Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Una introducción al comercio de alta frecuencia (HFT). Propiedades y pronósticos del libro de órdenes.

T E S I S

Que para obtener el título de
Actuario

Presenta
Carlos Octavio Chida Suárez.

Director de tesis:
Mat. Frank Patrick Murphy Hernández.

2013

A mi papá,
a mi hermano Daniel,
a mis amigos.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi papá, Carlos Octavio Chida Montero, quien, con muchas preocupaciones, siempre ha confiado ciegamente en mis proyectos y planes.

Luego, a mi hermano Daniel por ser una motivación a superarme cada día.

A Humberto, Henry, Paola, Paul, Alexy, Carlos y Raúl, por estar detrás de todas mis aventuras.

A Karen, Mónica y Orlando, pues su enorme e invaluable amistad desde el primer día.

A Benjamín, Humberto, Jesús y Paulina por montones de risas y alegrías. A Lalo, quién además ha sido un apoyo académico.

A mis sinodales, los Profesores Alejandro Mina, Fernando Díaz y Nayeli Castillo por su dedicación y sus acertadas sugerencias para enriquecer este trabajo.

Al Profesor Jaime Vázquez Alamilla. Muchos maestros nos enseñan, poco también nos educan. Gracias por ser de los segundos.

A mi tutor Frank Murphy, quien desde mis primeros semestres ha contribuido a mi deguste por las matemáticas.

Por último, a Humberto del Castillo, con quién empecé este trabajo gracias a la inspiración que me dió en sus clases.

Carlos Chida

Introducción

Cuenta la leyenda que cuando Napoleón Bonaparte perdió la batalla de Waterloo en contra del Duque de Wellington, Nathan Mayer Rothschild aventajó por un día completo a las estafetas de Su Majestad utilizando palomas mensajeras para ordenar a sus agentes en Londres que vendieran todos los bonos del gobierno británico que poseían. Esto creó expectación en los agentes del mercado londinense dando la impresión de que los ingleses habían perdido la batalla y el precio de los bonos del gobierno británico cayó quedando así la oportunidad a sus mismos agentes de recomprar los bonos a un precio inferior a su valor. De esta forma Rothschild ganó un millón de libras en un solo día.

Independientemente de la veracidad de la leyenda, es irrefutable la existencia de agentes veloces. Entonces la pregunta principal se centra en qué se hace diferente hoy de ayer. Parecería que solo son más veloces para enviar información y realizar transacciones hoy en día, pero el cambio radica en el paradigma. El paradigma actual se centra en otra forma de encontrar la *solución óptima* al problema maximizar las ganancias acotando los riesgos. Este paradigma consiste en un conjunto de métodos y suposiciones sobre el comportamiento del mercado y los demás agentes para obtener la mayor ganancia posible con respecto a las limitaciones de capital inicial, inventario máximo o mínimo, etc.

Este trabajo pretende introducir la forma en la que se intercambia hoy en la grandes bolsas de valores del mundo, pasando por las procedimientos anteriores de intercambio y como cambiaron y adaptaron tanto el mercado como a los agentes a un nuevo estilo. Después se da paso al planteamiento económico con una conexión a la teoría de la probabilidad. Esta perspectiva se deriva en la teoría de la utilidad esperada que ayuda a resolver problemas que con una planteamiento superficial no lo tendrían.

Al terminar de hacer el planteamiento económico probabilista del problema, se sigue a utilizar una herramienta que haga un vínculo entre lo estocástico y lo determinístico. Así, se pueden encontrar soluciones numéricas que permiten la ejecución de algoritmos automatizados. Naturalmente, se hará uso de herramientas diferentes para cada método pero con el mismo fin de permitir encontrar una solución en términos dados por el mercado. Este último paso se hará en dos partes, pues primero se modelará un esquema de inventario estático y luego uno dinámico.

Índice general

Capítulo 1

Precedentes

§1.1. Cambios de regulaciones

Desde su fundación en 1817, en la bolsa de valores de Nueva York NYSE (New York Stock Exchange) se comerciaba "a viva voz", es decir, las transacciones se llevaban a cabo frente a frente *in situ*. Esto cambió cuando en 1995 se ejecutó una orden de 1000 acciones de IBM a través de una computadora de mano inalámbrica.

Para finales de enero de 2007 todos los activos de la NYSE podían comerciarse vía una interfaz híbrida, de transacción personal y/o computarizada, con excepción de unas cuantas acciones de precios superiores. De esta forma, los agentes pueden escoger si su orden se registraba inmediatamente en el libro o se pasaba a piso para ser colocada por una persona. Estos avances fueron posibles debido a las reformas hechas por el Sistema de Regulación de Mercados Nacionales (Reg NMS, Regulation National Markets System) de la Securities and Exchange Commission (SEC), que permitieron a los agentes poner órdenes sin necesidad de ser ejecutadas por una persona. Además, en estas mismas reformas, fijaron el valor mínimo de intercambio en un centavo.

Por su parte, la NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotations) siempre ha funcionado de manera electrónica desde su fundación en 1971 como NASD, debido a que tiene un órgano regulador distinto: Financial Industry Regulatory Authority (FINRA). Sin embargo, el servicio que ofrecía la NASD al principio solo era anunciar los precios, no ofrecer un sistema en el cual se llevaran a cabo transacciones. Y aún cuando en él ya se podía comprar y vender, no se popularizó de manera inmediata, salvo en empresas tecnológicas, debido a que minimizaba la diferencia de precios en lo activos, de donde los *market makers* obtienen sus ganancias.

Del otro lado del Atlántico, la MiFID (Markets in Financial Instruments Directive) empezó a hacer reformas similares a sus mercados regulados. El impulso inicial en el Viejo Continente fue mayor debido al retraso de dos años con respecto a Estados Unidos. Así, al inicio de esta década ya podían ser analizados de manera similar.

§1.2. Cambio de paradigma

Como se menciona al inicio del capítulo, anteriormente todas las transacciones eran ejecutadas en persona, ya fuera de forma presencial o a través de una terminal inalámbrica. El razonamiento detrás de cada una de las acciones de los gentes que así operan resulta de una valoración subjetiva de los activos en comparación con la cantidad de unidades monetarias que posee. Dicha valoración se hace gracias a información adquirida directa o indirectamente del mercado a través del lenguaje humano y relativamente pocos cálculos. A esta forma de operar se le conoce como comercio de baja frecuencia (*Low Frequency Trading*, LFT).

Hoy en día, las acciones pueden ser ejecutadas de forma autmática a través de una computadora con una conexión remota en el orden que establezca un algoritmo. Este algoritmo puede tomar en cuenta diversos factores cuantificables del mercado, como el volumen de transacción, la volatilidad estimada, el tiempo para el término del horario de transacción, la cantidad de unidades de cada activo que se posee, etc. Aquellas personas que programan estos algoritmos y hacen estimaciones o pronósticos sobre los valores futuros de dichos factores se llama agentes de comercio de alta frecuencia (*High Frequency Trading*, HFT).

Para entender mejor lo que se hace en el mundo del comercio de alta frecuencia, se pueden separar las diferencias entre él y el comercio de baja frecuencia en las siguientes: herramientas, temporalidad y estrategias.

Herramientas: en lo que concierne a las herramientas, por una parte, los analistas financieros, que comercian en baja frecuencia, tradicionalmente provienen de áreas como ingeniería financiera, contaduría y economía y analizan temas como política monetaria, valuación de activos y análisis de estados financieros. Sus resultados son basados en sus experiencias y solo complementados por matemáticas, es decir, prodrían prescindir de ellas. Por la otra, los administradores cuantitativos (*quant managers*), que comercian en alta frecuencia hacen uso forzoso de tercnología de punta y analizan el uso de lenguajes de programación, interfaces de conexión, problemas de análisis numérico y de algoritmos y teoría de juegos, dado que en su mayoría tienen una formación similar a la de actuarios, computólogos, físicos, ingenieros o matemáticos. Los administradores cuantitativos obtienen resultados matemáticos que prescienden de la experiencia mencionada en el ámbito del comercio de baja frecuencia.

Temporalidad: en el ámbito del comercio de baja frecuencia se utilizan las unidades como el segundo, la hora, el día, el mes o el año. Estas unidades, que concuerdan con las usadas en las ciencias sociales, responden a necesidades específicas que los humanos tienen por acordar un comportamiento grupal o entender los ciclos de la naturaleza.

Cuando se hace comercio de alta frecuencia, resulta más conveniente adaptarse a un reloj con base en los eventos propios del mercado en vez de aquellos de la naturaleza, por ejemplo el número de transacciones realizadas o la cantidad de veces que el precio de un activo ha superado una barrera. Ambas medidas de tiempo están forzosamente relacionadas, pues cada evento del mercado sucede a una hora específica y en cada momento del tiempo se puede describir el comportamiento pasado del activo. Esta relación, que se supone estocástica, aparte de resultar difícil de estimar, pudiera no resultar de utilidad. Como ejemplo considérese lo siguiente, si un taxista pretende medir el tiempo que le tomaría llegar a una cierta ganancia, le resultaría más preciso medirlo conforme los litros de gasolina empleados en el conducir que las horas que pasa frente al volante pues el tráfico, que reduce sus ganancias, es aleatorio.

La idea de modelar el tiempo en relación a eventos se puede encontrar en trabajos como el de Mendelbrot [MT67], el de Clark [Cla73] y más recientemente el de Ané y Geman [AG00]. Para darse cuenta de la importancia de esta técnica basta con leer las primeras líneas del primer artículo mencionado:

> "Price changes over a fixed number of transactions may have a Gaussian distribution. Price changes over a fixed time period may follow a stable Paretian distribution, whose variance is infinite. Since the number of transactions in any time period is random, the above

> statements are not necessarily in disagreement.”

Esas mismas líneas en español dicen algo así como:

> “Los cambios de precio sobre un número fijo de transacciones pudiesen tener una distribución gaussiana. Los cambios de precio sobre un periodo de tiempo pudiesen distribuirse establemente Pareto, cuya varianza es infinita. Dado que el número de transacciones en cualquier periodo de tiempo es aleatorio, las dos afirmaciones no entran necesariamente en contradicción.”

Entonces, al cambiar solo el reloj, se obtiene una manera más sencilla de poder trabajar. Este resultado ayuda para obtener, por ejemplo, la volatilidad de un activo dentro de las 50,000 transacciones siguientes, pero de ninguna forma por hora o por mes. De ahí la necesidad y utilidad de un agente de alta frecuencia en llevar un inventario de acuerdo a su propio *reloj*.

Estrategias: cuando un agente comercia en baja frecuencia, él hace una valoración subjetiva que depende enteramente de su interacción con otros agentes o el mercado. Dicha valoración suele ser instantánea y solo se puede asegurar de otro agente que tenga exactamente las misma circunstancias históricas de interacción con los mismos agentes o el mercado que la compartirá. Por su parte, un agente de alta frecuencia puede establecer una serie de pasos a seguir, con los que pretende optimizar su ganancia en base púramente matemática, y delimitar comportamientos respecto de los resultados que sean posibles de obtener del mercado. Su metodología puede ser explicada y entendida por otros agentes sin necesidad de que la compartan o tengan los mismos antecedentes históricos.

Capítulo 2

Fundamentos económicos

Durante este capítulo, darán las definiciones de bien, burbuja económica, agente, mercado, dinero, valor, precio y lotería. Luego, se analizarán los dos acercamientos de la teoría de la decisión y las explicación de porqué se elige uno de ellos. Cuando se analicen las preferencias, se motivarán las premisas que aceptan los consumidores racionales y porqué son necesarias. Al contar la paradoja de San Petersburgo se interpretará lo que Bernoulli opinó al respecto y que da pie a la teoría de la utilidad esperada como respuesta a la forma en la que hay que valuar una activo.

§2.1. Conceptos fundamentales

En palabras de Carl Menger [Men71], fundador de la Escuela Austriaca de economía, un bien económico es un objeto debe de cumplir 4 condiciones para ser un bien:

1. Servir a una necesidad humana.
2. Tener propiedades con las que se puedan establecer una relación de causalidad con la satisfacción de esta necesidad.
3. Que exista conocimiento humano de esta relación causal.
4. Tener control suficiente sobre el objeto para dirigirlo hacia la satisfacción de la necesidad.

A aquellas personas que desean intercambiar unos bienes por otros se les denomina agentes y el lugar (no necesariamente físico) donde esto ocurre se le llama mercado. El mercado que se supone en este trabajo no tiene inflación. Cuando en un mercado los agentes intercambian un objeto que consideran que es un bien y no cumple con alguna de estas propiedades, surgen malas apreciaciones del objeto (u otros objetos relacionados). Dadas esa circunstancia, se dirá que existe una burbuja económica en torno a dicho objeto.

De las condiciones necesarias para ser un bien, la primera es la más importante, pues sin ella es imposible cumplir las otras tres. Como ejemplo considérense la burbuja *dotcom* a principios del siglo XXI en los mercados estadounidenses, que fue un periodo de sobrevaloración de compañías que proveían servicios de internet. Los agentes en su momento creían que estas compañías servían a una necesidad humana y cumplían las demás condiciones. Sin embargo, al darse cuenta de que el hecho de tener un dominio en internet y prestar servicios gratuitos no era redituable si el número de usuarios de sus sitios de internet era muy bajo, se dejó de creer que servían a una necesidad humana. Entonces, cuando un objeto cumple servir a una necesidad humana no sólo debe creerse que sirve a una necesidad humana, sino tener propiedades que hagan que su utilidad sea evidente e inapelable. Si durante la misma burbuja económica se apelara que muchas de las compañías que tenían sitios de búsqueda gratuita en internet añadían publicidad, aún les hubiera sido necesario que sus servidores tuvieran la propiedad de ser lo suficientemente atractivos para que los usuarios los ocuparan. De la misma forma, para un empresario que no tuviera conocimiento de que el internet es un medio publicitario carecería de su interés. Por último, las compañías no tuvieran la forma de hacer accesible su publicidad a los consumidores, carecerían también de dicho interés.

Habría que hacer énfasis en la última propiedad y para ello considérese este otro ejemplo: si hoy se descubriera petróleo en la luna y se supusiera que se tiene control suficiente sobre él para satisfacer las necesidades de consumo de energía, de las cuales ya se tiene conocimiento, se llegaría a una subapreciación del petróleo en la corteza terrestre que sí es accesible. Este fenómeno culminaría en una burbuja conoómica en torno al petróleo.

Para hablar de la valoración de un bien, se debe hablar de dos tipos de intercambio: directo e indirecto. Cuando un bien se intercambia por otro, se dice que el intercambio es directo. El problema de dichos intercambios es que ambas partes deben estar interesadas en el bien del otro. A este tipo de intercambios también se les llama trueque. La dificultad natural de los trueques se supera a través del establecimiento por acuerdo común de una referencia valorativa en un objeto que no necesariamente cumpla con servir a la satisfacción de una necesidad humana pero que sirva de referencia de cambio para adquirir otros bienes. A este objeto, que se constituye preferentemente de unidades divisibles, se le denomina dinero.

Entonces, se llamará valor a la utilidad subjetiva de un agente de mercado, que él asigne a un bien para cumplir una necesidad y se llamará precio a la cantidad de unidades de dinero (o unidades monetarias) que el agente pida para intercambiar su bien. Sin embargo, ambos prodrían no coincidir; si un agente está dispuesto a vender un objeto del cuál cree que su valor aumentará para cuando se pretenda consumir, le asignará un precio mayor. Esta valoración podría no ser congruente con la de otros agentes de baja frecuencia por ser subjetiva. No deberá confundirse la utilidad con la ganancia, pues esta última se define como el cambio de precio entre el tiempo de valoración y un tiempo anterior de un activo que se posea.

Dicha incertidumbre de su precio futuro se debe tomar en cuenta para una apreciación del bien. Para ello se introduce el concepto de **lotería** que se define como la variable aleatoria del precio futuro de un bien económico. Se hará la suposición de que se puede adquirir cualquier cantidad de dicho bien, pues si se adquiere el bien entre varios agentes y se acuerda una participación sobre su valor, se estaría adquiriendo una fracción de él y, en mercados grandes, se puede adquirir tanto de él *como se desee.* Asimismo, la suma de dos loterías es a su vez una variable aleatoria a la que se denominará portafolio. Dado que este portafolio sería un bien y tiene un precio futuro que es la suma de las loterías que lo componen, este sería también una lotería. De esta forma se puede aseverar que el conjunto de todas las loterías de un mercado es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y el producto usual de los reales. Véase como ejemplo un portafolio que se compone de un contrato de compra de una acción de la empresa ABC en un tiempo futuro fijo y un contrato de venta de tres acciones de la empresa XYZ al mismo tiempo y que del portafolio son acreedores dos agentes a partes iguales.

§2.2. Teoría de la decisión

La teoría de la decisión gira en torno a dos preguntas principales según Thorsten Hens y Marc Rieger [HR10]:

- ¿Cómo deberíamos decidir? A la que se le da respuesta desde el acercamiento *prescriptivo* o *racional*.
- ¿Cómo decidimos? A la que se le da respuesta desde el acercamiento *descriptivo* o *conductual*.

Al primer acercamiento se llega a través de una apreciación y al segundo a través de una valoración subjetiva, que pueden no siempre concordar. Considérese el caso de la compañía Knight Capital durante un día de transacción en 2010 en el que, gracias a un algoritmo mal planificado, la compañía ejecuto una serie de compras de activos sobrevalorados y por lo tanto el precio de sus acciones cayó casi hasta cero. Esta asignación racional de precios casi instantánea, cambió rapidamente a una conductual cuando se esparció la noción de que la compañía debía haber cometido un error y que otros factores, como su capital humano, podrían recuperarla de la quiebra.

Para describir el concepto en el que se basan las decisiones racionales se le llamará *preferencia* y se escribirá $A \succ B$ cuando se prefiera la lotería A a la B. De la misma forma, cuando se es indiferente entre A y B se simbolizará $A \sim B$. Y cuando ambas sucedan,

$A \succeq B$. Para formalizar este primer criterio de decisión racional se introduce la siguiente definición.

Definición §2.2.1. (Relación de preferencia). Una relación de preferencia de loterías $\succeq$ sobre un espacio vectorial de loterías $\mathcal{V}$ satisface las siguientes condiciones:

1. Es completa, es decir, para todas las loterías A y $B \in \mathcal{V}$ sucede que $A \succeq B$ o $B \succeq A$, o ambas.

2. Es transitiva, es decir, para todas las loterías A, B y $C \in \mathcal{V}$ sucede que $A \succeq B$ y $B \succeq C$ implican $A \succeq C$.

Por el momento, supóngase un mercado en el que solo existan dos estados futuros de sus activos: s_1 y s_2 con probabilidades de ocurrencia p_1 y p_2 respectivamente, donde en el primer estado se tendría una subida de los precios de los activos en el mercado y en el segundo una caída de los mismos. Considérese dos activos (loterías) A y B y sus correspondientes precios $a_{s_1}, a_{s_2}, b_{s_1}$ y b_{s_2} para cada estado. Si $a_{s_1} > b_{s_1}$ y $a_{s_2} > b_{s_2}$, el agente racional preferirá el activo A, pues en cada caso el precio final de este activo es mayor que el de B. De esta forma, se formula la difnición formal de este concepto.

Definición §2.2.2. (Dominación por estados). Si para todos los índices s en un conjunto indicador de estados S se tiene que los precios a_s de la lotería A son mayores o iguales que sus correspondientes que los de la lotería B, es decir, $a_s \geq b_s$ $\forall s \in S$, y aparte existe por lo menos uno de A que sea estrictamente mayor a su correspondiente de B, es decir, existe $s \in S$ tal que $a_s > b_s$, se dirá que A *domina por estados a* B y se representará $A \succeq_{DE} B$.

Además, se dice que una relación de preferencia $\succeq$ respeta (o es compatible con) la dominación por estados si $A \succeq_{DE} B$ implica $A \succeq B$. En caso contrario, se dirá que la relación de preferencia viola la dominación por estados.

La idea de que una relación de preferencia sea compatible con la dominación por estados es aquella de ser congruentes con la transitividad de la primera con la de la segunda. Un ejemplo donde esto no sucede sería el siguiente; supóngase que un hombre gana un boleto para asistir al siguiente partido del equipo que desee, disfruta de ver ganar al equipo al que apoya y los equipos Águilas, Chivas y Pumas no juegan entre sí. Este hombre cree que Pumas tiene un mal desempeño esta temporada y que Chivas tiene más oportunidad de ganar su siguiente partido. Pero Águilas es el campeón de la temporada pasada y juega contra un equipo con muy mala plantilla. Aún así, como este hombre es aficionado de Pumas, a pesar de su mal desempeño esta temporada, se decide por el boleto para ir a ver a estos últimos. Su preferencia sería la siguiente:

$$\text{Pumas} < \text{Chivas} < \text{Águilas} < \text{Pumas}.$$

Al observar la relación anterior es claro que rompe con la transitividad de la misma al tener una preferencia estricta de Pumas por el mismo Pumas. Este comportamiento se puede deber a las situaciones únicas e irrepetibles que le ocurren a este hombre y que quizá otra persona no pudiese entender o compartir o a un conflicto de intereses que no sucedería en una relación de preferencia bien establecida. En ambos casos, el comportamiento del personaje no es racional sino conductual.

Entonces, en caso de una dominación por estados es clara la decisión a tomar por parte de un agente racional. Sin embargo, no siempre se dará la definición por estados. Retómese el ejemplo del mercado con dos estados y dos activos, pero ahora con una condición diferente: $a_{s_2} < b_{s_2}$.

		Activos		
Estado	Probabilidad	A		B
s_1	p_1	a_{s_1}	$>$	b_{s_1}
s_2	p_2	a_{s_2}	$<$	b_{s_2}

Dada esta situación, es natural pensar que se debe valorar la lotería en función no solo de los estados, sino de la probabilidad de ocurrencia de cada uno también. A estas valoraciones que se hacen de una lotería donde no solo se consideran los precios finales se les llama funciones de utilidad.

Definición §2.2.3. (Función de utilidad). Sea U una función creciente con segunda derivada que asigna un número real a cada lotería. Se dice que U es una *función de utilidad* para la relación de preferencia $\succeq$ sobre el espacio vectorial $\mathcal{V}$ de las loterías si para cada par de loterías A y B se tiene $U(A) \geq U(B)$ si y sólo si $A \succeq B$.

Las funciones de utilidad de interés en este trabajo son, naturalmente, aquellas que involucran y ponderan la probabilidad de ocurrencia de cada estado con sus respectivo precios.

§2.3. Teoría de la utilidad esperada

§2.3.1. Motivación

Considérese la función esperanza $\mathbb{E}$ definida como

$$\mathbb{E}(A) = \sum_{s \in S} a_s \mathbb{P}(A = a_s),$$

para el caso discreto donde S es el conjunto de índices s de los estados a de la lotería A y $\mathbb{P}$ la probabilidad asociada a cada estado, pues para cada lotería hay una función de densidad asociada por ser variables aleatorias.

De la misma forma, para el caso continuo, la esperanza se define como

$$\mathbb{E}(A) = \int_S a_s f(s) ds.$$

donde S es el conjunto de estados y f es la función de densidad de probabilidad de cada evento.

Si se supone que $\mathbb{E}$ cumple con ser una función de utilidad, sería natural pensar que una decisión racional bien fundamentada es preferir la lotería A sobre la B si y solo si $\mathbb{E}(A) > \mathbb{E}(B)$.

Sin embargo, considérese que se tiene un activo con valor de 100 unidades monetarias y que un evento adverso con probabilidad de ocurrencia de 0.01 destruye dicho activo. La esperanza de esta lotería es de 99 unidades monetarias. Si un agente asegurador ofrece cobertura ante este evento por un precio de cinco unidades monetarias, la esperanza de esta lotería sería de 95 unidades monetarias. La decisión que la mayoría de los consumidores tomaría sería preferir la segunda lotería sobre la primera.

De las primeras críticas ante la adopción de la esperanza como la forma de decidir de un consumidor racional es de mencionarse la de Bernoulli en un contexto como el de la paradoja de San Petersburgo cuya descripción es la siguiente: se paga una cantidad inicial y se lanza una moneda balanceada (que cada cara tenga probabilidad 1/2 de caer) hasta que la primer águila aparece. De esta forma el juego acaba y si el número de veces que la moneda fue lanzada fue k veces, el apostador recibe 2^{k-1} unidades monetarias. La pregunta recae en cuánto se está dispuesto a pagar como cantidad inicial o, dicho en otras palabras, cuál sería el precio justo a pagar por entrar a este juego.

Considérese la variable aleatoria X_n que indica si la moneda cae en águila en el lanzamiento n,

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si la moneada cae en águila;} \\ 0 & \text{si la moneda no cae en águila.} \end{cases}$$

Así, la probabilidad p_k de obtener la primer águila después de k lanzamientos independientes es

$$\begin{aligned} p_k &= \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i = 0) \cdot \mathbb{P}(X_k = 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k}. \end{aligned}$$

Así, al calcular la esperanza de esta lotería X se tiene

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

Visto desde la perspectiva de la esperanza, se debería a estar dispuesto a pagar lo que fuese (inclusive todo lo que se tiene) para entrar a este juego aun cuando la probabilidad de ganar una cantidad considerable de dinero sea pequeña, pero la probabilidad de volverse *infinitamente* rico no es nula. Pero hay que considerar el siguiente razonamiento en palabras del propio Bernoulli:

> "No cabe duda de que una ganancia de 1000 unidades monetarias para alguien pobre es más significativa que para alguien rico."

Por lo tanto, no hace sentido calcular el valor esperado en término de unidades monetarias sino de unidades de utilidad. Esto es, hay que valuar un activo por su utilidad y no por su precio.

Siguiendo el ejemplo anterior de la paradoja de San Petersburgo, defínase como función de utildad $u(x) := \ln(x)$ y calcúlese la esperanza de la utilidad de los elementos de X ponderados por la probabilidad de que sucedan.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} u(x_k)p_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln(2^{k-1}) \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^k} \\ &= \ln(2) < \infty.\end{aligned}$$

Este resultado es congruente con el concepto económico de la ley de la disminución marginal de la utilidad [1], ya que la función $\ln(x)$

[1]La ley de disminución marginal de la utilidad dicta que si se tiene necesidad

crece cada vez más lento respecto de x.

Por último, introdúzcase la función utilidad esperada $\mathbb{U}$ de una lotería A con un conjunto de espacio de estados S y función de probabilidad $\mathbb{P}$ asociada a cada precio a_s con $s \in S$ que se define como

$$\mathbb{U}(A) = \mathbb{E}(u(A)).$$

Esta definición viene motivada de querer comparar la utilidad de la esperanza con la esperanza de la utilidad y será útil para demostrar unas proposiciones que vinculan los perfiles de riesgo con las funciones de utilidad como en el ejemplo anterior de la paradoja San Petersburgo.

§2.3.2. Perfil de riesgo

Como se vio en la sección anterior, el hecho de adaptar una función de utilidad a una lotería puede cambiar (o dar solución si no la tenía) al problema de la decisión a través de la función esperanza. Para profundizar sobre el tipo de funciones de utilidad habrá que relacionarlas con dos conceptos matemáticos.

de varios bienes de la misma clase cada uno es apreciado como el último en orden de la necesidad de cumplimiento, pues si se perdiera la oportunidad de obtener uno de ese bien, entonces se dejaría e satisfacer sólo la última necesidad relacionada con ese bien.

Definición §2.3.1. (Concavidad). Se dice que una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cóncava en el intervalo (a,b), si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ y $\lambda \in (0, 1)$ la siguiente desigualdad es verdadera:

$$\lambda u(x_1) + (1 - \lambda)u(x_2) \leq u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

Además, se dice que u es estrictamente cóncava si la desigualdad estricta correspondiente a la anterior es verdadera para todo $x_1 \neq x_2$.

Definición §2.3.2. (Aversión al riesgo). Se dice que un agente tiene un comportamiento adverso al riesgo si su función de utilidad es cóncava.

Proposición §2.3.1. *Si un agente tiene un comportamiento adverso al riesgo preferirá la utilidad de la esperanza de la lotería que la utilidad esperada de la misma.*

Demostración. Considérese la relación descrita entre la utilidad esperada y la utilidad de la esperanza:

$$\mathbb{U}(X) \leq u\left(\mathbb{E}(X)\right).$$

De la definición de la primera se obtiene

$$\mathbb{E}(u(X)) \leq u\left(\mathbb{E}(X)\right)$$

que es cierto debido a que u es cóncava y a la Desigualdad de Jensen (véase §A.1). $\square$

Ahora, se analiza el caso opuesto.

Definición §2.3.3. (Convexidad). Se dice que una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa en el intervalo (a,b), si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ y $\lambda \in (0, 1)$ la siguiente desigualdad es verdadera:

$$\lambda u(x_1) + (1 - \lambda)u(x_2) \geq u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

Además, se dice que u es estrictamente convexa si la desigualdad estricta correspondiente a la anterior es verdadera para todo $x_1 \neq x_2$.

Definición §2.3.4. (Procuración al riesgo). Se dice que un agente tiene un comportamiento procurador del riesgo si su función de utilidad es convexa.

Proposición §2.3.2. *Un agente tiene un comportamiento procurador del riesgo su función de utilidad es convexa.*

Demostración. Análoga a la de la Proposición §2.3.1. $\square$

Para todos los tipos de perfiles de riesgo, es conveniente saber cuál es más adverso que otro. Esto se logra a través del concepto de aversión absoluta al riesgo introducido por Pratt (1964).

Definición §2.3.5. (Aversión absoluta al riesgo). Se denomina función de aversión absoluta al riesgo AAR_u con respecto de la cantidad x de activo de una función de utilidad u a: la negativa de la segunda derivada de la función de x entre sí misma, es decir,

$$AAR_u(x) := -\frac{u''(x)}{u(x)}.$$

Frecuentemente los economistas utilizan algunas funciones de densidad por ciertas propiedades que cumplen. Por ejemplo, la función de **utilidad logarítmica** o utilidad Bernoulli que se usa en la paradoja de San Petersburgo

$$u(x) = \ln(x + c), \quad c \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^+.$$

Esta función de utilidad cumple con ser cóncava en todo $\mathbb{R}$ y para cualquier $c > 0$, y por lo tanto describe un perfil adverso al riesgo. Su primer y segunda derivada son

$$u'(x) = \frac{1}{x + c} \qquad \text{y} \qquad u''(x) = -\frac{1}{(x + c)^2}.$$

Resultando así en función de aversión absoluta al riesgo

$$AAR_u(x) = -\frac{u''(x)}{u(x)} = -\frac{-\frac{1}{(x+c)^2}}{\ln(x+c)} = \frac{1}{(x+c)^2 \ln(x+c)},$$

de donde se nota que, como $(x+c)^2$ es creciente al igual que $\ln(x+c)$, la aversión absoluta al riesgo $AAR_u(x)$ es decreciente. Esto se puede interpretar económicamente de la siguiente manera: entre más activo x se posea, menor será la propensión de este agente a obtener más de él.

Nótese además que: a pesar de que el cero no está en el dominio, cuando $c = 0$, $u(x)$ se indefine en $x = 0$ y se debe interpretar como que no tener nada del activo no produce utilidad. Con esto también se debe dar paso al hecho de que tener una utilidad negativa no significa que el activo no sea deseable. En lo que un agente debe fijarse de una función de utilidad es el crecimiento de la misma, es decir, que tan útil le resulta incrementar la cantidad del activo en comparación con lo que ya posee de él. Recuérdese también que de las funciones de utilidad sólo interesa el dominio contenido en $\mathbb{R}^+$ pues se habla de una cantidad que se posee del activo (véase la Figura 2.1).

La función de utilidad potencia definida como

$$u(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha, \quad \alpha \neq 0, \, x \in \mathbb{R}^+$$

tiene un comportamiento dependiente de su parámetro α; su propiedad de inflexión (concavidad o convexidad) está ligada al signo de dicho parámetro. Además, nótese que el caso $\alpha = 1$ no es de interés pues, aunque sí está bien definido, resulta ser al función de utilidad trivial $u(x) = x$ cuya función de aversión absoluta al riesgo es nula, pues describe tanto un comportamiento adverso como un comportamiento procurador del riesgo y se puede apreciar gráficamente en la Figura 2.2.

La función de utilidad es convexa en todo el dominio si $\alpha > 0$ y cóncava si $\alpha < 0$. Para ambos casos, su primer y segunda derivada son

$$u'(x) = x^{\alpha-1} \qquad \text{y} \qquad u''(x) = (\alpha - 1)x^{\alpha-2}$$

y su función de aversión absoluta al riesgo es

$$AAR_u(x) = -\frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}} = -\alpha(\alpha-1)x^{-2}.$$

De esta última se pueden ver los dos casos de importancia: cuando $\alpha > 1$ que la función es creciente y cuando $\alpha < 1$ que la función es decreciente.

La última función que servirá para ejemplificar la importancia de la aversión absoluta al riesgo es la función de **utilidad expo-**

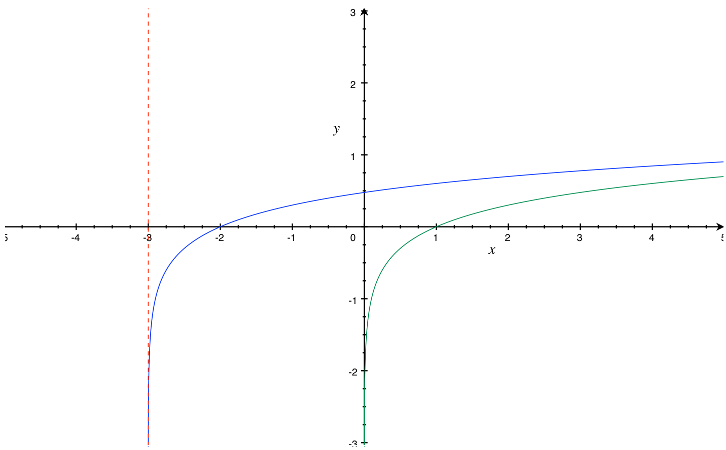

Figura 2.1: Función de utilidad logarítmica. En color verde $u(x) = \ln(x)$, en azul $u(x) = \ln(x+3)$ y en rojo punteado su asíntota $x = -3$.

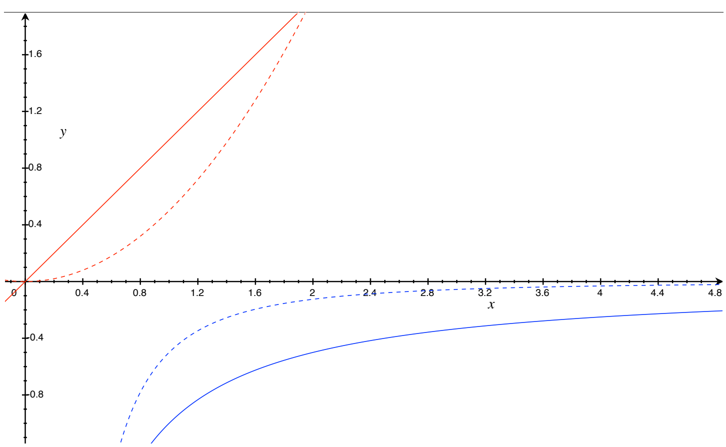

Figura 2.2: Función de utilidad potencia. En color rojo el caso $\alpha = 1$, rojo punteado $\alpha = 2$, en azul $\alpha = -1$ y en azul punteado $\alpha = -2$.

nencial definida como

$$u(x) = -\exp(-\gamma x), \quad \gamma > 0,\, x \in \mathbb{R}^+$$

cuyas primera y segunda derivada son

$$u'(x) = \gamma \exp(-\gamma x) \quad \text{y} \quad u''(x) = -\gamma^2 \exp(-\gamma x)$$

y función de aversión absoluta al riesgo es

$$AAR_u(x) = -\frac{-\gamma^2 \exp(-\gamma x)}{-\exp(-\gamma x)} = -\gamma^2.$$

El hecho de que AAR_u resulte ser constante es de interés, pues en vez de tener una función de aversión absoluta al riesgo, tiene una constante. La interpretación económica asociada a este hecho es que a pesar de que al agente le resulte cada vez menos útil una unidad más del activo, procurará obetnerla tanto como la primera. Los valores que toma γ para hacer una valoración de un activo del que se manejan grandes cantidades serán cercanos a cero, pues u crece más lentamente respecto de x cuando γ es cercano a cero (véase la Figura 2.3).

Por último, nótese que todas estas funciones de utilidad cuando son cóncavas (que describen un comportamiento adverso al riesgo) están acotadas. Esto servirá los capiítulos posteriores para asegurar que existen condiciones finales de las ecuaciones diferenciales resultantes de la aplicación del Teorema de Feynman y Kac.

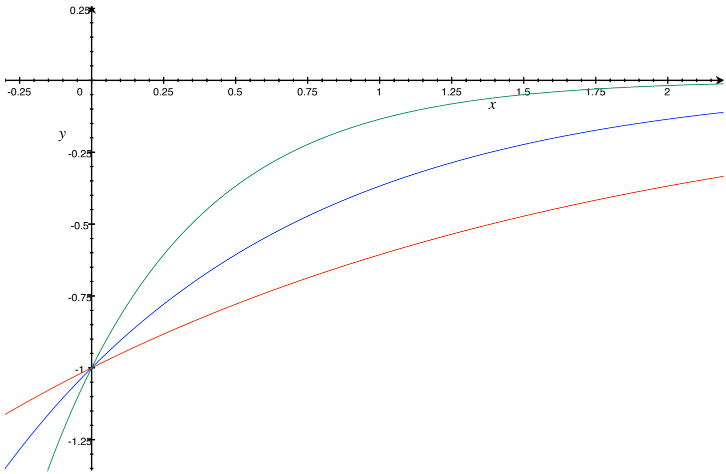

Figura 2.3: Función de utilidad exponencial. En color rojo el caso $\gamma = 0.5$, en azul $\gamma = 1$ y en verde $\gamma = 2$.

Capítulo 3

Modelo estático

A través de este capítulo se modelará la forma en la que debe actuar racionalmente un agente de comercio de alta frecuencia si él fuese capaz de *tomar una fotografía* al mercado y fijarse en su inventario, la volatilidad de un activo y tomar la decisión de comprar o vender de acuerdo a un precio definido por él que involucre además su perfil de riesgo.

§3.1. Libro de órdenes

Antiguamente, para llevar un resgitro de los compradores y vendedores de un activo, se anotaban en un libro por preferencia de precio y luego de llegada. Al día de hoy este registro se hace electrónico y con el afán de no exponer la postura de un agente, se proyecta únicamente el número de activos por precio. Entonces, se puede pensar del libro de órdenes de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{c|c}
\vdots & \vdots \\
\hline
34.12 & 2345 \\
\hline
34.11 & 1722 \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{s = 34.085} \\
\hline
34.06 & 1854 \\
\hline
34.05 & 2459 \\
\hline
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

donde del lado izquierdo se puede ver el precio al que se está dispuesto a intercambiar y del lado derecho la cantidad del activo que está disponible a ese precio. Los niveles debajo del espacio donde se anota el precio medio s son órdenes de compra y los niveles por encima órdenes de venta.

§3.2. Precio medio

Se modelará el precio medio S_t como un proceso de difusión de Itô (véase el Anexo §A.2.2) tal que

$$S_t = \int_0^t \sigma dW_r, \tag{3.1}$$

con volatilidad $\sigma > 0$ constante, $t \in [0, T]$ y W_t el proceso browniano estándar en oposición al modelo geométrico para proveer de heurística hacia modelos más generales. Se utilizará con frecuencia la notación diferencial:

$$dS_t = \sigma dW_t. \tag{3.2}$$

Nótese que a este precio el agente no puede realizar una transacción. Además el precio medio no tiene un término dt en su notación diferencial pues se supone que $S_0 = 0$, esto es, que al proceso de difusión no se le agrega una función lineal de t (deriva). Esto se puede interpretar de manera económica como que el agente carece de opinión con respecto a los cambios de precio del activo.

§3.3. Función de utilidad

Contrario a lo que se pudiera pensar de primer instante, el objetivo de todo agente debe ser maximizar su función de utilidad y no precisamente su función de ganancias. De esta forma, como se trata en el capítulo 2, se puede establecer un perfil de riesgo al que se está dispuesto.

En este caso se utilizará una función de utilidad exponencial, pues cumple con ser acotada (necesario para establecer una condición frontera que se verá más adelante)

$$v(x,s,q,t) = E\left[-\exp\left(-\gamma\left(x+qS_T\right)\right)|S_t = s\right], \tag{3.3}$$

donde $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es la cantidad inicial de unidades monetarias con las que el agente cuenta, $s \in \mathbb{R}^+$ es el precio instantáneo del activo (precio *spot*), $q \in \mathbb{N}$ la cantidad de unidades del activo y $t \in [0,T]$ el tiempo de valuación.

Para calcular la solución de la esperanza del lado derecho de la ecuación se recurrirá al teorema de representación de Feynman y Kac. Antes, para que sea clara la analogía con la versión enunciada en el apéndice §A.2.1, véase a una función candidata a solución $v_c(s,t) = v(x,s,q,t)$ donde de la segunda se toman x y q fijos. Luego,

$$\frac{\partial v_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v_c}{\partial s^2} = 0 \tag{3.4}$$

sujeta a la condición final

$$v_c(s,T) = -\exp(-\gamma(x+qs))$$

que se resuelve de la siguiente forma.

Sean f y g funciones no nulas que solo dependan de s y t respectivamente de tal forma que $v_c(s,t) = f(s)g(t)$. Entonces se pueden observar las parciales como

$$\frac{\partial v_c}{\partial t} = f(s)g'(t), \tag{3.5}$$

y

$$\frac{\partial^2 v_c}{\partial s^2} = f''(s)g(t). \tag{3.6}$$

Sustituyendo (3.5) y (3.6) en (3.4) queda que

$$f(s)g'(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(s)g(t) = 0,$$

se divide por $\frac{1}{2}\sigma^2 f(s)g(t) > 0$

$$\frac{f(s)g'(t)}{\frac{1}{2}\sigma^2 f(s)g(t)} + \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 f''(s)g(t)}{\frac{1}{2}\sigma^2 f(s)g(t)} = 0,$$

y después de eliminar términos semejantes se tiene que

$$\frac{g'(t)}{\frac{1}{2}\sigma^2 g(t)} = -\frac{f''(s)}{f(s)}$$

y como la última ecuación debe ser válida para todo (s,t) se igualará a $-\lambda$ donde $\lambda > 0$ a la que se conoce constante de separación. La elección de $\lambda > 0$ resulta por inspección para que las soluciones de la ecuación sean reales.

Nótese que en congruencia con la condición final

$$\begin{aligned} v_c(s,T) &= E\left[-\exp\left(-\gamma\left(x+qS_T\right)\right)|S_T=s\right] \\ &= -\exp\left(-\gamma\left(x+qs\right)\right). \end{aligned}$$

Que puede ser descompuesta como $v_c(s,t) = f(s)g(t)$ donde $f(s) = -\exp\left(-\gamma\left(x+qs\right)\right)$ y $g(T) = 1$. Así

$$\lambda = \frac{f''(s)}{f(s)} = \frac{-\gamma^2 q^2 \exp\left(-\gamma\left(x+qs\right)\right)}{-\exp\left(-\gamma\left(x+qs\right)\right)} = \gamma^2 q^2. \tag{3.7}$$

Entonces,

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = -\frac{1}{2}\gamma^2 q^2 \sigma^2.$$

Integrando ambos lados desde el tiempo actual t hasta el tiempo final T

$$\int_t^T \frac{d}{dr}\ln g(r)dr = \int_t^T -\frac{1}{2}\gamma^2 q^2 \sigma^2 dr$$

se obtiene

$$\ln g(T) - \ln g(t) = -\frac{1}{2}\gamma^2 q^2 \sigma^2 (T-t)$$

y recordando que $g(T) = 1$,

$$g(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2 q^2 \sigma^2 (T-t)\right). \tag{3.8}$$

Por lo tanto,

$$v_c(s,t) = -\exp\left(-\gamma\left(x+qs\right)\right)\exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2 q^2 \sigma^2 (T-t)\right)$$

y dada la simplificación inicial del problema donde se fijaban x y q, se tiene más específicamente que

$$v(x,s,q,t) = -\exp\left(-\gamma\left(x+qs\right)\right)\exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2 q^2 \sigma^2 (T-t)\right). \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) coincide con lo que se pretendía en un inicio: que la función de utilidad fuera exponencial, que dependiera de la cantidad de dinero x que el agente tiene al principio, el precio instantáneo s del activo, la cantidad q que se posee de dicho activo y el tiempo t en el que se está valuando y además que tomara en cuenta la aversión absoluta al riesgo γ, que se interpreta como que tan conservador es el agente al momento de ejecutar sus órdenes.

§3.4. Precios de reserva

Para terminar de establecer la estrategia de intercambio del agente es necesario saber, dada su función de utilidad, a partir de qué precios está dispuesto a cambiar una cantidad de unidades monetarias x para incrementar su cantidad q de activo.

Definición §3.4.1. (Precio de reserva de oferta). Se llama precio de reservación de oferta $r_b(s,q,t)$ (del inglés *bid*) a aquel al que el agente está dispuesto a adquirir una unidad más de un activo con precio s al tiempo t cuando tiene un capital $x > r_b(s,q,t)$ y q unidades del activo sin modificar su función de utilidad. Está dado implícitamente por la ecuación

$$v(x - r_b(s,q,t), s, q+1, t) = v(x,s,q,t). \tag{3.10}$$

Definición §3.4.2. (Precio de reserva de demanda). Se llama precio de reservación de demanda $r_a(s,q,t)$ (del inglés *ask*) a aquel al que el agente está dispuesto a deshacerse de una unidad de un activo con precio s al tiempo t cuando tiene un capital x y q unidades ($q > 0$) del activo sin modificar su función de utilidad. Está dado implícitamente por la ecuación

$$v(x + r_a(s,q,t), s, q-1, t) = v(x,s,q,t). \tag{3.11}$$

Definición §3.4.3. (Precio de reserva o de indiferencia). Se llama precio de reserva (o de indiferencia) $r(s,q,t)$ al promedio de los precios de reserva de oferta y demanda cuando el agente tiene un capital $x > r_b(s,q,t)$ y $q > 0$ unidades del activo al tiempo t.

Para obtener el precio de reserva de oferta explícitamente, considérese que (3.10) implica que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{v(x - r_b(s,q,t), s, q+1, t)}{v(x,s,q,t)} \\ &= \frac{-\exp\left(-\gamma\left(x - r_b + (q+1)s\right) + \frac{1}{2}\gamma^2(q+1)^2\sigma^2(T-t)\right)}{-\exp\left(-\gamma\left(x+qs\right) + \frac{1}{2}\gamma^2 q^2\sigma^2(T-t)\right)}. \end{aligned}$$

donde $r_b = r_b(s,q,t)$ solo por simplificar notación durante este procedimiento. Tomando logaritmo natural de ambos lados se tiene que

$$0 = -\gamma(-r_b + s) + \frac{1}{2}\gamma^2(2q+1)\sigma^2(T-t)$$

y pasando el primer sumando del lado derecho de la ecuación al lado izquierdo

$$\gamma(-r_b + s) = \frac{1}{2}\gamma^2(2q+1)\sigma^2(T-t).$$

Por último se despeja para r_b recordando que $r_b = r_b(s, qt)$ para obtener

$$r_b(s,q,t) = s + (-1-2q)\frac{\gamma\sigma^2(T-t)}{2}.$$

Siguiendo un procedimiento análogo, se llega a que el precio de reserva de demanda es

$$r_a(s,q,t) = s + (1-2q)\frac{\gamma\sigma^2(T-t)}{2}.$$

Luego, para el precio de indiferencia, solo hay que recordar que se definió como el promedio de los dos anteriores, que resulta ser

$$r(s,q,t) = s - q\gamma\sigma^2(T-t). \tag{3.12}$$

De (3.12) se puede apreciar que si el agente tiene una posición larga sobre el activo ($q > 0$) el precio de indiferencia será menor que el precio medio del activo s al tiempo t pues expresa la necesidad de vender. Análogamente, si el agente tiene una posición corta sobre el activo ($q < 0$) el precio de indiferencia será mayor al precio medio del activo pues expresa la necesidad de adquirir más de él aun cuando le cueste más.

Recordando que este precio se obtuvo implícitamente a partir del cálculo de una función de utilidad además de que es dependiente de los parámetros de la misma, la interpretación que ha de dársele es la del precio que dado su perfil de riesgo le es indiferente adquirir una unidad más de activo por r unidades menos de unidades monetarias o deshacerse de una unidad de activo a cambio de r unidades monetarias. Entonces, un agente racional que tenga estos mismos supuestos, deberá comprar cuando $r(s,q,t) > s$, pues a su consideración particular el activo estaría subapreciado, y vender en el caso contrario por la razón análoga.

Para ejemplificar, supóngase que el agente elige como su constante relacionada de aversión al riesgo a $\gamma = 0.01$ y calcula una volatilidad de $\sigma = 0.25$ sobre el activo del cuál tiene 25 unidades y está a una unidad de tiempo de terminar de terminar su horizonte de inversión, esto es, $T - t = 1$ y considérese el siguiente libro de órdenes:

$\vdots$	$\vdots$
34.12	2345
34.11	1722
$s = 34.085$	
34.06	1854
34.05	2459
$\vdots$	$\vdots$

Entonces, el precio de indiferencia r de este agente sería calculado como

$$r = 34.085 - 25(0.01)(0.25)^2(1) = 34.05375.$$

Entonces, como al agente está dispuesto a recibir 34.05375 unidades monetarias a cambio de una unidad de su activo, recibir 34.06 sería obtener un aumento de su utilidad. Luego, debe vender una unidad de este activo. No deberá vender más pues al momento de intercambiar la primera las situación del mercado puede ser distinta.

Capítulo 4

Modelo dinámico

En el capítulo anterior, siempre que se hablaba de una orden, se pretendía que se ejecutara al momento, pues había una contra parte dispuesta a realizar el intercambio. A este tipo de órdenes se les llama órdenes de mercado. Por otra parte, cuando un agente establece que está dispuesto a vender (comprar) alguna cantidad de algún activo en por lo menos (a lo más) un precio el agente está ejecutando una órden límite. Una orden límite o una parte de ella puede ser una orden de mercado pero no vice versa.

Para este modelo de compra y venta óptima de activos, se considerará que el agente puede establecer órdenes límites alrededor del precio medio definido en (3.1). Se llamará precio de oferta p_b (del inglés *bid*) al precio al que el agente está dipuesto a comprar el activo en caso de que una orden de mercado opuesta a la suya así lo permitiese. De la misma forma, se llamará p_a (del inglés *ask*) al análogo para la venta. Dichos precios pueden ser actualizados sin costo, esto es, se pueden cancelar las órdenes límites correspondientes y poner nuevas sin penalización.

Ahora considérense las distancias de dichas órdenes al precio medio recordando que por notación $S_t = s$,

$$\begin{aligned} \delta_b &= s - p_b, \\ \delta_a &= p_a - s. \end{aligned}$$

quienes determinan el orden de ejecución.

Para ejemplificar, supóngase que llega un orden de mercado para comprar Q unidades del activo. Esta orden se ejecutará al mínimo precio de venta de forma automática siempre y cuando $\delta_a < p_Q - s$ donde p_Q es el precio al que llega dicha orden. Se llamará impacto temporal de mercado a

$$\Delta p = p_Q - s. \tag{4.1}$$

Ahora, se supondrá que la tasa $\lambda_a(\delta_a)$, función decreciente, de un proceso Poisson N_t^a será a la que lleguen órdenes de mercado de compra que incrementarán el precio de las órdenes de venta del agente. De la misma forma, la órdenes de venta que concuerden con las orden de compra límite del agente seguirán un proceso Poisson N_t^b de tasa $\lambda_b\left(\delta_b\right)$, función decreciente de λ_b. Esta elección concuerda con la intuición de que entre más lejos esté la orden del precio medio, más difícil será su ejecución.

Por una parte, la riqueza o cantidad de unidades monetarias del agente será estocástica y dependiente del precio y llegada de las órdenes de mercado. Este proceso X_t se regirá por

$$\Delta X_t = p_a \Delta N_t^a - p_b \Delta N_t^b, \tag{4.2}$$

que se interpreta como que el cambio en la cantidad de unidades monetarias que se tienen está dado por la diferencia entre el número de unidades de activo que se venden por el precio de venta y el número de unidades de activo que se compran por el precio al que se compraron.

Por otra parte, el inventario o número de unidades del activo que tenga el agente de un activo seguirá un proceso regido por

$$q_t = N_t^b - N_t^a, \tag{4.3}$$

que se interpreta como que el cambio en el número de unidades de activo que se poseen es la diferencia entre el número que se compran y el que se venden.

Ahora, para dar solución al problema de encontrar los precios óptimos de ejecución de órdenes, se debe atender el encontrar funciones $\lambda_a(\delta_a)$ y $\lambda_b(\delta_b)$ que concuerden con las observaciones del comportamiento del mercado.

§4.1. Intensidad de los procesos

Para la labor de cuantificar el comportamiento cuantitativo de un mercado, en específico las densidades que determinan $\lambda_a(\delta_a)$ y $\lambda_b(\delta_b)$, es necesario considerar tres aspectos ([AS08]):

1. la frecuencia de llegada de órdenes de mercado,
2. la distribución de su tamaño,
3. el impacto temporal de órdenes grandes.

Debido a la exclusividad y costo del acceso a estos datos, se tomarán los resultados obtenidos por otros autores.

Por simplicidad, se supondrá constante la cantidad Λ de llegada de órdenes de mercado ya sean de compra o de venta. Entonces se estimaría Λ como el cociente del volumen total de intercambio de un activo entre el tamaño promedio de cada orden.

Se ha encontrado por varios estudios que el tamaño de una orden de mercado tiene una distribución exponenecial para una x grande

$$f^Q(x) \propto x^{-1-\alpha} \tag{4.4}$$

con $\alpha = 1.53$ en [GPGS00] para activos en NYSE, $\alpha = 1.4$ para activos de NASDAQ según [MM01] y $\alpha = 1.5$ en [GGPS06] para activos de la bolsa de Paris. El símbolo $\propto$ se lee "es proporcional" y refiere a que entre el lado izquierdo y el lado derecho solo hay una coeficiente de diferencia.

Luego, con menor concenso, debido a la diferencia en la que se define, el impacto de mercado para una orden grande de tamaño Q sigue

$$\Delta p \propto Q^{\beta}$$

donde $\beta = 0.5$ en [GGPS06] y $\beta = 0.76$ en [WR05].

Por otra parte, en [BP09] se encuentra una mejor adecuación como

$$\Delta p \propto \ln(Q). \tag{4.5}$$

Juntando esta información, se obtiene la intensidad del proceso Poisson a la que las órdenes del agente son ejecutadas.

Dicha intensidad depende únicamente de de su distancia al precio medio, $\lambda_a(\delta_a)$ para el caso de la llegada de órdenes de compra y $\lambda_b(\delta_b)$ para el de la llegada de órdenes de venta.

Considérese (4.5)

$$\begin{aligned}\lambda(\delta) &= \Lambda P(\Delta p > \delta)\\ &= \Lambda P(\ln(Q) > K\delta)\\ &= \Lambda P(Q > \exp(K\delta))\\ &= \Lambda \int_{\exp(K\delta)}^{\infty} x^{-1-\alpha} dx\\ &= \frac{\Lambda}{\alpha}\exp(-\alpha K\delta).\end{aligned}$$

Como otra posibilidad, dado que se está interesado en la liquidez al corto plazo, la función de impacto de mercado se obtiene directamente integrando la densidad del libro de órdenes límite como se hace en [SFGK03] y [WR05].

§4.2. Cálculo implícito de la utilidad

Considérese ahora la función de utilidad

$$u(s,x,q,t) = \max_{\delta_a,\delta_b} E\left[-\exp\left(-\gamma\left(X_T + q_T S_T\right)\right) | X_t = x, q_t = q, S_t = s\right] \tag{4.6}$$

donde $\gamma > 0$ es la constante asociada a su aversión absoluta al riesgo; X_t, q_t y S_t los procesos que rigen la cantidad de dinero que tiene el agente, el número de unidades que tiene del activo y el precio del mismo como se describen en la sección anterior.

Para dar solución a este problema, se plantean la ecuación de Hamilton, Jacobi y Bellman

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &+ \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\ &+ \max_{\delta_b}\lambda_b(\delta_b)\left[u(s,x-s+\delta_b,q+1,t)-u(s,x,q,t)\right] \\ &+ \max_{\delta_a}\lambda_a(\delta_b)\left[u(s,x+s+\delta_a,q+1,t)-u(s,x,q,t)\right]=0\end{aligned}$$

sujeta a la condición de frontera

$$u(x,s,q,T)=-\exp(-\gamma(x+qs)).$$

La solución a esta ecuación diferencial parcial es continua en las variables x, s y t y depende del valor discreto del inventario q. Debido a la elección de una función de utilidad exponencial, se puede simplificar el problema proponiendo la solución, que se obtiene por inspección del modelo estático,

$$u(x,q,s,t)=-\exp(\gamma x)\exp(-\gamma\theta(s,q,t)). \tag{4.7}$$

Con esta afirmación se pretende que la función de utilidad sea exponencial y dependa de la cantidad x de unidades monetarias que se tengan al tiempo t y su relación con la constante se aversión absoluta al riesgo sea a través del producto. Sin embargo, se supondrá una función θ que dependa de los otros parámetros de la función de utilidad, que no conoce de que tipo sea.

Así, sustituyendo directamente en el planteamiento inicial

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2} &- \frac{1}{2}\sigma^2\gamma\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2\\ &+ \max_{\delta_b}\left[\frac{\lambda_b(\delta_b)}{\gamma}\left[1-e^{\gamma(s-\delta_b-r_b)}\right]\right]\\ &+ \max_{\delta_a}\left[\frac{\lambda_a(\delta_a)}{\gamma}\left[1-e^{\gamma(s+\delta_a-r_a)}\right]\right]=0\end{aligned}$$

sujeta a la condición inicial

$$\theta(s,q,T)=qs.$$

Ahora, retómense las definiciones de la sección §3.4, para obtener el precio de reserva de oferta

$$r_b(s,q,t)=\theta(s,q+1,t)-\theta(s,q,t),\quad s,t>0 \tag{4.8}$$

y el precio de reserva de demanda

$$r_a(s,q,t)=\theta(s,q,t)-\theta(s,q-1,t),\quad s,t>0. \tag{4.9}$$

En la condición de optimalidad de (4.8), al sustituir estos precios se obtienen implícitamente las distancias óptimas δ_b y δ_a

$$s - r_b(s,q,t) = \delta_b - \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 - \gamma\frac{\lambda_b(\delta_b)}{\frac{\partial\lambda_b}{\partial\delta}(\delta_b)}\right) \tag{4.10}$$

y

$$r_a(s,q,t) - s = \delta_a - \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 - \gamma\frac{\lambda_a(\delta_a)}{\frac{\partial\lambda_a}{\partial\delta}(\delta_a)}\right) \tag{4.11}$$

donde la derivada de la tasa de intensidad de llegada λ con respecto de la distancia δ no es nula pues se supone a la tasa como no constante (véase la Sección §4.1).

En resumen, la precios óptimos de compra y venta se obtienen a través de un procedimiento intuitivo de dos pasos. Primero, se resuelve la ecuación diferencial parcial (4.8) para obtener los precios de reserva. Segundo, resolver las ecuaciones (4.10) y (4.11) par obtener las distancias óptimas $\delta_b(s,q,t)$ y $\delta_a(s,q,t)$. Entiéndase el segundo paso como la calibración de precios de indiferencia según el perfil del agente ante la oferta λ_b y la demanda λ_a.

§4.3. Cálculo explícito de la utilidad

La mayor dificultad que se presenta es el cálculo numérico de la solución de la ecuación (4.8). Esto se debe a que los términos de llegada de las órdenes (los términos sobre los que se maximiza) son no lineales y dependen del inventario discreto. Para resolver este problema, se sugiere hacer una expansión asintótica de la función θ respecto a la variable del inventario q y una aproximación lineal de los términos de llegada de las órdenes.

Nótese que si los términos de las llegadas exponenciales son simétricos, es decir,

$$\lambda_a(\delta) = \lambda_b(\delta) = \frac{\Lambda}{\alpha}\exp(-\alpha K\delta) \tag{4.12}$$

los precios de reserva $r_a(s,q,t)$ y $r_b(s,q,t)$ coinciden con aquellos del modelo estático del capítulo 3.

Ahora, si se sustituyen (4.10) y (4.11) en (4.8) se obtiene

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2 + \frac{\frac{\Lambda}{\alpha}}{\alpha K+\gamma}\left(e^{-\frac{\Lambda}{\alpha}\delta_a} + e^{-\frac{\Lambda}{\alpha}\delta_b}\right) = 0 \\ \theta(q,s,T) = qs. \end{cases} \tag{4.13}$$

Considérese la expansión asintótica de θ respecto de q

$$\theta(q,s,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}q^i\theta^{(i)}(s,t). \tag{4.14}$$

Nótese que hay un cambio de notación para la función θ de un lado a otro de la ecuación, pues como θ es una función lineal de q, sus derivadas con respecto de esta variable ya no dependen de ella.

Con esta expansión se obtienen los precios de reserva implícitos truncados al segundo orden en (4.8) y (4.9), resultando

$$r_b(s,q,t) = \theta^{(1)}(s,t) + (1+2q)\theta^{(2)}(s,t) \tag{4.15}$$

y

$$r_a(s,q,t) = \theta^{(1)}(s,t) + (-1+2q)\theta^{(2)}(s,t). \tag{4.16}$$

Si se sustituyen (4.15) y (4.16) en las condiciones de optimalidad (4.10) y (4.11) respectivamente se obtienen los montos de la estrategia óptima para una diferencia de precios

$$\delta_a + \delta_b = -2\theta^{(2)}(s,t) + \frac{2}{\gamma}\ln\left(1+\frac{\gamma}{\alpha K}\right) \tag{4.17}$$

alrededor del precio de reserva dado por

$$r(s,q,t) = \frac{\delta_a + r_b(s,q,t)}{2} = \theta^{(1)}(s,t) + 2q\theta^{(2)}(s,t).$$

La interpretación que se habría de darse al término $\theta^{(1)}$ es la del precio de reserva cuando el inventario es nulo. Así, $\theta^{(2)}$ puede ser visto como la sen sensibilidad de las decisiones que toma el agente ante cambios en el inventario. Véase que, dado que $\theta^{(2)}$ será negativo, tener una posición larga del activo ($q > 0$) resultará en pujas de precios agresivamente bajos.

La diferencia de los precios de compra y de venta es independiente de la cantidad de activo que se tenga en inventario como se esperaba que fuera debido a la suposición de tasas de llegada de órdenes exponenciales, véase (4.17). Esta diferencia consiste en dos componentes, $\theta^{(2)}$ que expresa la sensibilidad a los cambios en el inventario y el otro que depende de la intensidad de llegada de las órdenes a través de los parámetros α y K.

Si se toma una aproximación de primer orden para el término de llegada de las órdenes

$$\frac{\frac{\Lambda}{\alpha}}{\alpha K+\gamma}\left(e^{-\frac{\Lambda}{\alpha}\delta_a}+e^{-\frac{\Lambda}{\alpha}\delta_b}\right)=\frac{\frac{\Lambda}{\alpha}}{\alpha K+\gamma}\left(2-\alpha K\left(\delta_a+\delta_b\right)\right), \quad (4.18)$$

se nota que los términos lineales no dependen del inventario q. Por lo tanto, si se sustituyen (4.14) y (4.18) en (4.13) y se factorizan los términos dependientes de q se obtiene

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\theta^{(1)}}{\partial s^2}=0, \\ \theta^{(1)}(s,T)=s, \end{cases} \tag{4.19}$$

cuya solución es $\theta^{(1)}(s,t)=s$.

Agrupando los términos de orden q^2 se obtiene

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\theta^{(2)}}{\partial s^2}-\frac{1}{2}\sigma^2\gamma\left(\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial s}\right)^2=0, \\ \theta^{(2)}(s,T)=0, \end{cases} \tag{4.20}$$

cuya solución es $\theta^{(2)}(s,t)=-\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(T-t)$.

Así, para esta aproximación lineal se obtiene el mismo precio de indiferencia

$$r(s,t) = s - q\gamma\sigma^2(T-t) \tag{4.21}$$

que en el caso del modelo estático. Dicho precio está dado alrededor de la diferencia de precios de compra y de venta

$$\delta_a + \delta_b = \gamma\sigma^2(T-t) + \frac{2}{\gamma}\ln\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha K}\right). \tag{4.22}$$

Por último, nótese que si se hubiese tomado una aproximación de segundo orden, $\theta^{(1)} = s$ aún pero el término de sensibilidad $\theta^{(2)}(s,t)$ tendría que ser solución a una ecuación diferencial parcial no lineal.

De esta forma, las ecuaciones (4.21) y (4.22) dan una forma explícita (aproximada) para los precios de compra y de venta en función de los parámetros del mercado.

Capítulo 5

Conclusiones y extensiones

A través del trabajo se desarrollaron puntos importantes cuyas limitaciones y extensiones se resumen en este capítulo.

El levantamiento de las limitaciones al modo en que se intercambian activos dio lugar al fenómeno de agentes de *sin inteligencia*, que se manifiestan como computadoras con algoritmos de venta previamente establecidos por un administrador cuantitativo. Aun si estas limitaciones volvieran a estar vigentes, la forma de pensar adoptada por estos administradores seguiría teniendo efecto, pues su estudio exhaustivo ha cambiado las estrategias de ejecución de las órdenes como es el caso de tener un tiempo regido por el volumen de transacción.

La introducción del concepto de lotería como un bien estocástico permite dar un mejor entendimiento a la teoría de la economía financiera desde la perspectiva de un administrador de riesgo. De esta forma, es posible establecer relaciones de preferencia asociadas a las funciones de densidad del valor final de dichas loterías. Así, se puede hacer una analogía directa entre el concepto de esperanza de una variable aleatoria con una función de utilidad donde se expresa el perfil de riesgo que se está dispuesto a asumir.

Dentro del conjunto de familias de variables aleatorias se puede hablar de un proceso en especial, el movimiento browniano. A este proceso se le puede entender como el movimiento que hace un objeto en un entorno de *completa aleatoriedad* lo que resulta útil para modelar el precio medio de un activo. Sin embargo, obtener la esperanza de una función de este proceso en un tiempo T dada la información hasta un tiempo menor t, resultaría una tarea más complicada sin la existencia de una herramienta que vinculara lo estocástico con lo determinístico como es el teorema de representación de Feynman y Kac.

Recuérdese que esta esperanza representa la función de utilidad de un agente que, como se realiza en este trabajo, es parte del planteamiento inicial y antecede toda solución, pues en ella es más fácil plasmar la valuación del portafolio y el perfil de riesgo que toma el agente.

Al establecer un modelo de compra y venta de activos, es necesario que la función de utilidad esté en función de la cantidad inicial de unidades monetarias, las unidades de activo que se tienen y el precio del mismo, así como el tiempo que determina los anteriores. En el caso de un inventario estático se obtuvo la solución relativamente fácil en comparación al modelo dinámico ya que en este último la diferencia entre los mejores precios de compra y de venta y el impacto de la ejecución de una orden grande cobraron relevancia.

Si bien ambos modelos dieron un precio de indiferencia idéntico, debe tomarse en cuenta que las aproximaciones de tipo lineal, que se hicieron en el dinámico, debilitan la respuesta pues se excluyen variaciones cuadráticas que no deben ser menospreciadas tan a la ligera en funciones provenientes de una representación estocástica.

Habría que hacer hincapié, que dado el carácter introductorio de este trabajo, se toma un modelo sencillo para suponer el precio medio de un activo. Haciendo más compleja tanto la respuesta como el cálculo de la misma, se podría considerar un proceso de difusión con tendencia y que esta como la volatilidad fueran función del activo mismo y del tiempo, *i.e.*, $dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$. Dicho modelo sigue preservando una debilidad, pues S_t tiene una probabilidad no nula de ser negativo para todo tiempo t. De ahí, se podría suponer un movimiento browniano geométrico para modelar.

Por otra parte, habría que considerar un horizonte de inversión infinito pues aunque el día bancario termine todos los días a la misma hora, el número de activos intercambiados no lo es. Y es el reloj basado en el volumen lo que rige la mayoría de las estrategias de HFT.

Apéndice A

§A.1. Resultados probabilísticos

Teorema §A.1.1. ***(Desigualdad de Jensen).*** *Sea f una función de densidad de probabilidad y $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces la función aplicada a la esperanza de una variable aleatoria X es menor o igual que la esperanza de la función aplicada a la misma variable aleatoria, es decir,*

$$u(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(u(X)).$$

Corolario. *Sea f una función de densidad de probabilidad y $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cóncava, entonces la función aplicada a la esperanza de una variable aleatoria X es mayor o igual que la esperanza de la función aplicada a la misma variable aleatoria, es* *decir,*

$$u(\mathbb{E}(X)) \geq \mathbb{E}(u(X)).$$

Teorema §A.1.2. ***(Teorema del estadístico inconsciente).*** *Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y X una variable aleatoria. Si $Y = u(X)$, entonces*

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \cdot P(X = k) = \mathbb{E}(u(X))$$

para el caso discreto y

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f_X(x)dx = \mathbb{E}(u(X))$$

para el caso continuo, donde f_X y f_Y son las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias X y Y.

§A.2. Cálculo estocástico

Para abordar el problema de encontrar una solución a los tiempos de ejecución de una orden, habrá primero que detallar y poner en contexto algunas propiedades relevantes de los procesos involucrados en el planteamiento, cuyas definiciones fueron tomadas de [KS98].

Definición §A.2.1. (Movimiento browniano estándar). A un proceso estocástico $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}}$ se le llama movimiento browniano cuando cumple las siguientes condiciones:

1. $W_0 = 0$;
2. W_t es continuo casi seguramente, es decir, $P\left(\lim_{t\to a} W_t = W_a\right) = 1$;
3. W_t tiene incrementos independientes, es decir, si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, entonces $W_{t_2} - W_{t_1} \perp W_{t_4} - W_{t_3}$;
4. $W_{t_2} - W_{t_1} \sim N(0, t_2 - t_1)$ con $t_1, t_2 > 0$.

A continuación se enuncian algunas propiedades del movimiento browniano consecuencia directa de su definición.

1. La probabilidad marginal al tiempo t es

$$f_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

2. Su esperanza incondicional es cero

$$E(W_t) = 0.$$

3. Su varianza es

$$Var(W_t) = E(W_t^2) - E^2(W_t) = E(W_t^2) - 0 = E(W_t^2) = t.$$

Definición §A.2.2. (Proceso de difusión de Itô). Si μ_r es proceso Lebesgue integrable y predecible[1] respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ y σ_r es un proceso Borel integrable predecible respecto de la misma filtración y además

$$\int_0^t \left(\sigma_r^2 + |\mu_r|\right) dr < \infty,$$

entonces se dice que

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu_r dr + \int_0^t \sigma_r dW_r$$

es un proceso de difusión de Itô, donde W_r es un movimiento browniano estándar.

Nótese que en varias ocasiones se preferirá la notación diferencial

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Teorema §A.2.1. ***(Teorema de Feyman y Kac).*** *Considérese una función $u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que $u(s,t) \in \mathcal{C}^2$ que sea solución de la siguiente ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)+\mu(s,t)\frac{\partial u}{\partial x}(s,t)+\frac{1}{2}\sigma^2(s,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,t)-g(s,t)u(s,t)+h(s,t) = 0$$

[1] Que un proceso $\{X_t\}_{t>0}$ sea predecible quiere decir que X_t es $\mathcal{F}_{t-1}$ medible, es decir, que X_t es una variable aleatoria con respecto de $\mathcal{F}_{t-1}$.

sujeta a la condición $u(s,T) = \psi(x)$ *donde* μ, σ, g *y* h *son funciones conocidas. Se puede ver a* u *como la esperanza condicional*

$$u(s,t) = \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau g(S_\tau,\tau)d\tau} h(S_r,r)dr + e^{-\int_t^T g(S_\tau,\tau)d\tau}\psi(S_T)\middle| S_t = s\right]$$

donde S_t *es un proceso de difusión de Itô*

$$dS_t = \mu(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dW_t.$$

La versión necesaria para el desarrollo de este trabajo es el corolario de este teorema tomando en cuenta que $\mu = g = h = 0$ y que σ es constante.

Corolario. *Si* S_t *es un proceso de difusión de Itô tal que* $dS_t = \sigma dW_t$*, entonces la esperanza condicional*

$$u(s,t) = \mathbb{E}\left[\psi(S_T)|S_t = s\right]$$

será solución a la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,t) = 0$$

sujeta a $u(s,T) = \psi(s)$.

Bibliografía

[AG00] Thierry Ané and Hélyette Geman, *Order Flow, Transaction Clock, and Normality of Asset Returns*, The Journal of Finance **55** (2000), no. 5, 2259–2284.

[AS08] Marco Avellaneda and Sasha Stoikov, *High-frequency trading in a limit order book*, Quantitative Finance **8** (2008), no. 3, 217–224.

[BP09] Jean-Philippe Bouchaud and Marc Potters, *Theory of financial risk and derivative pricing*, Cambridge University Press, 2009.

[Cla73] Peter K. Clark, *A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices*, Econometrica **41** (1973), no. 1, 135–155.

[GGPS06] Xabier Gabaix, Parameswaran Gopikrishnan, Vasiliki Plerou, and H. Eugene Stanley, *Institutional investors* *and stock market volatility*, Quarterly Journal of Economics **121** (2006), 461–504.

[GPGS00] Parameswaran Gopikrishnan, Vasiliki Plerou, Xavier Gabaix, and H. Eugene Stanley, *Statistical properties of share volume traded in financial markets*, Physical Review E **62** (2000), no. 4.

[HR10] Thorsten Hens and Marc Oliver Rieger, *Financial economics. a concise introduction to classical and behavioral fianance.*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[KS98] Ioannis Karatzas and Steve E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Graduate Texts in Mathematics, Sptinger, 1998.

[Men71] Carl Menger, *Grundsätze der volkswirthschaftslehre*, Braumüller, Viena, 1871.

[MM01] Sergei Maslov and Mark Mills, *Price fluctuations from the order book perspective–empirical facts and a simple model*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **299** (2001), no. 1–2, 234–246.

[MT67] B Mandelbrot and HM Taylor, *On the Distribution of Stock Price Differences*, Operations research **15** (1967), no. 6, 1057–1062.

[SFGK03] Eric Smith, J. Doyne Farmer, László Gillemot, and Supriya Krishnamurthy, *Statistical theory of the continuous double action*, Quantitative Finance **3** (2003), 481–514.

[WR05] P. Weber and B. Rosenow, *Order book approach to price impact*, Quantitative Finance **5** (2005), no. 4, 357–364.