



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA  
INSTITUTO DE GEOFÍSICA  
MODELACIÓN MATEMÁTICA

ESTUDIO EXPERIMENTAL Y TEÓRICO DE FRENTE DE CALOR  
GENERADOS POR COMBUSTIÓN IN SITU QUE SE PROPAGAN EN MEDIOS  
POROSOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:  
ARTURO REYES ROMERO

TUTOR DR. J. ADRIÁN REYES CERVANTES  
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM  
MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
DRA. E. LETICIA FLORES MÁRQUEZ  
INSTITUTO DE GEOFÍSICA, UNAM  
DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO  
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

***Dedicado a:***

*Sofía Romero; Mi madre*

*Irma, Georgina y José; Mis hermanos*

*Mónica y Eduardo; Mis sobrinos*

*La familia López Hernández*

*La familia Bernard Romero*

*La familia Reyes y amigos del pueblo donde nací*

*Toda la gente que quiero y que me quiere también*

---

## *Agradecimientos*

*Por tercera vez quisiera expresar mis más sinceros agradecimientos a quienes han estado cerca de mí estos últimos años y a quienes de alguna manera u otra debo en gran medida la culminación de este trabajo, me refiero por supuesto a:*

*Mi director de tesis; Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes, por todo el apoyo recibido y la paciencia para conmigo.*

*Mi comité tutorial; Dra. E. Leticia Flores M, Dr. Fernando Samaniego V y Dr. J. Adrián Reyes C, quienes dieron seguimiento a mis estudios semestre a semestre.*

*Mi honorable jurado; Dr. Fernando Samaniego V, Dr. David Parra G, Dr. Marcos Ley Koo y Dr. J. Arián Reyes C, por sus sugerencias y observaciones para mejorar este trabajo. Para ustedes mis más sinceros agradecimientos.*

*Mis amigos; Gaby, El Niño Verde (Alias: J. Esteban Fernández Gárate ), El Bambino (Alias: Carlos Gabriel Avendaño López), El Gordito (Alias: Alberto Rosas Medina), Saúl Tapia Reynoso y al Adrián (sí, dije al, porque se me enoja cuando le hablo de Dr.).*

También quisiera agradecer a:

*La UNAM, por haberme formado académicamente y a CONACYT, por el apoyo económico durante el tiempo que duraron mis estudios.*

**ARTRERO**

## Índice general

---

0.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	7
<b>1. INYECCIÓN DE AIRE EN MEDIOS POROSOS</b>	<b>13</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	13
1.2. Inyección de aire . . . . .	16
1.3. Combustión in situ . . . . .	18
1.4. Regiones características en un proceso de combustión in situ . . . . .	21
<b>2. MODELO EXPERIMENTAL</b>	<b>24</b>
2.1. Antecedentes tubo de combustión . . . . .	24
2.2. Pruebas en tubos de combustión . . . . .	26
2.3. Realización de pruebas de combustión in situ . . . . .	27
2.4. Resultados experimentales . . . . .	30
<b>3. MODELO DETERMINISTA</b>	<b>36</b>
3.1. Formulación . . . . .	36
3.2. Escalamiento y adimensionalización . . . . .	43
3.3. Zona de reacción . . . . .	46
3.4. Zona de combustión . . . . .	48
3.5. Caso adiabático . . . . .	50
3.6. El caso no adiabático . . . . .	51
3.7. Comentarios . . . . .	55

<b>4. FORMALISMO ESTOCÁSTICO</b>	<b>57</b>
4.1. Procesos estocásticos . . . . .	57
4.2. Movimiento Browniano y aproximación de Langevin . . . . .	59
4.3. Tipos de ruido . . . . .	61
4.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .	64
4.5. Ecuaciones diferenciales con Ruido Multiplicativo . . . . .	65
<b>5. MODELOS ESTOCÁSTICOS PARA LA DINÁMICA DE FREN- TES DE COMBUSTIÓN EN MEDIOS POROSOS</b>	<b>71</b>
5.1. Modelo estocástico con ruido en la velocidad del frente de onda . . .	71
5.1.1. Construcción y solución del modelo . . . . .	71
5.1.2. Discusión y análisis de resultados . . . . .	77
5.2. Modelo estocástico con ruido en el coeficiente de transferencia de calor	85
5.2.1. Construcción y solución del modelo . . . . .	85
5.2.2. Análisis y discusión de resultados . . . . .	91
5.3. Modelo estocástico con ruido simultáneo en la velocidad del frente de la onda y en el coeficiente de transferencia de calor . . . . .	101
5.3.1. Construcción y solución del modelo . . . . .	101
5.3.2. Segundos momentos . . . . .	108
5.4. Análisis y discusión de resultados . . . . .	115
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>127</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>134</b>

## RESUMEN

En este trabajo, se presenta un estudio experimental y teórico de una onda de calor generada por combustión *in situ*, que se propaga a través de un medio poroso. El entendimiento de este problema es importante porque está directamente relacionado con la extracción de petróleo, específicamente, con la recuperación mejorada de hidrocarburos por el método de inyección de aire.

En relación a la parte experimental, se presentan los resultados de dos experimentos realizados en los laboratorios de recuperación de hidrocarburos del Instituto Mexicano del Petróleo (IMP).

En cuanto a la modelación teórica, se hace una extensión estocástica del modelo determinista que describe el fenómeno antes mencionado. Un primer modelo, considera como variable aleatoria la velocidad del frente de onda. En el segundo modelo se consideró que el coeficiente de transferencia de calor es aleatorio. El tercer modelo es una generalización de los dos anteriores, en donde las variables aleatorias son simultáneamente, la velocidad del frente de onda y el coeficiente de transferencia de calor. En este caso se calculó además la banda de probabilidad para la curva de temperatura como función de la posición. En el caso límite cuando la intensidad de las fluctuaciones en los parámetros aleatorios es cero, se recupera el modelo puramente determinista.

Parte de los resultados teóricos de este trabajo, fueron aceptados para su publicación en la revista indexada *Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects*; Decision on Manuscript ID UESO-2012-0540.R3. Este artículo, se anexa al final de este trabajo.

## 0.1. INTRODUCCIÓN

A pesar de los avances tecnológicos, nunca se logra extraer todo el petróleo que se encuentra en un yacimiento. La mayoría de los métodos de extracción son naturales y se conocen como primarios [59]. La extracción por estos métodos es relativamente sencilla y de bajo costo, porque aprovechan la energía propia del yacimiento para hacer subir el crudo a la superficie. Cuando las condiciones naturales ya no permiten que el fluido brote a la superficie, la explotación se suspende por su alto costo de operación. Estudios de campo demuestran que la cantidad de petróleo presente en un yacimiento después de la recuperación primaria, representa aproximadamente el 20 % del volumen original [34].

Los nuevos métodos que pretenden aumentar la producción, se conocen como terciarios o procesos de recuperación mejorada de petróleo ( EOR del inglés enhanced oil recovery). Su principio fundamental consiste en suministrar energía externa a través de la inyección de gases inertes como nitrógeno, oxígeno, bióxido de carbono o aire, químicos (surfactantes y polímeros), agua, microorganismos (MIOR del inglés: microbial oil recovery) y combinaciones de estas variantes. En algunos casos se utiliza además, energía térmica externa suministrada a través de un fluido caliente o la generada por el propio yacimiento ( procesos in situ).

Entre los EOR implementados con cierto éxito se encuentran, la inyección de agua, la inyección de gas hidrocarburo seco, la inyección simultánea o alternada de gas y agua (Simultaneous Water And Gas; SWAG y Water Alternating Gas; WAG). En ocasiones WAG se combina con espuma (FAWAG del inglés Foam Assisted WAG ). La implementación de los métodos microbianos es aún muy discutida. Los métodos químicos hasta ahora no se consideran rentables debido a su alto costo.

El estudio de la combustión in situ ha sido estudiada y documentada desde mediados de 1950, sin embargo es un fenómeno que aún no ha sido completamente comprendido. Los textos de Prats y Boberg resumen la correspondiente literatura sobre el tema hasta finales de 1980 [47, 16]. Para un mejor entendimiento de los procesos de combustión la mayoría de los trabajos reportados sugieren poner atención en la creación, mantenimiento y propagación del frente. Para ello se recomienda estudiar el problema bajo un esquema de escalas múltiples que considera una zona de reacción y una zona de combustión [10]. En este sentido, se han reportado un gran número de experimentos, estudios analíticos y numéricos. Baily y Larkin proponen modelos de transferencia de calor lineales en geometrías radiales con una zona de combustión de espesor finito [10]. Una extensión de este modelo fué presentado en 1979 por Zolotukhin [60]. Gottfried trata el frente de combustión como una discontinuidad en un punto que implica una fuente de calor, pero no explora la estructura de la zona de combustión [30]. Dietz y Beckers entre otros, detallan la propagación de diversos regímenes de la combustión in situ y sus variantes [12, 26, 41]. Burger y Sahuquet analizaron los aspectos químicos de los procesos de reacción [21]. Agca y Yortsos propusieron una descripción simplificada, que toma en cuenta las pérdidas de calor en los alrededores y discutieron la sustentación, propagación y extinción de la onda de calor [2]. Su análisis se basa en un frente de combustión con un espesor conocido propagándose a velocidad constante. La estabilidad en frentes de combustión fue analizado por Armento y Miller [9]. Martin en 1958, estudió los efectos de la cantidad de combustible en la velocidad del frente [40]. Allag y Verma muestran que el vapor producido por el combustible consumido es despreciable [8, 55].

Abu en 1988 tomó en cuenta el craqueo térmico y la vaporización de componentes pesados [1]. Más recientemente, Mamora en 1993 presentó un trabajo en donde hace un análisis de las reacciones químicas separando el fenómeno en oxidación de alta temperatura (HTO) y oxidación de baja temperatura (LTO) [39], mientras que Akkutlu y Yortsos en 2004 realizaron un estudio sobre el acoplamiento de estas reacciones [5]. La dirección de propagación, sustentación y estabilización del frente han sido ampliamente estudiados por Britten, entre otros [18, 50, 2]. En 1995, Matkowsky analizó diferentes modos de propagación del frente [42]. Diversos autores han dedicado sus trabajos a estudiar variantes de la combustión in situ, tales como la combustión frontal seca, la combustión frontal húmeda y la combustión inversa [18, 6, 20]. La deficiencia de oxígeno en el frente de combustión que ocasiona que el consumo del combustible sea incompleto, fué estudiada por Rabinovich [48]. Britten y Krantz extienden este trabajo para situaciones en las que hay exceso de oxígeno [19]. Las pérdidas de calor hacia los alrededores y los procesos en diferentes escalas han sido estudiados por varios autores [50, 2, 58, 22, 3, 28, 37, 38]. Un modelo analítico en donde se estudian los efectos de la heterogeneidad fué propuesto por Akkutlu y Yortsos [3], estos mismos autores desarrollaron y resolvieron de manera analítica un modelo que describe la dinámica de frentes de combustión in situ, donde supone un frente de combustión plano que se propaga a velocidad constante en la misma dirección de la inyección de aire. Algunos aspectos relevantes en este modelo fueron los siguientes: Mediante un formalismo de escalas múltiples, el estudio del frente se restringe a dos zonas muy estrechas, llamadas zona de reacción y zona de combustión, en las que ocurren los principales procesos físicos y químicos. La temperatura del frente tiene una discontinuidad entre la región detrás del frente y la región delante del frente de combustión, que se unen mediante una condición de frontera de salto. Las correspondientes ecuaciones de conservación para la energía total, la masa de oxígeno, la masa total del gas y la masa de combustible del

sistema, se deducen para el interior de las zonas de reacción y combustión. Los perfiles de temperatura, se analizaron para el caso estacionario en donde se toman en cuenta pérdidas de calor por conducción y convección. Las condiciones para sostener la propagación del frente son investigadas como función de la velocidad de inyección. La fracción de masa de oxígeno no quemado, la velocidad del frente y los efectos del coeficiente global de transferencia de calor (para diferente espesor del yacimiento), también son estudiados como función de la velocidad de inyección [4].

La investigación teórica y experimental de vanguardia sobre frentes de oxidación en medios porosos y la metodología para la obtención de datos, se lleva a cabo actualmente en otros países, principalmente en instituciones de los Estados Unidos de Norteamérica y Canadá y está ampliamente documentada [49, 39, 15]. Los resultados de estas investigaciones han permitido estimar la energía de activación del aceite y la velocidad del frente de combustión, datos importantes para predecir la producción. El tubo de combustión es la herramienta principal en el laboratorio para simular un medio poroso. Los experimentos han permitido reproducir con cierta precisión la propagación de la onda de calor a través del medio [36]. Sin embargo, estos resultados difieren en gran medida de los calculados teóricamente.

La teoría, desarrollada para comprender físicamente los procesos de recuperación térmica, es escasa y tiene un desfase en relación a la parte experimental. Los modelos matemáticos que describen aproximadamente los principales fenómenos son pocos y presentan grandes dificultades matemáticas para ser resueltos, aún por esquemas numéricos. Por esta razón, lo que se tiene son modelos simplificados para casos idealizados [25], en los cuales se desprecian importantes aspectos físicos y químicos, tales como, cambio de fase del hidrocarburo, difusión interfacial, capilaridad y segregación gravitacional. Los pocos modelos teóricos existentes

consideran solamente 1) transferencia de calor, 2) transferencia de calor con cambio de fase del agua, 3) transferencia de calor con reacción química o 4) únicamente la hidrodinámica del flujo de tres fases; gas, agua y aceite.

Estas discrepancias se explican por la evolución compleja del sistema que hace difícil cuantificar con precisión los altos gradientes de temperatura, el constante cambio de fase de los fluidos, la cinética de las complejas reacciones químicas fuertemente dependientes de la temperatura que ocurren de manera simultánea y la composición heterógena de los distintos estratos naturales que forman el medio. En estas condiciones, cuando no se tiene precisión en los datos, las predicciones teóricas son sólo resultado de estimaciones típicas que se toman como parámetros de entrada para el modelo.

Uno de los modelos teóricos más recientes fué propuesto por Akkutlu y Yortsos [4], éste describe la evolución unidimensional de un frente de combustión que se propaga a través de un medio poroso a una velocidad constante y en la misma dirección de la inyección de aire. Este es un modelo analítico determinista que describe los perfiles de temperatura estacionarios, considera las pérdidas de calor por conducción y convección, y supone que las propiedades termodinámicas de transporte, así como las propiedades físicas del medio como la porosidad y permeabilidad, entre otros parámetros constantes, de los cuales en la mayoría de los casos sólo se tienen estimaciones de su orden de magnitud. Cuando no se tiene información exacta o se desconocen datos importantes involucrados en la descripción de un fenómeno físico, la modelación matemática de procesos aleatorios es la apropiada para la descripción de sistemas en los que intervienen parámetros cuyo valor no se conoce con certeza o en aquellos en los que su comportamiento no presenta un patrón de regularidad en su evolución espacial y temporal.

En este trabajo se propone una alternativa estocástica para modelar la dinámica de una onda de calor en un medio poroso. En contraste con el modelo determinista, el orden de magnitud de algunas propiedades físicas se considera desconocido y por lo tanto, éstas son tratadas como cantidades espacialmente aleatorias asociándoles una distribución de probabilidad que se apegue lo más fielmente posible a las condiciones de campo y condiciones experimentales. Como una primera aproximación se considera un modelo para el cual los coeficientes de correlación y los primeros dos momentos de la distribución están bien especificados. Ésto con el objetivo de representar un medio cuya constitución espacial es heterógena y con ello, poder discernir como estas inhomogeneidades influyen sobre los perfiles de temperatura estacionarios con pérdidas de calor por convección en forma similar a los discutidos en [4].

Sobre los alcances y limitaciones de este trabajo: La formulación estocástica aplicada a este problema abierto, tiene por objetivo principal analizar el problema desde otro punto de vista de cuyas conclusiones se pueda dar simplemente un paso más hacia el entendimiento del fenómeno tratado.

Estructura y organización: En el capítulo 1, se presenta una descripción de conceptos básicos sobre medios porosos, inyección de aire y combustión in situ. En el capítulo 2 se presentan las curvas experimentales de temperatura de dos experimentos realizados en el IMP. El capítulo 3 resume el modelo teórico determinista que describe la propagación de una onda de calor en un medio poroso. En el capítulo 4 se presenta una exposición de la teoría sobre ecuaciones diferenciales estocásticas. En el capítulo 5 se presenta el desarrollo de tres modelos teóricos probabilísticos que describen la propagación de una onda de calor en un medio poroso. En el capítulo 6 se presentan las conclusiones y comentarios finales.

---

## Capítulo 1

### INYECCIÓN DE AIRE EN MEDIOS POROSOS

---

En este capítulo se exponen de manera general algunos conceptos y terminología básicos en medios porosos; se explican principalmente los procesos de inyección de aire, el fenómeno de la combustión in situ y su aplicación en la industria del petróleo como herramienta en la extracción de crudo que permita aumentar la producción.

#### 1.1. Conceptos básicos

Un medio poroso es un sistema compuesto por una matriz sólida cuyo interior presenta un sistema de huecos llamados poros que pueden o no estar interconectados entre sí, a través de los cuales puede o no circular un fluido. Una fase es un estado de agregación el cual puede ser un líquido, sólido o gas. Transferencia de material, momento y energía pueden ocurrir entre estas fases, no necesariamente de composición homogénea o temperatura uniforme. Generalmente, en estos sistemas la fase gaseosa es homogénea, mientras que la fase sólida es inhomogénea<sup>1</sup>. En un medio poroso, la velocidad de la fase sólida en la frontera del sistema debe ser mucho menor que la velocidad del fluido dentro del medio poroso [45].

---

<sup>1</sup>Algunos autores utilizan el término continuo o discontinuo

La saturación y la viscosidad del fluido, así como la porosidad y permeabilidad de la roca, son algunos de los parámetros importantes que caracterizan a un medio poroso. Cuantificar estas propiedades en materiales in situ o reproducir en el laboratorio el empacamiento natural de partículas que representen los granos de un medio con propósitos de medición es muy complicado, sin embargo se han desarrollado diferentes métodos indirectos que permiten tener cierta estimación [45].

La saturación (llenado de los huecos del espacio poroso) de una fase es la fracción de volumen poroso ocupado por una fase  $f$  determinada, es decir,

$$S_f = \frac{V_f}{V_p}, \quad (1.1)$$

donde  $V_f$  es el volumen ocupado por la fase  $f$  y  $V_p$  es el volumen de los poros. En ocasiones se acostumbra manejar una saturación porcentual que se obtiene al multiplicar la ecuación (1.1) por 100. Si los poros están completamente saturados y se tiene más de una fase, se cumple además la relación,

$$\sum_{f=1}^n S_f = 1, \text{ esto implica que } \sum_{f=1}^n V_f = V_p. \quad (1.2)$$

La viscosidad es la medida de la resistencia interna que presentan los fluidos a moverse [59] y comúnmente se denota por  $\mu$ . En el medio petrolero se utiliza el centipoise ( $cp$ ) como unidad de medida de la viscosidad. Regularmente, la viscosidad depende de la temperatura y de la presión. En el cuadro 1.1, se dan valores típicos para diferentes tipos de aceite.

La porosidad es una medida de la capacidad del almacenamiento de fluidos que posee una roca y se define como el cociente

Cuadro 1.1: Valores típicos de la viscosidad en aceites bajo las siguientes condiciones (272.18-408.28 atm y 93.3°C) [59].

Clasificación	Rango de viscosidad( <i>cp</i> )
Ligero	0.3-1
Medio	1-6
Moderado	6-50
Muy viscoso	50-1000
Pesados	arriba de 1000

$$\phi = \frac{V_p}{V_t}. \tag{1.3}$$

Donde  $V_p$  es el volumen de los espacios vacíos (volumen poroso) y  $V_t$  es el volumen total de la roca. La porosidad puede depender de la presión y temperatura, pero estas dependencias son usualmente despreciables [59]. La porosidad es un número adimensional y su valor teórico máximo es 1, es decir,  $0 \leq \phi \leq 1$  [29].

Los factores que afectan la porosidad de la roca son varios, entre los que destacan la geometría y tamaño de los poros (granos), el tipo de empacamiento y los materiales de los cuales está compuesta la matriz de la roca que son principalmente sílice, carbonato de calcio y arcilla.

Experimentalmente se ha encontrado que el valor promedio de la porosidad en donde las partículas confinadas se consideran esféricas con un diámetro de 0.02 *mm*, la porosidad es de alrededor de 50 % y del 95 % para diámetros de 0.002 *mm*. Una tabla con información más completa se puede consultar en [45].

La permeabilidad  $k$  es la capacidad que tiene la roca para conducir fluidos a través de sus poros. Ésta, se relaciona con la ecuación de Darcy, de la siguiente manera,

$$v = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.4)$$

donde  $k$  es la permeabilidad del medio y  $\mu$  es la viscosidad del fluido. En la industria petrolera, la permeabilidad es probablemente el parámetro más importante porque su distribución y conectividad determinan el flujo del fluido en el yacimiento.

## 1.2. Inyección de aire

Los yacimientos petroleros, son un ejemplo de medios porosos donde los fluidos (petróleo y gas) ocupan los espacios entre poros y una manera de remover el crudo que ahí existe, consiste en inyectar aire. Durante este proceso, el oxígeno presente en el aire inyectado provoca una oxidación in situ de una mínima cantidad de hidrocarburos principalmente pesados, que libera gases ligeros tales, como monóxido de carbono ( $CO$ ) y dióxido de carbono ( $CO_2$ ), además de vapor de agua. Los cambios de presión y temperatura provocados por esta reacción química, modifican propiedades como la viscosidad y la tensión superficial del crudo en la interfase que es donde en ese instante se encuentra el frente de combustión lo que permite un mejor desplazamiento del aceite a través del medio, conforme el frente avanza.

La inyección de aire es una técnica de recuperación térmica en la que, el oxígeno inyectado genera un proceso de oxidación que libera energía, la cual se propaga a lo largo del yacimiento como un frente de oxidación. Mantener la propagación del frente es una condición necesaria para lograr un proyecto exitoso de recuperación del crudo [4, 3]. Con pérdidas de calor o cuando no hay suficiente combustible existe la posibilidad de que el frente se extinga.

El desplazamiento, la destilación, el rompimiento o degradación de los compuestos del petróleo, la vaporización del crudo y la formación de combustibles sólidos, dependen de la temperatura que se alcance en un frente de oxidación, los cuales a su vez dependen de la cantidad de combustible oxidado por unidad de volumen de roca del yacimiento.

Cuando se inyecta únicamente aire, el intervalo de temperaturas varía entre 200 y 820° C [46, 47, 31, 23]. En pruebas de laboratorio como en el propio yacimiento, la temperatura de la zona de oxidación permanece alta debido a que la capacidad calorífica del aire inyectado es muy baja como para transferir una cantidad significativa de calor. Por este motivo, se recomienda inyectar agua durante o después de la inyección de aire, para ayudar a que la transferencia de calor de la zona oxidada en el resto del yacimiento sea eficiente y aprovechar el vapor producido in situ.

En la recuperación de hidrocarburos, esta técnica es la más empleada para introducir oxígeno en un yacimiento [11, 46, 47]. Entre sus ventajas destacan las siguientes [32]:

1. La gran disponibilidad de aire.
2. La relativa facilidad con la que se inyecta, debido a que no hay que realizar ningún proceso previo al aire inyectado (en algunos casos se aplica un proceso de enriquecimiento).
3. Al inyectar aire donde hay agua se crea una zona de vapor y se obtienen los beneficios de un proceso de desplazamiento de hidrocarburos por vapor de agua lo que permite aprovechar la facilidad con la que el agua se desplaza a través de la zona donde se almacenan los hidrocarburos.

4. El proceso de oxidación produce hasta un 14 % de  $CO_2$ , con respecto al volumen del oxígeno inyectado.

### 1.3. Combustión in situ

El contenido de esta sección fué redactada con base en la referencia [33]. La combustión in situ implica la inyección de aire donde por ignición espontánea o inducida, una porción del petróleo existente en el yacimiento se quema formándose un frente de combustión que se mantiene y se propaga a través del yacimiento, mediante la inyección continua de aire. La energía térmica generada da lugar a numerosas y complejas reacciones químicas como oxidación de alta temperatura (HTO), oxidación de baja temperatura (LTO), (por sus siglas en inglés High Temperature Oxidation y Low Temperature Oxidation respectivamente), desintegración catalítica, destilación y polimerización, que contribuyen simultáneamente con otros mecanismos como empuje por gas, condensación, desplazamientos miscibles y empuje por vapor a mover el petróleo desde la zona de combustión hacia los pozos productores. Véase la Fig. 1.1.

El proceso de oxidación es la reacción química de mayor peso asociada a la combustión in situ, por tal motivo cuando se habla de LTO o HTO, no es otra cosa que la combustión in situ con dos variantes que ocurren en diferentes intervalos de temperatura. A la oxidación de alta temperatura suele llamársele simplemente combustión in situ.

A temperaturas menores a los 343 °C, se está en el régimen LTO, aquí el agua y los compuestos orgánicos oxigenados (ácidos carboxílicos, aldehídos, alcoholes, acetonas e hidroperóxidos) son los principales productos de la reacción [21]. Es

importante mencionar que por lo regular LTO ocurre a temperaturas menores que 343 °C, aunque en realidad este rango varía dependiendo en gran medida del tipo de aceite. Asignar un rango exacto de temperaturas a la región LTO es muy difícil porque además, las reacciones de óxido carbón comienzan a temperaturas entre 132.22 °C y 160 °C [44].

El régimen HTO corresponde a temperaturas mayores a los 343 °C. Aquí el resultado de las reacciones entre el oxígeno y los combustibles orgánicos derivados del crudo es la formación de monóxido de carbono ( $CO$ ), dióxido de carbono ( $CO_2$ ) y agua ( $H_2O$ ). Estas reacciones remueven el carbón del combustible y rompen la cadena de los hidrocarburos.

El frente de la combustión es la región de más alta temperatura, aquí el oxígeno se combina con el combustible y la oxidación ocurre con una variedad de reacciones que producen los óxidos del agua y del carbón. La cantidad de combustible quemada es un parámetro importante porque determina el volumen de aire que se debe inyectar para quemar cierto volumen de combustible. La zona de craqueo-evaporación está en sentido descendente del frente de combustión. En ésta, el petróleo crudo es modificado por la alta temperatura de la combustión. Observaciones de campo muestran un incremento de 2 a 6 °API<sup>2</sup> para aceites pesados.

En aceites pesados el calor, la generación de vapor de agua y la subsecuente reducción de la viscosidad son los principales mecanismos de desplazamiento. Por

---

<sup>2</sup>La gravedad °API, de sus siglas en inglés American Petroleum Institute, es una medida de densidad que describe que tan pesado o liviano es el petróleo comparándolo con el agua. Se dice que es pesado si tiene gravedades °API entre 22.3 y menores a 10 °API ó liviano cuando tiene gravedades API entre 22.3 y mayores a 31.1 °API.

esta razón, la combustión in situ en este caso, debe operar en el régimen HTO. En cambio, en aceites ligeros el calor generado no es tan importante y la generación de gases es el factor principal en el desplazamiento, por lo tanto los aceites ligeros obedecen un régimen LTO.

La combustión in situ comparada con otras técnicas de recuperación, es económica y eficiente en aceites pesados en yacimientos poco profundos y en aceites ligeros en yacimientos profundos.

Existen diversas variantes de la combustión in situ, por ejemplo la combustión frontal puede ser caracterizada más a fondo como seca cuando solamente se inyecta aire o aire enriquecido, o húmeda si se inyecta aire y agua, la combustión inversa sucede cuando el frente de combustión se mueve en sentido contrario al flujo de aire inyectado. En la combustión in situ estandar, también llamada frontal, y después de la ignición, el frente de combustión avanza en la misma dirección que el flujo de aire inyectado.

El cuadro 1.2 resume los criterios recomendados para la aplicación de la combustión in situ. Algunas limitantes son las siguientes: Si no se deposita suficiente coke del aceite que se está quemando, el proceso de combustión no puede ser sostenido; esto limita la aplicación para el caso de aceites parafínicos con altos grados °API. Si se deposita demasiado coke, la velocidad del frente de combustión es lenta y el volumen de aire necesario para mantener la combustión es grande. La saturación del aceite y la porosidad deben ser altas para reducir al mínimo la pérdida de calor hacia la roca adyacente. El proceso tiende a barrer por la parte superior al yacimiento de tal manera que la eficiencia de barrido es pobre en formaciones de gran espesor.

Cuadro 1.2: Criterios para aplicación de combustión in situ, de acuerdo a Taber et al [52].

	Rango Recomendado	Rango Proyectos Actuales
Propiedades del aceite		
Gravedad, °API	10 a 27	10 a 40
Viscosidad, cp	<5,000	6 a 5,000
	Algunos componentes	
Composición	asfálticas	
Características del yacimiento		
Saturación de aceite, %VP	>50	62 a 94
Tipo de formación	Arena o arenisca	
Permeabilidad promedio, md	>10	
Espesor , m	>15.24	25.9 a 1219.20
Profundidad, m	<3505. 2	121.9 a 3444.24
Temperatura, °C	>37.7	37.7 a 104.4

## 1.4. Regiones características en un proceso de combustión in situ

En la combustión in situ, se identifican generalmente las siguientes regiones idealizadas [46]: A medida que se incrementa la temperatura, el agua y los hidrocarburos ligeros son los primeros en evaporarse. Estos vapores son arrastrados por el flujo de aire, para condensarse y mezclarse con los fluidos originales en regiones adelante del frente de combustión, donde la temperatura es más baja. El agua condensada forma un banco de agua (F); enseguida, los hidrocarburos ligeros se condensan a una temperatura menor para formar un banco de aceite (G). Entre la

región de condensación y la región de vapores se forma una meseta de vapor (E), la cual es básicamente una región de flujo de dos fases vapor-líquido. Si la temperatura es lo suficientemente alta (alrededor de 350 °C), puede ocurrir un proceso llamado craqueo termal, que produce una fracción volátil de hidrocarburo y un residuo pesado llamado coque, que sirve como combustible para la reacción en las regiones C y D. En caso contrario, el hidrocarburo que se deposita y que reacciona con el oxígeno será sólo aquella fracción menos volátil que se separa de la más volátil a través de la destilación. La zona de combustión (B) es la región donde se llevan a cabo las principales reacciones exotérmicas y en donde se genera la energía necesaria para auto-sostener el frente de combustión. Detrás de esta zona queda una zona de arena limpia por donde fluye el aire (A). Finalmente, lejos del frente de combustión existe una zona inalterada del medio (H).

En una situación ideal se requieren dos condiciones: (i) que todo el oxígeno inyectado sea consumido en la zona de combustión; (ii) que todo el combustible depositado sea quemado. Sin embargo, cuando existe una mayor cantidad disponible de oxígeno que el requerido, el excedente rebasa la zona de combustión y reacciona con el aceite a temperaturas por debajo de los 300 °C. Esto produce hidrocarburos oxidados con un incremento en su polaridad y en consecuencia aumenta su energía de amarre. En estas circunstancias el hidrocarburo resultante es más viscoso y denso que el original [21, 7].

Los perfiles de temperatura como función de la posición, así como las varias zonas idealizadas que se forman durante la combustión in situ frontal se muestran esquemáticamente en la Fig. 1.1 [40, 57].

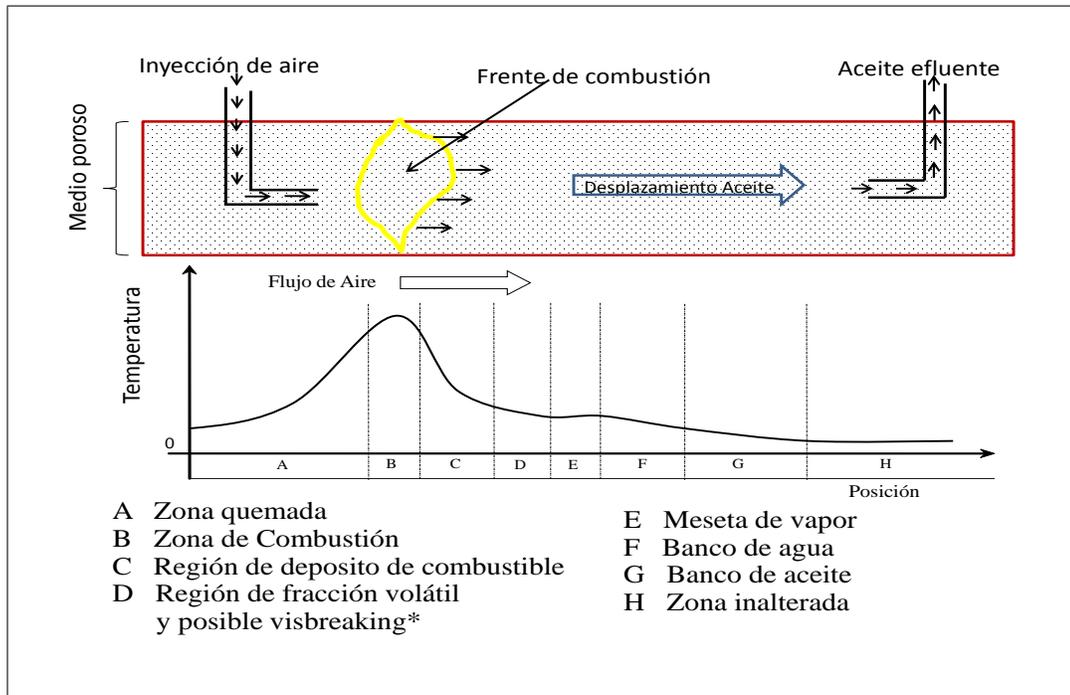


Figura 1.1: Idealización de un proceso de inyección de aire y perfiles de temperatura. \* Del inglés viscosity breaking, es un proceso que consiste en transformar un residuo pesado en compuestos más ligeros, a través de la disminución en su viscosidad.

---

## Capítulo 2

### MODELO EXPERIMENTAL

---

En este capítulo se presentan los resultados de dos experimentos realizados en los laboratorios de recuperación de hidrocarburos en el Instituto Mexicano del Petróleo (IMP).

#### 2.1. Antecedentes tubo de combustión

Los tubos de combustión son la herramienta tradicional empleada para representar un medio poroso en el laboratorio. Su forma es cilíndrica y están fabricados principalmente de acero inoxidable.

Los diseños y sus dimensiones como diámetro ( $D$ ) y longitud ( $L$ ) han venido cambiando. Anteriormente se usaban tubos de hasta 20.32 cm de diámetro y 4.572 m de longitud [49]. Actualmente se emplean tubos de dimensiones más pequeñas, que miden entre 0.9144 m y 1.8288 m de longitud y de 5.08 cm a 10.16 cm de diámetro, con el propósito de reducir el tiempo de duración del experimento. En el cuadro 2.1, se presentan algunas instituciones que han diseñado sus propios tubos de combustión [49].

Cuadro 2.1: Dimensiones en tubos de combustión.

<b>Institución</b>	<b>L(m)</b>	<b>D(cm)</b>
U. de Calgary	1.82	10.16
Stanford U	0.91	7.62
Amoco	1.82	10.16
Texaco	1.52	7.62
Esso Resources	1.21	7.62

Estudios realizados por Belgrave [14] sobre la transferencia de calor radial en el tubo, mostraron que mantener una diferencia de temperatura cercana a cero, entre las paredes del tubo y la arena empacada en su interior, no es una condición suficiente para garantizar la adiabaticidad del sistema, lo que ocasiona que diseños diferentes operados bajo las mismas condiciones de trabajo, produzcan resultados (perfiles de temperatura) distintos, debido a la diferencia del calor perdido en las paredes del tubo. Sus estudios también revelaron que el diámetro y el ancho de las zonas de calentamiento juegan un papel importante para tener una alta adiabaticidad y así evitar grandes flujos de calor hacia los alrededores. Por esta razón, es recomendable utilizar tubos de diámetro mayor y zonas de calentamiento pequeñas comparadas con la longitud del tubo para tener pérdidas mínimas de calor.

La mayoría de los tubos de combustión reportados en la literatura son adiabáticos. En algunos, las pérdidas de calor hacia los alrededores se minimiza por el aislamiento mismo. Sin embargo, su operación requiere flujos de aire entre 70 y 100 veces menos en relación a los realmente usados en el yacimiento [26]. Operacionalmente, es difícil mantener altos flujos, debido a las grandes caídas de presión a través del sistema. La exigencia de aire y la disponibilidad de combustible

pueden aumentar con el flujo creciente [7].

Diseños recientes emplean calentadores para compensar la pérdida de calor y cintas de calentamiento enrolladas alrededor del tubo que tienen la función de igualar la temperatura de las paredes con la temperatura del centro del tubo en cada zona de calentamiento. Un problema con éstos, es la interacción térmica entre el calentador y el empacamiento de arena que repercuten en el movimiento del frente de combustión. Aunque el problema ya ha sido abordado [35, 13], aún no se tiene una solución satisfactoria.

La posición del tubo regularmente es vertical con el fin de reducir los efectos de segregación gravitacional. Sin embargo esta posición y el manejo de altas presiones pueden dar lugar a una distorsión de los resultados en los experimentos, debido a la convección térmica de gas en la región anular del tubo [51]. Belgrave [13], recomienda el empleo de un gas como el helio, de bajo peso molecular, baja capacidad calorífica específica (número de Rayleigh bajo) y un material aislante de baja permeabilidad (menor porosidad) alrededor del tubo para reducir la convección de transferencia de calor inducida.

## 2.2. Pruebas en tubos de combustión

La confiabilidad de los resultados en pruebas de combustión in situ depende en gran medida de un diseño apropiado y una operación adecuada del tubo.

Es importante señalar que los tubos de combustión no son una representación completa, ni a escala de la situación real que se desea simular, son apenas una herramienta elemental de laboratorio que representa sólo una parte del problema.

Estudios realizados anteriormente muestran que si se utilizan muestras de roca y aceite extraídas del campo en estudio y se opera bajo condiciones de temperatura y presión semejantes a las existentes en una situación real, entonces el producto químico de las reacciones y la estequiometría de la reacción serán muy similares. Uno de los principales inconvenientes es que son experimentos sin escalamiento y como consecuencia, los resultados no se pueden comparar directamente con el sistema real. Sin embargo, las pruebas en tubos de combustión permiten simular de una manera aceptable la propagación natural de la onda de calor, así como las reacciones resultantes de la dinámica química y ayudan a comprender lo que sucede en una situación real de campo. De aquí, que estas pruebas sean aceptadas como un método para la obtención de datos confiables que permitan describir el complejo proceso de la combustión in situ.

### 2.3. Realización de pruebas de combustión in situ

A continuación, se presentan los perfiles de temperatura de dos experimentos que se realizaron en los laboratorios de recuperación de hidrocarburos del (IMP). Es importante mencionar, que el dispositivo experimental, así como la metodología para la realización de los experimentos, son propiedad intelectual de dicho instituto, por tal motivo en este trabajo se omite información detallada al respecto y sólo se estudian y analizan los resultados con fines académicos.

Las propiedades físicas de las muestras de campo del aceite y roca, son las siguientes: Muestra A, es un aceite ligero de 30.5 °API ( $\rho = 873 \text{ kg/m}^3$ ) en condiciones estándar de 20°C y 1atm y su viscosidad  $\mu = 15.562 \text{ cp}$ . Muestra B, también es un ligero intermedio de 18.29 °API ( $\rho = 944.6 \text{ kg/m}^3$ ) y

$\mu = 661.426 \text{ cp}$ . En el cuadro 2.2, se da información complementaria. Las saturaciones correspondientes a la fase del agua y del aceite denotadas por  $S_w$  y  $S_o$  respectivamente, son cantidades controladas. Mediante las ecuaciones (1.1) y (1.3), se calcula el volumen correspondiente a cada una de estas fases dado por  $V_f = S_f \phi V_t$ .

Cuadro 2.2: Parámetros utilizados en dos experimentos.

Parámetros	Muestra A	Muestra B
volumen arena	2800 ml	2800 ml
Mallado de la arena	50	50
Porosidad $\phi$ de la arena	42 %	41 %
Temperatura de ignición $T_{ig}$	229.47°C	289 °C
Temperatura $T_0$ del tubo	70 °C	100 °C
Presión $P_0$ del tubo	20.41 atm	68.05 atm
Flujo $f$ de gas	3.5 L/min	3.5 L/min
Saturación $S_o$ del aceite	32 % (376 ml)	38 % (436 ml)
Saturación $S_w$ del agua	20 % (235 ml)	28 % (321 ml)

De manera general, el experimento consiste en elevar la temperatura y presión al interior del tubo que contiene un empacamiento de arena, aceite y agua. Las cantidades controladas son volumen de arena, saturaciones de agua y aceite, presión, temperatura y flujo de inyección de aire. El sistema que inicialmente se encuentra a presión y temperatura ambiente, se lleva a la presión  $P_0$  y temperatura  $T_0$ . Cuando se alcanzan las condiciones de yacimiento ( $P_0$  y  $T_0$ ), se eleva nuevamente la presión y temperatura, hasta alcanzar la temperatura de ignición del aceite  $T_{ig}$  (ocurre cuando el calor que emite una reacción química es el más propicio para iniciar la combustión). En este momento, se suspende la energía suministrada en forma de calor y comienza

la inyección de aire. Debido a la presencia de oxígeno en el aire inyectado, se iniciará la combustión en el aceite (oxidación de alta temperatura) dando origen al frente de calor. Es importante mencionar que se usa aire o nitrógeno para evitar que este gas reaccione químicamente con el proceso de oxidación. La inyección continua del gas a un flujo  $f$  constante garantiza que la onda de calor no se extinga y que avance a través del medio. Durante el tiempo de realización del experimento, la presión debe mantenerse constante. Véase la Fig.2.1.

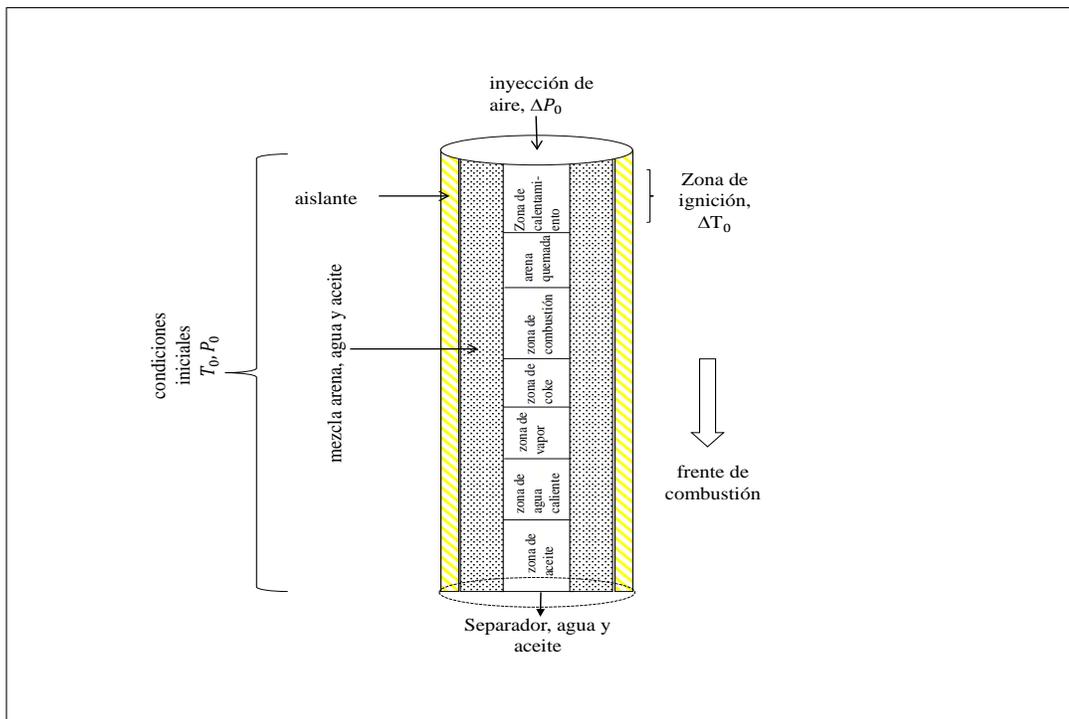


Figura 2.1: Tubo de combustión y representación de zonas características de la combustión in situ.

## 2.4. Resultados experimentales

En las Figs.2.2 y 2.4, se muestra la evolución del frente de combustión a lo largo del tubo. La Fig.2.2, corresponde a los datos de la muestra A. El tiempo que tardó el frente en desplazarse desde su origen, hasta su punto final (una distancia aproximada de 1 metro) fué de cinco horas aproximadamente. En este experimento, se tomaron nueve medidas de la temperatura del frente (a partir del termopar 2), de los diez posibles. El primero, se omitió porque presentó muchas variaciones y no era representativo del frente debido a su cercanía con la zona de ignición. La temperatura máxima registrada, ocurre en el perfil monitoreado por el termopar 9, es cercana a los  $508^{\circ}\text{C}$  y ocurrió cuatro horas y media después de iniciado el experimento. La temperatura mínima se registra en el termopar 10 y es muy cercana a los  $437^{\circ}\text{C}$ .

En la literatura, se reportan usualmente los perfiles de temperatura del frente como función de la posición y no del tiempo [39, 17]. Sin embargo, el diseño experimental sólo permite obtener diez lecturas a un mismo tiempo [39]. La Fig.2.3 muestra los correspondientes perfiles de temperatura como función de la posición.

Las gráficas en la Fig.2.4, muestran la evolución de los perfiles de temperatura de la muestra B. En este caso fué posible tomar sólo ocho mediciones (a partir del termopar tres). La omisión de los dos primeros respondió, como se dijo antes, a su cercanía con la zona de ignición. La temperatura máxima se registró en el perfil monitoreado por el termopar 3, está alrededor de los  $543^{\circ}\text{C}$  y ocurre una hora y media después de iniciado el experimento. La temperatura mínima es de  $411.5^{\circ}\text{C}$  y se registró en el termopar 10. La Fig. 2.5, muestra los correspondientes perfiles como función de la posición.

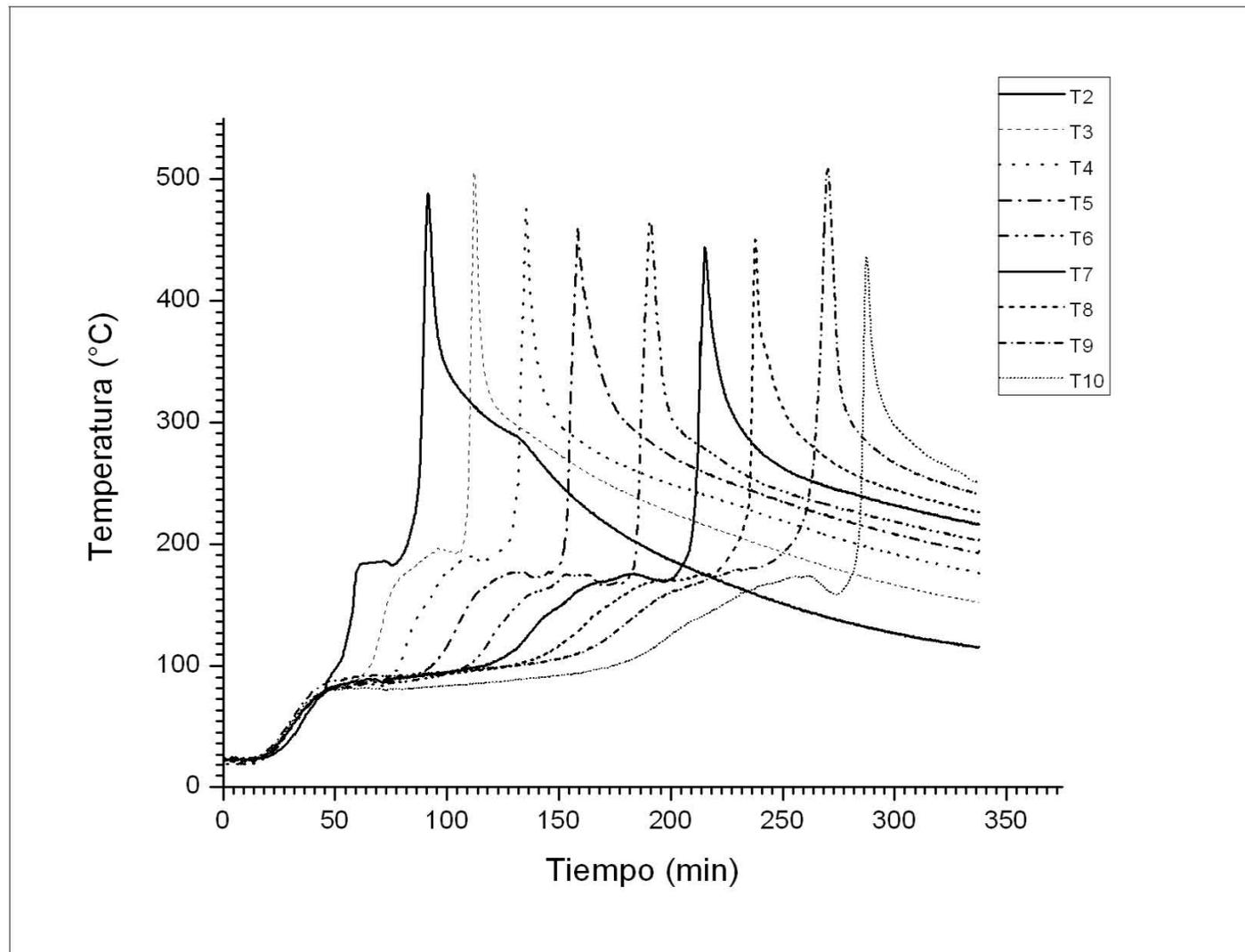


Figura 2.2: Perfiles de temperatura en función del tiempo. Muestra A.

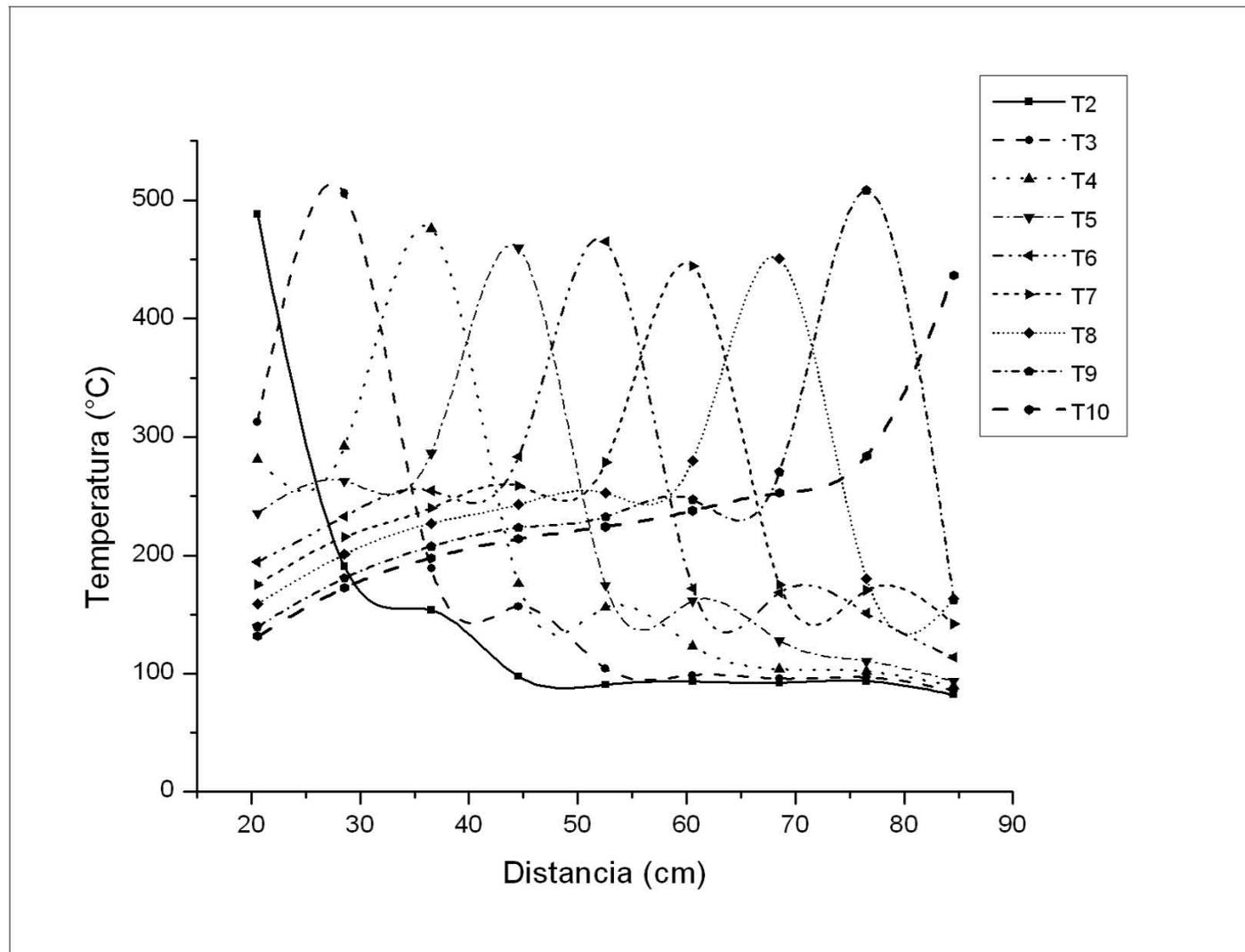


Figura 2.3: Perfiles de temperatura en función de la posición. Muestra A.

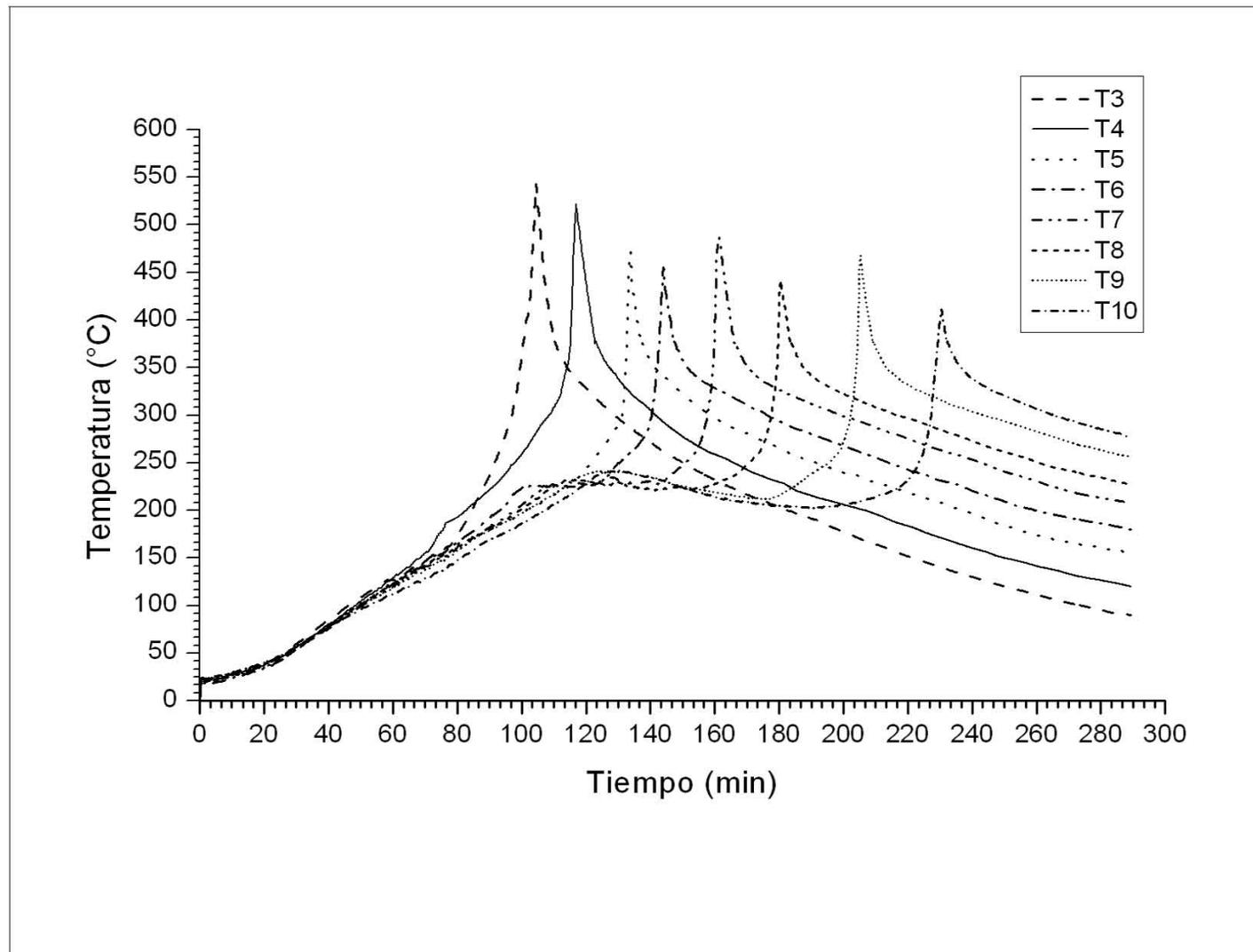


Figura 2.4: Perfiles de temperatura en función del tiempo. Muestra B.

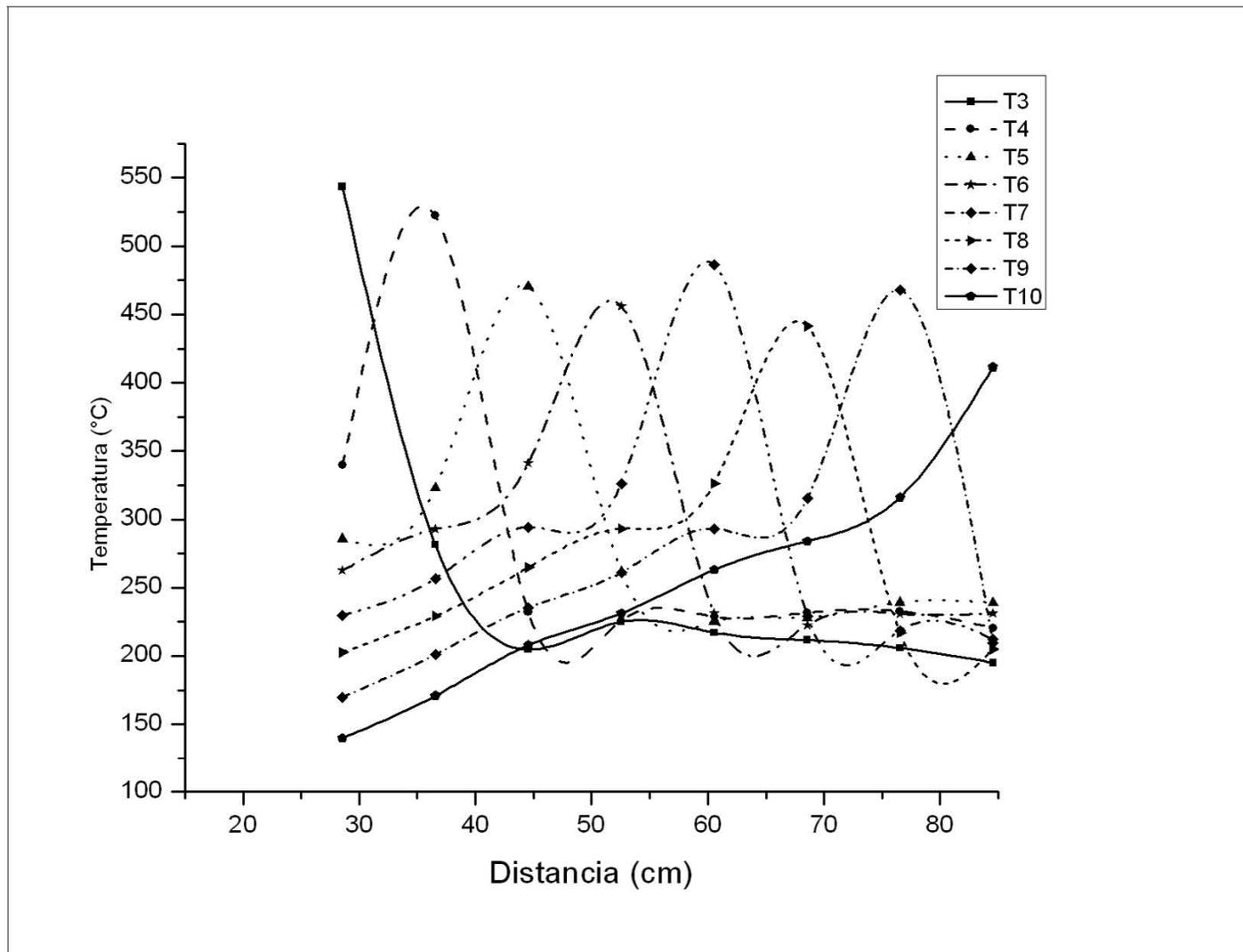


Figura 2.5: Perfiles de temperatura en función de la posición. Muestra B.

En ambos experimentos, se observa que los máximos de cada perfil de temperatura, no siguen un orden descendente como se esperaría, una explicación de este comportamiento, se deba prosiblemente a la heterogeneidad en la porosidad y en la permeabilidad del medio, principalmente. Las curvas de temperatura, muestran que la creación, mantenimiento y propagación del frente fueron apropiados y evolucionaron adecuadamente, siendo notoria la zona de combustión, según lo descrito teóricamente por Martin [40, 57] y lo observado experimentalmente por Mamora [39].

---

## Capítulo 3

### MODELO DETERMINISTA

---

Este capítulo contiene los resultados parciales de un modelo analítico determinista que describe la propagación de una onda de calor a través de un medio poroso. Si, el lector esta interesado en obtener información más completa y detallada, deberá consultar [4]. En algunos casos se cambió la notación original de los autores.

#### 3.1. Formulación

Éste modelo fué propuesto por I. Yucel Akkutlu y Yanis C. Yortsos [4]. El modelo es unidimensional, supone que el medio poroso y el sólido están en equilibrio térmico, la transferencia de calor es por radiación; los términos fuente de energía debidos a incrementos de presión y el trabajo de fuerzas sobre la superficie son despreciables. Además considera que, la fase gaseosa se comporta como un gas ideal, es decir ocupa un volumen suficientemente grande, las propiedades termodinámicas de transporte, tales como la conductividad, difusividad, capacidad calorífica del sólido, calor de reacción, etc, son homogéneas y constantes. Este modelo considera transferencia de calor hacia los alrededores por convección y conducción, reacción química entre agua y aceite, cambio de fase del agua y la hidrodinámica del flujo de tres fases agua, gas y aceite. La fase gaseosa, sólo considera oxígeno, vapor de agua y vapor de aceite como componentes principales. La fase del agua y aceite se consideran monoccomponentes. Supone que el oxígeno contenido en el gas reacciona

con el aceite y que se transfiere masa del agua al gas por evaporación o condensación y que no se presenta cambio de fase del hidrocarburo, difusión interfacial, capilaridad y segregación gravitacional. Bajo estas suposiciones, se deducen las correspondientes ecuaciones de conservación para la energía total, la masa de oxígeno, la masa total del gas y la masa del combustible.

Antes de escribir las ecuaciones de conservación, se lleva a cabo un análisis cualitativo, en un sistema de escalas grandes, de las características de los perfiles de temperatura esperados en la combustión in situ. En este caso se considera que la velocidad de inyección del gas oxidante y la ignición del combustible ocurren en el mismo punto, por lo que la combustión es hacia adelante.

Considérese un balance de energía en una dirección, con calor de conducción despreciable comparado con el calor por convección, donde se asume que el calor de reacción es una función bien localizada de tal forma que puede ser representada por una función delta de Dirac. Para una velocidad constante de Darcy,  $\tilde{v}$ , se tiene

$$(1 - \phi)c_s\rho_s \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + c_g\rho_g\tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \dot{Q}\delta(\tilde{x} - \tilde{x}_f(\tilde{t})) - \frac{\tilde{h}}{H}(\tilde{T} - \tilde{T}_0), \quad (3.1)$$

donde el lado derecho involucra el calor de combustión y un término de pérdidas de calor por modo convectivo. En esta ecuación,  $\phi$  representa la porosidad del medio,  $c\rho$  es la capacidad volumétrica de calor para la matriz sólida y para la fase gaseosa denotadas por los subíndices  $s$ ,  $g$  respectivamente,  $\tilde{T}_0$  es una temperatura constante en  $\tilde{x} = 0$ ,  $\dot{Q}$  denota la velocidad de generación de calor,  $H$  es el grosor del yacimiento y  $\tilde{h}$  es un coeficiente global de transferencia de calor. En la ecuación (3.1), el coeficiente del término transitorio incluye solamente la capacidad volumétrica de calor de la matriz sólida, la cual es mayor que la del gas. La ecuación (3.1) es hiperbólica con un término fuente singular en el frente de combustión en  $\tilde{x} = \tilde{x}_f(\tilde{t})$ .

Para el caso adiabático, fuera del frente, el término fuente es nulo y la solución se obtiene con el método de curvas características, las cuales son líneas rectas con una pendiente constante,

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{c_g \rho_g \tilde{v}}{(1 - \phi) c_s \rho_s} \equiv U. \quad (3.2)$$

En este caso, la temperatura es constante a lo largo de la curva característica. En general, ahí habrían dos velocidades características, una corriente hacia arriba del frente (denotada por subíndice III) y una corriente hacia abajo (denotada por subíndice I), así el consumo y/o producción de gases afectará el flujo de masa. Se asume que el frente de combustión se mueve a una velocidad  $V_F$ . Si las condiciones son tales que,

$$V_F > U_I \text{ y } V_F > U_{III}, \quad (3.3)$$

las curvas características a partir de las condiciones iniciales (eje  $\tilde{x}$ ) intersectarán la trayectoria del frente (veáse Fig.3.1), mientras que las de la frontera (eje  $\tilde{t}$ ) no lo harán, produciendo una región simple de onda expansiva (región II en la Fig.3.1). En este caso, el plano  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  consiste de tres regiones, una que corresponde a la inicial (región I, de temperatura  $\tilde{T}_0$ ), otra para la onda simple (región II, de un frente de temperatura que puede ser determinado) y la tercera que corresponde a la inyección (región III, de temperatura  $\tilde{T}_0$ ). Si se integra (3.1) a través del frente de combustión, se obtiene

$$\tilde{T}_f - \tilde{T}_0 = \frac{\dot{Q}}{[(1 - \phi) c_s \rho_s] (V_F - U_I)}. \quad (3.4)$$

Bajo las condiciones (3.3), la región de onda simple II, también se extendió por las pendientes de las curvas características  $U_{III}$ , excepto que éstas no emanan del frente de combustión (como se ve en la Fig.3.1), por lo tanto, llevan temperatura  $\tilde{T}_f$ . De esta manera, los perfiles de temperatura para cualquier tiempo consisten de dos regiones de campo lejano con temperatura  $\tilde{T}_0$  y una región de temperatura

intermedia  $\tilde{T}_f$  expandiéndose. Si se toma en cuenta la conducción, esto suavizará las discontinuidades en los frentes. Las condiciones (3.3) establecen una estructura de reacción dominante. Si las desigualdades se invierten, la situación también se invierte, el frente se mueve más lentamente y esto es la temperatura hacia abajo, la cual aumenta a  $\tilde{T}_f$ . En la región II, el frente de combustión no sigue una trayectoria, sino que la onda simplemente se expande adelante de él. Ésta es la estructura de reacción- ruta.

En el caso no adiabático, las pérdidas de calor a los alrededores no pueden despreciarse. Es sencillo resolver para los perfiles de temperatura, cuando las pérdidas de calor se expresan por (3.1). La solución es,

$$\tilde{T} = \tilde{T}_0 + (\tilde{T}_f - \tilde{T}_0) \exp \left[ \frac{\tilde{h}(\tilde{x} - V_F \tilde{t})}{H(1 - \phi)c_s \rho_s (V_F - U_I)} \right], U_I \tilde{t} < \tilde{x} < U_F \tilde{t}. \quad (3.5)$$

La temperatura en la región II no es constante para tiempos largos, pero decrece exponencialmente corriente arriba. Igualmente para el caso de pérdidas de calor por modo conductivo. En cualesquiera de estos casos, la validez de las condiciones (3.3) se probará después de que se haya obtenido la solución del problema.

Después de este análisis cualitativo para entender las características del problema en escalas grandes, se hace un análisis cuantitativo. En una situación como la de la Fig.3.2, las correspondientes ecuaciones de conservación adimensionales, están dadas por

$$(1 - \phi)c_s \rho_s \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + c_g \rho_g \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{Q} \rho_f^o W - \tilde{Q}_h, \quad (3.6)$$

en donde la variable dependiente es la temperatura  $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t})$ . La ecuación para la masa de oxígeno es,

$$\phi \frac{\partial(\tilde{Y} \rho_g)}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{Y} \rho_g \tilde{v})}{\partial \tilde{x}} = D_M \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \rho_g \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{x}} \right) - \tilde{\mu} \rho_f^o W, \quad (3.7)$$

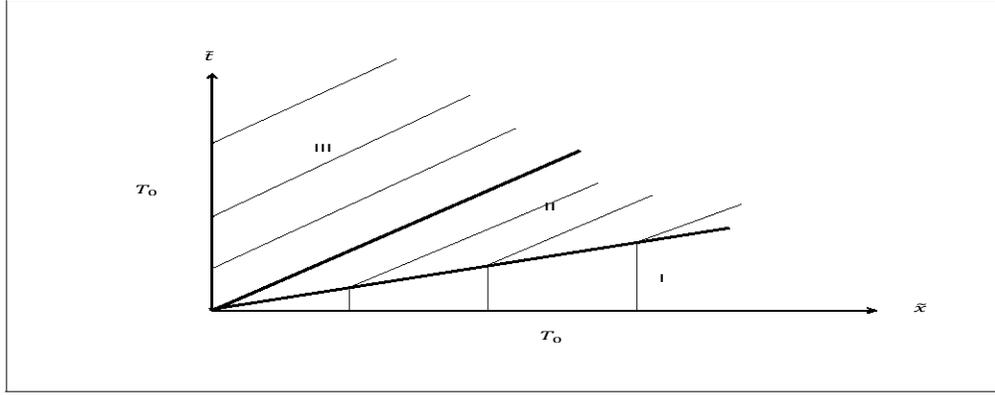


Figura 3.1: Diagrama de curvas características para la combustión en un medio poroso.

en donde la variable dependiente es la fracción de masa del oxígeno  $\tilde{Y}(\tilde{x}, \tilde{t})$ . Para la masa total del gas se tiene

$$\phi \frac{\partial \rho_g}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\rho_g \tilde{v})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{\mu}_g \rho_f^o W, \quad (3.8)$$

aquí la variable dependiente es la densidad promedio del gas  $\rho_g(\tilde{T}, \tilde{p})$ . Por último, para la masa de combustible

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{t}} = W. \quad (3.9)$$

En las ecuaciones (3.6)-(3.9),  $\lambda_1$  es la conductividad térmica,  $D_M$  es un coeficiente de difusión efectivo en la fase gaseosa. En este contexto se definen los coeficientes estequiométricos de masa ponderada para el oxígeno, productos netos y productos gaseosos,  $\tilde{\mu} = \tilde{\gamma} M_o / M_f$ ,  $\tilde{\mu}_g = \tilde{\mu}_{gp} - \tilde{\mu}$  y  $\tilde{\mu}_{gp} = \tilde{\gamma}_{gp} M_{gp} / M_f$ , respectivamente. De esta manera,  $\tilde{\mu}_g > 0$  ó  $\tilde{\mu}_g < 0$  implica producción o consumo de masa gaseosa. Como se dijo,  $\tilde{v}$  es la velocidad del fluido a través del medio poroso, que obedece la ley de Darcy

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \hat{x}} = - \frac{\eta_g \tilde{v}}{K(\eta)}, \quad (3.10)$$

donde  $K$  es la permeabilidad absoluta y  $\eta_g$  la viscosidad del gas. Los dos últimos términos de la ecuación (3.6), juegan el papel de fuentes de calor. El primero, involucra el calor debido a los procesos de reacciones químicas, en este  $\tilde{Q}$  representa el calor de combustión,  $\rho_f^0$  la concentración inicial del combustible y  $W$  la velocidad de reacción definida por la ley de acción de masas,

$$W = k(\tilde{T})\tilde{a}_s^m \left( \frac{\tilde{Y}\tilde{p}}{R\tilde{T}} \right)^n \psi(\eta) \quad (3.11)$$

donde los exponentes  $m$  y  $n$  representan el orden de la reacción química y pueden ser  $m = n = 1$ ,  $\tilde{Y}$  es la fracción de masa del oxígeno,  $R$  es la constante universal de los gases,  $\tilde{a}_s$  es una superficie de área específica por unidad de volumen,  $\tilde{p}$  es la presión que obedece la ley del gas ideal que cumple con la ecuación de estado  $\tilde{p}M_g = \rho_g R\tilde{T}$ . Se define la función  $k(T) = k_0 e^{-E/RT}$ , aquí  $E$  es la energía de activación del aceite y  $k_0$  un factor constante.  $\psi(\eta)$  es una función que depende del grado de conversión del combustible definida por

$$\eta(\tilde{x}, \tilde{t}) = 1 - \frac{\rho_f(\tilde{x}, \tilde{t})}{\rho_f^0}, \quad (3.12)$$

donde  $\rho_f$  es la densidad del combustible por volumen total. El estado inicial se da cuando  $\eta = 0$  y  $\eta = 1$  corresponde a un consumo completo. El segundo término  $\dot{Q}_h$  en la ecuación (3.6), representa pérdidas de calor con dos posibilidades 1) modo convectivo y 2) modo conductivo. Una descripción rigurosa de pérdidas de calor hacia los alrededores requiere de un modelado multi-dimensional, donde las pérdidas aparecen como condiciones de frontera en el yacimiento (ver Fig.3.2a). En la superficie, los alrededores pueden considerarse infinitamente grandes comparados con el grosor  $H$  del yacimiento. Si se considera una zona térmica delgada en donde se encuentra el frente de combustión y donde se llevan a cabo los principales cambios físicos y químicos, de esta manera, el yacimiento puede ser aproximado en una dimensión, con la velocidad de pérdidas de calor representada en el balance de energía como un

término volumétrico. Esta aproximación es válida cuando el grosor es menor que la longitud de la difusión térmica y el número de Nusselt es relativamente pequeño. Estas restricciones son generalmente satisfechas cuando el coeficiente de transferencia de calor  $H$ , y las velocidades del frente (del orden de metros por día), son lo suficientemente pequeños. Las pérdidas de calor por convección son más aplicables en procesos a escala de laboratorio (Fig.3.2b) y se pueden expresar como,

$$\dot{Q}_h = \frac{\tilde{h}}{H} (\tilde{T} - \tilde{T}_0). \quad (3.13)$$

El coeficiente  $\tilde{h}$  se asume relativamente pequeño, así que la aproximación [50] se puede aplicar directamente. Las pérdidas de calor por conducción involucran la presencia de calor en estratos seminfinitos que conforman el medio poroso (Fig.3.2c), por esta razón este modo es apropiado para modelar procesos subterráneos y no requiere el uso de un coeficiente de transferencia de calor desconocido. Para aplicar la aproximación [50], las pérdidas de calor deben ser relativamente débiles. La expresión en este caso viene dada por,

$$\dot{Q}_h = \frac{2\sqrt{\lambda_h c_h \rho_h}}{H\sqrt{\pi}} \int_0^{\tilde{t}} \frac{\partial \tilde{T} d\tau}{\partial \tau \sqrt{\tilde{t} - \tau}}. \quad (3.14)$$

Tal relación resulta de resolver la ecuación de calor unidimensional en un dominio seminfinito  $0 < \tilde{t}$ ,  $0 \leq \tilde{z} < \infty$  y una dependencia de la temperatura en la frontera  $\tilde{T}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \tilde{T}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{z} = 0)$ . El subíndice  $h$  denota los alrededores del sistema.

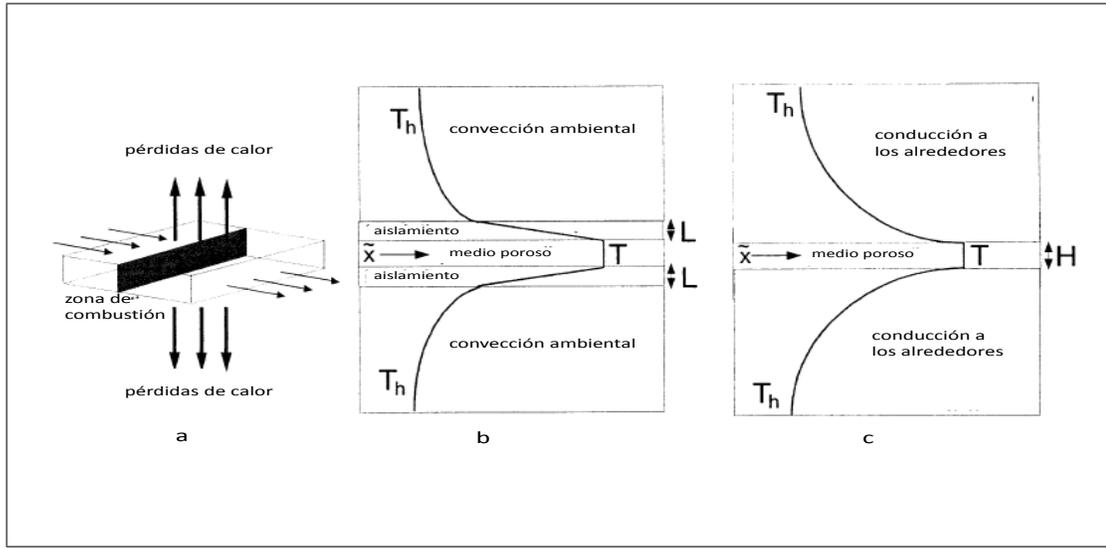


Figura 3.2: Representación de las pérdidas de calor: a) geometría del yacimiento, b) modo convectivo y c) modo conductivo.

### 3.2. Escalamiento y adimensionalización

Dentro de la zona de reacción, el equilibrio de difusión en la reacción y la temperatura son espacialmente uniformes. La zona de reacción se integra a la capa de transferencia de calor, como se muestra en la Fig.3.3. Dentro de la zona de combustión, hay equilibrio de la convección, conducción y pérdidas de calor, pero la reacción es despreciable.

Para llevar la ecuación (3.6) a la estructura interna de la zona de combustión, se introducen las variables adimensionales convencionales espaciales y temporales,  $l^* = \alpha_s/v_i$ ,  $t^* = l^*/v_i = \alpha_s/v_i^2$ ,  $\hat{t} = \tilde{t}/t^*$  y  $\hat{x} = \tilde{x}/l^*$ , donde  $v_i$  es la velocidad de inyección y  $\alpha_s = \lambda_1/(1 - \phi)c_s\rho_s$  la difusividad térmica efectiva. De igual manera se introduce una escala de temperaturas adimensional  $\theta = \tilde{T}/\tilde{T}_0$ , esto significa que en esta escala, la temperatura del yacimiento es  $\theta = 1$ . También se definen la velocidad

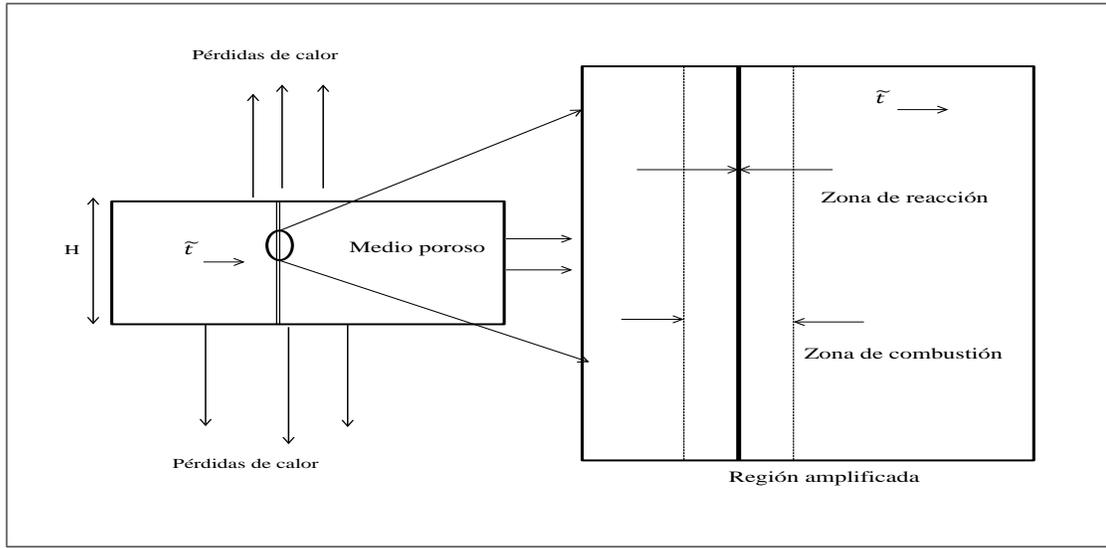


Figura 3.3: Geometría de un medio poroso por medio del cual se representa de manera esquemática un yacimiento.

adimensional  $v = \tilde{v}/v_i$  y la densidad adimensional del gas  $\rho = \rho_g/\rho_{gi}$ , donde  $\rho_{gi}$  es la densidad del gas inyectado. De esta manera, la ecuación (3.6) se escribe como

$$\frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}} + a \rho v \frac{\partial \theta}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \hat{x}^2} + q_1 \Phi - \dot{Q}_{hD}, \quad (3.15)$$

donde,

$$a = \frac{c_g \rho_{gi}}{(1 - \phi) c_s \rho_s}, \quad q_1 = \frac{\tilde{Q} \rho_f^o}{(1 - \phi) c_s \rho_s \tilde{T}_0} \quad \text{y} \quad \dot{Q}_{hD} = \frac{\dot{Q}_h}{(1 - \phi) c_s \rho_s \tilde{T}_0} \quad \text{y} \quad \Phi = W t^*.$$

Sea  $\xi(x) = \hat{x} - f(\hat{t})$  y  $t = \hat{t}$  un sistema de coordenadas que se mueve con el frente de combustión, en donde la deficiencia de combustible puede ser definida en la posición  $\eta = 1/2$ . Este cambio de coordenadas implica  $\theta(\hat{x}, \hat{t}) = \theta(\xi, t)$ . Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial \xi}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.16)$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial \theta}{\partial t} - f_t \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (3.17)$$

donde se tomó en cuenta que  $\frac{\partial \theta}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$  y donde se definió  $f_t = \frac{\partial f(t)}{\partial t}$ . Así, la ecuación (3.15) se convierte en,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (a\rho v - f_t) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + q_1 \Phi - \dot{Q}_{hD}, \quad (3.18)$$

El producto  $\rho v$  se refiere al flujo adimensional de masa de gas adelante del frente de combustión que incluye de manera implícita la reacción generada por la masa total del gas. Las condiciones de frontera, dependen del grado de combustión. Considérese primero el caso de pérdidas de calor. La temperatura para distancias lejanas detrás del frente de combustión se reduce en última instancia a la temperatura inicial (la que también es la temperatura de inyección), y las condiciones de frontera se pueden escribir como

$$Y = 1, \theta = 1, \eta = 1 \text{ cuando } \hat{x} \rightarrow -\infty \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \hat{x}} = 0, \theta = 1, \eta = 0 \text{ cuando } \hat{x} \rightarrow \infty, \quad (3.20)$$

para el caso adiabático. Ver el diagrama en la Fig.3.1. En esta figura se aprecia que la región II es precedida por la onda en la región III, donde la temperatura, en ausencia de conducción, es igual a la de inyección. La velocidad de separación entre las regiones II y III es más lenta que la velocidad del frente. Esto se debe al requerimiento de calor inicial (inyección) para calentar la roca en el frente de temperatura. Debido a la separación cada vez mayor entre los dos frentes, las condiciones pertinentes para estados estacionarios en un marco de referencia moviéndose con el frente de combustión son  $\partial Y / \partial \hat{x} = 0$ . Esto implica que  $\theta \rightarrow \theta_f$  cuando  $\hat{x} \rightarrow -\infty$ . Para el caso

no adiabático  $\theta \rightarrow 1$  cuando  $\hat{x} \rightarrow -\infty$  y además  $Y \rightarrow Y_b$  cuando  $\hat{x} \rightarrow \infty$ , donde  $\theta_f$  y  $Y_b$  deben determinarse. Con la formulación completa, ahora se hace un análisis de la zona de reacción y la zona de combustión. Aquí, es importante mencionar que el procedimiento hasta ahora aplicado a la ecuación (3.6), se aplica también a las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9) para obtener las correspondientes ecuaciones adimensionales, sin embargo esto no se presenta en este trabajo, debido a que la ecuación de interés es la (3.6). Con la formulación completa, ahora se hace un análisis de la zona de reacción y la zona de combustión.

### 3.3. Zona de reacción

Como la velocidad de reacción es fuertemente dependiente de la temperatura, las reacciones de la combustión se confinan en una zona angosta de reacción en el frente de combustión, donde la presión y concentraciones son aproximadamente constantes. Esta aproximación es resultado de la condición  $Z \gg \frac{E\tilde{T}_0}{R\tilde{T}_f^2} \gg 1$ . Para proceder, se extiende el movimiento en la coordenada longitudinal,  $X = Z\xi$ , y se desarrollan en serie las variables dependientes en términos de  $Z^{-1}$ , como sigue

$$\theta \sim \theta^0(t) + Z^{-1}\theta^1(X, t) + \dots, Y \sim Y^0(t) + Z^{-1}Y^1(X, t) + \dots \quad (3.21)$$

$$p \sim p^0(t) + Z^{-1}p^1(X, t) + \dots, \rho \sim \rho^0(t) + Z^{-1}\rho^1(X, t) + \dots \quad (3.22)$$

$$\eta \sim \eta^0(X, t) + \dots, v \sim v^0(X, t) + \dots, f \sim f^0(t) + \dots \quad (3.23)$$

A partir de las aproximaciones anteriores, la ecuación (3.18) se reduce a,

$$\frac{\partial^2 \theta^1}{\partial X^2} = q_1 f_t^0 \frac{\partial \eta^0}{\partial X} \quad (3.24)$$

Esta aproximación, implica que a primer orden, la presión se mantiene constante dentro de la zona de reacción y que la conducción se presenta solamente en la dirección  $X$ , además los términos de pérdidas de calor  $Z^{-1}\dot{Q}_{hD}$ , no contribuyen. La integral

$$\int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial^2 \theta^1}{\partial X^2} dX = q_1 f_t^0 \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial \eta^0}{\partial X} dX, \quad (3.25)$$

junto con las condiciones de frontera  $\partial \theta^1 / \partial X = 0$  y  $\eta^0(\xi, t) = 1$  cuando  $X \rightarrow -\infty$  llevan a,

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial X} = -q_1 f_t^0 (1 - \eta^0). \quad (3.26)$$

De manera análoga, de la ecuación (3.7) se deduce

$$L_e Y^0 \rho^0 \frac{\partial v^0}{\partial X} - \rho^0 \frac{\partial^2 Y^1}{\partial X^2} = \mu L_e f_t^0 \frac{\partial \eta^0}{\partial X}. \quad (3.27)$$

Donde  $L_e = \alpha_s / D_M$ . De esta manera, se obtiene que para el balance de masa del oxígeno y a primer orden de aproximación los términos que intervienen son el convectivo, el difusivo y el de reacción, aquí se considera que  $\rho_0$  es constante en la zona de reacción. De la integral de (3.27), se llega a

$$L_e Y^0 \rho^0 v^0 - \rho^0 \frac{\partial Y^1}{\partial X} = \mu L_e f_t^0 \eta^0 + Cte. \quad (3.28)$$

En este mismo contexto, la ecuación (3.8) lleva después de integrar a,

$$\rho^0 v^0 = -\mu_g f_t^0 \eta^0 + C_1. \quad (3.29)$$

Del análisis anterior, se determinan los flujos de calor, de masa de gas y de masa de oxígeno a través del frente en términos del grado de conversión del combustible, esto es

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{-\infty}^{\infty} = \left. \frac{\partial \theta^1}{\partial X} \right|_{-\infty}^{\infty} = -q_1 f_t^0, \quad (3.30)$$

$$\rho^0 v^0 \Big|_{-\infty}^{\infty} = \mu_g f_t^0. \quad (3.31)$$

y

$$\rho^0 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\partial Y^1}{\partial X} \Big|_{-\infty}^{\infty} = (\mu + Y^0 \mu_g) L_e f_t^0. \quad (3.32)$$

A primer orden de aproximación la ecuación para la masa del combustible es

$$f_t^0 \frac{\partial \eta^0}{\partial X} = -a_s \frac{Y^0(1 + \Pi p^0)\psi(\eta^0)e^{\theta^1}}{\theta^0}. \quad (3.33)$$

Ahora, se multiplican las ecuaciones (3.26) y (3.33)

$$-f_t^0 q_1 (1 - \eta^0) \frac{\partial \eta^0}{\partial X} = -\frac{a_s Y^0(1 + \Pi p^0)\psi(\eta^0)e^{\theta^1}}{\theta^0} \frac{\partial \theta^1}{\partial X}, \quad (3.34)$$

entonces, la integral sobre la zona de reacción es

$$q_1 f_t^0 \int_0^1 \left( \frac{1 - \eta^0}{\psi(\eta^0)} \right) \frac{\partial \eta^0}{\partial X} = a_s \left( \frac{Y^0(1 + \Pi p^0)}{\theta^0} \right) \int_0^1 e^{\theta^1} \frac{\partial \theta^1}{\partial X}, \quad (3.35)$$

de donde se deduce,

$$f_t^0 = \sqrt{\frac{a_s Y^0(1 + \Pi p^0)e^{\theta^1}}{q_1 \theta^0 I_\eta}}, \text{ con } I_\eta = \int_0^1 \left( \frac{1 - \eta^0}{\psi(\eta^0)} \right) d\eta^0. \quad (3.36)$$

Esta expresión relaciona la velocidad del frente de combustión con la fracción molar  $Y^0$  y la temperatura  $\theta^0$  en la zona de reacción. Véase la Fig.3.3. En consecuencia se pueden usar para regiones suficientemente lejanas del frente de combustión (campos lejanos), las condiciones de frontera  $\frac{\partial \theta^1}{\partial X} = 0$ , cuando  $X \rightarrow -\infty$ . En lo que sigue por simplicidad se toma  $I_\eta = 1$ .

### 3.4. Zona de combustión

En un marco de referencia en movimiento que sigue el frente de combustión, la ecuación total del gas, oxígeno y balance de masa del combustible son respectiva-

mente,

$$\frac{\partial(\rho B)}{\partial \xi} = 0, \text{ donde, } B = v - \phi f_t^0, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial(Y\rho B)}{\partial \xi} - Y \frac{\partial(\rho B)}{\partial \xi} = \frac{1}{L_e} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \rho \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right). \quad (3.38)$$

y

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0. \quad (3.39)$$

La ecuación (3.37), muestra que  $\rho B$  es una constante. En  $\xi > 0$ , la solución para  $Y$  es también una constante  $Y_b$ , porque  $B > 0$ . En  $\xi < 0$ , se integra la ecuación (3.38) con las condiciones de frontera  $Y = 1$  cuando  $\xi \rightarrow \infty$ . De las condiciones de salto a través del frente de reacción, se encuentra

$$Y = \begin{cases} 1 - (1 - Y_p) \exp \left( L_e \int_0^\xi B d\xi \right) & , \xi < 0 \\ Y_b & , \xi > 0 \end{cases}, \quad (3.40)$$

donde

$$Y_b = \frac{1 - (\phi + \mu)V_D}{1 + (\mu_g - \phi)V_D} \approx \frac{1 - \mu V_D}{1 + \mu_g V_D}, \quad (3.41)$$

aquí  $V_D \approx f_t^0$ . Nótese que para  $Y_b > 0$ , debe aplicarse la condición  $1 > \mu V_D$ , es decir, el flujo total de masa del gas debe ser lo suficientemente grande. Esta ecuación representa la fracción de masa del oxígeno sin reaccionar en el frente de combustión la cual depende de la velocidad adimensional del frente y de varios coeficientes estequiométricos. La ecuación (3.39) implica

$$\eta = \begin{cases} 1 & , \xi < 0 \\ 0 & , \xi > 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

siempre que la combustión del combustible sea completa. Si se usa la condición  $\Pi \ll 1$  y se inserta la ecuación (3.41) en la ecuación (3.36), se deduce

$$V_D^2 \approx \mathcal{A} \theta_f \exp \left( -\frac{\gamma}{\theta_f} \right) \left( \frac{1 - \mu V_D}{1 + \mu_g V_D} \right), \quad (3.43)$$

donde se definen las variables adimensionales

$$\mathcal{A} = \frac{\tilde{a}_s \alpha_s k_o Y_i \tilde{p}_i}{q E v_i^2} \text{ y } \gamma = \frac{E}{R \tilde{T}_0}. \quad (3.44)$$

La ecuación (3.43) es una aproximación de primer orden del frente de combustión  $V_D$  con la temperatura del frente  $\theta_f$ . En esta ecuación,  $\mu = \tilde{\mu} \rho_f^0 / Y_i \rho_{gi}$  y  $\mu_g = \tilde{\mu}_g \rho_f^0 / \rho_{gi}$  son coeficientes adimensionales estequiométricos para el oxidante y el gas neto producido debido a la reacción, respectivamente. Aquí  $\tilde{\mu}$  es la masa del oxígeno por unidad de masa de combustible y  $\tilde{\mu}_g$  es la masa de productos gaseosos por unidad de masa de combustible. La relación (3.43) es muy importante, porque involucra a través del parámetro adimensional  $\mathcal{A}$  una combinación de propiedades físico químicas del medio, que incluyen presión, cinética de reacción, fracción de masa del oxígeno inyectado y su velocidad de inyección.

### 3.5. Caso adiabático

En el caso estacionario y adiabático, el término de pérdidas de calor no contribuye, si además se supone un consumo completo de la masa del combustible, entonces  $\psi(\eta) = \psi(1) = 0$  y el término  $\Phi$  se anula, por lo tanto la ecuación de la energía (3.18), se reduce a

$$A \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = 0, \text{ donde } A = a \rho v - V_D < 0, \quad (3.45)$$

como  $A < 0$ , la única solución posible para  $\xi < 0$  es un frente de temperatura constante. En este caso, se tiene un perfil plano de temperatura en la zona de reacción, consistente con la suposición  $\frac{\partial \theta^1}{\partial X} = 0$ , cuando  $X \rightarrow -\infty$  hecha para la zona de reacción. Para encontrar la solución en el caso  $\xi > 0$ , se integra (3.45) y se hace uso de las condiciones de salto para obtener,

$$\theta = \begin{cases} \theta_f(t) & , \xi < 0 \\ 1 - \frac{q_1 V_D}{A} \exp(A\xi) & , \xi > 0 \end{cases} . \quad (3.46)$$

De la continuidad de la temperatura en  $\xi = 0$  se deduce una expresión para la temperatura adimensional del frente de combustión,

$$\theta_f = 1 - \frac{q_1 V_D}{a(\rho v)^+ - V_D} . \quad (3.47)$$

En esta relación, el signo + simplemente indica la posición delante del frente de combustión. Cuando los efectos de la entrada de masa de gas y la producción neta de gas en el frente son despreciables, a saber cuando  $A \approx -V_D$ , el frente de temperatura depende solamente del combustible caliente disponible, o sea del parámetro  $q_1$ .

### 3.6. El caso no adiabático

Si se supone que las pérdidas de calor ocurren por convectividad, además de suponer que el proceso es estacionario y que el consumo de la masa del combustible es completo, es decir  $\psi(\eta) = \psi(1) = 0$ , entonces el término  $\Phi$  se anula y en consecuencia la ecuación de la energía (3.18) se simplifica a

$$A \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = -\dot{Q}_{hD}, \quad (3.48)$$

es decir,

$$A \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = -\frac{\dot{Q}_h}{(1-\phi)c_s \rho_s} \frac{t^*}{\tilde{T}_0} \quad (3.49)$$

ó bien,

$$A \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = - \left\{ \frac{\tilde{h} t^*}{(1-\phi)c_s \rho_s H} \theta - \frac{\tilde{h} t^*}{(1-\phi)c_s \rho_s H} \right\}, \quad (3.50)$$

donde

$$h = \frac{t^*}{(1-\phi)c_s \rho_s} \frac{\tilde{h}}{H}, \quad (3.51)$$

es un coeficiente adimensional de transferencia de calor y  $\tilde{h}/H$  representa un coeficiente volumétrico de transferencia de calor. En forma compacta se tiene la ecuación

$$A \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = -h(\theta - 1), \quad (3.52)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\theta(\infty) = \theta(-\infty) = 1 \text{ y } \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{0^-}^{0^+} = -q_1 f_t^0. \quad (3.53)$$

**Observación:** Los autores Akkutlu y Yortsos [4], utilizan indistintamente  $\pm\infty$  para denotar las coordenadas de la escala en la zona de reacción y en la escala de la zona de combustión. Véase la Fig.3.3. Para evitar confusión y distinguir las escalas, se opta por denotar con  $0^+$  y  $0^-$  las coordenadas de la zona exterior. Entonces, las correspondientes soluciones para la parte derecha e izquierda respecto del frente de temperatura, son

$$\theta = \begin{cases} 1 + (\theta_f - 1) \exp[\frac{1}{2}(A^+ - \sqrt{(A^+)^2 + 4h})\xi] & , \xi > 0 \\ 1 + (\theta_f - 1) \exp[\frac{1}{2}(A^- + \sqrt{(A^-)^2 + 4h})\xi] & , \xi < 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

De la condición de salto en el frente de temperatura se encuentra la expresión para la temperatura adimensional del frente,

$$\theta_f = 1 + \frac{q_1}{\sqrt{1 + \frac{4h}{V_D^2}}}, \quad (3.55)$$

donde se asume que  $A^- \approx A^+ \approx -V_D$ . Cabe recordar que para encontrar  $V_D$  se debe resolver la ecuación trascendente (3.43), la cual se basó en la condición  $\partial\theta^1/\partial X = 0$ , cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Estas soluciones son consistentes si,  $\frac{1}{2}(A^- + \sqrt{(A^-)^2 + 4h}) = O(1/Z)$ , es decir, se requiere que el coeficiente de pérdidas de calor  $h$  sea lo suficientemente pequeño,  $\frac{h}{V_D} \approx O(1/Z)$ . Los correspondientes perfiles de temperatura para este caso se muestran en la Fig.(3.4), para diferentes

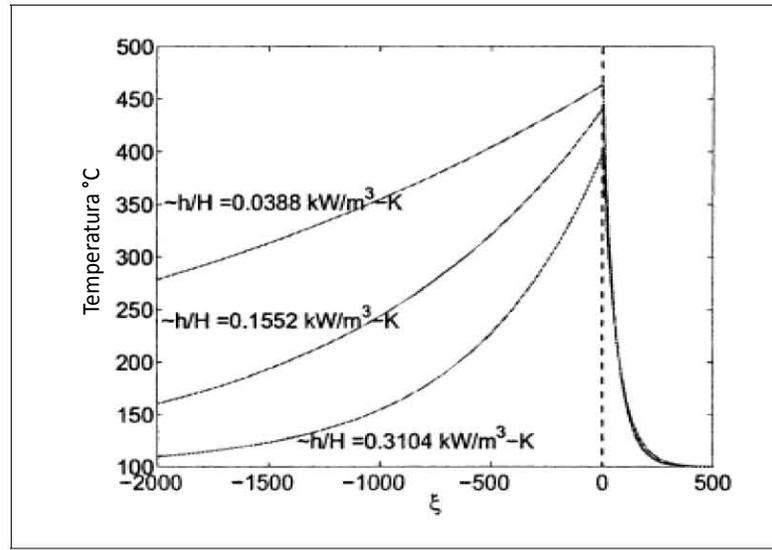


Figura 3.4: Perfiles de temperatura para frentes de combustión no adiabáticos con pérdidas de calor por convectividad, para una velocidad de inyección  $v_i = 100 \text{ m/dia}$ .

valores del coeficiente volumétrico de transferencia de calor.

A partir de la ecuación adimensional (3.43), se estudia la temperatura del frente como función de la velocidad de inyección  $v_i$  cuando se varía el parámetro  $\mathcal{A}$  del cual depende. Tal estudio es importante porque proporciona información acerca de la estabilidad y extinción del frente de combustión. Para el caso convectivo, aparecen múltiples soluciones siempre que la velocidad de inyección  $v_i$  exceda cierto umbral  $E_c$ . Como se muestra en la Fig.3.5, la solución consiste de una rama de baja temperatura en la vecindad de la temperatura inicial y una rama de alta temperatura que es apropiada para la combustión y una rama de temperatura intermedia. Arriba del umbral, existen tres soluciones para cualquier velocidad de inyección dada. La rama superior e inferior son estables, mientras que la rama intermedia es inestable. La Fig.3.5a muestra que si la solución se encuentra sobre la rama de alta temperatura, donde ocurre combustión rigurosa y donde subsecuentemente la velocidad de

inyección decrece, entonces, debido a las cada vez más dominantes pérdidas de calor, una pendiente infinitamente larga es alcanzada en un umbral particular. Como la rama intermedia es inestable, una transición rápida a la rama baja ocurre, lo cual corresponde a la extinción, es decir,  $E_c$  es el punto de extinción. La rama superior es la solución que corresponde a un frente de combustión apropiado. En la Fig.3.5a, los umbrales de extinción son  $I_{c1} = (5.7, 144.8)$ ,  $E_{c1} = (4.6, 211.4)$ ,  $I_{c2} = (13.5, 141.0)$  y  $E_{c2} = (5.4, 211.9)$ . Los correspondientes umbrales para la Fig.3.5b son  $E_{c3} = (20.2, 286.2)$ ,  $E_{c4} = (90.4, 357.5)$  y  $E_{c5} = (322.5, 399.3)$ .

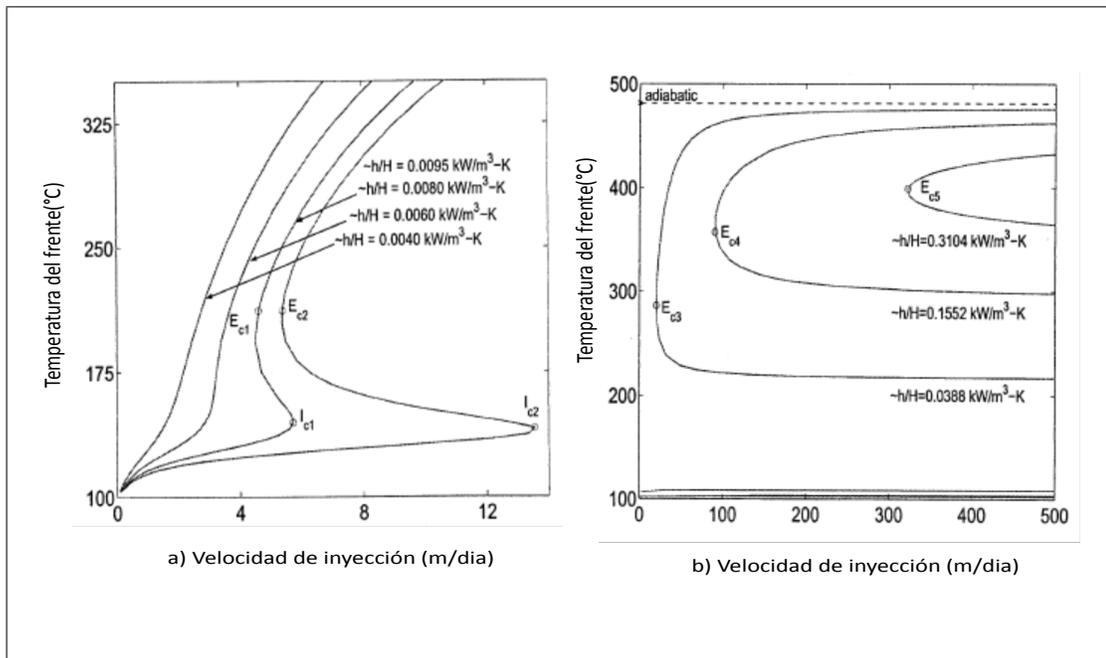


Figura 3.5: Frente de temperatura no adiabático como función de la velocidad de inyección para diferentes valores del coeficiente volumétrico de transferencia de calor  $\tilde{h}/H$ , a) para tasas bajas de pérdidas de calor, b) para tasas altas de pérdidas de calor.

### 3.7. Comentarios

En este capítulo, se describió de manera general un método para modelar la propagación de frentes de combustión en medios porosos, donde la región de reacción se consideró como un punto de discontinuidad que incluye flujos de calor y masa. Los frentes de reacción y combustión son zonas muy estrechas dentro de las cuales se libera calor y donde la temperatura y las concentraciones de material varían significativamente. Mediante una aproximación similar a la utilizada en [50], se deducen condiciones de salto apropiadas que relacionan el cambio en las variables a través del frente. Estas condiciones toman en cuenta la cinética de las reacciones entre el oxígeno y el combustible, los cambios en la morfología del espacio poroso y la transferencia de calor y masa en la zona de reacción. De esta manera, el problema se reduce a modelar la dinámica de un frente de combustión dividido en dos regiones en las cuales pueden ser considerados el transporte convectivo de momento (fluidos), calor y masa, no así las reacciones químicas. Las propiedades de estas dos regiones se acoplan mediante las condiciones de salto. Esta metodología debería permitir incorporar efectos de permeabilidad heterogénea en la descripción de este proceso, sin la complejidad de las reacciones químicas acopladas. Esta aproximación analítica, reduce el complejo problema de propagación de un frente a un sistema de dos ecuaciones algebraicas acopladas para el frente de temperatura y su velocidad de propagación. Los frentes de combustión se supusieron no adiabáticos con pérdidas de calor para un modo convectivo y para un modo conductivo. Las expresiones obtenidas en estos casos, son válidas para tasas de pérdidas de calor suficientemente pequeñas. También se consideró que el frente de combustión es plano con una propagación constante donde se tomaron valores constantes típicos usados en la combustión *in situ*.

Otros análisis que no se presentan aquí, pero que se reportan en [4] son por ejemplo, el estudio de la fracción de masa de oxígeno no quemado, la velocidad del frente y los efectos del coeficiente global de transferencia de calor  $\tilde{h}$  (para diferente grosor  $H$  del yacimiento), todos estos como funciones de la velocidad de inyección  $v_i$ . Estos efectos son estudiados tanto para el modo convectivo como el conductivo.

Una observación importante en relación a los modelos deterministas, es que la mayoría de sus parámetros físicos se suponen constantes y en muchos casos su orden de magnitud no se conoce con precisión. Para continuar con esta línea de investigación sobre la propagación de frentes de calor y en aras de contribuir hacia un mejor entendimiento sobre este fenómeno, en el capítulo 5 se hace una extensión estocástica al modelo determinista. En este formalismo, se considera que los parámetros son variables espacialmente aleatorias con propiedades estadísticas bien conocidas.

---

## Capítulo 4

### FORMALISMO ESTOCÁSTICO

---

En este capítulo se exponen los conceptos y definiciones fundamentales que son las bases de la teoría estocástica. El objetivo de éstos es su aplicación, por lo tanto su demostración rigurosa queda fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, para un tratamiento más completo se puede consultar por ejemplo en [54].

#### 4.1. Procesos estocásticos

Una vez que ha sido definida una variable estocástica  $X$ , una infinidad de otras variables estocásticas se pueden derivar de ella, es decir, todas las cantidades  $Y$  que se definen como funciones de  $X$  mediante algunos mapeos  $f$ . Estas cantidades  $Y$  pueden ser cualquier tipo de objetos matemáticos, en particular pueden ser funciones de una variable adicional  $t$ ,  $Y_X(t) = f(x, t)$ . Tal cantidad  $Y(t)$  se llama una *función aleatoria*, o puesto que en la mayoría de los casos  $t$  representa el tiempo, se llama un *proceso estocástico*. Así, un proceso estocástico es simplemente una función de dos variables, una de las cuales es el tiempo  $t$ , y la otra variable estocástica es  $X$  que se define como un número aleatorio que toma un conjunto de valores, llamados rango, conjunto de estados o espacio muestral. Para un posible valor  $x$  de  $X$ , se obtiene una función ordinaria de  $t$ ,  $Y_x(t) = f(x, t)$ , llamada *muestra funcional* o *realización* del proceso. En el lenguaje físico se refiere a un proceso estocástico como un *ensamble* o *conjunto representativo* de estas muestras funcionales. Es fácil formar promedios,

sobre las bases dadas de densidades de probabilidad  $P_x(x)$  de  $X$ . Por ejemplo,

$$\langle Y(t) \rangle = \int Y_x(t) P_x(x) dx. \quad (4.1)$$

Más generalmente, toma  $n$  valores  $t_1, t_2, \dots, t_n$  para la variable tiempo (no necesariamente todos diferentes) y forma el  $n$ -ésimo momento

$$\langle Y(t_1) Y(t_2) \cdots Y(t_n) \rangle = \int Y_x(t_1) Y_x(t_2) \cdots Y_x(t_n) P_x(x) dx. \quad (4.2)$$

De particular interés es la *función de autocorrelación*

$$\begin{aligned} \kappa(t_1, t_2) &\equiv \langle \langle Y(t_1) Y(t_2) \rangle \rangle = \langle \{Y(t_1) - \langle Y(t_1) \rangle\} \{Y(t_2) - \langle Y(t_2) \rangle\} \rangle \\ &= \langle Y(t_1) Y(t_2) \rangle - \langle Y(t_1) \rangle \langle Y(t_2) \rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para  $t_1 = t_2$  esto se reduce a la varianza dependiente del tiempo  $\langle \langle Y(t)^2 \rangle \rangle = \sigma^2(t)$ .

Un proceso estocástico se llama estacionario cuando los momentos no son afectados por un cambio en el tiempo, es decir, cuando

$$\langle Y(t_1 + \tau) Y(t_2 + \tau) \cdots Y(t_n + \tau) \rangle = \langle Y(t_1) Y(t_2) \cdots Y(t_n) \rangle \quad (4.4)$$

para toda  $n$ , para toda  $\tau$  y para todo  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . En particular,  $\langle Y \rangle$  es independiente del tiempo. Esto es muchas veces conveniente para restar esta constante de  $Y(t)$  y tratar los procesos con media cero  $\tilde{Y}(t) = Y(t) - \langle Y \rangle$ . La función de autocorrelación  $\kappa(t_1, t_2)$  de un proceso estacionario depende sólo de  $|t_1 - t_2|$  y no es afectada por esta sustracción. Con frecuencia existe una constante  $\tau_c$  tal que  $\kappa(t_1, t_2)$  es cero o despreciable para  $|t_1 - t_2| > \tau_c$ ; esta constante  $\tau_c$  se llama *tiempo de autocorrelación*.

Los procesos estocásticos de Markov son los más importantes en física y química. Un ejemplo típico en física es el movimiento Browniano. Los procesos estocásticos que son a la vez Markovianos y estacionarios, tienen un interés especial porque

describen fluctuaciones.

El ejemplo mejor conocido de un proceso estacionario de Markov es el proceso de *Ornstein-Uhlenbeck*. Este proceso fué construido originalmente para describir el comportamiento estocástico de la velocidad de una partícula Browniana. Éste tiene media cero y función de autocorrelación  $\kappa = e^{-\tau}$ , donde  $\tau = t_2 - t_1$ .

El teorema de Doob [27] establece que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck [53] es estacionario, Gaussiano y Markoviano. Un segundo teorema establece que si  $Y(t)$  es estacionario, Gaussiano, y tiene una función de autocorrelación exponencial  $\kappa(\tau) = \kappa(0)e^{-\gamma\tau}$ , entonces  $Y(t)$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck y por tanto markoviano [53].

## 4.2. Movimiento Browniano y aproximación de Langevin

En 1827 Robert Brown [54] descubrió que las partículas de polen en suspensión tienen movimientos aleatorios. La primera explicación teórica satisfactoria de este proceso, llamado movimiento browniano fue dada por Einstein (1905), quien en vez de fijarse en la trayectorias de una sola partícula, formuló una descripción probabilística válida para un conjunto de ellas. De manera independiente, este fenómeno también fué explicado por Marian von Smoluchowski (1906), quien trabajó en el tema tanto desde el punto de vista teórico como experimental. Más tarde este modelo fue mejorado por Ornstein y Uhlenbeck [53], Chandrasekar [24], Wang-Uhlenbeck [56] y especialmente Doob [27].

La aproximación de Langevin es ampliamente usada con el propósito de encontrar los efectos de fluctuaciones en sistemas macroscópicos conocidos. Estas fluctuaciones se introducen sumando términos aleatorios llamados fuentes de ruido (el nombre que se le da en un contexto físico a términos en ecuaciones diferenciales estocásticas que son procesos estocásticos), a la ecuación de movimiento que gobierna al sistema.

Después del trabajo de Einstein y Smoluchowsky, un tratamiento alternativo para el movimiento Browniano fué desarrollado por Langevin. Considérese la velocidad de una partícula Browniana. Cuando la masa puede ser tomada como la unidad, esta partícula obedece la ecuación de movimiento

$$\dot{V} = -\gamma V + L(t) \tag{4.5}$$

El lado derecho de la ecuación es la fuerza ejercida por las moléculas de fluido de los alrededores que se expresa como la suma de una fuerza viscosa proporcional a la velocidad  $V$  con un coeficiente constante  $\gamma$  (ley de Stokes), más un término de ruido  $L(t)$  que representa el efecto de una serie continua de choques con los átomos del fluido que rodea a la partícula. La fuerza  $L(t)$  es desconocida, pero se postulan tres propiedades físicas sobre ella:

1. La fuerza consiste de un término de amortiguamiento lineal en  $V$  con un coeficiente constante  $\gamma$ , más un término estocástico  $L(t)$  independiente del estado  $V$  de la partícula.  $L(t)$  es irregular e impredecible, pero sus propiedades promediadas sobre un ensamble de sistemas similares son simples. Este ensamble puede consistir de muchas partículas en el mismo campo, previendo que sus distancias son grandes de tal manera que no interactúen entre ellas o puede consistir de una serie de observaciones sucesivas de la misma partícula, previendo que los intervalos de tiempo sean lo suficientemente grandes para que

no interactúen unas con otras. De esta manera  $L(t)$  puede tratarse como un proceso estocástico.

2. Las propiedades estocásticas de  $L(t)$  son independientes de  $V$ , de modo que  $L(t)$  actúa como una fuerza externa. Así, el término de fricción es también la fuerza promedio que se desvanece, es decir,  $\langle L(t) \rangle = 0$ .
3. La fuerza  $L(t)$  es causada por las colisiones de moléculas individuales de fluido de los alrededores y varía rápidamente en el tiempo de forma que no existe correlación entre dos variaciones consecutivas. Esto se expresa postulando para su función de autocorrelación,

$$\langle L(t)L(t') \rangle = \Gamma\delta(t - t'), \quad (4.6)$$

donde  $\Gamma$  es una constante. La idea es que cada colisión sea prácticamente instantánea y que colisiones sucesivas no esten correlacionadas. En realidad el lado derecho debería ser una función de  $|t - t'|$  con un pico agudo de ancho igual a la duración de una sola colisión. Siempre y cuando este sea más corto que todos los demás tiempos relevantes se puede usar una función delta de dirac por conveniencia. Un término que tiene las propiedades anteriores se denomina fuerza de Langevin y la ecuación (4.5) es la conocida ecuación de Langevin.

### 4.3. Tipos de ruido

Sea  $L(t)$  Gaussiano, donde todos los momentos impares se anulan y los momentos pares estan dados por la regla  $\langle X_i X_j X_k \dots \rangle = \sum \langle X_p X_q \rangle \langle X_u X_v \rangle \dots$ , que corresponde a una distribución Gaussiana. Los subíndices  $p, q, u, v, \dots$  son los mismos que

$i, j, k, \dots$  tomados de dos en dos. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \langle L(t_1)L(t_2)L(t_3)L(t_4) \rangle &= \langle L(t_1)L(t_2) \rangle \langle L(t_3)L(t_4) \rangle + \dots \\ &= \Gamma^2 \{ \delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4) + \delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) \\ &+ \delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3) \}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donde  $\delta$  es la delta de Dirac. Esto especifica todas las propiedades estocásticas de  $L(t)$  en términos solamente del parámetro  $\Gamma$ . El proceso  $L(t)$  definido en esta forma se llama *ruido blanco Gaussiano o en ocasiones ruido aditivo*. Desde el punto de vista matemático esto no existe realmente como una función estocástica (quizás algo que se asemeja es la función delta de Dirac) y físicamente esto nunca ocurre, pero sirve como modelo para cualquier fuerza que fluctua rápidamente. Con la ayuda de estos cuatro postulados, la solución  $V(t)$  de (4.5) junto con la condición inicial  $V(0) = V_0$ , está determinada completamente. Consecuentemente el proceso  $V(t)$  con todos estos momentos se conoce explícitamente.

De manera resumida, se dice que el ruido blanco gaussiano  $L(t)$ , es un proceso gaussiano con media igual a cero y descorrelacionado en el tiempo, o sea su función de correlación es nula para  $t \neq s$ . Dicho de otro modo, el ruido blanco es un proceso  $L$  con las siguientes propiedades,

- Las variables aleatorias  $\{L(t)|t \in R\}$  son independientes.
- $L(t)$  es estacionario, es decir, dados  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , la distribución del vector aleatorio  $((t + t_1), (t + t_2), \dots, (t + t_n))$  no depende de  $t$ .
- $\langle L(t)L(s) \rangle = \delta(t - s)$ .
- $\langle L(t) \rangle = 0$

Cuando se tiene un proceso estocástico cualesquiera denotado por  $\lambda(t)$  que no cumple el postulado (4.7), se dice que es *ruido blanco no gaussiano*. Desde el punto de vista matemático el ruido blanco es una idealización de la situación real, en la que el espectro de una señal no es constante en general. Esto se traduce en que los valores que toma  $L(t)$  en un instante de tiempo dependen en cierta medida de los que toma para  $s \neq t$ . En muchas aplicaciones, el tipo de ruido que se desearía usar para modelar es el denominado ruido blanco, el tratar con ruidos blancos facilita los cálculos, aunque plantea algún tipo de indefinición matemática. Este proceso, serviría para modelar procesos independientes e idénticamente distribuidos con media igual a cero. Desafortunadamente, un proceso con tales características no existe, o mejor dicho, no puede tener trayectorias medibles a menos que sea  $L(t) \equiv 0$ . El único proceso que satisface estas propiedades es el Movimiento Browniano. Esto prueba que no existe un ruido blanco en el sentido clásico.

Existe otro tipo de *ruido llamado de color* en ocasiones también llamado *ruido multiplicativo*. Este término se refiere a ecuaciones como las que se vieron del tipo Langevin con la forma

$$\dot{y} = A(y) + C(y)\xi(t), \tag{4.8}$$

pero en la cual el ruido  $\xi(t)$  no es blanco. Mejor dicho,  $\xi(t)$  se supone que está dado como un proceso estacionario con  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  y  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \kappa(t - t')$ . Aquí la función de autocorrelación  $\kappa$  no es una función delta de Dirac y  $\xi(t)$  es algo bien definido, función estocástica no singular, así que (4.8) está también bien definida. Al igual que las ecuaciones de Langevin, éstas han sido ampliamente discutidas en la literatura. El hecho de que  $\xi(t)$  no sea blanco crea algunas diferencias notables respecto de la ecuación original de Langevin. En la siguiente sección se tratará con detalle este tipo de ecuaciones diferenciales estocásticas.

## 4.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas

En esta sección se presenta el formalismo de las ecuaciones diferenciales estocásticas y cómo se aplican al estudio de los sistemas estadísticos en equilibrio y sin en equilibrio.

Cuando un sistema está sujeto a fluctuaciones por influencias externas sus ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales con coeficientes aleatorios. En un cierto número de casos estas ecuaciones pueden ser resueltas exactamente o aproximadamente. En particular, cuando las fluctuaciones son débiles y rápidas un desarrollo sistemático conduce a ecuaciones aproximadas explícitas.

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación cuyos coeficientes son números aleatorios o funciones aleatorias de la variable independiente (o variables). Al igual que en las ecuaciones diferenciales normales, los coeficientes se supone que son dados, independientemente de la solución que tiene que ser encontrada. Por consiguiente, las ecuaciones diferenciales estocásticas son la herramienta apropiada para describir sistemas con ruido externo. La ecuación de Langevin es el prototipo de una ecuación diferencial estocástica, es decir, una ecuación diferencial cuyos coeficientes son funciones aleatorias del tiempo con propiedades estocásticas dadas.

La forma general de una ecuación estocástica es

$$\dot{u} = F(u, t; Y(t)), \tag{4.9}$$

donde  $u$  and  $F$  pueden ser vectores, y  $Y(t)$  representa una o más funciones aleatorias cuyas propiedades estocásticas son dadas. Esta ecuación, junto con una condición inicial  $u(t_0) = a$ , determina para cada realización particular  $y(t)$  una función

$U(t; [y], a)$ , la cual es una funcional de  $y(t)$ , es decir, que depende de todos los valores  $y'(t)$  para  $0 \leq t' \leq t$ . El ensamble de soluciones  $U(t; [y], a)$ , para todo posible  $y'(t)$  constituye un proceso estocástico. La ecuación (4.9) se resuelve cuando se han encontrado las propiedades estocásticas de estos procesos.

Algunas veces el valor inicial  $a$  es también una cantidad aleatoria o un vector aleatorio. Entonces el proceso estocástico resultante  $U(t; [y], a)$  es una función de la variable aleatoria  $a$ , así como una funcional de  $y$ . Como esto es solamente una generalización trivial del problema, con  $a$  inicial fija no es necesario tratar separadamente los valores iniciales aleatorios.

Un ejemplo de una ecuación diferencial estocástica es la ecuación de Langevin. En efecto, en la mayoría de la literatura matemática el nombre *ecuación diferencial estocástica* se restringe a esta ecuación, la cual también se conoce como ecuación de Ito [54].

## 4.5. Ecuaciones diferenciales con Ruido Multiplicativo

Considérese una ecuación lineal de la forma

$$\dot{u} = A(t)u = \{A_0 + \alpha A_1(t)\} u, \quad (4.10)$$

donde  $u$  es un vector,  $A_0$  una matriz constante,  $A_1(t)$  una matriz aleatoria y  $\alpha$  un parámetro que mide la magnitud de las fluctuaciones en los coeficientes. Por otra parte se asume que la matriz  $A_1(t)$  tiene un tiempo de autocorrelación  $\tau_c$  finito, en el sentido de que para cualesquiera dos puntos en el tiempo  $t_1$  y  $t_2$  se cumple

$|t_1 - t_2| \gtrsim \tau_c$ , se pueden tratar todos los elementos de la matriz  $A_1(t_1)$  como elementos estadísticamente independientes de los de la matriz  $A_2(t_2)$ . La cantidad  $\alpha\tau_c$  se conoce como el número Kubo y se supone que debe ser pequeño. De esta manera el resultado será una solución aproximada de la ecuación (4.10) en la forma de un desarrollo en series de potencia de  $\alpha\tau_c$ . Aunque no es estrictamente necesario, conviene suponer que  $A_1(t)$  es la matriz de un proceso estacionario. Así, el promedio  $\langle A_1(t) \rangle$  es independiente del tiempo y se puede introducir en  $A_0$ ,

$$A'_0 = A_0 + \alpha \langle A_1(t) \rangle \quad \text{y} \quad A'_1(t) = A_1(t) - \langle A_1(t) \rangle \quad (4.11)$$

de modo que  $\langle A'_1(t) \rangle = 0$ . Supóngase que esto ha sido hecho, entonces se puede omitir la notación primada. Así, se puede trabajar simplemente con  $\langle A_1(t) \rangle = 0$  en (4.10). Primero se elimina  $A_0$  transformando con la interacción

$$u(t) = e^{A_0 t} v(t), \quad \text{entonces} \quad \dot{v} = \alpha e^{-A_0 t} A_1(t) e^{A_0 t} v = \alpha V(t) v. \quad (4.12)$$

Una solución a segundo orden de aproximación en  $\alpha$  y con condiciones de frontera  $v(0) = u(0) = a$  es

$$v(t) = a + \alpha \int_0^t a V(t_1) dt_1 + \alpha^2 \int_0^t \int_0^{t_1} a V(t_1) V(t_2) dt_1 dt_2 + \dots \quad (4.13)$$

Tomando el promedio para  $a$  fija,

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t \int_0^{t_1} a \langle V(t_1) \rangle \langle V(t_2) \rangle dt_1 dt_2 \quad (4.14)$$

Este segundo orden de aproximación puede ser usado sólo mientras que los órdenes superiores sean pequeños. Como cada término sucesivo implica una integración adicional sobre el tiempo, esta restricción equivale a  $\alpha t \ll 1$ . De aquí para  $t \ll \alpha^{-1}$ ,

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t \int_0^{t_1} a \langle V(t_1) \rangle \langle V(t_1 - \tau) \rangle dt_1 d\tau. \quad (4.15)$$

Para  $t > \tau_c$  se tiene que suponer  $\alpha\tau_c < 1$ . Entonces para  $t_1 > \tau_c$ , como el integrando se anula de cualquier forma, el límite superior en la integral puede ser reemplazado con  $\infty$ . Aunque  $t_1$  corre de 0 a  $t$  es grande comparado a  $\tau_c$  para la mayor parte del intervalo de integración. Por consiguiente se tiene aproximadamente para que  $\tau_c \ll t \ll \alpha^{-1}$

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t \int_0^\infty a \langle V(t_1) \rangle \langle V(t_1 - \tau) \rangle dt_1 d\tau. \quad (4.16)$$

Esto, sin embargo, es también la solución a orden  $\alpha^2$  de la ecuación diferencial lineal

$$\partial_t \langle v(t) \rangle = \alpha^2 \left[ \int_0^\infty \langle V(t) V(t - \tau) \rangle d\tau \right] \langle v(t) \rangle. \quad (4.17)$$

La conclusión es que la evolución de  $\langle v(t) \rangle$  se puede describir con esta ecuación. En la representación original se lee

$$\partial_t \langle u(t) \rangle = \left[ A_0 + \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t) e^{A_0 t} A_1(t - \tau) \rangle e^{-A_0 \tau} d\tau \right] \langle u(t) \rangle. \quad (4.18)$$

Debe recordarse, sin embargo, que la derivación se aplica a un intervalo  $\Delta t \ll \alpha^{-1}$  después de un tiempo inicial  $t_0 = 0$ . Este tiempo inicial es especial porque en ese tiempo el valor de  $u$  fué considerada igual a un vector no estocástico  $a$ . Es fácil ver que el resultado es igualmente válido cuando el valor inicial es estocástico, siempre que sea estadísticamente independiente de  $A_1$ . Este hecho permite aplicar la misma ecuación (4.18) otra vez al siguiente intervalo  $\Delta t$ . Ya que los valores de  $A_1$  en el siguiente intervalo no están correlacionados con los del anterior debido a la falta de  $\tau_c$ . Es cierto que existe una superposición en la frontera entre ambos intervalos, pero esto puede solamente acarrear un pequeño error ya que se extiende por encima a un rango de orden  $\tau_c$  fuera del intervalo total  $\Delta t$ . De aquí (4.18) es aproximadamente válida para todos los tiempos, siempre que  $\alpha\tau_c \ll 1$ . Así, el promedio de  $u(t)$  por sí mismo obedece aproximadamente a la ecuación diferencial no estocástica (4.18).

Ahora se supone que no solamente  $\alpha\tau_c \ll 1$ , sino que también se cumple  $\tau_c|A_0| \ll 1$ . Esta condición adicional establece que el movimiento libre de  $u$  es lento comparado con las fluctuaciones en  $A_1$ . Entonces la ecuación (4.18) se reduce a

$$\partial_t \langle u(t) \rangle = \left[ A_0 + \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t)A_1(t-\tau) \rangle d\tau \right] \langle u(t) \rangle. \quad (4.19)$$

Como  $A_1$  se supuso estacionaria, la integral es independiente del tiempo. El efecto de las fluctuaciones es por lo tanto renormalizado a  $A_0$  añadiéndole un término constante de orden  $\alpha^2$ . El término añadido está integrado en la función de autocorrelación de  $A_1$ . En particular, si se tiene un sistema no disipativo descrito por  $A_0$ , este término adicional debido a las fluctuaciones, es en general disipativo. Esta relación entre disipación y la función de autocorrelación de las fluctuaciones es análoga a la relación Green-Kubo en sistemas de muchos cuerpos, pero no idénticamente a ello, porque ahí las fluctuaciones son internas, en lugar de añadirse como un término separado como en (4.10). En la deducción de (4.18) se supuso que  $\langle A_1(t) \rangle = 0$ . Si esto no es verdad, se tiene en lugar de (4.18), la ecuación

$$\partial_t \langle u(t) \rangle = \left[ A_0 + \alpha \langle A_1(t) \rangle + \alpha^2 \int_0^\infty \langle \langle A_1(t)e^{A_0\tau} A_1(t-\tau) \rangle \rangle e^{-A_0\tau} d\tau \right] \langle u(t) \rangle. \quad (4.20)$$

Una extensión de la ecuación considerada hasta ahora es la ecuación no homogénea

$$\dot{u} = A(t)u + f(t). \quad (4.21)$$

$A(t)$  es una matriz aleatoria de dimensiones  $n \times n$  y  $f(t)$  es un vector aleatorio de dimensión  $n$ . Este caso puede reducirse al caso previo mediante el recurso siguiente. Extender el vector  $u$  añadiendo una  $(n+1)$  componente  $u_{n+1} = 1$ . Entonces (4.21) puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Esto permite usar los métodos desarrollados previamente. Para encontrar una aproximación de la solución, supóngase como en (4.10) que

$$A(t) = A_0 + \alpha A_1(t) \text{ y } f(t) = f_0 + \alpha f_1(t) \quad (4.23)$$

con  $A_0$  y  $f_0$  no aleatorios y  $\langle A_1(t) \rangle$  y  $\langle f_1(t) \rangle$  nulos. Además de aplicar el resultado (4.18) se tiene el cálculo

$$\exp \left[ \tau \begin{pmatrix} A_0 & f_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{A_0 \tau} & \frac{e^{A_0 \tau} - 1}{A_0} f_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

La sustitución en (4.18) da una ecuación para el promedio de  $(n+1)$  vectores, de los cuales la última componente es trivial. Las otras  $n$  componentes están dadas por

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u(t) \rangle &= [A_0 \\ &+ \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t) e^{\tau A_0} A_1(t - \tau) \rangle e^{-\tau A_0} d\tau] \langle u(t) \rangle \\ &+ f_0 \\ &+ \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t) e^{\tau A_0} A_1(t - \tau) \rangle \frac{e^{-\tau A_0} - 1}{A_0} d\tau \cdot f_0 \\ &+ \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t) e^{\tau A_0} f_1(t - \tau) \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sí no se supone que  $\langle A_1 \rangle = \langle f_1 \rangle$ , el resultado es

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u(t) \rangle &= [A_0 + \alpha \langle A_1 \rangle \\ &+ \alpha^2 \int_0^\infty \langle \langle A_1(t) e^{\tau A_0} A_1(t - \tau) \rangle \rangle e^{-\tau A_0} d\tau] \langle u(t) \rangle \\ &+ f_0 + \alpha \langle f_1 \rangle \\ &+ \alpha^2 \int_0^\infty \langle \langle A_1(t) e^{\tau A_0} A_1(t - \tau) \rangle \rangle \frac{e^{-\tau A_0} - 1}{A_0} d\tau \cdot f_0 \\ &+ \alpha^2 \int_0^\infty \langle \langle A_1(t) e^{\tau A_0} f_1(t - \tau) \rangle \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Otra extensión es la aplicación a momentos de mayor orden de las componentes de  $u$ . Sea  $u = u_\nu$  un vector real de  $n$  componentes que obedece (4.10); explícitamente

$$\partial_t u_\nu = \sum_{\lambda=1}^n A_{\nu\lambda}(t) u_\lambda, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (4.27)$$

Entonces los productos  $u_\nu u_\mu$  obedecen otra vez una ecuación diferencial lineal estocástica

$$\partial_t(u_\nu u_\mu) = \sum_{\lambda} A_{\nu\lambda}(u_\lambda u_\mu) + \sum_{\lambda} A_{\mu\lambda}(u_\nu u_\lambda) \equiv \sum_{\lambda\rho} \mathcal{A}_{\nu\mu;\lambda\rho}(u_\lambda u_\rho), \quad (4.28)$$

$$\mathcal{A}_{\nu\mu;\lambda\rho}(t) = A_{\nu\lambda}(t)\delta_{\mu\rho} + A_{\mu\rho}(t)\delta_{\nu\lambda}. \quad (4.29)$$

Por lo tanto, su promedio obedece una ecuación similar a (4.20). Para escribir esto explícitamente, considérense los  $N = \frac{1}{2}n(n+1)$  productos  $u_\nu u_\mu$  como componentes de un sólo vector  $\mathfrak{u}_a$  de modo que (4.28) toma la forma

$$\partial_t \mathfrak{u}_a = \sum_{b=1}^N \mathcal{A}_{ab}(t) \mathfrak{u}_b \quad (a = 1, 2, \dots, N). \quad (4.30)$$

Entonces, con  $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 + \alpha \mathcal{A}_1(t)$ ,

$$\partial_t \langle \mathfrak{u}_a \rangle = \left[ \mathcal{A}_0 + \alpha \langle \mathcal{A}_1(t) \rangle + \alpha^2 \int_0^\infty \langle \langle \mathcal{A}_1(t) e^{\mathcal{A}_0\tau} \mathcal{A}_1(t-\tau) \rangle \rangle e^{-\mathcal{A}_0\tau} d\tau \right] \langle \mathfrak{u}_a \rangle. \quad (4.31)$$

Sí  $u$  es compleja se puede, por supuesto, reducirlo primero al caso anterior si se escriben las  $2n$  ecuaciones para su parte real e imaginaria. Normalmente, sin embargo, solamente una es interesante en las cantidades  $u_\nu u_\mu^*$ ; esto obedece un conjunto de  $n^2$  ecuaciones lineales, de las cuales se pueden otra vez encontrar  $n^2$  ecuaciones aproximadas para  $\langle u_\nu u_\mu^* \rangle$ .

---

## Capítulo 5

# MODELOS ESTOCÁSTICOS PARA LA DINÁMICA DE FRENTE DE COMBUSTIÓN EN MEDIOS POROSOS

---

En ocasiones el sistema físico que se desea modelar es demasiado complejo, no sólo para resolver las ecuaciones asociadas sino incluso para llegar a formular un conjunto de ecuaciones diferenciales que sea lo suficientemente representativo de sus características. En muchas situaciones es posible usar información parcial y a cambio obtener resultados parciales del problema. Concretamente, se verá como el uso de hipótesis estadísticas permite llegar a conclusiones probabilísticas como resultado. En este capítulo, se construyen con base en el modelo determinista descrito en el capítulo 3, tres modelos estocásticos para describir la dinámica de un frente de combustión en un medio poroso.

### 5.1. Modelo estocástico con ruido en la velocidad del frente de onda

#### 5.1.1. Construcción y solución del modelo

En una primera aproximación, se considera que el coeficiente advectivo  $\beta$  (velocidad del frente de onda) es una variable espacialmente aleatoria, caracterizada por

parámetros estadísticos bien definidos. Entonces  $\beta$  se escribe como la suma de dos términos, uno para la parte determinista y otro correspondiente a la parte estocástica, es decir,

$$\beta = \beta_0 + q_\beta \varepsilon(x), \quad (5.1)$$

aquí  $\beta_0$  representa un valor inicial de la velocidad del frente de combustión de la onda,  $\varepsilon(x)$  es una función que denota el ruido introducido en el sistema y  $q_\beta$  es un parámetro que mide la magnitud de este ruido. El valor de  $\varepsilon(x)$  es desconocido, pero sus propiedades estadísticas, tales como su valor medio  $\langle \varepsilon(x) \rangle$ , su coeficiente de correlación y la longitud de correlación entre dos posiciones  $x_1$  y  $x_2$  son bien conocidas.

La ecuación (3.52), escrita en términos de (5.1), es

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - (\beta_0 + q_\beta \varepsilon(x)) \frac{d\theta}{dx} - h\theta = h. \quad (5.2)$$

Ahora, se escribe la ecuación (5.2) como un sistema lineal de ecuaciones de primer orden. Para esto, se hace el cambio de variable  $\theta = \psi_1$ , en consecuencia,

$$\frac{d\psi_1}{dx} = i\sqrt{h}\psi_2. \quad (5.3)$$

Cuando se reemplaza esta última ecuación y su derivada en la ecuación (5.2) se llega a,

$$\frac{d\psi_2}{dx} = (\beta_0 + q_\beta \varepsilon(x))\psi_2 - i\sqrt{h}\psi_1 + i\sqrt{h}. \quad (5.4)$$

De la ecuación (4.21), se puede escribir el sistema de ecuaciones formado por (5.3) y (5.4) como un sistema matricial de la forma

$$\frac{d\psi}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{h} \\ -i\sqrt{h} & \beta_0 + q_\beta \varepsilon(x) \end{pmatrix} \psi + \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{h} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

donde se define el vector

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ -\frac{i}{\sqrt{h}} \frac{d\theta}{dx} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

De la ecuación (5.85) se identifica rápidamente,

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{h} \\ -i\sqrt{h} & \beta_0 + q_\beta \varepsilon(x) \end{pmatrix} \text{ y } f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{h} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

De acuerdo con las expresiones (4.23), es posible separar la matriz  $A(x)$  y el vector  $f(x)$  en una parte determinista y en otra estocástica, es decir

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{h} \\ -i\sqrt{h} & \beta_0 \end{pmatrix} \text{ y } A_1(x) = q_\beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(x) \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

De manera similar se separa el vector  $f(x)$  como,

$$f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{h} \end{pmatrix} \text{ y } f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Para los siguientes calculos es necesario definir la matriz,

$$A_1(x - \chi) = q_\beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(x - \chi) \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Para encontrar la ecuación promediada de (3.52), se usa la ecuación (4.26). Un desarrollo en serie de Taylor de  $A_0$ , lleva a

$$e^{A_0 \chi} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\beta_0}{2} \chi} \left( \cosh \left[ \frac{\omega}{2} \chi \right] - \frac{\beta_0 \sinh \left[ \frac{\omega}{2} \chi \right]}{\omega} \right) & \frac{i\sqrt{h_0}(e^{\omega \chi} - 1)e^{1/2(\beta_0 - \omega)\chi}}{\omega} \\ -\frac{i\sqrt{h_0}(e^{\omega \chi} - 1)e^{1/2(\beta_0 - \omega)\chi}}{\omega} & e^{\frac{\beta_0}{2} \chi} \left( \cosh \left[ \frac{\omega}{2} \chi \right] + \frac{\beta_0 \sinh \left[ \frac{\omega}{2} \chi \right]}{\omega} \right) \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

donde  $\omega = \sqrt{4h + \beta_0^2}$ . Por simplicidad en la notación, sea la cantidad  $F \equiv \langle \langle A_1(x)e^{A_0 \chi} A_1(x - \chi) \rangle \rangle$ . Explícitamente,

$$F \equiv \left\langle \left\langle \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\beta_0 \chi}{2}} q_\beta^2 \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x - \chi) \rangle \left( \cosh \left[ \frac{1}{2} \omega \chi \right] + \frac{\beta_0 \sinh \left[ \frac{1}{2} \omega \chi \right]}{\omega} \right) \right) \right\rangle \right\rangle. \quad (5.12)$$

De esto se sigue que,

$$F e^{-A_0 \chi} = \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ i\sqrt{h} q_\beta^2 \langle \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x - \chi) \rangle \rangle \varphi_1 & q_\beta^2 \langle \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x - \chi) \rangle \rangle \varphi_2 \end{array} \right). \quad (5.13)$$

De manera similar se calcula,

$$F(e^{-A_0 \chi} - I)A_0^{-1} = \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\frac{i q_\beta^2 \langle \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x - \chi) \rangle \rangle e^{-\frac{\omega}{2} \chi}}{2\sqrt{h}} \varphi_3 & q_\beta^2 \langle \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x - \chi) \rangle \rangle \varphi_4 \end{array} \right). \quad (5.14)$$

En las matrices (5.13) y (5.14),  $\langle \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x - \chi) \rangle \rangle$  representa un coeficiente de correlación donde se definen las funciones,

$$\varphi_1(\chi) = \frac{(\beta_0 \cosh [\omega \chi] + \omega \sinh [\omega \chi] - \beta_0)}{\omega^2}, \quad (5.15)$$

$$\varphi_2(\chi) = \frac{(2h + \beta_0^2 + 2h \cosh [\omega \chi])}{\omega^2}, \quad (5.16)$$

$$\varphi_3(\chi) = \frac{\left( \beta_0 (e^{\omega \chi} - 1) + \omega \left( 1 + e^{\omega \chi} - 2e^{\frac{\beta_0 + \omega}{2} \chi} \right) \right) \left( \omega \cosh \left( \frac{\omega}{2} \chi \right) + \beta_0 \sinh \left( \frac{\omega}{2} \chi \right) \right)}{\omega^2} \quad (5.17)$$

y

$$\varphi_4(\chi) = \frac{\beta_0 - \beta_0 \cosh(\omega \chi) - \omega \sinh(\omega \chi)}{\omega^2}. \quad (5.18)$$

Así, con todas las cantidades involucradas en la ecuación (4.26), se llega a la siguiente ecuación matricial,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \frac{d\langle\theta\rangle}{dx} \\ -\frac{i}{\sqrt{h}} \frac{d}{dx} \langle \frac{d\theta}{dx} \rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \langle \frac{d\theta}{dx} \rangle \\ -i\sqrt{h} \langle \theta \rangle - \frac{i\beta_0}{\sqrt{h}} \langle \frac{d\theta}{dx} \rangle \end{pmatrix} + q_\beta \langle \varepsilon \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{h}} \langle \frac{d\theta}{dx} \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{h} \end{pmatrix} \\
 &+ q_\beta^2 \int_0^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i\langle\langle\varepsilon(x)\varepsilon(x-\chi)\rangle\rangle\varphi_2}{\sqrt{h}} \langle \frac{d\theta}{dx} \rangle + i\sqrt{h} \langle\langle\varepsilon(x)\varepsilon(x-\chi)\rangle\rangle \varphi_1 \langle \theta \rangle \end{pmatrix} d\chi \\
 &+ q_\beta^2 \int_0^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sqrt{h} \langle\langle\varepsilon(x)\varepsilon(x-\chi)\rangle\rangle \varphi_1 \end{pmatrix} d\chi. \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

La ecuación anterior se separa en dos componentes,

$$\frac{d\langle\theta\rangle}{dx} = \left\langle \frac{d\theta}{dx} \right\rangle, \tag{5.20}$$

y

$$\begin{aligned}
 -\frac{i}{\sqrt{h}} \frac{d}{dx} \left\langle \frac{d\theta}{dx} \right\rangle &= -i\sqrt{h} \langle \theta \rangle - \frac{i\beta_0}{\sqrt{h}} \left\langle \frac{d\theta}{dx} \right\rangle - q_\beta \frac{i\langle\varepsilon\rangle}{\sqrt{h}} \left\langle \frac{d\theta}{dx} \right\rangle + i\sqrt{h} \\
 &+ q_\beta^2 \int_0^\infty \left( -\frac{i\langle\langle\varepsilon(x)\varepsilon(x-\chi)\rangle\rangle\varphi_2}{\sqrt{h}} \left\langle \frac{d\theta}{dx} \right\rangle \right) d\chi \\
 &+ q_\beta^2 \int_0^\infty (i\sqrt{h} \langle\langle\varepsilon(x)\varepsilon(x-\chi)\rangle\rangle \varphi_1 \langle \theta \rangle) d\chi \\
 &+ q_\beta^2 \int_0^\infty (-i\sqrt{h} \langle\langle\varepsilon(x)\varepsilon(x-\chi)\rangle\rangle \varphi_1) d\chi. \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

Después de algunos arreglos algebraicos, finalmente se consigue una ecuación para el promedio de la temperatura,

$$\frac{d^2\langle\theta\rangle}{dx^2} - (\beta_0 + q_\beta\langle\varepsilon\rangle + q_\beta^2 I_1) \frac{d\langle\theta\rangle}{dx} - (h - hq_\beta^2 I_2) \langle\theta\rangle + (h - hq_\beta^2 I_2) = 0, \tag{5.22}$$

donde se definen las integrales,

$$I_1 = \int_0^\infty \langle\langle\varepsilon(x)\varepsilon(x-\chi)\rangle\rangle\varphi_2 d\chi, \quad I_2 = \int_0^\infty \langle\langle\varepsilon(x)\varepsilon(x-\chi)\rangle\rangle\varphi_1 d\chi. \tag{5.23}$$

La ecuación (5.22) representa el modelo estocástico. Nótese que cuando el coeficiente de correlación  $\langle\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x-\chi) \rangle\rangle = 0$  ó cuando la intensidad del ruido  $q_\beta = 0$ , entonces se recupera el modelo determinista dado por la ecuación (3.52).

Para resolver este modelo, se consideran las siguientes suposiciones, el valor medio  $\langle \varepsilon \rangle = 0$  y el coeficiente de correlación decae exponencialmente de la forma  $\langle\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x-\chi) \rangle\rangle = e^{-\lambda|\chi|}$ , donde  $x \equiv 1/\lambda$  es el ancho de esta correlación con las siguientes condiciones de frontera  $\langle \theta(\infty) \rangle = \langle \theta(-\infty) \rangle = 1$ ,  $d\langle \theta \rangle / dx \big|_{0^-} = -q_1 V_D$ . De esta manera, las correspondientes soluciones de la ecuación (5.22) son,

$$\langle \theta(x) \rangle = \begin{cases} 1 + \frac{q_1}{\sqrt{1+4A_2/A_1^2}} \exp\left(\frac{A_1 - \sqrt{4A_2 + A_1^2}}{2}\right) x & , x > 0 \\ 1 + \frac{q_1}{\sqrt{1+4A_2/A_1^2}} \exp\left(\frac{A_1 + \sqrt{4A_2 + A_1^2}}{2}\right) x & , x < 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Estas soluciones representan el valor esperado de la distribución de la temperatura hacia adelante y hacia atrás del frente (máxima temperatura) de la onda de calor. En donde se definen las constantes,

$$A_1 = (\beta_0 + I_1) q_\beta^2 = \beta_0 + \frac{(2h + \beta_0^2 - \lambda^2)}{4h\lambda + \beta_0^2\lambda - \lambda^3} q_\beta^2 \quad (5.25)$$

y

$$A_2 = (h - q_\beta^2 h I_2) = h + \frac{h(\beta_0 + \lambda)}{4h\lambda + \beta_0^2\lambda - \lambda^3} q_\beta^2, \quad (5.26)$$

recuérdese que  $\beta_0 \approx -V_D$ . En términos del valor esperado  $\langle T \rangle$ , las soluciones están dadas por,

$$\langle T(x) \rangle = \begin{cases} T_0 + \frac{qT_0}{\sqrt{1+4A_2/A_1^2}} \exp\left(\frac{A_1 - \sqrt{4A_2 + A_1^2}}{2} x\right) & , x > 0 \\ T_0 + \frac{qT_0}{\sqrt{1+4A_2/A_1^2}} \exp\left(\frac{A_1 + \sqrt{4A_2 + A_1^2}}{2} x\right) & , x < 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

### 5.1.2. Discusión y análisis de resultados

De acuerdo con (5.27) en  $x = 0$  se tiene la amplitud máxima de la temperatura de la onda. Dicha magnitud, se puede escribir como una función del parámetro  $q_\beta$ , es decir

$$\langle A_{mp}(q_\beta) \rangle = T_0 + \frac{q_1 T_0}{\sqrt{1 + 4A_2/A_1^2}}. \quad (5.28)$$

La Fig. 5.1, muestra un gráfico de contornos de  $A_{mp}(q_\beta)$  para diferentes valores del parámetro  $\lambda$ , donde tres regiones son fácilmente identificables. La primera corresponde a valores muy cercanos a cero, aquí se observa que la amplitud disminuye rápidamente hasta alcanzar un mínimo que corresponde a la temperatura inicial  $T_0$ . Después del mínimo, en la segunda región la amplitud crece. En la tercera región la amplitud es monótona creciente y tiende asintóticamente a un valor constante alrededor de los  $480^\circ C$ . Aquí, es importante señalar que cuando se grafica  $A_{mp}(q_\beta)$  como función de  $\lambda$ , se observa un comportamiento similar. Este comportamiento implica que existen dos valores distintos de  $q_\beta$  para los cuales la amplitud  $A_{mp}(q_\beta)$  es la misma.

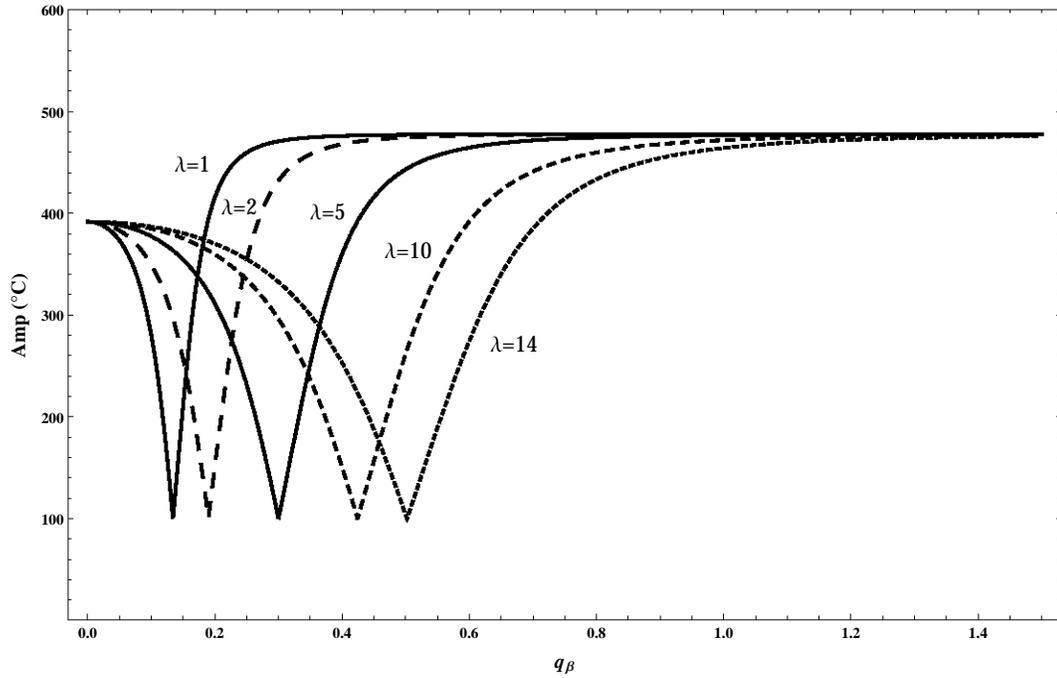


Figura 5.1: Amplitud de onda como función del parámetro  $q_\beta$  y varios valores del parámetro  $\lambda m^{-1}$ .

De manera similar, a partir de (5.27) se deduce una expresión para el ancho de la onda como función de  $q_\beta$ , esto es

$$\langle Wid(q_\beta) \rangle = \left| \frac{2}{A_1 - \sqrt{4A_2 + A_1^2}} - \frac{2}{A_1 + \sqrt{4A_2 + A_1^2}} \right|. \quad (5.29)$$

La Fig. 5.2 es una gráfica de  $\langle Wid \rangle$  para los mismos valores de  $\lambda$  utilizados anteriormente. Se denota con  $q_m$  el valor de  $q_\beta$  donde la gráfica alcanza su mínimo. Entonces, el intervalo  $(0, q_m]$  da información sobre el comportamiento del ancho de la onda detrás del frente de combustión, en este intervalo el ancho decae. El intervalo  $(q_m, 1)$  da información sobre el comportamiento del ancho delante del frente de combustión. Aquí el ancho crece.

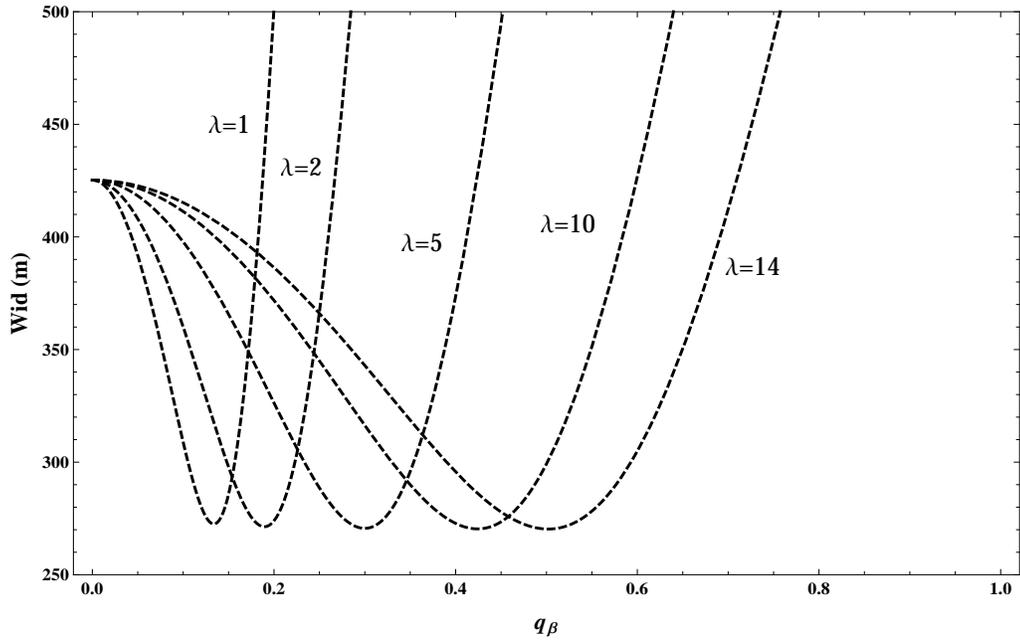


Figura 5.2: Ancho de onda como función del parámetro  $q_\beta$  y varios valores del parámetro  $\lambda m^{-1}$ .

En otro orden de ideas, nótese que la ecuación (5.22) tiene la misma forma funcional que la ecuación (3.52), es decir, sólo difieren en sus coeficientes. Este hecho sugiere que los parámetros involucrados en las soluciones (5.27) son sólo un reescalamiento de la solución original (3.52) que se obtiene en ausencia de ruido [4]. En este contexto, se renombran las constantes (5.25) y (5.26) como  $\beta_{eff} = (\beta_0 + q_\beta^2 I_1)$  y  $h_{eff} = (h - q_\beta^2 h I_2)$ , las cuales ahora representan valores efectivos adimensionales para el frente de velocidad y para el coeficiente de transferencia de calor respectivamente. En consecuencia, si se eligen valores apropiados de los parámetros  $q_\beta$  y  $\lambda$ , se encuentran las mismas distribuciones de temperatura que se obtienen cuando se utilizan como parámetros de entrada  $\beta_0$  y  $h$  en el modelo determinista [4]. Cuando la magnitud de las fluctuaciones es cero ( $q_\beta = 0$ ), entonces  $\beta_{eff} = \beta_0$  y  $h_{eff} = h$  como era de esperarse.

El siguiente ejemplo corrobora las afirmaciones anteriores, aquí se toman diferentes valores de  $\beta_0$  y  $h$  y un ancho de correlación  $x \approx 0.0714m$ , lo que implica un valor numérico de  $\lambda = 14m^{-1}$ , que es tal que satisface la condición impuesta y discutida previamente para  $q_\beta \ll 14$ .

De acuerdo con (5.28), (5.29) y como se aprecia en la Fig. 5.3, la amplitud de los perfiles de temperatura decae hasta la temperatura inicial de yacimiento  $T_0 = 100^\circ C$  para  $q_\beta \in (0, 0.5)$  y el ancho disminuye en este intervalo. En el intervalo complementario  $q_\beta \in (0.5336, 0.7)$ , la amplitud y el ancho crecen conforme el valor de  $q_\beta$  aumenta, como se puede ver en la Fig. 5.4. Este comportamiento quizás este relacionado con la magnitud de las fluctuaciones en la permeabilidad del medio que se relaciona con  $\beta$  a través de la ley de Darcy. Esto puede explicar, por que el frente de onda pasa de ser robusto en la parte anterior al frente de onda, a la parte frontal del frente de onda.

Las Figs. 5.5 y 5.6 ilustran la distribución de temperatura de los casos mostrados en las Figs. 5.3 y 5.4 con su respectivo reescalamiento para valores efectivos de los parámetros  $\beta_{eff}$  y  $h_{eff}$ . Esto muestra que para dos valores distintos de  $q_\beta$  y un valor adecuado del parámetro  $\lambda$ , la distribución de temperatura es similar. Es importante mencionar que el caso  $q_\beta = 0$  corresponde a las soluciones propuestas por Akkutlu y Yortsos [4]. Nótese que los perfiles de temperatura en las Figs. 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6, exhiben el comportamiento que predicen las ecuaciones (5.28) y (5.29) para la amplitud y el ancho de la onda antes y después del frente de combustión. La diferencia entre los perfiles de temperatura calculados con  $\beta_0$  y  $h$  y los correspondientes calculados con valores efectivos  $\beta_{eff}$  y  $h_{eff}$  son menores a 0.8%. En el cuadro 5.1, se muestra información acerca del valor numérico del resto de los parámetros involucrados.

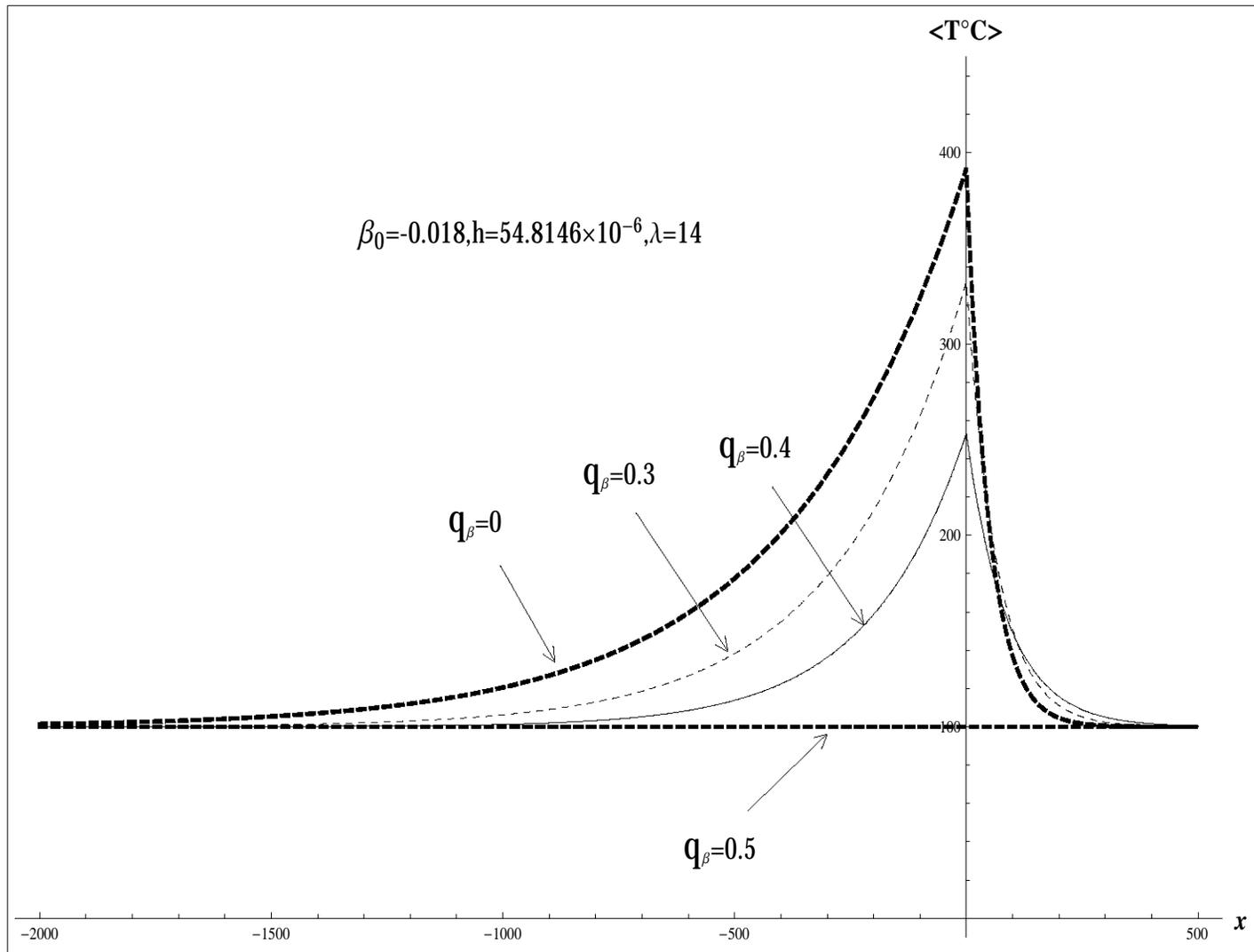


Figura 5.3: Perfil de temperatura para diferentes valores de los parámetros  $q_\beta$ ,  $\lambda$ ,  $h$  y  $\beta_0$ .

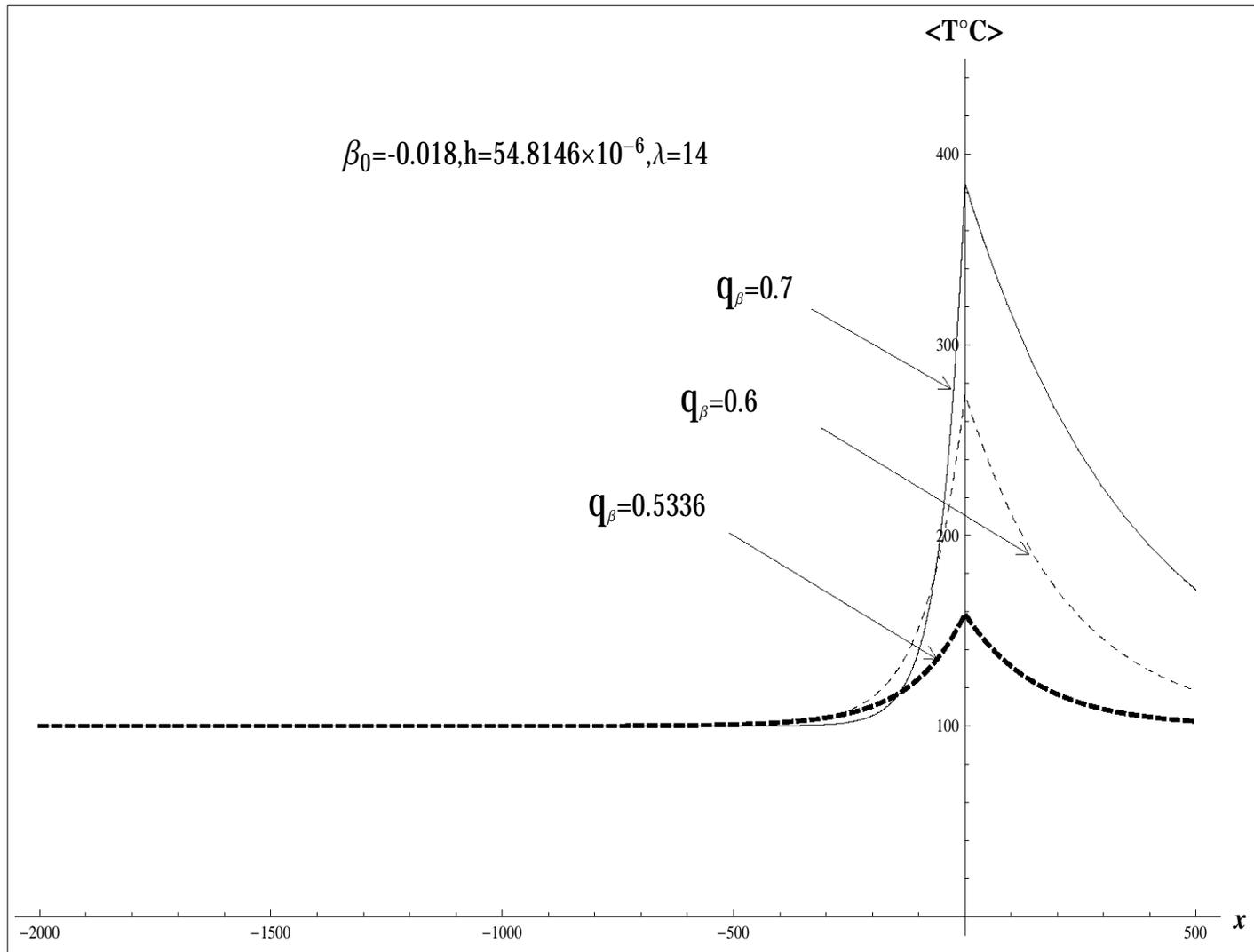


Figura 5.4: Perfil de temperatura para diferentes valores de los parámetros  $q_\beta$ ,  $\lambda$ ,  $h$  y  $\beta_0$ .

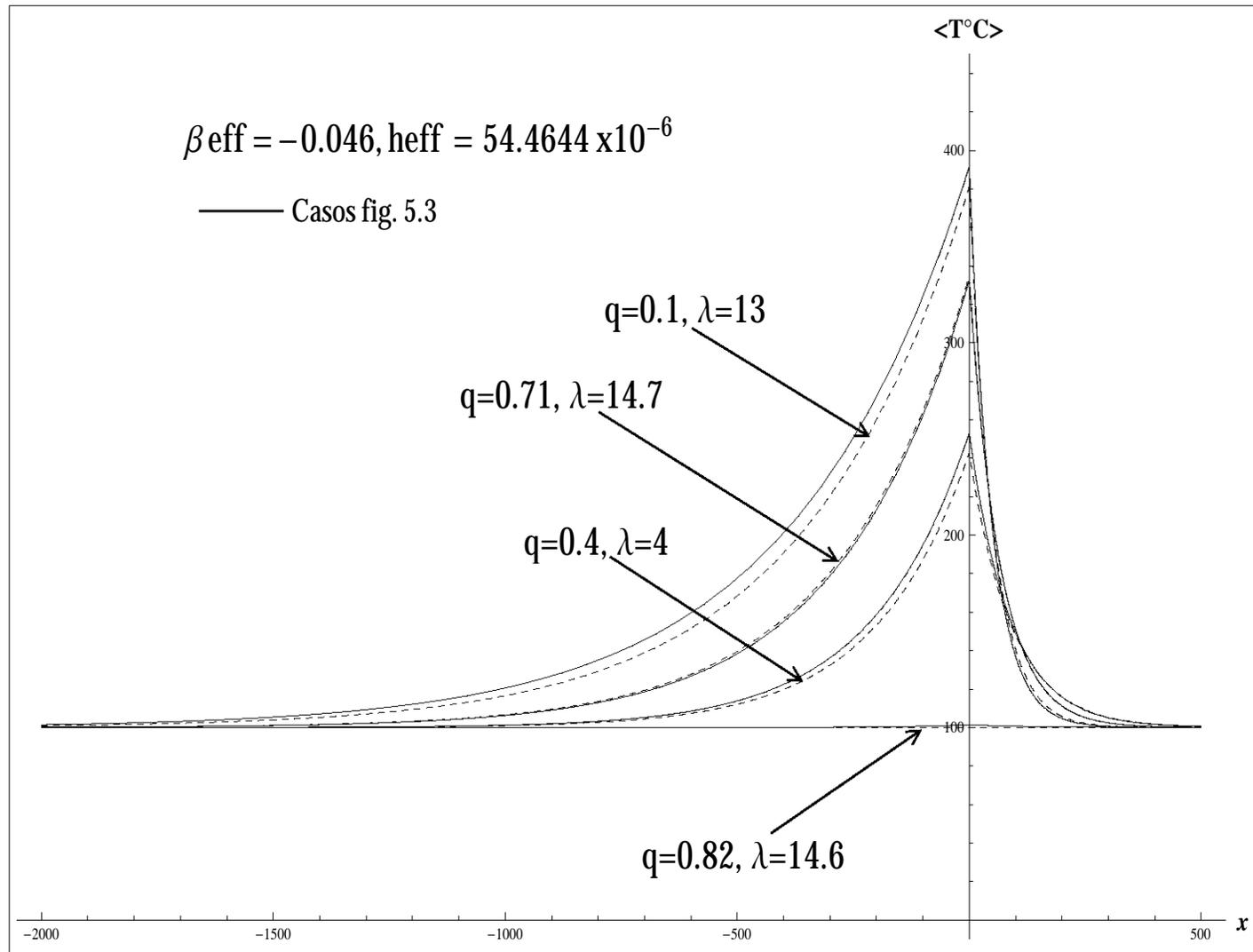


Figura 5.5: Perfil de temperatura para diferentes valores de los parámetros  $q_{\beta}$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ,  $\beta_0$ ,  $h_{eff}$  y  $\beta_{eff}$ .

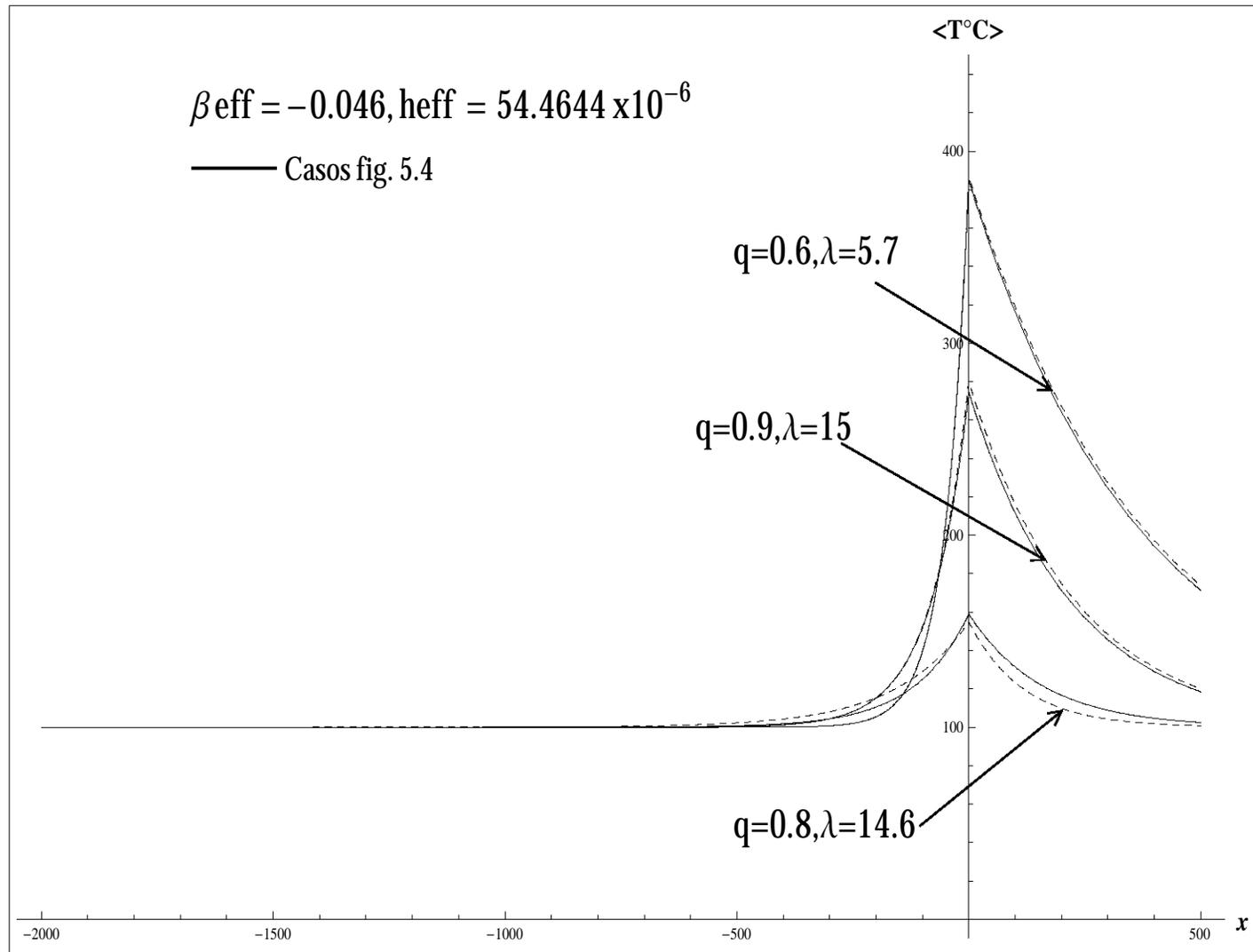


Figura 5.6: Perfil de temperatura para diferentes valores de los parámetros  $q_{\beta}$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ,  $\beta_0$ ,  $h_{\text{eff}}$  y  $\beta_{\text{eff}}$ .

## 5.2. Modelo estocástico con ruido en el coeficiente de transferencia de calor

### 5.2.1. Construcción y solución del modelo

Ahora, se supone que el coeficiente de transferencia de calor dentro del medio poroso es una variable espacialmente aleatoria. Para tratar la no homogeneidad en  $h$ , se añade un término aleatorio en este parámetro, llamado fuente de ruido. Este coeficiente se descompone en dos partes, de manera explícita,

$$h(x) = h_0 + q_h \varepsilon(x), \quad (5.30)$$

aquí  $h_0$  representa el término determinista con un valor inicial bien definido y  $q_h \varepsilon(x)$  es el término estocástico, donde  $q_h$  es un parámetro que mide la magnitud de las fluctuaciones en los coeficientes y  $\varepsilon(x)$  denota el ruido introducido en el sistema. El valor de  $\varepsilon(x)$  es desconocido, sin embargo, sus propiedades estadísticas tales como coeficiente de correlación de  $\langle\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x - \chi) \rangle\rangle$ , ancho de correlación entre dos posiciones  $x$  y su media  $\langle \varepsilon(x) \rangle$  son parámetros bien establecidos. El coeficiente de transferencia de calor  $h$ , aparece como un factor de la función de la temperatura adimensional  $\theta$  y también como termino independiente, por lo tanto, en este modelo se debe introducir ruido multiplicativo y aditivo. Así, la ecuación determinista (3.52), se convierte en la ecuación estocástica,

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \beta \frac{d\theta}{dx} - (h_0 + q_h \varepsilon(x))\theta = -h_0 - q_h \varepsilon(x). \quad (5.31)$$

Con el propósito de escribir la ecuación (5.31) como un sistema lineal de ecuaciones ordinarias de primer orden, se introduce el cambio de variable  $\theta = \psi_1$  en consecuencia,

$$\frac{d\psi_1}{dx} = i\sqrt{h_0}\psi_2 \quad (5.32)$$

Al sustituir (5.32) y su derivada en la ecuación (5.31), se llega a la siguiente ecuación en términos de las funciones  $\psi_1$  y  $\psi_2$ ,

$$\frac{d\psi_2}{dx} = \beta\psi_2 - \left( i\sqrt{h_0} + \frac{iq_h\varepsilon(x)}{\sqrt{h_0}} \right) \psi_1 + \left( i\sqrt{h_0} + \frac{iq_h\varepsilon(x)}{\sqrt{h_0}} \right) \quad (5.33)$$

El conjunto de ecuaciones (5.32) y (5.33) puede ser escrito como una ecuación diferencial matricial de primer orden, de la forma

$$\frac{d\psi}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{h_0} \\ -i\sqrt{h_0} - \frac{iq_h\varepsilon(x)}{\sqrt{h_0}} & \beta \end{pmatrix} \psi + \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{h_0} + \frac{iq_h\varepsilon(x)}{\sqrt{h_0}} \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

donde se define el vector  $\psi$  como sigue,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ -\frac{i}{\sqrt{h_0}} \frac{d\theta}{dx} \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

La ecuación (5.35) implica

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{h_0} \\ -i\sqrt{h_0} - \frac{iq_h\varepsilon(x)}{\sqrt{h_0}} & \beta \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

y

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{h_0} + \frac{iq_h\varepsilon(x)}{\sqrt{h_0}} \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Las ecuaciones (4.23) de la teoría estocástica, establecen que se puede separar la matriz (5.36) y el vector (5.37) en una parte determinista y una aleatoria,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{h_0} \\ -i\sqrt{h_0} & \beta \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

$$A_1(x) = q_h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{i\varepsilon(x)}{\sqrt{h_0}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

$$f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{h_0} \end{pmatrix} \text{ y } f_1(x) = q_h \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\varepsilon(x)}{\sqrt{h_0}} \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

La matriz  $A_1(x)$  y el vector  $f_1(x)$  trasladado estan dados por,

$$A_1(x - \chi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{iq_h\varepsilon(x-\chi)}{\sqrt{h_0}} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

y

$$f_1(x - \chi) = q_h \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\varepsilon(x-\chi)}{\sqrt{h_0}} \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Para simplificar la notación, se definen los siguientes productos

$$\Psi_1(x) = \langle\langle A_1(x)e^{A_0\chi} A_1(x - \chi) \rangle\rangle e^{-\chi A_0}, \quad (5.43)$$

$$\Psi_2(x) = \langle\langle A_1(x)e^{A_0\chi} A_1(x - \chi) \rangle\rangle (e^{-\chi A_0} - I)A_0^{-1} \quad (5.44)$$

y

$$\Psi_3(x) = A_1(x)e^{A_0\chi} f_1(x - \chi). \quad (5.45)$$

Un desarrollo en serie de Taylor para la matriz  $\pm A_0$ , conduce a

$$e^{A_0\chi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_0\chi)^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

donde los elementos son,

$$\sigma_{11} = e^{\frac{\beta}{2}\chi} \left( \cosh \left[ \frac{\omega}{2}\chi \right] - \frac{\beta \sinh \left[ \frac{\omega}{2}\chi \right]}{\omega} \right), \quad (5.47)$$

$$\sigma_{12} = \frac{i\sqrt{h_0} (e^{\omega\chi} - 1) e^{\frac{1}{2}(\beta-\omega)\chi}}{\omega}, \quad (5.48)$$

$$\sigma_{21} = -\frac{i\sqrt{h_0} (e^{\omega\chi} - 1) e^{\frac{1}{2}(\beta-\omega)\chi}}{\omega}, \quad (5.49)$$

y

$$\sigma_{22} = e^{\frac{\beta}{2}\chi} \left( \cosh \left[ \frac{\omega}{2}\chi \right] + \frac{\beta \sinh \left[ \frac{\omega}{2}\chi \right]}{\omega} \right), \quad (5.50)$$

en estas últimas ecuaciones  $\omega = \sqrt{4h_0 + \beta^2}$ . De esta manera,

$$\Psi_1(x) \langle \psi(x) \rangle = \frac{iq_h^2 \Gamma(\chi)}{\sqrt{h_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(\chi) \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

Aquí la segunda componente  $\phi(\chi)$  es la función

$$\phi(\chi) = \phi_1(\chi) \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} - \phi_2(\chi) \langle \theta \rangle, \quad (5.52)$$

donde se definen las funciones

$$\phi_1(\chi) = \frac{2(\cosh \omega\chi - 1)}{\omega^2}, \quad (5.53)$$

y

$$\phi_2(\chi) = \frac{(\beta \cosh \omega\chi + \omega \sinh \omega\chi - \beta)}{\omega^2}. \quad (5.54)$$

Similarmente,

$$\Psi_2(x) \cdot f_0 = \frac{iq_h^2 \Gamma(\chi)}{\sqrt{h_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_3(\chi) \end{pmatrix}, \quad (5.55)$$

en este caso la segunda componente  $\phi_3(\chi)$  esta dada por

$$\phi_3(\chi) = \phi_4 \left( \sigma_{22} e^{-\beta\chi} - e^{-\frac{\beta}{2}\chi} \right). \quad (5.56)$$

Finalmente,

$$\Psi_3(x) = \frac{iq_h^2 \Gamma(\chi)}{\sqrt{h_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_4(\chi) \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

donde,

$$\phi_4(\chi) = \frac{e^{1/2(\beta-\omega)\chi} (e^{\omega\chi} - 1)}{\omega}. \quad (5.58)$$

En las expresiones (5.51), (5.55) y (5.57) se denota  $\Gamma(\chi) \equiv \langle \langle \varepsilon(x)\varepsilon(x - \chi) \rangle \rangle$  como un coeficiente de correlación. Así, de las cantidades que involucran la ecuación (4.26), se tiene que la primera componente es,

$$\frac{d \langle \theta \rangle}{dx} = \left\langle \frac{d\theta}{dx} \right\rangle. \quad (5.59)$$

Mientras que la segunda componente está dada por

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\sqrt{h_0}} \frac{d^2 \langle \theta \rangle}{dx^2} &= -i\sqrt{h_0} \langle \theta \rangle - \frac{i\beta}{\sqrt{h_0}} \frac{d \langle \theta \rangle}{dx} - \frac{iq_h \langle \varepsilon \rangle \langle \theta \rangle}{\sqrt{h_0}} \\ &+ \frac{iq_h^2}{\sqrt{h_0}} I_1 \frac{d \langle \theta \rangle}{dx} - \frac{iq_h^2}{\sqrt{h_0}} I_2 \langle \theta \rangle + i\sqrt{h_0} \\ &+ \frac{iq_h^2}{\sqrt{h_0}} I_3 + \frac{iq_h \langle \varepsilon \rangle}{\sqrt{h_0}} + \frac{iq_h^2}{\sqrt{h_0}} I_4, \end{aligned} \quad (5.60)$$

donde,

$$I_1 = \int_0^\infty \Gamma(\chi) \phi_1(\chi) d\chi, \quad I_2 = \int_0^\infty \Gamma(\chi) \phi_2(\chi) d\chi \quad (5.61)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \Gamma(\chi) \phi_3(\chi) d\chi, \quad I_4 = \int_0^\infty \Gamma(\chi) \phi_4(\chi) d\chi. \quad (5.62)$$

Es importante destacar que la ecuación (5.30) se expresa de tal manera que el valor esperado  $\langle h(x) \rangle = h_0$ , en consecuencia el valor medio  $\langle \varepsilon \rangle = 0$ . Entonces la ecuación para la temperatura promedio viene dada como,

$$\frac{d^2 \langle \theta \rangle}{dx^2} - K_1 \frac{d \langle \theta \rangle}{dx} - K_2 \langle \theta \rangle + K_3 = 0, \quad (5.63)$$

con  $K_1 = (\beta - q_h^2 I_1)$ ,  $K_2 = (h_0 + q_h^2 I_2)$  y  $K_3 = h_0 + q_h^2 (I_3 + I_4)$ . La ecuación (5.63), representa el modelo estocástico cuyas condiciones de frontera son,

$$\langle \theta(\infty) \rangle = \langle \theta(-\infty) \rangle = 1 \text{ y } \left. \frac{d \langle \theta \rangle}{dx} \right|_{0^-}^{0^+} = -q_1 f_t^0. \quad (5.64)$$

Como se discutió en el problema anterior, este modelo es muy similar al modelo determinista, salvo en los coeficientes. Nótese que cuando  $q_h = 0$  o  $\Gamma(\chi) = 0$  en

la ecuación (5.63), entonces ésta se reduce a la ecuación determinista (3.52). Si se toma un coeficiente de correlación que decae exponencialmente,  $\Gamma(\chi) = e^{-\lambda|\chi|}$ , donde  $x \equiv 1/\lambda$  es el ancho de esta correlación, entonces

$$I_1 = -\frac{2}{4h_0\lambda + \beta^2\lambda - \lambda^3}, \quad (5.65)$$

$$I_2 = -\frac{(\beta + \lambda)}{4h_0\lambda + \beta^2\lambda - \lambda^3}, \quad (5.66)$$

$$I_3 = -\frac{h_0(\beta - 3\lambda)}{\lambda(h_0 + (\beta - \lambda)\lambda)(4h_0 + \beta^2 - \lambda^2)} \quad (5.67)$$

y

$$I_4 = -\frac{1}{\lambda^2 - \beta\lambda - h_0}. \quad (5.68)$$

Aquí es importante señalar que  $\beta \approx -V_D$ . Por lo tanto, las correspondientes soluciones adelante y detrás del frente de combustión son,

$$\langle \theta(x) \rangle = \begin{cases} \frac{K_3}{K_1} + \frac{q_1}{\sqrt{1 + \frac{4K_2}{K_1^2}}} e^{\frac{(K_1 - \sqrt{4K_2 + K_1^2})}{2}x}; & x > 0 \\ \frac{K_3}{K_1} + \frac{q_1}{\sqrt{1 + \frac{4K_2}{K_1^2}}} e^{\frac{(K_1 + \sqrt{4K_2 + K_1^2})}{2}x}; & x < 0 \end{cases} \quad (5.69)$$

donde ahora las constantes están definidas por,

$$K_1 = \beta + \frac{2q_h^2}{4h_0\lambda + \beta^2\lambda - \lambda^3}, \quad (5.70)$$

$$K_2 = h_0 - \frac{q_h^2(\beta + \lambda)}{4h_0\lambda + \beta^2\lambda - \lambda^3} \quad (5.71)$$

y

$$K_3 = \frac{4h_0^2\lambda + h_0\lambda\beta^2 - h_0\lambda^3 - q_h^2(\beta + \lambda)}{4h_0\lambda + \beta^2\lambda - \lambda^3}. \quad (5.72)$$

Cabe mencionar que

$$\frac{K_3}{K_2} = \frac{h_0 + q_h^2(I_3 + I_4)}{(h_0 + q_h^2 I_2)} = 1. \quad (5.73)$$

En términos de la temperatura  $\langle T(x) \rangle$  las correspondientes soluciones son,

$$\langle T(x) \rangle = \begin{cases} T_0 + \frac{q_1 T_0}{\sqrt{1 + \frac{4K_2}{K_1^2}}} e^{\frac{(K_1 - \sqrt{4K_2 + K_1^2})}{2} x}; & x > 0 \\ T_0 + \frac{q_1 T_0}{\sqrt{1 + \frac{4K_2}{K_1^2}}} e^{\frac{(K_1 + \sqrt{4K_2 + K_1^2})}{2} x}; & x < 0. \end{cases} \quad (5.74)$$

### 5.2.2. Análisis y discusión de resultados

A continuación, se analizan las soluciones (5.74) como función de la posición y de los parámetros involucrados,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $q_h$ , y del coeficiente de transferencia de calor volumétrica  $\tilde{h}/H$  asociado con la ecuación (3.51). Si  $x = 0$  en la ecuación (5.74), la amplitud máxima de la temperatura, es

$$\langle T(0, \beta, \lambda, q_h, \tilde{h}/H) \rangle = T_0 + \frac{q_1}{\sqrt{1 + \frac{4K_2}{K_1^2}}}. \quad (5.75)$$

Esta ecuación se puede representar por una superficie, si se grafica simultáneamente la dependencia en cualesquiera de las dos variables. Para el valor de los parámetros  $x = 0$ ,  $\beta = -0.020$  y  $\lambda = 0.5m^{-1}$ , se tiene una superficie como en la Fig. (5.7). A partir de la ecuación (5.75) se hace un análisis de la temperatura  $T$  como función del coeficiente volumetrico de transferencia de calor  $\tilde{h}/H$  y del promedio de la temperatura  $\langle T \rangle$  como función de la intensidad del ruido  $q_h$  introducido en el sistema. La gráfica de la Fig. 5.9 muestra el comportamiento de la temperatura en función de los parámetros  $q_h$  y  $\tilde{h}/H$ . En el caso estocástico se identifican dos regiones. La primera región corresponde al intervalo  $(0, q_c]$ , donde  $q_c$  es el valor para el cual se alcanza la mínima amplitud. Aquí la temperatura decrece rápidamente. La segunda región, está definida en el intervalo  $(q_c, 1]$ , donde se aprecia que la temperatura de la onda comienza a crecer hasta alcanzar un valor asintótico. En el modelo determinista, es decir, cuando  $x = 0$  y  $q_h = 0$  en la ecuación (5.75), entonces

la temperatura es solamente función de  $\tilde{h}/H$ , es decir  $\langle T \rangle = T(\tilde{h}/H)$ , en este caso la temperatura decrece para valores cercanos a cero y tiende a ser constante para valores cercanos a uno. Un comportamiento similar para la amplitud se tiene si  $x = 0$ ,  $\beta = -0.020$ ,  $q_h = cte$  y se grafica en función de los parámetros  $\lambda$  y  $\tilde{h}/H$ .

De manera similar, se calcula el ancho de la onda de calor como función de estos parámetros. Para esto, se consideran ambos lados del frente de calor, esto es para  $x > 0$  y  $x < 0$ . Así, de la expresión (5.74), se encuentra la expresión

$$\langle Wid(x, \beta, \lambda, q_h, \tilde{h}/H) \rangle = | Wid_+ - Wid_- |, \quad (5.76)$$

donde

$$Wid_+ = \frac{2}{K_1 - \sqrt{4K_2 + K_1^2}}, \text{ for } x > 0 \quad (5.77)$$

y

$$Wid_- = \frac{2}{K_1 + \sqrt{4K_2 + K_1^2}}, \text{ for } x < 0. \quad (5.78)$$

La Fig. (5.8) representa el ancho de la onda cuando  $x = 0$ ,  $\beta = -0.020$  y  $\lambda = 0.5m^{-1}$  en la ecuación (5.76). Este ancho decae asintóticamente a cero como

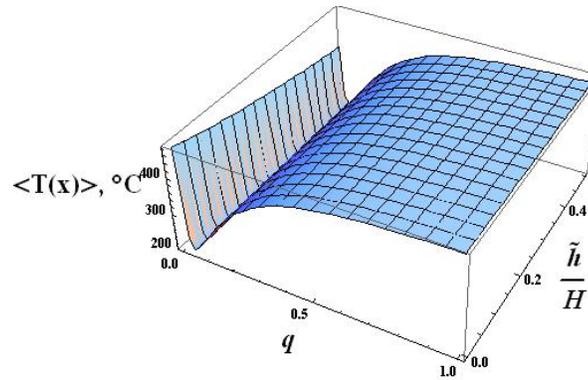


Figura 5.7: La temperatura como función de las fluctuaciones de  $q_h$  y del coeficiente volumétrico de transferencia de calor  $\tilde{h}/H[kW/m^3K]$  para valores iniciales de  $\lambda = 0.5m^{-1}$  y  $\beta = -0.020$ .

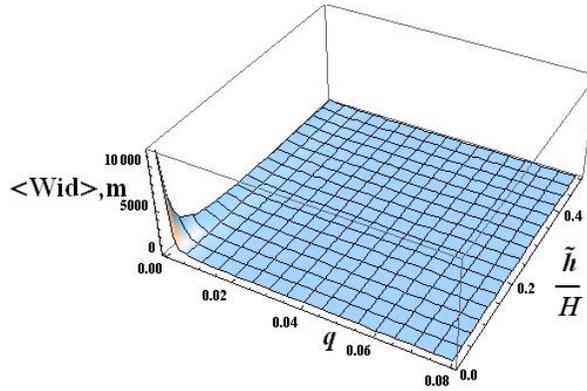


Figura 5.8: Ancho de la distribución de temperaturas como función de la magnitud de las fluctuaciones  $q_h$  y del coeficiente volumétrico de transferencia de calor  $\tilde{h}/H$  [kW/m<sup>3</sup>K] para valores iniciales de  $\lambda = 0.5\text{m}^{-1}$  y  $\beta = -0.020$ .

función de  $q_h$  y  $\tilde{h}/H$ .

Ahora, se definen las siguientes cantidades efectivas en virtud de las ecuaciones (5.70) y (5.71) como

$$\beta_{eff} = (\beta - q_h^2 I_1) \quad (5.79)$$

y

$$h_{eff} = (h_0 + q_h^2 I_2). \quad (5.80)$$

En este contexto,  $\beta_{eff}$  y  $h_{eff}$ , representan valores efectivos para la velocidad del frente y para el coeficiente adimensional de transferencia de calor. Las ecuaciones (5.79) y (5.80) sugieren que los parámetros involucrados en la ecuación (5.74) pueden ser reescalados para conservar la misma forma funcional de la solución original obtenida en el modelo determinista. Entonces, para valores apropiados de  $q_h$  y  $\lambda$  las distribuciones de temperatura son similares a las que se obtienen si se usan  $\beta$  y  $h_0$  como en el modelo determinista [4]. Es importante resaltar que cuando la magnitud de las fluctuaciones es cero ( $q_h = 0$ ), entonces  $\beta_{eff} = \beta$  y  $h_0 = h_{eff}$  en concordancia con el caso determinista.

El siguiente ejemplo ilustra la teoría. En este caso,  $x = 2m$ , en consecuencia  $\lambda = 0.5m^{-1}$ , los cuales satisfacen la condición previamente impuesta  $q_h \ll 0.5m^{-1}$ , donde se toman valores arbitrarios de  $\beta = -0.020$  y  $\tilde{h}/H = 0.0154kW/m^3K$  ( $h_0 = 2.7195 \times 10^{-6}$ ) en la ecuación (3.51). De acuerdo con lo discutido anteriormente, estos parámetros deben ser denotados por  $\beta_{eff} = -0.020$  y  $h_{eff} = 2.7195 \times 10^{-6}$ . El valor numérico de otros parámetros utilizados se puede consultar en el cuadro 5.1. La Fig. (5.9) muestra la variación de la amplitud de la onda para estos valores en presencia de ruido y sin ruido en el sistema. La correspondiente variación del ancho con ruido se muestra en la Fig. (5.10).

A continuación se muestran las distribuciones de temperatura para diferentes intensidades en el parámetro  $q_h$ . Véase la Fig. (5.11). De acuerdo con la Fig. (5.9), la amplitud decae hasta que alcanza su mínima amplitud en el intervalo  $0 < q_h \leq 0.03530$ . Nótese que en este mismo intervalo, el ancho se hace cada vez más estrecho, como se muestra en la Fig. (5.10). La Fig. (5.12) muestra que en el intervalo  $0.03530 < q_h \leq 1$ , la amplitud crece y el ancho tiende a cero en concordancia también con la Fig. (5.10). Cuando  $q_h = 0$ , entonces la amplitud de la temperatura decrece como función del coeficiente volumétrico de transferencia de calor  $\tilde{h}/H$ , como se aprecia en la Fig. (5.9).

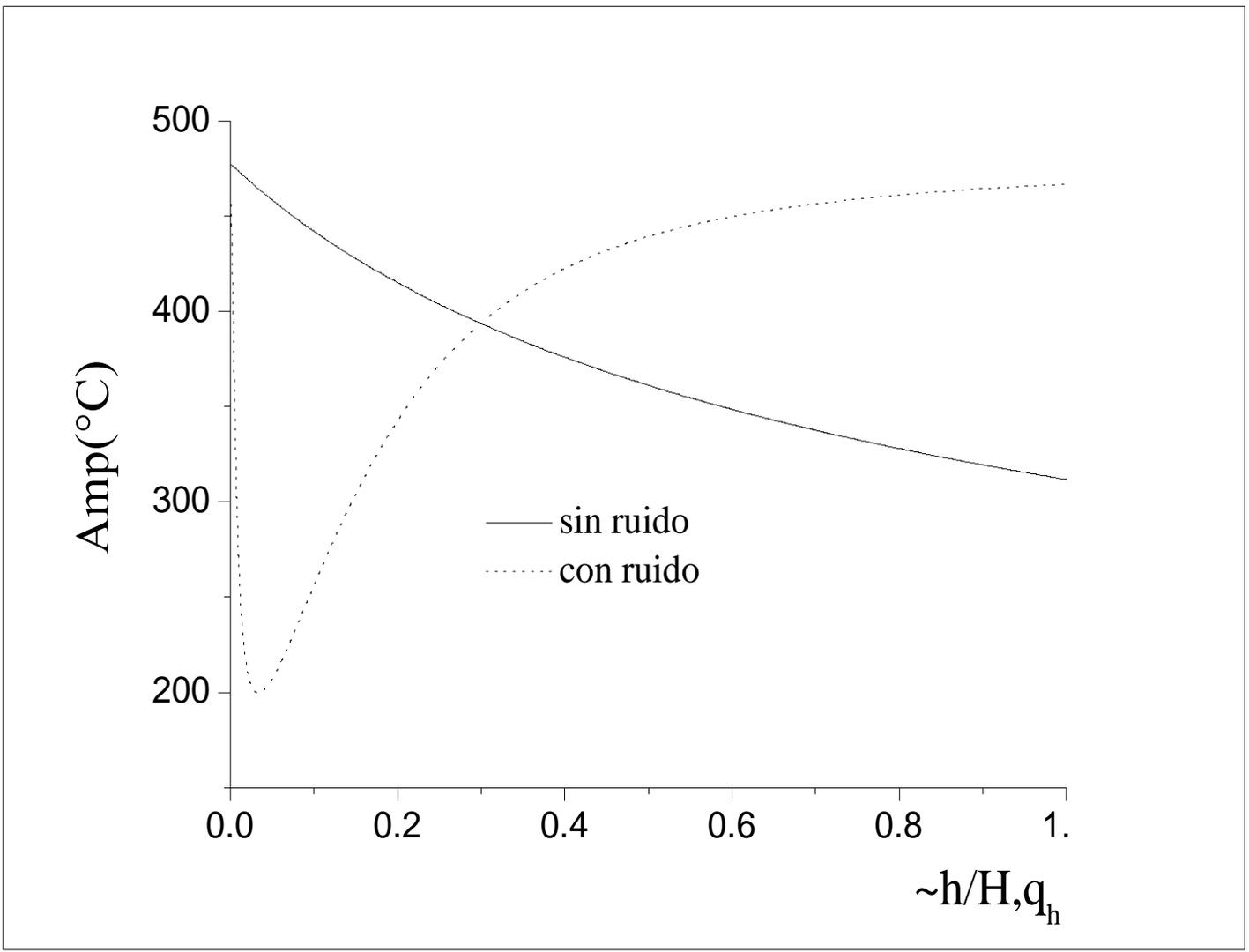


Figura 5.9: Temperatura media como función de  $q_h$  y de  $\tilde{h}/H[kW/m^3K]$ , para  $\lambda = 0.5m^{-1}$  y  $\beta = -0.020$ .

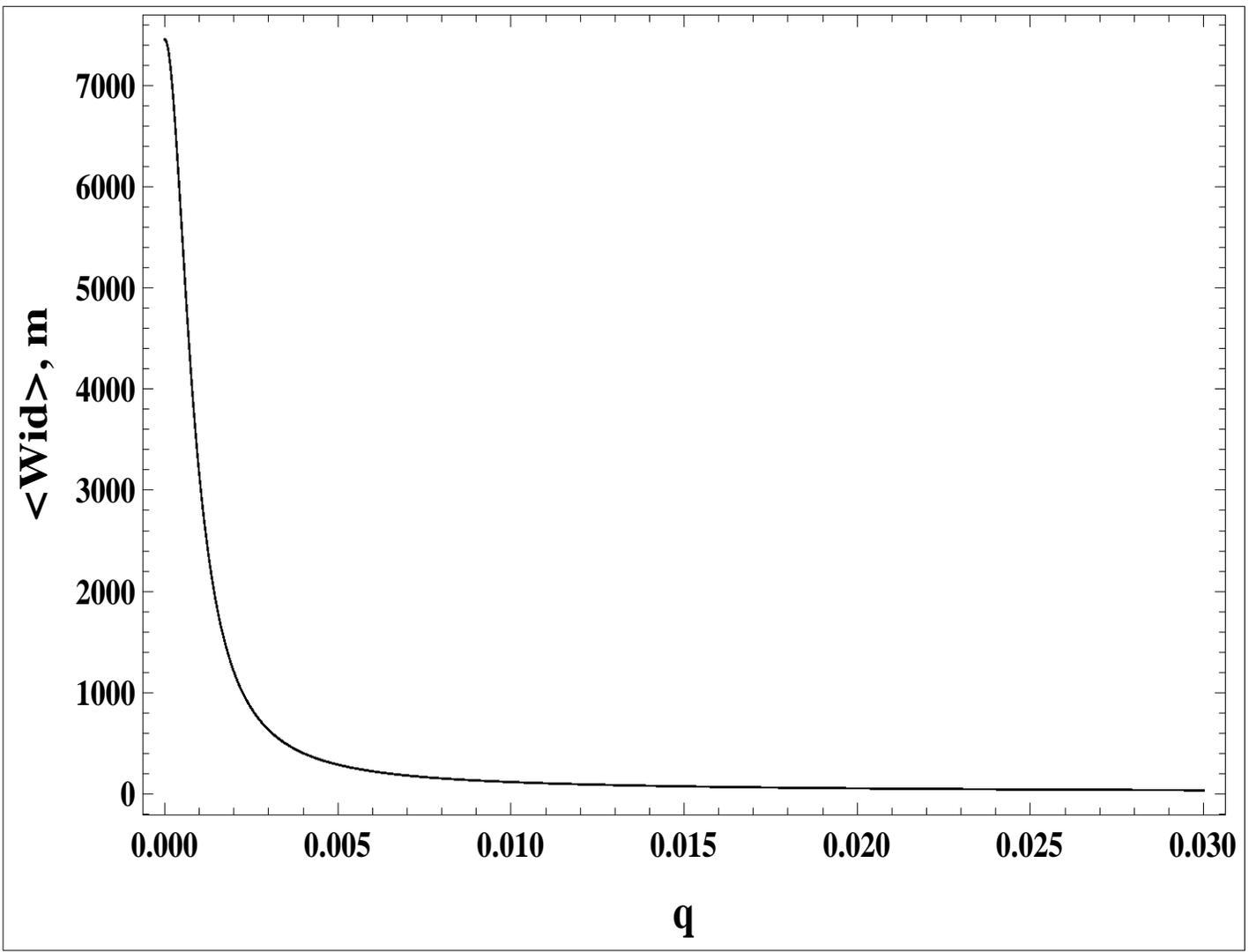


Figura 5.10: Ancho de la distribución de temperaturas como función de  $q_h$ ,  $\lambda = 0.5m^{-1}$  y  $\beta = -0.020$ .

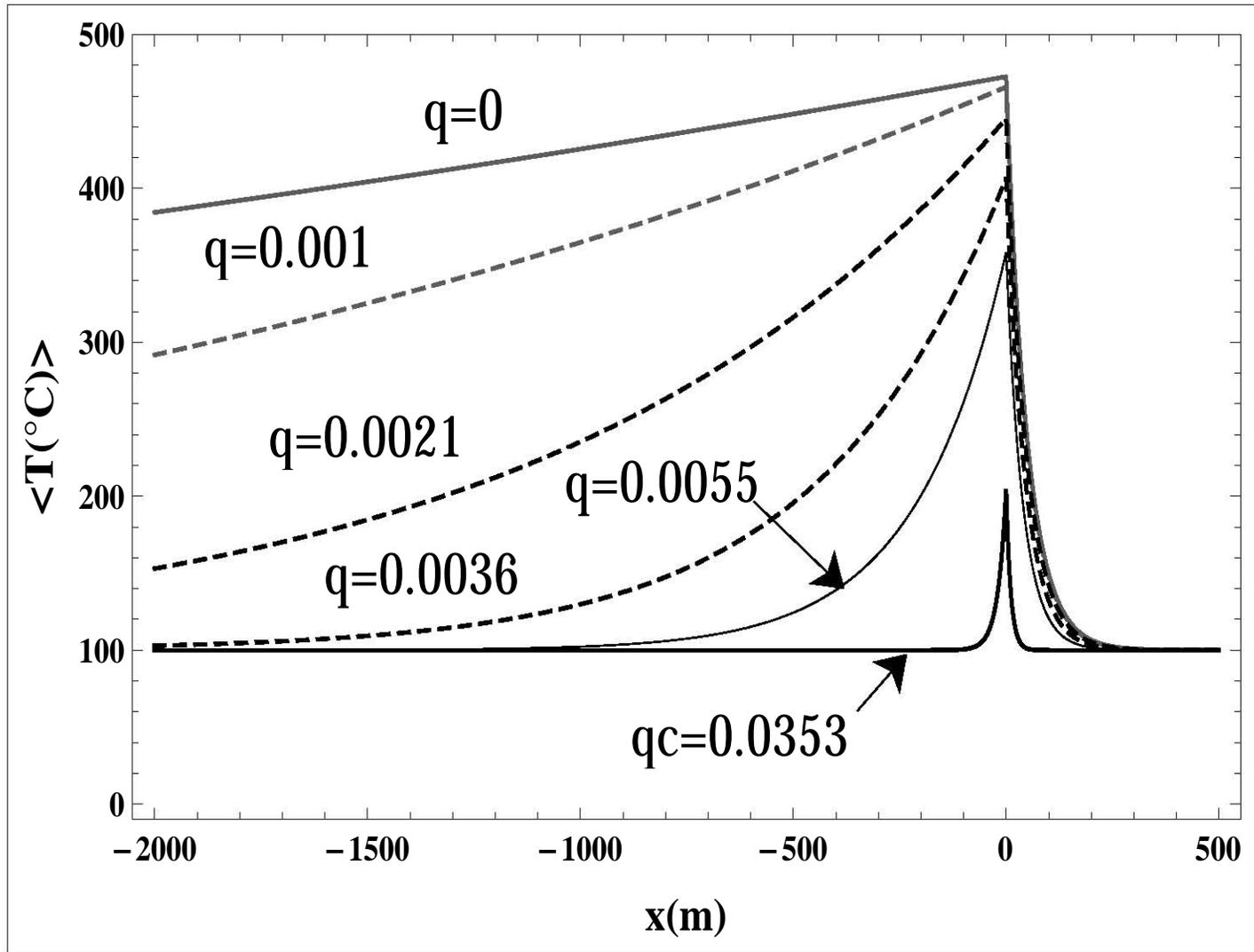


Figura 5.11: Distribución de temperatura para diferentes valores de  $q_h$ ,  $\beta = -0.020$  y  $\lambda = 0.5m^{-1}$ .

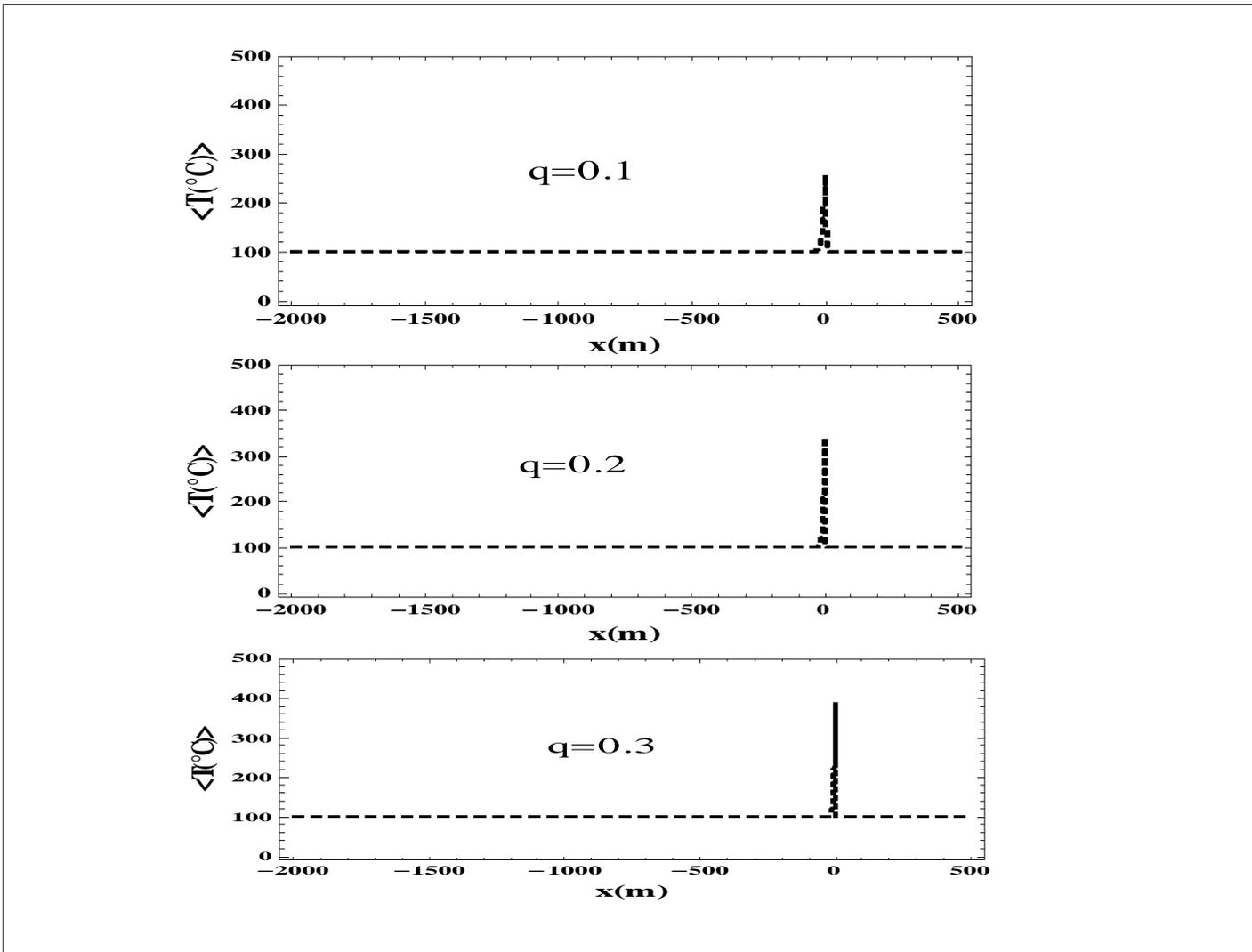


Figura 5.12: Distribución de temperatura para diferentes valores de  $q_h$ ,  $\beta = -0.020$  y  $\lambda = 0.5\text{m}^{-1}$ .

La Fig. (5.13) representa la distribución de temperaturas para tres diferentes valores de  $\tilde{h}/H$  y su respectivo valor del parámetro  $\beta$ . Se enfatiza que estos resultados obedecen el caso puramente determinista reportado en [4]. También es importante resaltar que la diferencia relativa entre estos resultados y los mostrados con línea punteada en la Fig. (5.11) son menores que el 0.46%. En este sentido, los perfiles de temperatura para los valores de  $\beta_{eff} = -0.020$  y  $h_{eff} = 2.7195 \times 10^{-6}$  se comportan con un valor efectivo en el modelo estocástico.

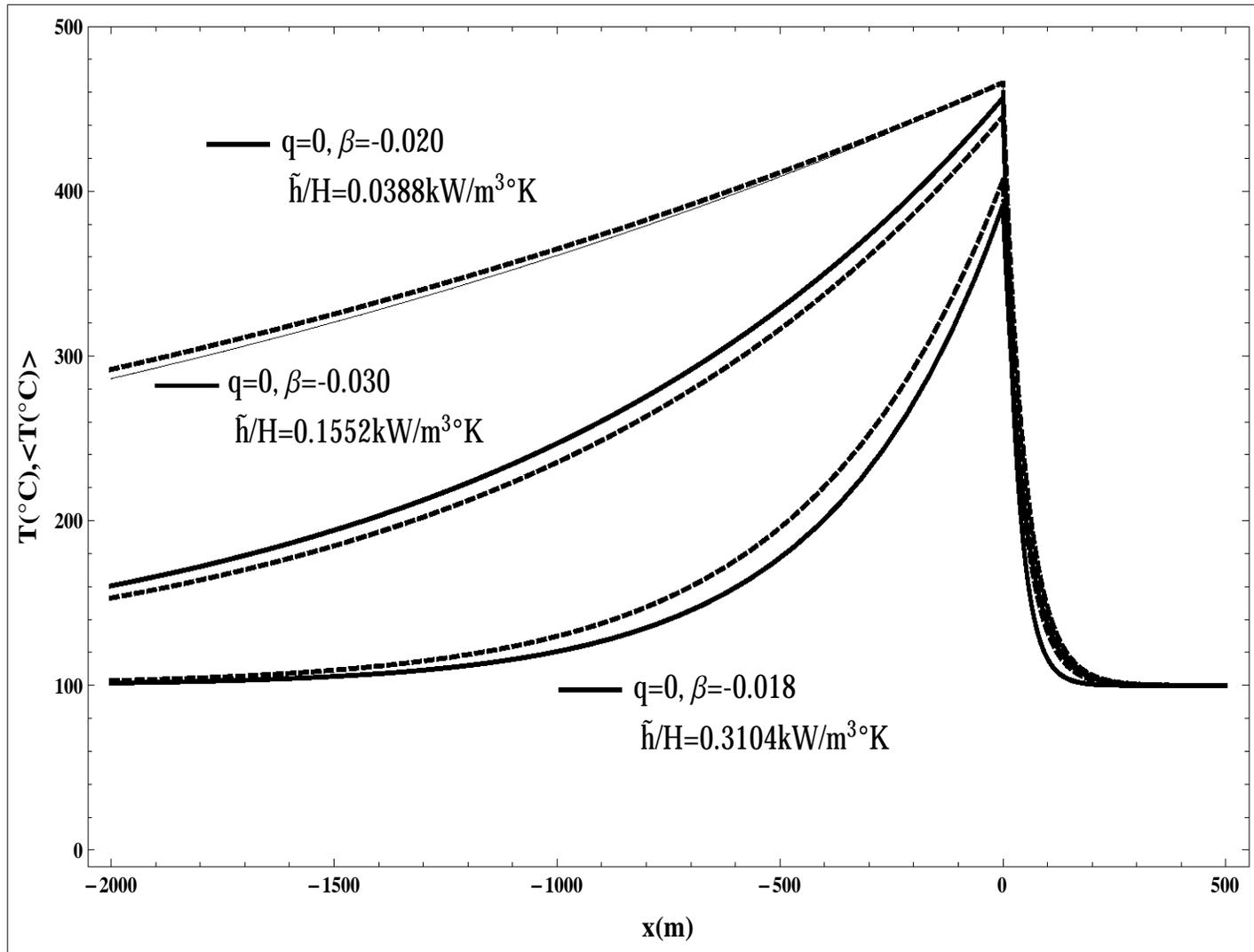


Figura 5.13: Distribución de temperatura para el modelo determinista y para el modelo estocástico.

## 5.3. Modelo estocástico con ruido simultáneo en la velocidad del frente de la onda y en el coeficiente de transferencia de calor

### 5.3.1. Construcción y solución del modelo

Para este caso, se asume que los coeficientes advectivo y difusivo en la ecuación (3.52) son variables espacialmente aleatorias. En este sentido, éstos se escriben como la suma de una componente determinista y una componente estocástica, es decir

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \beta_0 + q_\beta \sigma_\beta(x) \\ h(x) &= h_0 + q_h \sigma_h(x)\end{aligned}\tag{5.81}$$

aquí,  $q_\beta$  y  $q_h$  representan parámetros que miden la intensidad del ruido introducido en el sistema. Mientras que  $\sigma_\beta(x)$  y  $\sigma_h(x)$  denotan funciones de ruido. El valor de estas funciones no es explícito, sin embargo, algunas de sus propiedades estadísticas tales como su ancho de correlación  $x$  entre dos posiciones  $x_1$  y  $x_2$ , el valor medio de las funciones de ruido y su coeficiente de correlación, están bien determinados.

La ecuación (3.52), en términos de las expresiones (5.81), se convierte en una ecuación diferencial con ruido multiplicativo y ruido aditivo de la forma,

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - (\beta_0 + q_\beta \sigma_\beta(x)) \frac{d\theta}{dx} - (h_0 + q_h \sigma_h(x)) \theta = -(h_0 + q_h \sigma_h(x)).\tag{5.82}$$

El cambio de variable  $\theta = \phi_1$ , implica que

$$\frac{d\phi_1}{dx} = -\sqrt{h_0} \phi_2.\tag{5.83}$$

Si se sustituye la ecuación (5.83) junto con su derivada en la ecuación (5.82), se tiene

la siguiente ecuación en términos de las funciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$ ,

$$\frac{d\phi_2}{dx} = (\beta_0 + q_\beta\sigma_\beta)\phi_2 - \left( \sqrt{h_0} + \frac{q_h\sigma_h}{\sqrt{h_0}} \right) \phi_1 + \sqrt{h_0} + \frac{q_h\sigma_h}{\sqrt{h_0}}. \quad (5.84)$$

Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones (5.83) y (5.84) puede ser escrito como el sistema matricial,

$$\frac{d\Psi}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{h_0} \\ -\sqrt{h_0} - \frac{q_h\sigma_h(x)}{\sqrt{h_0}} & \beta_0 + q_\beta\sigma_\beta(x) \end{pmatrix} \Psi + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{h_0} + \frac{q_h\sigma_h(x)}{\sqrt{h_0}} \end{pmatrix}, \quad (5.85)$$

donde  $\Psi = (\phi_1, \phi_2) = (\theta, (-1/\sqrt{h_0})d\phi_1/dx)^t$ . Mediante la teoría de ecuaciones estocásticas, se puede obtener una aproximación para el promedio  $\langle \Psi \rangle$  de la ecuación lineal (5.85). Sea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{h_0} \\ -\sqrt{h_0} - \frac{q_h\sigma_h(x)}{\sqrt{h_0}} & \beta_0 + q_\beta\sigma_\beta(x) \end{pmatrix}, \quad (5.86)$$

con componentes,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{h_0} \\ -\sqrt{h_0} & \beta_0 \end{pmatrix} \text{ y } A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{q_h\sigma_h(x)}{\sqrt{h_0}} & q_\beta\sigma_\beta(x) \end{pmatrix}. \quad (5.87)$$

Como antes,  $A_0$  denota una matriz determinista y  $A_1(x)$  representa una matriz estocástica. Sin pérdida de generalidad, la última matriz en la ecuación (5.87) también puede separarse como  $A_1(x) = A_\beta(x) + A_h(x)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \langle A_1(x)e^{A_0\chi}A_1(x-\chi) \rangle \rangle &= \langle \langle (A_\beta + A_h)e^{A_0\chi}(A_{\beta'} + A_{h'}) \rangle \rangle & (5.88) \\ &= \langle \langle (A_\beta e^{A_0\chi}A_{\beta'} + A_h e^{A_0\chi}A_{\beta'} + A_\beta e^{A_0\chi}A_{h'} + A_h e^{A_0\chi}A_{h'}) \rangle \rangle \\ &= \langle \langle A_\beta(x)e^{A_0\chi}A_\beta(x-\chi) \rangle \rangle + \langle \langle A_h(x)e^{A_0\chi}A_h(x-\chi) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

En la ecuación (5.88), se asume que las matrices  $A_\beta$  y  $A_h$  son estadísticamente independientes, por lo tanto los términos  $\langle\langle A_h e^{A_0 \chi} A_{\beta'} \rangle\rangle$  y  $\langle\langle A_\beta e^{A_0 \chi} A_{h'} \rangle\rangle$  son nulos. Explicítamente,

$$A_\beta(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_\beta \sigma_\beta(x) \end{pmatrix} \text{ y } A_h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{q_h \sigma_h(x)}{\sqrt{h_0}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.89)$$

donde  $A_\beta(x)$  y  $A_h(x)$  son las matrices de las contribuciones determinista y estocástica de ruido en los parámetros  $\beta(x)$  y  $h(x)$ , respectivamente. Análogamente, de la ecuación (5.85), se deduce el vector

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{h_0} + \frac{q_h \sigma_h(x)}{\sqrt{h_0}} \end{pmatrix}, \quad (5.90)$$

nuevamente, se separa este vector en una parte determinista  $f_0$  y otra parte estocástica  $f_1(x)$ , así

$$f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{h_0} \end{pmatrix} \text{ y } f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_h \sigma_h(x)}{\sqrt{h_0}} \end{pmatrix}. \quad (5.91)$$

Ahora, se hace un desarrollo exponencial de la matriz  $A_0$  en serie de Taylor

$$e^{A_0 \chi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_0 \chi)^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\beta_0}{2} \chi} \Omega_{11} & -\frac{\sqrt{h_0}}{\omega} \Omega_{12} \\ -\frac{\sqrt{h_0}}{\omega} \Omega_{21} & e^{\frac{\beta_0}{2} \chi} \Omega_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.92)$$

donde los elementos  $\Omega_{ij}$ , son las funciones

$$\Omega_{11}(\chi) \equiv \left( \cosh \left[ \frac{\omega}{2} \chi \right] - \frac{\beta_0 \sinh \left[ \frac{\omega}{2} \chi \right]}{\omega} \right), \quad (5.93)$$

$$\Omega_{12}(\chi) = \Omega_{21}(\chi) \equiv (e^{\omega \chi} - 1) e^{\frac{1}{2}(\beta_0 - \omega)\chi} \quad (5.94)$$

y

$$\Omega_{22}(\chi) \equiv \left( \cosh \left[ \frac{\omega}{2} \chi \right] + \frac{\beta_0 \sinh \left[ \frac{\omega}{2} \chi \right]}{\omega} \right), \quad (5.95)$$

en las expresiones (5.93), (5.94) y (5.95) se define  $\omega = \sqrt{4h_0 + \beta_0^2}$ . Con el propósito de simplificar la notación, se introducen las siguientes definiciones,

$$\Pi_{1\beta}(x) = \langle\langle A_\beta(x)e^{A_0x}A_\beta(x-\chi)\rangle\rangle, \quad (5.96)$$

$$\Pi_{1h}(x) = \langle\langle A_h(x)e^{A_0x}A_h(x-\chi)\rangle\rangle, \quad (5.97)$$

y

$$\Pi_{2h}(x) = \langle\langle A_h(x)e^{A_0x}f_1(x-\chi)\rangle\rangle. \quad (5.98)$$

Ahora, se calculan explícitamente los siguientes productos,

$$\Omega_1 \equiv \Pi_{1\beta}(x)e^{-\chi A_0} \langle\Psi(x)\rangle, \quad (5.99)$$

$$\Omega_2 \equiv \Pi_{1h}(x)e^{-\chi A_0} \langle\Psi(x)\rangle, \quad (5.100)$$

$$\Omega_3 \equiv \Pi_{1\beta}(x)(e^{-\chi A_0} - I)A_0^{-1}f_0 \quad (5.101)$$

y finalmente

$$\Omega_4 \equiv \Pi_{1h}(x)(e^{-\chi A_0} - I)A_0^{-1}f_0, \quad (5.102)$$

entonces

$$\Omega_1 = q_1^2 \Gamma_\beta(\chi) \left( \begin{array}{c} 0 \\ \frac{2h_0 + \beta_0^2 + 2h_0 \cosh \omega \chi}{\sqrt{h_0} \omega^2} \langle \frac{d\theta}{dx} \rangle + \frac{\sqrt{h_0}(\beta_0 \cosh \omega \chi + \omega \sinh \omega \chi - \beta_0)}{\omega^2} \langle \theta \rangle \end{array} \right), \quad (5.103)$$

$$\Omega_2 = q_2^2 \Gamma_h(\chi) \left( \begin{array}{c} 0 \\ \frac{2(\cosh \omega \chi - 1)}{\sqrt{h_0} \omega^2} \langle \frac{d\theta}{dx} \rangle + \frac{(\beta_0 - \beta_0 \cosh \omega \chi - \omega \sinh \omega \chi)}{\sqrt{h_0} \omega^2} \langle \theta \rangle \end{array} \right), \quad (5.104)$$

$$\Omega_3 = q_1^2 \Gamma_\beta(\chi) \left( \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\sqrt{h_0}(\beta_0 - \beta_0 \cosh \omega \chi - \omega \sinh \omega \chi)}{\omega^2} \end{array} \right), \quad (5.105)$$

y

$$\Omega_4 = q_2^2 \Gamma_h(\chi) \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_{21} \left( 1 - e^{-\frac{\beta_0}{2} \chi} \Omega_{22} \right) \\ -\frac{\Omega_{21}}{\sqrt{h_0 \omega}} \end{pmatrix}. \quad (5.106)$$

En las expresiones (5.103)-(5.106),  $\Gamma_\beta(\chi) \equiv \langle \langle \sigma_\beta(x) \sigma_\beta(x - \chi) \rangle \rangle$  y  $\Gamma_h(\chi) \equiv \langle \langle \sigma_h(x) \sigma_h(x - \chi) \rangle \rangle$  se definen como coeficientes de correlación Markovianos. Además de los productos anteriores, también es necesario calcular,

$$A_0 \langle \Psi(x) \rangle = \begin{pmatrix} \langle \frac{d\theta}{dx} \rangle \\ -\sqrt{h_0} \langle \theta \rangle - \frac{\beta_0}{\sqrt{h_0}} \langle \frac{d\theta}{dx} \rangle \end{pmatrix}, \quad (5.107)$$

$$\langle A_1(x) \rangle \langle \Psi(x) \rangle = q_\beta \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\langle \sigma_\beta(x) \rangle}{\sqrt{h_0}} \langle \frac{d\theta}{dx} \rangle \end{pmatrix} + q_h \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\langle \sigma_h(x) \rangle}{\sqrt{h_0}} \langle \theta \rangle \end{pmatrix} \quad (5.108)$$

y

$$\Pi_{2h}(x) = q_2^2 \Gamma_h(\chi) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Omega_{21}}{\sqrt{h_0 \omega}} \end{pmatrix}. \quad (5.109)$$

Insertando las cantidades requeridas en la ecuación (4.26), y después de algunas simplificaciones, se llega a

$$\frac{d\langle \theta \rangle}{dx} = \left\langle \frac{d\theta}{dx} \right\rangle \quad (5.110)$$

y

$$\frac{d^2 \langle \theta \rangle}{dx^2} - K_1 \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} - K_2 \langle \theta \rangle + K_3 = 0, \quad (5.111)$$

donde,

$$K_1 = (\beta_0 + q_\beta \langle \sigma_\beta \rangle - q_h^2 I_1 + q_\beta^2 I_3), \quad (5.112)$$

$$K_2 = (h_0 + q_h \langle \sigma_h \rangle - q_\beta^2 I_4 - q_h^2 I_2) \quad (5.113)$$

y

$$K_3 = (h_0 + q_h \langle \sigma_h \rangle - q_h^2 I_5 + q_\beta^2 I_6 + q_h^2 I_7). \quad (5.114)$$

Donde, las integrales son

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{2\Gamma_h(\chi) (\cosh \omega\chi - 1)}{\omega^2} d\chi, \quad (5.115)$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\Gamma_h(\chi) (\beta_0 - \beta_0 \cosh \omega\chi - \omega \sinh \omega\chi)}{\omega^2} d\chi, \quad (5.116)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\Gamma_\beta(\chi) (2h_0 + \beta_0^2 + 2h_0 \cosh \omega\chi)}{\omega^2} d\chi, \quad (5.117)$$

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{\Gamma_\beta(\chi) h_0 (\beta_0 \cosh \omega\chi + \omega \sinh \omega\chi - \beta_0)}{\omega^2} d\chi, \quad (5.118)$$

$$I_5 = \int_0^\infty \frac{\Gamma_h(\chi) \Omega_{21} \left(1 - e^{-\frac{\beta_0}{2}\chi} \Omega_{22}\right)}{\omega} d\chi \quad (5.119)$$

$$I_6 = \int_0^\infty \frac{\Gamma_\beta(\chi) h_0 (\beta_0 - \beta_0 \cosh \omega\chi - \omega \sinh \omega\chi)}{\omega^2} d\chi \quad (5.120)$$

y

$$I_7 = \int_0^\infty \frac{\Gamma_h(\chi) \Omega_{21}}{\omega} d\chi \quad (5.121)$$

La ecuación (5.111), representa el modelo estocástico. Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación determinista (3.52) y a diferencia de ésta, solamente aparecen componentes de ruido en los coeficientes y en el término independiente. El modelo estocástico es consistente con el modelo determinista, porque si  $q_\beta = q_h = 0$  o  $\Gamma_\beta(\chi) = \Gamma_h(\chi) = 0$ , entonces se recupera la ecuación (3.52). También es importante mencionar que cuando  $q_\beta = 0$  y  $q_h \neq 0$  se tiene ruido solamente en el coeficiente de transferencia de calor  $h$ . Por otro lado, si  $q_\beta \neq 0$  y  $q_h = 0$  la presencia de ruido es solamente en la velocidad del frente  $\beta$ . Estas dos últimas aseveraciones son consistentes con los casos tratados en las secciones 5.1 y 5.2.

En este trabajo, se resuelve la ecuación (5.111) bajo las suposiciones siguientes:

1) El valor medio de las funciones de ruido en los parámetros  $\beta$  y  $h$  es nulo, es decir,  $\langle \sigma_\beta(x) \rangle = \langle \sigma_h(x) \rangle = 0$ . 2)  $\Gamma_\beta(\chi) = e^{-\lambda_\beta|\chi|}$  para la parte en  $\beta$  y  $\Gamma_h(\chi) = e^{-\lambda_h|\chi|}$  para la contribución  $h$ , donde  $x_\beta \equiv 1/\lambda_\beta$  and  $x_h \equiv 1/\lambda_h$  son los correspondientes anchos de estas correlaciones. 3)  $\langle \theta(\infty) \rangle = \langle \theta(-\infty) \rangle = 1$  y  $d\langle \theta \rangle / dx \big|_{0^-}^{0^+} = -q_1 V_D$ .

De esta manera, el valor esperado de la correspondiente solución hacia atrás del frente de combustión y la correspondiente solución hacia adelante del frente de combustión es:

$$\langle T(x) \rangle = \begin{cases} T_0 + \frac{qT_0}{\sqrt{1+4K_2/K_1^2}} e^{\frac{(K_1 - \sqrt{4K_2+K_1^2})}{2}x}; & x > 0 \\ T_0 + \frac{qT_0}{\sqrt{1+4K_2/K_1^2}} e^{\frac{(K_1 + \sqrt{4K_2+K_1^2})}{2}x}; & x < 0, \end{cases} \quad (5.122)$$

donde ahora,

$$K_1 = \beta_0 + \frac{(2h_0 + \beta_0^2 - \lambda_\beta^2)}{4h_0\lambda_\beta + \beta_0^2\lambda_\beta - \lambda_\beta^3} q_\beta^2 + \frac{2}{4h_0\lambda_h + \beta_0^2\lambda_h - \lambda_h^3} q_h^2 \quad (5.123)$$

y

$$K_2 = K_3 = h_0 + \frac{h_0(\beta_0 + \lambda_\beta)}{4h_0\lambda_\beta + \beta_0^2\lambda_\beta - \lambda_\beta^3} q_\beta^2 - \frac{(\beta_0 + \lambda_h)}{4h_0\lambda_h + \beta_0^2\lambda_h - \lambda_h^3} q_h^2 \quad (5.124)$$

Aquí, como antes  $\beta_0 \approx -V_D$ . Se puede ver que cuando  $q_\beta = 0$ , entonces  $K_1$  y  $K_2$  se reducen a las expresiones (5.70)-(5.71), por lo tanto, sólo hay ruido en el coeficiente de transferencia de calor  $h$  y el problema se reduce al ya tratado en la sección 5.2. Si  $q_h = 0$ ,  $K_1$  y  $K_2$  se simplifican a las expresiones (5.25)-(5.26), en este caso sólo hay ruido en la velocidad del frente  $\beta$  y el problema se reduce ahora, al tratado en la sección 5.1.

### 5.3.2. Segundos momentos

Para calcular la varianza, se propone el siguiente cambio de variable  $\Theta = \theta - 1$  en la ecuación (3.52), así ésta se convierte en

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - \beta\frac{d\Theta}{dx} - h\Theta = 0. \quad (5.125)$$

Sea  $\Psi_1 = \Theta$  y  $\Psi_2 = d\Psi_1/dx$  entonces  $d^2\Psi_1/dx^2 = d\Psi_2/dx$ , de esta manera se consigue un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_2}{dx} - \beta\Psi_2 - h\Psi_1 &= 0, \\ \frac{d\Psi_1}{dx} - \Psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Si se multiplican las ecuaciones (5.126) por  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$ , se llega al siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1^2}{dx} &= 2\Psi_1\Psi_2 \\ \frac{d\Psi_2^2}{dx} &= 2\beta\Psi_2^2 + 2h\Psi_1\Psi_2 \\ \frac{d\Psi_1\Psi_2}{dx} &= h\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \beta\Psi_1\Psi_2. \end{aligned} \quad (5.127)$$

En una forma matricial,  $d\vec{\Phi}/dx = M\vec{\Phi}$  y separando como antes, en una matriz determinista y una matriz estocástica, se tiene

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2\beta_0 & 2h_0 \\ h_0 & 1 & \beta_0 \end{pmatrix} \quad (5.128)$$

$$M_{1\beta}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_\beta\sigma_\beta & 0 \\ 0 & 0 & q_\beta\sigma_\beta \end{pmatrix} \quad (5.129)$$

y

$$M_{1h}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_h\sigma_h \\ q_h\sigma_h & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.130)$$

Después de hacer los cálculos apropiados con las ecuaciones (5.128)-(5.130) e insertarlos en la ecuación (4.26), se llega finalmente a un sistema equivalente al dado por (5.127) pero para el promedio que contiene ruido, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\phi_1\rangle}{dx} &= 2\langle\phi_3\rangle \\ \frac{d\langle\phi_2\rangle}{dx} &= Q_1\langle\phi_1\rangle + Q_2\langle\phi_2\rangle + Q_3\langle\phi_3\rangle \\ \frac{d\langle\phi_3\rangle}{dx} &= Q_4\langle\phi_1\rangle + Q_5\langle\phi_2\rangle + Q_6\langle\phi_3\rangle, \end{aligned} \quad (5.131)$$

donde,

$$\begin{aligned} \langle\phi_1\rangle &= \langle\Psi_1^2\rangle = \langle\Theta^2\rangle = \langle(\theta - 1)^2\rangle = \left\langle \left( \frac{T}{T_0} \right)^2 \right\rangle - 2 \left\langle \frac{T}{T_0} \right\rangle + 1 \\ \langle\phi_2\rangle &= \langle\Psi_2^2\rangle = \left\langle \left( \frac{d\Theta}{dx} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{T_0^2} \left\langle \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 \right\rangle \\ \langle\phi_3\rangle &= \langle\Psi_1\Psi_2\rangle = \left\langle \Theta \frac{d\Theta}{dx} \right\rangle = \frac{1}{T_0^2} \left\langle (T - T_0) \frac{dT}{dx} \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.132)$$

y donde los coeficientes  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  son las constantes definidas por

$$Q_1 = q_h^2 I_{10} \quad (5.133)$$

$$Q_2 = (2\beta_0 + 2q_\beta \langle\sigma_\beta\rangle + q_\beta^2 I_8 + q_h^2 I_{11}) \quad (5.134)$$

$$Q_3 = (2h_0 + 2q_h \langle\sigma_h\rangle + q_h^2 I_9) \quad (5.135)$$

$$Q_4 = (h_0 + q_h \langle\sigma_h\rangle + q_h^2 I_{15} + q_\beta^2 I_6) \quad (5.136)$$

$$Q_5 = (1 + q_\beta^2 I_{13}) \quad (5.137)$$

$$Q_6 = (\beta_0 + q_\beta \langle\sigma_\beta\rangle + q_\beta^2 I_{14} + q_h^2 I_{11}). \quad (5.138)$$

Aquí, las integrales se definen como  $I_8 = 4I_3$ ,  $I_9 = 4I_6$ ,

$$I_{10} = \int_0^\infty \frac{2\Gamma_h(\chi)(2h_0 + 2h_0 \cosh(\omega\chi) + \beta_0^2 \cosh(\omega\chi) + \beta_0\omega \sinh(\omega\chi))}{\omega^2} d\chi, \quad (5.139)$$

$$I_{11} = \int_0^\infty \frac{2\Gamma_h(\chi)(2 - 2 \cosh(\omega\chi))}{\omega^2} d\chi, \quad (5.140)$$

$$I_{13} = \int_0^\infty \frac{\Gamma_\beta(\chi)(\beta_0 - \beta_0 \cosh(\omega\chi) + \omega \sinh(\omega\chi))}{\omega^2} d\chi, \quad (5.141)$$

$$I_{14} = \int_0^\infty \frac{\Gamma_\beta(\chi)(4h_0 + \beta_0^2)}{\omega^2} d\chi \quad (5.142)$$

y

$$I_{15} = \int_0^\infty \frac{2\Gamma_h(\chi)(\beta_0 \cosh(\omega\chi) - \beta_0 + \omega \sinh(\omega\chi))}{\omega^2} d\chi. \quad (5.143)$$

A continuación, se escriben las ecuaciones (5.131) como un sistema matricial

$$\frac{d\langle\Psi\rangle}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_4 & Q_5 & Q_6 \end{pmatrix} \langle\Psi\rangle, \quad (5.144)$$

donde el vector,  $\langle\Psi\rangle = (\langle\phi_1\rangle, \langle\phi_2\rangle, \langle\phi_3\rangle)^t$ . Para resolver el sistema (5.144), se consideran las tres condiciones antes impuestas, de esta manera

$$Q_1 = \frac{2\lambda_h^2 + 2\beta_0\lambda_h - 4h_0}{\lambda_h^3 - (4h_0\lambda_h + \beta_0^2\lambda_h)} q_h^2, \quad (5.145)$$

$$Q_2 = 2\beta_0 - \frac{(8h_0 + 4\beta_0^2 - 4\lambda_\beta^2)}{\lambda_\beta^3 - (4h_0\lambda_\beta + \beta_0^2\lambda_\beta)} q_\beta^2 + \frac{4}{4h_0\lambda_h + \beta_0^2\lambda_h - \lambda_h^3} q_h^2, \quad (5.146)$$

$$Q_3 = 2h_0 - \frac{4h_0(\beta_0 + \lambda_\beta)}{\lambda_\beta^3 - (4h_0\lambda_\beta + \beta_0^2\lambda_\beta)} q_\beta^2, \quad (5.147)$$

$$Q_4 = h_0 - \frac{h_0(\beta_0 + \lambda_\beta)}{\lambda_\beta^3 - (4h_0\lambda_\beta + \beta_0^2\lambda_\beta)}q_\beta^2 + \frac{2(\beta_0 + \lambda_h)}{\lambda_h^3 - (4h_0\lambda_h + \beta_0^2\lambda_h)}q_h^2, \quad (5.148)$$

$$Q_5 = 1 + \frac{(\lambda_\beta - \beta_0)}{\lambda_\beta^3 - (4h_0\lambda_\beta + \beta_0^2\lambda_\beta)}q_\beta^2 \quad (5.149)$$

y

$$Q_6 = \beta_0 + \frac{1}{\lambda_\beta}q_\beta^2 - \frac{4}{\lambda_h^3 - (4h_0\lambda_h + \beta_0^2\lambda_h)}q_h^2. \quad (5.150)$$

Nótese que si  $q_\beta = q_h = 0$  en las expresiones (5.145)-(5.150), se regresa al sistema original (5.127) sin ruido.

Por el principio de superposición, se propone una solución para (5.144) de la forma,

$$\langle \Psi(x) \rangle = \sum_{j=1}^3 C_j S_j e^{r_j x}, \quad (5.151)$$

donde  $C_j$  son constantes que se determinan a partir de las condiciones de frontera y  $S_j$  son los correspondientes vectores propios asociados a los valores propios  $r_j$  de la matriz del sistema (5.144). En este caso, dos valores propios son complejos conjugados,  $r_3 = \bar{r}_2$ , por lo tanto, los vectores propios  $S_3 = \bar{S}_2$  también son conjugados. Sea  $r_1 = a_1$  y  $r_2 = a + bi$  con  $a_1, a \in R$ . Entonces  $\langle \Psi \rangle = \sum_{j=1}^3 C_j \langle \Phi_j \rangle$ , explícitamente  $\langle \Phi_1 \rangle = V_1 e^{a_1 x}$ ,  $\langle \Phi_2 \rangle = [V_2 \cos bx - V_3 \sin bx] e^{ax}$  y  $\langle \Phi_3 \rangle = [V_3 \cos bx + V_2 \sin bx] e^{ax}$ . Aquí  $V_2 = Re(\bar{S}_1)$  y  $V_3 = Im(\bar{S}_1)$ , donde  $V_j = (u_j, v_j, w_j)^t$  son vectores para  $j = 1, 2, 3$ . En este punto se debe tener cuidado con los signos de  $a_1$  y  $a$  de tal manera que las soluciones adelante del frente y detrás del frente de combustión, determinadas por la condición de salto, satisfagan la condición de convergencia  $\langle T(\infty) \rangle = \langle T(-\infty) \rangle = T_0$ . Por lo tanto, de la condición de salto en el frente, se tienen dos casos.

Si  $a_1 > 0$  y  $a < 0$ , entonces

$$\langle T^2(x) \rangle = \begin{cases} C_2 T_0^2 [u_2 \cos bx - u_3 \sin bx] e^{ax} \\ + C_3 T_0^2 [u_3 \cos bx + u_2 \sin bx] e^{ax} \\ + \frac{2q_1 T_0^2}{\sqrt{1+4K_2/K_1^2}} e^{\frac{(K_1 - \sqrt{4K_2+K_1^2})}{2}x} + T_0^2, x > 0 \\ C_1 u_1 T_0^2 e^{a_1 x} + \frac{2q_1 T_0^2}{\sqrt{1+4K_2/K_1^2}} e^{\frac{(K_1 + \sqrt{4K_2+K_1^2})}{2}x} + T_0^2, x < 0, \end{cases} \quad (5.152)$$

$$\left\langle \left( \frac{dT(x)}{dx} \right)^2 \right\rangle = \begin{cases} C_2 T_0^2 [v_2 \cos bx - v_3 \sin bx] e^{ax} + \\ C_3 T_0^2 [v_3 \cos bx + v_2 \sin bx] e^{ax}, x > 0 \\ C_1 v_1 T_0^2 e^{a_1 x}, x < 0 \end{cases} \quad (5.153)$$

y

$$\left\langle T(x) \frac{dT(x)}{dx} \right\rangle = \begin{cases} C_2 T_0^2 [w_2 \cos bx - w_3 \sin bx] e^{ax} + \\ C_3 T_0^2 [w_3 \cos bx + w_2 \sin bx] e^{ax} + T_0 \left\langle \frac{dT(x)}{dx} \right\rangle, x > 0 \\ C_1 w_1 T_0^2 e^{a_1 x} - T_0 \left\langle \frac{dT(x)}{dx} \right\rangle, x < 0. \end{cases} \quad (5.154)$$

De la relación  $\sigma = \sqrt{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}$ , se encuentra la dispersión de la distribución de temperaturas en forma explícita,

$$\sigma(x) = \begin{cases} \left[ \begin{aligned} &C_2 T_0^2 [u_2 \cos bx - u_3 \sin bx] e^{ax} \\ &+ C_3 T_0^2 [u_3 \cos bx + u_2 \sin bx] e^{ax} \\ &- \frac{q_1^2 T_0^2 K_1^2}{4K_2 + K_1^2} e^{\frac{(K_1 - \sqrt{4K_2+K_1^2})}{2}x} \end{aligned} \right]^{1/2}, x > 0 \\ \left[ \begin{aligned} &C_1 u_1 T_0^2 e^{a_1 x} - \frac{q_1^2 T_0^2 K_1^2}{4K_2 + K_1^2} e^{\frac{(K_1 + \sqrt{4K_2+K_1^2})}{2}x} \end{aligned} \right]^{1/2}, x < 0. \end{cases} \quad (5.155)$$

En las soluciones (5.152-5.154) se aplican las condiciones de frontera para determinar las constantes  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ . Tomando en cuenta que en la posición  $x = 0$ , la solución detrás del frente de combustión es igual a la solución adelante del frente de combustión, se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas, siguiente:

$$\begin{aligned}
 u_1 C_1 - u_2 C_2 - u_3 C_3 &= 0 \\
 v_1 C_1 + v_2 C_2 + v_3 C_3 &= q_1^2 V_D^2 - \frac{2q_1^2 K_1^2 K_2}{4K_2 + K_1^2} \\
 w_1 C_1 - w_2 C_2 - w_3 C_3 &= q_1 V_D + \frac{q_1^2 V_D K_1 + q_1 K_1^2}{\sqrt{4K_2 + K_1^2}},
 \end{aligned} \tag{5.156}$$

a partir del cual se determinan tales constantes.

Si  $a_1 > 0$  y  $a > 0$ , se tiene

$$\langle T^2(x) \rangle = \begin{cases} \frac{2q_1 T_0^2}{\sqrt{1+4K_2/K_1^2}} e^{\frac{(K_1 - \sqrt{4K_2 + K_1^2})}{2} x} + T_0^2, & x > 0 \\ C_1 u_1 T_0^2 e^{a_1 x} + C_2 T_0^2 [u_2 \cos bx - u_3 \sin bx] e^{ax}, & x < 0 \\ + C_3 T_0^2 [u_3 \cos bx + u_2 \sin bx] e^{ax} \\ + \frac{2q_1 T_0^2}{\sqrt{1+4K_2/K_1^2}} e^{\frac{(K_1 + \sqrt{4K_2 + K_1^2})}{2} x} + T_0^2, \end{cases} \tag{5.157}$$

$$\left\langle \left( \frac{dT(x)}{dx} \right)^2 \right\rangle = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ C_1 v_1 T_0^2 e^{a_1 x} + C_2 T_0^2 [v_2 \cos bx - v_3 \sin bx] e^{ax} \\ + C_3 T_0^2 [v_3 \cos bx + v_2 \sin bx] e^{ax}, & x < 0, \end{cases} \tag{5.158}$$

$$\left\langle T(x) \frac{dT(x)}{dx} \right\rangle = \begin{cases} \frac{q_1 T_0^2}{\sqrt{1+4K_2/K_1^2}} \frac{(K_1 - \sqrt{4K_2 + K_1^2})}{2} e^{\frac{(K_1 - \sqrt{4K_2 + K_1^2})}{2} x}, & x > 0 \\ C_1 w_1 T_0^2 e^{a_1 x} + C_2 T_0^2 [w_2 \cos bx - w_3 \sin bx] e^{ax} \\ + C_3 T_0^2 [w_3 \cos bx + w_2 \sin bx] e^{ax} \\ - \frac{q_1 T_0^2}{\sqrt{1+4K_2/K_1^2}} \frac{(K_1 + \sqrt{4K_2 + K_1^2})}{2} e^{\frac{(K_1 + \sqrt{4K_2 + K_1^2})}{2} x}, & x < 0 \end{cases} \quad (5.159)$$

y

$$\sigma(x) = \begin{cases} \left[ -\frac{q_1^2 T_0^2 K_1^2}{4K_2 + K_1^2} e^{(K_1 - \sqrt{4K_2 + K_1^2})x} \right]^{1/2}, & x > 0 \\ C_1 u_1 T_0^2 e^{a_1 x} + C_2 T_0^2 [u_2 \cos bx - u_3 \sin bx] e^{ax} \\ + C_3 T_0^2 [u_3 \cos bx + u_2 \sin bx] e^{ax} \\ \left[ -\frac{q_1^2 T_0^2 K_1^2}{4K_2 + K_1^2} e^{(K_1 + \sqrt{4K_2 + K_1^2})x} \right]^{1/2}, & x < 0. \end{cases} \quad (5.160)$$

El sistema de ecuaciones para determinar  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  es,

$$\begin{aligned} u_1 C_1 + u_2 C_2 + u_3 C_3 &= 0 \\ v_1 C_1 + v_2 C_2 + v_3 C_3 &= q_1^2 V_D^2 - \frac{2q_1^2 K_1^2 K_2}{4K_2 + K_1^2} \\ w_1 C_1 - w_2 C_2 - w_3 C_3 &= q_1 V_D + \frac{q_1^2 V_D K_1 + q_1 K_1^2}{\sqrt{4K_2 + K_1^2}}. \end{aligned} \quad (5.161)$$

A continuación se dan algunos ejemplos, en donde además de los valores que se muestran en el cuadro 5.1, se usaron los datos siguientes, un ancho de correlación  $x_\beta = 0.05m$  que implica un valor de  $\lambda_\beta = 20m^{-1}$ ,  $x_h = 1.66m$  por lo

que  $\lambda_h = 0.6m^{-1}$  y  $h_0 = 0.06$ . Se fijó  $q_h = 0.002$  y se varió  $q_\beta$ . Para determinar  $\beta_0 = -0.0204564$ , se resolvió la ecuación trascendente (3.43). Véase la Fig. 5.14.

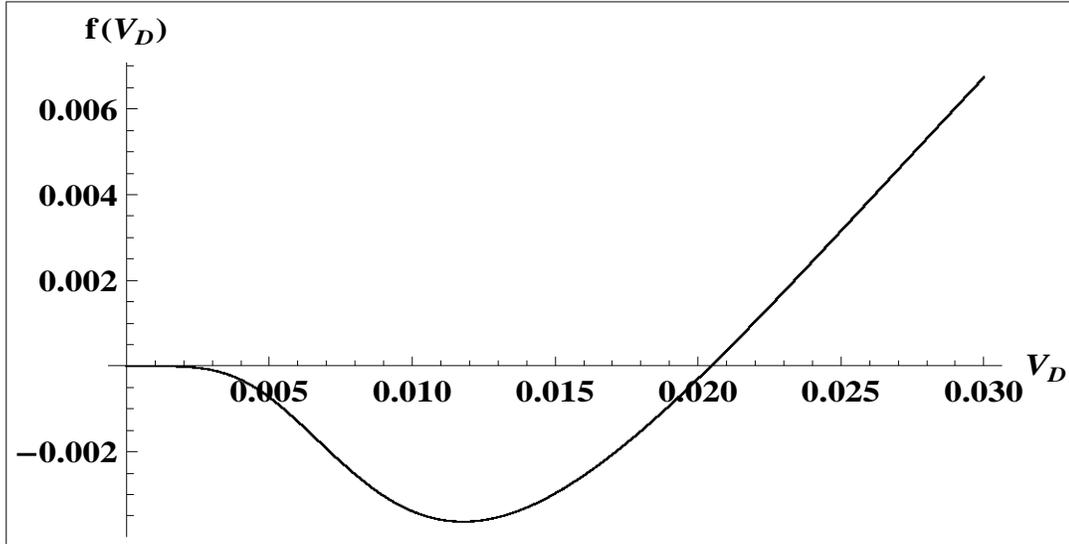


Figura 5.14: Solución de la ecuación trascendente para encontrar  $V_D = -\beta_0$ .

## 5.4. Análisis y discusión de resultados

Los resultados analíticos en este problema demuestran ser consistentes con los casos particulares previamente resueltos en las secciones 5.1 y 5.2. Las gráficas de las Figs. 5.15 - 5.23 representan el valor esperado  $\langle T \rangle$  de la distribución de temperatura y su correspondiente dispersión  $\sigma$ , en este contexto  $\langle T \rangle \pm \sigma$  representa el ancho en el cual pueden suceder los eventos para la distribución de temperatura. En este sentido  $\langle T \rangle$  es el promedio de una gran cantidad de eventos que sucedieron. El ejemplo en la Fig. 5.15, representa el caso cuando la intensidad en las fluctuaciones  $q_\beta = q_h = 0$ . En este caso, los valores propios  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ , son reales. Esto implica que la parte imaginaria del valor propio complejo  $r_2$  es  $b = 0$ , por lo tanto, no se tienen oscilaciones lo cual está en concordancia con la expresión para  $\sigma$ . Cuando la intensidad del

ruido  $q_\beta$  aumenta, la parte imaginaria del valor propio  $r_2$  es  $b \neq 0$ , en consecuencia, comienzan a aparecer oscilaciones en la región del lado derecho del frente, como se ve en la Fig. 5.16. Mientras la intensidad en las fluctuaciones  $q_\beta$  crece, la frecuencia de oscilación también crece y se puede ver con claridad que estas oscilaciones son periódicas y convergentes. Los ejemplos de las Figs. 5.17-5.19 ilustran esta situación. En estos ejemplos,  $a < 0$  y ésto es lo que determina que las oscilaciones ocurran al lado derecho del frente. En los ejemplos de las Figs. 5.20-5.23 también se observan oscilaciones periódicas y convergentes, ahora en el lado izquierdo del frente de combustión, en este caso  $a > 0$ . Debe notarse que cuando la intensidad en las fluctuaciones  $q_\beta$  sigue en aumento, la magnitud de  $b \rightarrow 0$ , por tanto, la frecuencia de oscilación disminuye, como se ilustra en los ejemplos de las Figs. 5.22 y 5.23. Estos resultados muestran, que la máxima dispersión del promedio de temperatura  $\langle T \rangle$ , se concentra en regiones muy cercanas a las zonas de reacción y combustión donde ocurre el frente. Estos resultados pueden ser útiles porque dan un indicio sobre como estimar la distribución de temperaturas en situaciones de campo donde se desconocen con precisión las propiedades del medio. En este sentido, para tener el mínimo error en la estimación del promedio  $\langle T \rangle$  se recomienda realizar las mediciones en los mínimos de las oscilaciones. Cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  el proceso se vuelve determinista. Es importante hacer notar que el valor esperado  $\langle T \rangle$  tiene un comportamiento hacia adelante y hacia atrás respecto del frente de combustión como el que se explicó a detalle en los problemas previos de las secciones 5.1 y 5.2. En el caso límite cuando  $q_\beta = 0$ , sólo se tiene ruido en el coeficiente de transferencia de calor  $h$  y se recupera el caso descrito en la sección 5.2. De igual manera, si  $q_h = 0$  el ruido sólo está presente en la velocidad del frente  $\beta$  que corresponde al problema estudiado de la sección 5.1. De manera general cuando  $q_\beta = q_h = 0$ , se recupera el caso determinista.

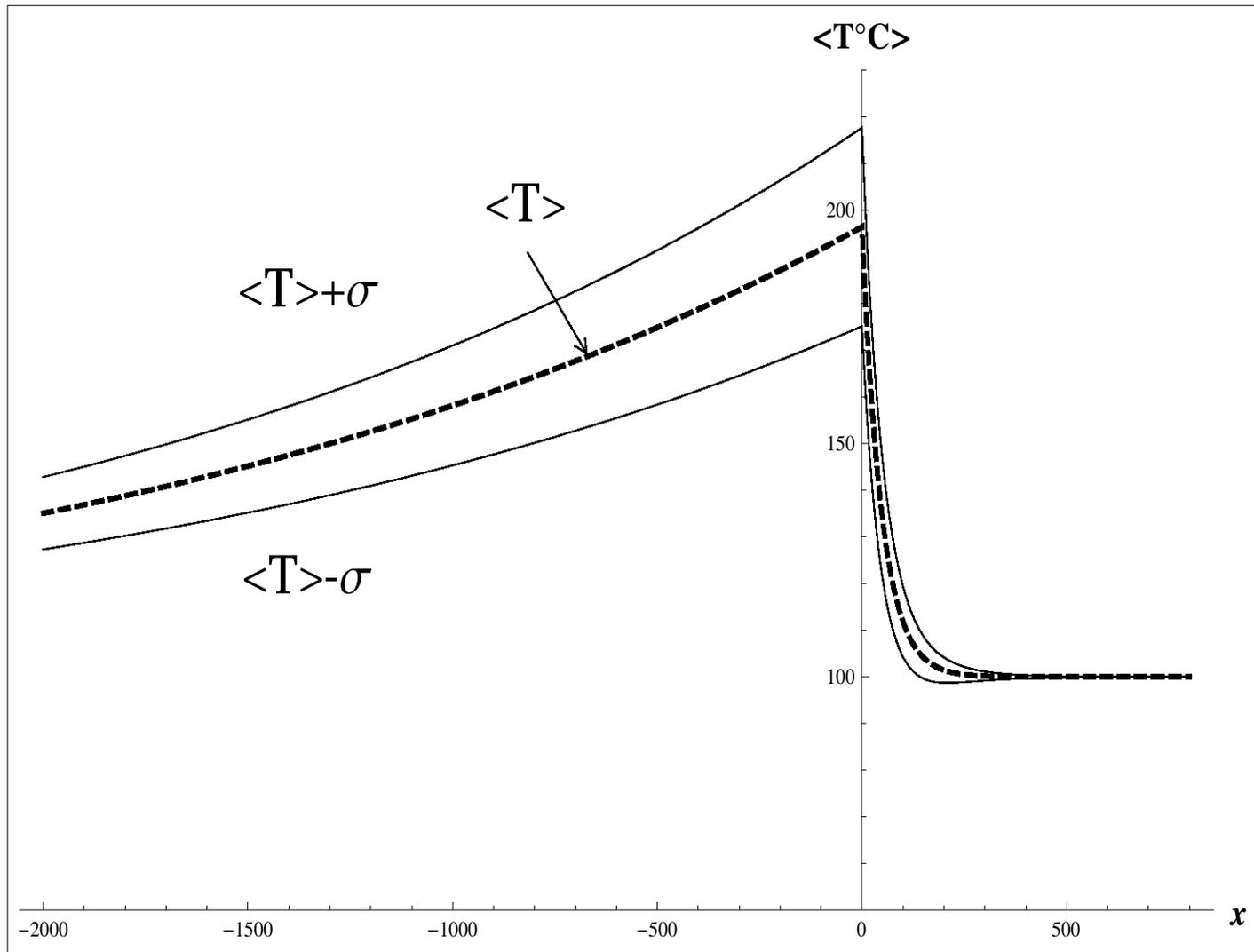


Figura 5.15: Distribución de temperatura para  $q_\beta = q_h = 0$ , y su dispersión  $\sigma$  para  $a < 0$ .

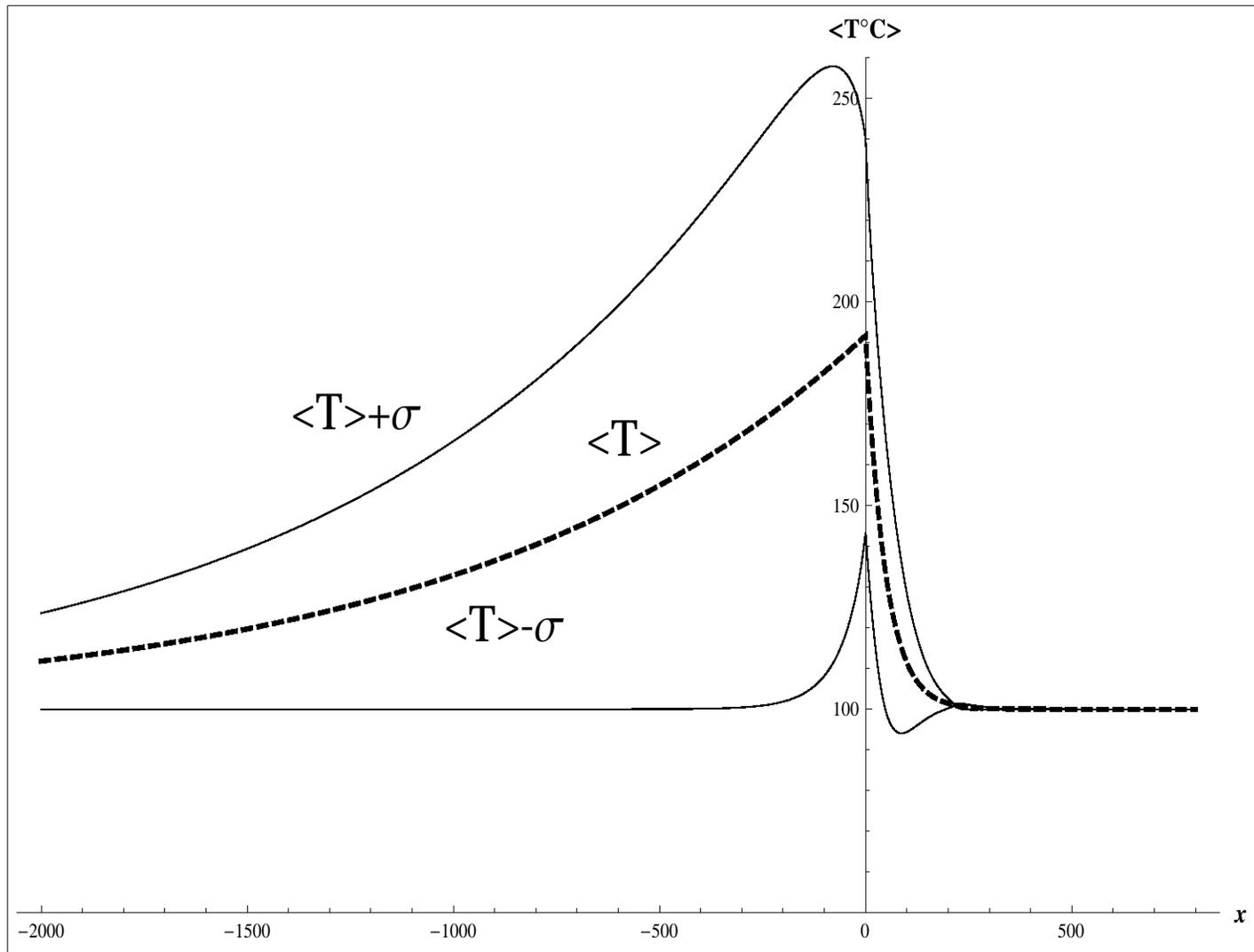


Figura 5.16: Distribución de temperatura para  $q_\beta = 0.1$ ,  $q_h = 0.002$ , y su dispersión  $\sigma$  para  $a < 0$ .

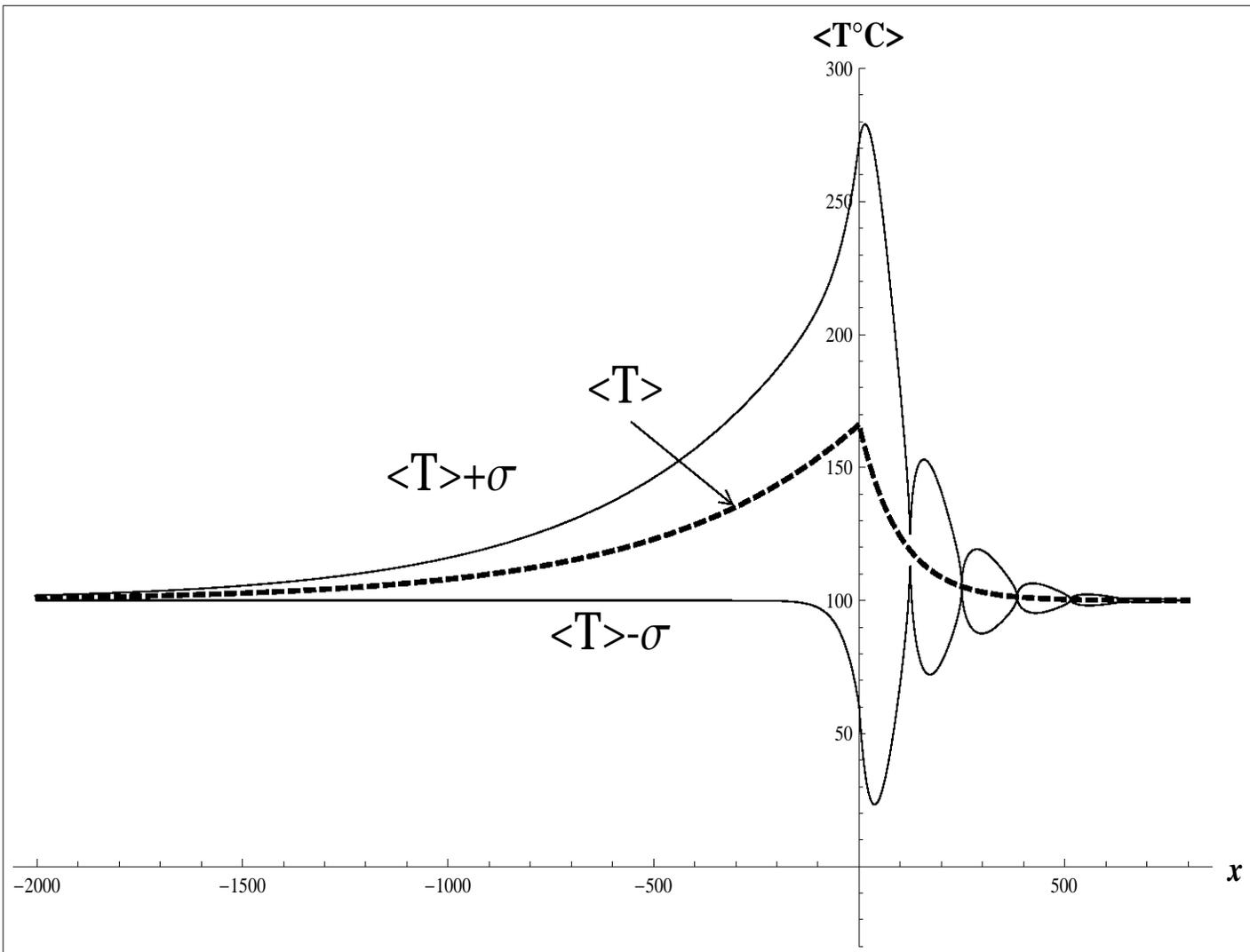


Figura 5.17: Distribución de temperatura para  $q_\beta = 0.5$ ,  $q_h = 0.002$ , y su dispersión  $\sigma$  para  $a < 0$ .

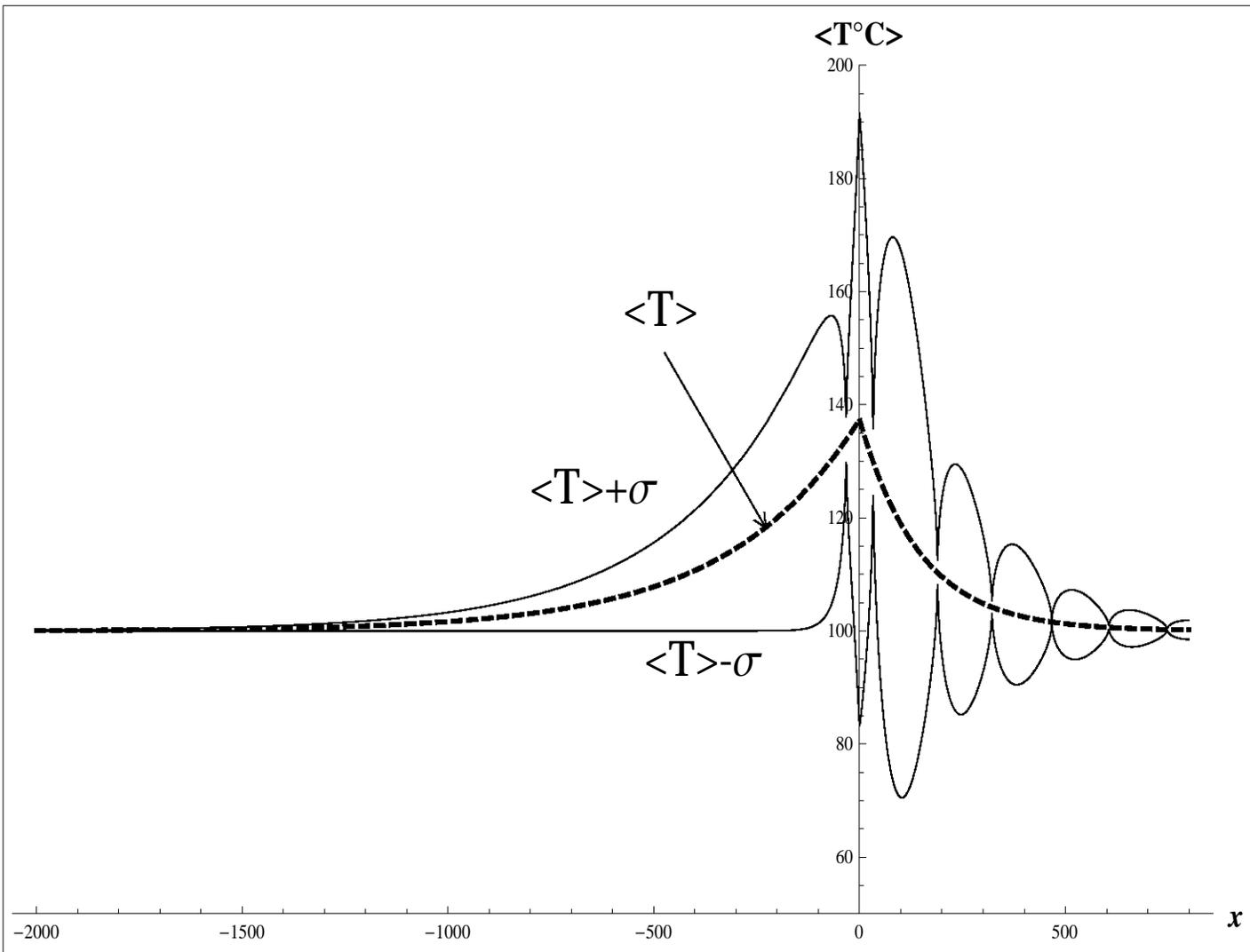


Figura 5.18: Distribución de temperatura para  $q_\beta = 0.58$ ,  $q_h = 0.002$ , y su dispersión  $\sigma$  para  $a < 0$ .

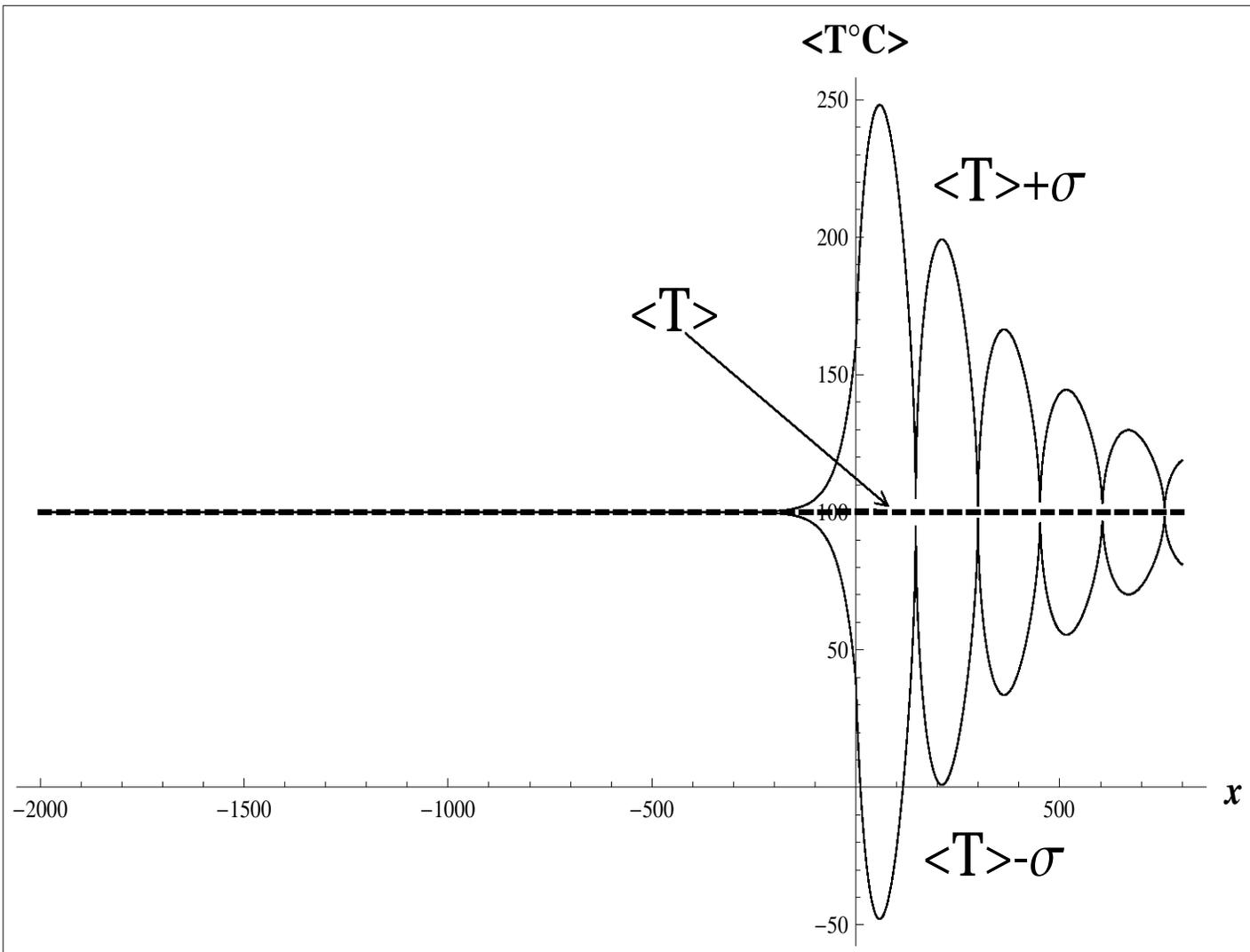


Figura 5.19: Distribución de temperatura para  $q_\beta = 0.640$ ,  $q_h = 0.002$ , y su dispersión  $\sigma$  para  $a < 0$ .

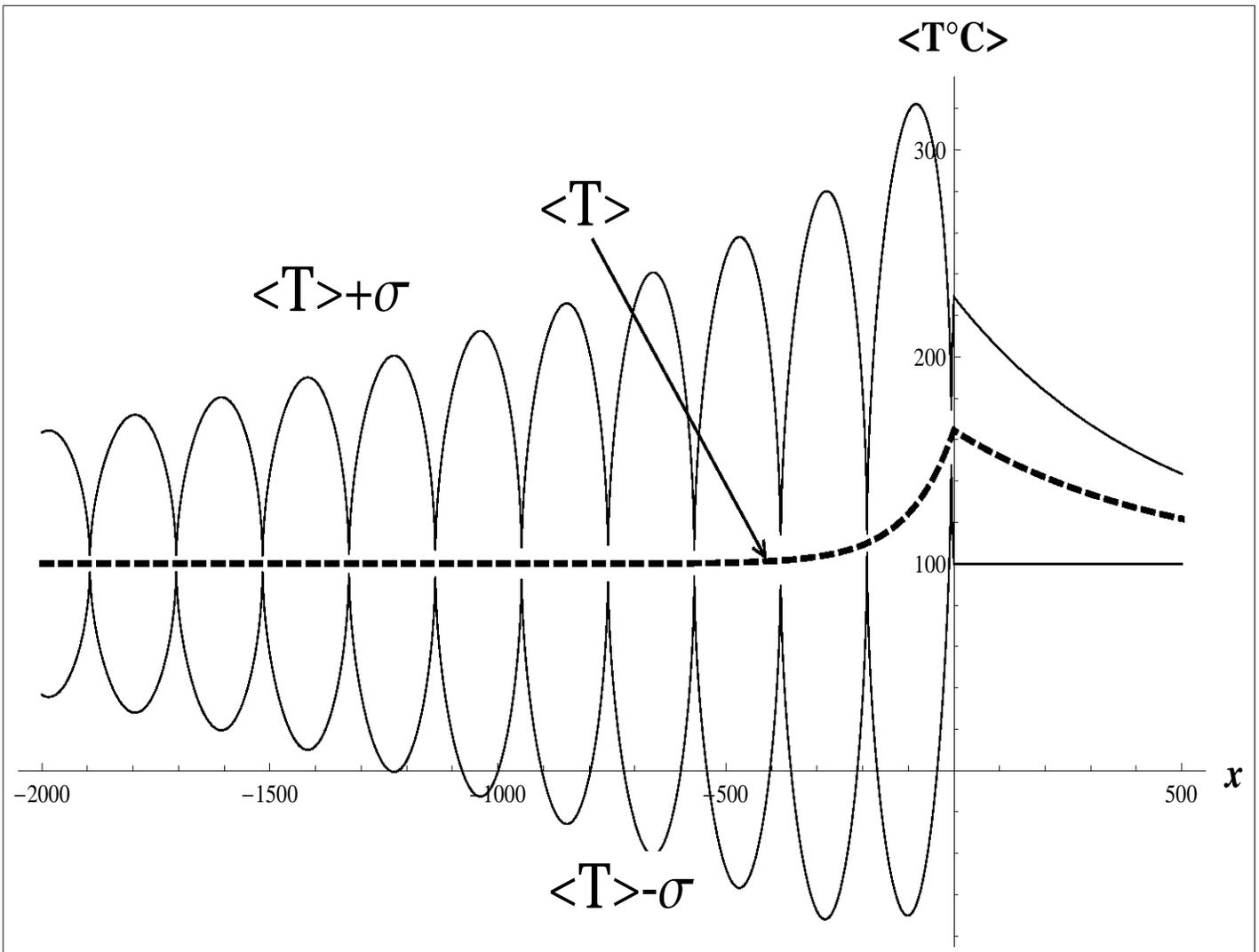


Figura 5.20: Distribución de temperatura para  $q_\beta = 0.75$ ,  $q_h = 0.002$ , y su dispersión  $\sigma$  para  $a > 0$ .

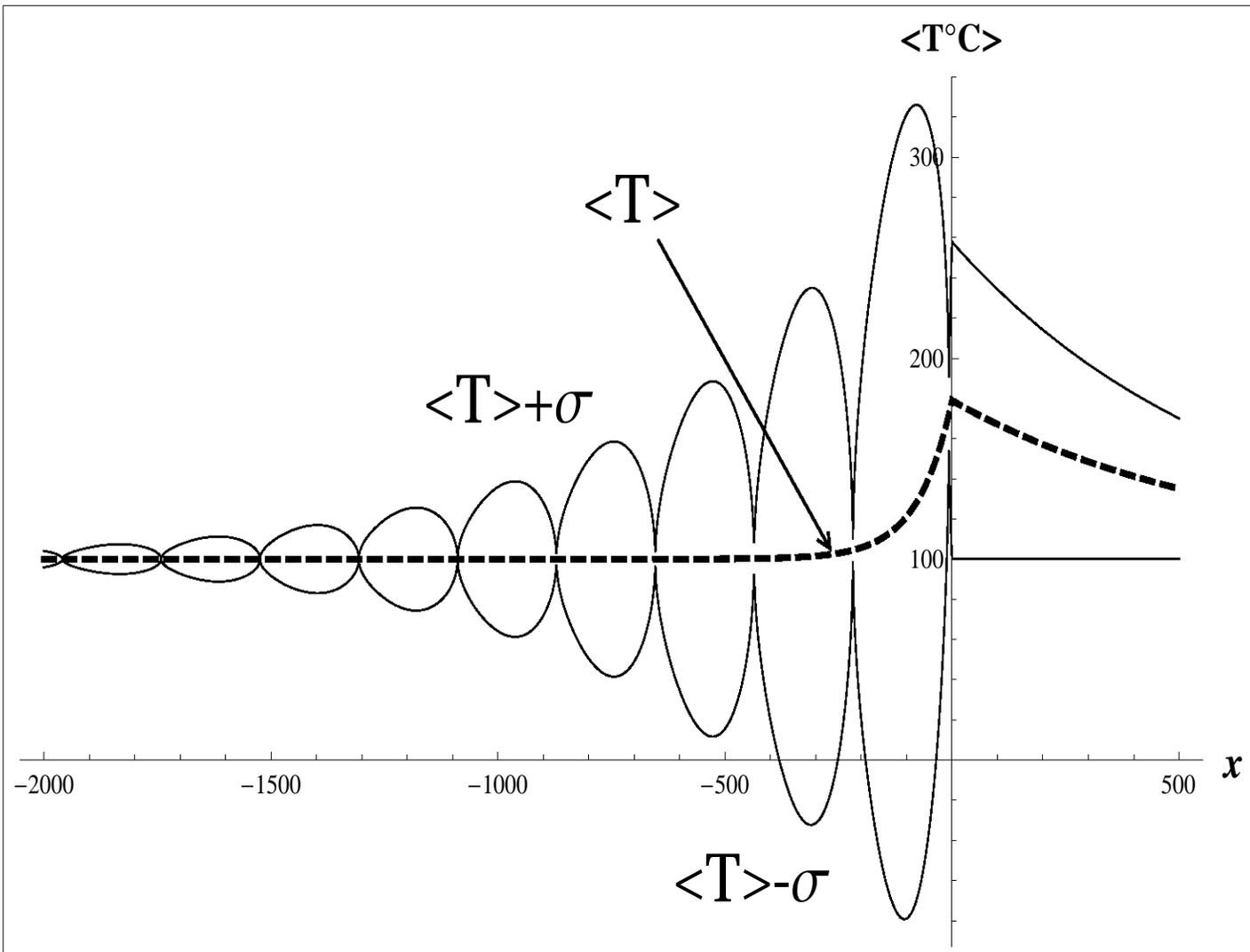


Figura 5.21: Distribución de temperatura para  $q_\beta = 0.8$ ,  $q_h = 0.002$ , y su dispersión  $\sigma$  para  $a > 0$ .

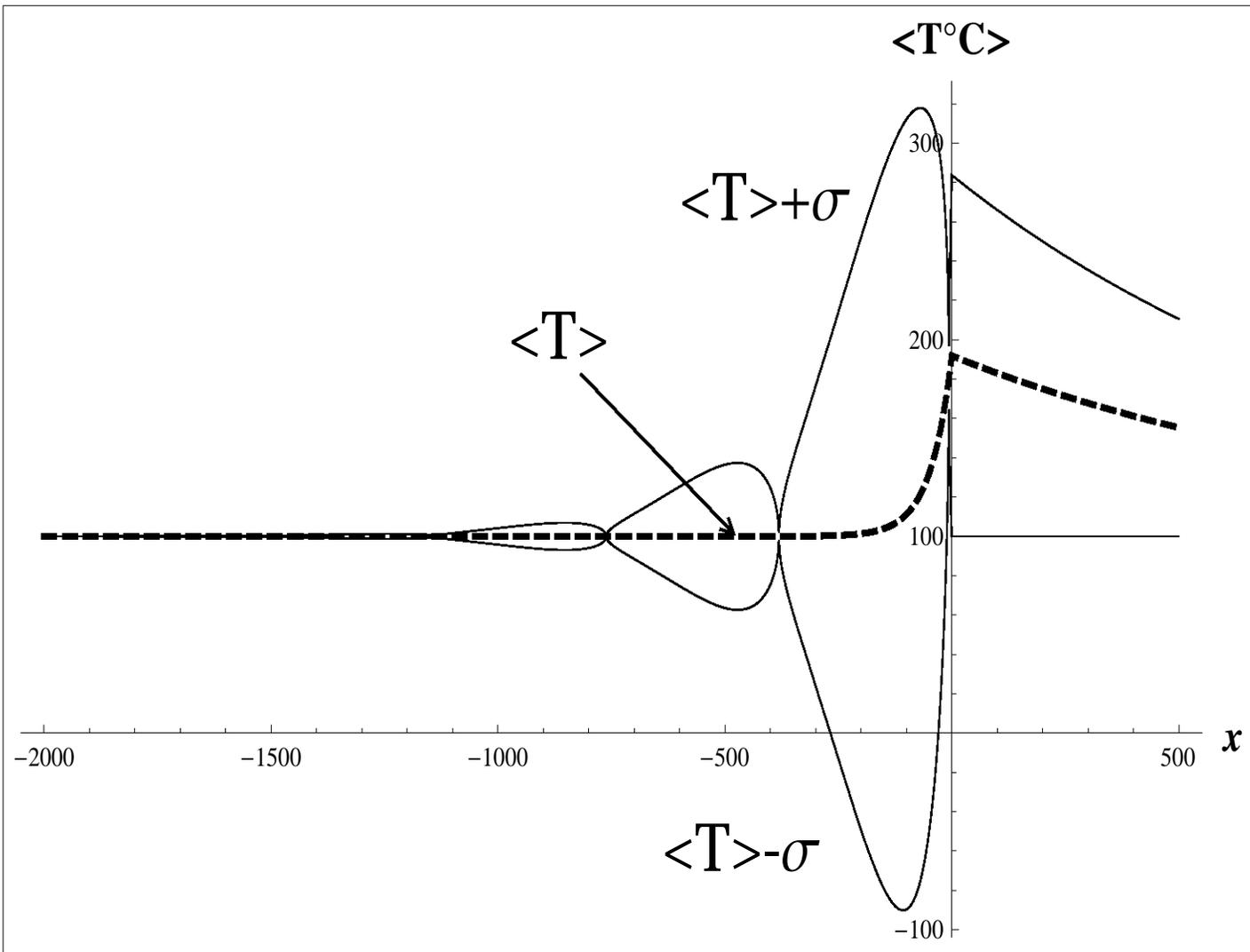


Figura 5.22: Distribución de temperatura para  $q_\beta = 0.9$ ,  $q_h = 0.002$ , y su dispersión  $\sigma$  para  $a > 0$ .

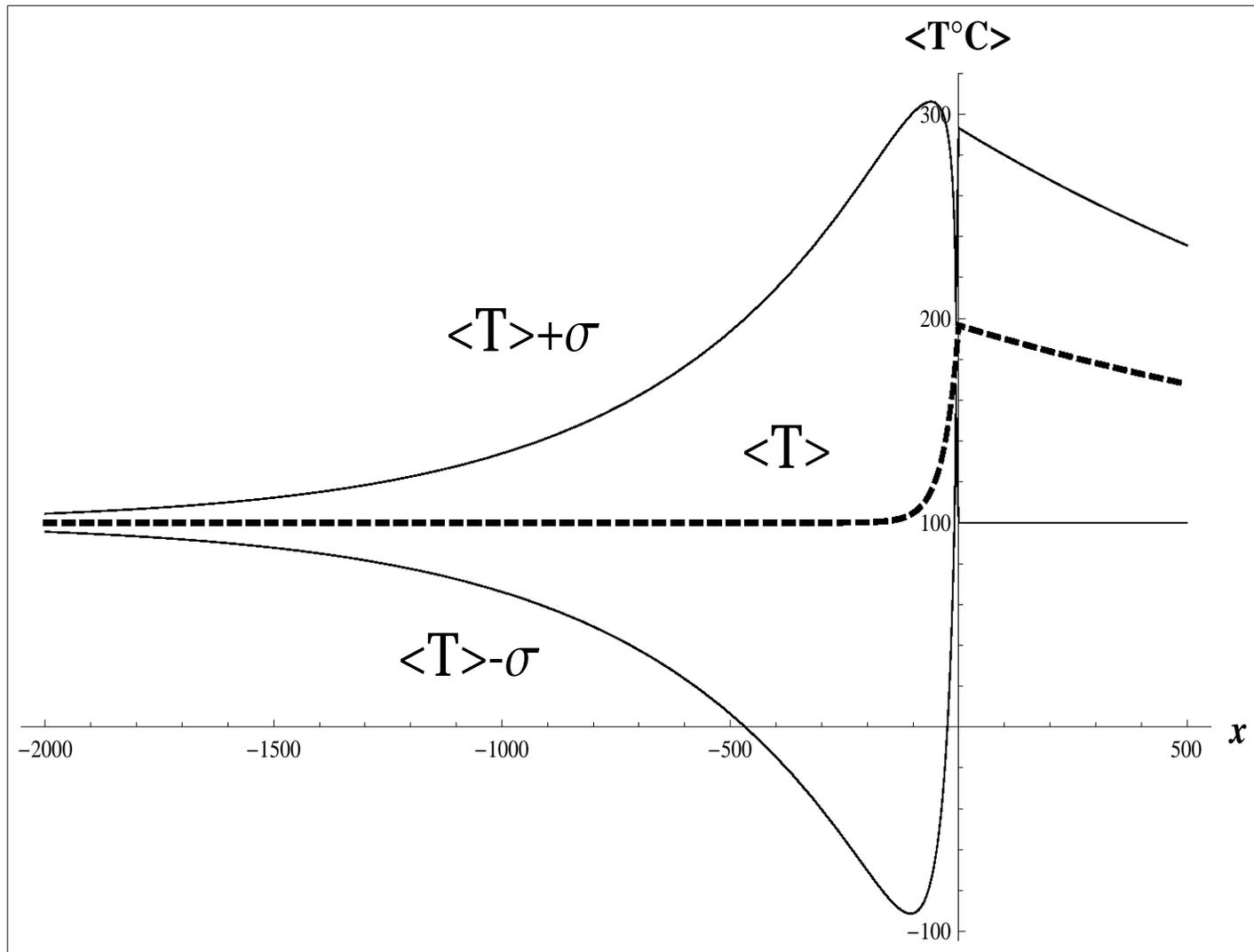


Figura 5.23: Distribución de temperatura para  $q_\beta = 1$ ,  $q_h = 0.002$ , y su dispersión  $\sigma$  para  $a > 0$ .

Cuadro 5.1: Valores típicos usados en la combustión in situ [4].

Símbolo	Valor	Unidades
$T_0$	373.15	$^{\circ}K$
$Q$	39542	kJ/kg fuel
$k_0$	227	kWm/atm-kmole
$\rho_f^0$	19.2182	kg/m <sup>3</sup>
$\lambda_1$	$8.654 \times 10^{-4}$	kW/m- $^{\circ}K$
$\phi$	0.3	-
$(1 - \phi)c_s\rho_s$	$2.012 \times 10^3$	kJ/m <sup>3</sup> - $^{\circ}K$
$v_i$	0.001157	m/seg
$R$	8.314	kJ/kmole- $^{\circ}K$
$p_i$	1.0	atm
$Y_i$	1.0	kg/kg
$\tilde{\mu}$	3.018	kg/kg
$\tilde{\mu}_g$	1.0	kg/kg
$\rho_{gi}$	1.2254	kg/m <sup>3</sup>
$E$	$7.35 \times 10^4$	kJ/kmole

---

## Capítulo 6

### CONCLUSIONES

---

Los resultados obtenidos en el laboratorio muestran cualitativamente, una adecuada evolución de los frentes de temperatura que está de acuerdo con otros resultados previamente reportados en la literatura [39]. También se observa, que el tiempo que tarda en recorrer el frente de temperatura una distancia de aproximadamente un metro, depende de las propiedades del aceite y tipo de roca que se utilice. Para los experimentos aquí reportados, este tiempo varía de cinco a doce horas en promedio. De acuerdo con los perfiles de temperatura, se observa que los correspondientes máximos y mínimos del frente de temperatura, no siguen un orden descendente como se esperaría. Una explicación de este comportamiento, se debe posiblemente a la supuesta homogeneidad en la porosidad y en la permeabilidad de la mezcla contenida dentro del tubo de combustión, principalmente. Es importante señalar que para algunos tipos de aceites, no es posible la formación o la sustentación del frente de combustión. Esto se deba quizás a la formación de coke. Otras corridas experimentales reportadas en la literatura, han sido seriamente cuestionadas por considerarse no representativas del fenómeno, argumentándose las bajas presiones (6.80 a 13.61 atm) a las que fueron realizadas. Los resultados aquí reportados, se realizaron a presiones entre 20.41 y 68.05 atm y a temperaturas alrededor de los 70 y 100°C. Esto valida en gran medida los resultados.

En relación a la teoría desarrollada en este trabajo, se concluye lo siguiente: El formalismo estocástico implementado, lleva a una ecuación diferencial ordinaria que puede resolverse analíticamente para el promedio de temperatura. Esta ecuación tiene la misma forma funcional que el modelo determinista y ambos modelos sólo difieren en sus respectivos coeficientes. En los correspondientes coeficientes del modelo probabilístico, aparecen términos adicionales que involucran un parámetro llamado término de ruido que esta relacionado con la intensidad de las fluctuaciones del sistema, también aparece otro factor que depende del coeficiente de correlación. Cuando cualesquiera de estos parámetros no son nulos, la ecuación diferencial se convierte en una ecuación diferencial estocástica con coeficientes espacialmente aleatorios. En el caso particular en el que tanto el término de ruido como el coeficiente de correlación son nulos, se recupera el modelo puramente determinista descrito en [4].

Los efectos de la aleatoriedad en los perfiles de temperatura fueron los siguientes: En el primer modelo que considera a la velocidad del frente de combustión  $\beta$  como la variable aleatoria, se concluye: La amplitud de la temperatura promedio  $\langle A_{mp}(q_\beta) \rangle = \langle T(q_\beta) \rangle$ , como función de la intensidad del ruido  $q_\beta$ , decae para valores de  $q_\beta$  cercanos a cero hasta alcanzar la temperatura inicial del sistema  $T_0$ , en este punto la gráfica presenta una discontinuidad. Para valores de  $q_\beta$  superiores al mínimo, la amplitud crece y conforme  $q_\beta$  aumenta, la amplitud se acerca asintóticamente a un valor constante. Por otro lado, el ancho de la onda  $\langle Wid(q_\beta) \rangle$  como función de  $q_\beta$ , decae para valores de  $q_\beta$  cercanos a cero hasta alcanzar un mínimo, después del cual el ancho crece conforme  $q_\beta$  se incrementa. En ambos casos, el mínimo es el punto de referencia que define la parte detrás del frente de combustión (temperatura máxima) y la parte delante del frente de combustión. La distribución de temperatura como función de la posición  $\langle T(x) \rangle$ , es congruente

---

con el comportamiento descrito para  $\langle A_{mp}(q_\beta) \rangle$  y  $\langle Wid(q_\beta) \rangle$ . Es decir, existe un valor umbral de  $q_\beta$  para el cual la distribución de temperatura es una constante igual a la temperatura inicial  $T_0$  del sistema. Para valores menores o iguales a este valor, los cambios mayores ocurren en la parte detrás del frente de combustión, en donde la amplitud y el ancho decaen. Para valores superiores a este umbral, los principales cambios se observan en la parte delante del frente de combustión, en donde el ancho y la amplitud crecen. En el modelo estocástico, los parámetros  $\beta$  y  $h$  se comportan como valores efectivos  $\beta_{eff}$  y  $h_{eff}$ . Esto implica que para valores adecuados de  $\beta$  y  $h$  es posible ajustar al caso determinista las distribuciones de temperatura  $\langle T(x) \rangle$ . Para el ejemplo reportado, esto se logró con un error menor al 0.8 %.

El segundo modelo considera un coeficiente de transferencia de calor o término fuente  $h$  aleatorio. Esto lleva a una ecuación diferencial ordinaria estocástica con ruido aditivo y multiplicativo. Algunas conclusiones importantes en este caso son: La distribución de temperatura  $\langle T \rangle$  como función de la magnitud del ruido  $q_h$ , muestra que para valores muy cercanos a cero  $\langle T \rangle$  decrece hasta alcanzar una  $\langle T_{min} \rangle$ . En contraste con el caso anterior, este mínimo no necesariamente corresponde a la temperatura inicial  $T_0$  y no se presenta discontinuidad alguna en este punto, y conforme  $q_h$  aumenta, la temperatura promedio también aumenta hasta alcanzar un valor asintótico. Aquí, el ancho de la onda  $\langle Wid \rangle$  como función de  $q_h$  tiende a cero en ambos extremos (derecha e izquierda) del frente de combustión. La distribución de la temperatura promedio (amplitud de la onda) como función de la posición  $\langle T(x) \rangle$ , muestra que la amplitud antes del frente de temperatura decae hasta una  $\langle T_{min} \rangle$  para un valor crítico  $q_c$ , mientras que  $\langle Wid \rangle \rightarrow 0$  conforme se incrementa  $q_h$ . Para un valor  $q_h > q_c$ , la amplitud a la derecha del frente de temperatura crece mientras que  $\langle Wid \rangle \rightarrow 0$ . Para valores más grandes del parámetro  $q_h$  la amplitud permanece constante y el ancho es prácticamente cero. Este comportamiento es

congruente con el análisis previo sobre la amplitud y el ancho como funciones del parámetro  $q_h$ . Al igual que en el caso anterior, se tiene un reescalamiento en los parámetros  $h$  y  $\beta$ . En este caso, los perfiles de temperatura estocásticos tienen un error de 0.46 % en relación a los correspondientes perfiles de temperatura deterministas [4].

El tercer modelo generaliza los casos anteriores, es decir, se considera simultáneamente como variables aleatorias a la velocidad del frente de combustión y al coeficiente de transferencia de calor. Aquí, se concluye: La banda de probabilidades  $\sigma \pm \langle T \rangle$ , dentro de la cual pueden ocurrir los valores esperados de la temperatura  $\langle T(x) \rangle$ , presenta oscilaciones periódicas. Estas oscilaciones implican que en ciertas posiciones la dispersión es muy alta y en otras es muy baja. Esto sugiere una manera para estimar la distribución de temperaturas en situaciones de campo donde se desconocen con precisión las propiedades físicas del medio. En este sentido, es recomendable tomar mediciones en estos puntos mínimos para reducir las fluctuaciones en torno al promedio  $\langle T \rangle$ . La máxima dispersión del promedio de temperatura  $\langle T \rangle$ , se concentra en regiones muy cercanas a las zonas de reacción y combustión donde ocurre el frente. A medida que se aleja de esta zona, la dispersión disminuye y tiende hacia el promedio  $\langle T \rangle$ . En relación al comportamiento del ancho y la amplitud del promedio de la distribución de temperatura  $\langle T \rangle$ , éste tiene un comportamiento cualitativo similar a los dos casos anteriores en donde la permeabilidad y/o resistividad del medio se difunden de manera distinta antes y después del frente de onda y en donde existe un umbral en la magnitud de la fluctuación  $q$ , para el cual el sistema regresa a la temperatura inicial  $T_0$  ó para el cual el sistema alcanza una amplitud mínima no necesariamente  $T_0$ .

En los tres modelos, el ruido permite tener control sobre la evolución de la onda que viaja a través del medio poroso, solo basta hacer  $q_\beta = 0$  para tener ruido

solamente en el coeficiente de transferencia de calor  $h$ , si se quiere ruido únicamente en la velocidad del frente  $\beta$ , basta tomar  $q_h = 0$ . En el caso particular cuando  $q_\beta = q_h = 0$  simultáneamente, se recupera el caso puramente determinista. Cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  el proceso estocástico se vuelve determinista. Esto demuestra que los modelos estocásticos desarrollados son consistentes en el caso límite con el modelo determinista que se tomó como base para este trabajo [4].

El estudio del problema de una onda de calor generada por combustión in situ propagándose a través de un medio poroso, desde un enfoque probabilístico permite, a diferencia del planteamiento determinista estudiado por Akkutlu y Yortsos [4], por un lado mostrar que el ancho y la amplitud de la onda de calor varían si se considera un medio no homogéneo, por otra parte permite mostrar que esta variación es controlable a través de la intensidad en las fluctuaciones  $q$ . Los resultados muestran que en la descripción determinista, la temperatura  $T$  decae en función del coeficiente volumétrico de calor  $\tilde{h}/H$ , en contraste, en la descripción estocástica, se identifica un intervalo en donde el promedio de la temperatura  $\langle T \rangle$  decae hasta alcanzar un mínimo para magnitudes en las fluctuaciones  $q$  cercanas a cero, en el intervalo complementario y conforme la magnitud en  $q$  aumenta, el promedio  $\langle T \rangle$  crece hasta un valor asintótico constante. En este contexto el modelo estocástico es más general que el modelo determinista. Esto se manifiesta cuando por ejemplo, si quiere tener una variación tanto en la amplitud como en el ancho en los perfiles de temperatura en el modelo determinista, es necesario variar el coeficiente volumétrico de transferencia de calor  $\tilde{h}/H$  para cada nuevo perfil de temperatura. En otras palabras, el ancho y la amplitud de los perfiles de temperatura quedan determinados por la magnitud del parámetro  $\tilde{h}/H$ . En cambio en el modelo estocástico los resultados muestran, que dado un valor de  $\tilde{h}/H$  es posible generar a partir de éste, nuevos perfiles de temperatura cuya amplitud y ancho varían de

acuerdo con la intensidad del ruido introducido en el sistema. Cabe señalar que en los tres modelos estocásticos, se da un reescalamiento en los parámetros  $\beta_0$  y  $h_0$  que se comportan como valores efectivos. Esto es importante, porque permite además de los alcances discutidos previamente, reproducir con valores apropiados de  $q \neq 0$  y  $\lambda$ , los tres perfiles de temperatura estacionarios y con pérdidas de calor por convección reportados por Akkutlu y Yortsos [4].

El modelo determinista estudiado en este trabajo es muy simple, sin embargo contiene algunos de los elementos que permiten observar con claridad algunos de los cambios al perturbar el sistema. La técnica se puede emplear en modelos más generales que son altamente no lineales. En este caso, se tendría una solución numérica, debido a la complejidad del modelo. Se espera que estos resultados contribuyan a una descripción más realista de este complejo e interesante problema.

Algunas extensiones de este trabajo para futuras aplicaciones de laboratorio son, diseñar un nuevo tubo que permita registrar un mayor número de temperaturas a un mismo tiempo. Diseñar la metodología para pruebas de combustión in situ con aceites pesados. Validar los resultados teóricos estocásticos con simulaciones en donde el empacamiento de arena, agua y aceite dentro del tubo de combustión se asemeje lo más cercanamente posible a un medio no homogéneo como ocurre en una situación más realista de campo.

Para el caso teórico, las posibles extensiones son, modelar estocásticamente los perfiles de temperatura en donde se tomen en cuenta pérdidas de calor por conducción. Construir modelos estocásticos para las correspondientes ecuaciones que involucran la masa de oxígeno, la masa total del gas y la masa de combustible. Estudiar los efectos de la aleatoriedad en diferentes situaciones tales como: los umbrales

que determinan la creación, extinción y la propagación del frente, la fracción de masa de oxígeno no quemado, la velocidad del frente y los efectos del coeficiente global de transferencia de calor, todos como función de la velocidad de inyección. Modelar los perfiles transitorios de temperatura del sistema para un modo convectivo y para un modo conductivo. Otro interesante estudio a futuro consiste en ligar los frentes de calor por combustión in situ y sus propiedades con la recuperación de petróleo.

## Bibliografia

---

- [1] Abu Khamsin, S. A., and Brigham, W.E., and Ramey, H. J., Reaction kinetics of fuel formation for in situ combustion, *SPE Journal*, vol. **3**, pp. 1308–1316, 1988.
- [2] Agca, C., and Yortsos, Y.C., Steady-State Analysis of In Situ Combustion, *Presented at the Annual California Regional Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME 13624*, 1985.
- [3] Akkutlu, I.Y., and Yortsos, Y.C., The effect of Heterogeneity on In-Situ combustion: The propagation Fronts in Layered Porous Media, *Presented at the SPE/DOE Thirteenth Symposium on Improved Oil Recovery held in Tulsa, Oklahoma SPE 75128*, 2002.
- [4] Akkutlu, I. Y., and Yortsos, Y.C., The dynamics of in-situ combustion fronts in porous media, *Combustion and Flame*, vol. **134**, pp. 229–247, 2003.
- [5] Akkutlu, I. Y., and Yortsos, Y.C., Steady State Propagation of In-Situ combustion fronts with sequential reactions, *presented at the SPE International Petroleum Conference in Mexico, Puebla, Mexico, 7-9 November 2004, SPE 91957*, 2004.
- [6] Aldushin, A.P., and Kasparyan, S. G., Stability of Stationary filtrational combustion waves, *Combustion, Explosion and Shock Waves*, vol. **17**, pp. 615–625, 1981.

- [7] Alexander, J.D., Martin, W.L., and Dew, J.N., Factors Affecting Fuel Availability and Composition During In-Situ Combustion, *J. Pet. Tech.*, pp. 1154-1164, 1962.
- [8] Allag, O., An Experimental Investigation of the Kinetics of Dry, Underground Combustion, *Ph.D. Dissertation, University of Tulsa, Oklahoma*, 1978.
- [9] Armento, M.E., and Miller, C.A., Stability of moving combustion fronts in porous media, *SPE Journal*, vol. **17**, pp. 423–430, 1977.
- [10] Bailey, H. R., and Larkin, B. K., Conduction-convection in underground combustion, *SPE Journal*, vol. **219**, pp.320–331, 1960.
- [11] Bear, J., Dynamics of Fluids in Porous Media, *Elsevier Publishing Co. Second printing*, 1975.
- [12] Beckers, H.L. and Harmsen, G.J., The effect of water injection on sustained combustion in a porous medium, *SPE Journal*, vol. **231**, pp. 145–163, 1970.
- [13] Belgrave, J.D. M., Moore, R.G, and Bennion, D.W., The Thermal Behavior of Vertically Operated Near Adiabatic In-Situ Combustion Tubes, *J. Pet. Sci. and Eng.*, vol. **5**, pp. 51-65, 1990.
- [14] Belgrave, J.D.M. and Moore, R.G., A Model for Improved Analysis of In-Situ Combustion Tube Tests, *J. of Petroleum Science and Engineering*, vol. **8**, pp. 75-88, 1992.
- [15] Benham, A.L., and Poettmann, F.H., The thermal recovery process- an analysis of laboratory combustion data, *SPE Journal*, vol. **10**, pp.83–85, 1958.
- [16] Boberg, T.C., Thermal methods of oil recovery, *An Exxon Monograph Series*, 1988.

- [17] Bousaid, Oil Recovery by Multiple Quenched In-Situ Combustion, *Paper SPE 16739 Presented at the 62<sup>nd</sup> Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Pet. Engrs. Dallas, Texas, September 27-30, 1987.*
- [18] Britten, J. A., and Krantz, W.B., Linear stability of planar reverse combustion in porous media, *Combustion and Flame*, vol. **60**, pp. 125–140, 1985.
- [19] Britten, J. A., and Krantz, W.B., Asymptotic structure of planar nonadiabatic reverse combustion fronts in porous media, *Combustion and Flame*, vol. **65**, pp. 151–162, 1986.
- [20] Bruining, J., Mailybaev, A. A., and Marchesin, D., Filtration combustion in wet porous medium, *SIAM Journal Applied Mathematics*, vol. **70**, pp. 1157–1177, 2009.
- [21] Burger, J. G, and Sahuquet, B. C., Chemical aspects of in situ combustion - heat of combustion and kinetics, *SPE Journal*, vol. **12**, pp. 410–422, 1972.
- [22] Byrne, H., and Norbury, J., The effect of solid conversion on travelling combustion waves in porous media, *Journal of Engineering Mathematics*, vol. **32**, pp. 321–342, 1997.
- [23] Cédric C., Durandea, M. and Quenault, G, Laboratory Studies for light-Oil Air Injection Projects, *Potential Applicarion in Hand Field, SPE Paper 64272, SPE Reservoir Evaluation and Engineering*, June 2000.
- [24] Chandrasekar, S, Stochastic Problems in Physics and Astronomy, *Reviews of Modern Physics*, vol.**15**, 1943.
- [25] Da Mota, J. C., Souza, A. J, Gracia, R. A., and Teixeira, P. W., Oxidation fronts in a simplified model for two-phase flow in porous media, *Matematica Contemporanea*, vol. **22**, pp. 67–82, 2002.

- [26] Dietz, D.N, and Weijndema,J., Wet and partially quenched combustion, *SPE Journal*, vol. **20**, pp. 411–415, 1968.
- [27] Doob, J.L, The Brownian Movement and Stochastic Equations, *Annals of Mathematics*, vol.**43**, 1942.
- [28] Durlofsky, L.J., Jones, R.C., and Milliken, W.J., A nonuniform coarsening approach for the scale-up of displacement processes in heterogeneous porous media, *Advances in Water Resources*, vol. **20**, pp. 335–347, 1997.
- [29] Dullien F. A. L, Porous Media , *Fluid Transport and Pore Structure. Academic Press. 2 Ed.*, 1992.
- [30] Gottfried, B. S., A mathematical model of thermal oil recovery in linear systems, *SPE Journal*, vol. **5**, pp. 196–210, 1965.
- [31] Greaves, M., Ren,S. R. and T. X. Xia, University of Bath, England, *New Air Technology for IOR Operations in light and Heavy Oil Reservoirs, SPE 57295 presented at the SPE Asi Pacific Improved Oil Recovery Conference held in Kuala Lumpur, Malaysia, 25-26 October, 1999.*
- [32] Cruz-Hernández J., Comunicación personal, *Departamento de recuperación de hidrocarburos, Instituto Mexicano del Petróleo*, 2009.
- [33] Cruz-Hernández J., Criterios de selección para métodos de recuperación secundaria y mejorada. Versión 2.0, *Departamento de recuperación de hidrocarburos, Instituto Mexicano del Petróleo*, julio, 2006.
- [34] Lake, L. W, Drilling Engineering, Volume II, *Petroleum Engineering Handbook*, 2006.

- [35] Leaute, R.P. and C.J. Collyer, Laboratory Studies of In-Situ Combustion with Cold Lake Crude, *Paper No. 5, Presented at the 5<sup>th</sup> Annual Advances in Petroleum Recovery and Upgrading Technology Conference, Calgary, Alberta*, 1984.
- [36] Lin, C. Y., Chen, W. H., Lee, S. T., and Culham, W. E., Numerical simulation of combustion tube experiments and the associated, kinetics of in situ combustion processes, *SPE Journal*, vol. **24**, pp. 657–666, 1984.
- [37] Mailybaev A. A., Bruinig J. and Marchesin D., Analysis of in situ combustion of oil with pyrolysis and vaporization, *Combustion and Flame*, vol. **158**, pp. 1097–1108, 2011.
- [38] Mailybaev A. A., Bruinig J. and Marchesin D., Analytical Formulas for in situ combustion, *SPE Journal*, vol. **16**, pp. 513–523, 2011.
- [39] Mamora, D.D., Kinetics of In-Situ Combustion, *Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford, CA*, 1993.
- [40] Martin, W.L., Alexander, J.D., and Dew, J.N., Process variables of in situ combustion, *Petroleum Trans. AIME*, vol. **213**, pp. 28–35, 1958.
- [41] Matkowsky, B. J., and Sivashinsky, G., Propagation of a pulsating reaction front in solid fuel combustion, *SIAM Journal Applied Mathematics*, vol. **35**, pp. 465–478, 1978.
- [42] Matkowsky, B. J., Schult, D.A., Volpert, V.A., and Fernandez-Pello, A.C., Propagation and extinction of forced opposed flow smolder waves, *Combustion and Flame*, vol. **101**, pp. 471–490, 1995.
- [43] Mehta, S.A., Personal Communication, *University of Calgary, Calgary Alberta, Canada*, 1997.

- [44] Moore, R.G. , New Strategies for In-Situ Combustion, *J. Can Pet. Tech.*, vol. **32**, pp. 11-13, 1993.
- [45] Muskat, M. The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, *McGraw-Hill Book co. Inc., New York*, 1937.
- [46] Prats M.: "Thermal Recovery": Second Printing, S.P.E. Monograph Series, USA, (1986).
- [47] Prats M, Recuperación Mejorada de Hidrocarburos-Aplicaciones en Yacimientos Naturalmente Fracturados, *Apuntes de curso, Depto. de Exploración y Explotación de Recursos Energéticos del Subsuelo, División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería, UNAM*, 1997.
- [48] Rabinovich, O.S., and Gurevich, I.G., Effect of heat losses on propagation of stationary low-temperature filtration combustion waves with forced filtration of the gas-oxidizer, *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, vol. **20**, pp. 29–35, 1984.
- [49] Sarathi, P.S., In-Situ Combustion Handbook-Principles and Practices, *National Petroleum Technology Office, U.S. Department Of Energy, Tulsa, Oklahoma*, January, 1999.
- [50] Schult, D.A., Matkowsky, B. J., Volpert ,V.A., and Fernandez-Pello, A.C., Forced forward smolder combustion, *Combustion and Flame*, vol. **104**, pp. 1–26, 1996.
- [51] Smith, F.W. and Perkin, T.K., Experimental and Numerical Simulation Studies of the Wet Combustion Recovery Process, *J. Can. Pet. Tech.*, vol. **12**, pp. 44-54, 1973.

- [52] Taber, J. J., Martin, F. D. and Seright R. S., EOR Screening Criteria Revisited- Part 2: Applications and impacts of oil prices, *SPE Res. Eng.*, August, 1997.
- [53] Uhlenbeck, G.E. and Ornstein, L.S., On the Theory of Brownian Motion, *Physical Review*, vol.**36**, 1930.
- [54] Van Kampen, N. G., Stochastic processes in physics and chemistry, 3rd Edition, *Elsevier, Amsterdam*, pp. 396–403, 2007.
- [55] Verma, V.B., Reynolds, A.C. and Thomas,G.W., A theoretical investigation of forward combustion in a one- dimensional system , *Presented at the 53th. Annual Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME, held in Houston*, 1978.
- [56] Wang, M.C. and Uhlenbeck, G.E., On the Theory of Brownian Motion II, *Reviews of Modern Physics*, vol.**17**, 1945.
- [57] Wu, C.H., and Fulton, P.F., Experimental Simulation of the Zones Preceding the Combustion Front in an In-Situ Combustion Process, *SPEJ*, vol.**127**, 1963.
- [58] Yortsos Y.C., and Gavalas G.R., Heat transfer ahead of moving condensation fronts in thermal oil recovery processes, *International Journal of Heat Mass Transfer*, vol. **25**, pp. 305–316, 1982.
- [59] Zhangxin, Chen. Reservoir Simulation, *Mathematical Techniques in Oil Recovery. University of Calgary. Calgary, Alberta, Canada*.
- [60] Zolotukhin, A.B., Analytical definition of the overall heat transfer coefficient, *Presented at the Annual California Regional Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME. SPE 7964*, 1979.

**Decision Letter (UESO-2012-0540.R3)**

**From:** James.Sp840@gmail.com

**To:** artrero@fisica.unam.mx

**CC:**

**Subject:** Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects  
- Decision on Manuscript ID UESO-2012-0540.R3

**Body:** @@date to be populated upon sending@@

Dear Professor Reyes:

Re: Stochastic Model for the Dynamics of Combustion Fronts in porous media

I am pleased to accept your paper in its current form which will now be forwarded to the publisher for copy editing and typesetting. You will receive proofs and instructions for transfer of copyright in due course. The publisher also requests that proofs are checked and returned within 48 hours of receipt.

Thank you for your contribution to Energy Sources Part A. I look forward to receiving further submissions from you.

Sincerely,

Dr James Speight

Editor, Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects

James.Sp840@gmail.com, James.Sp840@gmail.com

There are now over 1050 Taylor & Francis titles available on our free table of contents alerting service! To register for this free service visit:  
[www.informaworld.com/alerting](http://www.informaworld.com/alerting).

**Date Sent:** 07-Aug-2012

# **Stochastic Model for the Dynamics of Combustion Fronts in porous media**

M en C. Arturo Reyes

*Posgrado en ciencias de la tierra, Instituto de geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 22-582, 14000 México D.F., México*

Dr. J. Adrián Reyes

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 20-364, 01000 México D.F., México*

adrian@fisica.unam.mx

# **Stochastic Model for the Dynamics of Combustion Fronts in porous media**

Abstract Based on an analytical deterministic model previously developed, we construct a probabilistic model to describe the behaviour of the heat wave that propagates through the porous medium. As a first approximation in this paper, we consider that the coefficient advective (speed of the wave front) is a spatially random variable characterized by well-defined statistical parameters. We studied the effects on this wave, when noise multiplicative is introduced in the front velocity with a correlation coefficient exponentially decaying.

Keywords: noise multiplicative, stochastic model, porous media.

## **Introduction**

In situ combustion is an enhanced oil recovery method, which has been technically successful in many applications. In this technique, a burning front supported by air injection is created and subsequently propagated through a reservoir. Under appropriate conditions, when air is injected into the reservoir, a small amount of the in place oil is consumed, while the rest is displaced, banked and eventually produced.

To get a better understanding of in situ combustion process, many works reported in the recent literature; suggest separating into two regions: reaction zone and combustion zone (Akkutlu and Yortsos, 2003). Other relevant aspects that also studied are, the direction of propagation of the wave front (Britten and Krantz, 1985) front stability (Armento and Miller, 1977), sustained propagation and extinction of combustion, the effects of heterogeneity (Akkutlu and Yortsos, 2005), the heat losses to the surroundings (Byrne and Norbury, 1997), the combustion stoichiometry, the effect of the fuel amount on the front propagation speed (Martin and Dew, 1958), among other characteristics have been analysed.

We are particularly interested in in-situ combustion systems characterized by forward combustion fronts propagating at a constant velocity in the presence of heat losses. In this work, we make a stochastic description for which the combustion front velocity is an aleatory variable with prescribed statistical features.

## Deterministic mathematical model

We consider the propagation of a heat wave due to the combustion in situ, that is propagates through porous medium one-dimensional. Introducing dimensionless space and time variables and we assuming: the stationary case, heat losses by a convective mode and a completed consumption the fuel mass, then under this conditions from total energy equation that describe this phenomenon, we can obtain an equation for the temperature profiles. In this work we omitted these details, but the full details of the deduction are available at (Akkutlu and Yortsos, 2003). In this way, the system is governed by

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \beta_0 \frac{d\theta}{dx} - h\theta = -h. \quad (1)$$

In equation (1),  $\theta = T/T_0$  is a dimensionless temperature scale, which means that the reservoir temperature corresponds to  $\theta=1$ ; here  $T_0$  is the initial reservoir temperature. Where the boundary conditions are  $\theta(\pm\infty)=1$  and  $d\theta/dx|_{-\infty} = -q_1 f_i^0$ . Here,  $q_1 = Q\rho_f^0 / (1-\phi)c_s\rho_s T_0$  is a dimensionless parameters and represent total heat content of the porous medium and  $h = t^* \tilde{h} / (1-\phi)c_s\rho_s H$  is the dimensionless heat transfer coefficient, where  $Q$  represents the heat of combustion,  $\rho_f^0$  is the initial fuel concentration,  $\phi$  represents the effective porosity,  $c_s\rho_s$  the volumetric heat capacity,  $\tilde{h}$  is the overall heta transfer coefficient,  $H$  is reservoir thickness and  $\beta_0 \approx -V_D < 0$ ,

$V_D \equiv f_t^0$  is a dimensionless parameter representing the velocity of the front and  $t^* = \alpha_s / v_i^2$ , where  $\alpha_s = \lambda_1 / (1 - \phi)c_s \rho_s$  is the effective thermal diffusivity and  $\lambda_1$  is the effective thermal conductivity and  $v_i$  is the injection velocity. To find  $V_D$  it necessary to solve the trascendental equation,  $V_D^2 \approx \Omega \theta_f \exp(-\gamma / \theta_f) Y_b$ . Here, we omitted this details, which can be consulted in (Akkutlu and Yortsos, 2003).

## Stochastic mathematical model

We consider that the coefficiente  $\beta_0$  in Eq. (1) is a random variable spatially, which we can write explicitly as  $\beta(x) = \beta_0 + q\varepsilon(x)$ , here  $q$  is a parameter that measures the magnitude of noise and  $\varepsilon(x)$  is a function that denote the noise introduced in the system. The value of  $\varepsilon(x)$  is unknown, but their statistical properties such as its average value in this case  $\langle \varepsilon(x) \rangle = 0$ , correlation coefficient and correlation length between two positions  $x_1$  and  $x_2$  are well known. If we introduce the variable  $\psi = (\psi_1, \psi_2) = (\theta, -id\theta / \sqrt{h}dx)$ , then  $d\psi_1 / dx = i\sqrt{h}\psi_2$ , inserting the last equation and its derivate in the equation (1) we get the following equation  $d\psi_2 / dx = (\beta_0 + q\varepsilon(x))\psi_2 - i\sqrt{h}\psi_1 + i\sqrt{h}$ . In this way, we can write the system formed by the last two equations as a matrix first order differential equation of the form, see (Van Kampen, 2007),

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{h} \\ -i\sqrt{h} & \beta_0 + q\varepsilon(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{h} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Equation (2) implies that

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{h} \\ -i\sqrt{h} & \beta_0 + q\varepsilon(x) \end{pmatrix} \text{ and } f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{h} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

According to the theory of stochastic differential equation (Van Kampen, 2007), we can separate the expressions (3) in a deterministic part and a stochastic contribution, so

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{h} \\ -i\sqrt{h} & \beta_0 \end{pmatrix} \text{ and } A_1(x) = q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(x) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

and the inhomogeneous vectors

$$f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{h} \end{pmatrix} \text{ and } f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

From the expressions (4) and (5), we can construct an equation for the average  $\theta$  of the form,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\psi(x)\rangle}{dx} = & \left[ A_0 + q\langle A_1 \rangle + q^2 \int_0^\infty \langle \langle A_1(x) e^{A_0\chi} A_1(x-\chi) \rangle \rangle e^{-\chi A_0} d\chi \right] \langle\psi(x)\rangle \\ & + f_0 + q^2 \int_0^\infty \langle \langle A_1(x) e^{A_0\chi} A_1(x-\chi) \rangle \rangle (e^{-\chi A_0} - I) A_0^{-1} d\chi \cdot f_0 \\ & + q\langle f_1 \rangle + q^2 \int_0^\infty \langle \langle A_1(x) e^{A_0\chi} f_1(x-\chi) \rangle \rangle d\chi, \end{aligned} \quad (6)$$

here  $I$  is the identity matrix where the statistical features of the distribution must fulfill the condition  $qx_c \ll 1$ , (Van Kampen, 2007). Finally, we get

$$\frac{d^2\langle\theta\rangle}{dx^2} - (\beta_0 + q^2 I_1) \frac{d\langle\theta\rangle}{dx} - (h - hq^2 I_2) \langle\theta\rangle + h - hq^2 I_2 = 0, \quad (7)$$

where we have denoted the integrals by

$$I_1 = \int_0^\infty \langle \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x-\chi) \rangle \rangle \varphi_2 d\chi \text{ and } I_2 = \int_0^\infty \langle \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x-\chi) \rangle \rangle \varphi_1 d\chi. \quad (8)$$

Equation (7), represents our stochastic model. Note that when  $q=0$  or  $\langle \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x-\chi) \rangle \rangle = 0$  in this equation, we recover the deterministic model given by Eq.(1). To solve the equation (7), we assume: 1) the correlation coefficient is exponentially decaying  $\langle \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x-\chi) \rangle \rangle = e^{-\lambda|\chi|}$ . Here  $x_c \equiv 1/\lambda$  is the width of this correlation. 2) boundary conditions are the same used in the deterministic model.

Hence we find the corresponding solutions of equation (7) for the expected value of temperature distribution ahead of the front  $x > 0$  and behind the front  $x < 0$ ,

$$\langle T(x) \rangle = \begin{cases} T_0 + \frac{q_1}{\sqrt{1+4K_2/K_1^2}} \exp\left[\left(K_1 + \sqrt{4K_2 + K_1^2}\right)/2\right] x; x < 0 \\ T_0 + \frac{q_1}{\sqrt{1+4K_2/K_1^2}} \exp\left[\left(K_1 - \sqrt{4K_2 + K_1^2}\right)/2\right] x; x > 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Where we define the constants  $K_1 = \beta_0 + q^2(2h + \beta_0^2 - \lambda^2)/4h\lambda + \beta_0^2\lambda - \lambda^3$  and

$$K_2 = h + [q^2h(\beta_0 + \lambda)/4h\lambda + \beta_0^2\lambda - \lambda^3].$$

## Analysis and discussion of results

The expression for amplitude of wave is given by  $Amp(q, \lambda) = T_0 + q_1 / \sqrt{1+4K_2/K_1^2}$ .

Figure (1), displays the contours plot  $Amp$  vs  $q$  for several values of  $\lambda$ . Three regions are easily identifiable. The first region corresponds to values of  $q$  very close to zero, here we see that the amplitude decreases rapidly until it reaches the initial temperature  $T_0 = 100^\circ C$ . In the second region, we observed that for minimum value of  $q_c$ , the amplitude begins to grow. In the third region we pointing out that for a value  $q_c + \Delta q_c$ , the amplitude tends asymptotic to a constant value situated around  $T_0 = 480^\circ C$ . From arguments of exponential function in solutions (9), we can to deduce an expression for the width of the wave,  $Wid(q, \lambda)$ . Figure (2), depicts the width of wave for the same values of  $\lambda$  previously used. We denote by  $q_m$  the value of  $q$  where the minimum is reached on the chart. The interval  $(0, q_m]$  gives us information about the behaviour of the width of the wave behind the combustion front. Here we see that the width of the wave decays. In the interval  $(q_m, 1)$ , we have information on the behaviour of the width of the wave ahead of the combustion front. Here we see that the width grows.

From the coefficients of the Eq.(7), we define the following effective quantities as  $\beta_{eff} = (\beta_0 + q^2 I_1)$  and  $h_{eff} = (h - q^2 h I_2)$ . Here,  $\beta_{eff}$  and  $h_{eff}$ , represent effective values for the front velocity and the dimensionless heat transfer coefficient. These equations, provide two surfaces for which  $\beta_{eff}$  and  $h_{eff}$  are expressed against the parameters  $q, h$ . These expressions suggest that the parameters involved in solutions (9) can be rescaled in order to conserve the same functional form of the original solution obtained in the absence of noise. Then, by choosing appropriate values of  $q$  and  $\lambda$  we find the same temperature distributions that would be obtained if we used  $\beta_0$  and  $h$  as in the deterministic model reference (Akkutlu and Yortsos, 2003). When the magnitude of fluctuations is zero ( $q = 0$ ), then  $\beta_{eff} = \beta_0$  and  $h_{eff} = h$  as expected.

To corroborate the above statements, we consider the following example, where we take a correlation width  $x_c \approx 0.0714m$ , this implies a numerical value of  $\lambda = 14m^{-1}$ , which is such that satisfy the condition previously imposed and discussed  $q \ll 14$ . In figures (3-6), we show the distribution of temperature, as well as the variation of the amplitude and width of the wave. Here, we can see that both results are in accordance with the expressions *Amp* and *Wid*. We emphasize that the case  $q = 0$  corresponds to the deterministic solution given by (Akkutlu and Yortsos, 2003). Figures (5) and (6) are the same temperature distributions of figures (3) and (4), but with other parameters numerical values. This figures also shown that the rescaling is possible if we choose values of  $\beta_{eff}$  and  $h_{eff}$  properly. A similar behaviour is observed for other values of parameters  $h$  and  $\beta_0$ , reported in (Akkutlu and Yortsos, 2003). Extensive information on typical numerical values of the parameters used in this work can be found at (Akkutlu and Yortsos, 2003).

## Conclusions

In the limit stochastic mathematical model is consistent with deterministic mathematical model. Randomness in the velocity of the wave front causes a wave with variable amplitude and with a point of complete extinction. This same randomness causes that wave width behind the front decreases and increases ahead of the front. This model allows us for rescaling with appropriate pair of parameters  $\beta_0$  and  $h$  in such way we recover the same temperature profiles in the absence of noise by using effective values for these quantities. The difference between the temperature profile of the stochastic and deterministic model is smaller than 0.8%. We expect that the results of our model are to be useful in the analysis of common in situ situations.

## Acknowledgements

The authors acknowledge partial financial support from Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

## References

- Akkutlu, I. Y., and Yortsos, Y.C. 2003. The dynamics of in-situ combustion fronts in porous media. *Combustion and Flame* 134.
- Armento, M.E., and Miller, C.A. 1977. Stability of moving combustion fronts in porous media. *Soc. Petroleum Engrs J.*, 17.
- Britten, J. A., and Krantz, W.B. 1985. Linear stability of planar reverse combustion in porous media. *Combustion and Flame* 60.
- Martin, W.L., Alexander, J.D., and Dew, J.N. 1958. Process variables in in situ combustion. *Petroleum Trans. AIME* 213.
- Van Kampen, N. G. 2007. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, 3rd Edition. Elsevier, Amsterdam p.396-403.

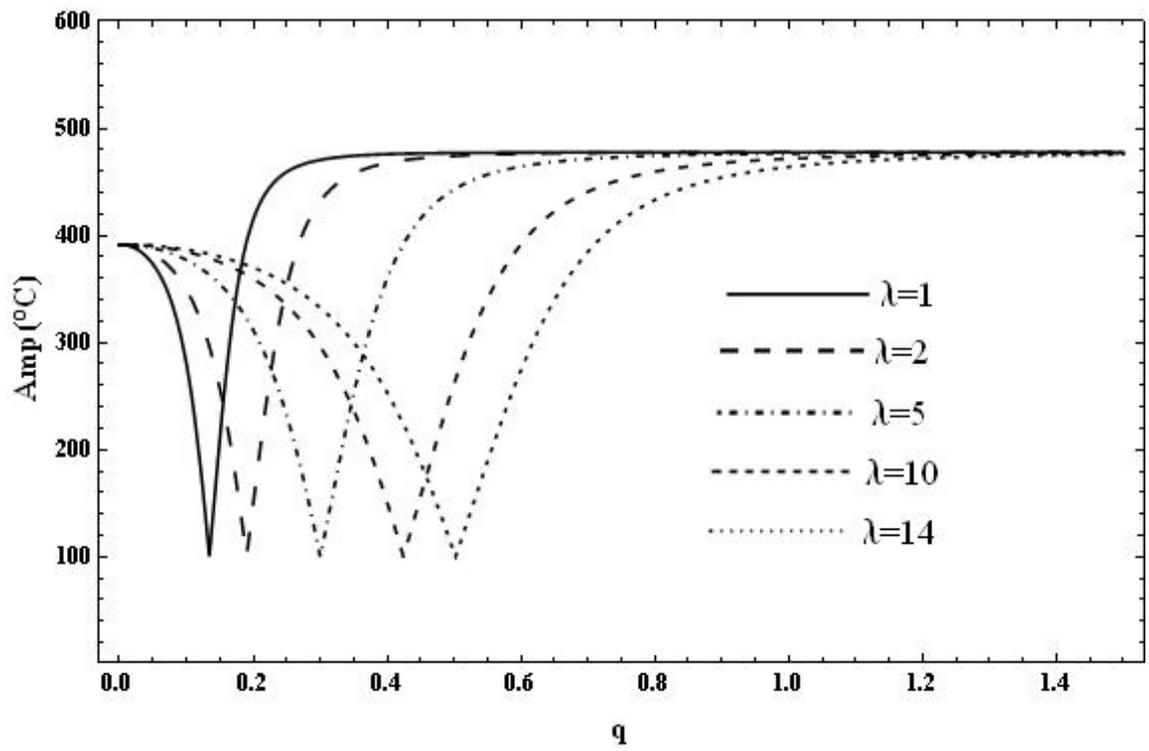


Figure 1. Wave amplitude as function of parameter  $q$  and several values of the parameter  $\lambda[m^{-1}]$ .

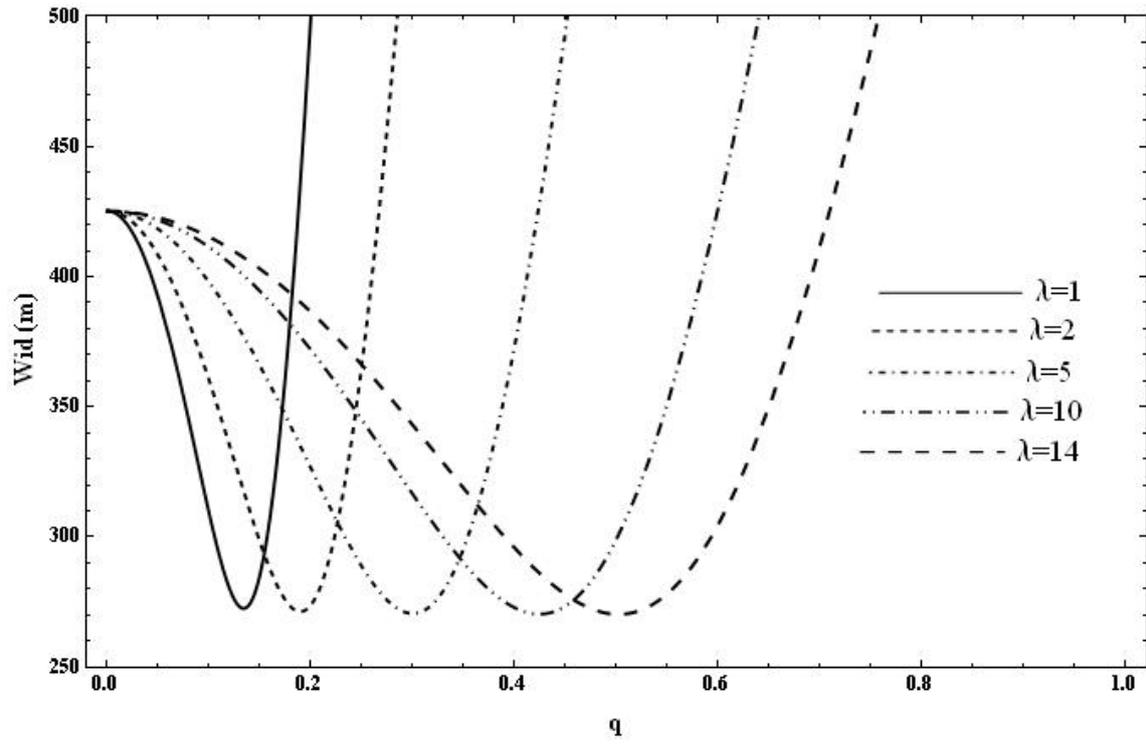


Figure 2. Wave width as function of parameter  $q$  and several values of parameter  $\lambda[m^{-1}]$ .

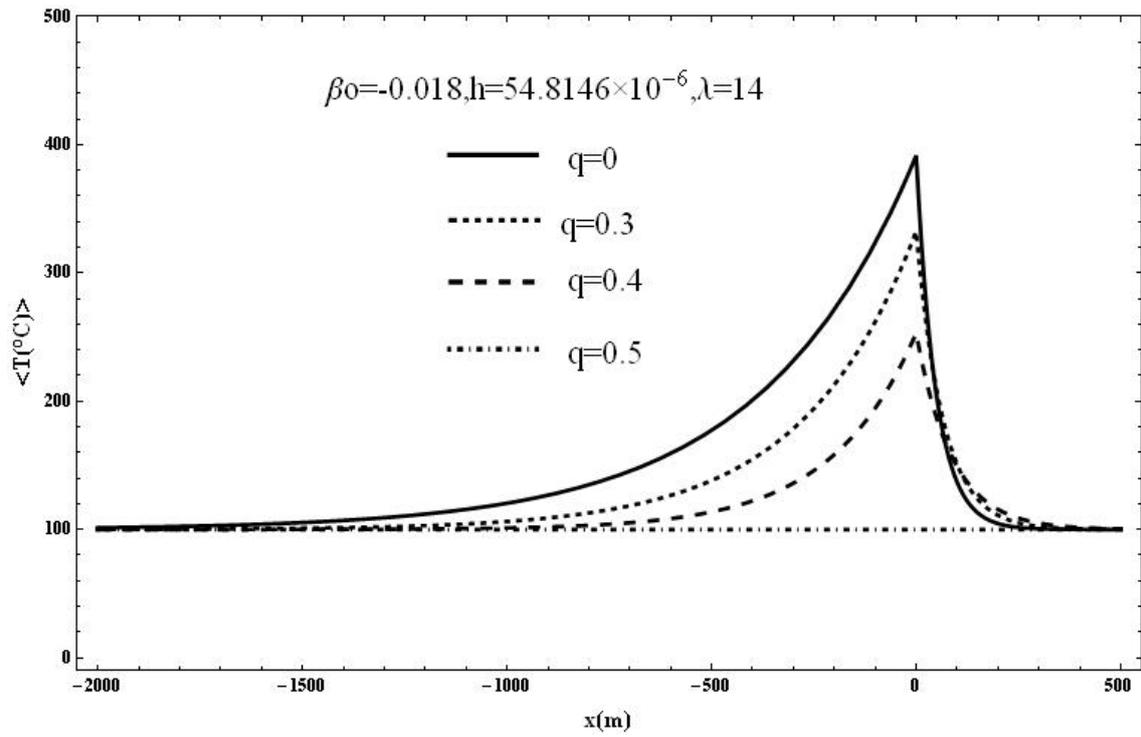


Figure 3. Trend of width and amplitude of temperature profiles for different values of the parameters  $\beta_0, h, q, \lambda[m^{-1}], \beta_{eff}$  and  $h_{eff}$ .

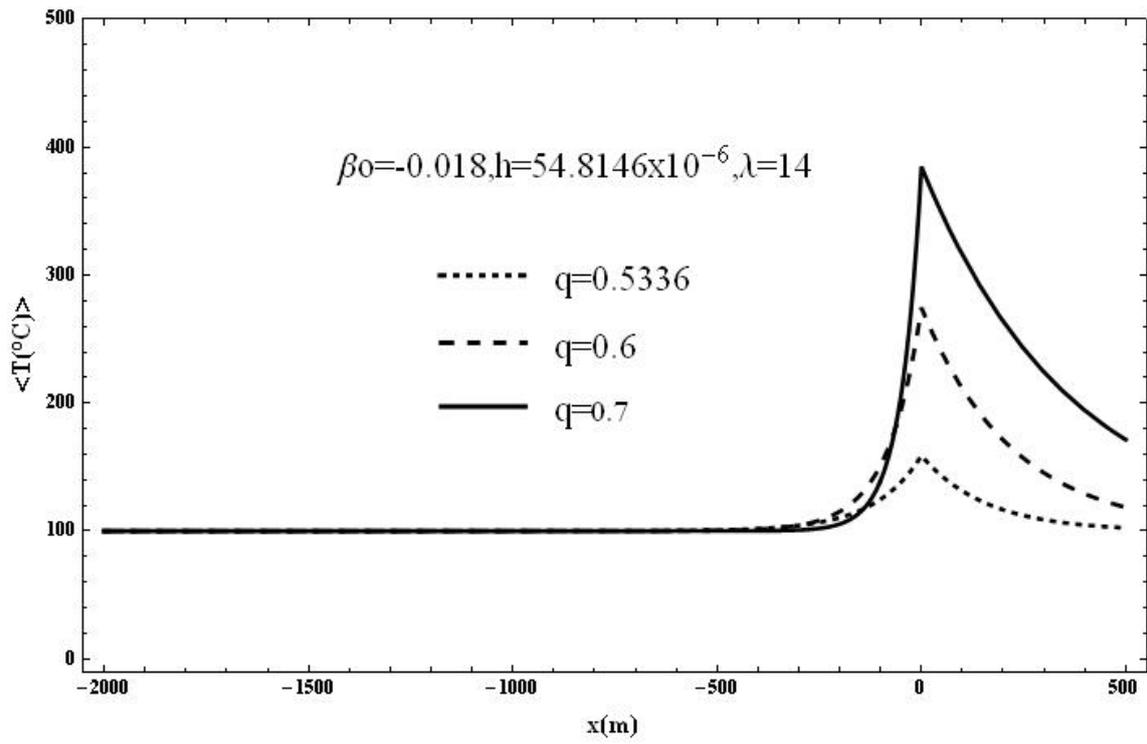


Figure 4. Trend of width and amplitude of temperature profiles for different values of the parameters  $\beta_0, h, q, \lambda[m^{-1}], \beta_{eff}$  and  $h_{eff}$ .

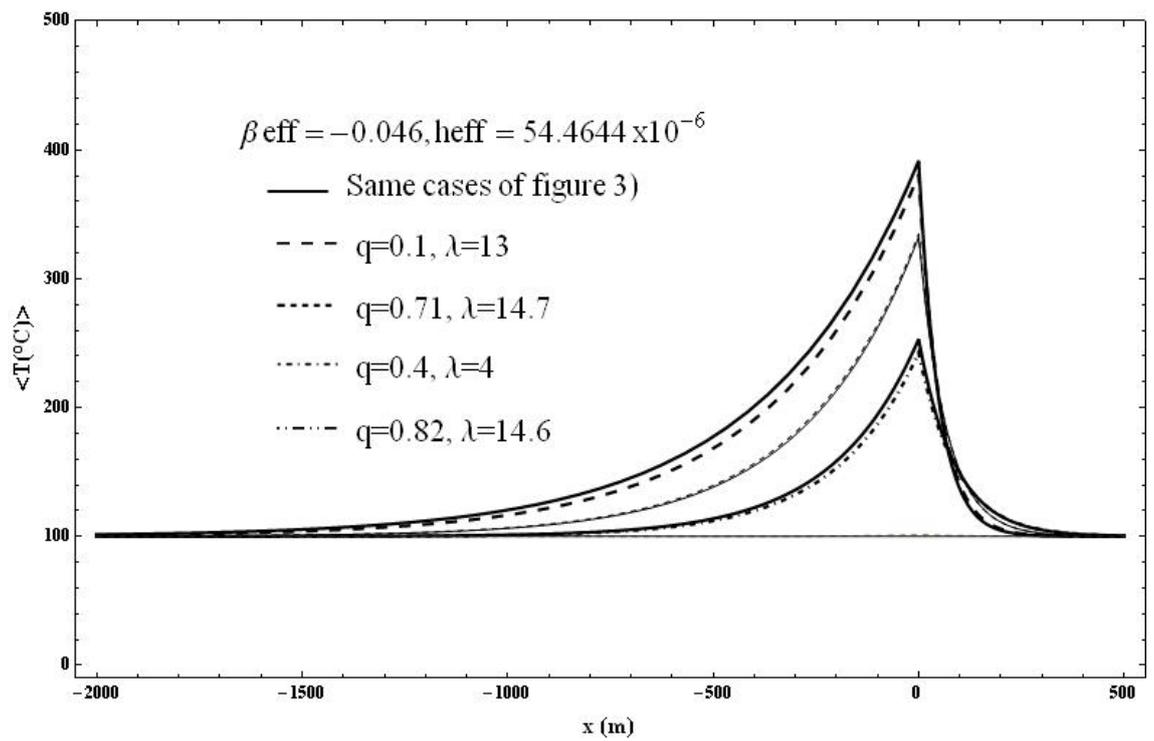


Figure 5. Trend of width and amplitude of temperature profiles for different values of the parameters  $\beta_0, h, q, \lambda[m^{-1}], \beta_{eff}$  and  $h_{eff}$ .

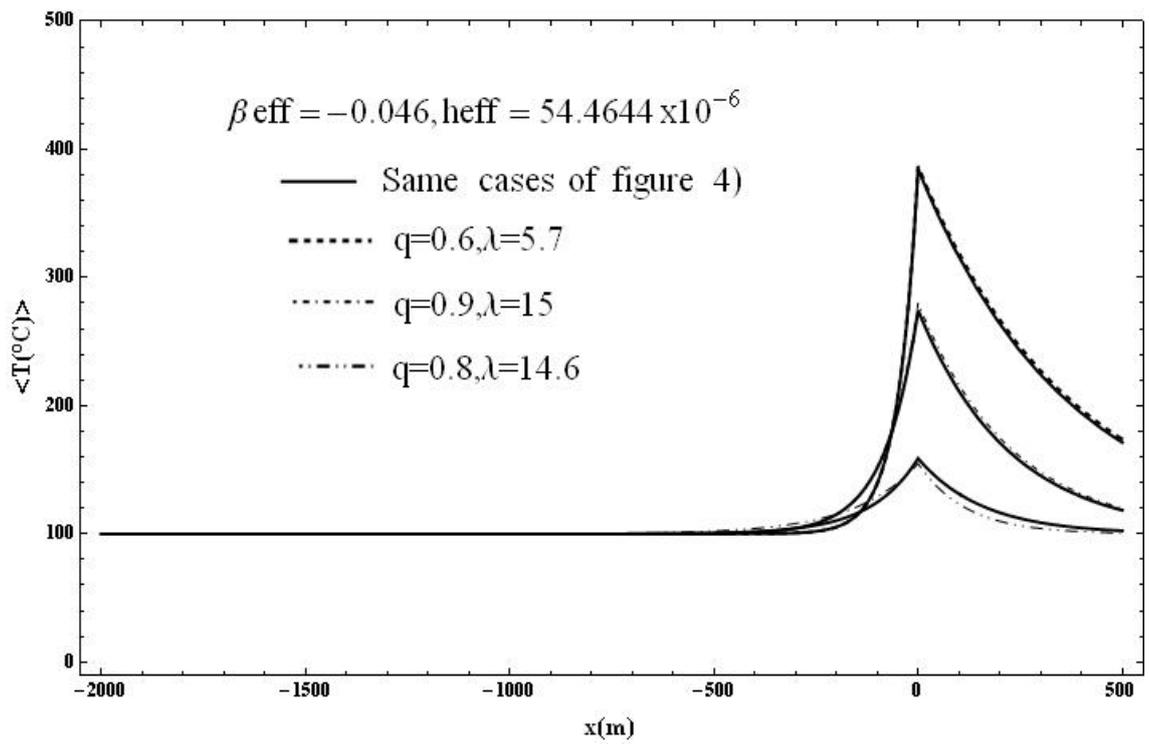


Figure 6. Trend of width and amplitude of temperature profiles for different values of the parameters  $\beta_0, h, q, \lambda[m^{-1}], \beta_{eff}$  and  $h_{eff}$ .