UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

(k+1)-reyes en digráficas k-cuasi-transitivas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

Manuel Alejandro Juárez Camacho

DIRECTORES DE TESIS:
Dra. Hortensia Galeana Sánchez
Dr. César Hernández Cruz

2013

Datos del jurado

1. Datos del alumno
Juárez
Camacho
Manuel Alejandro
55 39 81 49 26
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
306317794

2. Datos del tutor
Dra
Hortensia
Galeana
Sánchez

3. Datos del cotutor
Dr
César
Hernández
Cruz

4. Datos del sinodal 1
Dra
Amanda
Montejano
Cantoral

5. Datos del sinodal 2
Dra
Mika
Olsen

6. Datos del sinodal 3
Mat
Ilan Abraham

Goldfeder
Ortiz

7. Datos del trabajo escrito
$(k+1)$-reyes en digráficas k-cuasi-transitivas
57 p
2013

Agradecimientos

Gracias mamá, por tu gran dedicación y apoyo incondicional. Todo lo que he logrado es debido a ti.

Quiero agradecer también a Penny y a todos los que formaron parte de mi primer gran paso por la Facultad de Ciencias y por la casa amarilla.

Índice general

Agradecimientos **V**

Prefacio **IX**

1. Definiciones generales **1**
1.1. Digráficas y subdigráficas 1
1.2. Recorridos y distancias 3

2. Desarrollo histórico **5**
2.1. Motivación y torneos 5
2.2. El principio de la dualidad: siervos 10
2.3. Resultados posteriores en torneos 11
2.4. Generalizaciones y justificación 13
2.5. 4-reyes en torneos multipartitos 15
2.6. Una única componente fuerte inicial 19
2.7. 3-reyes en digráficas cuasi-transitivas 20
2.8. Resultados previos en digráficas k-cuasi-transitivas 22

3. $(k+1)$-reyes en digráficas k-cuasi-transitivas **25**
3.1. Lemas previos 25
3.2. Sobre la existencia de $(k+1)$-reyes 30
3.3. Sobre la existencia de 4-, 3- y 2-reyes 33
3.4. Mínimo número de $(k+1)$-reyes 37

4. Conclusiones y logros **43**

Prefacio

Esta tesis comienza realmente en el capítulo 2 donde presento un amplio y preciso análisis sobre el desarrollo y motivación de los principales resultados existentes sobre reyes en digráficas. Además de servir de justificación y base para nuestros resultados, este desarrollo histórico cumple una función muy importante, muestra el tipo de preguntas «clásicas» del tema. A grandes rasgos, estas preguntas se separan en las siguientes vertientes:

- sobre existencia y localización de reyes y
- sobre cantidad mínima de reyes.

No pretendo explicar ahora a qué me refiero exactamente con esto último, lo menciono pues me gustaría que sea algo que tenga en mente cualquiera que lea este texto.

La parte más hermosa de esta tesis (que conicide con ser la parte principal) es el capítulo 3 en el cual se da respuesta a una conjetura de Hortensia Galeana Sánchez y César Hernández Cruz que se puede reinterpretar de la siguiente forma:

Una digráfica k-cuasi-transitiva tiene un (k+1)-rey si y sólo si tiene una única componente fuerte inicial.

En [17] se demostró que esto es cierto si k es un entero par. Por eso, si se quiere demostrar la veracidad de la conjetura bastaría con demostrarlo para enteros k impares. Los teoremas 54 y 55, unos de los principales resultados de esta tesis, muestran que la conjetura es cierta y también proporcionan un criterio sumamente sencillo para localizar al menos un $(k+1)$-rey. En ese mismo capítulo se generalizan varios teoremas de Bang-Jensen y Huang sobre 3-reyes en digráficas 2-cuasi-transitivas. Los resultados presentados en dicho capítulo tocan las dos vertientes mencionadas y muchos de ellos no tienen similar en digráficas 2-cuasi-transitivas (o en alguna otra familia de digráficas) ni habían sido conjeturados, por lo que son totalmente originales.

En mi opinión, los resultados más llamativos y sorprendentes no son los que dan solución a la conjetura sino los que se encuentran en las secciones 3.3 y 3.4.

El siguiente capítulo es un tedioso, necesario y muy breve compendio de definiciones básicas y términos que usaremos. Naturalemente, el lector que lo crea pertinente puede mantenerse al margen de dicho capítulo.

Capítulo 1

Definiciones generales

En este primer capítulo definiremos, sin entrar en detalles, todos aquellos conceptos que se deben conocer antes de leer este texto. Daremos por hecho que el lector conoce los conceptos y notación básica de la teoría de los conjuntos.

1.1. Digráficas y subdigráficas

Una **digráfica**, usualmente denotada por la letra D, es una pareja ordenada $(V(D), A(D)) = D$ donde $V(D)$ es un conjunto, que para nuestros fines será finito y no vacío, llamado el **conjunto de los vértices** de D, y $A(D)$ es un subconjunto de $(V(D) \times V(D)) \setminus \{(v, v) \mid v \in V(D)\}$ llamado el **conjunto de las flechas** de D. Así, todo elemento de $V(D)$ es un **vértice** y todo elemento de $A(D)$ una **flecha**. Una flecha (u, v) recibe en nombre de **flecha simétrica** si (v, u) también es una flecha. En la figura 1.1, (u, v) es una flecha simétrica (y por lo tanto también (v, u) lo es). A la cardinalidad del conjunto $V(D)$ se le llama el **orden** de D y a la cardinalidad de $A(D)$ se le conoce como el **tamaño** de D.

Si $(u, v) \in A(D)$, diremos que hay una flecha de u a v. También denotaremos a la flecha (u, v) como uv (esta segunda notación será la que usaremos mayormente para denotar a una flecha). Si $uv \in A(D)$ o $vu \in A(D)$ diremos que u y v son **adyacentes**. Usaremos $u \to v$ para denotar que $uv \in A(D)$ y $u \nrightarrow v$ para denotar que $uv \notin A(D)$. Si $a \in A(D)$ y $a = uv$ diremos que a incide tanto en u como en v y que a va de u a v.

Supongamos que $D = (V(D), A(D))$ y $H = (V(H), A(H))$ son digráficas

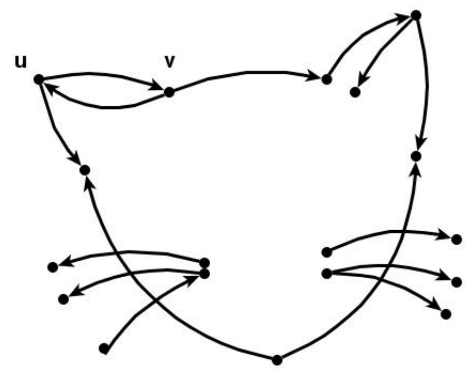

Figura 1.1: Ejemplo de digráfica.

tales que $V(H) \subseteq V(D)$ y $A(H) \subseteq A(V)$, en este caso decimos que H es una **subdigráfica** de D. Si además para cualquier par de vértices u y v en $V(H)$ se tiene que $uv \in A(H)$ si y sólo si $uv \in A(D)$ entonces la subdigráfica H es llamada **subdigráfica inducida**. Se puede pensar en una subdigráfica inducida como el resultado de «borrar» vértices de D y las respectivas flechas que inciden en ellos. Observando bien la definición, es claro que una subdigráfica inducida queda totalmente determinada por su conjunto de vértices, por eso si H es una subdigráfica inducida de D con $S = V(H)$ usamos la notación $D[S]$ para referirnos a la digráfica H, es decir, $D[S] = H$

Dado un vértice v, definimos la **exvecindad** de v como el conjunto $N^+(v)$ de todos los vértices $w \in V(D)$ tal que vw es una flecha de D. A la cardinalidad del conjunto $N^+(v)$ la llamamos **exgrado** de v y es denotada por $d^+(v)$. Análogamente $N^-(v)$, la **invecindad** de v, es el conjunto de todos los vértices $w \in V(D)$ tal que wv es una flecha de D, y su cardinalidad es llamada **ingrado** de v, denotada por $d^-(v)$. El **exgrado máximo** de D es el número $\Delta_D^+ = \text{máx}\,\{d^+(v) \mid v \in V(D)\}$ y el **exgrado mínimo** de D es el número $\delta_D^+ = \text{mín}\,\{d^+(v) \mid v \in V(D)\}$. Análogamente se definen el **ingrado máximo** y el **ingrado mínimo** de D denotados Δ_D^- y δ_D^-, respectivamente.

En la figura 1.2 la exvecindad del vértice w es $\{u\}$ y su invecindad es el conjunto vacío, por lo tanto su exgrado es 1 y su ingrado es 0. Claramente w es un vértice de ingrado mínimo pues el ingrado de un vértice no puede ser negativo. Observemos que $\Delta^+(D) = 8$ y que v es un vértice de exgrado máximo.

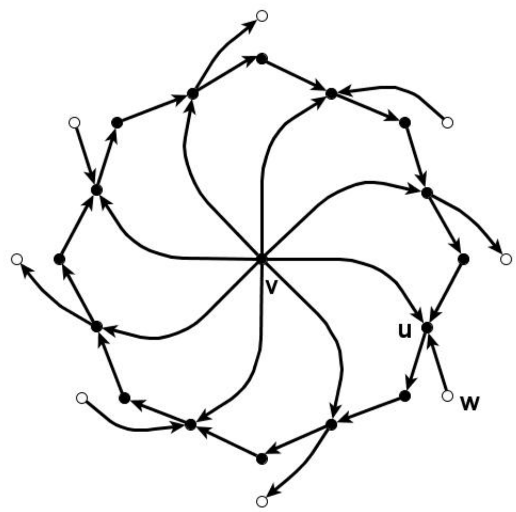

Figura 1.2: Los vértices blancos son ejemplo de vértices con invecindad o exvecindad vacía, según sea el caso.

Un **torneo** T es una digráfica tal que entre cualesquiera dos vértices en $V(T)$ hay exactamente una flecha. Los torneos son una de las clases de digráficas más estudiadas ya que tienen una gran cantidad de propiedades. Más de una vez he escuchado las palabras «Si tienes una conjetura lo primero que debes hacer es verificar si es cierta para torneos». Hay varias generalizaciones del concepto de torneo y en esta tesis hablaremos de algunas de ellas, las cuales serán definidas cuando sea necesario.

1.2. Recorridos y distancias

Un **camino dirigido** C en una digráfica D es una sucesión finita de vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ tal que $v_i \to v_{i+1}$ para todo entero i tal que $0 \leq i < n$. Observamos que (v) es un camino pues cumple trivialemente la definición. Para abreviar omitiremos la palabra *dirigido*. Si $v_0 = u$ y $v_n = v$ diremos que C es un ***uv*-camino** y que u y v son los **extremos** de C. Si existe un uv-camino diremos que u **alcanza** a v. Dados dos vértices u y v puede haber más de un uv-camino (la definición no lo impide) y un vértice puede aparecer más de una vez en dicho camino (incluso u y v). La **longitud** de C, denotada por $l(C)$, es definida como el número n. Si $C_1 = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$ y $C_2 = (u_0, u_1, \cdots, u_m)$ son dos caminos tales que $v_n = u_0$ definimos al camino $C_1 \cup C_2$ como el camino $C = (v_0, v_1, \cdots, v_n, u_1, \cdots, u_m)$. También definimos el camino $v_i C_1 v_j$ como la subsucesión $(u_i, u_{i+1} \cdots, u_j)$ del camino C_1. Si $v_i = v_0$ o si $v_j = v_n$ escribiremos únicamente $C_1 v_j$ o $v_i C_1$ respectivamente. Usaremos de forma combinada estás distintas notaciones de caminos, por ejemplo $(v_{i-1}, v_i) \cup v_i C_1 \cup C_2$.

Una **trayectoria dirigida** T es un camino en el que no se repiten vértices. Al igual que en la definición anterior omitiremos la palabra *dirigida* para abreviar. Si T es un uv-camino, que también es trayectoria, diremos que es una ***uv*-trayectoria**.

Un resultado básico de la teoría de digráficas establece que todo uv-camino en una digráfica contiene una uv-trayectoria. Por esta razón muchas veces se estudian caminos en digráficas con la única finalidad de encontrar trayectorias. Observamos que una trayectoria es un caso particular de camino, por lo que la notación y definiciones anteriores, dadas para caminos, también son válidas para trayectorias.

Una uv-trayectoria T tal que no existe una uv-trayectoria de longitud estrictamente menor a T es una uv-**trayectoria de longitud mínima**.

Decimos que $(v_0, v_1, \ldots, v_n) = C$ es un **ciclo dirigido** si es un camino tal que todos los vértices son distintos, excepto v_0 y v_n para los cuales se cumple que $v_0 = v_n$. Para abreviar omitiremos la palabra dirigido.

Si existe una uv-trayectoria, la **distancia** de u a v, $d(u, v)$, es definida como la mínima longitud de una uv-trayectoria. Si no existe alguna uv-trayectoria diremos que $d(u, v) = \infty$. Cabe aclarar que no estamos hablando de una distancia en el sentido matemático usual, pues no necesariamente se cumple que $d(u, v) = d(v, u)$.

Dada una digráfica D y dos vértices en ella, u y v, podemos definir la relación $\sim$ tal que $u \sim v$ si y sólo si existe una uv-trayectoria y una vu-trayectoria en D. Es conocido (y fácil de demostrar) que $\sim$ es una relación de equivalencia y por lo tanto induce una partición $\{C_1, \ldots C_s\}$ de $V(D)$. Cada subgráfica inducida por un elemento de tal partición recibe el nombre de **componente fuertemente conexa** (o componente fuerte para abreviar). Claramente en una componente fuerte cada par de vértices se alcanzan entre sí. Si la partición consta de un único elemento diremos que D es una **digráfica fuertemente conexa** (o fuerte). Se dice que C es una **componente fuerte inicial** (**final**) si para toda uv-trayectoria (vu-trayectoria) con $v \in V(C)$ se tiene que $u \in V(C)$.

Capítulo 2

Desarrollo histórico

En algunas digráficas existe un tipo muy especial de vértices que reciben el nombre de *reyes*. El estudio de estos vértices, su generalización y las digráficas en las cuales se encuentran es el tema central de esta tesis. Antes de meternos de lleno en las definiciones específicas del tema, lemas, teoremas, corolarios, proposiciones, generalizaciones y relaciones con otros temas conocidos hablaremos un poco acerca de aquellas inquietudes que motivaron el estudio de este hermoso tema.

2.1. Motivación y torneos

Es un hecho que en muchas sociedades de animales existen individuos que tienen un dominio sobre otros integrantes de su sociedad. En algunas de estas sociedades existe lo que se conoce como el macho o hembra alfa, un individuo que tiene un dominio sobre los demás miembros de la sociedad en la que se encuentra. Ejemplos de estos individuos se encuentran en sociedades de suricatos, chimpancés y abejas, entre otros. Sin embargo no todas las sociedades de animales presentan tal organización. Un claro ejemplo es lo observado por T. Schjelderup-Ebbe [25] en 1922. Él observó que en una gallinería[1] cada par de gallinas tiene bien definida una relación de dominancia, es decir, una domina a la otra pero rara vez existe una gallina que domina a todas las demás. Dicho dominio es reafirmado por un picotazo de la gallina dominante en la cabeza de la gallina dominada. Relaciones de dominancia similares fueron estudiadas, desde el punto de vista de la biología, por W. C. Allee [28, 29] y sus

[1] Nombre que recibe una agrupación de gallinas

estudiantes Collias [30] en 1943, Guhl [31] en 1944 (conjuntamente con Alle) y Potter [32] en 1949 usando en sus investigaciones, principalmente, gallinas. Otras relaciones de dominancia parecidas se dan en torneos de ajedrez, futbol y tenis, sólo por mencionar algunos.

En este tipo de sociedades animales en las que para cada par de individuos se tiene que uno domina al otro, pero no necesariamente hay uno que domine a todos los demás, es natural preguntarse si aún en tales circunstancias existe un individuo con mayor dominio. El sociólogo-matemático H. G. Landau se hizo esta misma pregunta en 1953 y en [14] estudió, desde el punto de vista de las matemáticas, la estructura de las relaciones de dominación de estas sociedades e intentó describir jerárquicamente dichas estructuras. Con la finalidad de hacer esta descripción usó un concepto de dominación distinto el cuál creyó adecuado para tales fines (sobre si lo era o no hablaremos un poco más adelante). Él debilitó el concepto «dominar». Si bien no siempre es posible encontrar a un individuo que domine a todos los demás ¿existirá alguno que domine a todos los demás ya sea directa o indirectamente?, dicho de otra forma, ¿existe un individuo i tal que si i no domina a un individuo j entonces hay al menos un individuo k tal que i domina a k y k domina a j? La respuesta a esta pregunta es sí y en [14] Landau proporcionó una sencilla demostración a este resultado, y no sólo demostró la existencia de dicho individuo, sino que fue capaz de dar un sencillo criterio para localizarlo.

En vez de continuar con este resultado tal cual lo presentó Landau, primero echaremos un vistazo al análisis y formalización que hizo S. V. Maurer sobre estos resultados. En [8], artículo publicado en 1980 bajo el título *The king chicken theorems*, Maurer no sólo presenta resultados nuevos y muy bien justificados en el tema sino que establece un modelo matemático para el estudio de dichas sociedades y hace una espléndida y profuda reflexión acerca del éxito de Landau en su intento de establecer a un individuo dominante.

En [8] Maurer propone una digráfica $D = (V, A)$ como modelo para el estudio de las relaciones de dominancia en una sociedad, donde V es el conjunto de individuos de la sociedad y uv es una flecha en A si y sólo si el individuo u domina al individuo v. Una vez establecido este modelo, las sociedades que Landau estudió se pueden modelar con un torneo T. Maurer también propone un término para el concepto estudiado por Landau en [14].

Definición 1. *(Maurer [8]) Un vértice en un torneo es un* ***rey*** *si la distancia desde ese vértice hacia cualquier otro vértice del torneo es a lo más* 2.

Ya que Landau tenía como finalidad encontrar al individuo con mayor dominio, a Maurer le pareció adecuado nombrarlo rey. A pesar de que Maurer estableció que el estudio de relaciones de dominancia en una sociedad puede ser modelado muy formalmente con una digráfica, y de que ya existía todo un lenguaje en digráficas que pudo haber usado para la redacción del artículo *The king chicken theorems*, él prefirió, en primer lugar, enfatizar que los estudios de estas sociedades, por parte de los biólogos, se había enfocado en sociedades de gallinas [28, 29, 30, 31, 32] y, en segundo lugar, usar el hecho de que Landau motiva sus estudios con un ejemplo de una sociedad de gallinas [15]. En vez de vértices y digráficas Maurer optó por poner todo, hasta las llamativas ilustraciones, en un contexto de gallinas y gallinerías, lo cual le da un marco muy entretenido y poco común a dicho artículo.

Una vez formalizados los conceptos podemos enunciar de forma sencilla y elegante el resultado que Landau demostró.

Teorema 2. *(Landau [14]) En todo torneo cada vértice de exgrado máximo es un rey.*

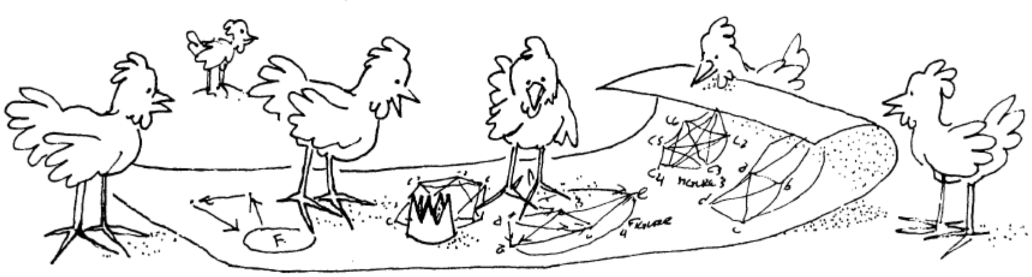

Figura 2.1: Ilustración extraída de *The king chicken theorems*, siempre existe un rey en un torneo.

Este resultado es generalmente atribuido a Landau y sin embargo él mismo menciona en [14] que, en un artículo no publicado, F. E. Hohn declaró un teorema que afirma que en un torneo existe un rey. Landau también menciona que la existencia de un rey en los torneos es corolario de un teorema de H. E. Vaughan que aparece en [33]. El teorema 2 es justamente atribuido a Landau pues no se limita a indicar la existencia de un rey, sino que es capaz de dar un sencillo criterio para localizar uno, además de proporcionar una demostración corta.

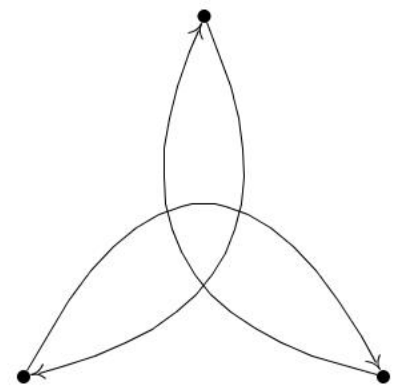

Figura 2.2: C_3, un torneo en el cual todos los vértices son reyes.

El teorema 2 parece indicar que Landau tuvo éxito y fue capaz de encontrar al individuo con mayor dominio pero ¿qué pasa si hay más de un vértice de exgrado máximo? Para Maurer, el éxito de Landau debería radicar en que el rey (individuo con mayor dominio) fuera único o al menos algo raro. Un sencillo ejemplo de que esto puede no ocurrir es la digráfica de la figura 3.2 en donde todos los vértices son reyes pues tienen el mismo exgrado. De hecho, en *The king chicken theorems* todos los resultados presentados por Maurer están orientados a mostrar que un rey es algo «común» en un torneo. Estos resultados son los siguentes:

Teorema 3. *(Maurer [8]) En todo torneo, todo vértice con invecinos tiene un invecino que es un rey.*

Teorema 4. *(Maurer [8]) Un torneo tiene exactamente un rey si y sólo si tiene un vértice de ingrado cero.*

Teorema 5. *(Maurer [8]) Para todo entero positivo n distinto de 2 y de 4 existe un torneo T con n vértices tal que todo vértice es un rey.*

Teorema 6. *(Maurer [8]) Para cualquier par de enteros positivos n y k, $n \geq k$, existe un torneo con exactamente n vértices y k reyes con las siguientes excepciones: $k = 2$ con n arbitraria y $n = k = 4$.*

Teorema 7. *(Maurer [8]) La probabilidad de que un torneo aleatorio con n vértices tenga exactamente un rey es $n(\frac{1}{2})^{n-1}$.*

Teorema 8. *(Maurer [8]) La probabilidad de que en un torneo arbitrario con n vértices todo vértice sea un rey tiende a 1 cuando $n \to \infty$.*

Maurer llama torneos **completos en reyes** a los torneos tales que todos sus vértices son reyes. Para la demostración del teorema 5, Maurer usa un argumento inductivo, haciendo crecer un torneo de n vértices completo en reyes a un torneo con $n+2$ vértices completo en reyes. Esta idea fue suficiente para la demostración pero, como él mismo menciona, Maurer intentaba hacer una prueba inductiva haciendo crecer un torneo de n vértices completo en reyes a un torneo con $n+1$ vértices completo en reyes. Esto fue logrado más adelante por K. B. Reid en [26].

Los teoremas 5 y 6 muestran que, salvo pocos casos, es posible encontrar torneos con n vértices con la proporción de reyes que queramos. Los teoremas 7 y 8 muestran que la proporción de los torneos con n vértices, con exactamente un rey, y los torneos con n vértices completos en reyes baja y sube respectivamente cuando n tiende a infinito.

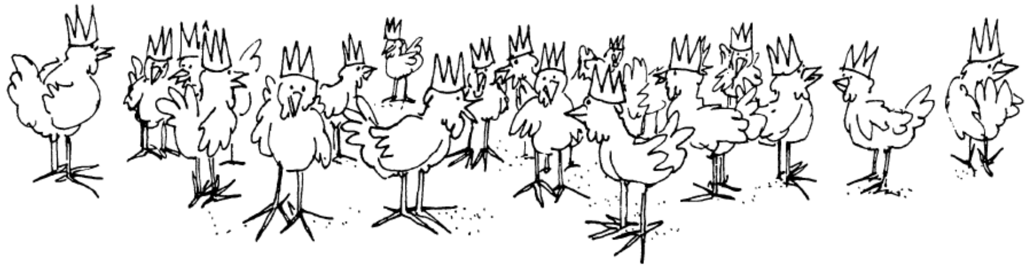

Figura 2.3: Ilustración extraída de *The king chicken theorems*, los reyes son comunes.

Cabe mencionar que en el teorema 6 la aseveración de que $k = 2$ con n arbitraria ya había sido cuestionada y respondida con anterioridad, al igual que el teorema 4 (ambos de forma indirecta). Esto se debe a que D. L. Silverman propuso en [21] el problema de demostrar que en un torneo sin vértices de ingrado cero hay al menos tres reyes. Este problema fue planteado antes de la aparición del artículo *The king chicken theorems*, por lo que se usó otra terminología en su redacción y fue resuelto por J. Moon en [22] dando lugar al siguiente teorema.

Teorema 9. *(Moon [22] [21]) Todo torneo sin vértices de ingrado cero tiene al menos tres reyes.*

Es claro que el teorema anterior implica que no hay un torneo con exactamente dos reyes. Moon también menciona en [22] que el teorema 8 ya había sido demostrado por Leo Moser en un artículo no publicado.

En los teoremas 5 y 6 se menciona que no hay un torneo con 4 vértices completo en reyes. Este hecho aparece como parte del problema 5 en la página 317 de [27]. El teorema 8, tal y como lo menciona Maurer en [8], es esencialmente una reinterpretación de parte de un resultado de Moon y Moser, el cual aparece en [24].

2.2. El principio de la dualidad: siervos

Dada una digráfica D es posible construir una digráfica $\overleftarrow{D}$ obtenida a partir de invertir cada flecha de D. Esta digráfica es conocida como la **inversa** de D.

Es conocido que cualquier afirmación acerca de una digráfica tiene asociada una afirmación dual, la cual se obtiene de aplicar la afirmación a la inversa de la digráfica y reinterpretando en términos de la gráfica original. Esto se conoce como el **principio de dualidad**.

Por el principio de dualidad, la definición de rey tiene asociada un concepto dual, el cual fue definido por Maurer en [8]:

Definición 10. *Un vértice v en un torneo es un **siervo** si la distancia de los demás vértices del torneo a v es a lo más 2.*

Es claro que todo teorema acerca de reyes en torneos tiene una interpretación usando siervos. Por ejemplo, usando el principio de dualidad en el teorema 2 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 11. *En todo torneo cada vértice de ingrado máximo es un siervo.*

Así mismo los teoremas 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, junto con la mayor parte de los teoremas subsecuentes, tienen su interpretación respectiva usando el principio de dualidad. Ya que por lo general es muy sencillo hacer tal interpretación, obviaremos estos resultados duales con siervos y nos quedaremos con la versión de reyes que es mucho más popular.

En [8] Maurer no sólo habla de la dualidad de los términos rey y siervo sino que se pregunta por la relación entre estos dos conceptos pero, como dije antes, siempre orientado a mostrar que la propiedad de ser un rey es algo «común». Los resultados que muestra son los siguientes:

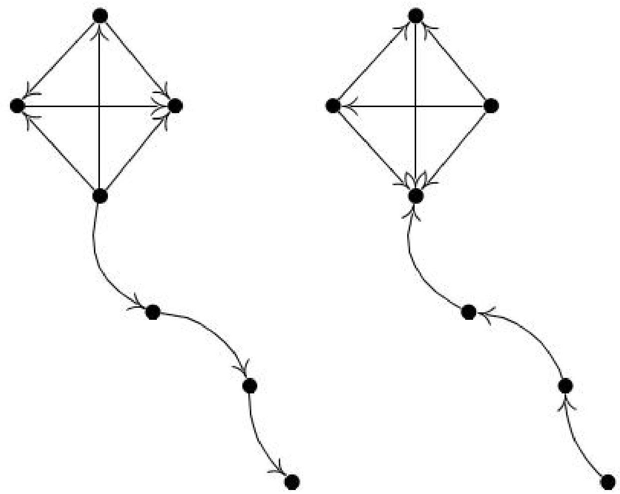

Figura 2.4: Ejemplo de una digráfica y su dual. No es necesario especificar cuál es la digráfica inversa de cuál debido a que si D es inversa de D' entonces D' es inversa de D.

Teorema 12. *(Maurer [8]) La probabilidad de que en un torneo aleatorio con n vértices todo vértice sea a la vez rey y siervo tiende a 1 cuando $n \to \infty$.*

Teorema 13. *(Maurer [8]) En un torneo todo vértice es un rey si y sólo si todo vértice es un siervo.*

Con los teoremas 12 y 13 se muestra que el comportamiento de los vértices, en cuanto a la propiedad de ser rey o ser siervo, se va haciendo cada vez más homogéneo entre más vértices tiene el torneo. En particular, el teorema 12 muestra que pensar en un rey como un individuo con mayor dominio no tiene sentido pues, si el torneo en el que se encuentra tiene suficientes vértices, la probabilidad de que sea tanto dominante como dominado (rey y siervo a la vez) es muy alta.

2.3. Resultados posteriores en torneos

The king chicken theorems es un artículo maravilloso ya que no sólo se presentan en él resultados originales y bien justificados sino que cuestiona la motivación del estudio de reyes en digráficas y al final propone problemas que, si bien Maurer no cree que tengan aplicaciones inmediatas, los considera interesantes en las matemáticas puras. Algunos de estos problemas son los siguientes:

Problema 14. *(Maurer [8]) ¿Para que 4-adas (n, k, s, b) existe un torneo con exactamente n vértices, k reyes y s siervos de los cuales exactamente b reyes son también siervos?*

Reid llama (n, k, s, b)-torneos a los torneos que tienen estas propiedades en [26].

Problema 15. *(Maurer [8]) ¿Qué torneos T están contenidos en un torneo cuyo conjunto de reyes es exactamente el conjunto de vértices de T?*

Problema 16. *(Maurer [8]) Encontrar una demostración del teorema 5 que use un argumento inductivo de n a n+1.*

Estas preguntas fueron retomadas por Reid en 1982 (dos años después) y respondidas en el artículo *Every vertex a king* [26] dando lugar a los siguientes teoremas:

Teorema 17. *(Reid [26]) Sean n, k, s y b números enteros y supongamos que* $n \geq k \geq s \geq b$ *y* $n \geq 0$*. Existe un* (n, k, s, b)*-torneo si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:*

- $n \geq k + s - b$,
- $s \neq 2$ *y* $k \neq 2$,
- $n = k = b = s \neq 4$ *o* $n > k$ *y* $s > b$ *y*
- (n, k, s, b) *es distinto de* $(n, 4, 3, 2)$, $(5, 4, 1, 0)$ *y* $(7, 6, 3, 2)$.

Teorema 18. *(Reid [26]) Un torneo T no trivial está contenido en otro torneo W cuyo conjunto de reyes son precisamente los vértices de T si y sólo si T no tiene vértices de ingrado cero.*

Teorema 19. *(Reid [26]) Si existe un torneo con n vértices completo en reyes entonces existe un torneo con* $n + 1$ *vértices completo en reyes, con* $n \geq 4$.

Además de estos resultados, Reid presenta una serie de teoremas relacionados con el teorema 18. Él observó que en su demostración del teorema 18 también se proporciona una cota superior del número de vértices en W, pero esta cota no es justa. Aunque no pudo mejorar esta cota superior, Reid proporciona una cota inferior. Una pequeña mejora en la cota superior fue publicada en 1997 en [34]. Reid también consideró el siguiente problema: dado un torneo T ¿cuál es el mínimo orden de un torneo completo en reyes que contiene a T? Este problema claramente es una variación del problema 15.

Los problemas propuestos por Maurer fueron rápidamente resueltos, lo que podría hacernos pensar que fueron considerados como interesantes, sin embargo, no tuvieron gran impacto en las generalizaciones posteriores al estudio de reyes en torneos.

2.4. Generalizaciones y justificación

Otra más de las grandes aportaciones que hizo Maurer en [8] es la siguiente observación: un rey es un vértice en un torneo cuya distancia a los demás vértices es a lo más dos ¿qué pasa si reemplazamos el dos por tres o por un número natural cualquiera? Esta pregunta motivó la siguiente definición:

Definición 20. *Un vértice en una digráfica es un k-**rey** si la distancia desde ese vértice hacia cualquier otro vértices de la digráfica es a lo más k.*

Al igual que en el caso de los reyes, el principio de dualidad nos proporciona el concepto dual de k-siervo. Bajo esta definición lo que conocemos por rey puede considerarse también un 2-rey. Aunque esta definición es generalmente atribuida a Maurer en realidad hay una importante y sutil diferencia con la que él propone. Maurer no es capaz de desligar este concepto de los torneos y proponer su estudio en digráficas en general.

Tal y como mostró Maurer, el concepto de rey no es de gran ayuda para el estudio de individuos dominantes en una sociedad (y el concepto de k-rey no mejora la situación). Afortunadamente este no es el único interés detrás de su estudio. La existencia de un k-rey en una digráfica D nos da información sobre otros parámetros de D, el **radio** y el **diámetro**. Para definir fácilmente el radio y el diámetro de una digráfica necesitamos primero el siguiete concepto:

Definición 21. *Dada una digráfica D la **excentricidad** de un vértice $v \in V(D)$, denotada como exc(v), se define como $\max_{u \in V(D)}\{d(v,u)\}$. En caso de no existir ese máximo, $exc(v)$ se define como ∞.*

Intuitivamente, la excentricidad de un vértice v nos dice que tan alejados estan los demás vértices de v. Ahora sí:

Definición 22. *El* ***radio*** *de una digráfica D,* $rad(D)$, *se define como* $\text{mín}_{v \in V(D)}\{exc(v)\}$ *y el* ***diámetro****,* $diam(D)$, *como* $\text{máx}_{v \in V(D)}\{exc(v)\}$.

De la definición anterior es clara la relación entre el radio y los k-reyes. Si D tiene un k-rey v entonces $rad(D) \leq k$ pues, al ser v un k-rey, se tiene que $exc(v) \leq k$. Más aún, si el radio de una digráfica es k entonces existe un vértice $v \in V(D)$ tal que $exc(v) = k$ por lo que v es un k-rey.

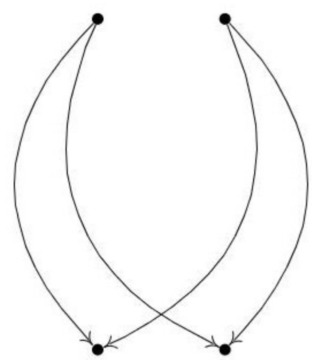

Figura 2.5: Digráfica sin k-rey ni k-siervo para todo número natural k.

La relación entre diámetro y k-reyes es la siguiente: si $diam(D) = k$ entonces todo vértice de D es un k-rey y si cada vértice de D es un k-rey entonces $diam(D) \leq k$.

Además de lo anterior los k-reyes resultan de gran importancia en planeación y optimización. Podemos pensar a un k-rey como un vértice del cuál se puede llegar con relativa facilidad a cualquiera de los demás vértices. Por ejemplo, en una digráfica que modele las rutas aéreas mundiales, donde los vértices son los aeropuertos y habrá una arista del vértice A al B si y sólo si hay vuelos directos desde A hacia B. Si v es un k-rey en esta digráfica entonces dicho vértice representa una terminal aérea que tiene un papel central y de gran relevancia estratégica, pues desde v es relativamente fácil llegar a cualquier otra terminal, y si tuvimos el cuidado de elegir a k como el menor entero posible, entonces el papel de v será aún más relevante.

Como lo muestra la figura 2.5, no toda digráfica tiene un k-rey (o un k-siervo) para alguna k, entonces ¿para qué familias de digráficas se puede asegurar la existencia de un k-rey, con k fijo, para cualquier elemento de la familia? Como lo muestra el teorema 2, para la familia de los torneos esto se cumple para $k = 2$. La búsqueda de familias relevantes de digráficas con esta propiedad es parte importante de la motivación que continuó alimentando este tema después de que se profundizó en el estudio de los torneos.

2.5. 4-reyes en torneos multipartitos

Una familia relevante y muy estudiada de digráficas surge de la siguiente definición:

Definición 23. *Un* ***torneo multipartito*** *es una digráfica T tal que existe una partición $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ del conjunto $V(D)$ tal que cualesquiera dos vértices $u \in V_i$ y $v \in V_j$ ocurre lo siguiente:*

- *si $i = j$ entonces u y v no son adyacentes y*
- *si $i \neq j$ entonces hay una y sólo una fecha entre u y v.*

Un torneo multipartito tal que su partición es de tamaño n también es llamado ***torneo n-partito****, si $n = 2$,* ***torneo bipartito*** *y si $n = 3$,* ***torneo tripartito****. Si un torneo bipartito T tiene bipartición $\{A, B\}$ lo denotamos por $T(A, B)$*

Los torneos multipartitos son una de las generalizaciones de torneos[2] más conocidas, por lo que el estudio de los k-reyes en estas digráficas no es de extrañar.

En 1982, G. Gutin publicó en el artículo [2] los primeros resultados sobre k-reyes en torneos multipartitos. No todos los torneos multipartitos tienen un k-rey para alguna k, un ejemplo de ésto es la digráfica mostrada en la figura 2.5. Si observamos bien, esta digráfica tiene dos vértices de ingrado cero y esencialmente ese es el «problema» ya que ningún vértice los alcanza. Gutin se percató de ésto y demostró que este tipo de torneos multipartitos son los únicos con tal dificultad y que en los demás torneos multipartitos se puede dar un teorema parecido al teorema 2.

Teorema 24. *(Gutin [2], Petrovic y Thomassen [5]) Si T es un torneo multipartito con a lo más un vértice de ingrado cero entonces T tiene un 4-rey.*

[2] Es claro que es una generalización, si cada parte tiene exactamente un vértice entonces el torneo multipartito es tambień un torneo.

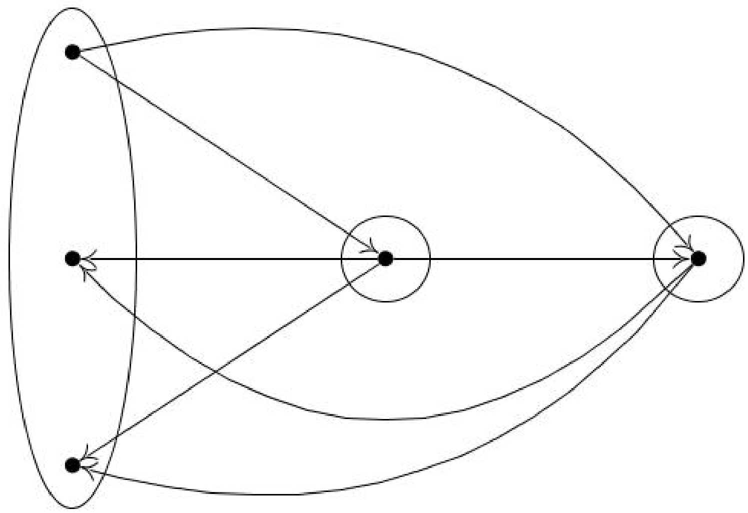

Figura 2.6: Ejemplo de torneo multipartito. Los vértices fueron agrupados para hacer notar la partición.

Este resultado fue demostrado independientemente en 1991 (11 años después), por V. Petrovic y C. Thomassen en [5]. Aunque de cierta forma el teorema 24 es un teorema análogo al teorema 2 hay una gran diferencia entre ambos. El teorema 2 no sólo afirma la existencia de un 2-rey sino que nos proporciona un sencillo criterio para localizar uno (todo vértice de exgrado máximo es un 2-rey), en cambio, el teorema 24 sólo menciona la existencia de un 4-rey y nada más. Gutin menciona que su demostración proporciona un algoritmo lineal respecto al número de flechas (o cuadrático respecto al número de vértices dicho de otra forma). Por otra parte, la demostración de Petrovic y Thomassen es más directa y logran dar un mejor criterio que el de Gutin para la localización de un 4-rey pero aún así no logran dar un criterio tan sencillo como el de los torneos. Como veremos repetidamente, al igual que en el caso de los torneos, los vértices de exgrado máximo juegan un papel fundamental en la gran mayoría de resultados sobre k-reyes, por lo que los torneos multipartitos son un caso atípico.

Gutin también mostró una familia infinita de torneos multipartitos sin vértices de ingrado cero y sin 3-reyes, por lo que que no es posible mejorar el teorema 24 en cuanto a la existencia de k-reyes. La caracterización de los torneos multipartitos con al menos un 3-rey es un problema abierto

Aunque no es válido para torneos multipartitos en general, Goddard, Kubicki, Oellermann y Tian mostraron en [9], artículo publicado en 1991, que para torneos bipartitos sí es posible dar un teorema análogo al teorema 2.

Teorema 25. *(Goddard et al. [9]) Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito sin vértices de ingrado cero. Si $u \in A$ es un vértice de exgrado máximo con respecto a los demás vértices de A entonces u es un 4-rey. Análogamente si $u \in B$.*

Los k-reyes en torneos bipartitos fueron ampliamente estudiados por V. Petrovic en [6] y por K. M. Koh y B. P. Tan en [11] y [12], artículos publicados en 1995 y 1996, respectivamente. De la misma forma a lo que ocurre en los torneos, ellos se preguntaron si hay más de un 4-rey en un torneo bipartito sin vértices de ingrado cero. Ambos demostraron, casi al mismo tiempo y de forma independiente, que en estas digráficas hay al menos cuatro 4-reyes, sin embargo, el resultado de Petrovic es un poco más fuerte.

Teorema 26. *(Petrovic [16]) Si $T(A, B)$ es un torneo bipartito sin vértices de ingrado cero entonces cada una de las partes A y B contiene al menos dos 4-reyes de T.*

Otro resultado que es presentado tanto en [6] como en [11] es una muy sencilla caracterización de los 3-reyes en torneos bipartitos. Siendo muy estrictos, cada artículo tiene su propia caracterización, aunque la única diferencia que presentan es la escritura del mismo teorema.

Salvo este par de resultados, el estudio de Petrovic toma un camino muy distinto al hecho por Koh y Tan. Petrovic se enfoca en resultados análogos al teorema 6 y Koh y Tan en resultados análogos al teorema 9.

Dado un torneo bipartito $T(A, B)$ Petrovic lo llama del tipo $(m, p; n, q)_k$ si $|A| = m$, $|B| = n$, A contiene exactamente p k-reyes y B contiene exactamente q k-reyes. Para $k = 3$ el siguiente resultado de Soltes [4] nos dice cuándo existe un torneo bipartito completo en 3-reyes.

Teorema 27. *(Soltes [4]) Existe un torneo bipartito del tipo $(m, m; n, n)_3$, $m \geq n \geq 2$, si y sólo si $m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

En la demostración de este resultado Soltes echó mano de seis lemas y matrices booleanas. Es posible demostrar fácilmente este resultado usando por una parte el teorema de Sperner[3] y por la otra una familia de ejemplos, los cuales no son difíciles de construir. Dejaremos al lector interesado la realización de dicha demostración ya que esto se encuentra fuera de nuestros objetivos. Este resultado es análogo al teorema 5 y responde a la pregunta de cuándo es posible orientar una gráfica bipartita completa de manera que obtengamos una digráfica con diámetro tres. Petrovic demuestra en [6] que en un torneo bipartito a lo más existe un 2-rey por lo que no es posible sustituir el 3 del resultado de Soltes por un 2, además de que hay ejemplos donde se dan cada una de las igualdades, es decir, no es posible mejorar dicho resultado.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior Petrovic propone el siguente resultado:

Teorema 28. *(Petrovic [6]) Si m, n, p y q son enteros tales que $m \geq p$, $n \geq q$ y $2 \leq q \leq p \leq \binom{q}{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}$ entonces existe un torneo bipartito del tipo $(m, p; n, q)_3$.*

Petrovic también estudia los torneos bipartitos del tipo $(m, p; n, q)_4$.

Teorema 29. *(Petrovic [6]) Dados enteros m, n, p y q tales que $m \geq n > 0$, $m \geq p \geq 0$ y $n \geq q \geq 0$, existe un torneo bipartito del tipo $(m, p; n, q)_4$ excepto para los siguientes casos:*

- $(m, 1; n, q)_4$, *con* $n \geq q \geq 1$,
- $(m, p; n, 1)_4$, *con* $m \geq p \geq 1$ *y*
- $(1, 0; 1, 0)_4$.

Al igual que el teorema 6, este último resultado afirma que, salvo unos casos, es posible encontrar torneos biparitos con la distribución de 4-reyes que queramos.

Resultados análogos para torneos tripartitos y 3-reyes fueron estudiados por Petrovic y Treml en [7].

Por otra parte Koh y Tan estudiaron el mínimo número de 4-reyes en torneos n-partitos. Para torneos bipartitos ya mencionamos que este mínimo es cuatro, sin embargo no es así para torneos n-partitos con $n > 2$.

[3] El tamaño máximo de una anticadena de subconjuntos de un conjunto con cardinalidad n es $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

Teorema 30. *(Koh y Tan [12]) Todo torneo n-partito sin vértices de ingrado cero y $n \geq 3$ tiene al menos tres 4-reyes.*

Sumado a esto, caracterizaron las digráficas bipartitas con exactamente tres 4-reyes y las digráficas n-partitas, $n \geq 3$, con exactamente tres 4-reyes y encontraron que en los casos en que había exactamente tres 4-reyes en realidad se trataban de 3-reyes. Por lo anterior Koh y Tan comenzaron a estudiar torneos n-partitos sin vértices de ingrado cero y sin 3-reyes.

Teorema 31. *(Koh y Tan [12]) Si $T(A, B)$ es un torneo bipartito sin vértices de ingrado cero y sin 3-reyes entonces cada una de las partes A y B contiene al menos cuatro 4-reyes de T.*

Como corolario inmediato se tiene que el mínimo número de 4-reyes en estas digráficas es ocho.

Teorema 32. *(Koh y Tan [10]) Si T es un torneo n-partito, $n \geq 3$, sin vértices de ingrado cero y sin 3-reyes entonces hay al menos ocho 4-reyes en T.*

En [12] Koh y Tan presentan una caracterización de los torneos bipartitos que cumplen la igualdad en el teorema 31 y en [10] hacen lo análogo para el teorema 32.

2.6. Una única componente fuerte inicial

Hasta el momento hemos hablado sobre el estudio de reyes en dos familias de digráficas, los torneos y los torneos multipartitos con a lo más un vértice de ingrado cero. Ambas familias cumplen una propiedad que hasta el momento ha sido aparentemente irrelevante, pero que debe de ser subrayada si es que pretendemos analizar la existencia de reyes en otras familias.

El siguiente resultado, que pertenece al «folklore» matemático, muestra claramente la propiedad de la que hablamos y su importancia.

Teorema 33. *Una digráfica tiene un k-rey para algún natural k si y sólo si tiene una única componente fuerte inicial.*[4]

[4] El principio de dualidad nos permite sustituir las palabras *rey* e *inicial* por *siervo* y *final* respectivamente.

Es fácil percatarse de que los torneos cumplen con tener una única componente fuerte inicial y de que un torneo multipartito tiene una única componente fuerte inicial si y sólo si tiene a lo más un vértice de ingrado cero. He ahí la necesidad de una hipótesis adicional para poder hablar de reyes en torneos multipartitos.

2.7. 3-reyes en digráficas cuasi-transitivas

Tal y como el título de esta sección indica, es momento de hablar sobre resultados de k-reyes en otra familia de digráficas. Esta familia es de particular importancia en este texto, ya que los resultados que presentamos en esta sección son, en cierta forma, antecesores directos de nuestros resultados principales.

Definición 34. *Decimos que una digráfica es **cuasi-transitiva** si siempre que $a \to b$ y $b \to c$, para vértices distintos a, b y c, se tiene que $a \to c$ o $c \to a$.*

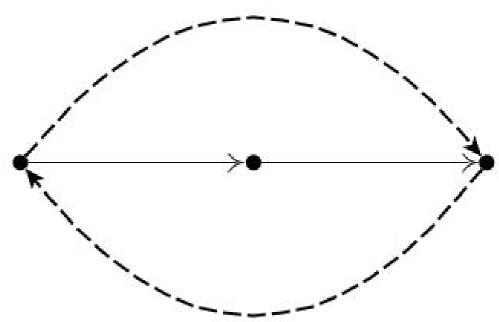

Figura 2.7: La definición de digráfica transitiva exige la existencia de al menos una de las flechas punteadas dado que las otras flechas se encuentran en la digráfica.

Bajo esta definición es claro que los torneos son un caso particular de digráficas cuasi-transitivas pues en un torneo cada pareja de vértices es adyacente, sin importar si son extremos de una trayectoria de longitud dos entre ellos o si no lo son.

El término *cuasi* parece indicar que existe otro concepto detrás y de hecho es así.

Definición 35. *Una digráfica es* ***transitiva*** *si no tiene ciclos y siempre que* $a \to b$ *y* $b \to c$*, para vértices distintos* a, b *y* c*, se tiene que* $a \to c$*.*

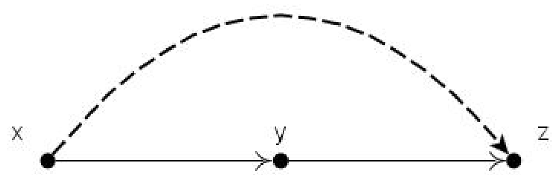

Figura 2.8: La definición de digráfica transitiva exige la existencia de la flecha punteada dado que las otras flechas se encuentran en la digráfica.

El termino transitiva alude a la transitividad usual en matemáticas.[5] Claramente toda digráfica transitiva también es una digráfica cuasi-transitiva pero no al revés.

J. Bang-Jensen y J. Huang presentaron en [20] uno de los principales resultados sobre digráficas cuasi-transitivas. Ellos caracterizaron, de forma recursiva, a las digráficas cuasi-transitivas. No presentamos dicho resultado pues no lo usaremos en este texto y comprenderlo requiere de términos que no hemos definido aún.

Con dicha caracterización como herramienta principal, Bang-Jensen y Huang estudiaron, en su artículo *Kings in quasi-transitive digraphs* [19], la existencia de 2- y 3-reyes en digráficas cuasi-transitivas. Sus principales resultados son los siguientes:

Teorema 36. *(Bang-Jensen y Huang [19]) Sea* D *una digráfica cuasi-transitiva,* D *tiene un* 3*-rey si y sólo si tiene una única componente fuerte inicial. Si* D *tiene un* 3*-rey entonces todo vértice de exgrado máximo es un* 3*-rey.*

Teorema 37. *(Bang-Jensen y Huang [19]) Sea* D *una digráfica cuasi-transitiva con un* 3*-rey. Si* D *no tiene vértices de ingrado cero entonces tiene*

[5] Una relación es transitiva si siempre que a está relacionado con b y b está relacionado con c se tiene que a está relacionado con c.

al menos dos 3*-reyes. Si la única componente fuerte inicial de* D *tiene al menos tres vértices entonces hay al menos tres* 3*-reyes.*

Comienza a llamar la atención el papel que juegan los vértices de exgrado máximo. Al igual que en los torneos y los torneos bipartitos, en las digráficas cuasi-transitivas el exgrado de un vértice es un criterio suficiente para saber si es un k-rey, con k acorde a los teoremas ya vistos.

El teorema 37 nos dice que, a menos que la componente fuerte inicial sea muy pequeña, en una digráfica cuasi-transitiva con un 3-rey hay al menos tres 3-reyes. Como parte de los resultados nuevos proporcionados en esta tesis daremos un resultado análogo para digráficas k-cuasi-transitivas, las cuales trataremos a continuación.

2.8. Resultados previos en digráficas k-cuasi-transitivas

Es momento de entrar en materia. Las digráficas que le dan el nombre a esta sección y a la tesis son, obviamente, nuestro tema principal.

Definición 38. *Sea* k *un número entero mayor o igual que* 2*. Una digráfica* D *es* ***k-cuasi-transitiva*** *si para cualquiera* uv*-trayectoria de longitud* k *en* D *se cumple que* $u \to v$ *o* $v \to u$*.*

Esta es una generalización del concepto de cuasi-transitividad pues, bajo esta definición las digráficas cuasi-transitivas son las mismas que las 2-cuasi-transitivas. No es difíl percatarse de que cualquier torneos es una digráfica k-cuasi-transitiva para cualquier entero $k \geq 2$. El concepto de digráfica k-cuasi-transitiva fue recientemente introducido y estudiado por Hortensia Galeana Sánchez y César Hernández Cruz en [17]. Aún cuando su estudio no estuvo enfocado en k-reyes ellos se percataron, como corolario de su investigación, del siguiente resultado publicado en dicho artículo:

Teorema 39. *(Galeana Sánchez y Hernández Cruz [17]) Si* D *es una digráfica* k*-cuasi-transitiva con* $k \geq 2$ *un entero positivo par, entonces* D *tiene una única componente incial si y sólo si tiene un* $(k+1)$*-rey.*

Este resultado es una generalización parcial del teorema 36 de la sección anterior pues, para $k = 2$, también nos confirma la existencia de un 3-rey

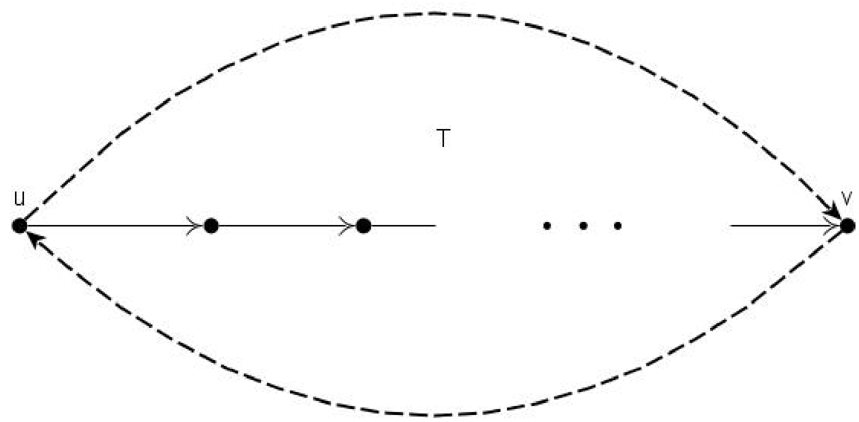

Figura 2.9: La definición de digráfica k-cuasi-transitiva exige la existencia de alguna de las flechas punteadas siempre que T sea una trayectoria de longitud k.

en las digráficas 2-cuasi-transitivas con una única componente inicial, pero no nos proporciona un criterio para encontrarlo. El resultado análogo para k impar fue conjeturado por Hortensia Galeana Sánchez y César Hernández Cruz en ese mismo artículo.

Conjetura 40. *(Galeana Sánchez y Hernández Cruz [17]) Si D es una digráfica k-cuasi-transitiva con $k \geq 3$ un entero positivo impar, entonces D tiene una única componente incial si y sólo si tiene un $(k+1)$-rey.*

Entre otras cosas, en este texto se proporcionará una solución afirmativa a dicha conjetura como corolario de un resultado más fuerte. Tal resultado es una generalización «completa» del teorema 36 y presentaremos también su análogo para k un entero positivo par.

Capítulo 3

$(k+1)$-reyes en digráficas k-cuasi-transitivas

Ya que las técnicas usadas por J. Bang-Jensen y J. Huang en [19] para el estudio de reyes en digráficas cuasi-transitivas dependen fuertemente de la caracterización de estas digráficas, ninguna pudo usarse en digráficas k-cuasi-transitivas con $k > 2$ para el estudio de reyes, pues aún no hay una caracterización similar para estas clases de digráficas.

En este capítulo profundizaremos en el análisis de la existencia de $(k+1)$-reyes en digráficas k-cuasi-transitivas con una única componente inicial y estudiaremos criterios para localizarlos, tomando por separado el caso de k par y el de k impar. Una vez que confirmemos la existencia de este tipo de vértices analizaremos profundamente las siguientes dos preguntas: ¿hay más de un $(k+1)$-rey? ¿bajo qué criterios hay l-reyes con $l \leq k$?

3.1. Lemas previos

Esta sección está destinada a la presentación de todos aquellos resultados, nuevos y conocidos, que serán usados como herramientas en las demostraciones de los resultados principales.

Los siguientes dos lemas son resultados conocidos y nos muestran una propiedad de las digráficas k-cuasi-transitivas que es fundamental para nuestro análisis. En resumen, la propiedad es la siguiente: en una digráfica k-cuasi-transitiva, si la distancia de un vértice u a un vértice v es finita y «grande» entonces la distancia de v a u es «pequeña».

Lema 41. *(Galeana Sánchez y Hernández Cruz [17]) Sean $k \geq 2$ un entero par, D una digráfica k-cuasi-transitiva y u,$v \in V(D)$, entonces:*

- *Si $d(u,v) = k$ entonces $d(v,u) = 1$.*
- *Si $d(u,v) = k+1$ entonces $d(v,u) \leq k+1$.*
- *Si $d(u,v) = n \geq k+2$ entonces $d(v,u) = 1$.*

Lema 42. *(Galeana Sánchez y Hernández Cruz [17]) Sean $k \geq 3$ un entero impar, D una digráfica k-cuasi-transitiva y u,$v \in V(D)$, entonces:*

- *Si $d(u,v) = k$ entonces $d(v,u) = 1$.*
- *Si $d(u,v) = k+1$ entonces $d(v,u) \leq k+1$.*
- *Si $d(u,v) = n \geq k+2$ con n impar entonces $d(v,u) = 1$.*
- *Si $d(u,v) = n \geq k+3$ con n par entonces $d(v,u) \leq 2$.*

Los siguentes dos lemas son meras observaciones, fáciles de probar, las cuales serán muy útiles.

Lema 43. *Sea $n \geq 2$ un entero y $T = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)$ una u_0u_n-trayectoria de longitud mínima. Si $0 \leq i < j-1 \leq n-1$ entonces $u_i \nrightarrow u_j$.*

Demostración: Esto resulta claro pues, en caso contrario $(u_0, u_1, \ldots, u_i, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{k+2})$ sería una u_0u_{k+2}-trayectoria de longitud menor que la longitud de T, lo cual no es posible ya que T es una u_0u_{k+2}-trayectoria de longitud mínima. □

Lema 44. *Si $k \geq 2$, D es una digráfica k-cuasi-transitiva y $A \subset V(D)$, entonces $H = D[A]$ es una digráfica k-cuasi-transitiva. En particular si C es una componente fuerte de D entonces C misma es una digráfica k-cuasi-transitiva.*

Demostración: Si $T \subset H$ es una uv-trayectoria de longitud k entonces, ya que $H \subset D$ y D es k-cuasi-transitiva, $uv \in A(D)$ o $vu \in A(D)$, pero H es una digráfica inducida y $u, v \in V(H)$. Por lo tanto, $uv \in A(D)$ o $vu \in A(D)$. Por otra parte, toda componente fuerte es una subdigráfica inducida por definición por lo que C misma es una digráfica k-cuasi-transitiva. □

Los siguientes tres lemas no son otra cosa que el inicio de un profundo análisis de las trayectorias de longitud $k+2$, que además son trayectorias de longitud mínima entre sus extremos. Las demostraciones de estos tres resultados son muy parecidas entre sí, todas son por inducción y usan la construcción de varias trayectorias, el hecho de que D es k-cuasi-transitiva y el lema 43 para justificar la existencia de otras flechas. Se demostrará, pero no se hará especial énfasis en eso, que las trayectorias construidas son en verdad trayectorias y no sólo caminos pues basta con comprobar que no se repiten vértices en un camino para afirmar que es trayectoria y, como se verá a continuación, dicha comprobación será trivial.

Lema 45. *Sean $k \geq 2$ un número natural y D una digráfica k-cuasi-transitiva. Si $T = (u_0, u_1, \ldots, u_{k+1}, u_{k+2})$ es una u_0u_{k+2}-trayectoria de longitud mínima entonces $u_{k+2} \to u_{k-n}$ para toda n impar tal que $1 \leq n \leq k$.*

Demostración: La demostración será por inducción sobre n. Para $n=1$ veamos que $u_{k+2} \to u_{k-n} = u_{k-1}$. Por los lemas 41 y 42, $u_{k+2} \to u_0$. Observemos que $(u_{k+2}, u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$ es una trayectoria de longitud k por lo que $u_{k+2} \to u_{k-1}$ o $u_{k-1} \to u_{k+2}$, como consecuencia de que D es k-cuasi-transitiva. Por el lema 43 $u_{k-1} \nrightarrow u_{k+2}$ por lo tanto $u_{k+2} \to u_{k-1}$. Esto constituye nuestra base de inducción. Para el paso inductivo supongamos que $u_{k+2} \to u_{k-m}$ con m impar tal que $1 \leq m \leq k-2$ y veamos que $u_{k+2} \to u_{k-(m+2)}$. Ya que T es de longitud mínima entonces $T_1 = (u_0, \ldots, u_{k-(m+2)})$ y $T_2 = (u_{k-m}, \ldots, u_k)$ son tales que $V(T_1) \cap V(T_2) = \emptyset$, por lo tanto $(u_{k+2}, u_{k-m}) \cup T_2 \cup (u_k, u_0) \cup T_1$ es una $(u_{k+2}, u_{k-(m+2)})$-trayectoria de longitud k. Como D es k-cuasi-transitiva se cumple $u_{k+2} \to u_{k-(m+2)}$ o $u_{k-(m+2)} \to u_{k+2}$. Nuevamente el lema 43 nos dice $u_{k-(m+2)} \nrightarrow u_{k+2}$ y por lo tanto $u_{k+2} \to u_{k-(m+2)}$ con lo que la inducción se da por concluida y el lema queda demostrado. □

Lema 46. *Sean $k \geq 2$ un número natural y D una digráfica k-cuasi-transitiva. Si $T = (u_0, u_1, \ldots, u_{k+1}, u_{k+2})$ es una u_0u_{k+2}-trayectoria de longitud mínima entonces $u_{k+1} \to u_{k-n}$ para toda n par tal que $2 \leq n \leq k$.*

Demostración: La demostración también será por inducción sobre n y es muy parecida a la del lema anterior. Por los lemas 41 y 42, $u_{k+2} \to u_0$ por lo que $T' = (u_{k+1}, u_{k+2}, u_0) \cup u_0 T u_{k-2}$ es una $u_{k+1}u_{k-2}$-trayectoria de longitud k. Como T es de longitud mínima se obtiene que también T' lo es y, aplicando el lema 43 y dada la k-cuasi-transitividad de D, $u_{k-2} \nrightarrow$

u_{k+1}, lo cual implica que $u_{k+1} \to u_{k-2}$. Ahora que la base de la inducción está concluida, supongamos que $u_{k+1} \to u_{k-m}$ con m par tal que $2 \leq m \leq k-2$ y veamos que $u_{k+1} \to u_{k-(m+2)}$. Sean $T_1 = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-(m+2)})$ y $T_2 = (u_{k-m}, u_{k-m+1}, \ldots, u_k)$. Observemos que T_1 tiene longitud $k-(m+2)$ y T_2 tiene longitud m y, por lo tanto, $(u_{k+1}, u_{k-m}) \cup T_2 \cup (u_k, u_0) \cup T_1$ es una $(u_{k+1}, u_{k-(m+2)})$-trayectoria de longitud k. Nuevamente, por ser D k-cuasi-transitiva tenemos que $u_{k+1} \to u_{k-(m+2)}$ o $u_{k-(m+2)} \to u_{k+1}$ y el lema 43 indica que $u_{k+1} \to u_{k-(m+2)}$ con lo que concluimos. □

Lema 47. *Sean $k \geq 2$ un número natural par y D una digráfica k-cuasi-transitiva. Si $T = (u_0, u_1, \ldots, u_{k+1}, u_{k+2})$ es una (u_0, u_{k+2})-trayectoria de longitud mínima entonces $u_{k+2} \to u_{k-n}$ para toda n tal que $0 \leq n \leq k$.*

Demostración: Por el lema 45 ya sabemos que $u_{k+2} \to u_{k-n}$ para toda n impar tal que $1 \leq n \leq k-1$ por lo que basta demostrar que $u_{k+2} \to u_{k-n}$ para toda n par tal que $0 \leq n \leq k$. Esta prueba se hará por inducción sobre n, la base de inducción consiste en demostrar que el resultado es cierto para $n = 0$. Ya que k es par entonces $k-1$ es impar y por el lema 45, $u_{k+2} \to u_{k-(k-1)} = u_1$. Por lo tanto $(u_{k+2}, u_1) \cup u_1 T u_k$ es una trayectoria de longitud k. Por ser D una digráfica k-cuasi-transitiva y por el lema 43 se tiene que $u_{k+2} \to u_k$. Ahora supongamos que $u_{k+2} \to u_{k-m}$ con m par tal que $4 \leq m \leq k-2$ y veamos que $u_{k+2} \to u_{k-(m+2)}$. Sean $T_1 = (u_0, \ldots, u_{k-(m+2)})$ y $T_2 = (u_{k-m}, \ldots u_k)$. Claramente T_1 tiene longitud $k-(m+2)$, T_2 tiene longitud m y $V(T_1) \cap V(T_2) = \emptyset$, por lo tanto $(u_{k+2}, u_{k-m}) \cup T_2 \cup (u_k, u_0) \cup T_1$ es una $(u_{k+2}, u_{k-(m+2)})$-trayectoria de longitud k. Ya que D es k-cuasi-transitiva entonces $u_{k+2} \to u_{k-(m+2)}$ o $u_{k-(m+2)} \to u_{k+2}$ y usando nuevamente el lema 43 se tiene que $u_{k+2} \to u_{k-(m+2)}$. Así concluimos la inducción. □

Como ya se mencionó, los vértices de exgrado máximo juegan un papel fundamental en la mayoría de los resultados sobre k-reyes en digráficas. Más adelante mostraremos resultados en los cuales notaremos que también es así en las digráficas k-cuasi-transitivas. Para llegar a tales resultados, y continuando con nuestro análisis de las trayectorias de longitud $k+2$ que además son trayectorias de longitud mínima entre sus extremos, los siguientes dos lemas serán una herramienta fundamental.

Lema 48. *Sean $k \geq 2$ un número natural par y D una digráfica k-cuasi-transitiva. Si $T = (u = u_0, u_1, \ldots, u_{k+1}, u_{k+2} = v)$ es una uv-trayectoria de longitud mínima entonces $d^+(v) \geq d^+(u) + k$.*

Demostración: Ya que T es una uv-trayectoria de longitud mínima se tiene que $d(u,v) = k+2$. A consecuencia del lema 41 $v \to u$. Primero trataremos el caso en que $k = 2$. Si $w \in N^+(u)$ entonces (v, u, w) es una vw-trayectoria de longitud 2, luego $v \to w$ o $w \to v$. Por ser D una digráfica 2-cuasi-transitiva, y ya que $d(u,v) = 4$ se tiene que $v \to w$. Observemos que w es un exvecino arbitrario de u de lo cual se deduce $N^+(u) \subseteq N^+(v)$. Por el lema 47, $v \to u_2$ y $v \to u$ y por la definición de digráfica $u \nrightarrow u$, además por lema 43 $u \nrightarrow u_2$, por lo tanto todo exvecino de u es exvecino de v y existen dos exvecinos de v que no son exvecinos de u de lo cual se deduce que $d^+(v) \geq d^+(u) + 2$ tal y como queremos demostrar.

Tomemos $k \geq 4$. Por el lema 47 se sigue que $v \to u_3$ y por el lema 41 que $u_k \to u$. Por lo tanto, si $w \in N^+(u)$ entonces $(v, u_3) \cup u_3 T u_k \cup (u_k, u_0, w) = T'$ es un vw-camino de longitud k. Ya que $w \in N^+(u)$ entonces $w \neq u_i$ para todo entero i tal que $2 \leq i \leq k$ entonces T' es una trayectoria de longitud k, por lo tanto $v \to w$ o $w \to v$. Ya que $d(u,v) = k+2$ entonces $w \nrightarrow v$, es decir, $v \to w$ por lo tanto $d^+(v) \geq d^+(u)$. El lema 47 implica que $v \to u_i$ para toda $i \in \{0, 2, 3, \ldots, k\}$ y como T es una uv-trayectoria de longitud mínima se sigue que $u = u_0 \nrightarrow u_i$ para todo entero $i \in \{0, 2, 3, \ldots, k\}$. Por lo tanto $d^+(v) \geq d^+(u) + k$. $\square$

Aunque este lema es válido solo para k par, para k impar se cumple una propiedad muy parecida. El siguiente resultado es una variación del lema anterior y la demostración es análoga.

Lema 49. *Sean $k \geq 3$ un número natural impar y D una digráfica k-cuasi-transitiva. Si $T = (u_0, u_1, u_2 \ldots, u_{k+1}, u_{k+2})$ es una $u_0 u_{k+2}$-trayectoria de longitud mínima entonces $d^+(u_{k+1}) \geq d^+(u_0) + \frac{k-1}{2}$.*

Demostración: Por el lema 42, $u_{k+2} \to u_0$ y $u_k \to u_0$. Sea $w \in N^+(u_0)$, observemos que $w \neq u_i$ para toda i tal que $2 \leq i \leq k+2$.

Comencemos demostrando el caso $k = 3$, es decir, $k+2 = 5$ y $k+1 = 4$. Tenemos que (u_4, u_5, u_0, w) es una trayectoria de longitud 3, entonces, como D es 3-cuasi-transitiva, $u_4 \to w$ o $w \to u_4$. Por la elección de w y por el lema 43 tenemos que $u_4 \to w$. Ya que w es un exvecino arbitrario de u_0, se deduce que $N^+(u) \subseteq N^+(w)$. Además $u_4 \to u_5$ y $u_0 \nrightarrow u_5$, por lo tanto $d^+(u_4) \geq d^+(u_0) + 1$ tal y como queríamos demostrar.

Supongamos que $k \geq 5$. Por el lema 46, $u_{k+1} \to u_{k-n}$ para toda n par tal que $2 \leq n \leq k$ y ya que k es un número impar mayor o igual a 5 se cumple $u_{k+1} \to u_3$. Por lo tanto $(u_{k+1}, u_3) \cup u_3 T u_k \cup (u_k, u_0, w)$ es una trayectoria de longitud k. Como D es k-cuasi-transitiva, $u_{k+1} \to w$ o $w \to u_{k+1}$ y por el lema 43 se deduce que $u_{k+1} \to w$. El vértice w fue elegido como un exvecino arbitrario de u_0 por lo tanto $N^+(u_0) \subseteq N^+(u_{k+1})$. Ya que $u_{k+1} \to u_{k-n}$ para toda n par tal que $2 \leq n \leq k$ y ya que k es un número impar entonces $u_{k+1} \to u_i$ para todo entero i impar tal que $3 \leq i \leq k-2$, $u_{k+1} \to u_{k+2}$, y como T es una $u_0 u_{k+2}$-trayectoria de longitud mínima entonces $u_0 \nrightarrow u_j$ para toda $j \geq 2$ por lo tanto $d^+(u_{k+1}) \geq d^+(u_0) + \frac{k-1}{2}$. $\square$

Recordemos que estamos trabajando con digráficas que tienen una cantidad finita de vértices y aristas, por lo que los exgrados de todos los vértices son acotados. Ahora detengámonos a reflexionar un momento. Según los últimos lemas, en una digráfica k-cuasi-transitiva, si para un vértice v existe un vértice u a distancia $k+2$, entonces el exgrado de u es estrictamente mayor al de v. Si también para u existe un vértice a distancia $k+2$ entonces encontraremos otro vértice con exgrado aún mayor ¿podemos continuar con este proceso?

3.2. Sobre la existencia de $(k+1)$-reyes

Antes de mostrar la existencia de $(k+1)$-reyes en digráficas k-cuasi-transitivas veremos un curioso resultado que no tiene análogo en la familia de los torneos. Este resultado no depende de la existencia de $(k+1)$-reyes, pero es colocado en esta sección ya que básicamente nos dice en una digráfica k-cuasi-transitiva los vértices más alejados de un $(k+1)$-rey también son $(k+1)$-reyes. Este resultado se puede

Proposición 50. *Si D es una digráfica k-cuasi-transitiva con $k \geq 2$, y u es un $(k+1)$-rey en D entonces todo vértice a distancia $k+1$ de u también es un $(k+1)$-rey en D.*

Demostración: Sean u un $(k+1)$-rey, v un vértice tal que $d(u,v) = k+1$ y $T = (u = u_0, u_1, \cdots, u_{k+1} = v)$ una uv-trayectoria de longitud mínima. Veamos por inducción sobre n que si $d(u,w) = n \leq k+1$ entonces $d(v,w) \leq k+1$. Para $n = 0$ hay que probar que $d(v,u) \leq k+1$, esto es cierto por los lemas 41 y 42. Supongamos que el resultado es cierto para n y demostrémoslo para $n+1$. Ya que u es un $(k+1)$-rey debemos suponer que $n+1 \leq k+1$, es decir $n \leq k$. Sea w tal que $d(u, w_{n+1}) = n+1 \leq k+1$ y sea $T' = (u = w_0, w_1, \cdots, w_{n+1})$ una uw_{n+1}-trayectoria de longitud mínima. Por ser de longitud mínima podemos deducir que $d(u, w_i) = i$ para todo valor de i de 0 a $k+1$, inclusive.

Por hipótesis de inducción $d(v, w_n) \leq k+1$. Si $d(v, w_n) < k+1$ entonces claramente $d(v, w_{n+1}) \leq k+1$ con lo que no hay más por demostrar. Vayamos pues al único caso faltante.

Supongamos que $d(v, w_n) = k+1$. Haremos una prueba por contradicción. Primero tomemos el caso en que $d(v, w_{n+1}) > k+1$. Ya que $d(v, w_n) = k+1$ y $w_n \rightarrow w_{n+1}$ tenemos que $d(v, w_{n+1}) = k+2$ y por los lemas 41 y 42, $d(w_{n+1}, v) = 1$. Observemos lo siguiente: $k+1 = d(u, v) \leq d(u, w_{n+1}) + d(w_{n+1}, v) = n+2$, por lo tanto $n \geq k-1$. Ya que $d(u, w_{n+1}) = n+1$ y u es un $(k+1)$-rey sólo hay dos opciones, o bien $n = k-1$ o bien $n = k$.

Si $n = k-1$ entonces $w_{n+1} = w_k$ y $w_1 T' w_k \cup (w_k, v)$ es un $w_1 v$-camino de longitud k, es claro que este camino no repite vértices por lo que realmente es una trayectoria. Ya que D es una digráfica k-cuasi-transitiva, $w_1 \rightarrow v$ o $v \rightarrow w_1$. Si $w_1 \rightarrow v$ entonces $(u = w_0, w_1, v)$ es una trayectoria de longitud dos lo cual contradice que $d(u, v) = k+1 \geq 3$. Esta contradicción surgió de suponer que $w_1 \rightarrow v$, por lo que esto no es posible. De lo anterior podemos afirmar que $v \rightarrow w_1$ y notemos que $(v, w_1) \cup (w_1 T' w_k)$ es una $v w_k$-trayectoria de longitud k, por lo que $d(v, w_n) \leq k+1$, justo como deseábamos demostrar.

Finalmente, para $n = k$ trabajaremos por medio de dos subcasos. Si $n = k \geq 3$ entonces $w_{n+1} = w_{k+1}$ y $(w_2, \ldots, w_{k+1}, v)$ es una trayectoria de longitud k. Por ser D k-cuasi-transitiva, $w_2 \rightarrow v$ o $v \rightarrow w_2$. Si $w_2 \rightarrow v$ entonces (u, w_1, w_2, v) es una trayectoria de longitud 3, lo cual contradice que $d(u, v) = k+1 \geq 4$, por lo tanto $v \rightarrow w_2$. En este caso $(v, w_2) \cup (w_2 T' w_{k+1})$ es una $v w_{k+1}$-trayectoria de longitud k, es decir $d(v, w_{k+1}) \leq k+1$ por lo que no hay más por demostrar en este caso. Si $n = k = 2$ entonces $w_{n+1} = w_3$ y la trayectoria (w_2, w_3, v) implica que $w_2 \rightarrow v$ o $v \rightarrow w_2$. Si $v \rightarrow w_2$, se tiene que (v, w_2, w_3) es una trayectoria de longitud $2 < k+1 = 3$. Si $w_2 \rightarrow v$ entonces (w_1, w_2, v) es una trayectoria de longitud 2, al ser D 2-cuasi-transitiva esto implica que w_1 y v son adyacentes. Si $w_1 \rightarrow v$ entonces (u, w_1, v) es una trayectoria de longitud $2 < k+1 = 3$ por lo que este caso no es posible. Entonces $v \rightarrow w_1$, por lo que (v, w_1, w_2, w_3) es una $v w_3$-trayectoria de longitud tres lo que implica que $d(v, w_3) \leq 3 = k+1$. Una vez concluidos todos estos casos la demostración queda concluida. $\square$

Los siguientes dos teoremas constituyen los resultados principales sobre la existencia de $(k+1)$-reyes en digráficas k-cuasi-transitivas. Trataremos primero el caso par y el caso impar para digráficas fuertemente conexas y después los casos más generales con una única componente fuerte inicial.

Teorema 51. *Sean $k \geq 2$ un entero par y D una digráfica k-cuasi-transitiva fuertemente conexa. Si $v \in V(D)$ y $\Delta_D^+ \geq d^+(v) > \Delta_D^+ - k$ entonces v es un $(k+1)$-rey.*

Demostración: Sea $v \in V(D)$ tal que $\Delta_D^+ \geq d^+(v) > \Delta_D^+ - k$. Si v no es un $(k+1)$-rey entonces existe $u \in V(D)$ tal que $d(v,u) > k+1$. Como D es fuertemente conexa entonces existe un vu-camino y por lo tanto una vu-trayectoria. Sea $T = (v = v_0, v_1, \cdots, v_n = u)$ una vu-trayectoria de longitud mínima; ya que $d(v,u) > k+1$, entonces $n \geq k+2$. Por el lema 48, $d^+(v_{k+2}) \geq d^+(v) + k > (\Delta_D^+ - k) + k = \Delta_D^+$, es decir, el exgrado de v_{k+2} es estrictamente mayor que el exgrado máximo de D, lo cual, claramente, es una contradicción. Esta contradicción se siguió de suponer que v no es un $(k+1)$-rey, por lo tanto v es un $(k+1)$-rey. $\square$

Teorema 52. *Sean $k \geq 3$ un entero impar y D es una digráfica k-cuasi-transitiva fuertemente conexa. Si $v \in V(D)$ y $\Delta_D^+ \geq d^+(v) > \Delta_D^+ - \frac{k-1}{2}$ entonces v es un $(k+1)$-rey.*

Demostración: Sea $v \in V(D)$ tal que $\Delta_D^+ \geq d^+(v) > \Delta_D^+ - \frac{k-1}{2}$. Si v no es un $(k+1)$-rey entonces existe $u \in V(D)$ tal que $d(v,u) > k+1$. Como D es fuertemente conexa entoces existe un vu-camino y por lo tanto una vu-trayectoria. Sea $T = (v = v_0, v_1, \cdots, v_n = u)$ una vu-trayectoria de longitud mínima, ya que $d(v,u) > k+1$ entonces $n \geq k+2$. Por el lema 49, $d^+(v_{k+1}) \geq d^+(v) + \frac{k-1}{2} > (\Delta_D^+ - \frac{k-1}{2}) + \frac{k-1}{2} = \Delta_D^+$, es decir, el exgrado de v_{k+1} es estrictamente mayor que el exgrado máximo de D, lo cual no es posible. Esta contradicción surgió de suponer que v no es un $(k+1)$-rey, por lo tanto v es un $(k+1)$-rey. $\square$

Para el caso de digráficas k-cuasi-transitivas, no necesariamente fuertes, con una única componente fuerte inicial, sólo serán relevantes los vértices en la componente fuerte inicial y con exgrados altos. Para poder explicar claramente a qué nos referimos necesitaremos de la siguiente definición:

Definición 53. *Si D es una digráfica y $A \subset V(D)$, definamos al número $\Delta_D^+(A)$ como máx $\{d_D^+(v) : v \in A\}$.*

Teorema 54. *Sean $k \geq 2$ un entero par y D una digráfica k-cuasi-transitiva con una única componente fuerte inicial C. Si $v \in V(C)$ y $\Delta_D^+(C) \geq d^+(v) > \Delta_D^+(C) - k$ entonces v es un $(k+1)$-rey.*

Demostración: Por el lema 44, C misma es una digráfia k-cuasi-transitiva. Sea $v \in V(C)$ tal que $\Delta^+_D(C) \geq d^+(v) > \Delta^+_D(C) - k$, entonces, por el teorema 51, v es un $(k+1)$-rey en C, es decir, $d(v,u) \leq k+1$ para todo $u \in V(C)$. Ya que C es la única componente inicial y $v \in V(C)$ entonces $d(v,w) \leq k-1$ para todo $w \in V(D) \backslash V(C)$, por lo tanto v es un $(k+1)$-rey. □

Teorema 55. *Sean $k \geq 3$ un entero impar y D una digráfica k-cuasi-transitiva con una única componente fuerte inicial C. Si $v \in V(C)$ y $\Delta^+_D(C) \geq d^+(v) > \Delta^+_D(C) - \frac{k-1}{2}$ entonces v es un $(k+1)$-rey.*

Demostración: Por el lema 44, C misma es una digráfia k-cuasi-transitiva. Sea $v \in V(C)$ tal que $\Delta^+_D(C) \geq d^+(v) > \Delta^+_D(C) - k$, entonces, por el teorema 52, v es un $(k+1)$-rey en C, es decir, $d(v,u) \leq k+1$ para todo $u \in V(C)$. Ya que C es la única componente inicial y $v \in V(C)$ entonces $d(v,w) \leq k-1$ para todo $w \in V(D) \backslash V(C)$, por lo tanto v es un $(k+1)$-rey. □

3.3. Sobre la existencia de 4-, 3- y 2-reyes

Los resultados de esta sección muestran condiciones suficientes para asegurar la existencia de 4-, 3- y 2-reyes en digráficas k-cuasi-transitivas. Estas condiciones suficientes están basadas principalmente en la existencia de $(k+2)$-reyes que no son $(k+1)$-reyes.

Lema 56. *Sean $k \geq 2$ un entero par y D una digráfica k-cuasi-transitiva. Si $T = (u_0, u_1, \cdots, u_{k+1}, u_{k+2})$ es una u_0, u_{k+2}-trayectoria de longitud mínima en D entonces $u_{k+2} \to w$ para todo vértice w tal que $d(u_0, w) \leq k$.*

Demostración: Por el lema 47, $u_{k+2} \to u_i$ para toda $i \leq k$, en particular $u_{k+2} \to u_0$ por lo que basta con demostrar el lema para vértices distintos de u_0. Sean $w \in V(D)$ tal que $0 < d(u_0, w) = n \leq k$ y T' $= (u_0, w_1, w_2, \cdots, w_n = w)$ una u_0w-trayectoria de longitud mínima. Separaremos en casos para facilitar la demostración. Si $k \neq 2$ y $n \leq k-2$ entonces $(u_{k+2}, u_{n+2}) \cup u_{n+2}Tu_k \cup (u_k, u_0) \cup u_0T'w$ es un $u_{k+2}w$-camino de longitud k, pero ya que $d(u_0, w) = n$ y $d(u_0, x) > n$ para todo $x \in V(u_{n+2}Tu_k)$ entonces la anterior es una $u_{k+2}w$-trayectoria de longitud k. Cabe mencionar que se tomó $k \neq 2$, ya que si $k = 2$ se sigue $d(u_0, w) = n \leq k-2 = 0$, es decir, $u_0 = w$ y para este vértice ya se demostró $u_{k+2 \to u_0}$. Si $n = k-1$ y $k \geq 2$

entonces $(u_{k+2}, u_0) \cup u_0T'w$ es una vw-trayectoria de longitud k. Por último, si $n = k \geq 2$ entonces, por los casos anteriores, $u_{k+2} \rightarrow w_1$ y por lo tanto $(u_{k+2}, w_1) \cup w_1T'w$ es una $u_{k+2}w$-trayectoria de longitud k. Por lo anterior, si $d(u_0, w) = n \leq k$ entonces existe una $u_{k+2}w$-trayectoria de longitud k. Por ser D una digráfica k-cuasi-transitiva se tiene que $u_{k+2} \rightarrow w$ o $w \rightarrow u_{k+2}$. Ya que $d(u_0, u_{k+2}) = k + 2$, tenemos que $w \nrightarrow u_{k+2}$, por lo tanto $u_{k+2} \rightarrow w$. $\square$

Lema 57. *Sean $k \geq 3$ un entero impar y D una digráfica k-cuasi-transitiva. Si $T = (u_0, u_1, \cdots, u_{k+1}, u_{k+2})$ es una u_0, u_{k+2}-trayectoria de longitud mínima en D entonces $u_{k+2} \rightarrow w$ para todo vértice w tal que $d(u_0, w) = n \leq$ k-1 con n par.*

Demostración: Por el lema 45, $u_{k+2} \rightarrow u_i$ para toda $i \leq k$ con i par, en particular $u_{k+2} \rightarrow u_0$, por lo cual basta demostrar el lema para vértices distintos de u_0. Sean $w \in V(D)$ tal que $0 < d(u_0, w) = n \leq k$ con n par y T' = $(u_0, w_1, w_2, \cdots, w)$ una (u_0w)-trayectoria de longitud mínima. Si $k \neq 3$ y $n \leq k - 3$ entonces $(u_{k+2}, u_{n+2}) \cup u_{n+2}Tu_k \cup (u_k, u_0) \cup u_0Tw$ es un $u_{k+2}w$-camino de longitud k pero ya que $\mathrm{d}(u_0, w) = n$ y $\mathrm{d}(u_0, x) > n$ para todo $x \in V(u_{n+2}Tu_k)$, entonces la anterior es una $u_{k+2}w$-trayectoria de longitud k. Análogamente al lema anterior, se tomó $k \neq 3$ ya que si $k = 3$ $d(u_0, w) = n \leq k - 3 = 0$, es decir, $u_0 = w$ y para este vértice ya se demostró el lema. Si $n = k - 1$ y $k \geq 3$ entonces $(u_{k+2}, u_0) \cup u_0T'w$ es una $(u_{k+2}w)$-trayectoria de longitud k. De lo anterior, si $d(u_0, w) = n \leq k$ entonces existe una $(u_{k+2}w)$-trayectoria de longitud k. Ya que D una digráfica k-cuasi-transitiva, $u_{k+2} \rightarrow w$ o $w \rightarrow u_{k+2}$. Como $d(u_0, u_{k+2}) = k+2$ se sigue que $w \nrightarrow u_{k+2}$, por lo tanto $u_{k+2} \rightarrow w$. $\square$

Teorema 58. *Sean $k \geq 2$ un entero par y D una digráfica k-cuasi-transitiva. Si v es un vértice que es un $(k + 2)$-rey y $d(v, u) = k + 2$ entonces u es un 3-rey en D. Además u cumple que si $d(u, w) = 3$ entonces $d(v, w) = k + 2$, por lo que w también es un 3-rey.*

Demostración: Sean v un $(k + 2)$-rey y $u \in V(D)$ tal que $d(v, u) = k + 2$. Por el lema 56, si w es un vértice tal que $d(v, w) \leq k$ entonces $u \rightarrow w$, es decir, $d(u, w)$= 1. Sea w_{k+i} un vértice tal que $w_{k+i} \neq u$ y $d(v, w_{k+i}) = k + i$ con $0 < i$, ya que v es un $(k + 2)$-rey se tiene que $i \leq 2$. Sea también T =$(v, w_1, \cdots, w_k, \cdots, w_{k+i})$ una vw_{k+1}-trayectoria de longitud mínima. Por la elección de T se tiene que $d(v, w_k)$= k y por el lema 56 $u \rightarrow w_k$, por lo tanto $(u, w_k) \cup w_kTw_{k+i}$ es una uw_{k+i}-trayectoria de longitud $i + 1 \leq 3$, es decir, $d(u, w) \leq 3$, de lo cual obtenemos que u es un 3-rey. Observemos que también ya quedó demostrada la segunda afirmación. □

En el teorema anterior no fue necesario suponer que D es fuertemente conexa pero ya que suponemos que tiene un $(k+2)$-rey tenemos, necesariamente, que D tiene una única componente fuerte inicial.

Corolario 59. *Sean $k \geq 4$ un entero par y D una digráfica k-cuasi-transitiva. Si v es un vértice que es un $(k+2)$-rey y no es un $(k+1)$-rey entonces existe u tal que $d(v, u) = k+2$ y u es un 2-rey.*

Demostración: Ya que v no es un $(k+1)$-rey pero si es un $(k+2)$-rey, podemos asegurar que existen vértices a distancia exactamente $k+2$ de v. Por el teorema 58, sabemos que todo vértice u a distancia $k+2$ de v es un 3-rey y que además u cumple que si $d(u, u')= 3$ entonces $d(v, u')= k+2$ por lo que u' también es un 3-rey. De lo anterior notemos que si podemos demostrar que existe un vértice w tal que $d(v, w)= k+2$ (lo que implica, por el teorema 58, que w es un 3-rey) y que además $d(w, w') \leq 2$ para todo vértice w' tal que $d(v, w') = k+2$ entonces tendríamos que w es un 2-rey en D pues, nuevamente por el teorema 58, los únicos vértices que pueden estar a distancia 3 de w deben cumplir que están a distancia $k+2$ de v. Veamos que tal vértice existe demostrando primero que los vértices que están a distancia $k+2$ de v inducen una digráfica semicompleta. Sean v_{k+2} y u_{k+2} tales que $d(v, u_{k+2}) = d(v, v_{k+2}) = k+2$ y sean también $(v, u_1, u_2, \cdots, u_{k+2})$ y $(v, v_1, v_2, \cdots, v_{k+2})$ trayectorias de longitud mínima entre sus extremos. Por el teorema 56 se tiene que $u_{k+2} \to x$ para todo vértice x tal que $d(v, x) \leq k$, en particular, y ya que $k \geq 4$, $u_{k+2} \to v_3$ y por lo tanto $(u_{k+2}, v_3, v_2, \cdots, v_{k+2})$ es una $u_{k+2}u_{k+2}$-trayectoria de longitud k. Ya que D es una digráfica k-cuasi-transitiva existe una flecha entre u_{k+2} y v_{k+2} por lo que los vértices a distancia $k+2$ de v inducen una digráfica D' tal que entre cada par de vértices hay al menos una flecha. Quitemos las flechas necesarias en D' para que hay exactamente un flecha entre cada par de vértices, la digráfica obtenida es un torneo y por el teorema 2 existe en 2-rey en tal digráfica. Dicho rey también es un rey en D' y a su vez en D, como queríamos demostrar. □

Corolario 60. *Si $k \geq 4$ es un entero par y D una digráfica k-cuasi-transitiva con una única componente fuerte inicial C entonces ocurre al menos una de las siguientes:*

- *Todo vértice en C es un $(k+1)$-rey.*

- *Existen $u_1, u_2, u_3 \in V(C)$ tales que u_1 es un (k+1)-rey, u_2 es un* (k+2)-*rey, $u_2 \to u_1$, $d(u_2, u_3) = k+2$ y u_3 es un 2-rey en D. Además todo vértice a distancia k+2 de u_2 es un 3-rey.*

Demostración: Supongamos que existe un vértice u' en C que no es un $(k+1)$-rey. Por el teorema 54 existe un $(k+1)$-rey en C. Sea $u \in V(C)$ un $(k+1)$-rey en D tal que $d(u', u) \leq d(u', x)$ para todo $(k+1)$-rey x de D. Sea también $T = (u', \ldots, v, u)$ una $u'u$-trayectoria de longitud mínima. Por la elección de u sabemos que v no es un $(k+1)$-rey, pues $d(u', v) < d(u', u)$, pero ya que $v \to u$ y que u es un $(k+1)$-rey tenemos que v es un $(k+2)$-rey. Por el corolario 59 podemos asegurar que existe w tal que $d(v, w) = k+2$ y w es un 2-rey. Sean $u_1 = u$, $u_2 = v$ y $v_3 = w$. La última afirmación es inmediata del teorema 58. □

Vale la pena detenerse a resaltar que lo importante de este último corolario es que básicamente nos propone dos opciones en una digráfica k-cuasi-transitiva con $k \geq 4$ par y con una única componente fuerte inicial: existe un 2-rey o todo vértice en la componente fuerte inicial es un $(k+1)$-rey. La dife-rencia entre $k+1$ y 2 puede ser tan grande como se quiera por lo que la existencia de 2-reyes en estas digráficas resulta bastante sorprendente. Para $k = 2$ el resultado no es cierto pero en [19] fue caracterizada la existencia de 2-reyes en digráficas 2-cuasi-transitivas. Para $k \geq 3$ impar presentamos un resultado análgo igual de sorprendente el cuál es corolario del siguiente teorema.

Teorema 61. *Sean $k \geq 3$ un entero impar y D una digráfica k-cuasi-transitiva. Si v es un vértice que es un* $(k+2)$-*rey entonces todo vértice u a distancia k+2 de v es un 4-rey. Además u cumple que si $d(u, w) = 4$ entonces $d(v, w) = k+2$ por lo que w también es un 4-rey.*

Demostración: Sean v un $(k+2)$-rey y $u \in V(D)$ tales que $d(v, u) = k+2$. Por el lema 57, si w es un vértice tal que $d(v, w) = n \leq k-1$, con n par, entonces $u \to w$, es decir, $d(u, w) = 1$ y por lo tanto, si $d(v, x) = n \leq k$ entonces $d(u, w) \leq 2$. Sea w_{k+i} un vértice tal que $w_{k+i} \neq u$ y $d(v, w_{k+i}) = k+i$ con $0 < i$, ya que v es un $(k+2)$-rey se tiene que $i \leq 2$. Sea también $T = (v, w_1, \cdots, w_k, \cdots, w_{k+i})$ una vw_{k+i}-trayectoria de longitud mínima. Por la elección de T y por el lema 57, $u \to w_{k-1}$, por lo tanto, $(u, w_{k-1}) \cup w_{k-1} T w_{k+i}$ es una uw_{k+i}-trayectoria de longitud $i+2 \leq 4$, es decir, $d(u, w) \leq 4$ de lo cual obtenemos que u es un 4-rey. Observamos que ya también quedó demostrada la segunda afirmación. □

Corolario 62. *Si $k \geq 3$ es un entero impar y D una digráfica k-cuasi-transitiva con una única componente fuerte inicial C entonces ocurre al menos una de las siguientes:*

- *Todo vértice en C es un $(k+1)$-rey.*
- *Existen $u_1, u_2, u_3 \in V(C)$ tales que u_1 es un (k+1)-rey, u_2 es un $(k+2)$-rey, $u_2 \to u_1$, $d(u_2, u_3) = k+2$ y u_3 es un 4-rey en D. Además todo vértice a distancia k+2 de u_2 es un 4-rey.*

Demostración: Supongamos que existe un vértice u' en C que no es un $(k+1)$-rey. Por el teorema 55, existe un $(k+1)$-rey en C. Sea $u \in V(C)$ un $(k+1)$-rey en D tal que $d(u', u) \leq d(u', x)$ para todo $(k+1)$-rey x de D. Sea también $T = (u', \ldots, v, u)$ una $u'u$-trayectoria de longitud mínima. Por la elección de u sabemos que v no es un $(k+1)$-rey, pues $d(u', v) < d(u', u)$, pero ya que $v \to u$ y u es un $(k+1)$-rey tenemos que v es un $(k+2)$-rey. Por la elección de v podemos asegurar que existe w tal que $d(v, w) = k+2$ y por el teorema 61 tenemos que w es un 4-rey. Sean $u_1 = u$, $u_2 = v$ y $v_3 = w$. La última afirmación es inmediata del teorema 61. $\square$

3.4. Mínimo número de $(k+1)$-reyes

En la sección anterior se mostraron resultados sobre condiciones suficientes para la existencia de l-reyes, $l < k$, en digráficas k-cuasi-transitivas. Esos resultados son interesantes por sí mismos pero también serán usados para responder la siguiente pregunta: ¿cuántos $(k+1)$-reyes tiene una digráfica k-cuasi-transitiva sin k-reyes? La pregunta análoga ya fue formulada y respondida para torneos, torneos bipartitos y multipartitos y digráficas cuasi-transitivas. Los siguientes dos resultados dan la impresión de ser una generalización del teorema 37, sobre el mínimo número de 3-reyes en digráficas 2-cuasi-transitivas, pero no lo son, luego de demostrarlos veremos cuál es el motivo por el afirmo esto.

Teorema 63. *Si $k \geq 4$ es un entero par y D es una digráfica k-cuasi-transitiva con una única componente fuerte inicial C tal que $|V(C)| = n$ entonces:*

1. *D tiene exactamente n $(k-1)$-reyes si $n \leq k$*
2. *D tiene exactamente k+1 (k)-reyes si $n =$ k+1*

3. *D tiene al menos k+2 $(k+1)$-reyes si $n \geq$ k+2.*

Además, en el ultimo caso, se tiene que existen k+2 $(k+1)$-reyes que están sobre una misma trayectoria de longitud k+1 o, si $n \geq$ k+3, existen al menos k+3 $(k+1)$-reyes.

Demostración: Si $n \leq k$ y $u, v \in V(C)$ entonces $d(u,v) \leq n-1 \leq k-1$ pues, ya que u y v están en la misma componente fuertemente conexa, existe una uv-trayectoria la cual, a lo más, pasa por todos los n vértices de C. Además, por el lema 2.6, $d(u,w) \leq k-1$ para todo vértice w tal que $w \notin V(C)$. Por lo tanto u es un $(k-1)$-rey en D para todo vértice u en C.

Si $n = k+1$ usando un razonamiento totalmente análogo tenemos que u es un k-rey en D para todo vértice u en C.

Supongamos que n $\geq k+2$. Por el corolario 60 tenemos que ocurre al menos una de las dos opciones siguientes:

- Todo vértice en C es un $(k+1)$-rey.
- Existen $u_1, u_2, u_3 \in$ V(C) tales que u_1 es un (k+1)-rey, u_2 es un $(k+2)$-rey, $u_2 \to u_1$, $d(u_2,u_3) = k+2$ y u_3 es un 2-rey en D. Además todo vértice a distancia $k+2$ de u_2 es un 3-rey.

En el primer caso no hay nada más que demostrar. Supongamos que ocurre lo segundo. Sea $T = (u_2 = v_0, v_1, \ldots, v_{k+2} = u_3)$ una v_0v_{k+2}-trayectoria de longitud mínima, sabemos que T existe pues $d(u_2,u_3) = k+2$. Ya que $u_3 = v_{k+2}$ es un 2-rey, tenemos que para todo vértice x tal que $d(x, v_{k+2}) = n$, x es un $(2+n)$-rey. Como $d(v_i, v_{k+2}) = k+2-i$ se tiene que v_i es un $(k+4-i)$-rey y, por lo tanto, v_i es un $(k+1)$-rey para todo i tal que $3 \leq i \leq k+2$. Como ya señalamos, el corolario 60 también nos dice que existe u_1 tal que $u_2 = v_0 \to u_1$ y u_1 es un $(k+1)$-rey. Dado que $v_0 \to u_1$ podemos asegurar que $u_1 \neq v_i$ para toda $i \geq 2$. Con esto último hemos hallado $k+1$ $(k+1)$-reyes por lo que falta encontrar uno más para demostrar lo que queremos.

Si v_2 es un $(k+1)$-rey entonces hemos terminado. Veamos que, si suponemos que v_2 no es un $(k+1)$-rey entonces encontraremos dos $(k+1)$-reyes distintos a los que tenemos (aunque bastaría con uno). Si v_2 no es un $(k+1)$-rey entonces es un $(k+2)$-rey pues $v_2 \to v_3$ y v_3 es un $(k+1)$-rey. Por el corolario 59 podemos asegurar que existe w_{k+2} tal que $d(v_2, w_{k+2}) = k+2$ y w_{k+2} es un 2-rey. Sea $T' = (v_2 = w_0, w_1, \ldots, w_{k+1}w_{k+2})$ una v_2w_{k+2}-trayectoria de longitud mínima. Como $w_{k+1} \to w_{k+2}$ y w_{k+2} es un 2-rey, tenemos que w_{k+1} es un 3-rey, es decir, tanto w_{k+1} como w_{k+2} son $(k+1)$-reyes pues $k \geq 4$. Veamos que $w_k + 2$ y w_{k+1} son $(k+1)$-reyes distintos a los demás que hemos encontrado. Ya que $d(v_2, v_j) \leq k$ para toda j tal que $3 \leq j \leq k+2$ y $d(v_2, w_k + 2) > d(v_2, w_k + 1) > k$ obtenemos que los vértices $w_k + 2$ y w_{k+1} son distintos de los vértices de la forma v_j con $3 \leq j \leq k+2$. Para ver que también son distintos del vértice u_1 basta con demostrar que $d(v_2, u_1) \leq k$. Observemos que, ya que $T = (u_2 = v_0, v_1, \ldots, v_{k+2} = u_3)$ es una trayectoria de longitud mínima, $v_k \to u_2$ por lo que $v_2 T v_k \cup (v_k, u_2, u_1)$ es un v_2u_1-camino de longitud k, es decir, $d(v_2, u_1) \leq k$, como queríamos demostrar. En este caso hemos encontrado $k+3$ $(k+1)$-reyes.

Para la última afirmación que se hace notemos que, partiendo de los dos casos que nos propone el corolario 60, si todos los vértices son $(k+1)$-reyes y hay al menos $k+3$ vértices entonces no hay más que demostrar. Supongamos que no todos los vértices son $(k+1)$-reyes. En caso que v_2 no es un $(k+1)$-rey, ya demostramos la existencia de al menos $k+3$ $(k+1)$-reyes. Supongamos que v_2 es un $(k+1)$-rey. Por el lema 56 tenemos que $u_{k+2} \to u_1$, por lo tanto $(v_2, v_3, \ldots, v_{k+2}, u_1)$ es una trayectoria de longitud $k+1$ tal que sus $k+2$ vértices son todos $(k+1)$-reyes con lo cual queda demostrada esta afirmación. $\square$

Teorema 64. *Si $k \geq 5$ es un entero impar y D es una digráfica k-cuasi-transitiva con una única componente fuerte inicial C tal que $|V(C)| = n$ entonces:*

1. *D tiene exactamente n $(k-1)$-reyes si $n \leq k$*
2. *D tiene exactamente $k+1$ k-reyes si n = k+1*
3. *D tiene al menos k+2 $(k+1)$-reyes si $n \geq$ k+2.*

Demostración: La demostración de las afirmaciones 1 y 2 es idéntica a la demostración de las afirmaciones análogas del teorema 63.

Demostraremos la tercera afirmación. Supongamos que n $\geq k+2$. Por el corolario 62 tenemos que ocurre al menos una de las dos opciones siguientes:

- Todo vértice en C es un $(k+1)$-rey.
- Existen $u_1, u_2, u_3 \in \mathrm{V}(C)$ tales que u_1 es un $(k+1)$-rey, u_2 es un $(k+2)$-rey, $u_2 \to u_1$, $d(u_2, u_3) = k+2$ y u_3 es un 4-rey en D. Además todo vértice a distancia k+2 de u_2 es un 4-rey.

En el primer caso no nada hay más que demostrar. Supongamos que ocurre lo segundo. Sea $T = (u_2 = v_0, v_1, \ldots, v_{k+2} = u_3)$ una v_0v_{k+2}-trayectoria de longitud mínima, sabemos que T existe pues $d(u_2, u_3) = k+2$. Ya que $u_3 = v_{k+2}$ es un 4-rey tenemos que para todo vértice x tal que $d(x, v_{k+2}) = n$, x es un $(4+n)$-rey. Como $d(v_i, v_{k+2}) = k+2-i$, se tiene que v_i es un $(k+6-i)$-rey y, por lo tanto, v_i es un $(k+1)$-rey para todo i tal que $5 \leq i \leq k+2$. Como ya señalamos, el corolario 62 también nos dice que existe u_1 tal que $u_2 = v_0 \to u_1$ y u_1 es un $(k+1)$-rey. Dado que $v_0 \to u_1$, podemos asegurar que $u_1 \neq v_i$ para toda $i \geq 2$. Con esto último hemos hallado $k-1$ $(k+1)$-reyes por lo que falta encontrar tres más para demostrar lo que queremos.

Si v_2, v_3 y v_4 son $(k+1)$-reyes entonces hemos terminado por lo que encontraremos los $k+1$-reyes que buscamos analizando los siguientes casos:

1. v_4 no es un $(k+1)$-rey.

2. v_4 es un $(k+1)$-rey pero v_3 no lo es.

3. v_4 y v_3 son $(k+1)$-reyes pero v_2 no lo es.

Únicamente demostraremos el caso 1 pues los otros dos son análogos a este.

Si v_4 no es un $(k+1)$-rey entonces es un $(k+2)$-rey pues $v_4 \to v_5$ y v_5 es un $(k+1)$-rey. Por el corolario 62 podemos asegurar que existe w_{k+2} tal que $d(v_4, w_{k+2}) = k+2$ y w_{k+2} es un 4-rey. Sea $T' = (v_4 = w_0, w_1, \ldots, w_{k+1}w_{k+2})$ una v_4w_{k+2}-trayectoria de longitud mínima. Por la elección de T' y ya que w_{k+2} es un 4-rey tenemos que w_{k+1} es un 5-rey y w_k es un 6-rey. Ya que $k \geq 5$, tanto w_k como w_{k+1} y w_{k+2} son $(k+1)$-reyes. Veamos que w_k, w_{k+1} y w_{k+2} son $(k+1)$-reyes distintos a los demás que hemos encontrado. Ya que $T = (u_2 = v_0, v_1, \ldots, v_{k+2} = u_3)$ es una trayectoria de longitud mínima, tenemos que $d(v_4, v_j) \leq k-2$ para toda j tal que $5 \leq j \leq k+2$ y $d(v_4, w_{k+2}) > d(v_4, w_{k+1}) > d(v_4, w_k) > k-1$ obtenemos que los vértices w_k, w_{k+1} y w_{k+2} son distintos de los vértices de la forma v_j con $5 \leq j \leq k+2$. Para ver que también son distintos del vértice u_1 basta con demostrar que $d(v_4, u_1) \leq k-2$. Observemos que, ya que $T = (u_2 = v_0, v_1, \ldots, v_{k+2} = u_3)$ es una trayectoria de longitud mínima, $v_k \to u_2$ por lo que $v_4Tv_k \cup (v_k, u_2, u_1)$ es un v_4u_1-camino de longitud $k-2$, es decir, $d(v_4, u_1) \leq k-2$, como queríamos demostrar. □

¿Por qué estos teoremas no son una generalización del teorema 37? Aunque los últimos dos teoremas son válidos para digráficas k-cuasi-transitivas con $k \geq 4$, si pensamos el resultado con $k = 2$ (sólo para experimentar y conjeturar) todo parece indicar que en una digráfica 2-cuasi-transitiva con una única componente inicial C con al menos cuatro vértices hay al menos cuatro 3-reyes, pero el teorema 37 afirma que al menos hay tres. ¿Se podrá mejorar el este resultado de Bang-Jensen y Huang tal y como lo indica la observación anterior? La respuesta a esta pregunta es sí y esto se demuestra en [1], artículo publicado a raiz de esta tesis.

No podemos ignorar que hemos ignorado el caso $k = 3$. Ese caso no es mencionado pues desafortunadamente la demostración del teorema 64 requiere de que k sea mayor o igual a 5. Pero ese no es problema pues en [18] fueron caracterizadas las digráficas 3-cuasi-transitivas fuertes. Con esa caracterización como herramienta se demostró en [17] que toda digráfica 3-cuasi-transitiva D con una única componente inicial tiene un 4-rey (cosa que también se demuestra y generaliza en esta tesis). De la demostración presentada en tal artículo es sumamente fácil concluir que si la componente inicial de D tiene al menos cinco vértices entonces tiene al menos cinco 4-reyes.

Dejo las referencias y no escribo explícitamente estos resultados sobre digráficas 2- y 3-cuasi-transitivas pues, como ya mencioné, hacerlo requiere de resultados conocidos muy específicos de cada una de dichas familias. Una vez que se conocen estos resultados concliur las afirmaciones que menciono es trivial.

Capítulo 4

Conclusiones y logros

En esta tesis:

- se dio respuesta afirmativa a la conjetura 40,
- se generalizó el teorema 36,
- se generalizó y el teorema 37 y
- se dieron condiciones suficientes para la existencia de 2- y 4-reyes en digráficas k-cuasi-transitivas con $k > 3$.

Gracias a los resultados presentados en esta tesis se logró dar una mejora al teorema 37 la cuál fue publicada, junto con los resultados anteriores, en [1].

Ahora se sabe que toda digráfica k-cuasi-transitiva con una única componente inicial tiene un $(k+1)$-rey, podría pensarse que el paso siguiente es encontrar cuales de ellas tienen un k-rey o un $(k-1)$-rey, sin embargo, los corolarios 60 y 62 muestran que la existencia de un $(k+2)$-rey estricto[1] implica la existencia de un 2-rey y un 4-rey dependiendo la paridad de k, por ello es más interesante encontrar cuáles de ellas tienen un $(k+2)$-rey estricto o cuáles de ellas tienen un 2- o un 4-rey.

[1] Un l-rey es estricto si no es un $(l-1)-rey$.

Bibliografía

[1] Hortensia Galeana Sánchez, Cesar Hernández Cruz y Manuel Alejandro Juárez Camacho, On the existence and number of $(k+1)$-kings in k-quasi-transitive digraphs, Discrete Math. 313 (2013) 2582-2591.

[2] G. Gutin, The radii of n-partite tournaments, Math. Notes 40 (1986) 743-744.

[3] G. Gutin y A. Yeo, Kings in semicomplete multipartite digraphs, (completar).

[4] L. Soltés, Orientations of graphs minimizing the radius or the diameter, Math. Slovaca 36 (1986) 289-296.

[5] V. Petrovic y C. Thomassen, Kings in k-partite tournaments, Discrete Math. 98 (1991) 237-238. (1997) 411-418.

[6] V. Petrovic, Kings in bipartite tournaments, Discrete Math. 173 (1997) 187-196.

[7] V. Petrovic y M. Treml, 3-kings in 3-partite tournaments, Discrete Math. 308 (2008) 277-286.

[8] S. V. Maurer, The king chicken theorems, Math. Mag. 53 (1980) 67-80.

[9] W. D. Goddard, G. Kubicki, O.R. Oellermann y S. Tian, On multiparte tournaments, J. Combin. Theory Ser. B 52 (1991) 284-300.

[10] K. M. Koh y B. P. Tan, The number of kings in a multipartite tournament, Discrete Math. 167/168

[11] K. M. Koh y B. P. Tan, Kings in multipartite tournaments, Discrete Math. 147 (1995) 171-183.

[12] K. M. Koh y B. P. Tan, Number of 4-kings in bipartite tournaments with no 3-kings, Discrete Math. 154 (1996) 281-287.

[13] B. P. Tan, On the 3-kings and 4-kings in multipartite tournaments, Discrete Math. 306 (2006) 2702-2710.

[14] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies: III. The condition for a score structure, Bull. Math. Biophys., 15 (1953) 143-148.

[15] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies: I. Effect of inherent characteristics, Bull. Math. Biophys., 13 (1951) 1-19.

[16] V. Petrovic, King in bipartite tournaments, Discrete Math. 173 (1997) 187-196

[17] H. Galeana-Sánchez y C. Hernández-Cruz, k-kernels in k-transitive and k-cuasi-transitive digraphs (completar ficha)

[18] H. Galeana-Sánchez, I.A. Goldfeder y I. Urrutia, On the structure of 3-quasi-transitive digraphs, Discrete Mathematics 310 (2010) 2495–2498.

[19] J. Bang-Jensen y J. Huang, Kings in quasi-transitive digraphs, Discrete Math. 185 (1998) 19-27.

[20] J. Bang-Jensen y J. Huang, Quasi-transitive digraphs, J. Graph Theory. 20 (1995) 141-161.

[21] D. L. Silverman, Problem 463. Math. Mag. 35 (1962) 189.

[22] J. W. Moon, Solution to problem 463, Math. Mag. 35 (1962) 189.

[23] J. W. Moon, On subtournaments of a tournament. Can. Math. Bull. 9 (1996) 297-301

[24] J. W. Moon, Topics on Tournaments, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

[25] T. Schjelderup-Ebbe, Bietra zum Sozialpsychologie des Haushuhns. Zeit. fur Psychologie, 88 (1922) 225-52. (revisar en the king chicken theorems)

[26] K. B. Reid, Every vertex a king, Discrete Math. 38 (1982) 93-98.

[27] F. Harary, R. Norman and D. Cartwright, Structural Models: an Introduction to the Theory of Directed Graphs, Wiley, New York, 1965.

[28] W. C. Alle, The Social Life of Animals, W. W. Norton, New York, 1938

[29] W. C. Alle et al, Animal Ecology, W. B.Saunders, Philadelphia, 1949

[30] N. E. Collias, Statical factors which make for success in initial enconters between hens, Amer. Naturalist. 77 (1943) 519-538.

[31] A. M. Guhl y W. C. Alle, Some measurable effects of social organization in flocks of hens, Physiol. Zool. 17 (1944) 320-347.

[32] J. H. Potter, Dominance relations between diferent breeds of domestic hens. Physiol. Zoo. 22 (1949) 261-280.

[33] H. E. Vaughan, On Well-ordered Subsets and Maximal Elements of Ordered Sets, Pacific Jour. Math. 2 (1957) 407-412.

[34] H. Y. Lee y G. J. Chang, Medians of graphs and kings oftournaments, Taiwanese J. of Math. 1 (1997) 103-110.