



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

OBSERVACIÓN E IDENTIFICACIÓN DE
SISTEMAS MECÁNICOS POR MODOS
DESGLIZANTES

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Ingeniero Mecatrónico

PRESENTA:

DIEGO GUTIÉRREZ ORIBIO

TUTOR:

M. en I. Héctor Ríos Barajas

2013



*Para mis Padres...,
por su guía y apoyo incondicional, que hicieron de mí lo que soy ahora.*

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas del Laboratorio de Modos Deslizantes, pero en especial, a Héctor, por toda su ayuda desde mi servicio social hasta la realización de esta tesis.

Le doy las gracias a mi novia Claudia, por su ayuda en este tiempo y por haberme escogido para formar una familia.

Le agradezco a mis hermanos, Jessica y Tedy, por ser mis compañeros en la vida.

Por último, la mención más importante, es para mis padres, Teodulo Gutiérrez y Ma. Guadalupe, que han hecho posible que llegara hasta la universidad y me desarrollara como persona.

México D.F., Agosto 2013.

Diego Gutiérrez Oribio

Resumen

En este trabajo se abordan dos problemas: la observación de estados y la identificación de parámetros en sistemas mecánicos.

En el primer problema, se plantean diferentes métodos de observación (observador con Super-Twisting Generalizado, observador con Super-Twisting y el Filtro de aproximación de variables de estado). Usando la información de salida, los observadores estiman la velocidad del sistema. Usando dicha estimación, se aborda el segundo problema, la identificación de parámetros por medio de diferentes métodos, los cuales son: identificador con Super-Twisting Generalizado, mínimo cuadrado en línea con modos deslizantes y mínimo cuadrado.

Ejemplos de simulación, comparaciones y experimentos ilustran los resultados.

Palabras Claves. *Modos deslizantes. Observación de estados. Identificación de parámetros*

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Motivación	2
1.3. Planteamiento del problema	2
1.4. Objetivo general	3
1.5. Objetivos particulares	3
1.6. Metodología	3
1.7. Estructura de la Tesis	4
2. Preliminares	5
2.1. Introducción a los Modos Deslizantes	5
2.1.1. Conceptos Principales	5
2.1.2. Chattering: Eliminación y Atenuación	9
2.1.3. Concepto de Control Equivalente	13
2.1.4. Ecuaciones de Modos Deslizantes	14
2.2. Definiciones	15
2.2.1. Observabilidad	15
2.2.2. Identificabilidad	16
2.3. Descripción de los sistemas utilizados	17
2.3.1. Carro-Péndulo	18
2.3.2. Masa-Resorte-Amortiguador	20

2.3.3. Motor DC	23
3. Observación de estados	29
3.1. Observador con Super-Twisting	29
3.2. Observador con Super-Twisting Generalizado	30
3.3. Filtro de aproximación de variables de estado	32
3.4. Simulaciones	33
3.4.1. Carro-Péndulo	33
3.4.2. Masa-Resorte-Amortiguador	35
3.4.3. Motor DC	35
3.4.4. Comparación	36
4. Identificación de Parámetros	41
4.1. Mínimo cuadrado en línea con Modos Deslizantes	42
4.2. Identificación por Super Twisting Generalizado	44
4.3. Mínimo cuadrado	46
4.4. Simulaciones	47
4.4.1. Carro-Péndulo	48
4.4.2. Masa-Resorte-Amortiguador	49
4.4.3. Motor DC	50
4.4.4. Comparación	51
5. Experimentación	57
5.1. Observación	58
5.2. Identificación	59
6. Conclusiones	65
Apéndices	67
A. Descripción del hardware y software del sistema Carro-Péndulo	69

Bibliografía

73

Capítulo 1

Introducción

1.1. Estado del arte

A principios de la década de los 60's, los conceptos de identificabilidad y observabilidad se tornan de gran importancia, ya que tienen múltiples aplicaciones en diversas disciplinas como: física, biología teórica (bioquímica, endocrinología y metabolismo), econometría, así como en sistemas de control o teoría de control.

Anteriormente, el concepto de identificabilidad no estaba propiamente establecido, pero en [9] se proponen nuevas definiciones, las cuales se basan en un modelo extendido llamado *Estructura Restringida*, que ofrece un análisis completo de las propiedades del sistema. En [4] se acentúa la importancia de describir un método para comprobar que los parámetros de un sistema dinámico no lineal pueden ser identificables, esto es, que se puedan deducir de las salidas del sistema.

La identificación de parámetros para diferentes clases de sistemas se han estudiado ampliamente desde hace 30 años, la gran mayoría, considerando que la dinámica de los sistemas depende linealmente de los parámetros desconocidos, como es el caso de [21].

En la literatura existen varios métodos para identificar parámetros constantes y variantes, los más populares pertenecen al grupo del método de mínimos cuadrados. Existen también muchas modificaciones del método de mínimos cuadrados (método del mínimo cuadrado generalizado, extendido, método de variables instrumentales, etc.) y método Bayes, método de máxima probabilidad, filtro extendido Kalman, método de funciones moduladas, método de subespacios, etc. ([14],[21] y [15])

Los observadores de modos deslizantes son usados ampliamente debido a su convergencia en tiempo finito, robustez con respecto a las incertidumbres y la posibilidad de identificar perturbaciones ([5], [11] y [18]). Una nueva generación de observadores de modos deslizantes de segundo orden ha sido recientemente desarrollada, en particular, los observadores asintóticos ([20]) y los observadores asintóticos para sistemas con



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

fricción de Coulomb ([1]). En [7] y [8] un observador de modos deslizantes de segundo orden basado en el algoritmo Super-Twisting, provee la observación exacta y en tiempo finito ([6]).

El procedimiento de observación de estados, seguido por la identificación paramétrica ha sido utilizado por diversos autores, como en [23]. En [12] se hace alusión al algoritmo Super-Twisting Generalizado para sistemas mecánicos conmutados, que se sirve de técnicas de modos deslizantes de alto orden para estudiar el problema de estimación del estado continuo y discreto. Esta información es usada en un nuevo algoritmo recursivo de identificación de parámetros que converge en tiempo finito en [16].

1.2. Motivación

La observación e identificación de parámetros son aspectos muy importantes que pueden ser utilizados para el diseño de controladores, por lo que resulta un tema de interés en sistemas donde existe incertidumbre en la dinámica del sistema (estructura y parámetros), ya que se necesitan controladores más eficientes y exactos en los sistemas físicos.

Por otro lado, además del diseño de controladores, la observación de estados e identificación de parámetros son un punto fundamental para el problema de detección de fallas y la mejora de los modelos de los fenómenos físicos, por lo que se vuelve un punto fundamental en aplicaciones en la industria.

1.3. Planteamiento del problema

Se considera el siguiente modelo matemático, el cual representa cualquier sistema mecánico:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, u) + \xi(x_1, x_2, t), \\ y &= x_1,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $x_1 \in \mathfrak{R}$ es la posición, $x_2 \in \mathfrak{R}$ es la velocidad, $u \in \mathfrak{R}$ es la señal de control, $y \in \mathfrak{R}$ es la salida y ξ son las perturbaciones y/o incertidumbres actuando en el sistema en el caso de la observación y en el caso de la identificación, es el desconocimiento de los parámetros.

1.4. Objetivo general

El objetivo general de esta tesis es estimar el estado x_2 usando sólo información de la salida, a pesar de que existan perturbaciones y/o incertidumbres en el sistema usando tres observadores (Observador STG, Observador ST y Filtro de aproximación de variables de estado). Por otro lado, haciendo uso de la información estimada, se desea identificar los parámetros del sistema usando 3 métodos de identificación de parámetros (Mínimos Cuadrados, Mínimo Cuadrado en línea con Modos Deslizantes e Identificación con STG).

1.5. Objetivos particulares

Los objetivos particulares de este trabajo son los siguientes:

- Implementar tres observadores para tres sistemas mecánicos (carro-péndulo, masa-resorte-amortiguador y motor DC), para estimar la velocidad de los mismos.
- Implementar tres métodos de identificación de parámetros en los tres sistemas mecánicos.
- Realizar las comparaciones correspondientes entre los distintos observadores y métodos de identificación paramétrica, respectivamente.

1.6. Metodología

La metodología para alcanzar los objetivos se presenta a continuación:

1. Estudiar y obtener el modelo dinámico de cada sistema mecánico.
2. Estudiar el problema de observación e identificación para cada sistema mecánico.
3. Implementar los 3 observadores.
4. Implementar los 3 métodos de identificación de parámetros.
5. Realizar las comparaciones correspondientes, usando como índice de comparación el error medio cuadrático.
6. Verificar experimentalmente los resultados obtenidos en simulación para el sistema carro-péndulo.

1.7. Estructura de la Tesis

El trabajo tiene la siguiente estructura:

El capítulo 2 incluye una pequeña introducción al concepto de Modos Deslizantes, una explicación de las definiciones empleadas en la tesis y la descripción de los tres sistemas utilizados.

En el capítulo 3 se estudian los observadores utilizados en este trabajo y se presentan las simulaciones hechas para dichos observadores en la sección 3.4.

El capítulo 4 describe los 3 métodos utilizados para la identificación de parámetros y en la sección 4.4 se muestran las simulaciones realizadas para mostrar el error de estimación.

Los experimentos realizados de observación e identificación se presentan en el capítulo 5. Las conclusiones se encuentran en el capítulo 6.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Introducción a los Modos Deslizantes

Uno de los principales problemas en el diseño de controladores, son las discrepancias que existen entre el sistema modelado y el sistema real, como son las perturbaciones, parámetros desconocidos de la planta y algunas dinámicas no modeladas.

Para resolver este inconveniente, se han desarrollado métodos de control robusto, como son los *modos deslizantes* [19], ya que estos presentan las siguientes características:

- Insensibilidad a perturbaciones externas e internas acopladas al control.
- Máxima precisión al valor de referencia.
- Convergencia a cero de la variable de deslizamiento, en tiempo finito.
- Manejo de incertidumbres acotadas y dinámicas parásitas.

2.1.1. Conceptos Principales

Una buena forma para controlar la dinámica del sistema (1.1) sería la ecuación diferencial homogénea lineal invariante con el tiempo:

$$\dot{x}_1 + cx_1 = 0, \quad c > 0. \quad (2.1)$$

Ya que $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, una solución general para la ecuación (2.1) y su derivada es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0)e^{-ct}, \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = -cx_1(0)e^{-ct}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como el efecto de la perturbación $\xi(x_1, x_2, t)$ se encuentra ausente en la ecuación (2.2), se debe compensar introduciendo una nueva variable en el espacio de estados de (1.1), a esta variable se le llama *variable de deslizamiento*:

$$\sigma = \sigma(x_1, x_2) = x_2 + cx_1, \quad c > 0. \quad (2.3)$$

Si se reescribe (2.3) de la forma:

$$\sigma = x_2 + cx_1 = 0, \quad c > 0, \quad (2.4)$$

corresponde una línea recta en el espacio de estados de (1.1) y se le llama *superficie de deslizamiento*.

Para poder lograr una convergencia asintótica de x_1 y x_2 a cero, con una velocidad de convergencia dada por (2.2), con una perturbación limitada $\xi(x_1, x_2, t)$, la variable σ debe llegar a cero en tiempo finito por medio del control u . Derivando (2.3) se obtiene:

$$\dot{\sigma} = cx_2 + \xi(x_1, x_2, t) + u, \quad \sigma(0) = \sigma_0. \quad (2.5)$$

Para (2.5) la función de Lyapunov toma la forma

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2. \quad (2.6)$$

Para obtener una estabilidad asintótica del punto de equilibrio $\sigma = 0$ de (2.5), se deben de satisfacer las siguientes condiciones:

- a) $\dot{V} < 0$ para $\sigma \neq 0$
- b) $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$

La derivada de V está dada por

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} = \sigma(cx_2 + \xi(x_1, x_2, t) + u). \quad (2.7)$$

Si asumimos $u = -cx_2 + \nu$ y sustituimos en (2.7), obtenemos

$$\dot{V} = \sigma(\xi(x_1, x_2, t) + \nu) = \sigma\xi(x_1, x_2, t) + \sigma\nu \leq |\sigma|L + \sigma\nu. \quad (2.8)$$

donde L es la cota superior de la perturbación $\xi(x_1, x_2, t)$.

Seleccionando $\nu = -\rho \text{sign}(\sigma)$ donde

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

y $\text{sign}(0) \in [-1, 1]$ con $\rho > 0$ y sustituyendo en (2.8), obtenemos

$$\dot{V} \leq |\sigma| L - |\sigma| \rho = -|\sigma|(\rho - L). \quad (2.10)$$

La condición a) puede ser reescrita como:

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma|, \quad \alpha > 0. \quad (2.11)$$

Consecuentemente, $V(t)$ llega a cero en un tiempo finito t_r delimitado por:

$$t_r \leq \frac{2V^{\frac{1}{2}}(0)}{\alpha}. \quad (2.12)$$

Combinando (2.10) y (2.11) obtenemos

$$\dot{V} \leq -|\sigma|(\rho - L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma|. \quad (2.13)$$

Finalmente obtenemos la ganancia del control que nos ayuda a compensar la perturbación $\xi(x_1, x_2, t)$:

$$\rho = L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad (2.14)$$

donde $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ es responsable de determinar el tiempo tr .

Consecuentemente el control u que nos ayuda a que las variables de estado x_1 y x_2 lleguen a la superficie de deslizamiento (2.4) en tiempo finito tr y los mantenga en dicha superficie a pesar de la perturbación $\xi(x_1, x_2, t)$, es llamado *controlador de modos deslizantes*:

$$u = -cx_2 - \rho \text{sign}(\sigma). \quad (2.15)$$

Ejemplo 1

Los resultados de la simulación del sistema (1.1) aplicando las leyes de control de modos deslizantes (2.3) y (2.15), y con las siguientes condiciones de simulación:

- Paso de muestreo de 0.001.
- Condiciones iniciales de $x_0 = [1; -2]$.
- Ganancia de controlador $\rho = 2$ y parámetro $c = 1.5$.
- Perturbación $\xi(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$ y $f(x_1, x_2, u) = 0$.

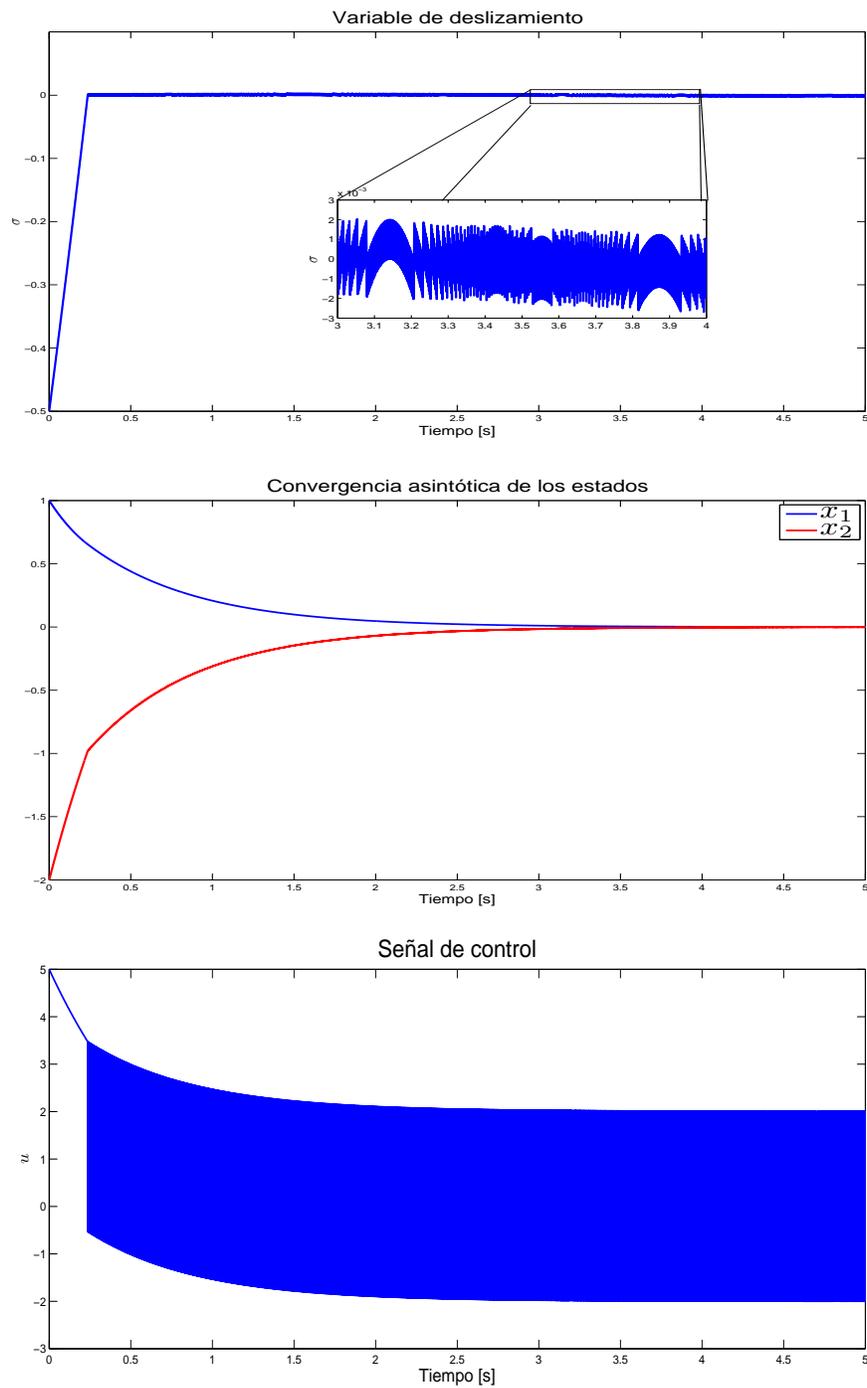


Figura 2.1: Resultados del ejemplo 1

se presentan en la figura 2.1.

En la primer figura se observa la convergencia a cero de la variable de deslizamiento en tiempo finito. Después se muestra la convergencia asintótica de los estados a pesar de la perturbación externa $\xi(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$. Por último, se presenta el control por modos deslizantes utilizado, donde se presenta un efecto debido a la conmutación a altas frecuencias de la función *sign*. Este efecto se llama *chattering* y son oscilaciones de alta frecuencia y amplitud finita que también se presenta en los estados y la variable de deslizamiento.

2.1.2. Chattering: Eliminación y Atenuación

En muchos sistemas de control es necesario evitar el chattering al hacer que la función de control sea continua y suave, pero al mismo tiempo es necesario retener la robustez del sistema de control para disminuir los efectos de perturbaciones externas e incertidumbres del modelo.

Eliminación de chattering: Quasi-Modo Deslizante

Una forma de hacer que la función (2.15) sea suave y continua, es aproximando la función discontinua $v(\sigma) = -\rho \text{sign}(\sigma)$ a alguna función suave y continua, por ejemplo, una "función sigmoid"

$$v(\sigma) \approx \frac{\sigma}{|\sigma| + \varepsilon}, \quad (2.16)$$

donde ε es un escalar positivo. Ya que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma}{|\sigma| + \varepsilon} = \text{sign}(\sigma), \quad (2.17)$$

para $\sigma \neq 0$, el valor de ε deberá ser pequeño y deberá asegurar una acción de control suave. La función sigmoid se muestra en la figura 2.2.

Ejemplo 2

Los resultados de la simulación del sistema (1.1) aplicando el control Quasi-Modo Deslizante:

$$u = -cx_2 - \rho \frac{\sigma}{|\sigma| + \varepsilon} \quad (2.18)$$

y con las mismas condiciones de simulación que el ejemplo 1 se presentan en la figura 2.3.

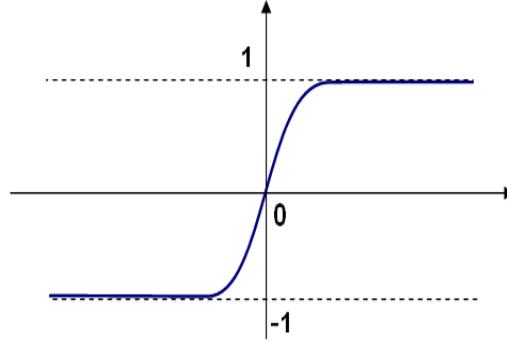


Figura 2.2: Función Sigmoid

El control suave implementado no puede proveer la convergencia asintótica de la variable de deslizamiento en presencia de la perturbación externa $\xi(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$. Tampoco los estados pueden converger a cero, pero si se localizan en una vecindad cerca del origen. El precio que se paga por un control suave, es la pérdida de robustez y falta de precisión.

Atenuación de chattering: Modo Deslizante Asintótico

En este caso, la idea es diseñar un control por modos deslizantes en términos de la función de control derivativa. Primero reescribimos el sistema (1.1) como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = u + \xi(x_1, x_2, t), & x_2(0) = x_{20}, \\ \dot{u} = v, & u(0) = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

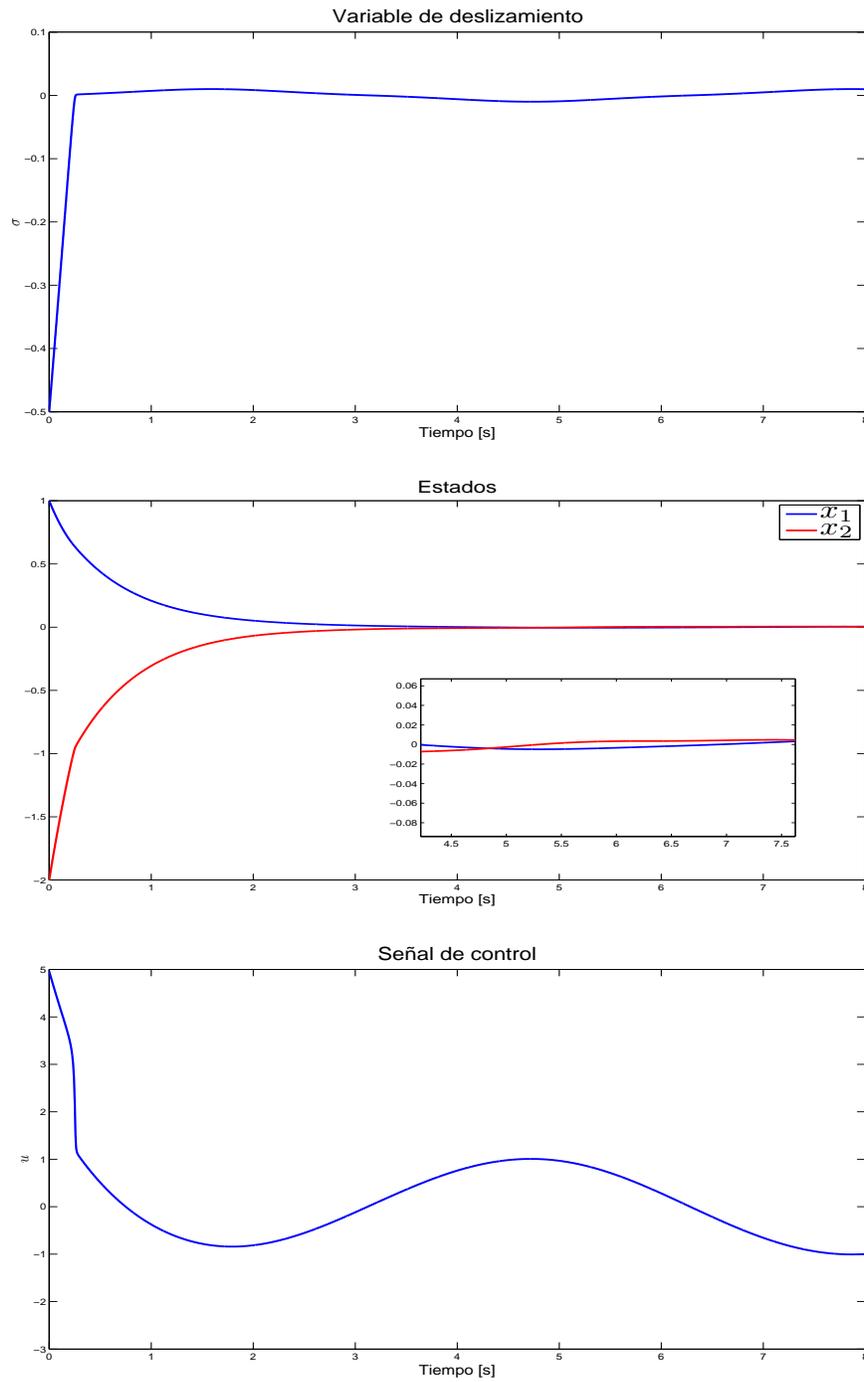
Después se introduce una variable de deslizamiento auxiliar

$$s = \dot{\sigma} + \bar{c}\sigma. \quad (2.20)$$

Si se diseña un control v que nos provea una convergencia en tiempo finito de $s \rightarrow 0$, entonces el modo deslizante ideal ocurre en la superficie de deslizamiento

$$s = \dot{\sigma} + \bar{c}\sigma = 0 \quad (2.21)$$

y $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$ junto con $x_1, x_2 \rightarrow 0$, según aumente el tiempo, aún con la presencia de la perturbación $\xi(x_1, x_2, t)$. Sin embargo no tendremos un modo deslizante ideal, a su vez, se implementa un *modo deslizante asintótico* en el sistema (2.19), ya que solamente la variable de deslizamiento original σ converge a cero asintóticamente.

**Figura 2.3:** Resultados del ejemplo 2

Usando (2.11) para diseñar un control por modos deslizantes en términos de v , obtenemos:

$$s\dot{s} = s(v + c\bar{c}x_2 + (c + \bar{c})u + (c + \bar{c})\xi(x_1, x_2, t) + \dot{\xi}(x_1, x_2, t)). \quad (2.22)$$

Escogiendo $v = -c\bar{c}x_2 - (c + \bar{c})u + v_1$ y sustituyéndolo en (2.22), obtenemos:

$$s\dot{s} = s(v_1 + (c + \bar{c})\xi(x_1, x_2, t) + \dot{\xi}(x_1, x_2, t)) \leq sv_1 + |s|(\bar{L} + (c + \bar{c})L). \quad (2.23)$$

donde \bar{L} es la cota superior de la derivada de la perturbación $\dot{\xi}(x_1, x_2, t)$.

Seleccionando $v_1 = -\rho \text{sign}(s)$ con $\rho > 0$ y sustituyéndolo en (2.23), se consigue:

$$s\dot{s} \leq |s|(-\rho + \bar{L} + (c + \bar{c})L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|s|. \quad (2.24)$$

Finalmente, si la ganancia del controlador ρ es

$$\rho = \bar{L} + (c + \bar{c})L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad (2.25)$$

entonces la ley de control v que puede conducir a s a cero en tiempo finito $tr \leq \frac{\sqrt{2}|s(0)|}{\alpha}$ es:

$$v = -c\bar{c}x_2 - (c + \bar{c})u - \rho \text{sign}(s). \quad (2.26)$$

Ejemplo 3

Los resultados de la simulación del sistema (2.19) aplicando las leyes de control de modos deslizantes (2.20) y (2.26), y con las siguientes condiciones de simulación:

- Paso de muestreo de 0.001.
- Condiciones iniciales de $x_0 = [1; -2]$.
- Ganancia de controlador $\rho = 30$, parámetro $c = 1.5$ y $\bar{c} = 10$.
- Perturbación $\xi(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$.

se presentan en la figura 2.4.

En a) se observa la convergencia a cero de las variable de deslizamiento en tiempo finito. Después en b) se muestra la convergencia a cero de los estados conforme avanza el tiempo a pesar de la perturbación externa $\xi(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$. Por último, se presenta el control v (d)) que tiene presencia de chattering, aunque éste se atenúa en el control u (c)).

2.1.3. Concepto de Control Equivalente

Supongamos que en el tiempo tr , la superficie de deslizamiento $\sigma = x_2 + cx_1 = 0$ ya ha sido alcanzada y la trayectoria $x_1(t), x_2(t)$ permanece en dicha superficie debido al control (2.15). Esto significa que $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ para $t \geq tr$. La condición $\dot{\sigma} = 0$ produce

$$\dot{\sigma} = cx_2 + \xi(x_1, x_2, t) + u = 0, \quad \sigma(tr) = 0. \quad (2.27)$$

Una función que satisface la ecuación (2.27) es:

$$u_{eq} = -cx_2 - \xi(x_1, x_2, t), \quad (2.28)$$

a esta función se le llama *control equivalente* y es la encargada de asegurar que la trayectoria del sistema (1.1) siga en la superficie de deslizamiento después de ser alcanzada.

Las siguientes propiedades del control equivalente son establecidas:

- La función del control (2.28) no se aplica al sistema (1.1) tan pronto como la superficie de deslizamiento es alcanzada y tampoco puede ser implementada, debido a que la perturbación $\xi(x_1, x_2, t)$ no es conocida y aparece explícitamente en la ecuación (2.28). La acción de control equivalente describe el efecto promedio de la alta frecuencia del control (2.15) en el sistema (1.1). El promedio puede ser alcanzado con un filtro pasa-bajas (LPF) en el término $\rho \text{sign}(\sigma)$ de (2.15):

$$\hat{u}_{eq} = -cx_2 - \rho \text{LPF}(\text{sign}(\sigma)), \quad t \geq tr. \quad (2.29)$$

El LPF puede ser implementado con la ecuación diferencial de primer orden

$$\begin{aligned} \tau \dot{z} &= -z + \text{sign}(\sigma), \\ \hat{u}_{eq} &= -cx_2 - \rho z, \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde τ es un escalar positivo que representa la constante de tiempo del filtro. La señal u_{eq} puede ser estimada por \hat{u}_{eq} haciendo τ tan pequeño, como el tiempo de muestreo de la computadora donde se implementa el LPF lo permita.

- Comparando las ecuaciones (2.28) y (2.29), la perturbación puede ser estimada:

$$\hat{\xi}(x_1, x_2, t) = \rho \text{LPF}(\text{sign}(\sigma)), \quad t \geq tr. \quad (2.31)$$

Ejemplo 4

Siguiendo los resultados del ejemplo 1, se implementa el control equivalente (2.30) y la estimación de la perturbación (2.31) con $\tau = 0.03$ y se muestran los resultados en la figura 2.5.

2.1.4. Ecuaciones de Modos Deslizantes

La variable de deslizamiento (2.3) debe ser diseñada para proveer un movimiento deseado en el modo deslizante. Este problema de diseño puede ser reducido a dos tareas:

1. Encontrar la ecuación del sistema en el modo deslizante para todo $t \geq tr$.
2. Parametrizar la variable de deslizamiento (2.3) para asegurar la compensación deseada.

Sustituyendo las ecuaciones (2.3) y (2.15) en (1.1), obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(tr) = x_{1r}, \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - \rho \text{sign}(x_2 + cx_1) + \xi(x_1, x_2, t), & x_2(tr) = -cx_{1r}. \end{cases} \quad (2.32)$$

De la sección anterior, sabemos que la dinámica del sistema (1.1) en el modo deslizante (cuando $\sigma = x_2 + cx_1 = 0$) es conducida por el control equivalente (2.28), por lo que para poder obtener las ecuaciones de la dinámica del sistema compensado en el modo deslizante, sustituimos el control equivalente en la ecuación (1.1), teniendo en cuenta que en el modo deslizante $x_2 = -cx_1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = (-cx_2 - \xi(x_1, x_2, t)) + \xi(x_1, x_2, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -cx_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -cx_1, \\ \dot{x}_2 = -cx_2. \end{cases} \quad (2.33)$$

Finalmente la dinámica del sistema compensado en el modo deslizante se reduce a la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -cx_1, & x_1(tr) = x_{1r}, \\ x_2 = -cx_1, \end{cases} \quad (2.34)$$

para todo $t \geq tr$. Una solución para la ecuación (2.34) puede ser

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1r}e^{-c(t-tr)}, \\ x_2(t) &= -cx_{1r}e^{-c(t-tr)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

El parámetro c puede ser seleccionado para dar un tiempo de convergencia deseada de x_1, x_2 a cero.

2.2. Definiciones

2.2.1. Observabilidad

Se considera el siguiente sistema en espacio de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (2.36)$$

donde $x \in \mathfrak{R}$ es el vector de estado de $n \times 1$, $u \in \mathfrak{R}$ es la señal de entrada de $r \times 1$, $y \in \mathfrak{R}$ es la salida de $m \times 1$, $A \in \mathfrak{R}$ es una matriz de $n \times n$, $B \in \mathfrak{R}$ es una matriz de $n \times r$, $C \in \mathfrak{R}$ es una matriz de $m \times n$ y $D \in \mathfrak{R}$ es una matriz de $m \times r$.

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado $x(t_0)$ se determina a partir de la observación de $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Por lo tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida. Este concepto es muy importante, ya que una de las dificultades que se encuentra con el control mediante la realimentación del estado, es que algunas de estas variables no se pueden medir, por lo que es necesario estimarlas para construir las señales de control.

Del sistema (2.36) podemos observar que:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (2.37)$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du. \quad (2.38)$$

Dado que las matrices A, B, C y D se conocen, al igual que $u(t)$, los dos últimos términos de (2.38) son cantidades conocidas, por lo que se pueden restar de $y(t)$. Así, para obtener una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa, basta considerar el sistema sin excitación:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (2.39)$$

El vector de salida $y(t)$ es

$$y(t) = Ce^{At}x(0). \quad (2.40)$$

Se puede obtener e^{At} de la forma

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k. \quad (2.41)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2.41) en (2.40), obtenemos:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0), \quad (2.42)$$

o bien

$$y(t) = \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0). \quad (2.43)$$

Así, se puede determinar $x(0)$ de la ecuación (2.43) dada la salida $y(t)$ durante un intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1$.

Se demuestra que el sistema (2.36) es completamente observable si y sólo si la matriz de $mn \times n$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

es de rango n , o tiene n vectores columna linealmente independientes. Ésta se denomina *matriz de observabilidad* [14].

2.2.2. Identificabilidad

Se considera el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, p, u), \\ \dot{p} &= 0, \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ son las variables de estado, $p \in \mathfrak{R}^q$ son los parametros, $u \in \mathfrak{R}^k$ son las entradas y $y \in \mathfrak{R}^m$ son las salidas. Se dice que el sistema es identificable en el intervalo de observación $[t_0, T]$ si existe un número finito de soluciones para todos los parametros a identificar [9]. Poder establecer la identificabilidad de un sistema es una tarea muy complicada, ya que no se encontró una herramienta contundente como la *matriz de observabilidad* en el caso de observación, para poder llegar a la conclusión de identificabilidad del sistema. Sin embargo, en [3] se presenta el siguiente algoritmo:

De (2.45), sea $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^T & p^T \end{bmatrix}^T$ y

$$O_N(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} h(x) \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (L_f h(x)) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (L_f^\delta h(x)) \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

donde $\delta + 1$ es el número de mediciones de y y $L_f^\delta h(x)$ es la *derivada de Lie*:

$$L_{f(x)}^k h(x) = \frac{\partial L_{f(x)}^{k-1} h(x)}{\partial x} f(x). \quad (2.47)$$

Por lo tanto, (2.45) es *localmente identificable* si el rango de $O_N(\tilde{x})$ es $n + q$, o tiene $n + q$ vectores columna linealmente independientes. Esto se cumple en una vecindad de \tilde{x}_0 (esto es $\tilde{x} \in \mathfrak{N}(\tilde{x}_0)$), donde observamos:

$$Y = \begin{bmatrix} y^T & \dot{y}^T & \ddot{y}^T & \cdots & y^{(\delta)T} \end{bmatrix}^T = O_N(\tilde{x})\tilde{x}. \quad (2.48)$$

Si, y solo si, el rango es $n + q$, para todo $\tilde{x} \in \mathfrak{N}(\tilde{x}_0)$ se cumple que:

$$\tilde{x} = (O_N(\tilde{x})^T O_N(\tilde{x}))^{-1} O_N(\tilde{x})^T Y. \quad (2.49)$$

Esto implica que podemos observar todos los estados e identificar todos los parámetros en $\mathfrak{N}(\tilde{x}_0)$.

Con esta consideración, podemos ver si un sistema es observable e identificable al mismo tiempo.

Señal suficientemente rica

Teniendo el sistema mecánico (1.1), se dice que u es una *señal suficientemente rica* para la identificación paramétrica del sistema, si contiene un número suficiente de frecuencias para excitar todos los modos de dicha planta.

Una señal u es suficientemente rica de orden n si consiste de al menos $\frac{n}{2}$ distintas frecuencias:

$$u = \sum_{i=1}^m A_i \sin \omega_i t, \quad (2.50)$$

donde $m \geq \frac{n}{2}$ y $A_i \neq 0$ son constantes y $\omega_i \neq \omega_k$ para $i \neq k$ es suficientemente rica de orden n [14].

2.3. Descripción de los sistemas utilizados

En este apartado se describen los tres sistemas que se utilizaron en el trabajo en la forma de espacio de estados y en la forma de regresor:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_n(x_1, x_2, u) + \Gamma(t)\theta, \end{aligned} \quad (2.51)$$

2.3.1. Carro-Péndulo

El sistema se muestra en la figura 2.6.

Se tiene un péndulo que rota en un plano vertical alrededor de un eje localizado en un carro. El carro puede moverse en un riel horizontal en el plano de rotación.

El sistema en espacio de estados toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3, \\
 \dot{x}_2 &= x_4, \\
 \dot{x}_3 &= \frac{aw_1 + l \cos(x_2)w_2}{J + m_i l \sin^2(x_2)}, \\
 \dot{x}_4 &= \frac{l \cos(x_2)w_1 + w_2}{J + m_i l \sin^2(x_2)},
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

donde x_1 es la posición del carro, x_2 es el ángulo del péndulo medido en dirección antihorario ($x_2 = 0$ significa que esta arriba el péndulo), x_3 es la velocidad del carro, x_4 es la velocidad del péndulo [13] y

$$\begin{aligned}
 w_1 &= p_1 u - m_i x_4^2 \sin(x_2) - f_c x_3 - f_s \text{sign}(x_3), \\
 w_2 &= m_i g \sin(x_2) - f_p x_4, \\
 m_i &= l(m_c + m_p), \\
 a &= l^2 + \frac{J}{m_c + m_p}.
 \end{aligned}$$

Los valores de los parámetros del sistema se describen en la tabla 2.1.

Nombre	Descripción	Unidades
m_c	Masa del carro	0.5723[kg]
m_p	Masa del péndulo	0.12[kg]
l	Distancia del eje de rotación al centro de masa del sistema	0.01955717[m]
f_c	Coficiente de fricción dinámica del carro	0.5[Ns/m]
f_s	Coficiente de fricción seca	1.1975875[N]
f_p	Coficiente de fricción rotacional	0.13543[Nms/rad]
p_1	Relación de la fuerza de control a señal PWM	9.4[N]
J	Momento de inercia del péndulo con respecto al eje de rotación	0.0038583[kgm ²]

Tabla 2.1: Parámetros del sistema carro-péndulo

Si requerimos identificar los parámetros f_c, f_s y f_p , el sistema en la forma de regresor

toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3, \\
 \dot{x}_2 &= x_4, \\
 \dot{x}_3 &= \Gamma_1 \theta_1 + f_{n_1}, \\
 \dot{x}_4 &= \Gamma_2 \theta_2 + f_{n_2}.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Los vectores regresores, los vectores de parámetros y la dinámica conocida del sistema son:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \frac{1}{J + m_i l \sin^2(x_2)} \begin{bmatrix} -ax_3 & -a \operatorname{sign}(x_3) & -lx_4 \cos(x_2) \end{bmatrix}, \\
 \theta_1 &= \begin{bmatrix} f_c & f_s & f_p \end{bmatrix}^T, \\
 f_{n_1} &= \frac{1}{J + m_i l \sin^2(x_2)} [a(p_1 u - m_i x_4^2 \sin(x_2)) + l m_i g \cos(x_2) \sin(x_2)], \\
 \Gamma_2 &= \frac{1}{J + m_i l \sin^2(x_2)} \begin{bmatrix} -l \cos(x_2) x_3 & -l \cos(x_2) \operatorname{sign}(x_3) & -x_4 \end{bmatrix}, \\
 \theta_2 &= \begin{bmatrix} f_c & f_s & f_p \end{bmatrix}^T, \\
 f_{n_2} &= \frac{1}{J + m_i l \sin^2(x_2)} [l \cos(x_2) (p_1 u - m_i x_4^2 \sin(x_2)) + m_i g \sin(x_2)].
 \end{aligned}$$

Para poder saber si el sistema es observable e identificable, usamos el método descrito en [3]. Primero construimos el vector \tilde{x} con los estados del sistema y los parámetros a identificar:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ f_c \\ f_s \\ f_p \end{bmatrix}. \tag{2.54}$$

Sabiendo que la matrix $h(x)$ y $f(x)$ del sistema son:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.55}$$

contruimos la matriz $O_N(\tilde{x})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \frac{-af_s}{\gamma} & \frac{-lf_p \cos(x_2) - 2am_i x_4 \sin(x_2)}{\gamma} & \frac{-a \operatorname{sign}(x_3)}{\gamma} & \frac{-ax_3}{\gamma} & \frac{-l \cos(x_2)x_4}{\gamma} \\ 0 & \beta & \frac{-lf_s \cos(x_2)}{\gamma} & \frac{-f_p - 2l \cos(x_2)m_i x_4 \sin(x_2)}{\gamma} & \frac{-l \cos(x_2) \operatorname{sign}(x_3)}{\gamma} & \frac{-l \cos(x_2)x_3}{\gamma} & \frac{-x_4}{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\gamma\delta - \varepsilon\zeta}{\gamma}, \\ \beta &= \frac{\gamma\eta - \kappa - \lambda\zeta}{\gamma}, \\ \gamma &= [J + m_i l \sin^2(x_2)], \\ \delta &= [lf_p \sin(x_2)x_4 - am_i x_4^2 \cos(x_2) - lm_i g \sin^2(x_2) + lm_i g \cos^2(x_2)], \\ \varepsilon &= [-a(f_c \operatorname{sign}(x_3) + f_s x_3 - u + m_i x_4^2 \sin(x_2)) - l \cos(x_2)(f_p x_4 + m_i g \sin(x_2))], \\ \zeta &= [2m_i l \sin(x_2) \cos(x_2)], \\ \eta &= [l \sin(x_2)(f_c \operatorname{sign}(x_3) + f_s x_3 - u + m_i x_4^2) - m_i \cos(x_2)(lx_4^2 + g)], \\ \kappa &= [-l \sin(x_2)(f_s x_3 + u - m_i x_4^2) - \cos(x_2)(lm_i x_4^2 + lf_c \operatorname{sign}(x_3) - m_i g)], \\ \lambda &= [-l \cos(x_2)(f_c \operatorname{sign}(x_3) + f_s x_3 - u + m_i x_4^2 \sin(x_2)) - f_p x_4 + m_i g \sin(x_2)]. \end{aligned}$$

La matriz (2.56) debe tener un rango igual a 7 para que el sistema sea observable e identificable, por lo que se debe cumplir:

$$\begin{aligned} a \operatorname{sign}(x_3) &\neq ax_3 \neq l \cos(x_2)x_4, \\ l \cos(x_2) \operatorname{sign}(x_3) &\neq l \cos(x_2)x_3 \neq x_4. \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.3.2. Masa-Resorte-Amortiguador

El sistema se muestra en la figura 2.7:

Se tiene un sistema con dos masas que se mueven en un plano horizontal y que están unidas por tres resortes y un amortiguador.

El sistema en espacio de estados toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_3 + \frac{1}{m_1}u, \\
 \dot{x}_3 &= x_4, \\
 \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2}x_3 - \frac{b}{m_2}x_4,
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

donde x_1 es la posición de la masa 1, x_3 es la posición de la masa 2, x_2 es la velocidad de la masa 1 y x_4 es la velocidad de la masa 2 [10].

Los valores de los parámetros del sistema se describen en la tabla 2.2.

Nombre	Descripción	Unidades
m_1	Masa 1	1.28[kg]
m_2	Masa 2	1.05[kg]
k_1	Constante del resorte 1	450[N/m]
k_2	Constante del resorte 2	175[N/m]
k_3	Constante del resorte 3	450[N/m]
b	Constante de amortiguamiento	15[Ns/m]

Tabla 2.2: Parámetros del sistema masa-resorte-amortiguador

Si requerimos identificar los parámetros $-\frac{(k_1+k_2)}{m_1}$, $\frac{k_2}{m_1}$, $-\frac{(k_2+k_3)}{m_2}$ y $-\frac{b}{m_2}$, el sistema en la forma de regresor toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= \Gamma_1\theta_1 + f_{n_1} \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= \Gamma_2\theta_2 + f_{n_2}.
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Los vectores regresores y los vectores de parámetros y la dinámica conocida del

sistema son:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \end{bmatrix}, \\
 \theta_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \end{bmatrix}^T, \\
 f_{n_1} &= \frac{1}{m_1}u, \\
 \Gamma_2 &= \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \\
 \theta_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{k_2+k_3}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix}^T, \\
 f_{n_2} &= \frac{k_2}{m_2}x_1.
 \end{aligned}$$

Para poder saber si el sistema es observable e identificable, usamos el método descrito en [3]. Primero construimos el vector \tilde{x} con los estados del sistema y los parámetros a identificar:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ -\frac{(K_1+K_2)}{m_1} \\ \frac{K_2}{m_1} \\ -\frac{(K_2+K_3)}{m_2} \\ -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Sabiendo que la matrix $h(x)$ y $f(x)$ del sistema son:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

construimos la matrix $O_N(\tilde{x})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(K_1+K_2)}{m_1} & 0 & \frac{K_2}{m_1} & 0 & x_1 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(K_2+K_3)}{m_2} & -\frac{b}{m_2} & 0 & 0 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

La matriz (2.62) debe tener un rango igual a 8 para que el sistema sea observable e identificable, por lo que se debe cumplir:

$$\begin{aligned}x_1 &\neq x_3, \\x_3 &\neq x_4.\end{aligned}\tag{2.63}$$

2.3.3. Motor DC

El sistema se muestra en la figura 2.8.

Se tiene el circuito equivalente de un motor de corriente directa con excitación independiente en conjunto con el modelo general de un sistema mecánico que incorpora los sistemas mecánicos del motor y de la carga acoplada al motor.

El sistema en espacio de estados, sin carga acoplada, toma la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{Ra}{La}x_1 - \frac{Ke}{La}x_2 + \frac{1}{La}u, \\ \dot{x}_4 &= -\frac{B}{J}x_2 + \frac{Kt}{J}x_1,\end{aligned}\tag{2.64}$$

donde x_1 es la corriente, x_2 es la velocidad angular del motor, x_3 es la derivada de la corriente y x_4 es la aceleración angular del motor [17].

Los valores de los parámetros del sistema se describen en la tabla 2.3.

Nombre	Descripción	Unidades
Ra	Resistencia de la armadura	3.565[Ω]
Ke	Constante EMF	0.37[Vs/rad]
La	Inductancia de la armadura	37[μH]
B	Coefficiente de fricción viscosa del motor	0.0005[Nms/rad]
Kt	Constante de torque	0.37[N/A]
J	Momento de inercia del motor	0.011[kgm ²]

Tabla 2.3: Parámetros del motor DC

Si queremos identificar los parámetros $\frac{Ra}{La}$, $\frac{Ke}{La}$, $\frac{1}{La}$, $\frac{B}{J}$ y $\frac{Kt}{J}$, el sistema en la forma

de regresor toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3, \\
 \dot{x}_2 &= x_4, \\
 \dot{x}_3 &= \Gamma_1 \theta_1 + f_{n_1}, \\
 \dot{x}_4 &= \Gamma_2 \theta_2 + f_{n_2}.
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Los vectores regresores y los vectores de parámetros y la dinámica conocida del sistema son:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 & u \end{bmatrix}, \\
 \theta_1 &= \begin{bmatrix} \frac{Ra}{La} & \frac{Ke}{La} & \frac{1}{La} \end{bmatrix}^T, \\
 f_{n_1} &= 0, \\
 \Gamma_2 &= \begin{bmatrix} -x_2 & x_1 \end{bmatrix}, \\
 \theta_2 &= \begin{bmatrix} \frac{B}{J} & \frac{Kt}{J} \end{bmatrix}^T, \\
 f_{n_2} &= 0.
 \end{aligned}$$

Para poder saber si el sistema es observable e identificable, usamos el método descrito en [3]. Primero construimos el vector \tilde{x} con los estados del sistema y los parámetros a identificar:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \frac{Ra}{La} \\ \frac{Ke}{La} \\ \frac{1}{La} \\ \frac{B}{J} \\ \frac{Kt}{J} \end{bmatrix}. \tag{2.66}$$

Sabiendo que la matrix $h(x)$ y $f(x)$ del sistema son:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.67}$$

contruimos la matriz $O_N(\tilde{x})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Ra}{La} & -\frac{Ke}{La} & 0 & 0 & -x_1 & -x_2 & u & 0 & 0 \\ \frac{Kt}{J} & -\frac{B}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

La matriz (2.56) debe tener un rango igual a 9 para que el sistema sea observable e identificable, por lo que se debe cumplir:

$$\begin{aligned} x_1 &\neq x_2 \neq -u, \\ x_1 &\neq -x_2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

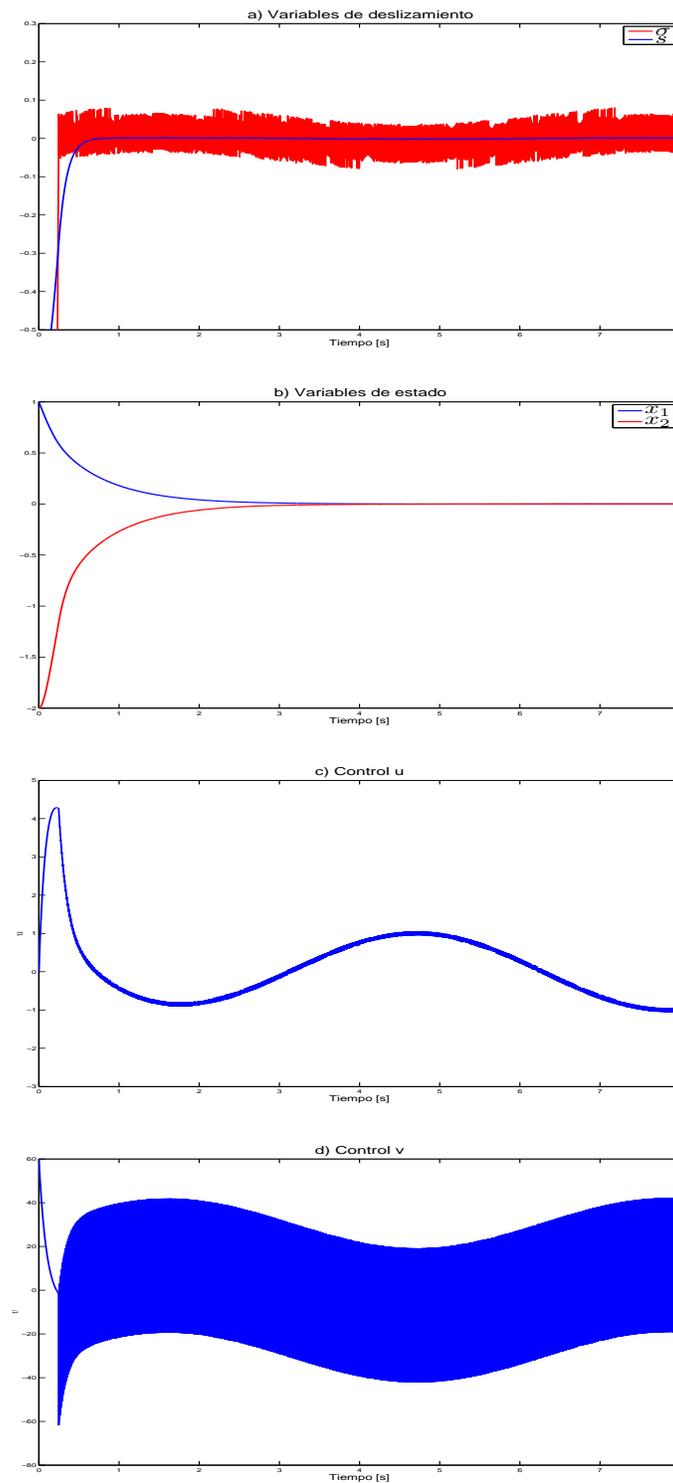


Figura 2.4: Resultados del ejemplo 3

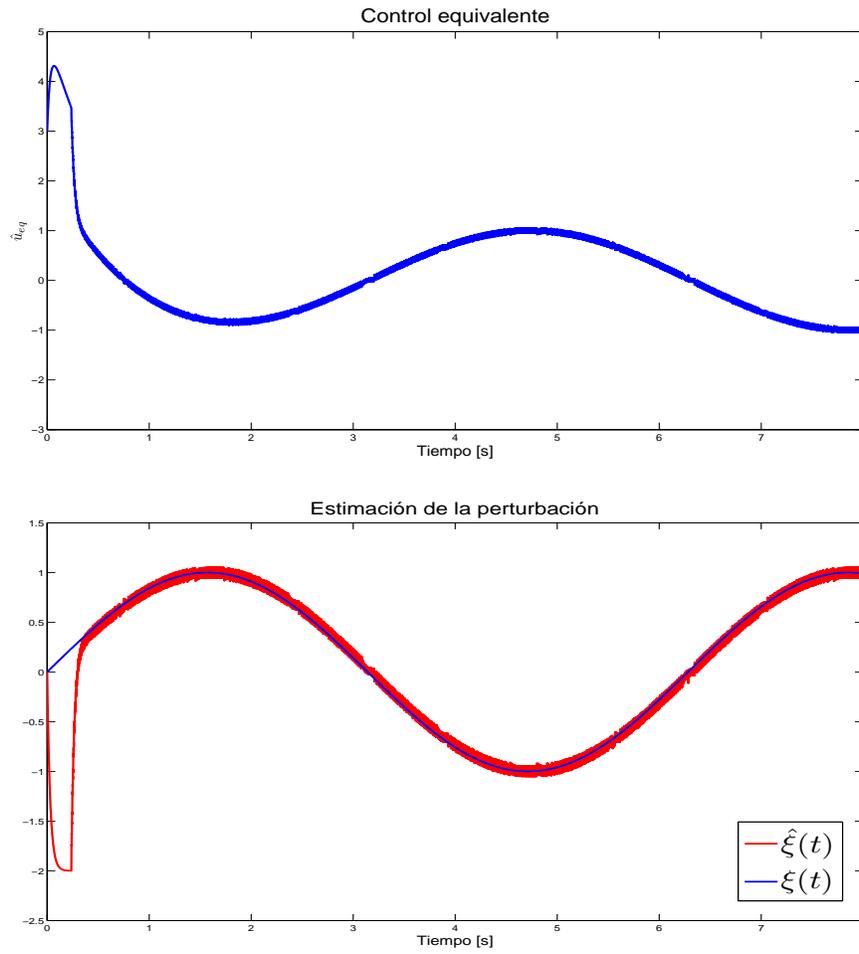


Figura 2.5: Resultados del ejemplo 4

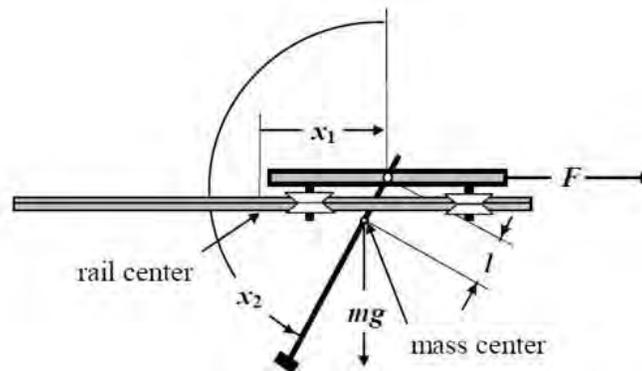


Figura 2.6: Carro-péndulo

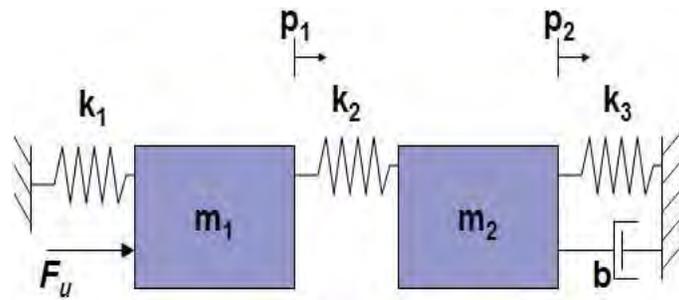


Figura 2.7: Masa-resorte-amortiguador

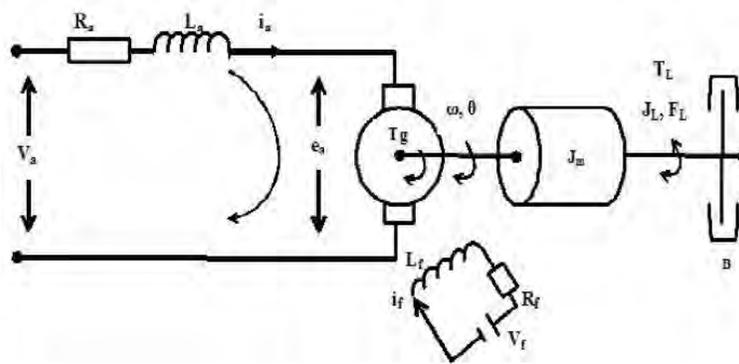


Figura 2.8: Motor DC

Capítulo 3

Observación de estados

El propósito de un observador es estimar estados no medibles de un sistema, a partir de la medición de la salida y la entrada. En éste capítulo, se implementan observadores de modos deslizantes, los cuales retroalimentan el error de estimación de salida a través de un término no lineal a diferencia de los observadores clásicos (Luenberger, por ejemplo) y proveen la convergencia a cero en tiempo finito del error de estimación de salida.

Si consideramos de nuevo el sistema (1.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, u) + \xi(x_1, x_2, t), \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

el propósito será estimar el estado x_2 a partir de la información de $y = x_1$, a pesar de las perturbaciones ξ que se tengan en el sistema.

3.1. Observador con Super-Twisting

Este observador de segundo orden, se propone en [8] y tiene la forma

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\alpha_2 \lambda(e_y) \text{sign}(e_y) + \hat{x}_2, \tag{3.1}$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -\alpha_1 \text{sign}(e_y) + f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u), \tag{3.2}$$

donde \hat{x}_1 , \hat{x}_2 son las estimaciones de los estados x_1 , x_2 respectivamente; las matrices de ganancias α_1 , α_2 y $\lambda(\tilde{x}_1)$ se definen como

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \text{diag} \{ \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n} \}, \\ \alpha_2 &= \text{diag} \{ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n} \}, \\ \lambda(e_y) &= \text{diag} \left\{ |e_{y_1}|^{\frac{1}{2}}, |e_{y_2}|^{\frac{1}{2}}, \dots, |e_{y_n}|^{\frac{1}{2}} \right\}, \\ \text{sign}(e_y) &= [\text{sign}(e_{y_1}), \text{sign}(e_{y_2}), \dots, \text{sign}(e_{y_n})]^T,\end{aligned}$$

donde $e_{y_i} = \hat{x}_{1_i} - x_{1_i}$, $i = 1, \dots, n$, corresponden a las coordenadas del vector x_1 y las constantes $\alpha_{1_i}, \alpha_{2_i}$ son los factores de corrección diseñados para la convergencia del error de estimación para cada par de coordenadas (x_{1_i}, x_{2_i}) .

Los parámetros del observador se seleccionan de acuerdo a

$$\begin{aligned}\alpha_{1_i} &= 1.1 f_i^+, \\ \alpha_{2_i} &= 1.5 \sqrt{f_i^+},\end{aligned}$$

donde f_i^+ es la cota superior de la aceleración.

Definiendo el error de estimación de la velocidad como $e_{x_2} = \hat{x}_2 - x_2$, la dinámica de estimación del error puede ser descrita como:

$$\begin{aligned}\dot{e}_y &= -\alpha_2 \lambda(e_y) \text{sign}(e_y) + e_{x_2}, \\ \dot{e}_{x_2} &= -\alpha_1 \text{sign}(e_y) + \bar{f}(x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2, u) - \xi(x_1, x_2, t),\end{aligned}\quad (3.3)$$

donde $\bar{f}(x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2, u) = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) - f(x_1, x_2, u)$.

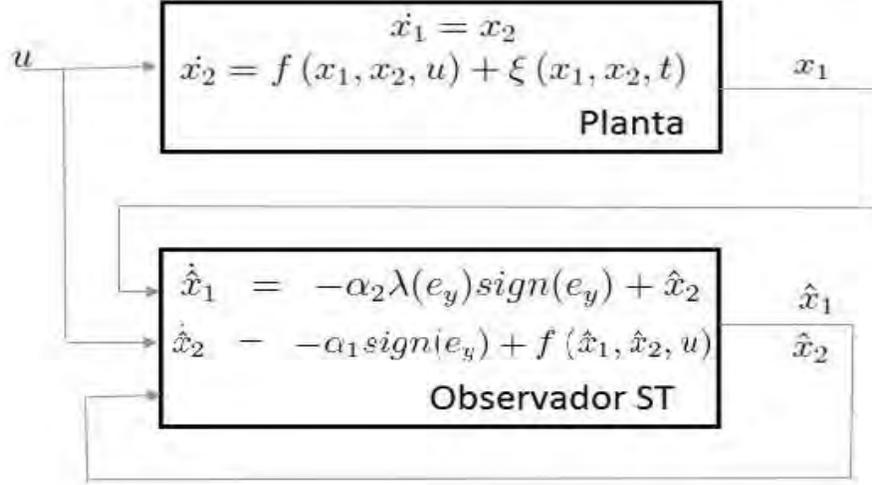
Las características de éste observador son:

- Este observador asegura la convergencia de los estados estimados al valor de los estados reales, en tiempo finito [7].
- Estima el estado a pesar de las perturbaciones del sistema.
- El parámetro a diseñar es f_i^+ .

3.2. Observador con Super-Twisting Generalizado

Para poder estimar la velocidad x_2 del sistema (1.1), en [2] se aplica el Algoritmo Super-Twisting Generalizado (GSTA):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -k_1 \phi_1(e_y) + \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -k_2 \phi_2(e_y) + f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u),\end{aligned}\quad (3.4)$$


Figura 3.1: Estructura del Observador con ST

donde

$$\phi_1(e_y) = \mu_1 |e_y|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_y) + \mu_2 e_y, \quad \mu_1, \mu_2 > 0, \quad (3.5)$$

$$\phi_2(e_y) = \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(e_y) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 |e_y|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_y) + \mu_2^2 e_y \quad (3.6)$$

y $e_y = \hat{x}_1 - x_1$ y $k_1, k_2, \mu_1, \mu_2 > 0$ son constantes positivas a ser diseñadas.

Definiendo el error de estimación de la velocidad como $e_{x_2} = \hat{x}_2 - x_2$, la dinámica de estimación del error puede ser descrita como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_y &= -k_1 \phi_1(e_y) + e_{x_2}, \\ \dot{e}_{x_2} &= -k_2 \phi_2(e_y) + \bar{f}(x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2, u) - \xi(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $\bar{f}(x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2, u) = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) - f(x_1, x_2, u)$.

Las características de éste observador son:

- En [12] se demuestra, por medio de una función de Lyapunov, que el GSTA puede estimar x_2 en tiempo finito, cuando solo se puede medir x_1 .
- Como tiene términos lineales de corrección extra en comparación con el ST, es mas robusto a perturbaciones y tiene una velocidad de convergencia mayor.
- Los parámetros de diseño son μ_1, μ_2, k_1 y k_2 .

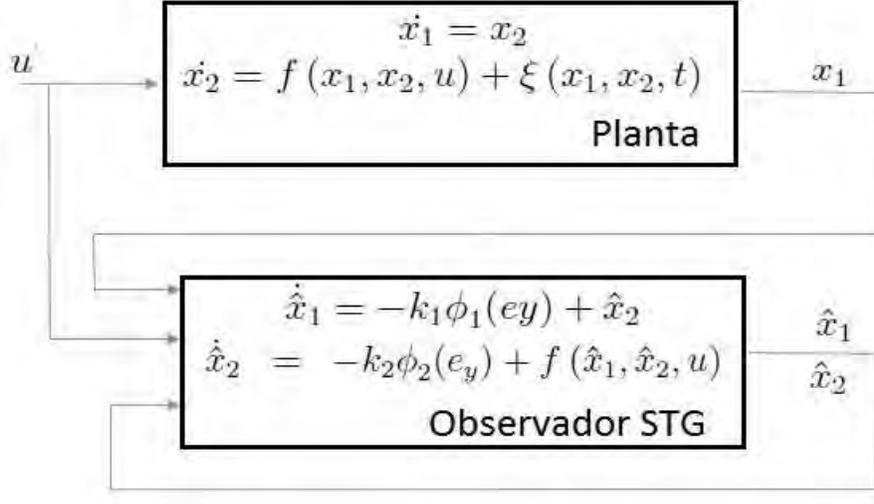


Figura 3.2: Estructura del Observador con STG

3.3. Filtro de aproximación de variables de estado

Como las derivadas de la salida y no se pueden medir, se utiliza un filtro de aproximación de variables de estado [15]. La idea principal es filtrar la señal de salida del sistema (1.1) con un filtro pasa-bajas. Para esto, se parte de la siguiente función de transferencia:

$$G_F(s) = \frac{1}{1 + \lambda_1 s + \dots + \lambda_n s^n}, \quad (3.8)$$

donde los parámetros del filtro λ_k son relativamente libres. Para una frecuencia de corte ω_c arbitraria, la función de transferencia (3.8) resulta:

$$G_F(s) = \frac{1}{\prod_i (1 + \alpha_i \frac{s}{\omega_c} + \beta_i \frac{s^2}{\omega_c^2})}, \quad (3.9)$$

siendo los coeficientes:

- Si n es par:

$$\begin{aligned} \{\alpha_j\}_{j=1}^{n/2} &= \left\{ 2 \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right\}_{j=1}^{n/2}, \\ \{\beta_j\}_{j=1}^{n/2} &= 1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Si n es impar:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1, & \{\alpha_j\}_{j=2}^{(n+1)/2} &= \left\{2 \cos \frac{(j-1)\pi}{n}\right\}_{j=2}^{(n+1)/2}, \\ \beta_1 &= 0, & \{\beta_j\}_{j=2}^{(n+1)/2} &= 1.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Si filtramos la salida y del sistema, el filtro en la forma canónica resulta:

$$\dot{y}_F(t) = Ay_F(t) + By(t), \quad (3.12)$$

donde $y_F(t) = [y_{f1}(t), \dots, y_{fn}(t)]^T \in \mathfrak{R}^n$ y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{1}{\lambda_n} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_n} & \cdots & -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Las características de éste filtro son:

- Evitan el cálculo de las derivadas.
- Como es un filtro pasa-bajas, disminuye el ruido.
- Siempre tendrá un desfaseamiento.
- El parámetro de diseño es ω_c .

3.4. Simulaciones

Se realizaron simulaciones en Matlab-Simulink de los tres sistemas descritos en el capítulo 2. Para cada sistema se utilizaron las mismas condiciones de simulación en los tres métodos.

3.4.1. Carro-Péndulo

En el sistema Carro-Péndulo se tuvieron las siguientes condiciones de simulación:

- Tiempo de simulación de 60 segundos.

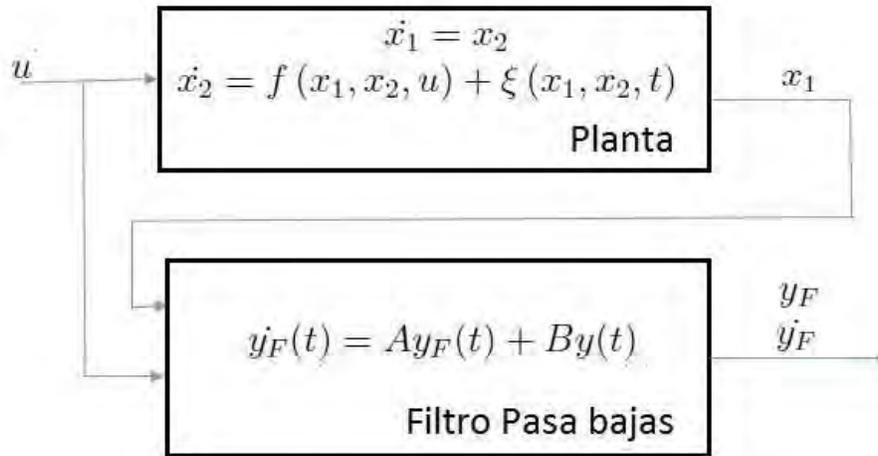


Figura 3.3: Estructura del Filtro de aproximación de variables de estado

- Paso de muestreo de 0.001.
- Condiciones iniciales de $x_0 = [0; \pi; 0; 0]$.
- Señal de entrada $u = 2 \sin(t) + 2 \sin(5t) + 2 \sin(10t)$, que cumple con ser una señal suficientemente rica para poder excitar el sistema y obtener una identificación de tres parámetros en solo la parte dinámica del carro.

Los parámetros de diseño de los tres métodos utilizados se muestran en la tabla 3.1.

Nombre del método	Parámetros
<i>ST</i>	$f_1^+ = 7$ y $f_2^+ = 22$
<i>STG</i>	$\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 5$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 2$
<i>Filtros</i>	$\omega_c = 10$

Tabla 3.1: Parámetros de diseño de los métodos de observación en el sistema Carro-Péndulo

Los resultados de observación en este sistema se muestran en la figura 3.4.

En la figura podemos notar que los métodos de observación que mejor funcionan son los de Modos Deslizantes, pero el STG tiene mejor desempeño que el ST porque presenta menos chattering (sobre todo en los estados de velocidad) y mayor velocidad de convergencia. Los filtros siguen los estados, pero presentan un desfase con respecto al valor real y a veces una atenuación de estos.

3.4.2. Masa-Resorte-Amortiguador

En el sistema Masa-Resorte-Amortiguador se tuvieron las siguientes condiciones de simulación:

- Tiempo de simulación de 60 segundos.
- Paso de muestreo de 0.001.
- Condiciones iniciales de $x_0 = [1; 0; 1; 0]$.
- Señal de entrada $u = 10 \sin(5t) + 10 \sin(10t)$, que cumple con ser una señal suficientemente rica para poder excitar el sistema y obtener una identificación de dos parámetros en la parte dinámica de la masa 1 y dos parámetros en la parte dinámica de la masa 2.

Los parámetros de diseño de los tres métodos utilizados se muestran en la tabla 3.2.

Nombre del método	Parámetros
<i>ST</i>	$f_1^+ = 15$ y $f_2^+ = 15$
<i>STG</i>	$\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 5$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 2$
<i>Filtros</i>	$\omega_c = 10$

Tabla 3.2: Parámetros de diseño de los métodos de observación en el sistema Masa-Resorte-Amortiguador

Los resultados de observación en este sistema se muestran en la figura 3.5.

En la figura se puede notar que el observador con STG presenta mucha oscilación en los primeros segundos de simulación, pero converge más rápido que el de ST, además que éste último presenta mucho chattering en la velocidad de la masa 2. Los filtros funcionan igual que en el sistema carro-péndulo.

3.4.3. Motor DC

En el sistema Motor DC se se tuvieron las siguientes condiciones de simulación:

- Tiempo de simulación de 60 segundos.
- Paso de muestreo de 0.001.
- Condiciones iniciales de $x_0 = [1; 1; 0; 0]$.

- Señal de entrada $u = 3 \sin(5t) + 3 \sin(10t) + 3 \sin(15t)$, que cumple con ser una señal suficientemente rica para poder excitar el sistema y obtener una identificación de tres parámetros en la parte dinámica de la corriente y dos parámetros en la parte dinámica del movimiento de la flecha del motor.

Los parámetros de diseño de los tres métodos utilizados se muestran en la tabla 3.3.

Nombre del método	Parámetros
ST	$f_1^+ = 240$ y $f_2^+ = 80$
STG	$\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 5$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 2$
$Filtros$	$\omega_c = 15$

Tabla 3.3: Parámetros de diseño de los métodos de observación en el sistema Motor DC

Los resultados de observación en este sistema se muestran en la figura 3.6.

En este sistema se muestra cómo el observador con ST funciona mejor que los sistemas descritos anteriormente, ya que no presenta chattering. El observador con STG sigue siendo el mejor, ya que converge mucho más rápido, aún cuando el estado real presenta mucha oscilación desde el principio.

3.4.4. Comparación

Para poder hacer la comparación de estos tres métodos, se utilizó el recurso del Error Medio Cuadrático, que se puede definir de la siguiente manera:

$$EMC = \sqrt{(\hat{x}_1 - x_1)^2 + (\hat{x}_2 - x_2)^2 + (\hat{x}_3 - x_3)^2 + (\hat{x}_4 - x_4)^2} \quad (3.14)$$

Con este error, se puede comparar los tres métodos en los 3 diferentes sistemas y esto se ve en la figura 3.7.

Se puede notar que el método que tiene mejor funcionamiento es el Super-Twisting Generalizado, ya que lleva al error de observación a un valor muy cercano a cero en un tiempo mucho menor que los otros métodos. El método de Super-Twisting es el segundo mejor, pero su inconveniente es el efecto de chattering que se produce en la estimación de estados. Por último, los filtros pueden ser usados por su gran facilidad de implementación, pero siempre tendrá un desfase en la estimación que este produzca.

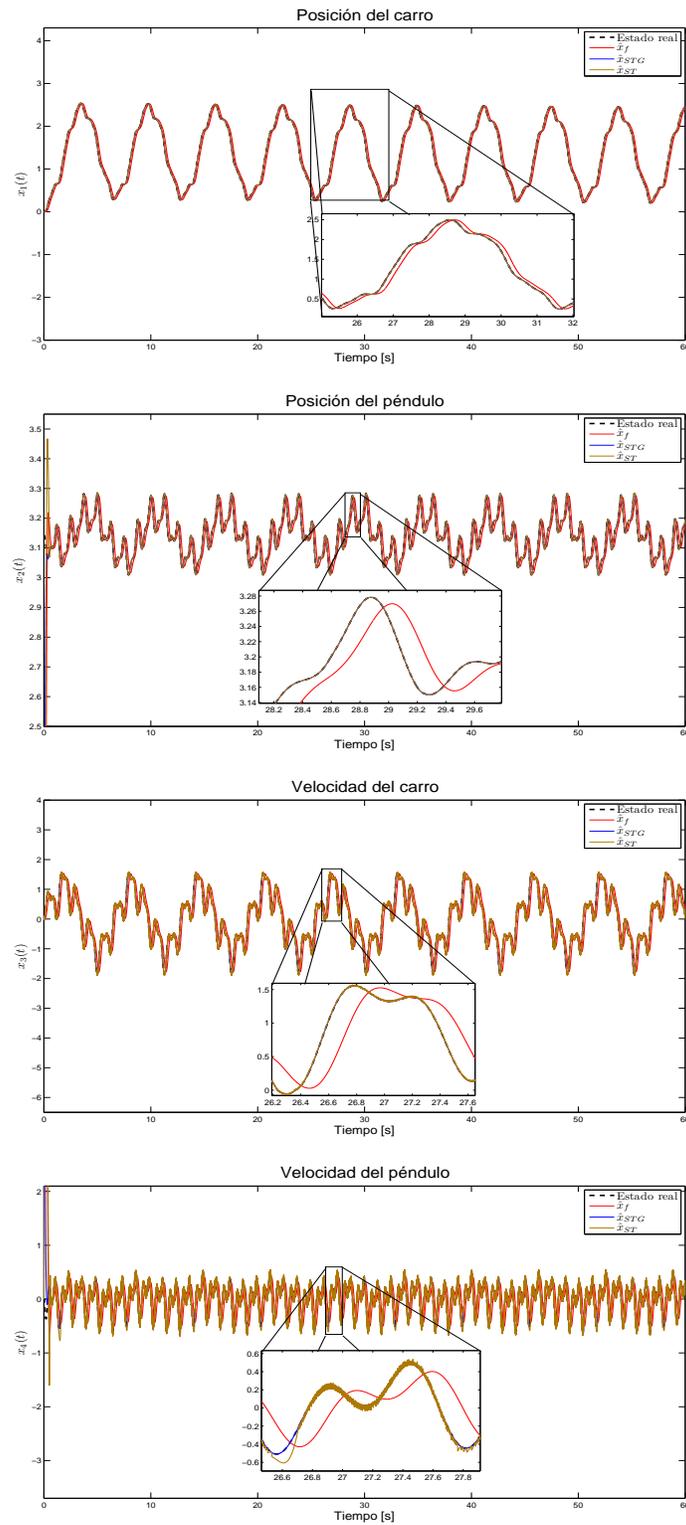


Figura 3.4: Observación de estados en las simulaciones del sistema Carro-Péndulo

3. Observación de estados

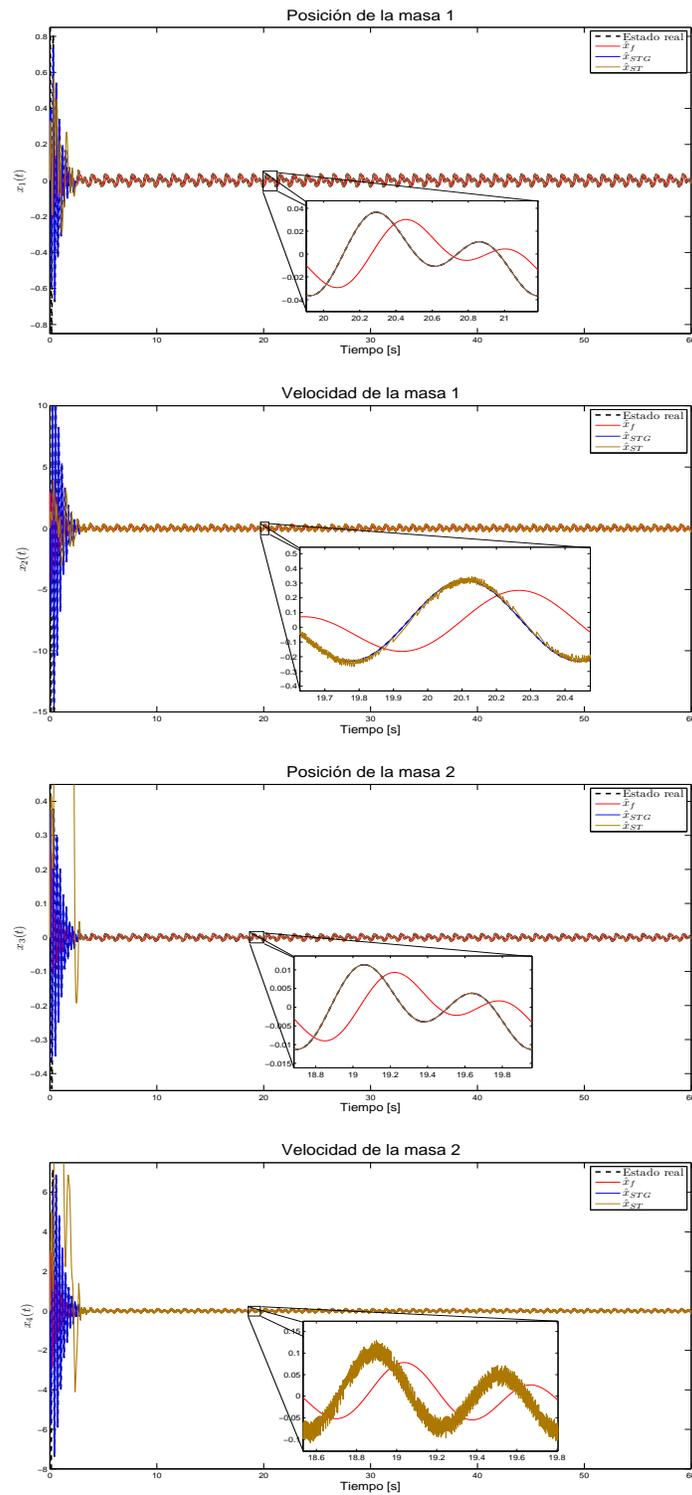


Figura 3.5: Observación de estados en las simulaciones del sistema Masa-Resorte-Amortiguador

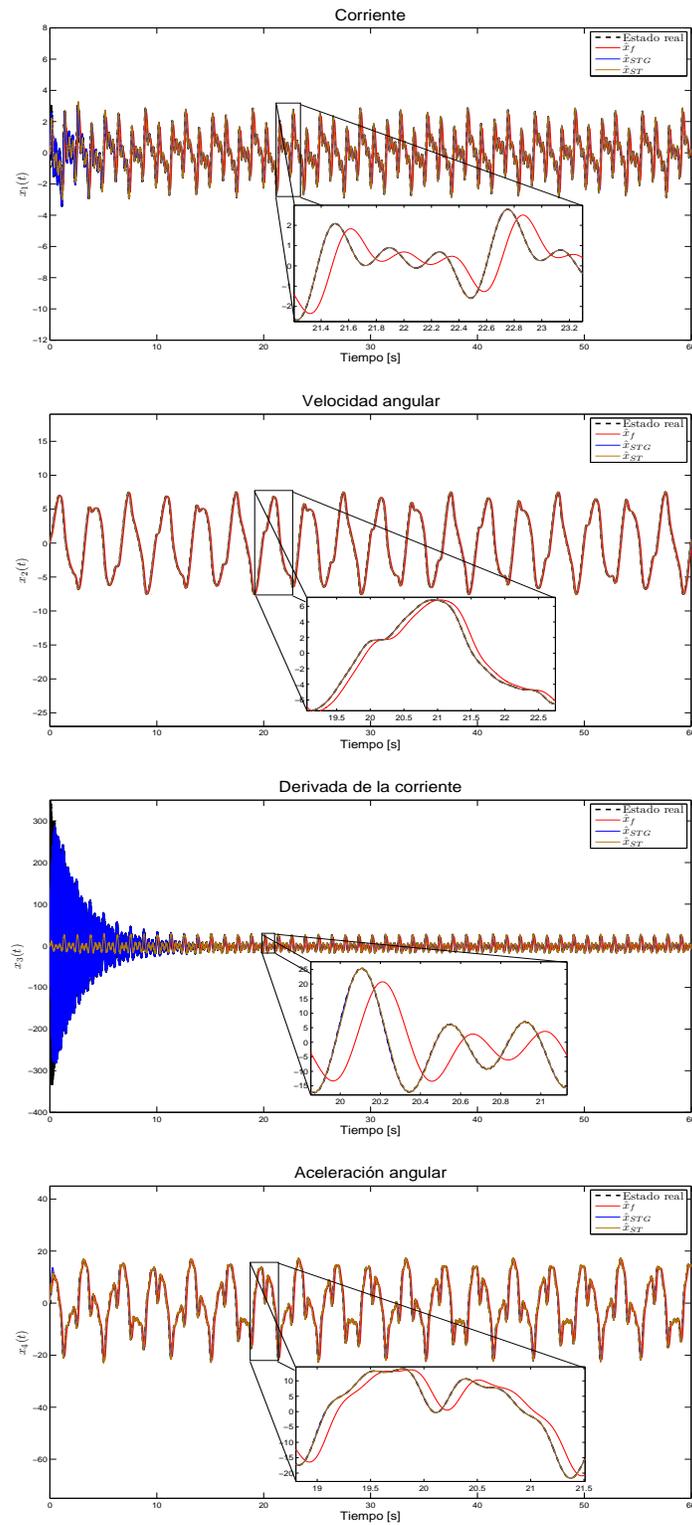


Figura 3.6: Observación de estados en las simulaciones del sistema Motor DC

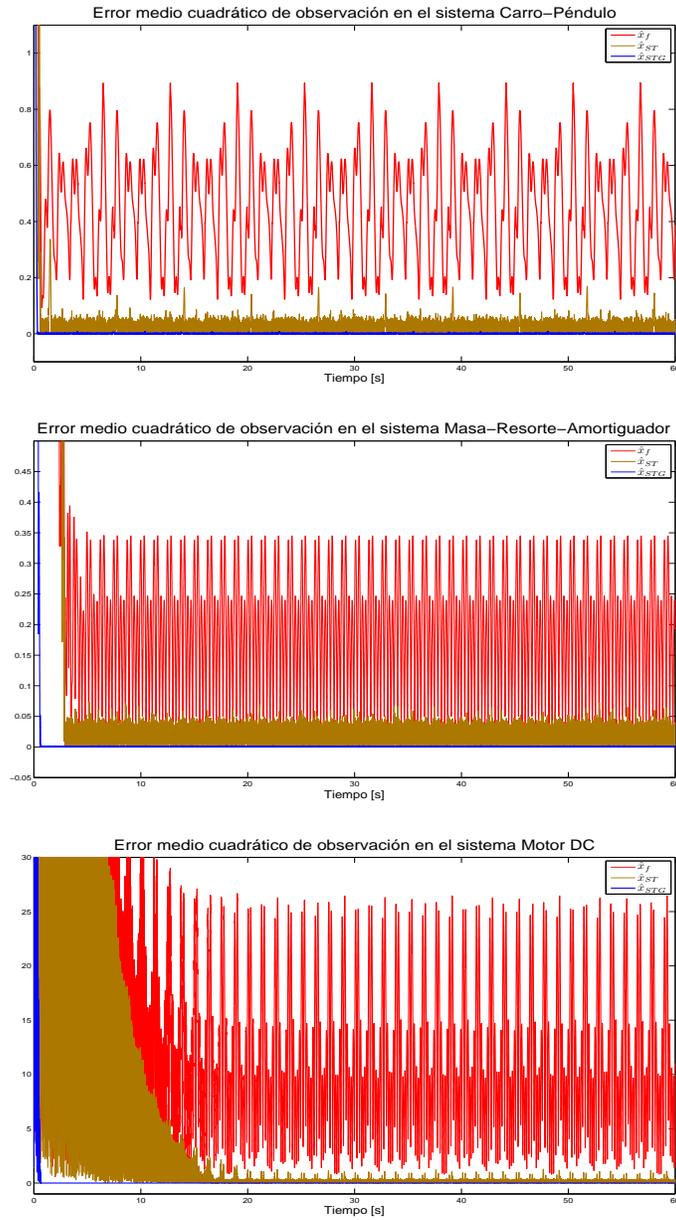


Figura 3.7: Comparación entre los diferentes métodos de observación en los 3 sistemas

Capítulo 4

Identificación de Parámetros

Un problema que a menudo surge en las tareas de control es la incertidumbre de valores en algunos parámetros o incluso su completo desconocimiento. Para esto, se requieren métodos que provean la estimación de los parámetros desconocidos a cada instante.

El primer paso es obtener el modelo paramétrico, en el cual los parámetros deseados se concentran en el *vector de parámetros desconocidos* θ .

Considerando el sistema (1.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_n(x_1, x_2, u) + \xi(x_1, x_2, t), \\ y &= x_1,\end{aligned}\tag{4.1}$$

cambia a la forma de regresor de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_n(x_1, x_2, u) + \Gamma(t)\theta,\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde Γ es el vector regresor, θ es el vector de parámetros que se desean identificar y f_n es la parte dinámica nominal conocida.

Hay que notar que el término ξ del sistema (4.1), representa el desconocimiento de los parámetros. En este caso, no se consideran perturbaciones o entradas desconocidas.

4.1. Mínimo cuadrado en línea con Modos Deslizantes

Recordando el observador de segundo orden con ST del capítulo 3:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -\alpha_2 \lambda(e_y) \text{sign}(e_y) + \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\alpha_1 \text{sign}(e_y) + f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u),\end{aligned}$$

este observador asegura que en un tiempo finito se cumpla

$$0 \equiv \dot{\tilde{x}}_2 \equiv \bar{F}(t, x_1, x_2, \hat{x}_2, u) + \xi(t, x_1, x_2, u) - \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1).$$

Hay que notar que $\bar{F}(t, x_1, x_2, \hat{x}_2, u) = F(t, x_1, x_2, u) - F(t, x_1, \hat{x}_2, u) = 0$ porque $\hat{x}_2 = x_2$, por lo que la inyección equivalente de salida es

$$z_{eq}(t) \equiv \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) \equiv \xi(t, x_1, x_2, u). \quad (4.3)$$

El término $\xi(t, x_1, x_2, u)$ está compuesto por incertidumbres y perturbaciones.

Para eliminar la alta frecuencia producida por el observador en la inyección equivalente, usamos un filtro de la forma

$$\tau \dot{\bar{z}}_{eq}(t) = -\bar{z}_{eq}(t) + z_{eq}(t), \quad (4.4)$$

donde $\tau \in \mathfrak{R}$ y $h \ll \tau \ll 1$ y donde h es el paso de muestreo.

Como se muestra en [22]

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, h/\tau \rightarrow 0} \bar{z}_{eq}(\tau, h) = z_{eq}(t),$$

por lo que es posible asumir que la inyección equivalente de salida es igual a la salida del filtro.

Si consideramos el caso en el que los parámetros del sistema son invariantes con el tiempo, la inyección equivalente (4.3), se puede representar de la forma:

$$\bar{z}_{eq}(t) = \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1) = \hat{\theta} \Gamma(t, x_1, x_2, u), \quad (4.5)$$

donde $\hat{\theta}$ es el vector de parámetros a ser estimados.

Para poder obtener los parámetros reales del sistema, se aplica el algoritmo de regresión lineal.

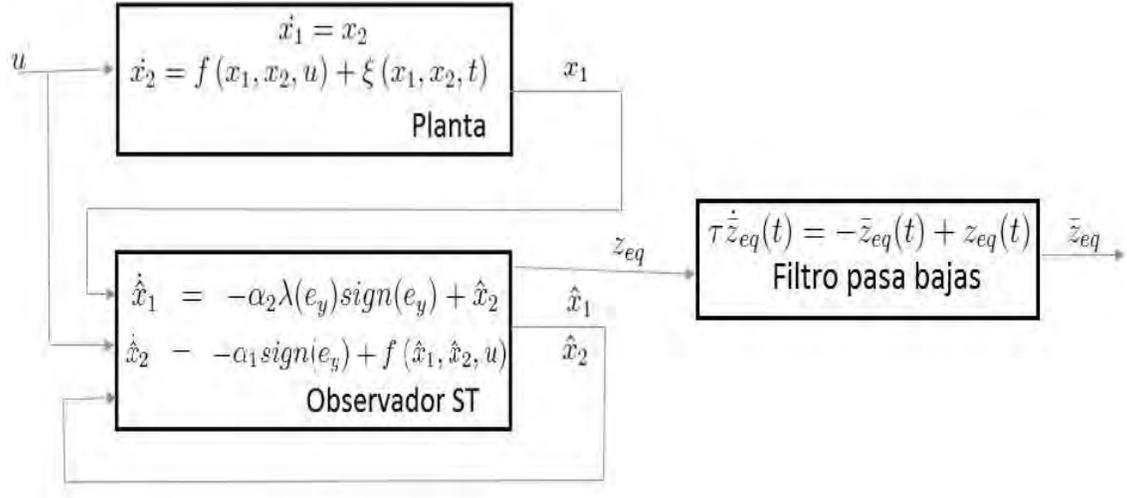


Figura 4.1: Estructura de la Inyección equivalente

Si post-multiplicamos (4.5) por $\Gamma^T(t, x_1, x_2, u)$ y definimos σ como variable auxiliar de integración, obtenemos:

$$\frac{1}{t} \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \Gamma^T(\sigma) d\sigma = \hat{\theta} \frac{1}{t} \int_0^t \Gamma(\sigma) \Gamma(\sigma)^T d\sigma. \quad (4.6)$$

Por lo tanto los parámetros del sistema pueden ser estimados como:

$$\hat{\theta} = \left[\int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \Gamma^T(\sigma) d\sigma \right] \left[\int_0^t \Gamma(\sigma) \Gamma(\sigma)^T d\sigma \right]^{-1}. \quad (4.7)$$

Definiendo $P(t) = \left[\int_0^t \Gamma(\sigma) \Gamma(\sigma)^T d\sigma \right]^{-1}$ y sabiendo que para cualquier matriz cuadrada las siguientes igualdades se cumplen

$$\begin{aligned} P^{-1}(t)P(t) &= I, \\ P^{-1}(t)\dot{P}(t) + \dot{P}^{-1}(t)P(t) &= 0, \end{aligned}$$

podemos reescribir (4.7) de la forma

$$\dot{\hat{\theta}} = \left[\int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \Gamma^T(\sigma) d\sigma \right] \dot{P}(t) + z_{eq}(t) \Gamma^T(t) P(t). \quad (4.8)$$

Usando (4.6) podemos reescribir

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\theta} P^{-1}(t) \dot{P}(t) + \bar{z}_{eq}(t) \Gamma^T(t) P(t). \quad (4.9)$$

La igualdad (4.6) nos permite escribir la expresión dinámica para calcular θ como

$$\dot{\hat{\theta}} = [-\hat{\theta}\Gamma(t) + \bar{z}_{eq}(t)]\Gamma^T(t)P(t). \quad (4.10)$$

De la misma forma para encontrar $P(t)$ es

$$\dot{P}(t) = -P(t)\Gamma(t)\Gamma^T(t)P(t). \quad (4.11)$$

La condición de excitación persistente es necesaria para la convergencia de este método

$$\sup \|t\Gamma(t)\| < \infty \quad (4.12)$$

y requiere que la matriz $P^{-1}(t) = \int_0^t \Gamma(\sigma)\Gamma^T(\sigma)d\sigma$ no tenga singularidades. Para evitar esta restricción, introducimos el término ρI donde $0 < \rho \ll I$ e I es la matriz unitaria. El término ρI es la condición inicial de (4.11) y redefine $P^{-1}(t)$ como

$$P^{-1}(t) = \int_0^t (\Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma)^T d\sigma) + \rho I, \quad (4.13)$$

en este caso, la matriz no tiene singularidades, pero no garantiza la convergencia de los parámetros estimados a los valores reales. Esta convergencia es asegurada con *la condición de excitación persistente* [21]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{t} \int_0^t (\Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma)^T d\sigma) > 0. \quad (4.14)$$

Las características de éste identificador son:

- Tan rápido el término $\frac{1}{t} \int_0^t (\Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma)^T d\sigma)$ converja a cero, los parámetros a estimar convergerán a los valores reales.
- Si se filtra bien la inyección equivalente, se pueden eliminar los efectos de ruido.
- Los parámetros a diseñar son τ y P_0

4.2. Identificación por Super Twisting Generalizado

Para poder identificar θ en un tiempo finito, se construye un estimador de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= -k_1\phi_1(ey) + \Gamma(t)\hat{\theta} + f_n, \\ \dot{\hat{\theta}} &= -k_2\phi_2(ey)\Gamma^T(t), \end{aligned} \quad (4.15)$$

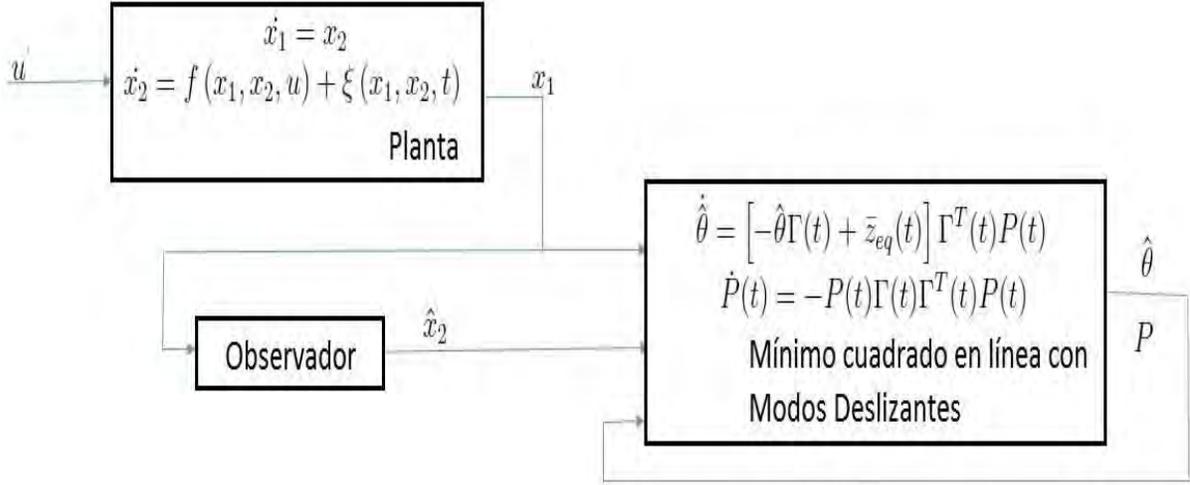


Figura 4.2: Estructura del Mínimo cuadrado en línea con Modos Deslizantes

donde $ey = \hat{x}_2 - x_2$ es el error de estimación de la velocidad, $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ son constantes positivas, ϕ_1 y ϕ_2 deben ser diseñados de acuerdo a (3.5) y (3.6) y $\hat{\theta}$ es el vector de parámetros estimados [16].

Si reescribimos el sistema (1.1) de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A(t)x_1 + B(t)x_2, \\ \dot{x}_2 &= C(t)x_1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $x_i \in \mathfrak{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son matrices de funciones continuas acotadas.

Sea $A(t)$ una matriz uniforme y asintóticamente estable de $n \times n$ funciones continuas acotadas. Sea $P(t)$ una matriz simétrica y positiva definida de funciones continuas acotadas, tal que $\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t)$ es negativa definida. Sea $B(t)$ una matriz de $n \times r$ funciones continuas acotadas. Se asume que existe una constante positiva T_0, ε_0 , y δ_0 con $t_2 \in [t, t + T_0]$ tal que para cualquier vector unitario $w \in \mathfrak{R}^{n_2}$

$$\left\| \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2 + \delta_0} B(\tau)w d\tau \right\| \geq \varepsilon_0, \forall t \geq t_0. \quad (4.17)$$

Entonces el sistema (4.16) con $C(t) = -B^T(t)P(t)$ es uniforme y asintóticamente estable (UAS). Por otra parte, si $B(t)$ es suave y $|\dot{B}(t)|$ es uniformemente acotado, (4.17) es equivalente a

$$\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \|B(\tau)w\| d\tau \geq \varepsilon_0, \forall t \geq t_0 \quad (4.18)$$

para $t_0 \in \mathfrak{R}_+$, las constantes positivas t_0 y ε_0 y todos los vectores unitarios $w \in \mathfrak{R}^{n_2}$.

La condición (4.18) es la definición clásica para que la señal $B(t)$ sea excitada persistentemente y es necesaria para la convergencia de este método de identificación de parámetros.

Las características de éste identificador son:

- Los parámetros convergen al valor real en tiempo finito.
- Como no utiliza una señal de control equivalente o inyección de salida como en los métodos clásicos de identificación, no presenta chattering.
- Los parámetros de diseño son μ_1 , μ_2 , k_1 y k_2 .

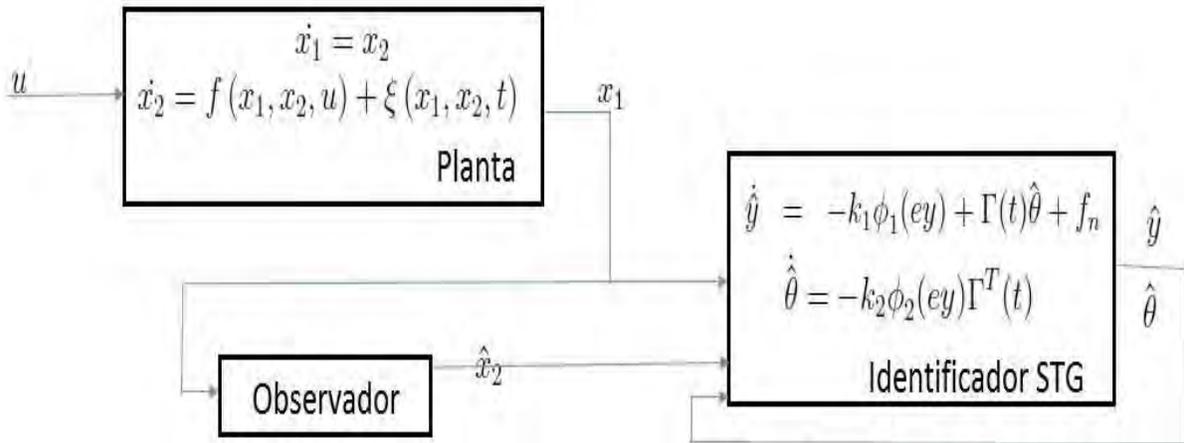


Figura 4.3: Estructura del Identificador por STG

4.3. Mínimo cuadrado

Si tomamos como referencia el filtro de aproximación de variables de estado del capítulo 3 en donde sólo se obtiene una aproximación de la velocidad, para poder complementar el regresor del sistema se filtra también la entrada de la forma:

$$\dot{u}_F(t) = Au_F(t) + Bu(t), \quad (4.19)$$

donde $u_F(t) = [u_{f1}(t), \dots, u_{fn}(t)]^T \in \mathfrak{R}^n$ y las matrices A y B , se construyen de acuerdo a (3.13).

Ya que $\dot{y}_{F_{n-1}}(t) = y_{F_n}(t)$, la aceleración $Y(t) = \dot{y}_{F_n}(t)$, puede ser construida de la siguiente manera:

$$Y(t) = \left[-\frac{1}{\lambda_n}, -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}, \dots, -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right] y_F(t) + \frac{1}{\lambda_n} y(t). \quad (4.20)$$

Teniendo todo el sistema filtrado, (4.2) se puede reescribir como:

$$Y(t) = \theta(t - T)\Gamma(t) + e(t), \quad (4.21)$$

donde cada componente del vector θ es constante en el intervalo $[t - T, t]$.

Si post-multiplicamos por $\Gamma^T(t)$ e integramos, se obtiene

$$\int_{t-T}^t Y(t)\Gamma^T(t)dt = \hat{\theta}(t - T) \int_{t-T}^t \Gamma(t)\Gamma^T(t)dt + \int_{t-T}^t e(t)\Gamma^T(t)dt. \quad (4.22)$$

Así, el método de mínimos cuadrados se aplica para estimar θ :

$$\hat{\theta}(t - T) = \int_{t-T}^t Y(t)\Gamma^T(t)dtPE^{-1} + \int_{t-T}^t e(t)\Gamma^T(t)dtPE^{-1}, \quad (4.23)$$

donde T es una constante positiva y $PE = \int_{t-T}^t \Gamma(t)\Gamma^T(t)dt$ [15].

El vector $\Gamma(t)$ satisface la condición de excitación persistente (PE) necesaria para la convergencia de este método:

$$\alpha_2 I \geq \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \Gamma(t)\Gamma^T(t)dt \geq \alpha_1 I, \quad (4.24)$$

para $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$.

Las características de éste identificador son:

- Los parámetros convergen al valor real en tiempo finito.
- El método es particularmente simple si el sistema tiene parámetros lineales.
- El parámetro de diseño es T .

4.4. Simulaciones

Como en el caso de la observación de estados, se hicieron simulaciones en Matlab-Simulink de los tres sistemas descritos en el capítulo 2, para implementar los 3 métodos de identificación de parámetros vistos en este capítulo. Para cada sistema se utilizaron las mismas condiciones de simulación que en la observación de estados.

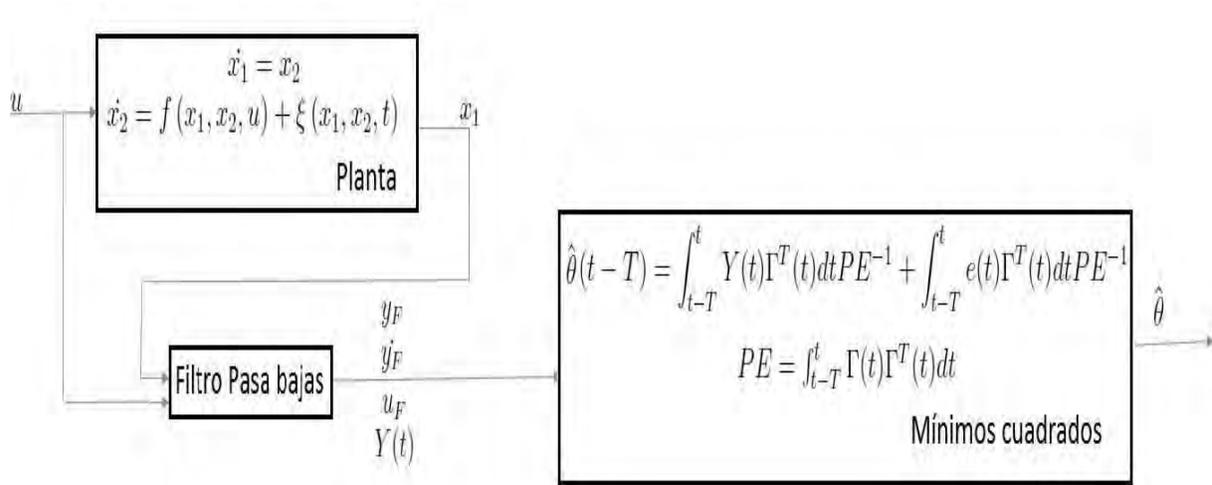


Figura 4.4: Estructura del Mínimo cuadrado

4.4.1. Carro-Péndulo

En el sistema Carro-Péndulo, los parámetros de diseño de los tres métodos de identificación se muestran en la tabla 4.1.

Nombre del método	Parámetros
Mínimo cuadrado en línea con MD	$\tau = 0.01$ y $P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Identificador por STG	$\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 1, k_1 = 3$ y $k_2 = 2$
Mínimo cuadrado	$T = 5$

Tabla 4.1: Parámetros de diseño de los métodos de identificación en el sistema Carro-Péndulo

Los resultados de identificación de parámetros en este sistema se muestran en la figura 4.5.

En la figura se observa que el método de STG se desempeña mejor que los otros dos, ya que identifica los tres parámetros. El método de mínimo cuadrado logra identificar solo un parámetro y el de mínimo cuadrado en línea solo se acerca a los valores. Sin embargo, se aproxima más al valor real que el mínimo cuadrado en los primeros dos parámetros.

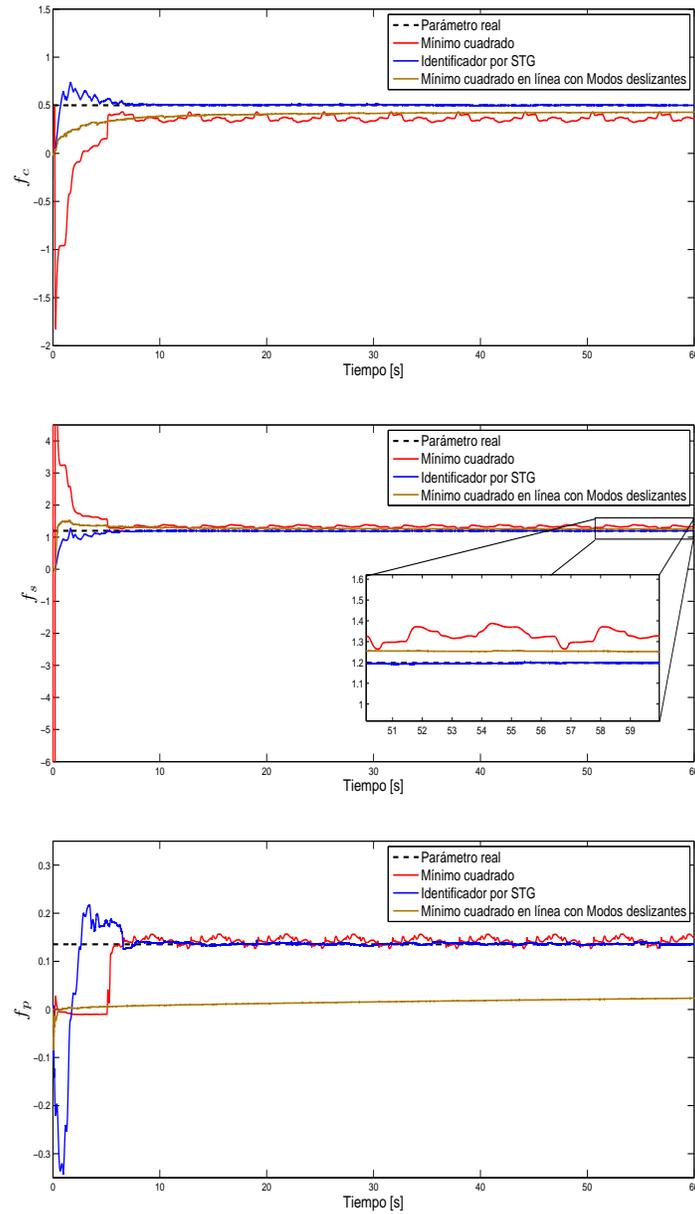


Figura 4.5: Identificación de parámetros en las simulaciones del sistema Carro-Péndulo

4.4.2. Masa-Resorte-Amortiguador

En el sistema Masa-Resorte-Amortiguador, los parámetros de diseño de los tres métodos de identificación se muestran en la tabla 4.2.

4. Identificación de Parámetros

Nombre del método	Parámetros					
Mínimo cuadrado en línea con MD	$\tau_1 = 0.01, \tau_2 = 0.01, P_{10} =$	0.11	0	y $P_{20} =$	0.078	0
		0	0.005		0	0.0035
Identificador por STG	$\mu_{11} = 1, \mu_{21} = 0.5, k_{11} = 10$ y $k_{21} = 7000$ $\mu_{12} = 0.1, \mu_{22} = 0.5, k_{12} = 25$ y $k_{22} = 5000$					
Mínimo cuadrado	$T = 5$					

Tabla 4.2: Parámetros de diseño de los métodos de identificación en el sistema Masa-Resorte-Amortiguador

Los resultados de identificación de parámetros en este sistema se muestran en la figura 4.6.

Los resultados obtenidos demuestran que el método de mínimo cuadrado puede identificar los 4 parámetros con una gran exactitud. El identificador con STG presenta muchas oscilaciones en su estimación y el mínimo cuadrado en línea se encuentra distante de los valores reales.

4.4.3. Motor DC

En el sistema Motor DC, los parámetros de diseño de los tres métodos de identificación se muestran en la tabla 4.3.

Nombre del método	Parámetros					
Mínimo cuadrado en línea con MD	$\tau_1 = 0.01, \tau_2 = 0.01, P_{10} =$	173000	0	0	y $P_{20} =$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$
		0	250000	0		
		0	0	57300		
Identificador por STG	$\mu_{11} = 3, \mu_{21} = 0.5, k_{11} = 30$ y $k_{21} = 10000$ $\mu_{12} = 2, \mu_{22} = 1, k_{12} = 10$ y $k_{22} = 6$					
Mínimo cuadrado	$T = 5$					

Tabla 4.3: Parámetros de diseño de los métodos de identificación en el sistema Motor DC

Los resultados de identificación de parámetros en este sistema se muestran en las figuras 4.7 y 4.8.

El método de mínimo cuadrado, al igual que en el sistema anterior, presenta ventajas en cuanto a precisión y a velocidad de identificación en los 5 parámetros. El STG logra identificar también todos los parámetros, pero tiene oscilaciones muy pronunciadas. El mínimo cuadrado en línea es el último en converger a un valor y cuando lo hace no es el parámetro real.

4.4.4. Comparación

Se utilizó de igual manera el Error Medio Cuadrático para poder comparar el funcionamiento de los tres métodos de identificación (4.25) y esto se ve en la figura 4.9.

$$EMC = \sqrt{(\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 + (\hat{\theta}_2 - \theta_2)^2 + (\hat{\theta}_3 - \theta_3)^2 + \dots + (\hat{\theta}_n - \theta_n)^2} \quad (4.25)$$

De las figuras podemos notar, que el mejor método de identificación es el de Mínimo cuadrado, ya que en la mayoría de los parámetros, su estimación es casi exacta y es el que mejor facilidad tiene en su sintonización por solo contar con un parámetro de diseño. El segundo mejor método, es el STG, ya que tiene una buena aproximación al valor real pero presenta mucho chattering en algunos casos. El método más tardado y el que tiene mayor error en todos los casos fue el de Mínimo cuadrado en línea.

4. Identificación de Parámetros

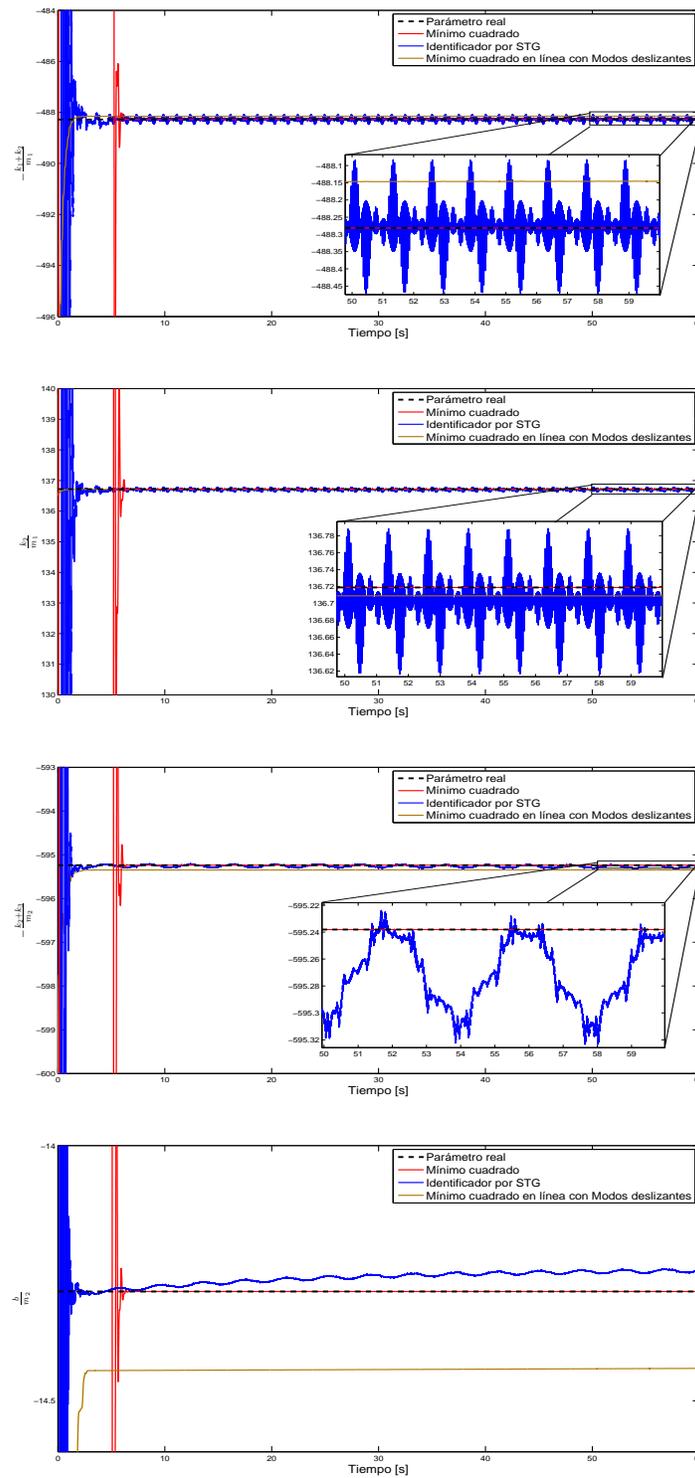


Figura 4.6: Identificación de parámetros en las simulaciones del sistema Masa-Resorte-Amortiguador

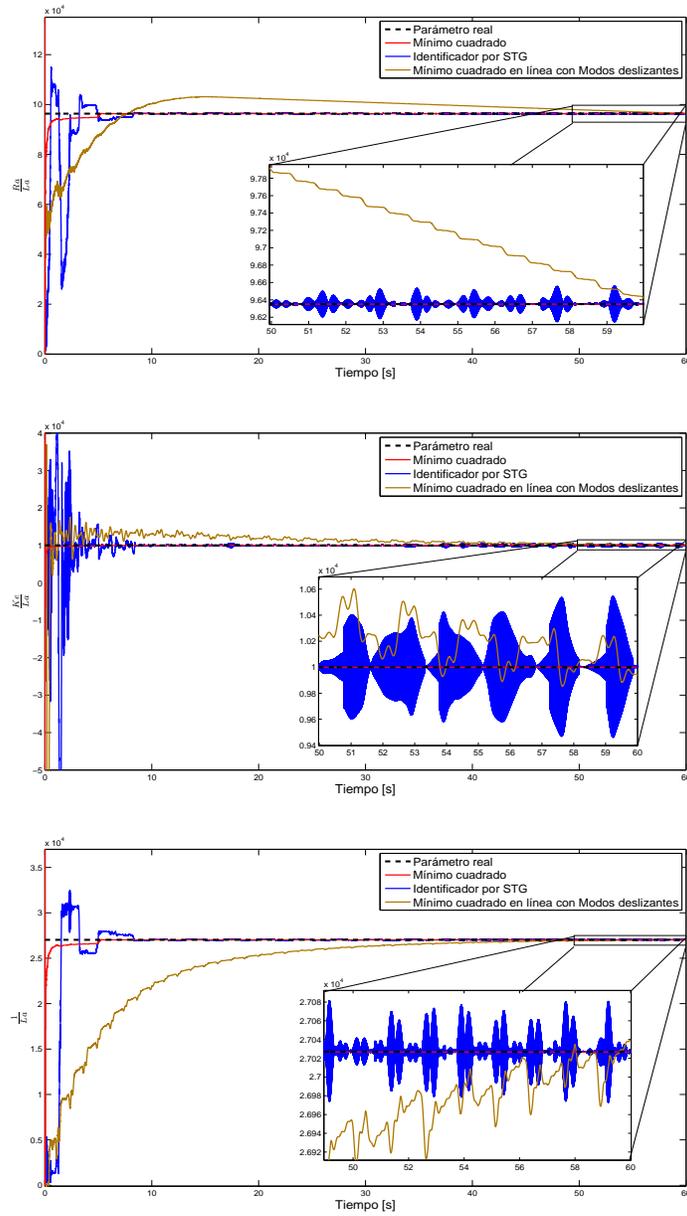


Figura 4.7: Identificación de parámetros en las simulaciones del sistema Motor DC (parte 1)

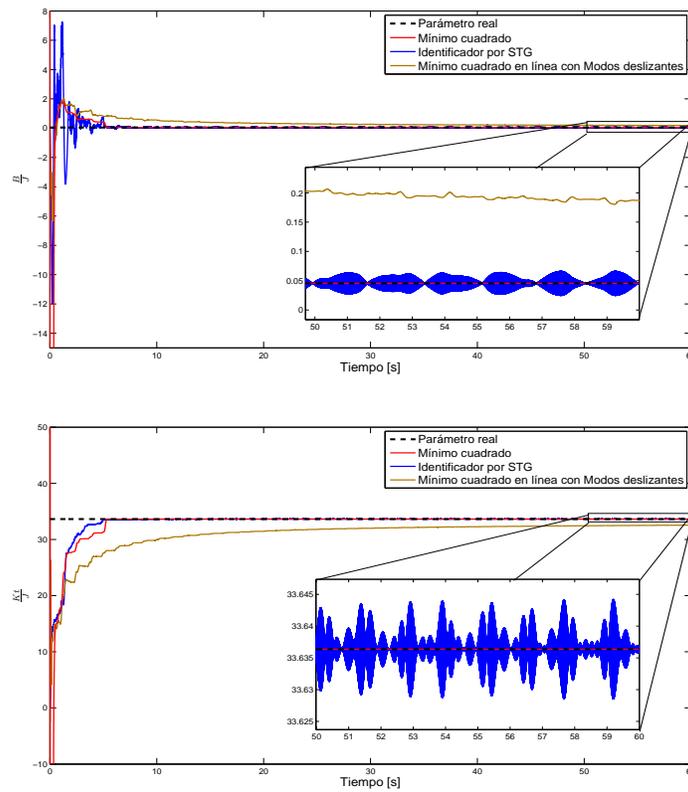


Figura 4.8: Identificación de parámetros en las simulaciones del sistema Motor DC (parte 2)

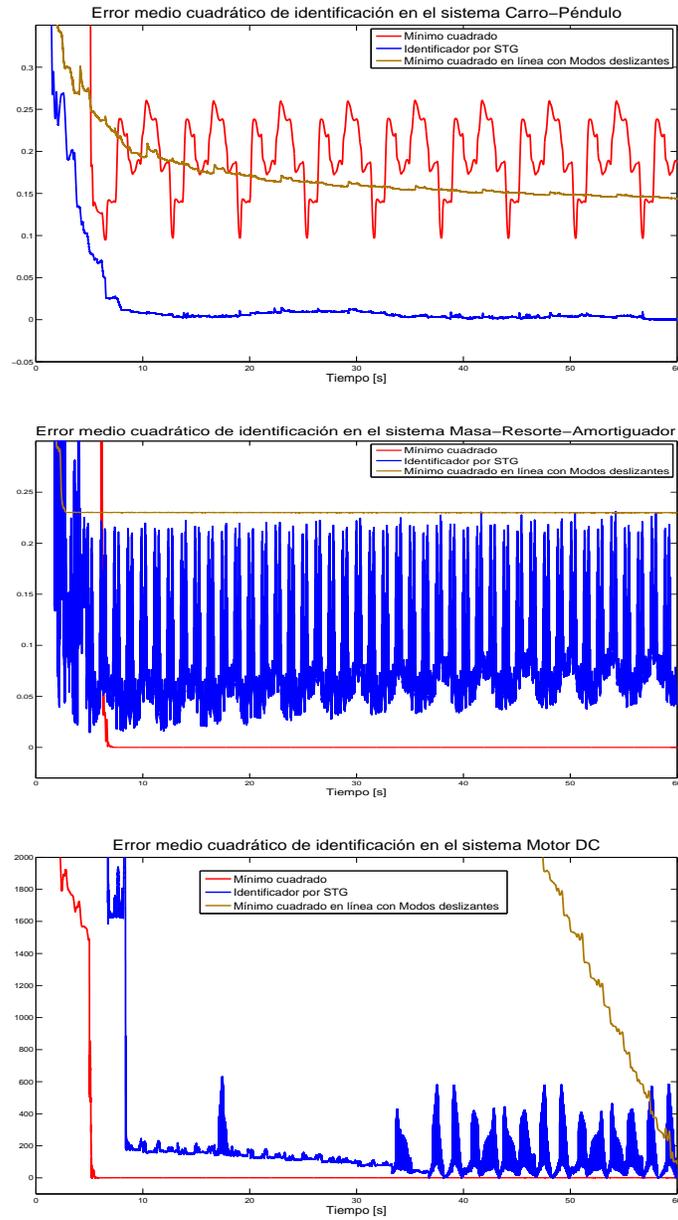


Figura 4.9: Comparación entre los diferentes métodos de identificación en los 3 sistemas

Capítulo 5

Experimentación

En esta sección se presentan resultados experimentales de observación e identificación sobre el sistema Carro-Péndulo, visto en la figura 5.1.

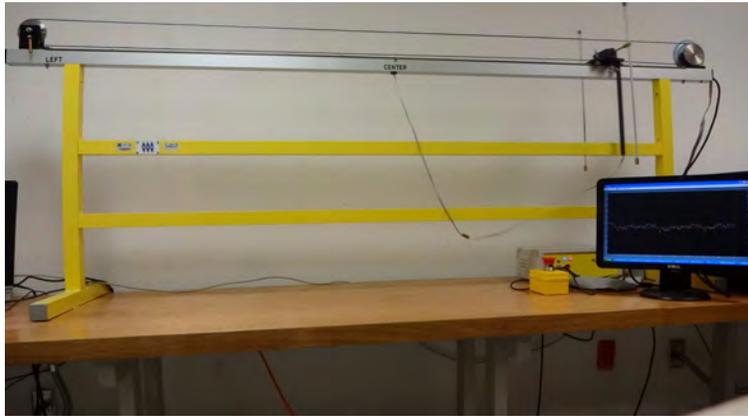


Figura 5.1: Modelo real del Carro-Péndulo

Un péndulo rota en un plano vertical alrededor de un eje localizado en el carro. El carro se puede mover sobre un riel horizontal. Los estados del sistema se presentan en el vector $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, donde x_1 es la posición del carro, x_2 es el ángulo del péndulo medido en dirección antihorario ($x_2 = 0$ significa que esta arriba el péndulo), x_3 es la velocidad del carro y x_4 es la velocidad del péndulo.

La fuerza de control es aplicada al carro y es paralela al riel. Dicha fuerza se produce por un motor DC controlado por una señal de voltaje u modulada por ancho de pulso. El control u se encuentra en el intervalo $[-0.5, 0.5]$. Una mayor explicación del hardware y software del equipo se encuentra en el apéndice.

Se tuvieron las siguientes condiciones de experimentación:

- Tiempo de 60 segundos en la observación.

- Tiempo de 299 segundos en la identificación paramétrica.
- Paso de muestreo de 0.01.
- Señal de entrada $u = 0.08 \sin(t) + 0.15 \sin(10t) + 0.15 \sin(15t)$, que cumple con ser una señal suficientemente rica para poder excitar el sistema y obtener una identificación de tres parámetros en solo la parte dinámica del carro (como se obtuvo en las simulaciones).

5.1. Observación

En el caso de la observación de este sistema, se implementaron los 3 métodos vistos en el capítulo 3. Los parámetros de diseño de dichos métodos quedan expuestos en la tabla 5.1.

Nombre del método	Parámetros
<i>ST</i>	$f_1^+ = 10$ y $f_2^+ = 15$
<i>STG</i>	$\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 5$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 3$
<i>Filtros</i>	$\omega_c = 15$

Tabla 5.1: Parámetros de diseño de los métodos de observación en el experimento

Los resultados de observación de estados del sistema por los tres métodos se muestran en la figura 5.2.

Podemos notar que los tres métodos logran seguir la trayectoria real de los estados, por lo que, para poder saber cual es el mejor, se agregó una perturbación en el experimento a los 10, 30 y 50 segundos. Esta perturbación no fue mas que la acción de mover el carro con la mano para cambiar la trayectoria original.

En la figura 5.3 podemos ver un zoom en la observación de estados justo cuando la perturbación se presenta.

En la figura vemos que los métodos de Modos Deslizantes tienen mejor estimación del estado real cuando hay una perturbación, por lo que se consideran mas robustos que algunos métodos convencionales (en este caso los Filtros). El observador con STG tiene mayor velocidad de convergencia y no presenta el chattering que posee el ST. Los filtros tienen una gran facilidad de implementación pero atenúan el estado real y no son ideales si es necesaria la exactitud a este valor, ya que siempre tendrán un desfaseamiento.

5.2. Identificación

Para la identificación de parámetros, los métodos vistos en el capítulo 4 se pusieron a prueba y sus parámetros de diseño quedan expuestos en la tabla 5.2.

Nombre del método	Parámetros
Mínimo cuadrado en línea con MD	$\tau = 0.05$ y $P_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Identificador por STG	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, k_1 = 25$ y $k_2 = 10$
Mínimo cuadrado	$T = 5$

Tabla 5.2: Parámetros de diseño de los métodos de identificación en el experimento

La identificación de parámetros obtenida en el experimento queda expuesta en la figura 5.4.

Como en el caso de la simulación, se compararon los tres métodos con la ayuda del error medio cuadrático (figura 5.5).

En las figuras de identificación, aunque ningún método pudo identificar de manera exacta el valor nominal de los tres parámetros, el que mejor resultados obtuvo es el de STG y esto se puede ver un poco mas claro en el error medio cuadrático. La ventaja del mínimo cuadrado en línea es que se mantiene en un valor aunque no sea el parámetro real. El mínimo cuadrado se puede implementar con mayor facilidad que los otros métodos pero en la experimentación no se desempeñó igual que en las simulaciones.

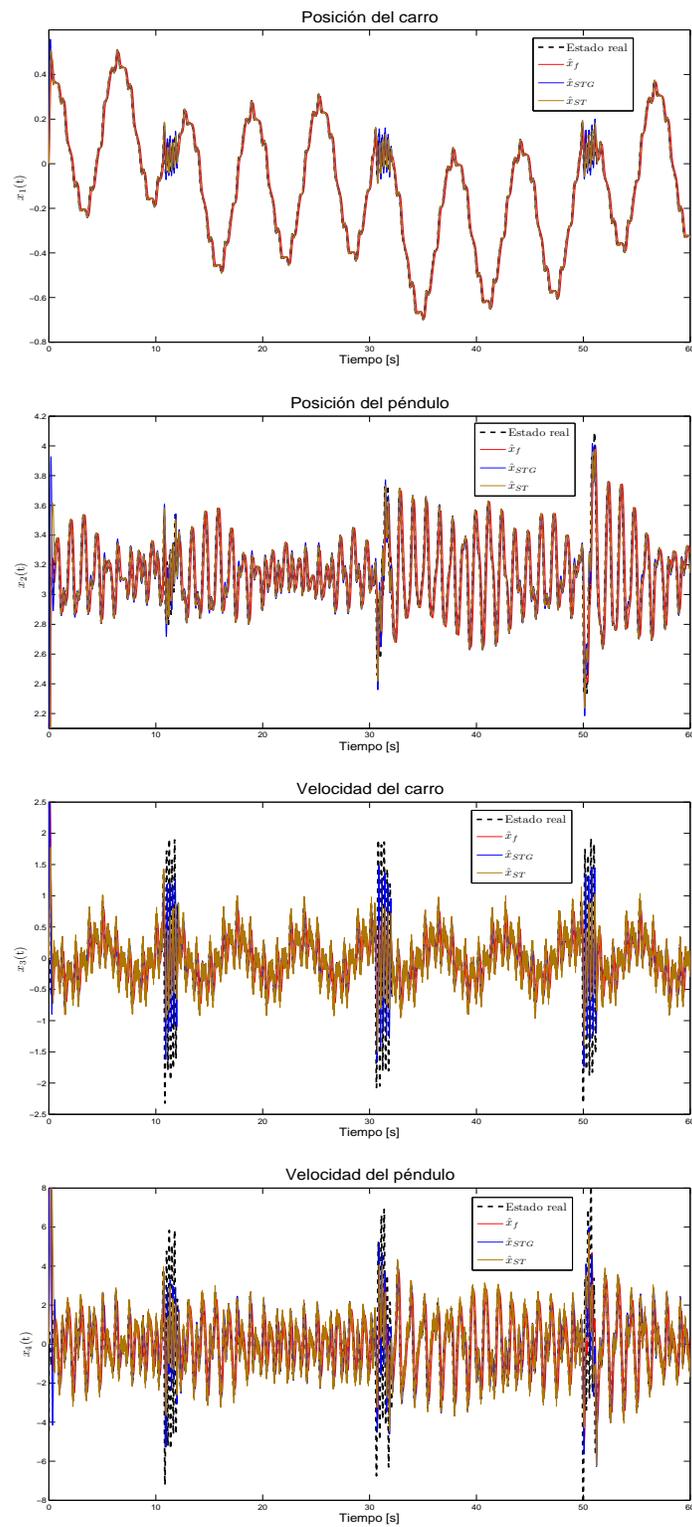


Figura 5.2: Observación de estados en los experimentos del sistema Carro-Péndulo

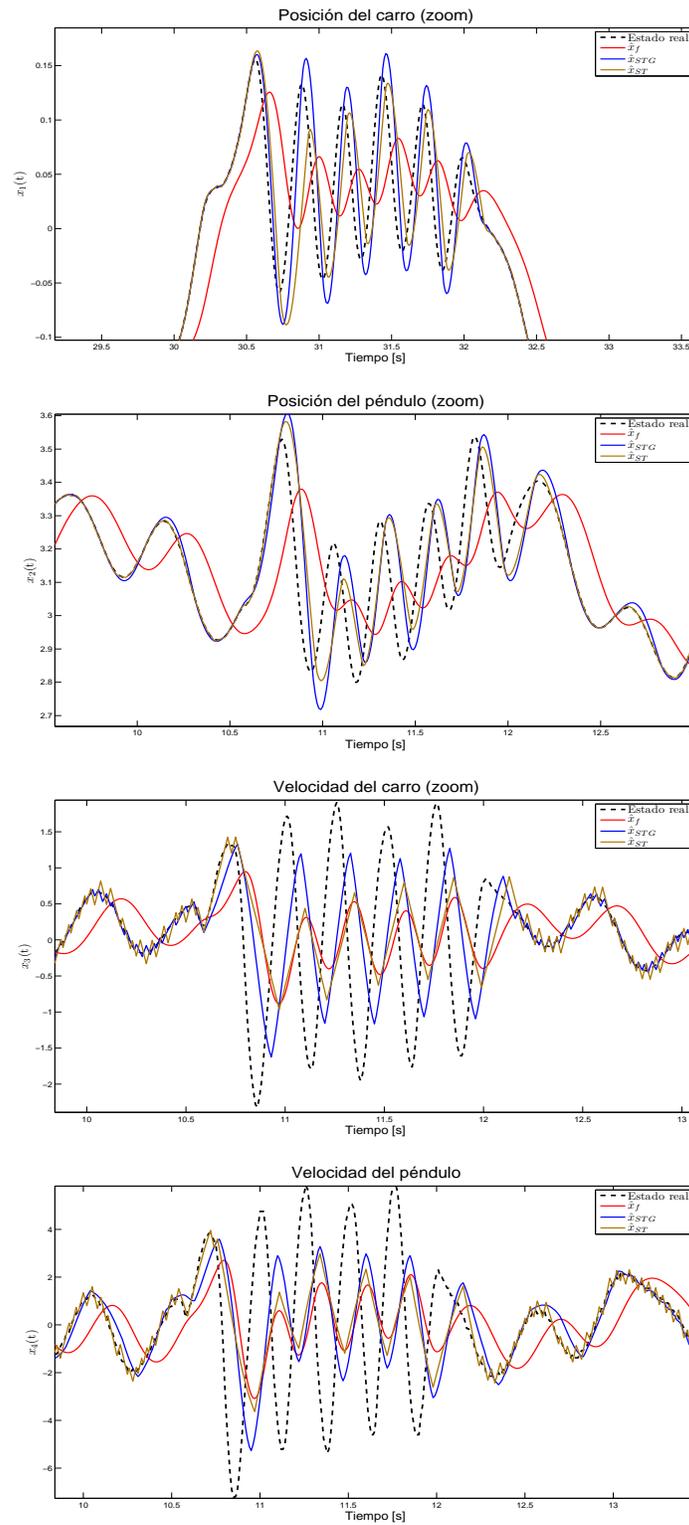


Figura 5.3: Efecto de la perturbación en la observación de estados

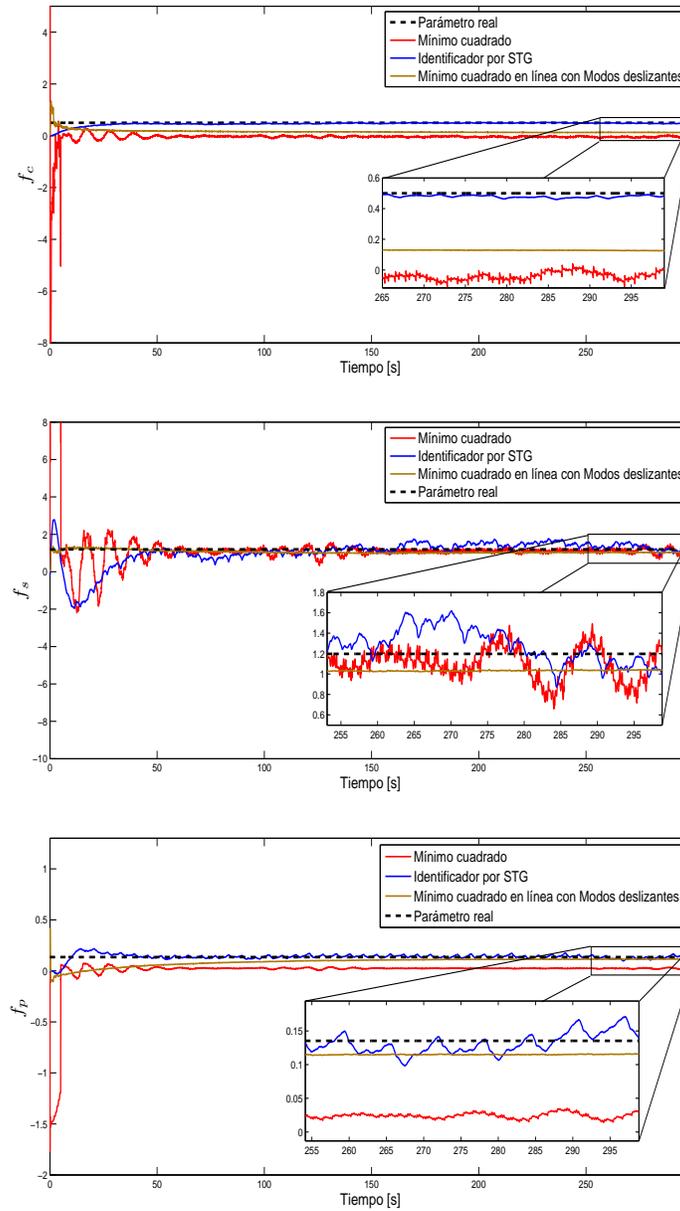


Figura 5.4: Identificación del parámetros en los experimentos del sistema Carro-Péndulo

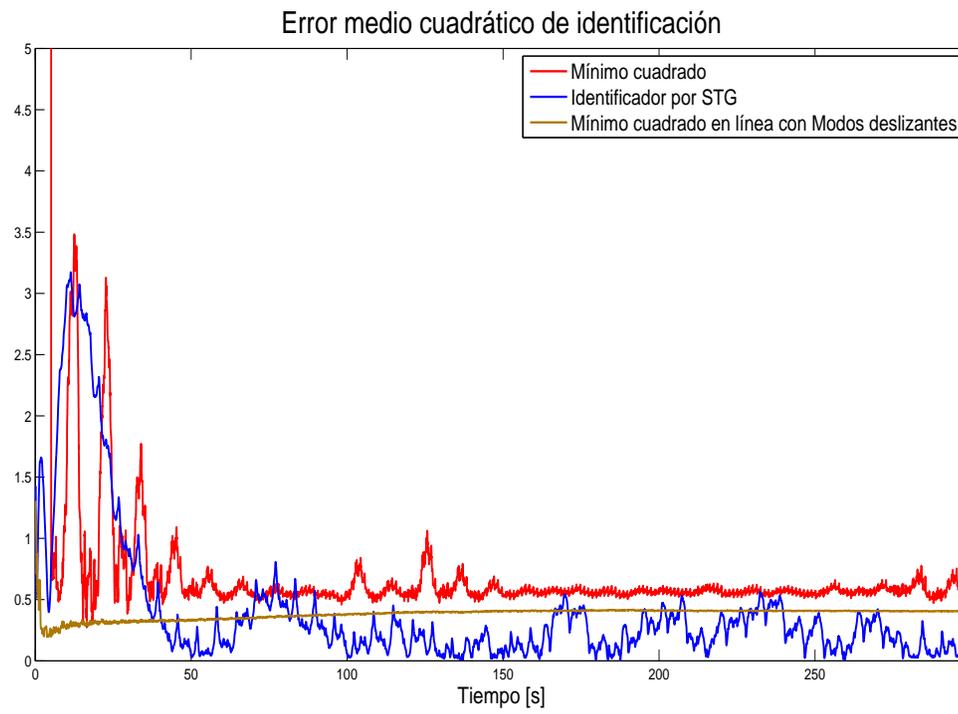


Figura 5.5: Comparación entre los diferentes métodos de identificación

Capítulo 6

Conclusiones

- Se logró implementar 3 métodos de observación, 2 en base a modos deslizantes y 1 filtro de aproximación de variables de estado.
- Se logró implementar 3 identificadores de parámetros, 2 en base a modos deslizantes y 1 método tradicional, es decir, el mínimo cuadrado.
- En base a las simulaciones realizadas, se obtuvo que el observador STG se desempeña mejor que los otros dos métodos, ya que tiene un error de observación mucho menor y no presenta el chattering producido por el observador ST. Para la identificación, el método de mínimo cuadrado presenta una mayor facilidad de implementación y aproximación al valor real de los parámetros en los tres sistemas utilizados.
- En cuanto a la experimentación, el observador por STG sigue siendo una mejor herramienta de observación por su desempeño en el momento en que se presenta la perturbación implementada. Con el filtro se puede notar que no puede funcionar adecuadamente si existen perturbaciones con frecuencia mayor a su frecuencia de corte, por lo que los observadores por modos deslizantes son mejores en estos casos, al igual que en los identificadores, siendo en estos el STG, el mejor de los tres. Sin embargo, presentan muchas dificultades para la sintonización de sus parámetros de diseño.

Apéndices

Apéndice A

Descripción del hardware y software del sistema Carro-Péndulo

El sistema requiere de los siguientes elementos de hardware y software:

- Tarjeta de adquisición de datos RTDAC4/PCIc, que contiene un dispositivo FPGA.
- Péndulo y carro.
- Cables de alimentación y de conexión.
- Software para el programa de tiempo real.
- MATLAB con Simulink.
- Real Time Workshop para generar el código.
- Real Time Windows Target toolbox.
- Drivers para la comunicación con la tarjeta de adquisición de datos

La figura A.1 muestra los 6 bloques que contiene el sistema: el proceso, los encoders, FPGA, el generador de PWM, el algoritmo de control y el reloj.

El reloj manda un pulso cada T_0 segundos (paso de muestreo) para que el convertidor PWM mande una señal a la computadora. El algoritmo de control calcula el valor de control y lo manda en forma de número al FPGA.

Los encoders miden dos estados: la posición del carro y el ángulo de péndulo. Estos encoders básicamente consisten en una fuente emisora de luz, un dispositivo que recibe esta luz y un disco rotatorio con rendijas, como se muestra en la figura A.2.

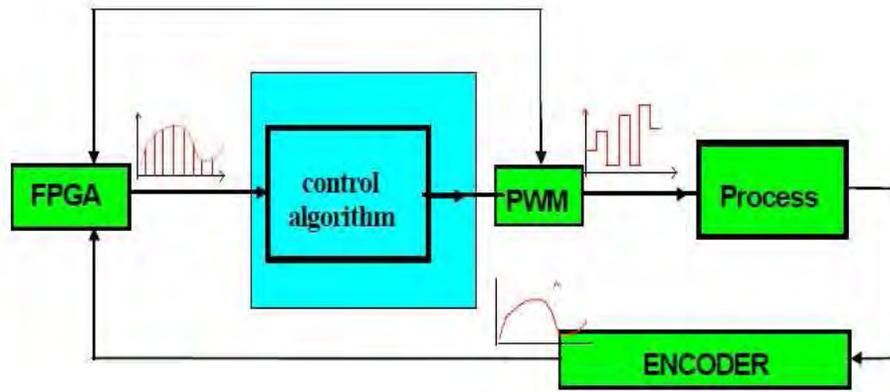


Figura A.1: Proceso de control de la computadora

El encoder del sistema es un HEDM-5505-J06 y tiene una resolución de 1024 A.3. El encoder obtiene el número de pulsos, que son proporcionales al ángulo de rotación del disco.

La señal de control se genera en la computadora hacia el generador PWM, y éste a su vez manda la señal al motor de DC de la figura A.4.

El proceso completo de muestra en la figura A.5.

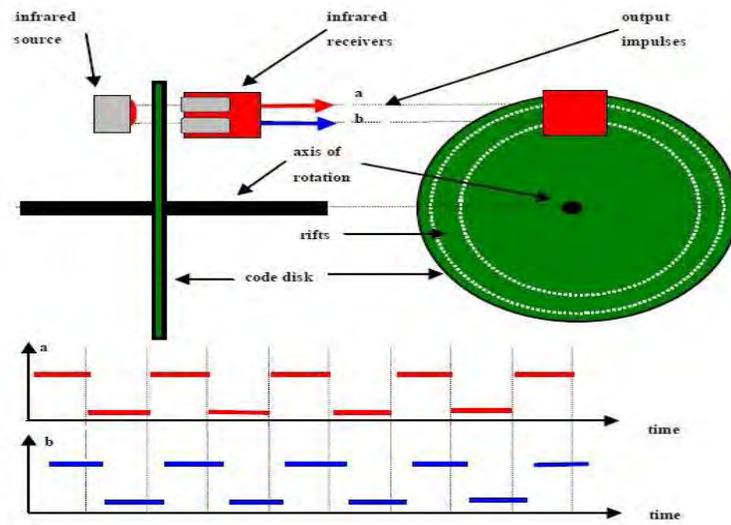


Figura A.2: Sensores ópticos



Figura A.3: Sensor HEDM-5505-J06



Figura A.4: Motor DC

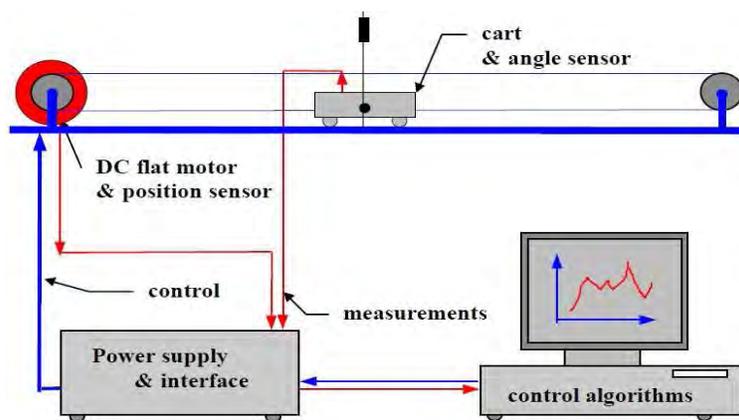


Figura A.5: Sistema de control del Carro-Péndulo

Bibliografía

- [1] J. Alvarez, Y. Orlov, and L. Acho. An invariance principle for discontinuous dynamic systems with application to a coulomb friction oscillator. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 122:687–690, 2000.
- [2] Jaime A. Moreno. A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. *6th International Conference on Electrical Engineering, Computing, Science and Automatic Control*, pages 12–17, 2009.
- [3] E. August. Parameter identifiability and optimal experimental design. *IEEE Computer Society*, pages 277–284, 2009. DOI: 10.1109/CSE.2009.39.
- [4] E. August and A. Papachristodoulou. A new computational tool for establishing model parameter identifiability. *Journal of Computational Biology*, pages 875–885, 2009.
- [5] J.P. Barbot, M. Djemai, and T. Boukhobza. Sliding mode observers. In W. Perruquetti and J.P. Barbot, editors, *Sliding Mode Control in Engineering*, Control Engineering, pages 103–130. Marcel Dekker, New York, 2002.
- [6] Emmanuel Cruz-Zavala, Jaime A. Moreno, and Leonid M. Fridman. Uniform robust exact differentiator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 2727–2733, 2011.
- [7] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 50(11):1785–1789, November 2005.
- [8] J. Davila, L. Fridman, and A. Poznyak. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10):1251–1262, 2006.
- [9] Joseph J. Distefano and Claudio Cobelli. On parameter and structural identifiability: Nonunique observability/reconstructibility for identifiable systems and new

- definitions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 830–833, 1980. DOI: 0018-9286/80/0800-0830.00.75.
- [10] ecp. *Mass Spring System*. User’s Manual. ecp, U.S.A., 1998.
- [11] C. Edwards, S.K. Spurgeon, and R.J Patton. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36(4):541–553, 2000.
- [12] L. Fridman, J. Moreno, and R. Iriarte. Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms. *Sliding Modes after the First Decade of the 21st Century*, pages 113–149, 2012.
- [13] INTECO. *Pendulum-Cart System*. User’s Manual. INTECO, U.S.A., 2012.
- [14] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA, 1996.
- [15] R. Isermann and M. Münchhof. *Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [16] Jaime A. Moreno and Eder Guzman. A new recursive finite-time convergent parameter estimation algorithm. *In Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 2011.
- [17] A. Pisano, A. Dávila, L. Fridman, and E. Usai. Cascade control of pm dc drives via second orden sliding-mode technique. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, pages 3846–3854, 2008. DOI: 10.1109/TIE.2008.2002715.
- [18] A.S. Poznyak. Stochastic output noise effects in sliding mode estimations. *International Journal of Control*, 76:986–999, 2003.
- [19] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. Intuitive theory of sliding mode control. In *Sliding Mode Control and Observation*, México, DF, 2012.
- [20] Y.B. Shtessel, I.A. Shkolnikov, and MDJ. Brown. An asymptotic second-order smooth sliding mode control. *Asian Journal of Control*, 5(4):498–504, 2003.
- [21] T. Soderstrom and P. Stoica. *System Identification*. Prentice Hall International, Cambridge, Great Britain, 1989.
- [22] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis, London, 1999.
- [23] S. Vajda and H. Rabitz. Identifiability and distinguishability of general reactions systems. *J. Phys. Chem.*, pages 5265–5271, 1994.