



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA - CONTROL

CONTROL INTEGRAL DISCONTINUO PARA
SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
CÉSAR AGUSTÍN ZAMORA SALAZAR

TUTOR PRINCIPAL
JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ
Instituto de Ingeniería

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. LUIS A. ALVAREZ ICAZA LONGORIA

Secretario: Dra. MARÍA CRISTINA VERDE RODARTE

Vocal: Dr. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

1er. Suplente: Dr. LEONID FRIDMAN

2o. Suplente: Dr. FERNANDO CASTAÑOS LUNA

Lugar donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA

TUTOR DE TESIS:

Dr. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

FIRMA

A mis padres

Justa Salazar M. y Agustín Zamora M.

y hermanos

Rocio y Javier

por ser mi mayor motivación en la vida.

Agradecimientos

A la *Universidad Nacional Autónoma de México* y al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología*.

A los profesores del Colegio de Control Automático de la UNAM, especialmente al *Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez*, por todo el apoyo y conocimiento que hizo posible la realización de esta tesis.

A mis *padres y hermanos*, por su apoyo incondicional y de toda la vida, a ustedes les debo todo.

A *Gabriela Montserrat Martínez García*, por todo lo compartido en estos últimos años.

A mis *amigos*, por su paciencia y motivación.

A la BBC, especialmente a *Úrsula Flores, Karla García, Jared Rojas, Miguel Mayorga, Daniel Castro, Rafael Lugo y Luis Canales*, por su amistad y por todo lo compartido durante esta etapa.

Índice general

Índice de figuras	VII
1. Introducción	2
1.1. Planteamiento del Problema	2
1.2. Estado del Arte	4
1.2.1. Retroalimentación de estados	4
1.2.2. Control Integral	5
1.2.3. Twisting	8
1.2.4. Super-Twisting	9
1.2.5. Controlador Lineal + Integral Discontinuo	11
1.3. Objetivos	15
1.4. Preliminares	15
1.4.1. Estabilidad en tiempo finito	15
1.4.2. Homogeneidad Ponderada	16
1.4.3. Desigualdad de Young	16
2. Control Integral Discontinuo	18
2.1. El Control Integral Discontinuo	18
2.2. Seguimiento	20
2.2.1. Seguimiento con diferenciador de segundo orden	21
2.2.2. Seguimiento sin diferenciador de segundo orden	21
3. Función de Lyapunov para Control Integral Discontinuo	25
3.1. Función Candidata	25
3.1.1. Cambio de notación	26
3.2. Positividad Definida	27
3.3. Negatividad Definida	29
3.3.1. Introducción de algunas desigualdades	29
3.3.2. Negatividad definida	31
3.3.3. Un caso particular	34
3.4. Validación de la Función de Lyapunov	34
3.5. Caso Perturbado	36
3.6. Convergencia en Tiempo Finito	38

3.7. Escalamiento de las ganancias	39
3.8. Métodos de diseño de las ganancias del algoritmo	41
3.8.1. Diseño de las ganancias a partir del caso perturbado	41
3.8.2. Diseño de las ganancias a partir del caso nominal	43
3.9. Resumen del capítulo	44
4. Conclusiones	47
A. Prueba del Lema 1	49
B. La función $\psi(\alpha, \lambda)$	54
Bibliografía	57

Índice de figuras

1.1.	Desplazamiento de un vehículo/masa	3
1.2.	Respuesta del sistema con retroalimentación de estados y con $f(x, t) = 0$	5
1.3.	Respuesta del sistema con retroalimentación de estados y con $f(x, t)$ constante	5
1.4.	Respuesta del sistema con el control integral y $f(x, t) = 0$	7
1.5.	Respuesta del sistema con el control integral y $f(x, t)$ constante	7
1.6.	Respuesta del sistema con el control integral y $f(x, t)$ sinusoidal	8
1.7.	Respuesta del Control Twisting con $f(x, t)$ sinusoidal	9
1.8.	Señal del control Twisting para $f(x, t)$ sinusoidal	10
1.9.	Respuesta del Super-Twisting con $\varrho(x, t) \neq 0$	11
1.10.	Señal del control Super-Twisting con $\varrho(x, t) \neq 0$	11
1.11.	Sistema lineal con retroalimentación discontinua	12
1.12.	Respuesta del control lineal discontinuo con $f(x, t) = 0$	13
2.1.	Respuesta del Control Integral Discontinuo con $f(x, t)$ sinusoidal	20
2.2.	Señal de control del CID con una perturbación sinusoidal	20
2.3.	Salida y vs señal de referencia con diferenciador	22
2.4.	Señal de control para el seguimiento con diferenciador	22
2.5.	Salida y vs señal de referencia sin diferenciador	23
2.6.	Señal de control para el seguimiento sin diferenciador	23
3.1.	Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 1 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$	36
3.2.	Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$	37
3.3.	Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 3 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$	37
3.4.	Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 1 de la tabla 3.2	43
3.5.	Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.2	43
3.6.	(a) Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 1$ y $L = 1$, (b) Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 1$ y $L = 1.5$,	44
3.7.	Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 4$ y $L = 2$	45

Resumen

En la actualidad existe una gran variedad de sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos, biológicos, entre otros, que pueden ser modelados por un sistema de segundo orden, pero en donde a pesar de los avances en las técnicas de modelado se pueden presentar incertidumbres o perturbaciones.

En este trabajo de tesis se propone un algoritmo de control para sistemas de segundo orden en los que se tienen incertidumbres o perturbaciones Lipschitz respecto al tiempo, el esquema propuesto puede ser visto como una extensión del *Algoritmo Super-Twisting*, del cual conserva propiedades como la homogeneidad y robustez, además de presentar convergencia en tiempo finito mediante una señal de control continua puede ser aplicado en el seguimiento de señales variantes en el tiempo.

Se propone también una función de Lyapunov que demuestra la convergencia del algoritmo, y de la cual se derivan dos métodos de diseño de las ganancias.

Capítulo 1

Introducción

Históricamente una de las principales motivaciones en el análisis y control de sistemas fue el estudio del movimiento de un cuerpo con un grado de libertad sujeto a una fuerza, y en presencia tanto de fricción seca como viscosa. La dinámica de dicho cuerpo se puede expresar en un sistema de segundo orden, y de manera general existen varios sistemas mecánicos, eléctricos, biológicos, químicos, entre otros, que son modelados en un sistema de segundo orden. Motivo por el cual este trabajo se enfoca en sistemas de segundo orden, pero sin perder de vista la posibilidad de extender los resultados obtenidos a sistemas de mayor orden.

En este capítulo se hace el planteamiento del problema a través de un ejemplo, y se presentan algunos de los controladores más conocidos en la literatura que dan solución al problema planteado. Posteriormente se exponen los objetivos de la tesis, y finalmente se incluyen algunas definiciones y herramientas matemáticas que se usarán en capítulos posteriores.

1.1. Planteamiento del Problema

Cuando un ingeniero tiene la tarea de diseñar un controlador para una planta lo primero que requiere es el modelo de dicha planta, pero a pesar de que en la actualidad se cuenta con diferentes técnicas y/o métodos para modelar, probablemente el modelo obtenido tendrá discrepancias con la planta. Estas discrepancias generalmente provienen de dinámicas no modeladas, parámetros desconocidos o perturbaciones externas.

Para abordar este problema considere, como ejemplo ilustrativo, un vehículo que

se mueve en una dimensión. En este caso se tienen distintos factores desconocidos que influyen en el movimiento del vehículo, como la cantidad de pasajeros, el coeficiente de fricción entre las llantas y el pavimento, el cual es variante respecto al tiempo y a las condiciones ambientales, la densidad del aire, entre otras. Estas incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas impiden obtener un modelo preciso del vehículo, por lo que se considerará al vehículo como una masa que se desplaza en una dimensión, ver figura 1.1.

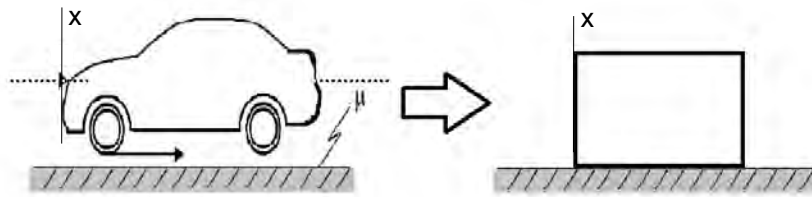


Figura 1.1: Desplazamiento de un vehículo/masa

Se obtiene una descripción en variables de estado de la dinámica de la masa introduciendo una variable para la posición y otra para la velocidad $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x, t) + u\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde u es la acción de control y $f(x, t)$ representa las incertidumbres y perturbaciones externas. Y se asume que $f(x, t)$ es Lipschitz respecto al tiempo, en donde se conoce la cota de la derivada temporal de $f(x, t)$, es decir, $|\dot{f}(x, t)| < \Delta$, con Δ conocida.

Considerando la posición x_1 como la salida del sistema, se desea llevar el vehículo a una posición \bar{x}_1 deseada, a pesar de las incertidumbres y/o perturbaciones $f(x, t)$, mediante una señal de control continua, para evitar problemas de implementación debido a restricciones en los actuadores. El caso del vehículo es solo un ejemplo, los resultados aquí presentados se pueden aplicar a cualquier sistema de segundo orden, con grado relativo $n = 2$ considerando a x_1 como la salida y con perturbaciones o incertidumbres Lipschitz respecto al tiempo acopladas al control.

1.2. Estado del Arte

A lo largo de los años se han desarrollado múltiples algoritmos que estabilizan el sistema de la forma (1.1). En esta sección se presentan algunos de estos algoritmos y mediante simulaciones se hacen notar algunas de sus propiedades. Primero se menciona un par de algoritmos continuos, después un par de algoritmos discontinuos y finalmente una combinación de estos.

1.2.1. Retroalimentación de estados

Si se considera $f(x, t) = 0$ en el sistema (1.1), con una retroalimentación de estados de la forma

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2$$

entonces el sistema queda como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1 - k_2x_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

que se puede escribir como

$$\dot{x} = Ax$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

se obtiene el polinomio característico: $p(s) = s^2 + sk_2 + k_1$, y con el criterio de Routh-Hurwitz se sabe que

$$k_1, k_2 > 0$$

son las condiciones necesarias y suficientes para que el origen del sistema (1.2) sea asintóticamente estable (figura 1.2), pero ya que en $f(x, t)$ se encuentra la dinámica del sistema este término difícilmente será igual a cero, y al considerar una perturbación constante, es decir $f(x, t) \neq 0$, el sistema ya no converge al origen (figura 1.3).

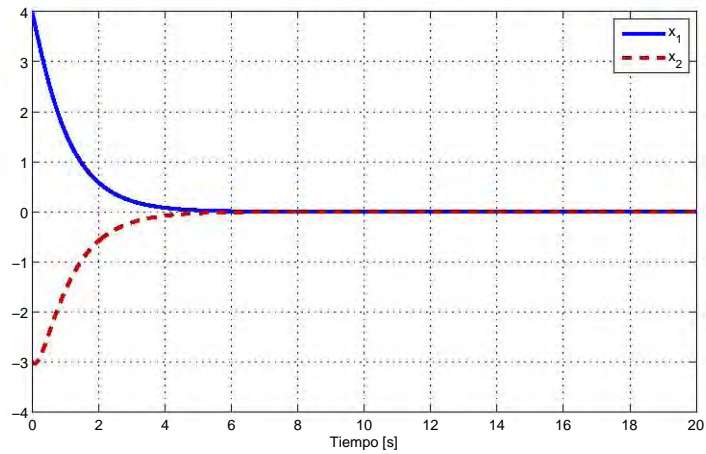


Figura 1.2: Respuesta del sistema con retroalimentación de estados y con $f(x, t) = 0$

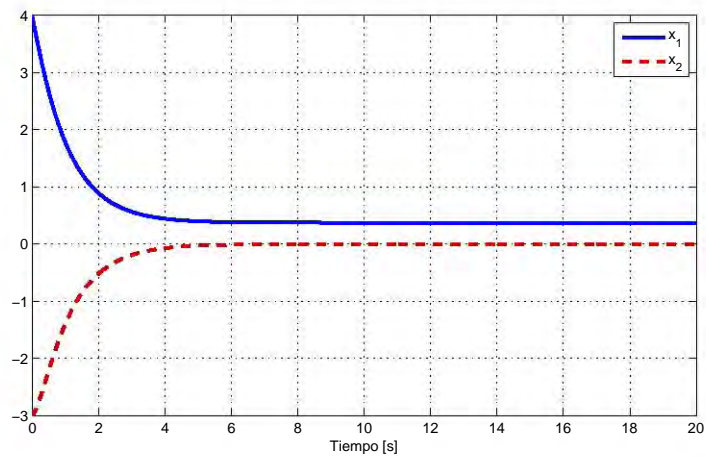


Figura 1.3: Respuesta del sistema con retroalimentación de estados y con $f(x, t)$ constante

1.2.2. Control Integral

El control integral surge de agregar un integrador a la retroalimentación de estados, y tiene la forma

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2 + z$$

$$\dot{z} = -k_3x_1$$

que al aplicarlo al sistema (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1 - k_2x_2 + x_3 + f(x, t) \\ \dot{x}_3 &= -k_3x_1\end{aligned}\tag{1.3}$$

y se puede escribir como

$$\dot{x} = Ax + W\tag{1.4}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x, t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Igual que en el caso anterior se obtienen las condiciones suficientes para que el sistema (1.3) sea asintóticamente estable cuando $f(x, t) = 0$. Para ello se calculan los valores propios de la matriz A a través del polinomio característico

$$\begin{aligned}\det|sI - A| &= \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ k_1 & s + k_2 & -1 \\ k_3 & 0 & s \end{bmatrix} = s^2(s + k_2) + k_1s + k_3 \\ &= s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_3 = 0\end{aligned}$$

y por el criterio de Routh-Hurwitz se tiene

$$\begin{aligned}k_1, k_2, k_3 &> 0 \\ k_1k_2 &> k_3\end{aligned}$$

con estas condiciones se garantiza que el sistema (1.3) es asintóticamente estable cuando $f(x, t) = 0$ (figura 1.4).

A diferencia de la retroalimentación de estados, cuando $f(x, t)$ es constante el controlador hace converger al sistema (1.3) al origen (figura 1.5), esto debido a la acción integral que se agregó y que está relacionada con la capacidad del control integral de hacer regulación y a su vez puede ser vista como robustez ante perturbaciones constantes. Pero esto no sucede cuando se presentan perturbaciones variantes en el tiempo, como se muestra en la figura 1.6, que ante una perturbación sinusoidal el controlador no hace converger las trayectorias del sistema, y que muestra la limitación que tiene este algoritmo para hacer seguimiento.

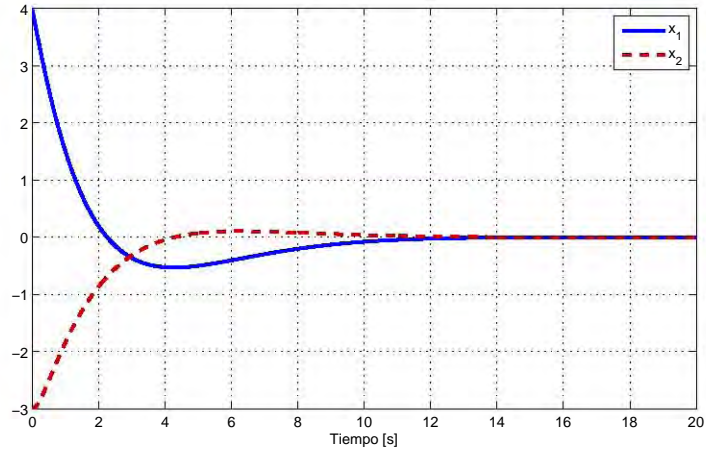


Figura 1.4: Respuesta del sistema con el control integral y $f(x, t) = 0$

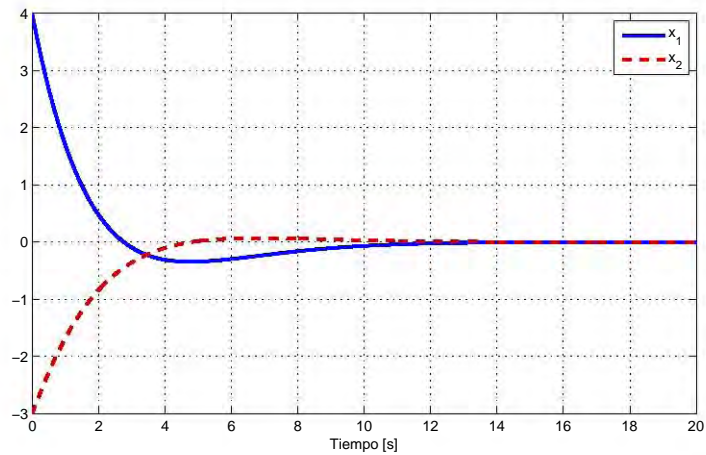


Figura 1.5: Respuesta del sistema con el control integral y $f(x, t)$ constante

Los controladores presentados hasta ahora logran la convergencia del sistema (1.1) mediante una señal de control continua cuando $f(x, t) = 0$, y para una $f(x, t) \neq 0$ solo el control integral logra estabilizar al sistema (1.1) ante una perturbación constante, pero debido a que $f(x, t)$ es variante en el tiempo y no se desvanece en el origen, aún se tiene el problema de estabilizar robustamente al sistema con este tipo de perturbaciones. Se ha probado en la literatura que para este tipo de perturbaciones no es posible estabilizar al

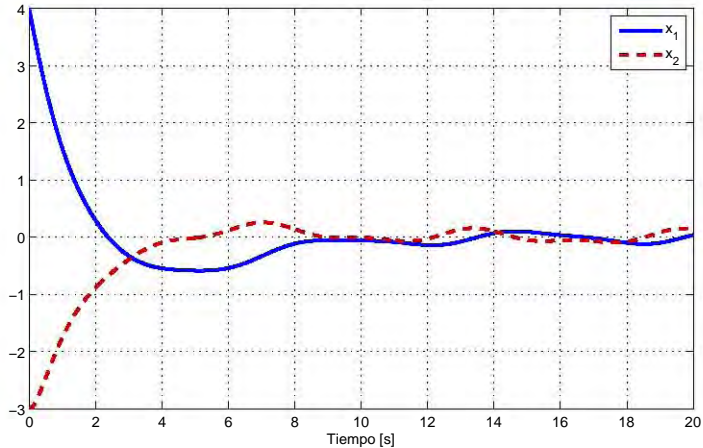


Figura 1.6: Respuesta del sistema con el control integral y $f(x, t)$ sinusoidal

sistema (1.1) mediante controladores continuos, y se probó que con el uso de controladores discontinuos se puede estabilizar el sistema (1.1) en la presencia de perturbaciones acotadas no desvanecientes en el origen y variantes en el tiempo [V. Utkin and Shi, 2009]. Ahora se presenta un par de los algoritmos discontinuos más populares, así como su principales características.

1.2.3. Twisting

El algoritmo Twisting [Levant, 1993] es un controlador que hace una retroalimentación discontinua de los estados de un sistema de segundo orden, y tiene la forma

$$u = -k_1 \operatorname{sgn}(x_1) - k_2 \operatorname{sgn}(x_2)$$

al aplicarlo al sistema (1.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 \operatorname{sgn}(x_1) - k_2 \operatorname{sgn}(x_2) + f(x, t) \end{aligned}$$

en el caso nominal, es decir, cuando $f(x, t) = 0$ se debe de cumplir

$$k_1 > k_2 > 0$$

para que se establezca el origen del sistema. En [Santiesteban et al., 2010][Sánchez and Moreno, 2012] se pueden encontrar algunas condiciones para el caso perturbado, obtenidas a través de funciones de Lyapunov.

Una de las propiedades de este algoritmo es la convergencia en tiempo finito, además de presentar propiedades de robustez ante perturbaciones acotadas variantes en el tiempo, como se muestra en la figura 1.7 en donde los estados convergen a pesar de una perturbación sinusoidal.

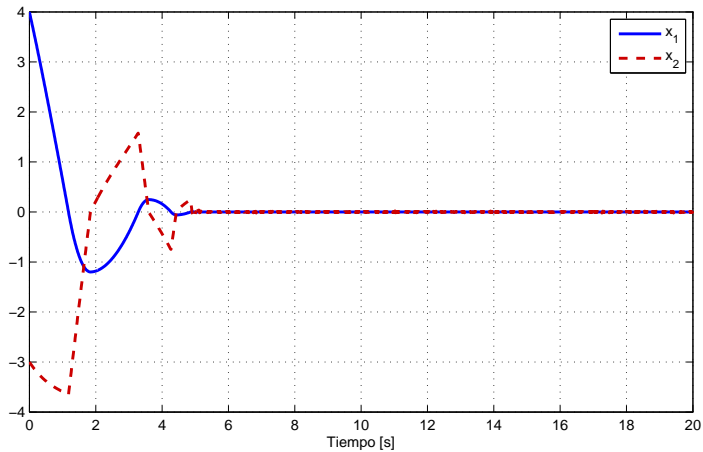


Figura 1.7: Respuesta del Control Twisting con $f(x, t)$ sinusoidal

Pero la señal de control requerida para estabilizar el sistema con esta perturbación, figura 1.8, presenta el fenómeno conocido como *Chattering*. Este fenómeno es un “*switcheo*” a altas frecuencias de la señal de control, lo cual representa un problema para su implementación práctica, además de ser indeseable debido al desgaste que puede ocasionar en los actuadores de la planta.

1.2.4. Super-Twisting

El Algoritmo Super-Twisting (STA, por sus siglas en inglés) es un conocido algoritmo de modos deslizantes de segundo orden [Levant, 1993], que se puede escribir como

$$\begin{aligned} u &= -k_1|x_1|^{1/2}\text{sgn}(x_1) + z \\ z &= -k_2\text{sgn}(x_1) \end{aligned}$$

este algoritmo fue diseñado principalmente para ser aplicado a sistemas de primer orden de la forma,

$$\dot{x}_1 = u + \rho(x, t)$$

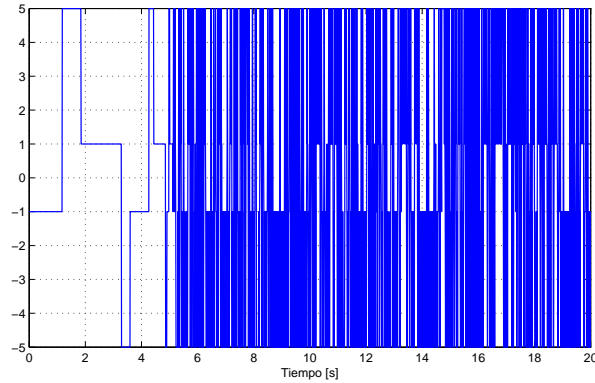


Figura 1.8: Señal del control Twisting para $f(x, t)$ sinusoidal

al aplicar el algoritmo se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{1/2}\text{sgn}(x_1) + z + \rho(x, t) \\ \dot{z} &= -k_2\text{sgn}(x_1)\end{aligned}$$

si se considera $x_2 = z + \rho(x, t)$, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{1/2}\text{sgn}(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2\text{sgn}(x_1) + \varrho(x, t)\end{aligned}\tag{1.5}$$

donde x_i son las variables de estado, k_i son ganancias para ser diseñadas y $\varrho(x, t)$ es la derivada respecto a t del término de perturbación, es decir $\varrho(x, t) = \dot{\rho}(x, t)$. En [Polyakov and Poznyak, 2009] y [Moreno and Osorio, 2012] se presentan funciones estrictas de Lyapunov a través de las cuales se muestra que bajo algunas condiciones de k_1 y k_2 , (1.5) converge en tiempo finito y es robusto ante perturbaciones acotadas $|\varrho(x, t)| \leq L$. En la figura 1.9 se muestra la respuesta de un sistema de primer orden con $\varrho(x, t) \neq 0$.

Otra característica de este algoritmo es que logra atenuar los efectos del *chattering* (figura 1.10), por lo que a diferencia del Twisting la señal de control es continua y esto facilita su implementación, lo que se traduce en menos efectos indeseables en los actuadores. Pero como se mencionó anteriormente, este algoritmo conserva sus propiedades sólo para sistemas de primer orden, que no coincide con el problema planteado en este trabajo de tesis.

Los controladores discontinuos logran resolver el problema de estabilización robusta, pero surge el problema de *chattering* que es una característica de los algoritmos

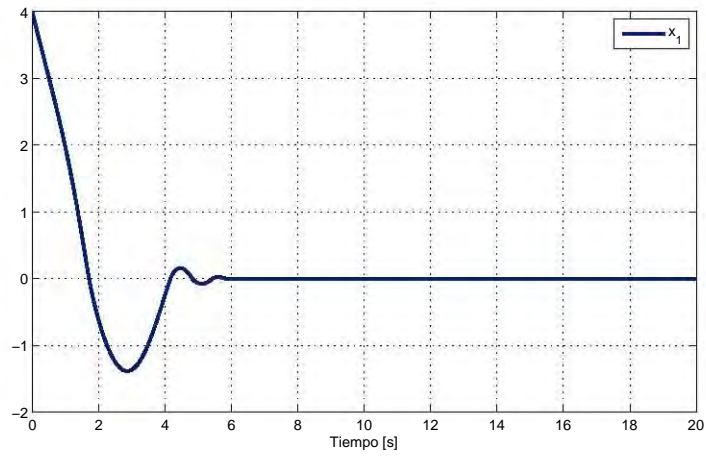


Figura 1.9: Respuesta del Super-Twisting con $\rho(x, t) \neq 0$

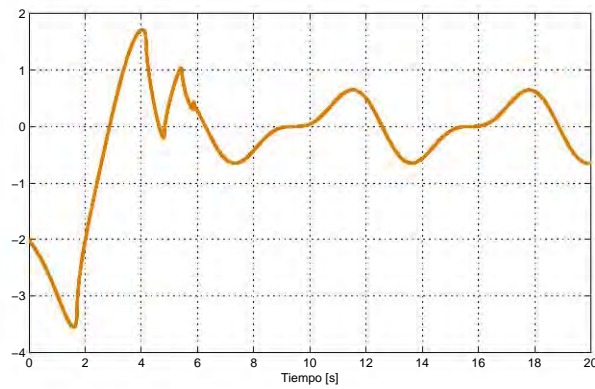


Figura 1.10: Señal del control Super-Twisting con $\rho(x, t) \neq 0$

discontinuos, y a pesar de que el STA logra atenuar este fenómeno al aplicarlo al sistema (1.1) ya solo se tiene convergencia asintótica.

1.2.5. Controlador Lineal + Integral Discontinuo

Con la intención de conservar las ventajas del control integral y los algoritmos discontinuos, surge un controlador que conserva la retroalimentación de estados lineal pero

en la parte integral del control se agrega una discontinuidad. El algoritmo tiene la forma

$$\begin{aligned} u_2 &= -k_1x_1 - k_2x_2 + z \\ \dot{z} &= -k_3\text{sgn}(x_1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

que al aplicarlo al sistema (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1 - k_2x_2 + x_3 + f(x, t) \\ \dot{x}_3 &= -k_3\text{sgn}(x_1). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Si en el sistema (1.7) se considera a x_1 como la salida, entonces este puede ser representado como un sistema dinámico lineal que en el lazo de retroalimentación presenta una función discontinua, en este caso la función *signo*, ver figura (1.11).

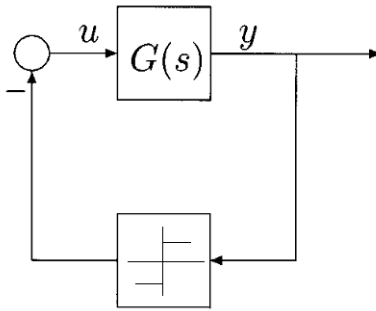


Figura 1.11: Sistema lineal con retroalimentación discontinua

Entonces el sistema (1.7), con $f(x, t) = 0$ se puede representar como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

y la función de transferencia del sistema es

$$G(s) = \frac{k_3}{s(s^2 + k_2s + k_1)} \quad (1.8)$$

Al realizar una simulación del sistema nominal con este algoritmo de control el sistema parece oscilar, figura 1.12, por lo que en la siguiente sección se hace un análisis con el método del balance armónico, en donde se muestra que debido a la discontinuidad en la retroalimentación el sistema presenta una solución periódica.

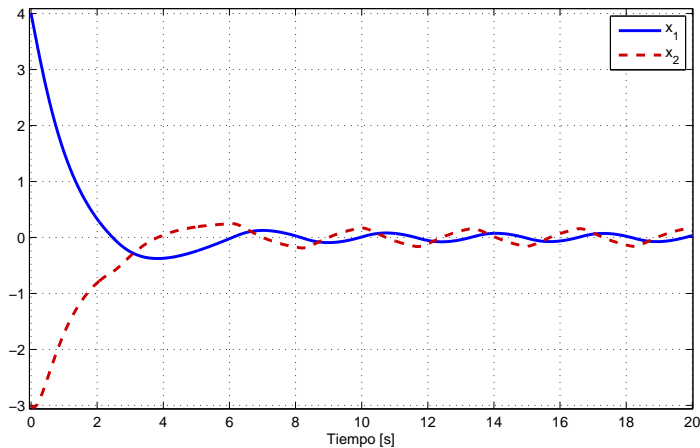


Figura 1.12: Respuesta del control lineal discontinuo con $f(x, t) = 0$

Existencia de un ciclo límite

Para determinar si este algoritmo presenta una solución periódica se hace un análisis empleando el método del balance armónico [Khalil, 1996], el cual dice que si la ecuación

$$G(j\omega)\Psi(a) + 1 = 0 \quad (1.9)$$

tiene solución (a_s, ω_s) entonces se tiene una solución periódica del sistema con amplitud y frecuencia cercanas a ω_s y a_s . La función $\Psi(a)$ es conocida como la función descriptiva de la no linealidad $\psi(y)$ que se presenta en el lazo de retroalimentación. Para nuestro caso la función descriptiva de la no linealidad $sgn(y)$ es

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi a}$$

y debido a que la función $\Psi(a)$ es real, podemos reescribir (1.9) como

$$1 + \Psi(a)Re[G(j\omega)] = 0 \quad (1.10)$$

$$Im[G(j\omega)] = 0 \quad (1.11)$$

resolviendo las ecuaciones anteriores

$$G(j\omega) = \frac{k_3}{j\omega(-\omega^2 + k_2j\omega + k_1)} = \frac{k_3}{-k_2\omega^2 + (k_1\omega - \omega^3)j}$$

multiplicando por $-k_2\omega^2 - (k_1\omega - \omega^3)j$ se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{-k_2k_3\omega - k_3(k_1 - \omega^2)j}{k_2^2\omega^3 + \omega(k_1 - \omega^2)^2}$$

resolviendo la ecuación (1.11)

$$\frac{-k_3(k_1 - \omega^2)}{k_2^2\omega^3 + \omega(k_1 - \omega^2)^2} = 0$$

entonces

$$k_1 - \omega^2 = 0$$

de donde se obtiene $\omega_s = \sqrt{k_1}$. Ahora se resuelve(1.10)

$$\frac{-k_2k_3\omega}{k_2^2\omega^3 + \omega(k_1 - \omega^2)^2}\Psi(a) + 1 = 0$$

sustituyendo $\omega = \sqrt{k_1}$

$$\frac{-k_2k_3}{k_1k_2^2}\Psi(a) + 1 = 0$$

entonces

$$\Psi(a) = \frac{k_1k_2}{k_3}$$

igualando con $\Psi(a)$ de la función descriptiva se tiene

$$\Psi(a) = \frac{k_1k_2}{k_3} = \frac{4}{\pi a}$$

entonces la frecuencia ω_s y amplitud a_s aproximadas a las que oscila la salida del sistema son

$$\omega_s = \sqrt{k_1} \quad a_s = \frac{4k_3}{\pi k_1k_2}$$

Con este algoritmo se muestra que contrario a lo que se esperaría, una combinación arbitraria de esquemas continuos con discontinuos no conserva las ventajas de ambos tipos de controladores, sino por el contrario se puede tener un resultado completamente indeseable.

1.3. Objetivos

Los algoritmos presentados en la sección anterior no logran resolver el problema de estabilización robusta en tiempo finito con una señal de control continua, por tal motivo en este trabajo de tesis se tienen los siguientes objetivos:

- Proponer un algoritmo que estabilice robustamente al sistema (1.1), con convergencia en tiempo finito y mediante una señal de control continua.
- Probar la estabilidad del algoritmos a través de una función estricta de Lyapunov.
- Proponer una metodología que permita diseñar las ganancias del algoritmo.

1.4. Preliminares

1.4.1. Estabilidad en tiempo finito

Considere que el sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.12}$$

tiene un punto de equilibrio local y asintóticamente estable y cualquier trayectoria alcanza este punto en tiempo finito, además suponga

1. f es un campo vectorial bien definido en la vecindad de 0
2. $f(0) = 0$
3. el sistema (1.12) posee solución única hacia adelante en el tiempo, esto es, si dos soluciones concuerdan en algún tiempo t_0 , entonces, concordarán en cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Denote $\varphi(t, x)$ como el mapeo de flujo, el cual está continuamente definido sobre el conjunto abierto en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Definición 1. [Bhat and Bernstein, 2000] *El origen del sistema (1.12) es estable en tiempo finito si es estable y existe un conjunto abierto U que contiene al origen, y la función $T : U \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ (conocida como función “settling-time”) tal que, para cada $x \in U \setminus \{0\}$, $\varphi(\cdot, x)$ está definido sobre $[0, T(x))$, $\varphi(t, x) \in U \setminus \{0\} \forall t \in [0, T(x))$ y el $\lim_{t \rightarrow T(x)} \varphi(t, x) = 0$.*

Es posible caracterizar la estabilidad en tiempo finito de un sistema no lineal a través de una función de Lyapunov.

Definición 2. [Bhat and Bernstein, 2000] El origen es estable en tiempo finito y la función “settling-time” es continua en cero, si y solo si, existen números reales $C > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$, y una función continua V positiva definida sobre la vecindad abierta Ω de 0, tal que

$$\dot{V}(x) \leq -CV(x)^\alpha, \forall x \in \Omega \setminus \{0\}$$

De ser así, la función “settling-time” $T(x)$ es de hecho continua en una vecindad de 0 y satisface (para $\|x\|$ suficientemente pequeña)

$$T(x) \leq \frac{1}{C(1-\alpha)} V(x)^{1-\alpha}$$

1.4.2. Homogeneidad Ponderada

Definición 3. [Bacciotti and Rosier, 2005] Elíjase un conjunto de coordenadas (x_1, \dots, x_n) en \mathbb{R}^n . Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una n -tupla de números reales positivos.

- La familia de dilataciones de un parámetro $(\delta_\epsilon^r)_{\epsilon>0}$ (asociado a r) está definida por

$$\delta_\epsilon^r(x) = (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0$$

Los números r_i son los pesos de las coordenadas.

- Se dice que una función $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es δ^r -homogénea de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si

$$V(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^m V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0$$

- Se dice que un campo vectorial $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ es δ^r -homogéneo, de grado k si la componente f_i es δ^r -homogénea, de grado $k + r_i$ para cada i ; esto es

$$f_i(\epsilon^{r_i} x_i, \dots, \epsilon^{r_n} x_n) = \epsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall i \in \llbracket i, n \rrbracket.$$

1.4.3. Desigualdad de Young

Una desigualdad aritmética clásica establece que para números reales $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$ y $q > 1$, siempre se cumple la desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

con

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Esta desigualdad se conoce como la desigualdad de Young [G. H. Hardy and Pólya, 1934].

De ahí podemos escribir

$$ab = (ca) \left(\frac{b}{c} \right) \leq \frac{(ca)^p}{p} + \frac{\left(\frac{b}{c} \right)^q}{q} = c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q}$$

entonces

$$ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q} \quad \forall c > 0$$

Esta desigualdad se usará en algunos términos cruzados de la función de Lyapunov y su derivada temporal.

Capítulo 2

Control Integral Discontinuo

El control lineal + integral discontinuo presentado en el capítulo anterior (ver sección 1.2.5) muestra que una combinación arbitraria de algoritmos continuos y discontinuos no dará como resultado un esquema que preserve las ventajas de ambos tipos de control, sino por el contrario, como es en ese caso, se pueden tener resultados completamente indeseables. Esto resalta la importancia del algoritmo que se presenta en este capítulo, el cual está inspirado en los esquemas presentados en el capítulo anterior, pero que principalmente busca extender las propiedades del algoritmo Super-Twisting a sistemas de segundo orden.

2.1. El Control Integral Discontinuo

Teorema 1. *El control definido por*

$$\begin{aligned} u &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + z \\ \dot{z} &= -k_3\text{sgn}(x_1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

estabiliza robustamente y en tiempo finito al origen del sistema (1.1) para toda perturbación $f(x,t)$ Lipschitz con respecto al tiempo con constante de Lipschitz Δ , si las ganancias k_1 , k_2 y k_3 son diseñadas adecuadamente.

Para que la perturbación $f(x(t), t)$ sea Lipschitz con respecto al tiempo, es suficiente con ser diferenciable respecto a x y a t , y que estas derivadas y las trayectorias del sistema se conserven acotadas. Para $f(t)$ es suficiente con que sea diferenciable respecto a t y su derivada sea acotada. Por ejemplo, $f(t) = 2\text{sen}(t) + \text{cos}(2t)$ es diferenciable respecto a t , y su derivada esta acotada por 4, es decir, $|\dot{f}(t)| < 4$ para todo t .

La prueba del Teorema se hará en el capítulo 3 usando una función de Lyapunov. Al aplicar el algoritmo (2.1) en el sistema (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + z + f(x, t) \\ \dot{z} &= -k_3\text{sgn}(x_1)\end{aligned}$$

si se considera $x_3 = z + f(x, t)$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3\text{sgn}(x_1) + \dot{f}(x, t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

en donde (2.2) se puede ver como una inclusión diferencial que es homogénea [Levant, 2005] con grado $\delta_f = -1$ y los pesos $\varrho = [3 \ 2 \ 1]$ y las soluciones se entienden en el sentido de Filippov [Filippov, 1988].

Se presentan dos métodos para el diseño de las ganancias k_1 , k_2 y k_3 , para las que el origen del sistema (2.2) es estable:

- Sintonizar las ganancias del algoritmo y los coeficientes de la función de Lyapunov a través del método gráfico que se presenta en la sección 3.8.1. En donde para cada Δ es necesario volver a hacer la sintonización y verificación gráfica de todos los parámetros.
- Obtener un juego de ganancias para el caso nominal, y sintonizar una constante positiva L para cada valor de Δ , ver sección 3.8.2.

La respuesta del sistema (2.2) con $f(x, t) \neq 0$ se puede ver en en la figura 2.1, en donde se muestra que el sistema converge a pesar de una perturbación sinusoidal, con lo que se muestra la propiedad de robustez a perturbaciones variantes en el tiempo.

Una característica de este algoritmo que lo diferencia del Twisting es la capacidad de hacer converger robustamente y en tiempo finito al sistema (1.1) con una señal de control continua, es decir, no presenta el fenómeno de *chattering*. La acción de control requerida para obtener la respuesta de la figura 2.1 se muestra en la figura 2.2.

Además de estabilizar robustamente al sistema (1.1) este algoritmo, a diferencia del control integral, puede ser usado para hacer seguimiento, lo cual se muestra en la siguiente sección.

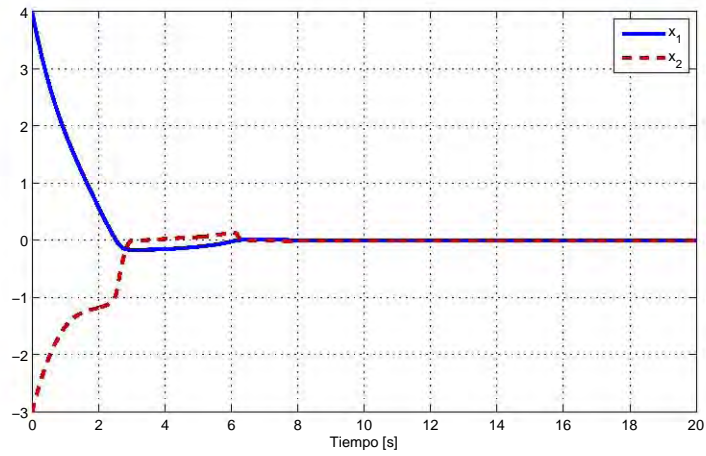


Figura 2.1: Respuesta del Control Integral Discontinuo con $f(x, t)$ sinusoidal

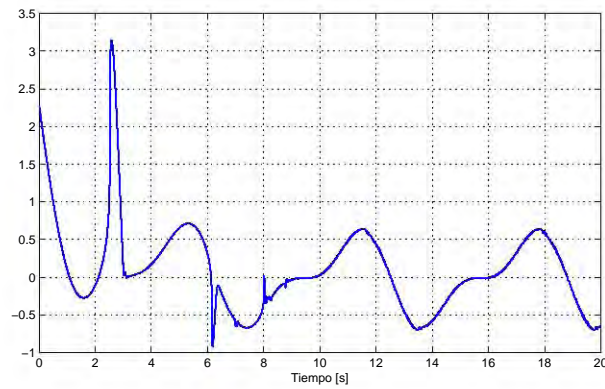


Figura 2.2: Señal de control del CID con una perturbación sinusoidal

2.2. Seguimiento

Se desea que la salida y del sistema (1.1) siga una señal de referencia $r(t)$, por lo tanto el error se define como

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - r(t) \\ e_2 &= x_2 - \dot{r}(t) \end{aligned}$$

y entonces la dinámica del error es

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= u - \ddot{r}(t) + f(x, t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

en donde el objetivo es hacer converger el error a cero. Mediante el control integral discontinuo se tienen dos alternativas para lograr esto. La primera opción requiere de un diferenciador de segundo orden para formar la ley de control, mientras que en la segunda no. A continuación se dan los detalles de ambas alternativas.

2.2.1. Seguimiento con diferenciador de segundo orden

Debido a que la señal de referencia $r(t)$ es conocida, entonces mediante el uso de un diferenciado se puede incluir \ddot{r} en la señal de control u

$$\begin{aligned}u &= -k_1|e_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(e_1) - k_2|e_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(e_2) + z + \ddot{r}(t) \\ \dot{z} &= -k_3\text{sgn}(e_1)\end{aligned}$$

al aplicarlo en (2.3) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -k_1|e_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(e_1) - k_2|e_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(e_2) + e_3 + f(x, t) \\ \dot{e}_3 &= -k_3\text{sgn}(e_1)\end{aligned}$$

este sistema es similar a (2.2), por lo tanto, como se mostró en la sección anterior el error converge a cero. En la figura 2.3 se puede ver como la salida sigue a la señal de referencia. En este caso la señal de referencia es $r(t) = 2\sin(3t)$, y la perturbación $f(x, t) = 0.5\sin(t) + 0.25\sin(2t)$. En la figura 2.4 se puede ver la señal de control requerida para lograr el seguimiento.

2.2.2. Seguimiento sin diferenciador de segundo orden

Existe otra alternativa para formar la ley de control sin el uso de un diferenciador de segundo orden. En este caso u tiene la forma

$$\begin{aligned}u &= -k_1|e_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(e_1) - k_2|e_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(e_2) + z \\ \dot{z} &= -k_3\text{sgn}(e_1)\end{aligned}\tag{2.4}$$

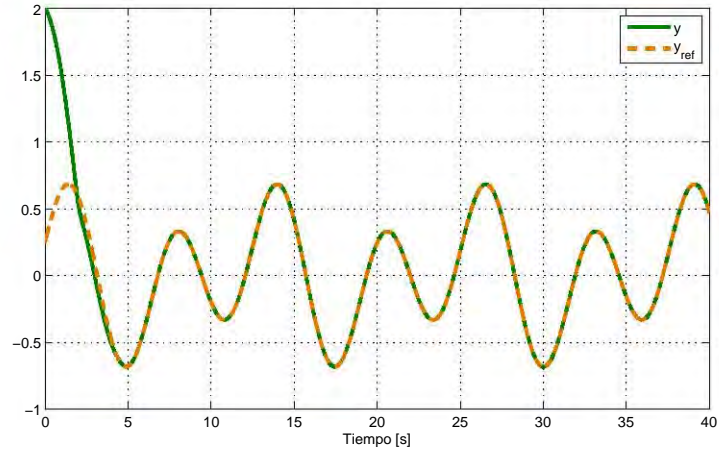


Figura 2.3: Salida y vs señal de referencia con diferenciador

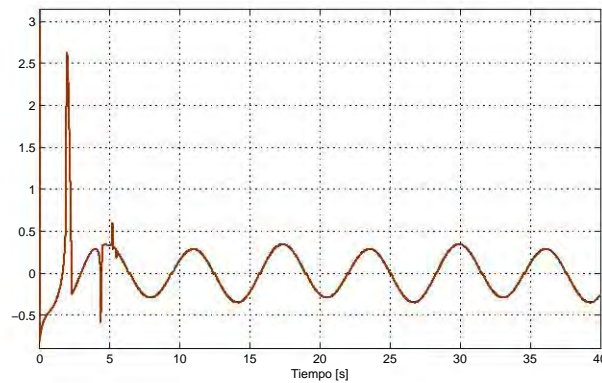


Figura 2.4: Señal de control para el seguimiento con diferenciador

aplicando esta u a (2.3) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -k_1|e_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(e_1) - k_2|e_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(e_2) + e_3 + f(x, t) - \ddot{r}(t) \\ \dot{e}_3 &= -k_3\text{sgn}(e_1). \end{aligned}$$

En este caso la segunda derivada temporal de la señal de referencia puede ser vista como parte de la perturbación, y por lo tanto se asume que la tercera derivada temporal de $r(t)$ está acotada, es decir, $|\ddot{r}(t)| < R$, donde R es conocida. A diferencia del caso anterior para

este algoritmo no se requiere el uso de un diferenciador de segundo orden, solo conocer Δ y R que permitirán diseñar adecuadamente las ganancias k_i $i = 1, 2, 3$. La comparación entre la salida y la señal de referencia se muestra en la figura 2.5, y la señal de control en la figura 2.6, en dónde se emplea la misma señal de referencia y de perturbación que en el caso anterior.

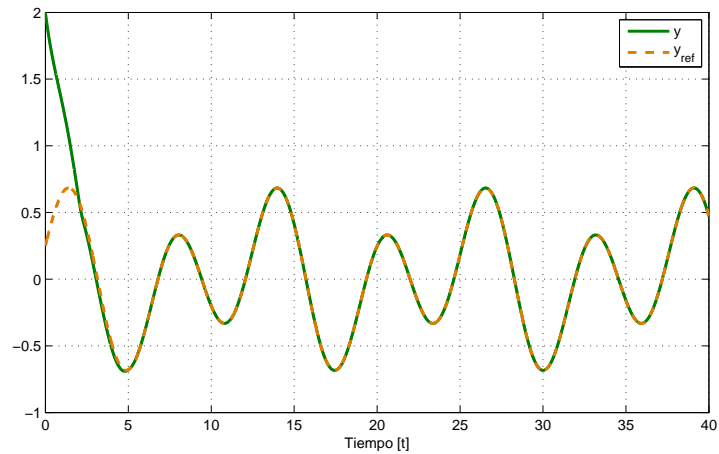


Figura 2.5: Salida y vs señal de referencia sin diferenciador

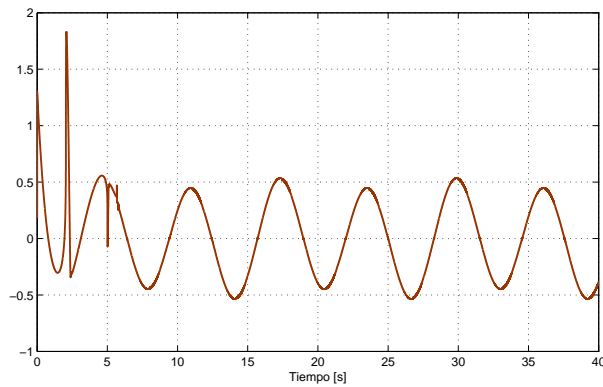


Figura 2.6: Señal de control para el seguimiento sin diferenciador

Mediante las simulaciones se puede notar que en ambos casos la salida converge a la señal de referencia, pero como era de esperarse se requiere de una señal de control de

mayor amplitud cuando no se usa el diferenciador de segundo orden, mientras que con la implementación de este la convergencia del error está sujeta a la respuesta del diferenciador y a los efectos que este pueda ocasionar en el transitorio del error.

En este capítulo se ha presentado un algoritmo que, a diferencia de los presentados en el capítulo anterior, logra estabilizar robustamente el origen del sistema (1.1) a través de una señal de control continua y en tiempo finito, el sistema resultante a lazo cerrado se puede ver como una inclusión diferencial homogénea [Levant, 2005] con grado $\delta_f = -1$ y los pesos $\varrho = [3 \ 2 \ 1]$. Con este algoritmo también se logra hacer seguimiento de una señal variante en el tiempo, característica que no presentan los algoritmos mencionados en el capítulo anterior, y que además se puede lograr a pesar de no conocer la señal de referencia.

Capítulo 3

Función de Lyapunov para Control Integral Discontinuo

En este capítulo se demuestra la convergencia del Control Integral Discontinuo presentado en el capítulo 2 mediante una función estricta de Lyapunov. Primero se propone una función candidata, posteriormente se obtienen las condiciones suficientes para que la función sea positiva definida y su derivada temporal negativa definida, lo que hace de la función una función de Lyapunov. También se valida la función al mostrar que existen conjuntos de parámetros para los que se cumplen las condiciones obtenidas. Finalmente se presentan las condiciones para el caso perturbado y se prueba la convergencia en tiempo finito.

Primero se probará la convergencia del sistema nominal, es decir, cuando $\dot{f}(x, t) = 0$, por lo que el sistema (2.2) queda como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3\text{sgn}(x_1)\end{aligned}\tag{3.1}$$

3.1. Función Candidata

Considere la siguiente función una vez continuamente diferenciable como candidata a función de Lyapunov para el sistema (3.1)

$$V(x) = \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 + \gamma_{13}x_1x_3 - \gamma_{23}x_2|x_3|^2\text{sgn}(x_3).\tag{3.2}$$

Esta función es homogénea, con $\delta_V = 4$ y los pesos $r = [3 \ 2 \ 1]$. La derivada temporal de (3.2) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & \frac{4}{3}\gamma_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1)\dot{x}_1 + 2\gamma_2|x_2|\text{sgn}(x_2)\dot{x}_2 + 4\gamma_3|x_3|^3\text{sgn}(x_3)\dot{x}_3 + \gamma_{13}x_3\dot{x}_1 + \\ & + \gamma_{13}x_1\dot{x}_3 - \gamma_{23}|x_3|^2\text{sgn}(x_3)\dot{x}_2 - 2\gamma_{23}x_2|x_3|\dot{x}_3 \end{aligned}$$

y evaluando a lo largo de las trayectorias del sistema (3.1) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & \frac{4}{3}\gamma_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1)x_2 - 2\gamma_2k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1)|x_2|\text{sgn}(x_2) - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} + \\ & + 2\gamma_2|x_2|\text{sgn}(x_2)x_3 - 4\gamma_3k_3\text{sgn}(x_1)|x_3|^3\text{sgn}(x_3) + \gamma_{13}x_3x_2 \\ & + \gamma_{23}k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1)|x_3|^2\text{sgn}(x_3) + \gamma_{23}k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2)|x_3|^2\text{sgn}(x_3) - \\ & - \gamma_{13}k_3|x_1| - \gamma_{23}|x_3|^3 + 2\gamma_{23}k_3\text{sgn}(x_1)x_2|x_3| \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.1.1. Cambio de notación

En adelante se usará una notación especial, la cual permitirá escribir las expresiones de una manera más corta, y que facilite su visualización.

Para una variable real $z \in \mathbb{R}$ elevada a una potencia $p \in \mathbb{R}$ tenemos

$$[z]^\flat = |z|^p \text{sgn}(z)$$

entonces $[z]^\flat{}^2 = |z|^2 \text{sgn}(z) \neq z^2$. Si p es un número impar el cambio de notación no afectaría el significado de la ecuación, es decir, $[z]^\flat{}^p = z^p$.

A continuación se muestran algunos ejemplos para la nueva notación:

$$\begin{aligned} [z]^\flat{}^0 &= \text{sgn}(z) \\ [z]^\flat{}^0 z^p &= |z|^p \\ [z]^\flat{}^0 |z|^p &= [z]^\flat{}^p \\ [z]^\flat{}^p [z]^\flat{}^q &= |z|^p \text{sgn}(z) |z|^q \text{sgn}(z) = |z|^{\flat+p} \end{aligned}$$

Con este cambio de notación (3.3) queda como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & \frac{4}{3}\gamma_1[x_1]^\flat{}^{\frac{1}{3}}x_2 - 2\gamma_2k_1[x_1]^\flat{}^{\frac{1}{3}}x_2 - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} + 2\gamma_2x_2x_3 - \\ & - 4\gamma_3k_3[x_1]^\flat{}^0 x_3^3 + \gamma_{13}x_3x_2 - \gamma_{13}k_3|x_1| + \gamma_{23}k_1[x_1]^\flat{}^{\frac{1}{3}}[x_3]^\flat{}^2 + \\ & \gamma_{23}k_2|x_2]^\flat{}^{\frac{1}{2}}[x_3]^\flat{}^2 - \gamma_{23}|x_3|^3 + 2\gamma_{23}k_3[x_1]^\flat{}^0 x_2|x_3| \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2. Positividad Definida

En esta sección se presentan las condiciones para que $V(x)$ sea positiva definida. La función candidata es

$$V(x) = \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 - \gamma_{23}x_2[x_3]^2 + \gamma_{13}x_1x_3.$$

La expresión anterior la podemos escribir como

$$V(x) = \xi^T \Gamma \xi + \gamma_{13}x_1x_3$$

donde

$$\xi^T = \left[|x_1|^{\frac{2}{3}} \quad x_2 \quad |x_3|^2 \right]$$

y

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -\frac{1}{2}\gamma_{23} \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma_{23} & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

Si consideramos que $\gamma_{13} = 0$ entonces $V(x)$ será positiva definida si $\Gamma > 0$, con lo que se deben cumplir las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \gamma_1 &> 0 \\ \gamma_1\gamma_2 &> 0 & \rightarrow & \gamma_2 > 0 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \frac{1}{4}\gamma_1\gamma_{23}^2 &> 0 & \rightarrow & 4\gamma_2\gamma_3 - \gamma_{23}^2 > 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Retomando la función completa se tiene

$$\begin{aligned} V(x) &= \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 - \gamma_{23}x_2[x_3]^2 + \gamma_{13}x_1x_3 \\ &\geq \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 - \gamma_{23}x_2[x_3]^2 - \gamma_{13}|x_1||x_3| \end{aligned} \tag{3.6}$$

en donde $\gamma_{13} > 0$.

Con base en la desigualdad de Young (para $\alpha_{13} > 0$ arbitrario)

$$|x_1||x_3| \leq \frac{3}{4}\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}|x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}\alpha_{13}^{-4}|x_3|^4$$

Sustituyendo en (3.6) se obtiene

$$V(x) \geq \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 - \gamma_{23}x_2[x_3]^2 - \gamma_{13} \left(\frac{3}{4}\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}|x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}\alpha_{13}^{-4}|x_3|^4 \right)$$

la ecuación anterior se puede escribir como

$$V(x) \geq \xi^T \tilde{\Gamma} \xi$$

con

$$\xi^T = \left[|x_1|^{\frac{2}{3}} \quad x_2 \quad |x_3|^2 \right]$$

y

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \frac{3}{4}\gamma_{13}\alpha_{13}^{\frac{4}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -\frac{1}{2}\gamma_{23} \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma_{23} & \gamma_3 - \frac{1}{4}\gamma_{13}\alpha_{13}^{-4} \end{bmatrix}$$

entonces para que $\tilde{\Gamma} > 0$ con $\gamma_{13} > 0$, se deben de cumplir

$$\gamma_1 - \frac{3}{4}\gamma_{13}\alpha_{13}^{\frac{4}{3}} > 0 \quad (3.7a)$$

$$\gamma_2 > 0 \quad (3.7b)$$

$$\gamma_2 \left(\gamma_3 - \frac{1}{4}\gamma_{13}\alpha_{13}^{-4} \right) - \frac{1}{4}\gamma_{23}^2 > 0 \quad (3.7c)$$

Eliminando α_{13} :

de (3.7a) se tiene

$$\alpha_{13}^{\frac{4}{3}} < \frac{4}{3} \frac{\gamma_1}{\gamma_{13}} \rightarrow \left(\alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \right)^3 < \left(\frac{4}{3} \frac{\gamma_1}{\gamma_{13}} \right)^3 \rightarrow \alpha_{13}^4 < \frac{4^3}{3^3} \frac{\gamma_1^3}{\gamma_{13}^3} \quad (3.8)$$

y de (3.7c)

$$\gamma_3 - \frac{1}{4} \frac{\gamma_{23}^2}{\gamma_2} > \frac{1}{4} \gamma_{13} \alpha_{13}^{-4}$$

multiplicando por α_{13}^4 se obtiene

$$\alpha_{13}^4 \left(\gamma_3 - \frac{1}{4} \frac{\gamma_{23}^2}{\gamma_2} \right) > \frac{1}{4} \gamma_{13} \rightarrow \alpha_{13}^4 > \frac{\gamma_2 \gamma_{13}}{4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2} \quad (3.9)$$

juntando las desigualdades (3.8) y (3.9) y usando (3.7c) para probar que $4\gamma_2\gamma_3 - \gamma_{23}^2 > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\gamma_2 \gamma_{13}}{4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2} < \frac{4^3}{3^3} \frac{\gamma_1^3}{\gamma_{13}^3} \\ 0 &< \frac{3^3 \gamma_{13}^4 \gamma_2}{4^3 \gamma_1^3} < 4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nótese que esta condición es necesaria y suficiente para que $V(x) > 0$ cuando $\gamma_{13} \geq 0$, y para todo $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. En el caso que $\gamma_{13} = 0$ esta condición se reduce a (3.5)

3.3. Negatividad Definida

La ecuación (3.4) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= -\gamma_{13}k_3|x_1| - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{23}|x_3|^3 - (2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1) [x_1]^{\frac{1}{3}}x_2 \\ &\quad + \gamma_{23}k_1[x_1]^{\frac{1}{3}}[x_3]^2 - 4\gamma_3k_3[x_1]^0x_3^3 + \gamma_{23}k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}[x_3]^2 \\ &\quad + (2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3[x_1]^0[x_3]^0) x_2x_3\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &\leq -\gamma_{13}k_3|x_1| - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{23}|x_3|^3 + |(2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1)| |x_1|^{\frac{1}{3}}|x_2| \\ &\quad + \gamma_{23}k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 + 4\gamma_3k_3|x_3|^3 + \gamma_{23}k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}[x_3]^2 \\ &\quad + (2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3[x_1]^0[x_3]^0) x_2x_3\end{aligned}$$

con $\gamma_{23}, \gamma_3 > 0$.

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &\leq -\gamma_{13}k_3|x_1| - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} - (\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) |x_3|^3 + \gamma_{23}k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 \\ &\quad + |(2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1)| |x_1|^{\frac{1}{3}}|x_2| + \lambda x_2x_3 + \gamma_{23}k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}[x_3]^2\end{aligned}\tag{3.11}$$

donde

$$\lambda = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3[x_1]^0[x_3]^0$$

nótese que dependiendo del signo de x_1 y x_3 , λ puede tomar dos valores diferentes, es decir

$$\lambda_1 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3\tag{3.12a}$$

$$\lambda_2 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} - 2\gamma_{23}k_3\tag{3.12b}$$

3.3.1. Introducción de algunas desigualdades

Para encontrar las condiciones que garanticen que $\dot{V}(x)$ sea negativa definida se busca separar los términos cruzados de (3.11), recordando la desigualdad de Young, podemos escribir

$$\begin{aligned}|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_2| &\leq \frac{1}{3}\beta_{12}^3|x_1| + \frac{2}{3}\beta_{12}^{-\frac{3}{2}}|x_2|^{\frac{3}{2}} \quad \forall \beta_{12} > 0 \\ |x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 &\leq \frac{1}{3}\beta_{13}^3|x_1| + \frac{2}{3}\beta_{13}^{-\frac{3}{2}}|x_3|^3 \quad \forall \beta_{13} > 0\end{aligned}\tag{3.13}$$

y para el resto de términos cruzados se propone la siguiente función:

Lema 1. Para todo valor real de x_2 y x_3 , para todo valor positivo de $\alpha > 0$ y $\delta > 0$, y cualquier valor de λ , la desigualdad

$$\lambda x_2 x_3 + \delta [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \frac{1}{\delta} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \delta^2 \phi |x_3|^3 \quad (3.14)$$

se satisface para todo t , si y solo si

$$\phi \geq \psi(\alpha, \lambda)$$

donde la función $\psi(\alpha, \lambda)$ está definida por

$$\psi(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \psi_1(\alpha, \lambda) & \lambda \geq -\sqrt{3\alpha} \\ \max(0, \psi_2(\alpha, \lambda)) & \lambda < -\sqrt{3\alpha} \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1(\alpha) &= -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right) \\ \psi_2(\alpha) &= \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right) \end{aligned}$$

El lema anterior es una generalización de la desigualdad de Young cuando se consideran varios monomios. Si dejamos un solo monomio de lado izquierdo de (3.14), la desigualdad se reduce a la desigualdad de Young. Para esto considere el caso cuando $\lambda = 0$ y $\delta = 1$ en (3.14), entonces de

$$[x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \phi(\alpha) |x_3|^3$$

se obtiene

$$\phi(\alpha) \geq \psi_1(\alpha) = -\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{3\alpha}} \right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3\alpha}} = \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}$$

Para el mismo caso por la desigualdad de Young se tiene

$$[x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \frac{\theta^3}{3} |x_2|^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3\theta^{\frac{3}{2}}} |x_3|^3$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{2}{3\theta^{\frac{3}{2}}}; \alpha = \frac{\theta^3}{3} \rightarrow \theta^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3\alpha} \\ \phi &= \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}} \end{aligned}$$

3.3.2. Negatividad definida

Remplazando las desigualdades (3.13) y (3.14) en (3.11), se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &\leq -\gamma_{13}k_3|x_1| - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} - (\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3)|x_3|^3 \\
&\quad + \left| (2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1) \left[\frac{1}{3}\beta_{12}^3|x_1| + \frac{2}{3}\beta_{12}^{-\frac{3}{2}}|x_2|^{\frac{3}{2}} \right] + \gamma_{23}k_1 \left[\frac{1}{3}\beta_{13}^3|x_1| + \frac{2}{3}\beta_{13}^{-\frac{3}{2}}|x_3|^3 \right] \right| \\
&\quad + \gamma_{23}k_2\alpha|x_2|^{\frac{3}{2}} + \gamma_{23}k_2\phi(\alpha)|x_3|^3 \\
&\leq -\left[\gamma_{13}k_3 - \frac{2}{3} \left| (\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1) \right| \beta_{12}^3 - \frac{1}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^3 \right] |x_1| \\
&\quad - \left[2\gamma_2k_2 - \frac{4}{3} \left| (\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1) \right| \beta_{12}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\alpha \right] |x_2|^{\frac{3}{2}} \\
&\quad - \left[\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \frac{2}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha) \right] |x_3|^3
\end{aligned}$$

entonces se deben de cumplir

$$\gamma_{13}k_3 - \frac{2}{3} \left| (\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1) \right| \beta_{12}^3 - \frac{1}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^3 > 0 \quad (3.15a)$$

$$2\gamma_2k_2 - \frac{4}{3} \left| (\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1) \right| \beta_{12}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\alpha > 0 \quad (3.15b)$$

$$\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \frac{2}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha) > 0 \quad (3.15c)$$

para algún valor positivo de $\beta_{12}, \beta_{13} > 0$ y $\alpha > 0$.

Eliminando β_{12} :

De (3.15a) se obtiene

$$\beta_{12}^3 < \frac{3\gamma_{13}k_3 - \gamma_{23}k_1\beta_{13}^3}{2 \left| (\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1) \right|}$$

y de (3.15b)

$$\beta_{12}^3 > \frac{4^2 \left| (\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1) \right|^2}{3^2 (2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2}$$

aquí se excluye el caso en que $\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1 = 0$ que será tratado más adelante, y de las desigualdades anteriores se tiene

$$2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha > 0 \quad (3.16a)$$

$$3\gamma_{13}k_3 - \gamma_{23}k_1\beta_{13}^3 > 0 \quad (3.16b)$$

$$\frac{4^2 \left| (\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1) \right|^2}{3^2 (2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2} < \frac{3\gamma_{13}k_3 - \gamma_{23}k_1\beta_{13}^3}{2 \left| (\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1) \right|} \quad (3.16c)$$

las desigualdades (3.16b) y (3.16c) se pueden escribir como

$$\beta_{13}^3 < \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} \quad (3.17a)$$

$$\beta_{13}^3 < \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} - \frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2} \quad (3.17b)$$

en donde claramente (3.16b) está incluida en (3.16c), además se ha asumido que $\gamma_{23} > 0$.

Eliminación de β_{13} :

De (3.15c) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &< \gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha) \\ \beta_{13}^3 &> \frac{2^2 \gamma_{23}^2 k_1^2}{3^2 (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha))^2} \end{aligned}$$

entonces, considerando (3.17b) junto con la desigualdad anterior

$$\frac{2^2 \gamma_{23}^2 k_1^2}{3^2 (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha))^2} < \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} - \frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}$$

por lo tanto las desigualdades que resultan de la eliminación de β_{12} y β_{13} , son

$$2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha > 0 \quad (3.18a)$$

$$\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha) > 0 \quad (3.18b)$$

$$\frac{2^2 \gamma_{23}^2 k_1^2}{3^2 (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha))^2} < \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} - \frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2} \quad (3.18c)$$

para que la última desigualdad se cumpla se requiere

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} - \frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2} \\ \frac{3\gamma_{13}k_3}{\gamma_{23}k_1} &> \frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2} \end{aligned}$$

usando (3.18a)

$$(2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha) > \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}}$$

entonces

$$0 < \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}} \quad (3.19)$$

Reescribiendo (3.18c)

$$\frac{2^2 \gamma_{23}^2 k_1^2}{3^2 (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha))^2} < \frac{3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \left(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right) \right|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}$$

$$\frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \left(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right) \right|^3} < (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha))^2$$

entonces se deben de cumplir

$$3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \left(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right) \right|^3 > 0$$

$$\phi(\alpha) < \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \left(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \sqrt{\frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \left(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right) \right|^3}} \right)$$

Hasta aquí se tienen las desigualdades

$$0 < \phi(\alpha) < v(\alpha) \tag{3.20}$$

$$0 < 3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \left(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right) \right|^3 \tag{3.21}$$

$$0 < 2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha \tag{3.22}$$

$$0 < \gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha) \tag{3.23}$$

con

$$v(\alpha) \triangleq \frac{1}{\gamma_{23} k_2} (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \sqrt{\tau}) \tag{3.24}$$

donde

$$\tau = \frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \left(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right) \right|^3}$$

las desigualdades (3.21), (3.22) y (3.23) son esenciales para asegurar que (3.20) esté bien definida.

De (3.23)

$$\phi(\alpha) < \frac{1}{\gamma_{23} k_2} (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3)$$

Nótese que si se cumple (3.20) se cumple (3.23), por lo que (3.23) es innecesaria.

De (3.21)

$$(2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 > \frac{2 \cdot 4^2 \left| \left(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right) \right|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}$$

usando (3.22)

$$\gamma_{23}k_2\alpha < 2\gamma_2k_2 - \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1|^3}{3^3\gamma_{13}k_3}}$$

entonces

$$0 < \alpha < 2\frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1|^3}{3^3\gamma_{13}k_3}} \quad (3.25)$$

por lo que (3.25) es equivalente a (3.21) y (3.22), luego entonces para que la función candidata sea negativa definida se deben de cumplir (3.20) y (3.25).

3.3.3. Un caso particular

Se considera el caso cuando $\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1 = 0$, entonces

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma_1}{3k_1} \quad (3.26)$$

y en este caso, de (3.15a)-(3.15b) se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_{13}k_3 - \frac{1}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^3 &> 0 \\ 2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha &> 0 \\ \gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \frac{2}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha) &> 0 \end{aligned}$$

y de las desigualdades anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 2\frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} \\ 0 < \phi(\alpha) < \frac{1}{\gamma_{23}k_2} \left(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \sqrt{\frac{2^2\gamma_{23}^3k_1^3}{3^3\gamma_{13}k_3}} \right) \end{aligned}$$

cuando se satisface (3.26).

3.4. Validación de la Función de Lyapunov

Al cumplir las condiciones de positividad y negatividad definida que se obtuvieron en las secciones anteriores, se garantiza que la función propuesta deja de ser candidata para convertirse en Función de Lyapunov, las condiciones obtenidas son

$$0 < \frac{3^3 \gamma_{13}^4 \gamma_2}{4^3 \gamma_1^3} < 4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2 \quad (3.28)$$

$$0 < \phi(\alpha) < v(\alpha) \quad (3.29)$$

$$0 < \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}} \quad (3.30)$$

donde $v(\alpha)$ está definida en (3.24).

En esta sección se tiene el propósito de determinar que ganancias k_1, k_2 y k_3 hacen al sistema (3.1) estable y la función de Lyapunov que lo demuestra, es decir, encontrar los coeficientes de la función $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{13}$ y γ_{23} que en conjunto cumplan con las desigualdades (3.28)-(3.30). De (3.28) se obtiene

$$\gamma_3 > \frac{3^3 \gamma_2 \gamma_{13}^4}{4^4 \gamma_1^3 \gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2}$$

sea η una variable positiva y que cumple $\eta > 1$, entonces

$$\gamma_3 = \eta \left(\frac{3^3 \gamma_2 \gamma_{13}^4}{4^4 \gamma_1^3 \gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2} \right) \quad (3.31)$$

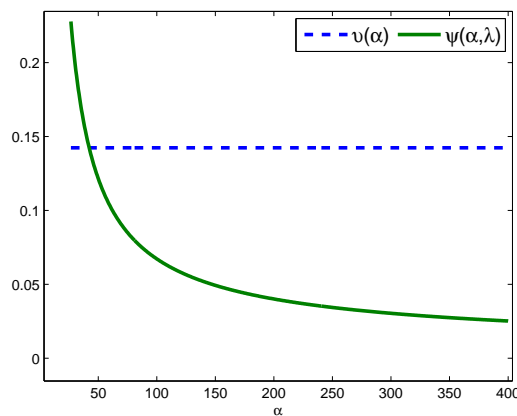
mientras que a (3.29) se le puede dar una interpretación gráfica, en donde la curva de la función $\psi(\alpha, \lambda)$ que cumple $\psi(\alpha, \lambda) \leq \phi(\alpha)$, tiene que pasar por debajo de la curva de la función $v(\alpha)$, dentro del intervalo permitido de α , el cual está definido por (3.30), además se considera el caso particular cuando

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma_1}{3k_1}$$

En la tabla 3.1 se presenta una serie de parámetros para los cuales la función propuesta es una función de Lyapunov.

En las figuras 3.1-3.3 se muestran las gráficas de las funciones $v(\alpha)$ y $\psi(\alpha, \lambda)$ correspondientes a cada columna de la tabla de parámetros 3.1 que cumplen con la desigualdad (3.29). Nótese que esta última condición debería involucrar a dos funciones ψ ya que existen λ_1 y λ_2 , pero debido a que $\psi_{\lambda_1} > \psi_{\lambda_2}$, ver apéndice B, la curva de ψ_{λ_2} se ha omitido de las gráficas, en donde la función $\psi = \psi_{\lambda_1}$.

	Figura 3.1	Figura 3.2	Figura 3.3
k_1	2	2	7
k_2	2	3	5
k_3	0.15	1.1	5
γ_1	6	5	9
γ_2	2	1.66	0.85
γ_3	8.6×10^{-3}	2.5×10^{-3}	1×10^{-4}
γ_{13}	2	1	1
γ_{23}	0.01	0.1	0.01
η	1.1	1.1	1.1

Cuadro 3.1: Parámetros de la función de Lyapunov con $\Delta = 0$ Figura 3.1: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 1 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$

3.5. Caso Perturbado

Considere ahora el sistema con $f(x, t) \neq 0$, es decir

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -k_3\text{sgn}(x_1) + \dot{f}(x, t)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

en dónde, como se mencionó anteriormente, $|\dot{f}(x, t)| < \Delta$, con Δ conocida.

Recordando la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2|x_2|^2 + \gamma_3|x_3|^4 + \gamma_{13}x_1x_3 - \gamma_{23}x_2|x_3|^2\text{sgn}(x_3)$$

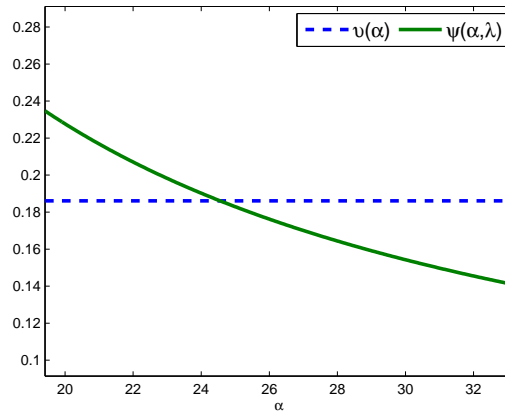


Figura 3.2: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$

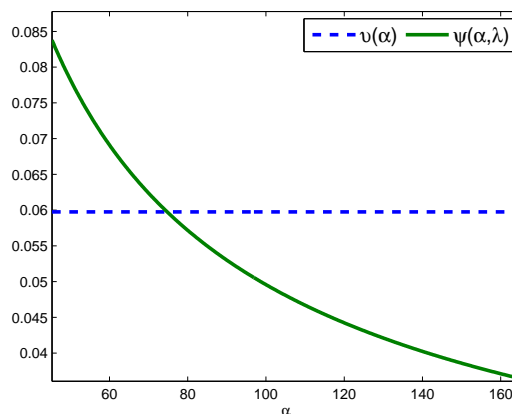


Figura 3.3: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 3 de la tabla 3.1 con $\Delta = 0$

se obtiene la derivada temporal y evaluando a lo largo de las trayectorias del sistema (3.32) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & -\gamma_{13}k_3|x_1| + \gamma_{13}x_1\dot{f}(x, t) - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{23}|x_3|^3 - \left(2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1\right) [x_1]^{\frac{1}{3}}x_2 \\ & + \gamma_{23}k_1[x_1]^{\frac{1}{3}}[x_3]^2 - 4\gamma_3k_3[x_1]^0x_3^3 + 4\gamma_3x_3^3\dot{f}(x, t) + \gamma_{23}k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}[x_3]^2 \\ & + \left(2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3[x_1]^0[x_3]^0 - 2\gamma_{23}[x_3]^0\dot{f}(x, t)\right) x_2x_3 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) \leq & -\gamma_{13}(k_3 - \Delta)|x_1| - 2\gamma_2 k_2 |x_2|^{\frac{3}{2}} - (\gamma_{23} - 4\gamma_3(k_3 + \Delta))|x_3|^3 \\ & + |(2\gamma_2 k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1)| |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_2| + \gamma_{23} k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_3|^2 + \lambda x_2 x_3 \\ & + \gamma_{23} k_2 [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2\end{aligned}$$

con $\gamma_{23}, \gamma_3 > 0$, y

$$\lambda = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23} k_3 [x_1]^0 [x_3]^0 + 2\gamma_{23} [x_3]^0 \Delta$$

nótese que en este caso dependiendo del signo de x_1 y x_3 , λ puede tomar cuatro valores diferentes, pero solo se consideraran el mínimo y el máximo, es decir

$$\lambda_1 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}(k_3 + \Delta)$$

$$\lambda_2 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} - 2\gamma_{23}(k_3 + \Delta)$$

Nuevamente se rempazan las desigualdades (3.13) y (3.14), y para el caso perturbado se tienen las desigualdades

$$\Delta < k_3 \tag{3.34a}$$

$$0 < \phi(\alpha) < v(\alpha) \tag{3.34b}$$

$$0 < \alpha < 2\frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1|^3}{3^3 \gamma_{13}(k_3 - \Delta)}} \tag{3.34c}$$

con

$$v(\alpha) \triangleq \frac{1}{\gamma_{23}k_2} \left(\gamma_{23} - 4\gamma_3(k_3 + \Delta) - \sqrt{\Pi} \right) \tag{3.35}$$

donde

$$\Pi = \frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta) (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1 \right|^3}$$

3.6. Convergencia en Tiempo Finito

Debido a la homogeneidad de V y \dot{V} , con los grados $\delta_V = 4$ y $\delta_{\dot{V}} = 3$, respectivamente, entonces la función

$$W(x) = \frac{-\dot{V}(x)}{V^{\frac{3}{4}}(x)}$$

es homogénea de grado $\delta_W = 0$, y dado que $W(x) = W(k^3 x_1, k^2 x_2, k x_3)$ para todo $k > 0$, todos los valores de la función son tomados en la bola homogénea unitaria, es decir, $B_h =$

$\{x \in \mathbb{R} \mid |x_1|^{\frac{2}{3}} + |x_2| + |x_3|^2 = 1\}$. En B_h la función V y \dot{V} son continuas y diferentes de cero. Entonces $W(x)$ tiene un mínimo positivo que puede ser calculado por $\kappa = \min_{x \in B_h} W(x)$. Esto implica que

$$\frac{-\dot{V}(x)}{V^{\frac{3}{4}}(x)} \geq \kappa \rightarrow \dot{V}(x) \leq -\kappa V^{\frac{3}{4}}(x)$$

De esta desigualdad diferencial se aprecia que las trayectorias convergen a cero en tiempo finito. La solución de la ecuación diferencial $\dot{v}(t) = -\kappa v(t)$ está dada por $v^{\frac{1}{4}}(t) = v^{\frac{1}{4}}(0) - \frac{1}{4}\kappa t$. Por el lema de comparación se sabe que el tiempo de convergencia puede ser estimado como

$$T(x_0) \leq \frac{4}{\kappa} V^{\frac{1}{4}}(x_0).$$

3.7. Escalamiento de las ganancias

Suponga que el origen $x = 0$ es estable en tiempo finito para el sistema (3.32) con las ganancias (k_1, k_2, k_3) , y $V(x)$ en (3.2) es una función de Lyapunov para el conjunto de parámetros $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{13}, \gamma_{23})$. Si aplicamos las transformaciones $(k_1, k_2, k_3) \rightarrow (Lk_1, L^{\frac{3}{4}}k_2, L^{\frac{3}{2}}k_3)$ y $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{13}, \gamma_{23}) \rightarrow (L^{-1}\gamma_1, L^{-2}\gamma_2, L^{-5}\gamma_3, L^{-2}\gamma_{13}, L^{-\frac{7}{2}}\gamma_{23})$ todas las desigualdades se conservan bajo estas transformaciones. Entonces el origen $x = 0$ es también estable en tiempo finito para el sistema (2.2) con las ganancias $(Lk_1, L^{\frac{3}{4}}k_2, L^{\frac{3}{2}}k_3)$, y $V(x)$ en (3.2) es una función de Lyapunov para el conjunto de parámetros $(L^{-1}\gamma_1, L^{-2}\gamma_2, L^{-5}\gamma_3, L^{-2}\gamma_{13}, L^{-\frac{7}{2}}\gamma_{23})$, para cualquier número real positivo, $L > 0$, cuando $\Delta = 0$.

Se analizará esta transformación en el caso perturbado, entonces, aplicando la transformación al sistema (2.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -Lk_1|x_1|^{\frac{1}{3}}\text{sgn}(x_1) - L^{\frac{3}{4}}k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -L^{\frac{3}{2}}k_3\text{sgn}(x_1) + \dot{f}(x, t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

de igual forma en (3.5), que es la derivada temporal de la función de Lyapunov con la perturbación,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{\gamma_{13}}{L^2}L^{\frac{3}{2}}k_3|x_1| + \frac{\gamma_{13}}{L^2}x_1\dot{f}(x, t) - 2\frac{\gamma_2}{L^2}L^{\frac{3}{4}}k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} - \frac{\gamma_{23}}{L^{\frac{7}{2}}}|x_3|^3 \\ &\quad - \left(2\frac{\gamma_2}{L^2}Lk_1 - \frac{4}{3}\frac{\gamma_1}{L}\right)|x_1|^{\frac{1}{3}}x_2 + \frac{\gamma_{23}}{L^2}Lk_1|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 \\ &\quad - 4\frac{\gamma_3}{L^5}L^{\frac{3}{2}}k_3|x_1|^0|x_3|^3 + 4\frac{\gamma_3}{L^5}x_3^3\dot{f}(x, t) + \frac{\gamma_{23}}{L^2}L^{\frac{3}{4}}k_2|x_2|^{\frac{1}{2}}|x_3|^2 \\ &\quad + \left(2\frac{\gamma_2}{L^2} + \frac{\gamma_{13}}{L^2} + 2\frac{\gamma_{23}}{L^{\frac{7}{2}}}L^{\frac{3}{2}}k_3|x_1|^0|x_3|^0 - 2\frac{\gamma_{23}}{L^2}|x_3|^0\dot{f}(x, t)\right)x_2x_3 \end{aligned}$$

la expresión anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\gamma_{13}k_3 \left| \frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}} \right| - 2\gamma_2k_2 \left| \frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}} \right|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{23} \left| \frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}} \right|^3 - (2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1) \left[\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}} \\ & + \gamma_{23}k_1 \left[\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}} \right]^2 - 4\gamma_3k_3 \left[\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}} \right]^0 \left(\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}} \right)^3 + \gamma_{23}k_2 \left[\frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}} \right]^2 \\ & + \left(2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3 \left[\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}} \right]^0 \left[\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}} \right]^0 \right) \left(\frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}} \right) \left(\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}} \right) \\ & + \gamma_{13} \left(\frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} + 4\gamma_3 \left(\frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}} \right)^3 \frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} - 2\gamma_{23} \frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}} \right) \left| \frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}} \right|. \end{aligned}$$

Considerando el siguiente cambio de coordenadas $z_1 = \frac{x_1}{L^{\frac{1}{2}}}$, $z_2 = \frac{x_2}{L^{\frac{5}{6}}}$ y $z_3 = \frac{x_3}{L^{\frac{7}{6}}}$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\gamma_{13}k_3 |z_1| - 2\gamma_2k_2 |z_2|^{\frac{3}{2}} - \gamma_{23} |z_3|^3 - (2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1) |z_1|^{\frac{1}{3}} z_2 \\ & + \gamma_{23}k_1 |z_1|^{\frac{1}{3}} |z_3|^2 - 4\gamma_3k_3 |z_1|^0 z_3^3 + \gamma_{23}k_2 |z_2|^{\frac{1}{2}} |z_3|^2 \\ & + \left(2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3 |z_1|^0 |z_3|^0 \right) z_2 z_3 \\ & + \gamma_{13} z_1 \frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} + 4\gamma_3 z_3^3 \frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} - 2\gamma_{23} |z_3| z_2 \frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

en la sección 3.3.2 se obtuvo que bajo ciertas condiciones de k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{13} y γ_{23} se cumple la desigualdad

$$\dot{V} \leq -\alpha_1|x_1| - \alpha_2|x_2| - \alpha_3|x_3| < 0$$

cuando $f(x,t) = 0$ y con

$$\begin{aligned} 0 < \alpha_1 &= \gamma_{13}k_3 - \frac{2}{3} |(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)| \beta_{12}^3 - \frac{1}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^3 \\ 0 < \alpha_2 &= 2\gamma_2k_2 - \frac{4}{3} |(\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1)| \beta_{12}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\alpha \\ 0 < \alpha_3 &= \gamma_{23} - 4\gamma_3k_3 - \frac{2}{3}\gamma_{23}k_1\beta_{13}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23}k_2\phi(\alpha) \end{aligned}$$

entonces (3.37) se puede escribir como

$$\dot{V} \leq -\alpha_1|z_1| - \alpha_2|z_2| - \alpha_3|z_3| + \frac{\dot{f}(x,t)}{L^{\frac{3}{2}}} (\gamma_{13}z_1 - 2\gamma_{23}z_2z_3 + 4\gamma_3|z_3|^3)$$

si además $|\dot{f}(x,t)| < \Delta$, entonces

$$\dot{V} \leq -\alpha_1|z_1| - \alpha_2|z_2| - \alpha_3|z_3| + \frac{\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} (\gamma_{13}z_1 + 2\gamma_{23}z_2z_3 + 4\gamma_3|z_3|^3). \quad (3.38)$$

De la desigualdad de Young

$$|z_2||z_3| \leq \vartheta_1|z_2|^{\frac{3}{2}} + \vartheta_2|z_3|^3$$

sustituyendo en (3.38) se obtiene

$$\dot{V} \leq - \left(\alpha_1 - \frac{\gamma_{13}\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} \right) |z_1| - \left(\alpha_2 - \frac{2\vartheta_1\gamma_{23}\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} \right) |z_2|^{\frac{3}{2}} - \left[\alpha_3 - (4\gamma_3 + 2\vartheta_2\gamma_{23}) \frac{\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} \right] |z_3|^3$$

en donde se muestra que se posible escoger una L los suficientemente grande de tal manera que

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \frac{\gamma_{13}\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} &> 0 \\ \alpha_2 - \frac{2\vartheta_1\gamma_{23}\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} &> 0 \\ \alpha_3 - (4\gamma_3 + 2\vartheta_2\gamma_{23}) \frac{\Delta}{L^{\frac{3}{2}}} &> 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Esto demuestra que una vez que se ha obtenido un juego de parámetros para los cuales el origen del sistema en el caso nominal es estable, solo es necesario encontrar una \bar{L} lo suficientemente grande que cumpla con (3.39) y entonces para toda $L > \bar{L}$ se demuestra la convergencia del origen del sistema perturbado.

Con esto también se muestra que el algoritmo es Robusto ante cualquier perturbación que sea Lipschitz con respecto al tiempo, es decir, sin importar cual sea la cota de la derivada temporal de la perturbación, teóricamente siempre será posible encontrar una \bar{L} para la cual la derivada de la función de Lyapunov sea negativa definida.

3.8. Métodos de diseño de las ganancias del algoritmo

A continuación se presentan dos métodos para el diseño de las ganancias del algoritmo (2.1), los cuales surgen de la función de Lyapunov propuesta.

3.8.1. Diseño de las ganancias a partir del caso perturbado

El diseño de las ganancias k_1 , k_2 y k_3 que estabilizan el origen del sistema (2.2) consiste en encontrar un conjunto de parámetros k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{13} y γ_{23} , que cumplan las desigualdades

$$0 < \frac{3^3\gamma_{13}^4\gamma_2}{4^3\gamma_1^3} < 4\gamma_2\gamma_3 - \gamma_{23}^2 \quad (3.40)$$

$$\Delta < k_3 \quad (3.41)$$

$$0 < \phi(\alpha) < v(\alpha) \quad (3.42)$$

$$0 < \alpha < 2\frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1|^3}{3^3\gamma_{13}(k_3 - \Delta)}} \quad (3.43)$$

	Figura 3.4	Figura 3.5
k_1	2	7
k_2	3	5
k_3	1.1	6
γ_1	11	19
γ_2	3.66	1.81
γ_3	6×10^{-4}	2.05
γ_{13}	1.5	0.75
γ_{23}	0.05	0.1
η	1.1	1.1
Δ	1	4

Cuadro 3.2: Parámetros de la función de Lyapunov

con Δ conocida y $v(\alpha)$ definida en (3.35).

Entonces se propone una $k_3 > \Delta$, y de la misma forma que en la validación de la función de Lyapunov en el caso nominal, se considera

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma_1}{3k_1}$$

y de (3.40)

$$\gamma_3 = \eta \left(\frac{3^3 \gamma_2 \gamma_{13}^4}{4^4 \gamma_1^3 \gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2} \right)$$

con la variable positiva $\eta > 1$.

A la condiciones (3.42) y (3.43) se les da nuevamente una interpretación gráfica, en donde (3.43) define el intervalo de α en el que la curva de la función $\psi(\alpha, \lambda)$ debe pasar por debajo de la curva de la función $v(\alpha)$. Se tienen entonces los parámetros $k_1, k_2, k_3, \gamma_1, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ y η para ser diseñados de tal forma que cumplan con que con las condiciones (3.40)-(3.43) para cada Δ . En las figuras 3.4 y 3.5 se muestran las gráficas de las funciones $v(\alpha)$ y $\psi(\alpha, \lambda)$ correspondientes a cada columna de la tabla de parámetros 3.2 que cumplen con las desigualdades (3.40)-(3.43).

Note que en este caso para $\Delta = 1$ y $\Delta = 4$ se tuvieron que diseñar $k_1, k_2, k_3, \gamma_1, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ y η , de tal forma que con la verificación gráfica de las desigualdades se garantiza la convergencia del origen del sistema.

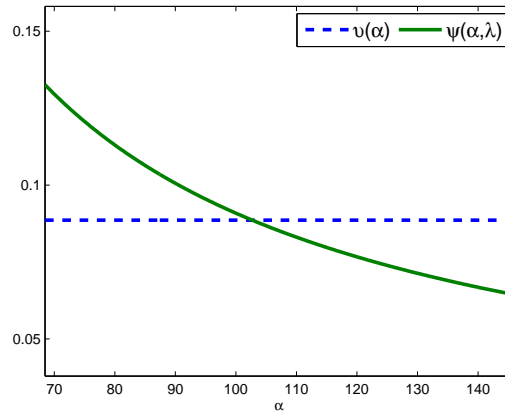


Figura 3.4: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 1 de la tabla 3.2

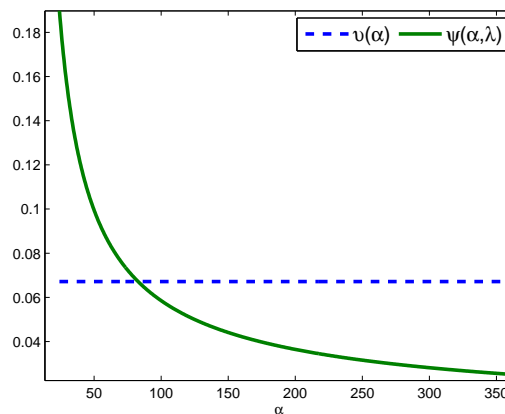


Figura 3.5: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.2

3.8.2. Diseño de las ganancias a partir del caso nominal

Como consecuencia de la transformación que se presentó en la sección anterior surge otro método de diseño. En este método a partir de una serie de parámetros que se hayan obtenido de las condiciones para el caso nominal, solo se requiere rediseñar la variable positiva $L > 1$ para una Δ dada.

Por ejemplo, considere los parámetros del caso nominal de la segunda columna de la tabla 3.1: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1.1$, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 = 1.66$, $\gamma_3 = 2.5 \times 10^{-3}$, $\gamma_{13} = 1$, $\gamma_{23} = 0.1$ y

$\eta = 1.1$, que al ser evaluados con $\Delta = 1$ no cumplen con la condición $\psi(\alpha, \lambda) < v(\alpha)$, ver figura 3.6 (a), entonces se ajusta el valor de L a 1.5 y al verificar con este valor se observa que la condición se cumple, ver figura 3.6 (b).

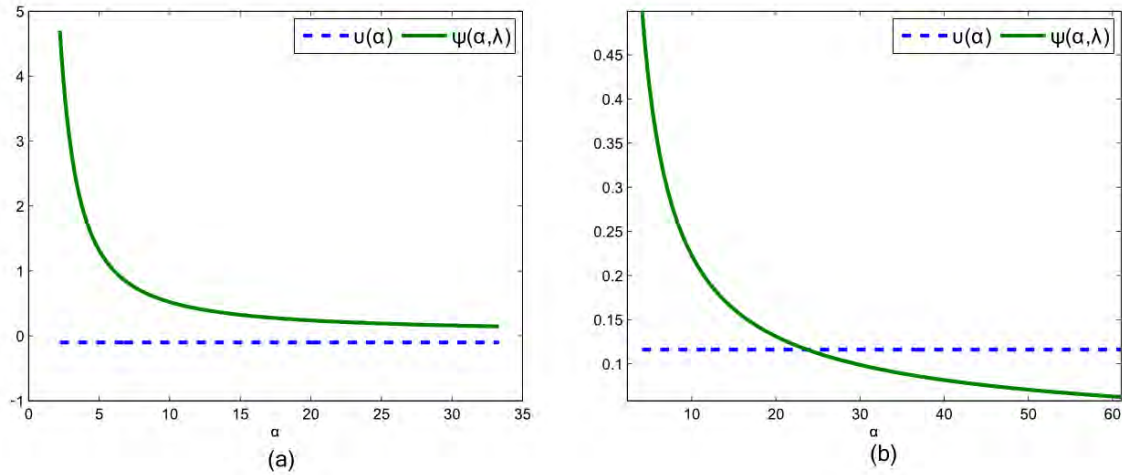


Figura 3.6: (a) Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 1$ y $L = 1$, (b) Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 1$ y $L = 1.5$,

Ahora considere $\Delta = 4$, nuevamente se consideran los parámetros del caso anterior y se ajusta $L = 2$, y con este sencillo ajuste de L se validan los parámetros para $\Delta = 4$, ver figura 3.7.

A diferencia del método anterior, en donde para cada Δ es necesario rediseñar siete parámetros, con este método solo se requiere ajustar uno, y la forma de hacerlo es incrementándolo.

3.9. Resumen del capítulo

En este capítulo se presentó una función de Lyapunov que demuestra la convergencia en tiempo finito del sistema (1.1) cuando se le aplica el algoritmo (2.1). De igual manera se obtuvieron las siguientes condiciones que garantizan la convergencia del sistema (2.2) con

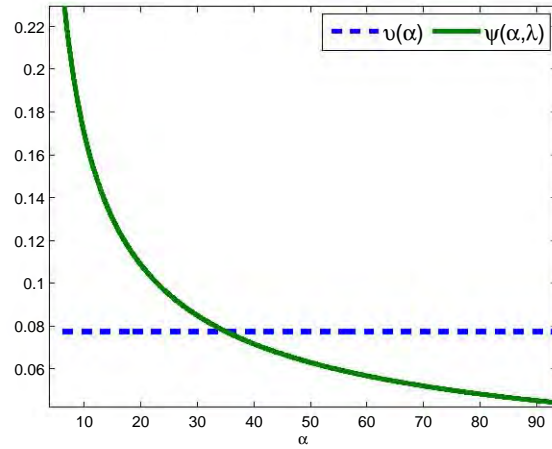


Figura 3.7: Gráfica de $\psi(\alpha, \lambda)$ y $v(\alpha)$ con los parámetros de la columna 2 de la tabla 3.1, $\Delta = 4$ y $L = 2$

$\dot{f}(x, t) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \Delta &< k_3 \\ 0 &< \frac{3^3 \gamma_{13}^4 \gamma_2}{4^3 \gamma_1^3} < 4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2 \\ 0 &< \phi(\alpha) < v(\alpha) \\ 0 &< \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1|^3}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta)}} \end{aligned}$$

con

$$v(\alpha) \triangleq \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \left(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \Delta) - \sqrt{\Pi} \right)$$

donde

$$\Pi = \frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta) (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 \left| \gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 \right|^3}.$$

Como consecuencia de estas condiciones se presenta un método de diseño de ganancias en donde partiendo de una Δ conocida y a través de una verificación gráfica se diseñan los parámetros k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_{13} , γ_{23} y η , de tal forma que se satisfagan las condiciones anteriores. Este método presenta cierta flexibilidad debido a las siete variables que pueden ser ajustadas pero, ya que no se sabe cual es la mejor forma de sintonizar estos parámetros, se puede convertir en una tarea tediosa.

El método de diseño presentado a partir del caso nominal ofrece la ventaja de que una vez que se tienen los parámetros que satisfacen las condiciones con $\Delta = 0$, solo es necesario diseñar la variable L para la cual se satisfacen las condiciones anteriores aplicando la transformación de cada parámetro, es decir, para la verificación se ocupan las condiciones del caso perturbado pero sin tener que diseñar siete variables, solo una L para cada Δ dada. Esto significa que para cualquier Δ solo se requiere ajustar L partiendo de un juego de parámetros validados para el caso nominal.

Capítulo 4

Conclusiones

El problema de controlar sistemas con incertidumbres o perturbaciones ha sido objeto de estudio durante las últimas décadas. En esta tesis se ha planteado el problema específico de controlar sistemas de segundo en la forma canónica de controlador con una incertidumbre y/o perturbación acoplada al control y que es Lipschitz como función del tiempo. Para resolver esto se ha propuesto un algoritmo inspirado en la evolución de algoritmos continuos y discontinuos, principalmente de las propiedades que presenta el algoritmo *Super-Twisting* para sistemas de primer orden.

Se ha propuesto un algoritmo homogéneo, que a diferencia de los algoritmos discontinuos que se encuentran en la literatura, logra estabilizar robustamente un sistema de segundo orden y grado relativo 2 a través de una acción de control continua y en tiempo finito, lo cual desde el punto de vista práctico resulta en la posibilidad de implementar el esquema sin la preocupación de las limitaciones o desgaste de los actuadores. Además el controlador propuesto puede ser aplicado en el seguimiento de una señal variante en el tiempo, característica que lo distingue de otros algoritmos por modos deslizantes que solo pueden ser aplicados para resolver problemas de regulación.

Para probar la convergencia del algoritmo en el caso nominal se propuso una función candidata de Lyapunov, de donde se obtuvieron condiciones suficientes para demostrar que la función candidata es positiva definida, y su derivada temporal negativa definida. Se encontraron ganancias del algoritmo y coeficientes de la función que cumplen con las condiciones obtenidas, con lo que se validó la función de Lyapunov. Además se incluyen las condiciones para el caso perturbado cuando se conoce una cota de la derivada temporal del término de perturbación. La función de Lyapunov propuesta también es usada en la prueba

de la convergencia en tiempo finito del sistema a lazo cerrado.

Como consecuencia de las condiciones obtenidas de la función de Lyapunov se presentó un método de diseño de ganancias en donde partiendo de una Δ conocida y a través de una verificación gráfica se diseñan los parámetros $k_1, k_2, k_3, \gamma_1, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ y η . Este método presenta cierta flexibilidad debido a las siete variables a diseñar pero, ya que no se sabe cual es la mejor forma de diseñar estos parámetros, esta actividad se puede convertir en una tarea complicada y tediosa.

Se presentó un segundo método de diseño que, a partir de parámetros que satisfacen las condiciones en el caso nominal, solo requiere el ajuste de una variable L para una Δ dada. Este método surge de una transformación de variables que muestra que el algoritmo es robusto ante cualquier perturbación Lipschitz respecto al tiempo. Esto significa que usando alguno de los conjuntos de parámetros que se validaron para el caso nominal, se puede ajustar L para cualquier Δ conocida.

El control propuesto es solo un paso más en la búsqueda de extender este tipo de esquemas a sistemas de orden arbitrario, por lo que aún resta analizar cómo se puede extender este algoritmo para desarrollar un esquema generalizado que se pueda aplicar a sistemas de cualquier orden y grado relativo conservando la propiedad de homogeneidad en el sistema a lazo cerrado.

Apéndice A

Prueba del Lema 1

Lema. Para todo valor real de x_2 y x_3 , para todo valor positivo de $\alpha > 0$ y $\delta > 0$, y cualquier valor de λ , la desigualdad

$$\lambda x_2 x_3 + \delta [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \frac{1}{\delta} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \delta^2 \phi |x_3|^3 \quad (\text{A.1})$$

se satisface para todo t , si y solo si

$$\phi \geq \psi(\alpha, \lambda)$$

donde la función $\psi(\alpha, \lambda)$ está definida por

$$\psi(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \psi_1(\alpha, \lambda) & \lambda \geq -\sqrt{3\alpha} \\ \max(0, \psi_2(\alpha, \lambda)) & \lambda < -\sqrt{3\alpha} \end{cases}$$

donde

$$\psi_1(\alpha) = -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

$$\psi_2(\alpha) = \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

Demostración. Se tiene la desigualdad

$$\lambda x_2 x_3 + [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \phi |x_3|^3$$

considere $z_2 = x_2^{\frac{1}{2}}$ y $z_3 = x_3$, entonces se tiene que demostrar que el polinomio homogéneo

$$p = \alpha |z_2|^3 + \phi |z_3|^3 - \lambda [z_2]^2 z_3 - z_2 [z_3]^2 \geq 0 \quad \forall z_2, z_3 \in \mathbb{R}$$

sea positivo definido para todo valor de λ , para ello se tienen que considerar los siguientes tres casos:

- $z_3 = 0$. En este caso

$$p^0(z) = \alpha|z_2|^3 \geq 0 \rightarrow \alpha > 0$$

- $z_3 = +1$.

$$\begin{aligned} p^+ &= \alpha|z_2|^3 - \lambda|z_2|^2 - z_2 + \phi \\ &= \alpha|z_2|^3 - \lambda|z_2|^2 \operatorname{sgn}(z_2) - z_2 + \phi \end{aligned}$$

Ahora consideramos dos casos

1. $z_2 > 0$

$$p_+^+ = \alpha z_2^3 - \lambda z_2^2 - z_2 + \phi \geq 0$$

los puntos críticos están en

$$\frac{d}{dz_2} p_+^+ = 3\alpha z_2^2 - 2\lambda z_2 - 1 = 0$$

es decir

$$r_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

donde $\gamma_2, \gamma_{13}, \gamma_{23} > 0$, entonces solo existe una solución positiva de z_2 dada por

$$r_1 = \frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

y para esta tenemos

$$p_+^+ = \alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right) + \phi \geq 0$$

esto implica que

$$\phi \geq -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

2. $z_2 < 0$

$$p_-^+ = -\alpha z_2^3 + \lambda z_2^2 - z_2 + \phi \geq 0$$

los puntos críticos están en

$$\frac{d}{dz_2} p_-^+ = -3\alpha z_2^2 + 2\lambda z_2 - 1 = 0$$

es decir

$$r_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

- a) Cuando $|\lambda|^2 - 3\alpha < 0$, la función es monótona decreciente, por lo tanto hay un mínimo en $z_2 = 0$, entonces

$$\phi > 0$$

- b) Cuando $|\lambda|^2 - 3\alpha \geq 0$, y para $0 < \lambda$ no hay soluciones en $z_2 < 0$, y al ser decreciente la función, de nuevo hay un mínimo en $z_2 = 0$ y se repite la condición anterior, pero cuando $\lambda < 0$ las dos raíces son negativas, pero se tiene un mínimo en

$$r_2 = \frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

y para esta tenemos

$$-\alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right) + \phi \geq 0$$

esto implica que

$$\phi \geq \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

cuando $\lambda < -\sqrt{3\alpha}$.

- $z_3 = -1$

$$\begin{aligned} p^- &= \alpha|z_2|^3 + \lambda|z_2|^2 + z_2 + \phi \\ &= \alpha|z_2|^3 + \lambda|z_2|^2 \operatorname{sgn}(z_2) + z_2 + \phi \end{aligned}$$

Considerando los dos casos para z_2

1. $z_2 > 0$

$$p_+^- = \alpha z_2^3 + \lambda z_2^2 + z_2 + \phi \geq 0$$

los puntos críticos están en

$$\frac{d}{dz_2} p_+^- = 3\alpha z_2^2 + 2\lambda z_2 + 1 = 0$$

es decir

$$r_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

a) Cuando $|\lambda|^2 - 3\alpha < 0$, la función es monótona creciente, por lo tanto hay un mínimo en $z_2 = 0$, entonces

$$\phi > 0$$

b) Cuando $|\lambda|^2 - 3\alpha \geq 0$, no hay soluciones en $z_2 > 0$ si $0 < \lambda$, y al ser creciente la función, de nuevo hay un mínimo en $z_2 = 0$ y se repite la condición anterior, si $\lambda < 0$ entonces sí hay soluciones en $z_2 > 0$ y se encuentra un mínimo en

$$r_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} = -\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

y para esta tenemos

$$-\alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right) + \phi \geq 0$$

esto implica que

$$\phi \geq \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

cuando $\lambda < -\sqrt{3\alpha}$.

2. $z_2 < 0$

$$p_- = -\alpha z_2^3 - \lambda z_2^2 + z_2 + \phi \geq 0$$

los puntos críticos están en

$$\frac{d}{dz_2} p_- = -3\alpha z_2^2 - 2\lambda z_2 + 1 = 0$$

es decir

$$r_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

entonces para todo valor de λ existe solo una solución negativa de z_2 , dada por

$$r_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} = -\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

y para esta tenemos

$$p_- = \alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right) + \phi \geq 0$$

por lo que

$$\phi \geq -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

Entonces para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ se deben de cumplir

$$\begin{aligned}\alpha &> 0 \\ \phi &\geq -\alpha r_1^3 + \lambda r_1^2 + r_1 > 0\end{aligned}$$

con

$$r_1 = \frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

y

$$\phi \geq \alpha r_2^3 - \lambda r_2^2 + r_2 > 0$$

cuando $\lambda < -\sqrt{3\alpha}$, con

$$r_2 = \frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha}$$

Nótese que en el lema no se incluye la condición $\max(0, \psi_1(\alpha, \lambda))$ con $\lambda \geq -\sqrt{3\alpha}$, debido a las propiedades de la función ψ que se muestran en el apéndice B.

Ahora reemplazando $x_2 \rightarrow \eta x_2$ y $x_3 \rightarrow \eta x_3$ para alguna $\eta > 0$, en la expresión

$$\lambda x_2 x_3 + [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \phi |x_3|^3$$

se obtiene

$$\lambda \eta^2 x_2 x_3 + \eta^{\frac{5}{2}} [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \eta^{\frac{3}{2}} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \eta^3 \phi |x_3|^3$$

dividiendo entre η^2

$$\lambda x_2 x_3 + \eta^{\frac{1}{2}} [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \eta^{-\frac{1}{2}} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \eta \phi |x_3|^3$$

con $\delta = \eta^{\frac{1}{2}}$

$$\lambda x_2 x_3 + \delta [x_2]^{\frac{1}{2}} [x_3]^2 \leq \frac{1}{\delta} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \delta^2 \phi |x_3|^3$$

□

Apéndice B

La función $\psi(\alpha, \lambda)$

La función

$$\psi(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \max(0, \psi_1(\alpha, \lambda)) & \lambda \geq -\sqrt{3\alpha} \\ \max(0, \psi_2(\alpha, \lambda)) & \lambda < -\sqrt{3\alpha} \end{cases}$$

donde

$$\psi_1(\alpha) = -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

$$\psi_2(\alpha) = \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

presenta las siguientes características

- ψ es siempre es positiva con $\lambda > 0$

Cuando $\lambda > 0$

$$\psi = \max(0, \psi_1)$$

donde

$$\psi_1(\alpha) = -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= -\frac{1}{3^3\alpha^2} \left(\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right)^3 + \frac{\lambda}{3^2\alpha^2} \left(\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right)^2 \\
&= +\frac{1}{3\alpha} \left(\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right) - \frac{1}{3^3\alpha^2} \left(4\lambda^3 + 4\lambda^2\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} + 9\lambda\alpha + 3\alpha\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right) \\
&\quad + \frac{\lambda}{3^2\alpha^2} \left(2\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} + 3\alpha \right) + \frac{1}{3\alpha} \left(\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right) \\
&= \frac{2\lambda^2 + 2\lambda^2\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} - 3\alpha\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3^3\alpha^2} + \frac{\left(\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} \right)}{3\alpha}
\end{aligned}$$

finalmente

$$\psi_1 = \frac{2\lambda^3 + 2\lambda^2\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} + 6\alpha\sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha} + 3^2\alpha\lambda}{3^3\alpha^2}$$

donde claramente $\psi_1 > 0 \forall \alpha > 0, \lambda > 0$ y por lo tanto $\psi > 0$

Esta propiedad es empleada en el *Lema 1* en donde se omite la condición de que $\psi_1 > 0$ cuando $\lambda \geq -\sqrt{3\alpha}$.

- $\psi_{\lambda_1} > \psi_{\lambda_2}$

Se sabe que λ puede tomar dos valores diferentes

$$\lambda_1 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3$$

$$\lambda_2 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} - 2\gamma_{23}k_3$$

si $\gamma_2, \gamma_{13}, \gamma_{23} > 0$, entonces $\lambda_1 > 0$ y por lo tanto

$$\psi_{\lambda_1} = \psi_{1\lambda_1}$$

y $\psi_{\lambda_1} > 0$.

En la figura B.1 se muestra la función ψ respecto a λ , en donde se puede apreciar que $\psi_{-\lambda} < \psi_{\lambda}$, y debido a que $\lambda_1 > |\lambda_2|$ entonces

$$\psi_{\lambda_2} < \psi_{\lambda_1}$$

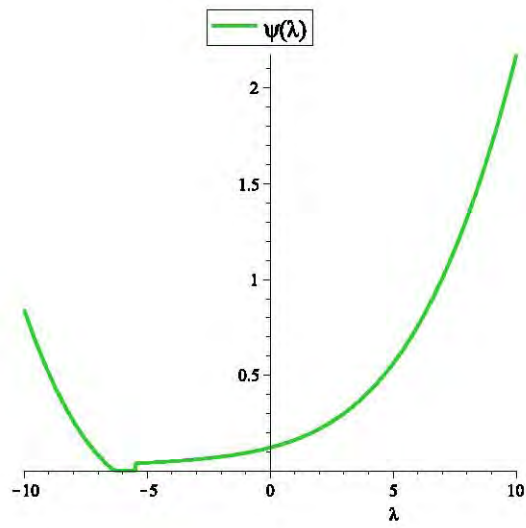


Figura B.1: $\psi(\alpha, \lambda)$ respecto a λ

Bibliografía

- [Bacciotti and Rosier, 2005] Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. New York: Springer - Verlag, 2nd edition.
- [Bhat and Bernstein, 2000] Bhat, S. P. and Bernstein, D. S. (2000). Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, (38):751–766.
- [Filippov, 1988] Filippov, J. A. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [G. H. Hardy and Pólya, 1934] G. H. Hardy, J. E. L. and Pólya, G. (1934). *Inequalities*. Cambridge, University Press.
- [Khalil, 1996] Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. USA, Prentice-Hall, second ed.
- [Levant, 1993] Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6):1247–1263.
- [Levant, 2005] Levant, A. (2005). Homogeneity approach to higher-order sliding mode design. *Automatica*, (34):576–586.
- [Moreno and Osorio, 2012] Moreno, J. and Osorio, M. (2012). Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4).
- [Moreno, 2012] Moreno, J. A. (2012). Lyapunov function for levant’s second order differentiator. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6448–6453.
- [Polyakov and Poznyak, 2009] Polyakov, A. and Poznyak, A. (2009). Reaching time estimation for super-twisting second order sliding mode controller via lyapunov function designing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(8):1951–1955.

- [Santiesteban et al., 2010] Santiesteban, R., Fridman, L., and Moreno, J. (2010). Finite-time convergence analysis for Twisting controller via a strict lyapunov function. *IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*.
- [Sánchez and Moreno, 2012] Sánchez, T. and Moreno, J. (2012). Construction of lyapunov functions for a class of higher order sliding modes algorithms. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6454–6459.
- [V. Utkin and Shi, 2009] V. Utkin, J. G. and Shi, J. (2009). *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. CRC Press, Taylor& Francis, Orlando, FL, 2nd edition.