$ , morfismo en  $\mathbf{ModX/P}$ , tal que  $\bar{\alpha}q = \alpha$  donde  $q$  es la proyección  $M \twoheadrightarrow M^{cr}$ .*

**Demostración**  $[M, M]$  es normal y  $P$ -invariante, lo que vuelve a  $M^{cr}$  un  $P$ -grupo.  $\bar{\mu}$  es un módulo cruzado porque, en primer lugar,  $\mu$  es un módulo precruzado, luego se tiene la propiedad 2.2. Por otro lado, la propiedad 2.1 surge de dividir por  $[M, M]$ . Si  $\alpha$  es como en el enunciado, entonces se pone  $\bar{\alpha}(\bar{m}) = \alpha(m)$  que está bien definida pues  $[M, M] \subset \text{nuc}(\alpha)$  y es claramente única. ■

Las siguientes dos proposiciones no se usan después, pero ilustran la utilidad de considerar los módulos precruzados.

**Proposición 2.4.4.** *La asignación  $(-)^{cr}$  es un funtor adjunto izquierdo de la inclusión  $\mathbf{ModX/P} \hookrightarrow \mathbf{ModX/P}^{pre}$ .* ■

**Proposición 2.4.5.** *Sean  $\{\mu_i : M_i \rightarrow P\}_{i \in I}$  módulos precruzados,*

1. El coproducto de  $\mu_i$  está dado por:  $\coprod_{i \in I} \mu_i = *_{i \in I} \mu_i$  con  $*_{i \in I} \mu_i$  el morfismo inducido en el producto libre de los  $M_i$  por  $\mu_i$ .
2. Si los  $\mu_i$  son módulos cruzados, en  $\mathbf{ModX/P}$  su coproducto está dado por  $(*_{i \in I} M_i)^{cr}$ .

■

**Definición** Sea  $C$  un conjunto y  $P$  un grupo.  $L_P(C)$  es un  $P$ -grupo libre en una función  $i : C \rightarrow L_P(C)$  si para todo  $P$ -grupo  $M$  y toda función  $j : C \rightarrow M$ , existe un único morfismo de  $P$ -grupos  $f : L_P(C) \rightarrow M$  tal que  $fi = j$ . Es claro que  $L_P(C)$  es único salvo isomorfismo.

$L_P(C)$  se puede construir como el grupo libre en el conjunto  $C \times P$ , la función  $i : C \rightarrow L_P(C)$  se evalúa como  $i(r) = (r, 1)$  y la acción de  $P$  en  $L_P(C)$  está dada por  $(r, p)^q = (r, pq)$ .

Notemos que, dada una función  $\omega : C \rightarrow P$ , existe un único morfismo de  $P$ -grupos  $\theta : L_P(C) \rightarrow P$  tal que  $\theta i = \omega$ , en efecto se puede definir  $\theta(r, p) = p^{-1}\omega(r)p$ .  $(L_P(C)^{cr}, \theta, P)$  es entonces un módulo cruzado con la propiedad universal de que es inicial para toda factorización de  $\omega$  a través de un  $P$ -grupo. Es decir, si hay una función  $f$  y un objeto  $(N, \nu, P)$  en  $\mathbf{ModX/P}$  tales que  $\omega = \nu f$ , entonces existe un único homomorfismo de módulos cruzados  $\alpha$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & L_P(C)^{cr} & \\
 i \nearrow & \vdots & \searrow \theta \\
 C & \xrightarrow{\alpha} & P \\
 f \searrow & \downarrow & \nearrow \nu \\
 & N &
 \end{array}$$

En efecto, basta definir  $\alpha(r, p) = f(r)p$ . A  $\theta$  se le llama un *módulo cruzado libre en  $\omega$* . A veces, si está claro qué función  $\omega$  se utiliza, lo llamaremos un  $P$ -módulo cruzado libre en  $C$  o un módulo cruzado libre en  $C$  sobre  $P$ .

**Definición** Un morfismo de grupos  $f : P \rightarrow Q$  induce un funtor  $f^* : \mathbf{ModX/Q} \rightarrow \mathbf{ModX/P}$  de la siguiente manera. Sea  $(N, \nu, Q)$  un módulo cruzado. Se define  $f^*(N, \nu, Q)$  como el módulo cruzado  $(f^*N, \bar{\nu}, Q)$  dado por el producto fibrado de  $f$  y  $\nu$ :

$$\begin{array}{ccc}
 f^*N & \xrightarrow{\bar{f}} & N \\
 \bar{\nu} \downarrow & & \downarrow \nu \\
 P & \xrightarrow{f} & Q,
 \end{array}$$

donde la acción de  $P$  en  $f^*N$  está dada por  $(n, g)^h = (n^{fh}, h^{-1}gh)$ . Si  $(k, 1_Q) : (N, \nu, Q) \rightarrow (L, \lambda, Q)$  es un morfismo en  $\mathbf{ModX/Q}$ , se usa la propiedad universal del producto fibrado:

$f^*k$  es el único morfismo que hace conmutar el diagrama de abajo donde los cuadrados interno y externo son cartesianos:

$$\begin{array}{ccc}
 f^*L & \xrightarrow{\quad} & L \\
 \downarrow f & \swarrow \exists! f^*k & \nearrow k \\
 f^*N & \xrightarrow{\quad} & N \\
 \downarrow & & \downarrow \nu \\
 P & \xrightarrow{f} & Q
 \end{array}$$

La funtorialidad se tiene por la unicidad de las flechas a un cuadrado cartesiano.

En realidad lo que nos interesa es la construcción “dual” a la anterior: mientras que la anterior es un *pullback*, se requiere una suerte de *pushforward* para obtener las aplicaciones que queremos. En concreto, se desea que  $f$  induzca un funtor  $f_* : \mathbf{ModX}/\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{ModX}/\mathbf{Q}$  que resulte adjunto izquierdo al anterior<sup>5</sup>.

**Definición** Sea  $f : P \rightarrow Q$  un homomorfismo de grupos. Un módulo cruzado  $(f_*M, \bar{\mu}, Q)$  se llama el *pushforward* de  $(M, \mu, P)$  según  $f$  si hay un morfismo de módulos cruzados  $(\bar{f}, f) : (M, \mu, P) \rightarrow (f_*M, \bar{\mu}, Q)$  tal que todo morfismo de módulos cruzados  $(h, f) : (M, \mu, P) \rightarrow (N, \nu, Q)$  se factoriza de forma única a través de  $(f_*M, \bar{\mu}, Q)$ , es decir, existe un único morfismo  $(\bar{h}, 1_Q) : (f_*M, \bar{\mu}, Q) \rightarrow (N, \nu, Q)$  en  $\mathbf{ModX}/\mathbf{Q}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & & N \\
 & \nearrow h & \nearrow \bar{h} \\
 M & \xrightarrow{\bar{f}} & f_*M \\
 \downarrow \mu & & \downarrow \bar{\mu} \\
 P & \xrightarrow{f} & Q
 \end{array}$$

$(f_*M, \bar{\mu}, Q)$  se llama también el módulo cruzado inducido por  $\mu$  y  $f$ .

**Proposición 2.4.6.** *Sea  $f : P \rightarrow Q$  un homomorfismo de grupos. Si todo módulo cruzado  $(M, \mu, P)$  induce junto con  $f$  un módulo cruzado  $(f_*, \bar{\mu}, Q)$  como en la definición anterior, entonces se determina un funtor  $f_*$  adjunto izquierdo de  $f^*$ .*

Para asegurarnos de que existe  $f_*$  se hace la construcción análoga para  $\mathbf{ModX}/\mathbf{P}^{pre}$  y luego se aplica  $()^{cr}$ .

<sup>5</sup>Pero este hecho no se usa después, sólo nos interesa la proposición 2.4.7.

**Proposición 2.4.7.** Sea  $\mu : M \rightarrow P$  un módulo cruzado y sea  $f : P \rightarrow Q$  un homomorfismo de grupos. Consideremos a  $\theta : L_Q(M) \rightarrow Q$  el módulo precruzado libre en  $f\mu$ . Se llama  $N$  al subgrupo normal de  $L_Q(M)$  generado por las relaciones

$$(m, q)(m', q) = (mm', q), \tag{2.8}$$

$$(m^p, q) = (m, f(p)q). \tag{2.9}$$

Entonces se tiene que el módulo cruzado determinado por  $f_*M = (L_Q(M)/N)^{cr}$  y el homomorfismo  $\bar{\mu} : f_*M \rightarrow Q$  inducido por  $\theta$  en  $f_*M$  (y que se ve en los generadores de  $f_*M$  como  $\bar{\mu}[m, q] = q^{-1}f\mu(m)q$ ), junto con  $\bar{f} : M \rightarrow f_*M$  dada por  $\bar{f}(m) = [m, 1]$ , hacen que el siguiente diagrama conmute y  $(f_*M, \bar{\mu}, Q)$  sea el pushforward de  $(M, \mu, P)$  según  $f$ :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\bar{f}} & f_*M \\ \mu \downarrow & & \downarrow \bar{\mu} \\ P & \xrightarrow{f} & Q. \end{array}$$

**Demostración** Dado  $(h, f) : (M, \mu, P) \rightarrow (N, \nu, Q)$ , se pone en generadores  $\bar{h} : \bar{\mu} \rightarrow \nu$ ,  $\bar{h}[m, q] = h(m)q$ .

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow h & \\ M & \xrightarrow{\bar{f}} & f_*M \\ \mu \downarrow & & \downarrow \bar{\mu} \\ P & \xrightarrow{f} & Q \\ & \searrow \nu & \end{array}$$

(Note: A dotted arrow labeled  $\bar{h}$  connects  $f_*M$  to  $N$  in the original image.)

■

Para aplicar el Teorema 2d de SvK, se requiere la relación de  $f_*$  con cierto tipo de pushouts.

**Proposición 2.4.8.**  $(f_*M, \bar{\mu}, Q)$  es inducido por  $f$  y  $(M, \mu, P)$  como en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\bar{f}} & f_*M \\ \mu \downarrow & & \downarrow \bar{\mu} \\ P & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$

si y sólo si el siguiente cuadrado es cocartesiano:

$$\begin{array}{ccc}
(1 \rightarrow P) & \xrightarrow{(1,f)} & (1 \rightarrow Q) \\
(0,1_P) \downarrow & & \downarrow (0,1_Q) \\
(M, \mu, P) & \xrightarrow{(\bar{f},f)} & (f_*M, \bar{\mu}, Q),
\end{array}$$

donde los 0 denotan los homomorfismos constantes. En otras palabras, el diagrama de arriba es un pushforward si y sólo si el diagrama de abajo es un pushout.

**Demostración** En efecto, si  $\bar{\mu}$  es inducido y se tienen  $(h, f'), (0, g)$  tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
(1 \rightarrow P) & \xrightarrow{(1,f)} & (1 \rightarrow Q) \\
(0,1_P) \downarrow & & \downarrow (0,1_Q) \\
(M, \mu, P) & \xrightarrow{(\bar{f},f)} & (f_*M, \bar{\mu}, Q) \\
& \searrow (h,f') & \nearrow (0,g) \\
& & (N \rightarrow R),
\end{array}$$

se puede usar la construcción explícita de  $f_*M$  dada anteriormente y poner en generadores  $k[m, q] = h(m)g(q)$ . Viceversa, si el diagrama es cocartesiano, entonces para verificar la propiedad universal de ser inducido se observa que un morfismo  $(h, f) : (M, \mu, P) \rightarrow (N, \nu, Q)$ , junto con  $(0, 1_Q) : (1 \rightarrow Q) \rightarrow (N, \nu, Q)$ , nos da un único  $(k, 1)$  como se requiere. ■

**Proposición 2.4.9.** Sean  $P$  un grupo y una familia  $\{x_c\}_{c \in C}$  de elementos de  $P$  (es decir, hay una función  $\omega : C \rightarrow P$ ). Si  $L$  es el grupo libre en  $C$ , entonces el módulo cruzado libre en  $\omega$  es isomorfo a  $h_*L$ , el módulo cruzado inducido por  $1_L$  y  $h : L \rightarrow P$  dada por  $h(c) = x_c$ .

**Demostración** Sólo hay que ver que  $L_P(C)^{cr}$  tiene la propiedad de ser inducido. Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
& & M \\
& \nearrow f & \nearrow f' \\
L & \xrightarrow{g} & L_P(C)^{cr} \\
\downarrow 1 & & \downarrow \partial \\
L & \xrightarrow{h} & P
\end{array}$$

donde  $g(c) = (c, 1)$ ,  $h(c) = x_c$ ,  $\partial(c, p) = p^{-1}x_cp$ . Ahora, si tenemos un morfismo de módulos cruzados  $(f, h)$  como en el diagrama anterior, se define  $f'(c, p) = f(c)^p$ . ■

## Capítulo 3

# Teoremas de tipo Seifert-van Kampen

En este capítulo presento los Teoremas de tipo Seifert-van Kampen 1 y 2-dimensionales para grupoides y grupoides dobles debidos a R. Brown y P. Higgins. Mientras que la prueba del Teorema 1-dimensional es esencialmente la misma que la del teorema clásico para grupos (quizá incluso un poco más simple porque no se deben tomar lazos en cada paso), el Teorema 2-dimensional requiere mayor trabajo. El argumento análogo al del caso 1-dimensional procede bien para *grupoides dobles fundamentales* de ternas de espacios (§2.2), sin embargo algebraicamente esas estructuras no son muy manejables, lo deseable es obtener un teorema acerca del *módulo cruzado fundamental* de una terna. Esto se consigue mediante la equivalencia entre grupoides dobles con estructura delgada y módulos cruzados sobre grupoides descrita en §2.3. Como una equivalencia de categorías manda colímites en colímites y la equivalencia definida en §2.1 manda al grupoide doble fundamental de una terna en su módulo cruzado fundamental, se tiene un teorema sobre colímites de módulos cruzados fundamentales. Los resultados sin embargo, no son fáciles de aplicar pues manipular módulos cruzados requiere manejar grupos infinitamente presentados.

### 3.1. El teorema de SvK 1-dimensional

El teorema principal de esta sección, publicado en [7] es el siguiente:

**Teorema 3.1.1.** *Si  $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una familia de subconjuntos de  $X$  tal que los interiores de los  $U_\lambda$  cubren  $X$  y  $X_0 \subset X$  interseca cada componente conexa por trayectorias de cada intersección doble y triple de elementos de  $\mathfrak{U}$ , entonces el morfismo*

$$c : \coprod_{\lambda \in \Lambda} \Pi_1(U_\lambda, U_\lambda \cap X_0) \longrightarrow \Pi_1(X, X_0)$$

inducido por las inclusiones de  $\Pi_1(U_\lambda, U_\lambda \cap X_0)$  en  $\Pi_1(X, X_0)$  para cada  $\lambda$ , es el coigualador del diagrama

$$\coprod_{(\lambda, \mu) \in \Lambda^2} \Pi_1(U_\lambda \cap U_\mu, U_\lambda \cap U_\mu \cap X_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} \coprod_{\lambda \in \Lambda} \Pi_1(U_\lambda, U_\lambda \cap X_0),$$

donde  $a, b$  son las inducidas por las inclusiones  $U_\lambda \cap U_\mu \hookrightarrow U_\lambda, U_\lambda \cap U_\mu \hookrightarrow U_\mu$ .

**Demostración** Sea  $f : \coprod_{\lambda \in \Lambda} \Pi_1(U_\lambda, U_\lambda \cap X_0) \longrightarrow \Gamma$  un morfismo de grupoides tal que  $fa = fb$ . Si  $[\alpha] \in \Pi_1(X, X_0)(x, y)$ , existe una partición de  $I$ ,  $0 = t_0 < t_i < \dots < t_n = 1$  tal que  $\forall i \in n, \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]} \subset U_{\lambda_i}$  y  $U_{\lambda_i} \neq U_{\lambda_{i+1}}$  (aquí interesa desde luego el caso en que  $\forall \lambda \alpha \not\subseteq U_\lambda$ ). Para cada  $0 \leq i < n$ , denotamos  $\alpha_i = \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ . Como  $X_0$  interseca cada componente de cada intersección doble de elementos de  $\mathfrak{U}$ , existen trayectorias  $\gamma_{x_i} : I \longrightarrow U_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_{i+1}}$  que cumplen  $\gamma_{x_i}(0) = x_i \in X_0, \gamma_{x_i}(1) = \alpha_i(t_i)$ . Si los extremos de  $\alpha_i$  no están en  $X_0$ , se define entonces  $\widehat{\alpha}_i = \gamma_{x_i} \alpha_i \overline{\gamma_{x_{i+1}}}$  y de no ser así se ponen trayectorias constantes. La trayectoria

$$\widehat{\alpha}_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \widehat{\alpha}_{n-1} \simeq \alpha$$

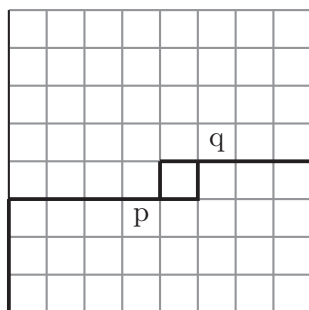
a través de una homotopía relativa a  $\partial I$ . Se define  $g : \Pi_1(X, X_0) \longrightarrow \Gamma$  como  $f$  en  $Ob\Pi_1(X, X_0)$  y en las flechas

$$g[\alpha] = \prod_i f[\widehat{\alpha}_i]$$

$g$  no depende de la elección de los  $x_i$ , pues si  $y_i$  está en la misma componente conexa por trayectorias, se pone  $[\delta] = [\gamma_{x_i} \overline{\gamma_{y_i}}] : x_i \longrightarrow y_i$  y la composición  $\dots \alpha_{i-1} \overline{\gamma_{x_i}} \gamma_{x_i} \alpha_i \dots \simeq \dots \alpha_{i-1} \overline{\gamma_{y_i}} \delta \overline{\gamma_{y_i}} \alpha_i \dots$  y como  $[\delta] \in \Pi_1(U_{\lambda_i}, U_{\lambda_i} \cap X_0)$ , bajo  $f$  las expresiones para  $x_i$  y  $y_i$  coinciden. Por la fórmula anterior la unicidad es clara. Ahora veamos que  $g$  está bien definida. Supongamos que hay una homotopía  $H : \alpha \simeq \beta$  rel  $\partial I$  tal que  $\forall \lambda H[I^2] \not\subseteq U_\lambda$ . Como  $I^2$  es de dimensión de cubierta 2, la cubierta finita  $\{H^{-1} \mathring{U}_{\lambda_i} : \bigcup_{i \in m} \mathring{U}_{\lambda_i} \supset H[I^2], m > 1\}$  que existe por compacidad de  $I^2$ , admite un refinamiento  $\mathfrak{V}$  tal que no hay puntos de  $I^2$  en más de 3 elementos de  $\mathfrak{V}$ . (Puede evitarse el uso de este concepto, agregando a la hipótesis que  $X_0$  toque cada componente conexa por trayectorias de cada intersección cuádruple de elementos de  $\mathfrak{U}$ .) Escogiendo una partición  $0 = s_0 < \dots < s_i < \dots < s_n = 1$  de  $I$  tal que  $\forall i, j [s_i, s_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] \subset V$  con  $V \in \mathfrak{V}$ . Si  $v$  es un vértice de esa subdivisión  $H(v)$  está en una intersección a lo más triple de elementos distintos de  $\mathfrak{V}$ . Entonces, escogiendo  $\forall i, j \in n$  un  $U_{ij} \in \mathfrak{U}$  que contenga a  $H[s_i, s_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$  para cada  $V \in \mathfrak{V}$  que contenga a  $[s_i, s_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ , hay a lo más tres de esos  $U_{ij}$ . Luego  $Hv$  se puede unir con una trayectoria a algún elemento de  $X_0$  dentro de la intersección de los a lo más tres  $U_{ij}$  (para elegir elementos en  $X_0$  consistentemente con los  $U_{ij}$  que contienen las aristas de la retícula).



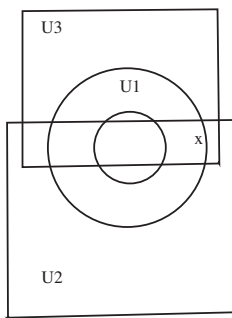
Ahora, considerando los dos caminos resaltados en la figura:



Aplicando  $H$  a ambos caminos y uniendo  $Hq$  a un elemento de  $X_0$  y haciendo lo propio con  $Hp$ , se tienen dos caminos en  $X$  que difieren por una homotopía en algún  $U \in \mathcal{U}$  relativa a los puntos en  $X_0$  escogidos anteriormente y se procede inductivamente. De manera más formal:  $\forall i, j < n$ , las aristas de  $H[s_i, s_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] \subset U_{ij}$  unidas a  $X_0 \cap U_{ij}$  como las  $\hat{\alpha}$  descritas arriba determinan un elemento en  $\square\Pi_1(U_{ij}, U_{ij} \cap X_0) \hookrightarrow \square\Pi_1(X, X_0)$  y es claro que si un cuadrado en  $\square\Pi_1(X, X_0)$  es composición de cuadrados conmutativos, es también conmutativo. ■

**Nota** Para el teorema 2-dimensional es esencial definir qué es un cubo conmutativo y verificar que análogamente a la prueba anterior, una homotopía  $h : (I^3, (\partial I^2) \times I, (\partial^2 I^2) \times I) \rightarrow (X, A, C)$  rel  $\partial^2 I^2$  determina un cubo que resulta conmutativo por ser composición de cubos conmutativos con aristas en  $\Pi_1(A, C)$ , como se prueba en la siguiente sección.

**Ejemplo** No se puede debilitar la hipótesis del teorema anterior a sólo intersecciones dobles. Si  $X = D^2, X_0 = \{(1, 0)\}$  y la cubierta  $\mathcal{U}$  es  $U_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 1\}$ ,  $U_2 = \{z \in D^2 : \Im z < 1/4\}, U_3 = \{z \in D^2 : \Im z > -1/4\}$ . El grupoide trivial,  $\Pi_1(D^2, X_0)$ , no es el coigualador del diagrama inducido por  $\mathcal{U}$ , pues este último tiene como grupo en el vértice a  $\mathbb{Z}$ .



**Ejemplo**  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ . Como en el ejemplo anterior, se considera la cubierta  $U_1 = \{z \in \mathbb{S}^1 : \Im z < 1/4\}, U_2 = \{z \in \mathbb{S}^1 : \Im z > -1/4\}$  y  $X_0 = \{-1, 1\}$ .  $\Pi_1(U_1, X_0) \cong \Pi_1(U_2, X_0)$  es

el grupoide generado por dos vértices y una sola flecha entre ellos,  $\Pi_1(U_1 \cap U_2, X_0)$  es un grupoide discreto. El coigualador de las inclusiones de este grupoide en los anteriores, es el grupoide generado por dos vértices y dos aristas entre ellos, que tiene como grupo en el vértice 1 a un grupo cíclico infinito.

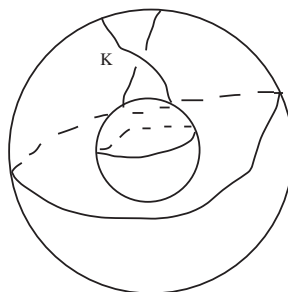
**Corolario 3.1.2.** *Si se tienen las hipótesis del teorema anterior y  $X_0 = \{x\}$ , entonces*

$$\pi_1(X, x) \cong \operatorname{colim}_{\mathfrak{U}^*} \pi_1(U_\lambda \cap U_\mu, x)$$

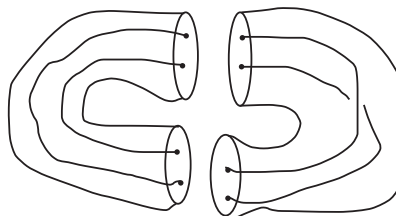
donde  $\mathfrak{U}^*$  denota el orden parcial determinado por los elementos de  $\mathfrak{U}$  y sus intersecciones dobles ordenados con la inclusión.

**Ejemplo** Usando el hecho de que toda superficie  $S$  es triangulable, se puede probar que si  $S$  es no compacta, entonces  $\pi_1(S)$  es un grupo libre con a lo más  $\aleph_0$  generadores<sup>1</sup>. Y esto se prueba construyendo una cadena de superficies compactas con frontera (cuyo grupo fundamental es libre y finitamente generado)  $S_k$  tales que  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k = S$  y los morfismos  $\pi_1(S_k) \hookrightarrow \pi_1(S_{k+1})$  inducidos por las inclusiones sean inyectivos. Entonces, por el teorema de SvK, se tiene que  $\pi_1(S) = \operatorname{colim}_{\mathbb{N}} \pi_1(S_k)$ .

**Ejemplo** La conveniencia de no estar limitados a un punto base (como sucede con el grupo fundamental), se puede ilustrar calculando  $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 - K)$  con  $K$  un nudo. Por ejemplo, consideremos el nudo  $K$  ilustrado en la figura donde se suponen identificadas radialmente las esferas interna y externa de  $\mathbb{S}^2 \times I$ .

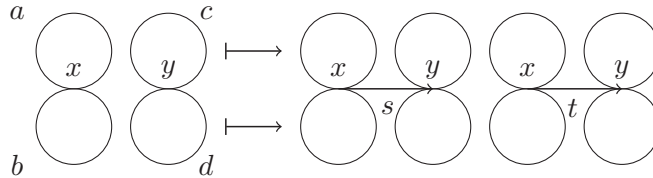


Podemos calcular primero  $\pi_1$  de un toro  $T$  que contenga al nudo, y esto se puede hacer tomando la siguiente cubierta que requiere al menos dos puntos base.



<sup>1</sup>[14]: 4.2.2.

Tomando entonces un punto por cada componente conexa de la intersección de los abiertos indicados arriba, uno debe calcular el coigualador de los grupoides correspondiente como en §1.2. En el diagrama de abajo indicamos los generadores de los grupoides involucrados:

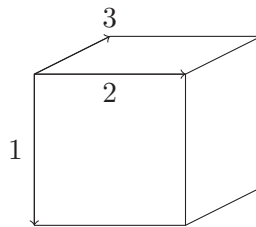


Ahora, llamando  $x, y$  a los objetos del grupoide de la izquierda y  $a, b$  a los lazos basados en  $x, s, t$  a las flechas de  $x$  a  $y$  y  $c, d$  a los lazos en  $y$ , valen las relaciones  $sds^{-1} = a, scs^{-1} = b, tct^{-1} = a, tdt^{-1} = b$  que implican que  $\pi_1(T - K, x) = \langle \alpha, \beta, \gamma | \gamma\alpha = \beta\gamma, \gamma\beta = \alpha\gamma \rangle$ . Luego  $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 - K)$  se puede calcular usando el teorema de SvK usual.

El teorema de Seifert-van Kampen para grupoides permite utilizar cubiertas más generales para efectuar los cálculos, sin embargo en muchos casos, con poco trabajo se pueden considerar cubiertas cuyos elementos tengan un punto en común y sus intersecciones sean conexas por trayectorias. La ventaja de utilizar grupoides es más bien teórica pues permite describir situaciones que involucren espacios homogéneos sin tener que elegir (inevitablemente) de manera arbitraria puntos base.

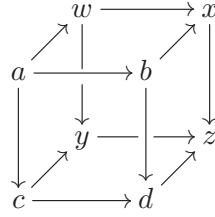
### 3.2. Homotopías y cubos conmutativos

A partir de una categoría doble  $D$  simétrica en aristas se puede formar una *categoría triple*, es decir, una estructura que contenga además de objetos, 1-morfismos y 2-morfismos, un conjunto de elementos llamados 3-morfismos que admitan 3 distintas composiciones. Los 3-morfismos se pueden representar como cubos, pues de la misma manera que en una categoría doble, se requieren condiciones de ensamble de inspiración geométrica. Usaremos la convención de indicar las direcciones de composición como en la siguiente figura:



**Definición** Sea  $C$  una categoría. La *categoría triple* con aristas en  $C$  consta de los siguientes elementos.

1. El conjunto  $Q$  de diagramas en  $C$  de la forma



que llamaremos 3-morfismos o cubos.

2. Seis funciones llamadas fronteras de  $Q$  en el conjunto de 2-morfismos de  $\square C$  que llamamos  $(\square C)_2$ : para cada dirección  $i = 1, 2, 3$  hay dos funciones frontera  $\partial_i^\pm : Q \rightarrow (\square C)_2$  dadas de la siguiente manera. Indicamos al diagrama anterior como  $R$  y a sus caras como la 6-tupla  $(u_+, u_-, v_+, v_-, w_+, w_-)$  de elementos de  $\square C$ , definimos:

$$\partial_1^+(R) = u_+ = \begin{bmatrix} c & d \\ y & z \end{bmatrix}$$

$$\partial_1^-(R) = u_- = \begin{bmatrix} a & b \\ w & x \end{bmatrix}$$

$$\partial_2^+(R) = v_+ = \begin{bmatrix} b & x \\ d & z \end{bmatrix}$$

$$\partial_2^-(R) = v_- = \begin{bmatrix} a & w \\ c & y \end{bmatrix}$$

$$\partial_3^+(R) = w_+ = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

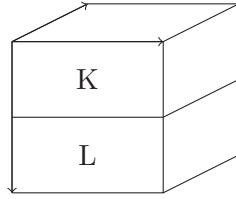
$$\partial_3^-(R) = w_- = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

3. Tres operaciones en  $Q$  tales que cada una vuelve a  $Q$  el conjunto de flechas de una categoría con conjunto de objetos  $(\square C)_2$ , es decir, para cada  $i = 1, 2, 3$  hay funciones  $+_i : Q \times_{(\square C)_2} Q \rightarrow Q$  cuyo dominio es el vértice del producto fibrado de  $\partial_i^+$  y  $\partial_i^-$ . En otras palabras, dos cubos  $A, B$  son componibles según  $+_i$  si  $\partial_i^+ A = \partial_i^- B$ . Las composiciones e identidades se definen análogamente al caso de una categoría doble. O sea, como los cubos están determinados por su frontera, si los cubos

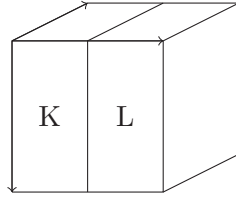
$$K = (a_+, a_-, b_+, b_-, c_+, c_-), L = (x_+, x_-, y_+, y_-, z_+, z_-)$$

son adecuadamente componibles en cada caso, se pone:

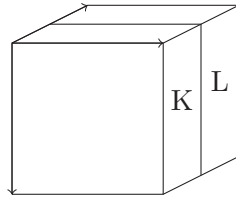
$$\begin{aligned}
 (a_+, a_-, b_+, b_-, c_+, c_-) +_1 (x_+, x_-, y_+, y_-, z_+, z_-) = \\
 (x_+, a_-, b_+ +_1 y_+, b_- +_1 y_-, c_+ +_1 z_+, c_- +_1 z_-),
 \end{aligned}$$



$$(a_+, a_-, b_+, b_-, c_+, c_-) +_2 (x_+, x_-, y_+, y_-, z_+, z_-) = (a_+ +_1 x_+, a_- +_1 x_-, y_+, b_-, c_+ +_2 z_+, c_- +_2 z_-),$$



$$(a_+, a_-, b_+, b_-, c_+, c_-) +_3 (x_+, x_-, y_+, y_-, z_+, z_-) = (a_+ +_2 x_+, a_- +_2 x_-, b_+ +_2 y_+, b_- +_2 y_-, z_+, c_-).$$



Cuando  $C$  es un grupoide, se dice que  $R$  es conmutativo, si

$$w_+ = \begin{pmatrix} \ulcorner & -_1u_- & \urcorner \\ -_2v_- & w_- & v_+ \\ \llcorner & u_+ & \lrcorner \end{pmatrix},$$

donde  $-_1u_-$  denota al inverso de  $u_-$  respecto a la composición  $+_1$  en  $\square C$  y  $-_2v_-$  es el inverso de  $v_-$  respecto a  $+_2$  en  $\square C$ . En otras palabras,  $R$  es conmutativo si al remover la cara trasera y desdoblar el cubo y rellenar los huecos, la cara removida es composición de la figura aplanada en  $\square C$ .

**Proposición 3.2.1.** *Cualquier composición de cubos conmutativos es conmutativa.*

**Demostración** Basta demostrar el resultado para dos cubos. Si la componibilidad es en las direcciones 1 o 2, el resultado es claro. Ahora, si los cubos

$$(a_+, a_-, b_+, b_-, c_+, c_-), (x_+, x_-, y_+, y_-, z_+, z_-)$$

cumplen  $c_+ = z_-$ , sustituyendo

$$c_+ = \begin{pmatrix} \lrcorner & -1a_- & \ulcorner \\ -2b_- & c_- & b_+ \\ \llcorner & a_+ & \lrcorner \end{pmatrix}$$

en

$$z_+ = \begin{pmatrix} \lrcorner & -1x_- & \ulcorner \\ -2y_- & z_- = c_+ & y_+ \\ \llcorner & x_+ & \lrcorner \end{pmatrix}$$

nos dice que

$$z_+ = \begin{pmatrix} \lrcorner & -1x_- & -1a_+ & \ulcorner \\ -2y_- & 2b_- & c_- & b_+ + y_+ \\ \llcorner & a_+ + x_+ & & \lrcorner \end{pmatrix},$$

y por lo tanto se tiene el resultado. ■

**Proposición 3.2.2.** *Si un cubo conmutativo  $c$  tiene caras degeneradas salvo en la dirección 3, entonces  $\partial_3^+ c = \partial_3^- c$ .*

**Demostración** La hipótesis significa que las cuatro caras que conectan las caras de la dirección 3 son identidades para las composiciones respectivas. Entonces, como el cubo es conmutativo, esas caras son iguales. ■

**Proposición 3.2.3.** *En  $\partial I^3$  se denota la unión de sus aristas como  $k^1$  y la unión de sus vértices como  $k^0$ . Sea  $h : (I^3, k^1, k^0) \rightarrow (X, A, C)$  una función continua.  $h|_{\partial I^3}$  determina un cubo conmutativo con caras en  $\rho(X, A, C)$ .*

**Demostración** Llamamos  $a_+, a_-, b_+, b_-, c_+, c_- \in R_2(X, A, C)$  (ver notación de §2.2) a las funciones dadas por

$$\begin{aligned} a_+(s, t) &= h(1, s, t) \\ a_-(s, t) &= h(0, s, t) \\ b_+(s, t) &= h(s, 1, t) \\ b_-(s, t) &= h(s, 0, t) \\ c_-(s, t) &= h(s, t, 0) \\ c_+(s, t) &= h(s, t, 1). \end{aligned}$$

Llamamos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta : I \rightarrow A$  a las funciones dadas por

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= h(0, 1, 1 - t) \\ \beta(t) &= h(0, 0, 1 - t) \\ \gamma(t) &= h(1, 1, 1 - t) \\ \delta(t) &= h(1, 0, t).\end{aligned}$$

Ahora podemos tomar un representante  $u : I^2 \rightarrow A$  de

$$\Theta \left[ \begin{array}{ccc} & [\text{constante } h((0,1,1)] & \\ [\text{constante } h((0,1,1)] & & [\alpha] \\ & [\alpha] & \end{array} \right]$$

donde  $\Theta$  es la estructura delgada de  $\rho(X, A, C)$  definida en 2.2.2, tal que en cada punto en  $I^2$  de la forma  $(1 - t)p + t(1, 0)$  con  $p \in \{0\} \times I \cup I \times \{1\}$   $u$  valga  $\alpha(t)$ . Análogamente se pueden elegir representantes  $v, w, x : I^2 \rightarrow A$  de esa forma para

$$\begin{aligned}& \Theta \left[ \begin{array}{ccc} & [\beta] & \\ [\text{constante } h(0,0,1)] & & [\beta] \\ & [\text{constante } h(0,0,1)] & \end{array} \right] \\ & \Theta \left[ \begin{array}{ccc} & [\text{constante } h(1,1,1)] & \\ [\gamma] & & [\text{constante } h((1,1,1))] \\ & [\bar{\gamma}] & \end{array} \right] \\ & \Theta \left[ \begin{array}{ccc} & [\delta] & \\ [\delta] & & [\text{constante } h(1,0,1)] \\ & [\text{constante } h(1,0,1)] & \end{array} \right].\end{aligned}$$

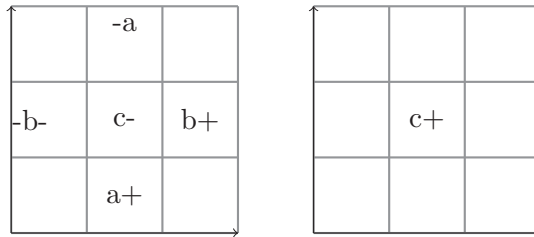
Queremos demostrar que

$$\langle c_+ \rangle = \begin{pmatrix} \langle u \rangle & -_1 \langle a_- \rangle & \langle w \rangle \\ -_2 \langle b_- \rangle & \langle c_- \rangle & \langle b_+ \rangle \\ \langle v \rangle & \langle a_+ \rangle & \langle x \rangle \end{pmatrix}.$$

Notemos que mediante  $h$  se puede encontrar un representante  $f$  del segundo miembro de la ecuación con imagen igual a  $h[I^2 \times \{0\} \cup \partial I^2 \times I]$ . Tomamos una retracción  $r : I^3 \rightarrow I^2 \times \{0\} \cup \partial I^2 \times I$  y definimos la homotopía delgada  $H : I^3 \rightarrow X$  como

$$H(s, t, y) = h((1 - y)r(s, t, 1) + y(s, t, 1)).$$

Y finalmente tenemos que  $\langle H \circ r|_{I^2 \times \{1\}} \rangle = \langle f \rangle$ .



■

### 3.3. El teorema de SvK 2-dimensional

**Definición** Una terna  $(X, A, C)$  en  $\mathbf{Top}^3$  es *conexa* si:

1.  $C$  interseca toda componente conexa por trayectorias de  $X$  y de  $A$ .
2. El morfismo  $\Pi_1(A, C) \hookrightarrow \Pi_1(X, C)$  dado por la inclusión  $A \hookrightarrow X$  es pleno.

Dada una cubierta  $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de  $X$ , abreviamos  $\bigcap_{i \in \nu} U_i = U^\nu$ ,  $\bigcap_{i \in \nu} U_i \cap A = A^\nu$ ,  $\bigcap_{i \in \nu} U_i \cap C = C^\nu$  para  $\nu = (i_1, \dots, i_n) \in \Lambda^n$ .

**Teorema 3.3.1.** *Si  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathring{U}_\lambda$  cubre  $X$  y  $\forall \nu \in \Lambda^8$ ,  $(U^\nu, A^\nu, C^\nu)$  es conexa, entonces  $(X, A, C)$  es conexa y  $\rho(X, A, C)$  con el funtor  $c$  inducido por las inclusiones es el coigualador del diagrama siguiente*

$$\coprod_{\nu \in \Lambda^2} \rho(U^\nu, A^\nu, C^\nu) \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} \coprod_{\lambda \in \Lambda} \rho(U^\lambda, A^\lambda, C^\lambda).$$

**Demostración** La prueba es similar a la del teorema 1-dimensional. Sea

$$f : \prod_{\lambda \in \Lambda} \rho(U^\lambda, A^\lambda, C^\lambda) \rightarrow \Gamma$$

un morfismo de grupoides dobles simétricos respecto a las aristas tal que  $fa = fb$ . Tomemos  $\alpha \in R_2(X, A, C)$ . Usando un número de Lebesgue de  $\{\alpha^{-1}[U^\lambda]\}_{\lambda \in \Lambda}$ , se subdivide  $I^2$  en una retícula de rectángulos  $R_{ij}$  de manera que su imagen esté contenida en algún  $U_{ij}$ . Si toda restricción  $\alpha|_{R_{ij}} = \alpha_{ij} \in R_2(U^i, A^i, C^i)$ , entonces  $\forall i, j$  como  $f$  coiguala a  $a$  y a  $b$ , las  $f\alpha_{ij}$  son componibles en  $\Gamma$ . Se propone entonces  $g : \rho(X, A, C) \rightarrow \Gamma$  dada por  $\alpha \mapsto [f\alpha_{ij}]$ . Los detalles de la prueba se darán en los lemas siguientes. ■

**Nota** La retícula descrita anteriormente induce una estructura celular  $k$  en  $I^2$  que facilita describir los argumentos de los lemas siguientes.

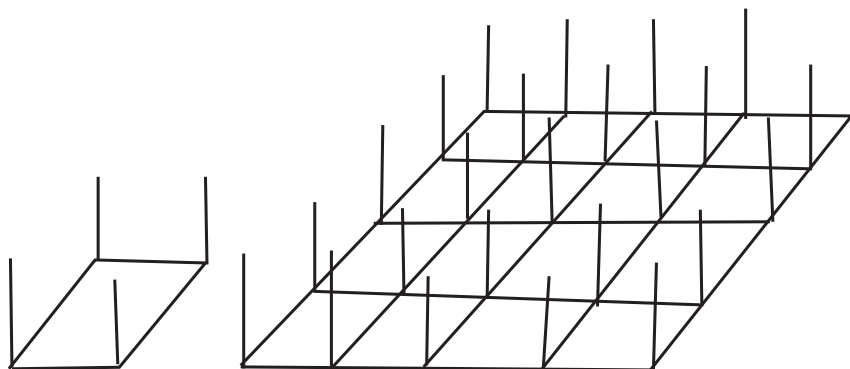
Para asegurar que para todo  $\langle \alpha \rangle$  se puede encontrar un representante adecuado se usa el lema siguiente.

**Lema 3.3.2.** *Sea  $\alpha \in R_2(X, A, C)$  tal que su dominio tiene una subdivisión en una retícula tal que cada subrectángulo cae en algún  $U$  bajo  $\alpha$ . Si se llaman  $\alpha_{ij}$  a las restricciones, entonces existe una homotopía delgada  $h : I^3 \rightarrow X$  de  $\alpha$  a  $\beta$  tal que:*

1. Si  $v$  es un vértice de la retícula tal que  $\alpha v \in C$ , entonces  $h$  es constante en  $v \times I$ . De lo contrario el segmento  $v \times I$  cumple  $h(v, 1) \in C$ .
2. Si  $e$  es una 1-celda de  $I^2$  tal que  $\alpha[e] \subset A$ , entonces  $h[e \times I] \subset A$ ; y en todo caso  $h[e \times \{1\}] \subset A$ .



**Demostración** Si  $k^j$  es el  $j$ -esqueleto de  $I^2$ , en primer lugar se define  $h$  en  $k^0 \times I$ . Si  $e^0$  es una 0-celda que está en  $C$  se pone  $h$  constante en  $\{e^0\} \times I$ . Si no es así, como  $h(e^0)$  está en a lo más 4 distintos  $U_{\lambda_i}$ , hay una trayectoria  $t : I \rightarrow U^\nu = \bigcap U_{\lambda_i}$  con  $t(1) \in C$ . Se pone  $h(e^0, s) = t(s)$ . De esta manera  $h$  está definida en  $k^0 \times I$ , llamaré a esta restricción  $h^0$ . Ahora, si  $e^1$  es una 1-celda de  $k$  tal que  $\alpha[e^1] \subset A$ , se tienen 2 casos: (i) si los extremos de  $e^1$  caen en  $C$ , se define  $h$  como  $\alpha$  en cada  $e^1 \times \{t\}, t \in I$ ; (ii) si algún extremo no cae en  $C$ ,  $e^1 \times I$  se retrae a los 3 lados donde ya está definida, es decir, se usa la propiedad de extensión de homotopías de  $(e^1, \partial e^1)$ . Si  $\alpha[e^1] \not\subset A$ , entonces  $h^0$  aplicado a  $\{e_0^0\} \times I \cup e^1 \times \{0\} \cup \{e_1^0\} \times I$ , donde  $e_i^0$  son las 0-celdas frontera de  $e^1$ , determina un elemento  $u \in \Pi(U^\nu, C^\nu)$  con  $|\nu| \leq 4$ . Luego hay una homotopía  $\theta$  rel  $\partial I$  de  $u$  a un elemento  $u' \in \Pi(A^\nu, C^\nu)$ . Usando esa homotopía, se define  $h$  en  $e^1 \times I$ . Así se tiene una  $h^1$  en  $k^1 \times I$ . Para extender  $h^1$  a todo  $I^2 \times I$ , se observa que  $I^2 \times I$  se retrae a  $I^2 \times \{0\} \cup k^1 \times I$  entonces como extensión se toma  $h^1$  compuesta con una retracción de  $I^2 \times I$  en  $I^2 \times \{0\} \cup k^1 \times I$ . Por lo tanto a  $\alpha' = h_1$  se le puede aplicar la fórmula  $g$ . ■



$(X, A, C)$  es conexas porque dada una componente por trayectorias de  $X$ , ésta interseca algún  $U_i$  y entonces  $C \cap U_i$  la interseca.  $\Pi_1(A, C) \rightarrow \Pi_1(X, C)$  es pleno, pues un elemento del segundo grupoide se puede ver como un elemento degenerado de  $R_2(X, A, C)$ ; y entonces, por el inciso 2 del lema anterior, es imagen de alguna curva en  $\Pi_1(A, C)$ . Para probar que la definición de  $g$  es independiente del representante usado, de la homotopía del Lema 3.3.2 y de la subdivisión de  $I^2$  empleada arriba, se requiere lo siguiente.

**Lema 3.3.3.** Si  $h : I^3 \rightarrow X$  es una homotopía delgada entre  $\alpha, \beta \in R_2(X, A, C)$  e  $I^3$  tiene una subdivisión  $[C^{ijk}]$  tal que  $h[C^{ijk}] \subset U$  para algún  $U$ ,  $h$  restringida a cada 2-celda de la subdivisión determina un elemento en algún  $R_2(U^\nu, A^\nu, C^\nu)$ , entonces con esas retículas  $g\alpha = g\beta$ .

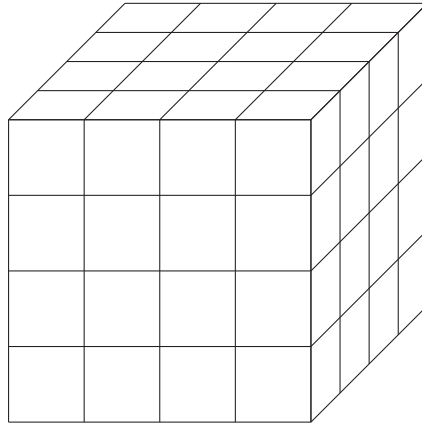
**Demostración** Por 3.2.3  $h[C^{ijk}]$  representa un cubo conmutativo con caras en  $\rho(U^\lambda, A^\lambda, C^\lambda)$ . Como se obtienen cubos componibles por la definición de  $g$ , 3.2.1 indica que  $h$  determina un cubo conmutativo. Finalmente, como la homotopía es delgada, las aristas que conectan 2 de las caras de este cubo son identidades en  $\Pi_1(X, C)$ . Entonces, 3.2.2 implica justo que esas caras son iguales, es decir,  $g\alpha = g\beta$ . ■

Usando el lema anterior, si tenemos 2 subdivisiones de  $\alpha \in R_2(X, A, C)$ , sin pérdida de generalidad, una es un refinamiento de la otra. Por 3.3.2, hay una homotopía delgada  $h : \alpha \simeq \alpha'$  tal que la subdivisión más fina inducida en  $\alpha'$  presenta a  $\alpha'$  como composición de elementos en  $R_2(U_i, A_i, C_i)$ . Ahora, si  $h$  fuera tal que dividiendo  $I^3$  en cubos  $C^{ijk}$  de acuerdo a la retícula más fina de  $I^2$  con que se empezó y tales que  $h[C^{ijk}] \subset U_{ijk}$  y cada cara determinara un elemento en  $R_2(U_{ijk}, A_{ijk}, C_{ijk})$ , entonces por el lema 3.3.3 ambas subdivisiones determinarían el mismo elemento en  $\Gamma$ . Y esto se puede asegurar por lo siguiente.

**Lema 3.3.4.** *Si  $h : I^3 \rightarrow X$  es una homotopía delgada de  $\alpha$  a  $\beta \in R_2(X, A, C)$  y  $I^3$  tiene una subdivisión en subcubos  $[C^{ijk}]$  tales que  $h[C^{ijk}] \subset U^{ijk} \in \mathfrak{A}$ , entonces hay una homotopía  $\theta : h \simeq k$  tal que la estructura celular en el dominio de  $k$  inducida por  $h$  cumple:*

1.  $k(e^0) \in C$  y si  $h(e^0) \in C$ , entonces  $\theta$  es constante en  $e^0 \times I$ . Si  $h(e^0) \in A$  entonces  $\theta[e^0 \times I] \subset A$ .
2.  $k[e^1] \subset A$  y si  $h[e^1] \subset C$ , entonces  $\theta$  es constante en  $e^1 \times I$ . Si  $h[e^1] \subset A$  entonces  $\theta[e^1 \times I] \subset A$ .

**Demostración** La prueba consiste esencialmente en seguir los pasos de 3.3.2., notando que cuando uno subdivide  $I^3$  en una retícula de subcubos, cada vértice está en 8 cubos distintos y entonces se usa que  $\forall \nu \in \Lambda^8, (U^\nu, A^\nu, C^\nu)$  es conexa<sup>2</sup>. ■



<sup>2</sup>Usando la herramienta de dimensión de cubierta como en 3.1.1, uno puede pedir solamente que en 3.3.1  $\forall \nu \in \Lambda^4, (U^\nu, A^\nu, C^\nu)$  sea conexa, pero no necesitamos esta generalidad aquí.

Una vez probado que  $g$  está bien definida, se ve rápidamente que conserva composiciones y evidentemente es la única que completa este diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\nu \in \Lambda^2} \rho(U^\nu, A^\nu, C^\nu) & \xrightarrow[a]{a} & \coprod_{\lambda \in \Lambda} \rho(U^\lambda, A^\lambda, C^\lambda) \longrightarrow \rho(X, A, C) \\ & & \downarrow f \\ & & \Gamma \end{array}$$

$g$  (arrow from  $\rho(X, A, C)$  to  $\Gamma$ )

Como esta prueba puede aplicarse para cuadrados degenerados, es decir, trayectorias, recuperamos también una versión 1-dimensional del teorema de Seifert y van Kampen. El corolario de mayor relevancia para esta exposición es el siguiente.

**Corolario 3.3.5.** *Si  $X = \mathring{U}_1 \cup \mathring{U}_2$ ,  $(U^i, A^i, x)$ ,  $x \in A$ ,  $i = 1, 2$  es conexa, entonces  $(X, A, x)$  es conexa<sup>3</sup> y el siguiente diagrama es un pushout de módulos cruzados*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_2(U^{12}, A^{12}, x) & \longrightarrow & \Pi_2(U^1, A^1, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_2(U^2, A^2, x) & \longrightarrow & \Pi_2(X, A, x). \end{array}$$

**Demostración** Usando la proposición 2.3.2, la equivalencia  $\gamma$  de §2.1 conserva colímites y por 2.2.2, manda grupoides dobles fundamentales en módulos cruzados fundamentales.

■

### 3.4. Algunas aplicaciones de los teoremas

Se puede aplicar el Teorema 2d de Seifert y van Kampen a algunos espacios de adjunción. Cuando  $A \hookrightarrow X$  es una cofibración cerrada y se tiene la situación

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \cup_f X, \end{array}$$

se pueden reemplazar los espacios de la derecha por espacios homotópicamente equivalentes.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & M_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & M_f \cup_j X \end{array}$$

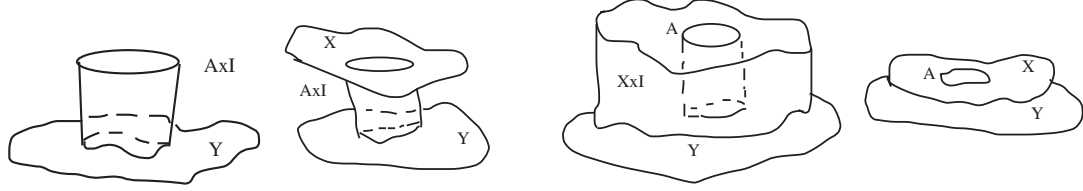
donde  $j(a) = [a, 0]$  y  $M_f$  es el cilindro de  $f: A \times I \cup_f Y$ ,  $(a, 1) \sim f(a)$ .

---

<sup>3</sup>Cuando  $C$  es un punto, esta condición significa que la pareja punteada  $(X, A)$  es 1-conexa.

**Lema 3.4.1.**  $(M_f \cup_j X, M_f) \simeq (Y \cup_f X, Y)$ .

**Demostración** Como la pareja  $(X, A)$  es cofibrada,  $X \times \{0\} \cup A \times I$  es retracto de  $X \times I$ , y de hecho es retracto por deformación. Dada una retracción  $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ , si  $r_i, i = 1, 2$  son las componentes de  $r$ , uno pone la homotopía  $H : X \times I \times I \rightarrow X \times I, (x, s, t) \mapsto (r_1(x, st), s(1-t) + tr_2(x, s))$ ,  $H_0 = 1_{X \times I}, H_1 = r$ . Entonces, si  $f' : X \rightarrow Y \cup_f X$  es la inclusión canónica,  $M_{f'} \simeq Y \cup_f X$  y por la equivalencia homotópica anterior, también  $M_{f'} \simeq M_f \cup_j X$  y además resulta ser de parejas:  $(M_f \cup_j X, M_f) \simeq (Y \cup_f X, Y)$ . ■



**Proposición 3.4.2.** Con las hipótesis de 3.3.5 y  $A = U_1$ ,  $\Pi_2(X, A)$  es el módulo cruzado inducido por  $i_* : \pi_1(U_{12}) \rightarrow \pi_1(U_1)$  y  $\Pi_2(U_2, U_{12})$ .

**Demostración** Por 3.3.5,  $\Pi_2(X, A = U_1)$  hace al diagrama siguiente un diagrama de pushout:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_2(U_{12}, U_{12}, x) & \longrightarrow & \Pi_2(U_1, U_1, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_2(U_2, U_{12}, x) & \longrightarrow & \Pi_2(X, U_1, x). \end{array}$$

Pero por la proposición 2.4.8, un diagrama de este estilo es un pushout si y sólo si  $\Pi_2(X, U_1, x)$  es inducido por  $\Pi_2(U_2, U_{12})$  y  $i_* : \pi_1(U_{12}) \rightarrow \pi_1(U_1)$ . ■

**Teorema 3.4.3.** Si  $(X, A)$  es cofibrado y 1-conexo y hay  $f : A \rightarrow Y$  con  $Y$  conexo por trayectorias, entonces  $\Pi_2(Y \cup_f X, Y)$  es inducido por  $\Pi_2(X, A)$  y  $f_* : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(Y)$ .

**Demostración** Por el argumento al principio de la sección, dado  $a \in A$  y  $f(a) = y$ , se tiene que  $(M_f \cup_j X, M_f, y) \simeq (Y \cup_f X, Y, y)$  como parejas punteadas. Llamemos  $z = [a, 1/2] \in M_f$ , luego  $\Pi_2(M_f \cup_j X, M_f, y) \cong \Pi_2(M_f \cup_j X, M_f, z)$ . Consideremos la cubierta de  $M_f \cup_j X \{U_1, U_2\}$  donde  $U_1 = M_f$  y

$$U_2 = X \cup \{[a, t] \in M_f : t < 2/3\}.$$

Por la proposición 3.4.1,  $\Pi_2(M_f \cup_j X, M_f, z)$  es el módulo cruzado inducido por

$$\begin{array}{ccc} i_* : \pi_1(U_1 \cap U_2, z) & \rightarrow & \pi_1(U_1) \text{ y} \\ & & \Pi_2(U_2, U_1 \cap U_2, z), \end{array}$$

pero como  $U_1 \cap U_2$  se retrae por deformación a  $A$ ,  $U_2$  a  $X$ ,  $U_1$  a  $Y$  y  $\Pi_2(U_2, U_1 \cap U_2, z) \cong \Pi_2(U_2, U_1 \cap U_2, a)$ , esto equivale a construir el módulo cruzado inducido por  $\Pi_2(X, A, a)$  y  $f_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ . ■

**Proposición 3.4.4.** *Sea  $f : A \rightarrow Y$ , con  $A$  y  $Y$  conexos por trayectorias. Entonces  $(CA \cup_f Y, Y)$  es 1-conexa (con  $CA$  el cono de  $A$ ) y  $\Pi_2(CA \cup_f Y, Y)$  es inducido por  $\pi_1 f$  y  $1_{\pi_1(A)}$ .*

**Demostración**  $(CA, A)$  es cofibrada y 1-conexa, luego por el teorema anterior se tiene el resultado. Sin embargo, se puede decir más. La sucesión exacta de homotopía de  $(CA, A)$  es

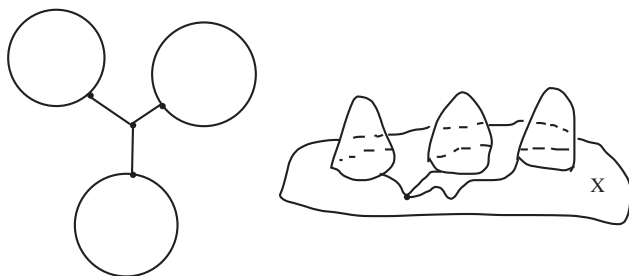
$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_2(CA, A) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

pues  $CA$  es contraíble. Entonces,  $\Pi_2(CA, A) \cong 1_{\pi_1(A)}$ . ■

Una aplicación importante del Teorema 2d de SvK que exponemos aquí es el siguiente resultado de J.H.C. Whitehead.

**Teorema 3.4.5.** *Si  $Y$  se obtiene a partir de  $X$ , conexo por trayectorias, adjuntando 2-celdas, entonces  $\Pi_2(Y, X)$  es isomorfo a un módulo cruzado libre en las funciones de pegado de las 2-celdas sobre  $\pi_1(X)$ .*

**Demostración**  $Y = X \cup_f \coprod D_\lambda^2$  se puede ver de la siguiente manera. Se llama  $A$  al espacio obtenido de pegar un  $\mathbb{S}^1$  a cada extremo de la cuña  $\vee I_\lambda$  (identificando los intervalos por el 0) y a  $B$  se llama al resultado de adjuntar discos  $D^2$  pegando sus fronteras a los círculos en  $A$ . Entonces, escogiendo caminos en  $X$ :  $a_\lambda$  de  $x$  a  $f_\lambda(1)$ , se construye  $B \cup_g X$  mediante  $g : A \rightarrow X$  dada así  $g|_{\vee I_\lambda} : (t, \lambda) \mapsto a_\lambda(t), g|_{\mathbb{S}^1_\lambda} : z \mapsto f_\lambda(z)$ . Claramente  $B \cup_g X$  y  $Y$  son homeomorfos. Ahora,  $\pi_1(A)$  es libre y  $B$  contraíble. Luego, por una argumentación análoga a la del corolario anterior, se tiene que  $\Pi_2(Y, X)$  es inducido por  $\pi_1(g)$  y  $\Pi_2(B, A) \cong 1_{\pi_1(A)}$ . Como  $\pi_1(A)$  es libre, la proposición 2.4.9 implica el resultado. ■



**Ejemplo**  $\mathbb{S}^2$  se puede ver como una 2-celda adjuntada a un punto. Luego  $\Pi_2(\mathbb{S}^2, x)$  es el módulo cruzado libre sobre  $\{0\}$  y el grupo trivial. Por lo tanto es isomorfo a  $\mathbb{Z} \rightarrow 0$  y así  $\pi_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ .

**Ejemplo** Para calcular  $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$  lo más conveniente es usar que la proyección usual  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  es una aplicación cubriente y el ejemplo anterior, lo que nos da  $\pi_2(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$ .

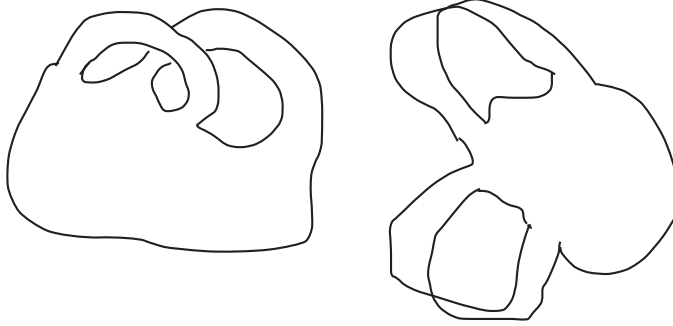
Sin embargo, el teorema anterior nos permite calcular además de qué manera exactamente  $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$  actúa en  $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$ .

En efecto,  $\mathbb{R}P^2$  se obtiene de pegar una 2-celda a  $\mathbb{S}^1$  con la función  $z \mapsto z^2$ . Entonces,  $\Pi_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{S}^1)$  es isomorfo al  $\mathbb{Z}$ -módulo cruzado libre en  $\{0\}$ . Recordemos que  $\partial : L_{\mathbb{Z}}(\{0\})^{cr} \rightarrow \mathbb{Z}$  se obtiene tomando el grupo libre en el conjunto  $\{0\} \times \mathbb{Z}$  y factorizando los conmutadores de Peiffer:  $\forall m \in \mathbb{Z}, \partial(0, m) = 2$ . Luego se tienen las relaciones  $(0, m+2) = (0, m)^2 = (0, n)^{-1}(0, m)(0, n)$ . Poniendo  $m = n$  se obtiene  $(0, m+2) = (0, m)$ , por lo que  $L_{\mathbb{Z}}(1)$  tiene sólo 2 generadores  $\{(0, 0), (0, 1)\}$  que conmutan, es decir se trata de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  y la acción de 1 en  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  está dada por la matriz  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Por lo tanto,  $\mathbb{Z} = \text{nuc}(\partial) = \pi_2(\mathbb{R}P^2)$  obteniéndose la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{R}P^2) & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{S}^1) & \xrightarrow{\partial} & \pi_1(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P^2) & \longrightarrow & 1 \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

De ahí que  $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  actúa en  $\pi_2(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$  como  $[1](a) = -a$ , por lo que  $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$  actúa fielmente en  $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$ .

**Ejemplo** Si  $S$  es una superficie cerrada no homeomorfa a la esfera ni al plano proyectivo, sabemos que su cubierta universal es  $\mathbb{R}^2$  por lo que sólo tiene el primer grupo de homotopía no trivial. Entonces 3.4.4 sirve para demostrar que algunos módulos cruzados bastante complicados constan de un homomorfismo inyectivo. Toda superficie cerrada se puede obtener pegando una 2-celda a un espacio de uno de los siguientes dos tipos:



donde el primer dibujo corresponde a una superficie orientable (la del ejemplo es el toro, y las demás tienen “más orejas”) y el segundo a una no orientable (la botella de Klein en este caso).

**Ejemplo** Sea  $X = \mathbb{S}^1 \cup_f D^2$  con  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $z \mapsto z^a$  con  $a \in \mathbb{N}, a > 0$ .  $\Pi_2(X, \mathbb{S}^1)$  es el módulo cruzado libre en  $\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}, 0 \mapsto a$ . Luego consiste en tomar el grupo libre en el conjunto  $\{0\} \times \mathbb{Z}$  y dividir por los conmutadores de Peiffer.  $L_{\mathbb{Z}}(\{0\})^{cr}$  está dado entonces por imponer las relaciones  $\forall m, n \in \mathbb{Z} (0, m+a) = (0, m)^a = (0, n)^{-1}(0, m)(0, n)$  ya que  $\partial(0, m) = a$ . De ahí que  $\forall m, k \in \mathbb{Z}, (0, m+ka) = (0, m)$ , por lo que  $L_{\mathbb{Z}}(\{0\})^{cr}$

tiene sólo  $a$  generadores que conmutan. Entonces  $\Pi_2(X, \mathbb{S}^1)$  es isomorfo al módulo cruzado  $\partial : \mathbb{Z}^a \rightarrow \mathbb{Z}$  con  $\partial(x_1, \dots, x_a) = (\sum_{i=1}^a x_i)a$  y acción de 1 dada en los básicos canónicos de  $\mathbb{Z}^a$  por  $e_i \mapsto e_{i+1}$  si  $i < a$  y  $e_a \mapsto e_1$ . Por lo tanto  $\pi_2(X) \cong \mathbb{Z}^{a-1}$ .

**Ejemplo** Si  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es constante, entonces  $X = \mathbb{S}^1 \cup_f D^2 \cong \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$  tiene  $\pi_2(X)$  libre abeliano de rango  $\aleph_0$ . En efecto, como  $\pi_1(f)$  es el homomorfismo constante,  $\Pi_2(X, \mathbb{S}^1) \cong (L_{\mathbb{Z}}(\{0\})^{cr}, \partial, \mathbb{Z})$  tiene  $\partial$  constante, luego dividir por las relaciones de Peiffer en  $L_{\mathbb{Z}}(\{0\})$  (grupo libre con  $|\mathbb{Z}|$  generadores) consiste en abelianizarlo.

**Ejemplo** Cualquier módulo cruzado libre en  $\omega : S \rightarrow L$ , con  $L$  un grupo libre se puede realizar como  $\Pi_2(K, K^1)$  de algún 2-complejo  $K$ . En efecto, si se toma un  $(C, \partial, L)$  como arriba y  $L = \langle x_j \rangle_{j \in J}$ , se construye  $\bigvee_J \mathbb{S}^1 = K^1$  y luego se pegan  $|S|$  2-celdas mediante  $\omega : \prod_{s \in S} \mathbb{S}_s^1 \rightarrow K^1$  con  $f_s$  dada por  $\omega(s)$ .

**Nota** En principio se podría determinar  $\pi_2(K)$  a partir de  $\Pi_2(K, K^1)$  (que es el módulo cruzado libre sobre un grupo libre) para todo  $K \in CW$  de dimensión 2, pero el núcleo de ese módulo cruzado es difícil de calcular en general, como se ve en el caso de las superficies.

**Proposición 3.4.6.**  $\pi_2(\Sigma A = CA \cup CA) = \pi_1(A)^{ab}$ .

**Demostración**  $\Pi_2(\Sigma A, CA)$  es el inducido por  $\pi_1(A) \rightarrow 0 = \pi_1(CA)$  a partir de  $1_{\pi_1(A)}$ , es decir, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A) & \longrightarrow & 0_* \pi_1(A) \\ \downarrow 1 & & \downarrow \\ \pi_1(A) & \xrightarrow{0} & 1 \end{array}$$

de donde se sigue el resultado. ■

Con la proposición anterior se puede probar de nuevo que  $\pi_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$  pues  $\Sigma \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2$ .

**Proposición 3.4.7.** Sean  $\{f_i : \mathbb{S}^n \rightarrow Y\}_{i \in I}$  una familia de funciones continuas con  $Y$  conexo por trayectorias y  $Z = Y \cup \prod_{i \in I} f_i \prod_{i \in I} D^{n+1}$  con  $n > 1$ . Se tiene que  $\Pi_2(Z, Y)$  es isomorfo al módulo cruzado  $(\mathbb{Z}^{(\pi_1(Y))}, \partial, \pi_1(Y))$  con  $\mathbb{Z}^{(\pi_1(Y))}$  el grupo abeliano libre en los elementos de  $\pi_1(Y)$  y  $\partial$  el homomorfismo constante (se trata del módulo cruzado libre sobre  $\pi_1(Y)$  y la función  $\{0\} \rightarrow \pi_1(Y), 0 \mapsto 1$ ).

**Demostración** La prueba es análoga a la del Teorema 3.4.5.  $Z$  se puede ver de la siguiente manera. Se llama  $A$  al espacio obtenido de pegar un  $\mathbb{S}^n$  a cada extremo de la cuña  $\bigvee_{i \in I} I_i$  (identificando los intervalos por el 0) y a  $B$  se llama al resultado de adjuntar bolas  $D^{n+1}$  pegando sus fronteras a los círculos en  $A$ . Entonces, escogiendo caminos en  $Y$ :  $a_i$  de  $x$  a  $f_i(*)$ , se construye  $B \cup_g Y$  mediante  $g : A \rightarrow Y$  dada así  $g|_{\bigvee I_i} : (t, i) \mapsto a_i(t)$  con  $g|_{\mathbb{S}_i^n} : z \mapsto$

$f_i(z)$ .  $B \cup_g Y \cong Z$ . Ahora,  $\pi_1(A)$  es trivial y  $B$  contraíble. Luego, la sucesión exacta de homotopía de la pareja  $(B, A)$  nos da que  $\Pi_2(B, A)$  es el módulo cruzado trivial  $1 \rightarrow 1$ . Por el Teorema 3.4.3,  $\Pi_2(Z, Y)$  es isomorfo al módulo cruzado inducido por  $\pi_1(g)$  y  $\Pi_2(B, A) \cong id_1$ . Usando la presentación de un módulo cruzado inducido descrita en la proposición 2.4.7, se tiene que  $\pi_2(Z, Y)$  está dado por tomar el grupo libre en  $\pi_1(Y)$  (como conjunto), dividir entre un subgrupo normal que en este caso es 1 y luego dividir entre el subgrupo generado por los conmutadores de Peiffer.  $\partial : \pi_2(Z, Y) \rightarrow \pi_1(Y)$  es el homomorfismo constante entonces al imponer las relaciones de Peiffer sólo se está abelianizando. ■

**Ejemplo** La proposición 3.4.3 puede usarse para situaciones más generales que la adjunción de 2-celdas. Por ejemplo a descomposiciones de Heegaard de 3-variedades cerradas orientables (ver [14]). Tomando las descomposiciones de género mínimo, se tienen espacios de adjunción dados por la pareja  $(T = D^2 \times \mathbb{S}^1, T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  que es 1-conexa. Si tenemos un homeomorfismo del toro en sí mismo,  $f : T^2 \rightarrow T^2, (z, w) \mapsto (z^a w^b, z^c w^d), ad - bc = \pm 1, c \neq 0$  (esto último para excluir a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ), entonces  $M = T \cup_f T$  satisface lo siguiente.

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(T, T^2) \cong \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_2(M, T) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \bar{\partial} \\ \pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(T) \end{array}$$

Por la proposición 3.4.3, en el diagrama anterior,  $\bar{\partial}$  es el módulo cruzado inducido por  $f_*$  y  $\Pi_2(T, T^2)$ . Sabiendo que las variedades obtenibles pegando dos toros sólidos son los espacios lente<sup>4</sup>, cocientes de  $\mathbb{S}^3$ , se demuestra que  $\bar{\partial}$  es inyectivo pues su núcleo es  $\pi_2(M) \cong \pi_2(\mathbb{S}^3) = 0$ . Se podría intentar calcular  $\pi_2$  y  $\pi_1$  de toda 3-variedad cerrada orientable con este resultado; pero en general, calcular el núcleo y la imagen de  $\bar{\partial}$  es difícil como en el caso de 2-complejos (además el problema fundamental es saber qué  $f_*$  pueden aparecer, saberlo requiere entender los grupos de clases de aplicaciones de superficies).

---

<sup>4</sup>[14].



# Bibliografía

- [1] M. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer, Berlin, 2002.
- [2] J. C. Baez. An introduction to n-categories. In E. Moggi and G. Rosolini, editors, *7th Conference on Category Theory and Computer Science*, volume 1290 of *Lecture notes in Computer Science*, pages 1–33, Berlin, 1997. Springer.
- [3] J. C. Baez and A. Lauda. Higher dimensional algebra v: 2-groups. *Theory and Applications of Categories*, (12):423–491, 2004.
- [4] R. Brown. *Topology and Groupoids*. BookSurge LLC, 3 edition, 2006.
- [5] R. Brown and P. J. Higgins. On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces. *Proc. London Math. Soc.*, 36:193–212, 1978.
- [6] R. Brown, P. J. Higgins, and R. Sivera. *Nonabelian Algebraic Topology*. European Mathematical Society, 2011.
- [7] R. Brown and A. Razak Salleh. A van kampen theorem for unions of non-connected spaces. *Arch. Math.*, (42):85–88, 1984.
- [8] C. Ehresmann. *Catégories et structures*. Dunod, Paris, 1965.
- [9] P. J. Higgins. *Categories and Groupoids*. Reprints in Theory and Applications of Categories, 2005.
- [10] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 2 edition, 1998.
- [11] Saunders Mac Lane and J.H.C. Whitehead. On the 3-type of a complex. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 36(13):41–48, 1950.
- [12] nLab. <http://ncatlab.org/nlab/show/homepage>.
- [13] T. Porter. The crossed menagerie: an introduction to crossed gadgetry and cohomology in algebra and topology.

- [14] J. Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer, 1993.
- [15] C.A. Weibel. *An Introduction to Homological algebra*. Cambridge University Press.
- [16] A. Weinstein. Groupoids: unifying internal and external symmetry. *Notices of the AMS*, 43(7):744–752, 1996.
- [17] J.H.C. Whitehead. On adding relations to homotopy groups. *Annals of Mathematics*, 41(2):409–428, 1941.
- [18] J.H.C. Whitehead. Note on a previous paper entitled "on adding relations to homotopy groups". *Annals of Mathematics*, 47(2):806–810, 1946.
- [19] J.H.C. Whitehead. Combinatorial homotopy ii. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:453–496, 1949.
- [20] J.H.C. Whitehead. Algebraic homotopy theory. In *Proc. Int. Cong. of Mathematics*, pages 354–357. Harvard, 1950.