UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS - CUERNAVACA

Descomposición atómica de espacios de Hardy vectoriales

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS PRESENTA:

HUGO OCAMPO SALGADO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. SALVADOR PEREZ ESTEVA

IMATE-UNAM Cvca

DRA. MAGALI L. M. FOLCH GABAYET	IMATE-UNAM
DRA. MARTHA D. GUZMÁN PARTIDA	UNISON
DR. FRANCISCO M. LÓPEZ GARCÍA	IMATE-UNAM Cvca
DR. JORGE RIVERA NORIEGA	UAEM
DR. RICARDO A. SAENZ CASAS	UCOL

CUERNAVACA, MORELOS. AGOSTO DEL 2013

A mi hermana Elizabeth
... que se nos adelantó.

Agradecimientos

A mi comité tutoral, los Dres. Emilio Marmolejo y Jorge Rivera, por su exhorto y atención.

A mi tutor principal y director de tesis, Dr. Salvador Pérez Esteva a quien le debo mucho, su orientación en el presente trabajo, y en la convivencia mostrarme algunas de sus virtudes entre las que resalto su amistad, su apoyo, pero sobre todo su paciencia.

Al comité del Jurado, los Dres. Magali Folch, Martha Guzmán, Francisco López, Jorge Rivera, y Ricardo Saenz, por sus observaciones, comentarios y recomendaciones en la revisión del presente trabajo.

A mi esposa Rosa Estela por acompañarme en este largo camino, y no dejar de alentarme.

A mis padres Gregorio Ocampo Román y Cruz Salgado Sandoval, por muchas cosas, pero que baste decir: gracias por seguir cuidando de mí.

A CONACyT por la beca de doctorado.

A todo el personal académico y administrativo de la UNAM que directa e indirectamente colaboró en mi etapa de doctorado.

A todos GRACIAS.

Índice general

Introducción

El presente trabajo es acerca de los espacios de Hardy Banach valuados y definidos en el semiespacio superior. La teoría de los espacios de Hardy es extensa para escribirla aquí, no obstante daremos al lector la información suficiente para ponerlo en contexto para nuestros objetivos.

Los espacios de Hardy surgen debido al interés por estudiar espacios de funciones definidas en dominios del plano complejo. De hecho, los espacios de Hardy en el disco unitario complejo constan de funciones analíticas f tales que la integral de $|f(\cdot)|^p$, $p > 0$, sobre la circunferencia de radio r, $0 < r < 1$, es uniformemente acotada respecto al parámetro r. Como el valor de la integral cambia respecto r, se selecciona el supremo de estos valores y se asigna como norma o p-norma de la función f. Posteriormente se relaja la condición de función compleja analítica por real armónica. El dominio de las funciones también varía; del disco unitario complejo $\mathbb{D}$ al semiplano superior $\mathbb{R}^2_+$, y más generalmente al semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Los espacios de Hardy pueden definirse también como funciones cuya maximal no tangencial es una función en $L^p(\mathbb{T})$, donde $\mathbb{T}$ es la frontera del disco $\mathbb{D}$, y esta definición es equivalente a la que se mencionó primero.

Las funciones maximales fueron definidas por Hardy y Littlewood en la década de los 30's del siglo pasado para $p > 1$, pero éstas adquirieron nueva relevancia en los 70's con los trabajos de Burkholder, Silverstein y Gundy en [11] y por supuesto por los trabajos fundamentales de Fefferman, Stein y Weiss [15],[29]. Burkholder, Silverstein y Gundy probaron la equivalencia de la función maximal no tangencial y la función maximal radial utilizando métodos probabilísticos (movimiento Browniano). Sin embargo el trabajo de Fefferman y Stein es más completo pues consigue el mismo resultado que en [11] sin utilizar conceptos de probabilidad además de que extiende el dominio de las funciones a $\mathbb{R}^n$.

Fefferman y Stein probaron también en [15] que para $p > 0$ una distribución temperada en $\mathbb{R}^n$ satisface de manera equivalente: (i) ser el límite radial de alguna función en el espacio de Hardy, donde el límite es en el sentido de distribuciones; (ii) el promedio de su convolución con cada elemento de las funciones de Schwartz $\mathcal{S}$ pertenece al espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$; (iii) el promedio de su convolución con alguna función de Schwartz cuya integral no se cancela pertenece al espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$; (iv) la función maximal no tangencial de su convolución con el núcleo de Poisson está en $L^p(\mathbb{R}^n)$. La equivalencia de estas cuatro propiedades nos indica que el núcleo de Poisson no juega un rol determinante y puede ser sustituido por alguna aproximación de la identidad.

Por otro lado, el parámetro p determina la naturaleza de los elementos de los espacios de Hardy. Cuando $p \geq 1$, los trabajos de Stein ([15] y [28]), confirman que los espacios de Hardy de funciones analíticas y/o armónicas son identificados con ciertos subespacios de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Cuando $p \leq 1$, Coifman y Latter, (ver [12] y [20]), dieron una descripción de elementos en espacios de Hardy definidos en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente, en términos de funciones bloques con soporte compacto, y con dondiciones de tamaño y cancelación apropiados. A este proceso de representar a los elementos del espacio de Hardy como sumas infinitas de bloques se le conoce como descomposición atómica. La descomposición atómica es llevada a cabo haciendo uso del Teorema de descomposición de Calderón-Zygmund.

Un paso adelante en el estudio de los espacios de Hardy es la extensión al caso vectorial o Banach valuados, esto como un caso particular de la extensión de funciones analíticas y/o armónicas que toman valores en un espacio de Banach $\mathbb{X}$. El estudio de funciones Banach valuadas originó nuevas propiedades en los espacios de Banach como veremos en seguida.

La definición de espacio de Hardy vectorial, (ver [4]), puede estar dada como el espacio de funciones $f : \mathbb{D} \to \mathbb{X}$ analíticas o armónicas en cuyas maximales se sustituye el módulo $|\cdot|$ por la norma $||\cdot||_{\mathbb{X}}$, o el espacio de funciones $f : \mathbb{D} \to \mathbb{X}$ tales que la función escalar $\xi^* \circ f$ pertenezca al espacio de Hardy para todo elemento $\xi^* \in \mathbb{X}^*$", aquí $\mathbb{X}^*$ es el espacio dual a $\mathbb{X}$. Sin embargo las diferentes definiciones de espacio de Hardy, todas equivalentes entre si cuando las funciones son escalares no lo son cuando las funciones son Banach valuadas para todo espacio de Banach, como lo muestra Blasco en [4].

Entonces los diferentes espacios de Hardy vectoriales serán iguales si y sólo si los espacios de Banach poseen propiedades como UMD o pRN, (ver [3], [5], [6], [8], [9]). Aquí trataremos sólo con la propiedad de Radon-Nikodym y a continuación recordamos la definición.

Definición 0.0.1. Diremos que el espacio de Banach $\mathbb{X}$ posee la propiedad de Radon-Nikodym, pRN, si para cualquier espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ y cualquier medida vectorial λ-continua $\mu : \Sigma \to \mathbb{X}$ de variación acotada, existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que $\mu(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\lambda$ para todo elemento

$E \in \Sigma$.

Blasco encuentra valores frontera para elementos del espacio de Hardy vectorial de funciones analíticas para cualquier espacio de Banach en [5], esto es, ya no existe dependencia de propiedades UMD o pRN para caracterizaciones de espacios de Hardy vectorial.

Respecto al presente trabajo, como ya dijimos, estudiamos los espacios de Hardy definidos en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ con valores en un espacio de Banach $\mathbb{X}$ que serán representados por $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Usamos la definición de la función maximal no tangencial, (ver Definición 1.4.3).

Nuestros objetivos son dos.

Primero, presentar una caracterización de los espacios de Hardy vectorial $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ mediante sus valores frontera. Se obtuvieron dos caracterizaciones. Para $p > 1$ los valores frontera de funciones en $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ son medidas vectoriales con p-variación acotada $V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$. En este punto mejoramos el resultado de Blasco en [5] pues ahora el dominio no es acotado. Cuando $p \leq 1$ son distribuciones vectoriales, esto es, se mantiene el resultado del caso escalar. La otra caracterización es con el espacio de distribuciones vectoriales que satisfacen ciertas condiciones y que representaremos con $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ (ver Definición 2.3.3). Esta caracterización es válida en el caso escalar (ver [28]) y aquí lo extendemos al caso vectorial.

El segundo objetivo es realizar la descomposición atómica del espacio $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ para $p \leq 1$. En este punto avanzamos del caso escalar (ver [28]), al caso vectorial.

En el primer capítulo daremos todas las definiciones que se requieren para hablar de espacios de Hardy, esto es, funciones vectoriales, diferenciabilidad y armonicidad de éstas, medidas vectoriales así como algunas propiedades que las relacionan con las funciones en $L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$. Definiremos también a las distribuciones vectoriales, y trabajaremos con las operaciones convolución y transformada de Fourier de distribuciones vectoriales. Probaremos que la convolución de una distribución vectorial con una función de Schwartz es una función infinitamente diferenciable y de lento crecimiento. Mostraremos también que la transformada de Fourier es un isomorfismo del espacio de distribuciones vectoriales en si mismo. Por último daremos las definiciones de funciones maximales en el contexto vectorial y algunas propiedades a utilizarse.

En el segundo capítulo trataremos nuestro primer objetivo.

En el tercer capítulo trataremos nuestro segundo objetivo. Mostraremos primero la descomposición de Calderón-Zygmund para medidas vectoriales. Este resultado será utilizado para conseguir un espacio que es denso en

$\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, a saber $V^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \bigcap \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$. Mediante esta densidad probaremos la descomposición atómica para elementos en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, realizándola primero para medidas en $V^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \bigcap \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y posteriormente para cualquier elemento de $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$. Por último veremos que los elementos de $\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ no pueden ser todos funciones a menos que el espacio de Banach posea la propiedad Radon-Nikodym, y viceversa, si todos los elementos de $\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ son funciones, entonces $\mathbb{X}$ posee la pRN.

En el último capítulo se estudiarán algunas propiedades del espacio $\mathbb{H}^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^n)$, donde $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es el espacio de operadores lineales acotados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en si mismo. También conseguiremos una función armónica mayorante, en el sentido de operadores lineales, para cada elemento de un espacio de Hardy débil.

Capítulo 1

Medidas y distribuciones vectoriales.

En este capítulo se darán las definiciones requeridas para introducir los espacios de Hardy vectoriales.

1.1. Funciones vectoriales.

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach. Consideramos Ω un conjunto abierto del espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$. Una *función Banach valuada* o *$\mathbb{X}$-valuada* $f : \Omega \to \mathbb{X}$ *es diferenciable* en $x \in \Omega$ si y sólo si todas sus derivadas parciales $\partial_i f(x)$ existen y son continuas, donde

$$\partial_i f(x) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}.$$

En la fórmula de arriba, el elemento e_i es el i-ésimo vector canónico euclideano.

Decimos que una función $\mathbb{X}$-valuada es débilmente diferenciable si la función escalar $f_{\xi^*}(x) = \langle \xi^*, f(x) \rangle$ es diferenciable, para todo $\xi^* \in \mathbb{X}^*$, el dual topológico del espacio de Banach $\mathbb{X}$.

Notemos que diferenciabilidad implica débil diferenciabilidad.

Definición 1.1.1. Una función $u : \Omega \to \mathbb{X}$ es *armónica* si es dos veces continuamente diferenciable y satisface la ecuación $\Delta u = 0$ en Ω, y u es *débilmente armónica* si la función escalar $u_{\xi^*} = \xi^* \circ u$ es armónica para todo elemento $\xi^* \in \mathbb{X}^*$.

Proposición 1.1.2. *Sea u una función $\mathbb{X}$-valuada definida en Ω, entonces u es armónica si y sólo si es débilmente armónica.*

Demostración. No es difícil cerciorarse que armonicidad implica armonicidad débil.

Sea u débilmente armónica, entonces para cualquier $\xi^* \in \mathbb{X}^*$ la función escalar $u_{\xi^*} = \xi^* \circ u$ es armónica y de la teoría escalar esto implica que $u_{\xi^*} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Por lo tanto u es infinitamente diferenciable en el sentido débil. Por la Proposición 1 en [26] tenemos que la función u es infinitamente diferenciable, en particular es dos veces continuamente diferenciable. No es difícil cerciorarse que el funcional ξ^* y el operador diferencial Δ conmutan, esto es,

$$\Delta(\xi^* \circ u) \quad = \quad \xi^*(\Delta u). \tag{1.1}$$

Por hipótesis el lado izquierdo de (1.1) es cero para todo $\xi^* \in \mathbb{X}^*$, esto implica que $\Delta u = 0$, es decir, u es armónica. □

Funciones Bochner integrables.

A continuación recordamos los conceptos de medibilidad, integrabilidad y los espacios $L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$. Consideramos el sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\Omega)$ sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y usamos la notación $\lambda(A) = |A|$.

Definición 1.1.3. Una función $f : \Omega \to \mathbb{X}$ es *débilmente medible* si para todo elemento $\xi^* \in \mathbb{X}^*$, la función escalar $f_{\xi^*} = \xi^* \circ f$ es medible.

f es una *función simple* si es de la forma $\sum_{i=1}^N x_i \chi_{E_i}$ donde $x_i \in \mathbb{X}$,χ_{E_i} es la función característica con E_i conjuntos disjuntos medibles tales que $|E_i| < +\infty$, f también debe cumplir $f(x) = 0$ para $x \in \Omega \setminus \bigcup_i E_i$.

f es una *función fuertemente medible* si existe una sucesión de funciones simples $\{f_k\}$ tales que $|| \, f_k(x) - f(x) \, ||_{\mathbb{X}} \to 0$ cuando $k \to \infty$ para casi todo $x \in \Omega$.

Definición 1.1.4. Sea $f : \Omega \to \mathbb{X}$ una función simple con representación $f = \sum_{i=1}^N x_i \chi_{E_i}$, definimos la integral de Bochner de f como

$$\int_E f(x) \, \mathrm{d}x \quad = \quad \sum_{i=1}^N x_i |E_i|.$$

Una función $\mathbb{X}$-valuada es *Bochner integrable* si existe una sucesión de funciones simples $\{f_k\}$ que convergen en norma a f casi en todas partes y que cumplen

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega || \, f(x) - f_k(x) \, ||_{\mathbb{X}} \, \mathrm{d}x = 0. \tag{1.2}$$

Para cualquier conjunto E medible la integral de Bochner de f sobre E se define como

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \chi_E(x) f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

El límite se toma en la norma del espacio de Banach.

De la desigualdad triangular que cumple la norma de un espacio de Banach se comprueba que el elemento $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{X}$ depende de la función f y no de la sucesión que se toma, por lo tanto la integral de Bochner $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{X}$ está bien definida.

El siguiente resultado nos da una condición para que una función $\mathbb{X}$-valuada sea Bochner integrable, ver [33].

Teorema 1.1.5 (**Hille**). *Una función $\mathbb{X}$-valuada f fuertemente medible es Bochner integrable si y sólo si la función escalar $||\, f(\cdot)\, ||_{\mathbb{X}}$ es integrable.*

Espacios $L^p_{\mathbb{X}}(\Omega)$.

Definición 1.1.6. Considérense funciones $\mathbb{X}$-valuadas definidas en un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$. Para $1 \leq p < \infty$ $L^p_{\mathbb{X}}(\Omega)$ es el espacio de clases de equivalencia de funciones fuertemente medibles f (dos funciones son equivalentes si son iguales casi en todas partes) tales que son Bochner integrables y satisfacen

$$||\, f\, ||_{L^p_{\mathbb{X}}} \;=\; \left(\int_\Omega ||\, f(x)\, ||^p_{\mathbb{X}}\ \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.3}$$

Similarmente, $L^\infty_{\mathbb{X}}(\Omega)$ es el espacio de clases de equivalencia de funciones fuertemente medibles f tales que

$$||\, f\, ||_{L^\infty_{\mathbb{X}}} \;=\; \operatorname{supess}\{||\, f(x)\, ||_{\mathbb{X}}\ : x \in \Omega\} < \infty. \tag{1.4}$$

Estos espacios con la norma (1.3) y (1.4) son completos (ver §12 en [14]).

Sea φ una función en $L^q(\Omega)$ o en $L^q_{\mathbb{B}}(\Omega)$ donde $\mathbb{B}$ es un espacio de Banach en dualidad con $\mathbb{X}$ y q conjugado a p $(1/p + 1/q = 1)$, entonces la integral

$$\int_\Omega \varphi(x)\ f(x)\,\mathrm{d}x$$

está bien definida. En efecto, el producto $\varphi(x)\ f(x)$ está bien definido cuando la función φ es compleja, cuando la función φ es $\mathbb{B}$-valuada y $\mathbb{B} = \mathbb{X}^*$ el producto debemos considerarlo como$\langle\varphi(x), f(x)\rangle$ y finalmente si $\mathbb{X} = \mathbb{B}^*$ debemos considerar el producto como $\langle f(x), \varphi(x)\rangle$. Sabemos que para todo $x \in \Omega$ son válidas las siguientes desigualdades;

$$\begin{array}{rcll} \|\, \varphi(x)\ f(x)\, \|_{\mathbb{X}} & \leq & |\varphi(x)| & \|\, f(x)\, \|_{\mathbb{X}} \ , \\ |\varphi(x)\ f(x)| & \leq & \|\, \varphi(x)\, \|_{\mathbb{B}} & \|\, f(x)\, \|_{\mathbb{X}} \ . \end{array}$$

Observamos que la función φf es fuertemente medible siendo φ escalar o vectorial, además las funciones $\|\, \varphi(\cdot)\, \|_{\mathbb{X}} \|\, f(\cdot)\, \|_{\mathbb{X}}$ y $|\varphi(\cdot)\ f(\cdot)|$ son integrables, por lo tanto $\|\, \varphi(\cdot) f(\cdot)\, \|_{\mathbb{X}}$ y $|\varphi(\cdot) f(\cdot)|$ son integrables, lo que nos implica que la función $\varphi(\cdot) f(\cdot)$ es Bochner integrable o integrable, además tenemos

$$\left\| \int_{\Omega} \varphi(x)\ f(x)\, \mathrm{d}x \right\|_{\mathbb{X}} \leq \|\, \varphi\, \|_{L^q(\Omega)}\ \|\, f\, \|_{L^p_{\mathbb{X}}(\Omega)} \tag{1.5}$$

$$\left| \int_{\Omega} \varphi(x)\ f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \|\, \varphi\, \|_{L^q_{\mathbb{B}}(\Omega)}\ \|\, f\, \|_{L^p_{\mathbb{X}}(\Omega)} \,. \tag{1.6}$$

1.2. Medidas vectoriales.

Definición 1.2.1. Una medida vectorial o $\mathbb{X}$-valuada μ es una función de conjuntos $\mathbb{X}$-valuada tal que para cualquier par de conjuntos disjuntos $A,B \in \mathcal{B}(\Omega)$ se satisface $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

En este caso decimos que μ es finitamente aditiva, sin embargo estamos interesados en medidas contablemente aditivas.

Definición 1.2.2. Una medida vectorial μ es *contablemente aditiva* si para toda sucesión de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en Ω disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, se cumple

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

De la desigualdad

$$\left\| \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \right\|_{\mathbb{X}} \leq \|\, \mu(A_1)\, \|_{\mathbb{X}} + \left\| \mu\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i\right) \right\|_{\mathbb{X}},$$

se puede comprobar que la medida μ es *contablemente subaditiva*, es decir, satisface la desigualdad

$$\left\| \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \right\|_{\mathbb{X}} \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\, \mu(A_i)\, \|_{\mathbb{X}} \,. \tag{1.7}$$

A continuación asignamos una norma al espacio de medidas vectoriales.

Definición 1.2.3. Sea μ una medida vectorial en $\mathcal{B}(\Omega)$, decimos que μ tiene *variación acotada* si

$$|\mu|(\Omega) \;=\; \sup\left\{\sum_{E\in\pi} ||\,\mu(E)\,||_{\mathbb{X}} \;:\pi \text{ partición finita de Borel de } \Omega\right\} < +\infty.$$

Nótese que en la definición de variación acotada no se necesita la propiedad de aditividad contable. Además la variación de μ es una función de conjuntos positiva y creciente, esto es, si $A \subseteq B$ en $\mathcal{B}(\Omega)$, entonces $|\mu|(A) \leq |\mu|(B)$.

Observación 1.2.4. Sea μ una medida vectorial con variación acotada, entonces μ define una medida positiva que es finitamente aditiva mediante $A \mapsto |\mu|(A)$ en $\mathcal{B}(\Omega)$.

La aditividad contable de $|\mu|$ se obtiene mediante la misma propiedad en μ, sin embargo tenemos un resultado más fuerte.

Proposición 1.2.5. *Sea μ una medida vectorial con variación acotada en $\mathcal{B}(\Omega)$. Entonces $|\mu|$ es contablemente aditiva si y sólo si μ lo es.*

Demostración. Sea $\{A_k\} \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos. Supongamos primero que la medida no negativa $|\mu|$ es contablemente aditiva y probemos que la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ converge al elemento $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$. En efecto, la serie es de Cauchy como se puede ver a continuación,

$$\left\|\sum_{k=i}^{j} \mu(A_k)\right\|_{\mathbb{X}} \;\leq\; \sum_{k=i}^{j} ||\,\mu(A_k)\,||_{\mathbb{X}} \;\leq\; \sum_{k=i}^{j} |\mu|(A_k),$$

por lo tanto la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ converge pues μ es Banach valuada. Veamos ahora que converge al elemento $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$, para ello observamos que $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) + \mu\left(\bigcup_{k>N} A_k\right)$ para cualquier $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) - \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k)\right\|_{\mathbb{X}} &= \left\|\mu\left(\bigcup_{k>N} A_k\right)\right\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq \sum_{k>N} ||\,\mu(A_k)\,||_{\mathbb{X}} \\
&\leq \sum_{k>N} |\mu|(A_k) \;\to\; 0
\end{aligned}$$

cuando $N \to \infty$.

Supongamos ahora que la medida μ es contablemente aditiva. Debido a que la medida $|\mu|$ es no negativa debemos probar solamente que la suma $\sum_{k=1}^{N} |\mu|(A_k)$ es acotada uniformemente en N. Para cada $N \in \mathbb{N}$ existen particiones finitas π_k de A_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, tales que $|\mu|(A_k) < \sum_{E\in\pi_k} \|\, \mu(E)\, \|_{\mathbb{X}} + \dfrac{1}{N}$, entonces haciendo $\pi = \bigcup_{k=1}^{N} \pi_k$ tenemos que π es una partición finita del conjunto $\bigcup_{k=1}^{N} A_k$ y satisface

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} |\mu|(A_k) &\leq \sum_{E\in\pi} \|\, \mu(A_k)\, \|_{\mathbb{X}} + 1 \\ &\leq |\mu| \left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k \right) + 1 \\ &\leq |\mu|\,(\Omega) + 1,\end{aligned}$$

uniformemente sobre N como queríamos probar. □

Observación 1.2.6. Si μ es una medida vectorial contablemente aditiva con variación acotada en Ω, entonces $|\mu|$ es una una medida finita en $\mathcal{B}(\Omega)$.

Decimos que una medida vectorial contablemente aditiva μ es *regular* si $|\mu|$ es una medida positiva aditiva regular. Observamos que esto también es válido si $\Omega = \mathbb{R}^n$ debido a que $\mathbb{R}^n$ es σ-compacto y $|\mu|$ es finita.

Definición 1.2.7. Denotamos por $\mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\Omega)$ al espacio de medidas vectoriales contablemente aditivas en $\mathcal{B}(\Omega)$ de variación acotada. Tenemos que el espacio $\mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\Omega)$ es de Banach si se le asigna la norma $\|\, \mu\, \|_{\mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\Omega)} = |\mu|(\Omega)$.

Integral respecto una medida vectorial.

Definición 1.2.8. Consideramos $\mathbb{B}$ un espacio de Banach en dualidad con $\mathbb{X}$ y $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\Omega)$. Entonces para una función medible simple $\phi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\ \chi_{A_i}$ complejo valuada o $\mathbb{B}$-valuada se define la *integración respecto una medida vectorial* como

$$\int_{\Omega} \phi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i, \mu(A_i)).$$

Aquí $(\alpha_i, \mu(A_i)) = \alpha_i\ \mu(A_i)$ cuando los α_i's son complejos, $(\alpha_i, \mu(A_i)) = \langle \alpha_i, \mu(A_i)\rangle$ cuando $\alpha_i \in \mathbb{B} = \mathbb{X}^*$ o $(\alpha_i, \mu(A_i)) = \langle \mu(A_i), \alpha_i\rangle$ cuando $\alpha_i \in \mathbb{B}$ y $\mathbb{B}$ es tal que $\mathbb{B}^* = \mathbb{X}$.

Una función $\mathbb{B}$-valuada f es *integrable respecto la medida* μ si existe una sucesión de funciones simples $\{f_k\}$ que converge casi en todas partes a f y que satisface $\int_\Omega || f_k - f_l ||_{\mathbb{B}} \, \mathrm{d}|\mu| \to 0$ cuando $k, l \to \infty$, además se define

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad = \quad \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Si la función f es complejo valuada, la condición sobre la sucesión de funciones simples $\{f_k\}$ es que converja casi en todas partes a f y que $\int_\Omega |f_k - f_l| \, \mathrm{d}|\mu| \to 0$ cuando $k, l \to \infty$, finalmente se define

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad = \quad \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

donde el límite es en la norma de $\mathbb{B}$, mientras que en el caso anterior el límite se toma en $\mathbb{C}$.

Observación 1.2.9. Supóngase que las funciones ϕ y φ, $\mathbb{B}$-valuada y $\mathbb{C}$-valuada respectivamente, son μ-integrables. Entonces $|| \phi ||_{\mathbb{B}}$ y $|\varphi|$ son $|\mu|$-integrables y se satisface

$$\left| \int_\Omega \phi \,\mathrm{d}\mu \right| \quad \le \quad \int_\Omega || \phi ||_{\mathbb{B}} \,\mathrm{d}|\mu| \tag{1.8}$$

$$\left|\left| \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu \right|\right|_{\mathbb{X}} \quad \le \quad \int_\Omega |\varphi| \,\mathrm{d}|\mu|. \tag{1.9}$$

En efecto, para funciones simples es claro este resultado y las desigualdades (1.8) y (1.9) se obtienen de la desigualdad $|| \mu(A) ||_{\mathbb{X}} \le |\mu|(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(\Omega)$. Consideramos ahora una función $\mathbb{B}$-valuada ϕ tal que es μ-integrable, sea $\{\phi_k\}$ una sucesión de funciones simples que converge a ϕ. De la desigualdad $|\, || \phi_k ||_{\mathbb{B}} - || \phi_l ||_{\mathbb{B}} \,| \le || \phi_k - \phi_l ||_{\mathbb{B}}$ tenemos que la sucesión $\{|| \phi_k ||_{\mathbb{B}}\}$ converge a la función $|| \phi ||_{\mathbb{B}}$, por lo tanto ésta es $|\mu|$-integrable, y de la desigualdad $\left|\int_\Omega \phi_k \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_\Omega || \phi_k ||_{\mathbb{B}} \,\mathrm{d}|\mu|$ para todo $k \in \mathbb{N}$ obtenemos (1.8). Para la desigualdad (1.9) el argumento es similar.

Veamos a continuación que podemos intercambiar la integral respecto una medida vectorial con operadores lineales en el espacio de Banach $\mathbb{X}$.

Proposición 1.2.10. *Sea μ una medida vectorial de variación acotada en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{B})$, y sea $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ un operador lineal acotado. Sea μ_T definida por $\mu_T(E) = T(\mu(E))$, $E \in \mathcal{B}(\Omega)$. Entonces μ_T es de variación* *acotada, y toda función ϕ escalar que es μ-integrable en Ω es μ_T-integrable en Ω, además*

$$\int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu_T \;=\; T\left(\int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu\right). \tag{1.10}$$

Demostración. μ_T tiene variación acotada debido a la desigualdad $\|\, \mu_T(E) \,\|_{\mathbb{Y}} \leq \|\, T \,\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})} \|\, \mu(E) \,\|_{\mathbb{X}}$ para cada $E \in \mathcal{B}(\Omega)$. No es difícil ver que la igualdad (1.10) se cumple para funciones simples. Para una función ϕ μ-integrable tenemos que existe una sucesión de funciones simples $\{\phi_k\}$ tal que $\phi_k \to \phi$ y $\int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi_k \, \mathrm{d}\mu$, por tanto tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu_T &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi_k \, \mathrm{d}\mu_T \\
&= \lim_{k\to\infty} T\left(\int_\Omega \phi_k \, \mathrm{d}\mu\right) \\
&= T\left(\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi_k \, \mathrm{d}\mu\right) \\
&= T\left(\int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu\right),
\end{aligned}$$

por tanto la igualdad (1.10) se cumple para toda función ϕ escalar μ-integrable. $\square$

Veamos ahora una manera de medir la variación de una medida vectorial respecto la medida de Lebesgue.

Definición 1.2.11. Sea μ una medida vectorial y $1 < p \leq \infty$. Para un conjunto $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ llamamos la *p-variación* al número

$$\begin{aligned}
|\mu|_p(A) &= \sup\left\{\left\{\sum_{E\in\pi} \frac{\|\, \mu(E) \,\|_{\mathbb{X}}^p}{|E|^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}} : \pi \text{ partición finita de } A \text{ en } \mathcal{B}\right\}, \\
|\mu|_\infty(A) &= \inf\left\{C > 0 : \|\, \mu(E) \,\|_{\mathbb{X}} \leq C\,|E|,\ E \subseteq A, E \in \mathcal{B}(\Omega)\right\},
\end{aligned}$$

si $|\mu|_p(A) < +\infty$, entonces decimos que μ tiene *p-variación acotada* en A. Si $|\mu|_p(\Omega) < +\infty$, entonces decimos simplemente que μ tiene *p-variación acotada*.

Nos enfocamos en el caso particular $\Omega = Q$, donde Q es un cubo cerrado y acotado con aristas paralelas a los ejes coordenados en $\mathbb{R}^n$.

Denotamos por $V_{\mathbb{X}}^p(Q)$ al espacio de medidas vectoriales con p-variación acotada en Q.

Si al espacio $V^p_{\mathbb{X}}(Q)$ se le asigna la norma

$$|| \, \mu \, ||_{V^p_{\mathbb{X}}(Q)} \;=\; |\mu|_p(Q),$$

entonces $V^p_{\mathbb{X}}(Q)$ es un espacio de Banach para todo $p \in (1, \infty]$ (ver [14]).

Para estos espacios existe la inclusión continua $V^p_{\mathbb{X}}(Q) \subset V^q_{\mathbb{X}}(Q)$ siempre que $p < q$. Veamos que las medidas $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}$ se comportan adecuadamente en el siguiente sentido.

Definición 1.2.12. μ es λ-continua si satisface la igualdad

$$\lim_{|E| \to 0} \mu(E) \;=\; 0, \qquad\qquad E \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Observación 1.2.13. Toda medida $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(Q)$ es de variación acotada, contablemente aditiva y λ-continua.

Demostración. Sea π una partición finita de Q, entonces con q conjugado a $p < \infty$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{E \in \pi} || \, \mu(E) \, ||_{\mathbb{X}} &= \sum_{E \in \pi} |E|^{\frac{1}{q}} |E|^{-\frac{1}{q}} \, || \, \mu(E) \, ||_{\mathbb{X}} \\
&\leq \left\{ \sum_{E \in \pi} |E| \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{E \in \pi} |E|^{1-p} \, || \, \mu(E) \, ||^p_{\mathbb{X}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |Q|^{\frac{1}{q}} |\mu|_p(Q),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{E \in \pi} || \, \mu(E) \, ||_{\mathbb{X}} &\leq \sum_{E \in \pi} |\mu|_\infty(E) \; |E| \\
&\leq \sum_{E \in \pi} |\mu|_\infty(Q) \; |E| \\
&= |\mu|_\infty(Q) \; |Q|,
\end{aligned}$$

tomando el supremo sobre las particiones finitas de Q obtenemos

$$\begin{aligned}
|\mu|(Q) &\leq |Q|^{\frac{1}{q}} |\mu|_p(Q), \qquad\qquad p \in (1, \infty), \\
|\mu|(Q) &\leq |\mu|_\infty(Q) \; |Q|,
\end{aligned}$$

y por tanto μ es de variación acotada en Q.

La medida μ es λ-continua debido a que para $E \in \mathcal{B}(Q)$ tenemos

$$0 \leq || \mu(E) ||_{\mathbb{X}} \leq |\mu|(E) \leq |E|^{1/q} \; |\mu|_p(E) \;\to\; 0,$$

cuando $|E| \to 0$, y por tanto

$$\lim_{|E|\to 0} \mu(E) \;=\; 0.$$

Probemos por último que μ es contablemente aditiva. Debido a que μ es finita aditiva tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\left| \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \right|\right|_{\mathbb{X}} &= \left|\left| \mu\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i\right) \right|\right|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \left| \bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i \right|^{1/q} |\mu|_p \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i \right). \end{aligned}$$

La medida de Lebesgue es contablemente aditiva, esto implica que $\left|\bigcup_{i>k} A_i\right| \to 0$ cuando $k \to \infty$, concluimos pues que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

□

Ya vimos que una medida vectorial con variación acotada nos define una función de conjuntos positiva, veamos ahora cómo obtener una medida con valores complejos.

Sea μ una medida vectorial, para cada $\xi^* \in \mathbb{X}^*$ definimos la función de conjuntos con valores complejos μ_{ξ^*} como el mapeo $A \mapsto \langle \xi^*, \mu(A) \rangle$. Observamos las siguientes implicaciones sencillas.

1. La linealidad de ξ^* implica que la función μ_{ξ^*} sea finitamente aditiva.

2. La continuidad de ξ^* y la aditividad contable de μ implican que μ_{ξ^*} sea contablemente aditiva.

3. μ de variación acotada y la desigualdad $|\mu_{\xi^*}(A)| \leq || \xi^* ||_{\mathbb{X}^*} \, || \mu(A) ||_{\mathbb{X}}$ implican que μ_{ξ^*} sea de variación acotada además de que

$$|\mu_{\xi^*}|(A) \;\leq\; || \xi^* ||_{\mathbb{X}^*} \, |\mu|(A). \tag{1.11}$$

Observación 1.2.14. El punto 2 nos implica que para cualquier $\xi^* \in \mathbb{X}^*$ la medida compleja $\mu_{\xi^*} = \langle \xi^*, \mu \rangle$ tiene integral acotada para toda función medible ϕ;

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, \mathrm{d}\mu_{\xi^*} \right| \;\; \leq \;\; || \, \xi^* \, ||_{\mathbb{X}^*} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi| \, \mathrm{d}|\mu|. \tag{1.12}$$

La integral de la derecha está bien definida debido a que $|\mu|$ es una medida positiva (ver Observación 1.2.6). La cota (1.12) es consecuencia directa de la desigualdad (1.11).

Observación 1.2.15. Debido a que una medida $\mu \in V_{\mathbb{X}}^p(Q)$ tiene variación acotada en Q, tiene sentido la integral de funciones integrables respecto a la medida μ, sin embargo existen más funciones medibles que podemos integrar respecto a μ.

En efecto, sea $\mu \in V_{\mathbb{X}}^p(Q)$ y consideramos una función ϕ simple en $L^q(Q)$ o $L_{\mathbb{B}}^q(Q)$ donde $\mathbb{B}$ es un espacio de Banach en dualidad con $\mathbb{X}$, entonces como en la Definición 1.2.8 hacemos

$$\int_Q \phi(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \;\; = \;\; \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i, \mu(A_i)). \tag{1.13}$$

Sin importar el espacio en el que se encuentran los elementos α_i, siempre tenemos
$|| \, (\alpha_i, \mu(A_i)) \, || \leq || \, \alpha_i \, || \, || \, \mu(A_i) \, ||_{\mathbb{X}}$ donde la norma $|| \cdot ||$ representa a las normas $|\cdot|$ o $|| \cdot ||_{\mathbb{B}}$, por tanto la suma en (1.13) es acotada, como se puede comprobar a continuación,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i, \mu(A_i)) \right\| \;\; &\leq \;\; \sum_{i=1}^{N} || \, \alpha_i \, || \, || \, \mu(A_i) \, ||_{\mathbb{X}} \\
&\leq \;\; \left\{ \sum_{i=1}^{N} || \, \alpha_i \, ||^q \, |A_i| \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{|| \, \mu(A_i) \, ||_{\mathbb{X}}^p}{|A_i|^{p-1}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \;\; || \, \phi \, || \;\; |\mu|_p(Q).
\end{aligned}$$

Aquí $|| \, \phi \, ||$ representa la norma de ϕ en $L^q(Q)$ o $L_{\mathbb{B}}^q(Q)$.

Finalmente procedemos a extender la integral respecto una medida vectorial con p-variación acotada a todo el espacio $L^q(Q)$ o $L_{\mathbb{B}}^q(Q)$ mediante el límite, como en la Definición 1.2.8. Tenemos además la desigualdad

$$\left\| \int_Q \phi \, \mathrm{d}\mu \right\|_{\mathbb{X}} \;\; \leq \;\; || \, \phi \, || \;\; |\mu|_p(Q). \tag{1.14}$$

La definición anterior nos permite generar funcionales continuas en el espacio $L^q_{\mathbb{X}}(Q)$. En efecto, sea $\mu \in V^p_{\mathbb{X}^*}(Q)$, entonces el mapeo $\phi \mapsto \int_Q \phi(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$ es un funcional lineal continuo sobre $L^q_{\mathbb{X}}(Q)$ con norma igual a $||\ \mu\ ||_{V^p_{\mathbb{X}^*}}$. Por tanto tenemos la inclusión continua $V^p_{\mathbb{X}^*}(Q) \subseteq (L^q_{\mathbb{X}}(Q))^*$. Sin embargo existe un resultado más fuerte (ver [13], [14]).

Teorema 1.2.16. *Para* $p \in (1, \infty]$ *tenemos*

$$(L^q_{\mathbb{X}}(Q))^* \quad = \quad V^p_{\mathbb{X}^*}(Q).$$

Veamos más propiedades de estos espacios $V^p_{\mathbb{X}}$.

Observación 1.2.17. Una medida $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(Q)$ define una medida positiva $|\mu|$ con p-variación acotada en Q.

Demostración. Ya vimos que $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(Q)$ define una medida de Borel positiva $|\mu|$, veamos que tiene p-variación acotada. Sea π una partición finita de Q, y para cada $E \in \pi$ consideramos una partición finita π_E, usando la desigualdad sobre la variación de la medida μ en la Observación 1.2.13 tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{E\in\pi} \frac{\left\{\sum_{A\in\pi_E} ||\ \mu(A)\ ||_{\mathbb{X}}\right\}^p}{|E|^{p-1}} &\leq \sum_{E\in\pi} \frac{|E|^{\frac{p}{q}} \left\{\sum_{A\in\pi_E} \frac{||\ \mu(A)\ ||^p_{\mathbb{X}}}{|A|^{p-1}}\right\}}{|E|^{p-1}} \\
&= \sum_{E\in\pi} \sum_{A\in\pi_E} \frac{||\ \mu(A)\ ||^p_{\mathbb{X}}}{|A|^{p-1}} \\
&\leq |\mu|^p_p(Q),
\end{aligned}$$

tomando los respectivos supremos sobre todas las particiones finitas π_E para cada E en π obtenemos

$$\sum_{E\in\pi} \frac{|\mu|(E)^p}{|E|^{p-1}} \quad \leq \quad |\mu|^p_p(Q),$$

de donde deducimos que $|\mu| \in V^p(Q)$ para $p < \infty$. Consideramos ahora $p = \infty$ y $E \in \mathcal{B}(Q)$, sea π una partición finita de E, entonces

$$\sum_{A\in\pi} ||\ \mu(A)\ ||_{\mathbb{X}} \quad \leq \quad |\mu|_\infty(Q)\ |E|.$$

Tomando el supremo sobre las particiones finitas de E obtenemos $|\mu|(E) \leq |\mu|_\infty(Q)\ |E|$. Por tanto la medida $|\mu|$ es acotada por la medida de Lebesgue en Q, esto significa $|\mu| \in V^\infty(Q)$. $\square$

Consideramos $f \in L^p_{\mathbb{X}}(Q)$ y definimos la medida $\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$, entonces $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(Q)$. En efecto, sea π una partición finita de Q, entonces

$$\sum_{E\in\pi} \|\, \mu(E) \,\|_{\mathbb{X}} \;\leq\; \sum_{E\in\pi} \int_E \|\, f(x) \,\|_{\mathbb{X}} \,\mathrm{d}x \;=\; \|\, f \,\|_{L^1_{\mathbb{X}}(Q)} . \tag{1.15}$$

Para $p \in (1,\infty)$ tenemos

$$\|\, \mu(E) \,\|_{\mathbb{X}} \;\leq\; \int_E \|\, f(x) \,\|_{\mathbb{X}} \,\mathrm{d}x \;\leq\; \left\{ \int_E \|\, f(x) \,\|^p_{\mathbb{X}} \,\mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p}} |E|^{\frac{1}{q}},$$

luego

$$\frac{\|\, \mu(E) \,\|^p_{\mathbb{X}}}{|E|^{p-1}} \leq |E|^{\frac{p}{q}-p+1} \int_E \|\, f(x) \,\|^p_{\mathbb{X}} \,\mathrm{d}x = \int_E \|\, f(x) \,\|^p_{\mathbb{X}} \,\mathrm{d}x,$$

por tanto

$$\left\{ \sum_{E\in\pi} \frac{\|\, \mu(E) \,\|^p_{\mathbb{X}}}{|E|^{p-1}} \right\}^{\frac{1}{p}} \;\leq\; \left\{ \sum_{E\in\pi} \int_E \|\, f(x) \,\|^p_{\mathbb{X}} \,\mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p}} \;\leq\; \|\, f \,\|_{L^p_{\mathbb{X}}(Q)} \tag{1.16}$$

Tomando el supremo sobre todas las particiones finitas π de Q en (1.15) y (1.16) deducimos que μ es de variación acotada o tiene p-variación acotada.

También tenemos la cota

$$\|\, \mu(E) \,\|_{\mathbb{X}} \;\leq\; \|\, f \,\|_{L^\infty_{\mathbb{X}}(Q)} \, |E|,$$

para todo $E \subseteq Q$, entonces μ es mayorada por la medida de Lebesgue en Q, además $|\mu|_\infty(Q) \leq \|\, f \,\|_{L^\infty_{\mathbb{X}}(Q)}$.

Recíprocamente, si $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(Q)$ tiene como densidad a la función f, es decir, $\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$, entonces $f \in L^p_{\mathbb{X}}(Q)$ y $\|\, f \,\|_{L^p_{\mathbb{X}}(Q)} \leq \|\, \mu \,\|_{V^p_{\mathbb{X}}(Q)}$, (ver [14]). Por tanto tenemos el siguiente resultado.

Observación 1.2.18. Sea $p \geq 1$. Supongamos que $\mathrm{d}\mu = f\,\mathrm{d}\lambda$, entonces la medida $\mathbb{X}$-valuada μ tiene p-variación acotada en Q si y sólo si la función f pertenece al espacio $L^p_{\mathbb{X}}(Q)$, además $\|\, \mu \,\|_{V^p_{\mathbb{X}}} = \|\, f \,\|_{L^p_{\mathbb{X}}}$. De esta forma tenemos la inclusión isométrica $L^p_{\mathbb{X}}(Q) \subset V^p_{\mathbb{X}}(Q)$.

Veamos ahora una caracterización de las medidas con p-variación acotada en Q.

Proposición 1.2.19. *Sea μ una medida vectorial en el cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ y $p \in (1, \infty]$, entonces $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(Q)$ si y sólo si existe una función no negativa $g \in L^p(Q)$ tal que $|\mu|_p(Q) = ||\, g\, ||_{L^p(Q)}$ y satisface que para toda función $\phi \in L^q(Q)$, q conjugado a p, se cumple*

$$\left|\left| \int_Q \phi \,\mathrm{d}\mu \right|\right|_{\mathbb{X}} \;\leq\; \int_Q |\phi| g \,\mathrm{d}\lambda. \tag{1.17}$$

En este caso tenemos $g = \frac{\mathrm{d}|\mu|}{\mathrm{d}\lambda}$.

Demostración. Sea g una función en $L^p(Q)$ que satisface (1.17) para toda $\phi \in L^q(Q)$. Sea π una partición finita de Q. Debido a que $\left|\left| \frac{\chi_E}{|E|^{\frac{1}{q}}} \right|\right|_{L^q(Q)} = 1$ para todo $E \in \mathcal{B}(Q)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{E\in\pi} \frac{||\, \mu(E)\, ||^p_{\mathbb{X}}}{|E|^{p-1}} &= \sum_{E\in\pi} \left|\left| \int_E \frac{1}{|E|^{\frac{1}{q}}} \,\mathrm{d}\mu \right|\right|^p_{\mathbb{X}} \\
&\leq \sum_{E\in\pi} \left\{ \int_E \frac{g}{|E|^{\frac{1}{q}}} \,\mathrm{d}\lambda \right\}^p \\
&\leq \sum_{E\in\pi} \left\{ \left\{ \int_E g^p \,\mathrm{d}\lambda \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_E \frac{1}{|E|} \,\mathrm{d}\lambda \right\}^{\frac{1}{q}} \right\}^p \\
&= \sum_{E\in\pi} \int_E g^p \,\mathrm{d}\lambda \\
&= ||\, g\, ||^p_p,
\end{aligned}$$

de donde concluimos que μ tiene p-variación acotada cuando $p < \infty$. Cuando $p = \infty$ tenemos la desigualdad

$$||\, \mu(E)\, ||_{\mathbb{X}} = \left|\left| \int \chi_E \,\mathrm{d}\mu \right|\right|_{\mathbb{X}} \leq \int \chi_E g \,\mathrm{d}\lambda \leq ||\, g\, ||_{L^\infty_{\mathbb{X}}(Q)} |E|$$

para todo $E \subseteq Q$ medible, entonces $\mu \in V^\infty_{\mathbb{X}}(Q)$.

Supongamos ahora que μ tiene p-variación acotada. Entonces la función de conjuntos $|\mu|$ tiene p-variación acotada, por lo tanto $|\mu|$ es una medida positiva con variación acotada y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue λ en Q por la Observación 1.2.13. El Teorema de Radon-Nikodym nos asegura la existencia de una función $g \in L^1(Q)$ tal que $\mathrm{d}|\mu| = g\,\mathrm{d}\lambda$, entonces $g \in L^p(Q)$ por la Observación 1.2.18. El Teorema de Radon-Nikodym también nos dice que $g = \frac{\mathrm{d}|\mu|}{\mathrm{d}\lambda}$. Veamos a continuación que se cumple la desigualdad (1.17) para toda $\phi \in L^q(Q)$. Ésta se obtiene de la desigualdad $|| \, \mu(E) \, ||_{\mathbb{X}} \leq |\mu|(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}(Q)$. En efecto,

$$\left|\left| \int_Q \chi_E \, \mathrm{d}\mu \right|\right|_{\mathbb{X}} \leq \int_Q \chi_E \, \mathrm{d}|\mu| = \int_Q \chi_E \, g \, \mathrm{d}\lambda,$$

de aquí que si $\phi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}$ es una función simple, tenemos

$$\begin{aligned} \left|\left| \int_Q \phi \, \mathrm{d}\mu \right|\right|_{\mathbb{X}} &\leq \sum_{i=1}^N |a_i| \left|\left| \int_Q \chi_{E_i} \, \mathrm{d}\mu \right|\right|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \sum_{i=1}^N |a_i| \int_Q \chi_{E_i} \, g \, \mathrm{d}\lambda \; = \; \int_Q |\phi| g \, \mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos (1.17) para toda $\phi \in L^q(Q)$ debido a que ϕ puede ser aproximada por funciones simples en $L^q(Q)$.

Por último probemos que $|| \, g \, ||_{L^p(Q)} = |\mu|_p(Q)$. Debido a que la función g satisface la desigualdad (1.17) para toda $\phi \in L^q(Q)$ junto con la desigualdad de Hölder tenemos que $|\mu|_p(Q) \leq || \, g \, ||_p$. Por otro lado, para todo $\epsilon > 0$ existe una función $f \in L^q(Q)$ tal que $|| \, f \, ||_q \leq 1$ y satisface la desigualdad

$$|| \, g \, ||_p \; < \; \left| \int_Q fg \, \mathrm{d}\lambda \right| + \epsilon$$

pero por (1.14) tenemos

$$\left| \int_Q fg \, \mathrm{d}\lambda \right| \; \leq \; \int_Q |f| \, \mathrm{d}|\mu| \; \leq \; || \, f \, ||_q \; |\mu|_p(Q) \; \leq \; |\mu|_p(Q),$$

entonces $|| \, g \, ||_p \; < \; |\mu|_p(Q) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, por tanto $|| \, g \, ||_p \; \leq \; |\mu|_p(Q)$ y obtenemos que $|| \, g \, ||_p \; = \; |\mu|_p(Q)$, como queríamos probar. □

Ahora extendemos las definiciones antes vistas y la Proposición 1.2.19 a todo $\mathbb{R}^n$.

Decimos que una medida vectorial μ es *regular* si para todo conjunto $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ y $\epsilon > 0$ existen los conjuntos K compacto y O abierto tales que $K \subset A \subset O$ y $|| \, \mu \, (O \setminus K) \, ||_{\mathbb{X}} < \epsilon$.

Observar que cuando una medida vectorial μ es de variación acotada, entonces μ es regular. En efecto, la desigualdad $|| \, \mu(A) \, ||_{\mathbb{X}} \leq |\mu|(A)$ implica que si la medida $|\mu|$ es regular, entonces la medida vectorial μ es regular, pero la medida $|\mu|$ es regular porque es finita y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es σ-compacto. De esta implicación hacemos la siguiente

Definición 1.2.20. Definimos $\mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de medidas regulares en el sigma-álgebra de Borel de conjuntos acotados tales que $|\mu|(Q) \leq A$ para alguna A y todo cubo Q, por lo que definimos

$$|| \, \mu \, ||_{\mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)} \;\; = \;\; \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} |\mu|(Q).$$

Definición 1.2.21. Definimos $V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$, como el espacio de medidas regulares en el sigma-álgebra de Borel de conjuntos acotados tales que $|| \, \mu \, ||_{V^p_{\mathbb{X}}(Q)} \leq A$ para cualquier cubo Q, por lo que definimos

$$|| \, \mu \, ||_{V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)} \;\; = \;\; \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} |\mu|_p(Q)$$

y $V^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de medidas $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ que son λ-continuas.

De la Definición 1.2.21 podemos definir la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, \mathrm{d}\mu$ para funciones escalares $\phi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ o para funciones vectoriales $\phi \in L^q_{\mathbb{B}}(\mathbb{R}^n)$, con $\mathbb{B}$ un espacio de Banach en dualidad con $\mathbb{X}$. También tenemos que el Teorema 1.2.16 es válido en este caso, es decir, tenemos el siguiente

Teorema 1.2.22. *Para $p \in (1, \infty]$ tenemos*

$$(L^q_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n))^* \;\; = \;\; V^p_{\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n).$$

Otro resultado que es válido en la extensión a $\mathbb{R}^n$ es el de la inclusión de $L^p_{\mathbb{X}}$ en $V^p_{\mathbb{X}}$.

Observación 1.2.23. Para $p \geq 1$, tenemos la inclusión isométrica $L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \subseteq V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$.

También el Teorema 1.2.19 es válido en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.2.24. *Sea μ una medida vectorial en $\mathbb{R}^n$ y $p \in (1, \infty]$, entonces $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si existe una función no negativa $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $|\mu|_p(\mathbb{R}^n) = || \, g \, ||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ y satisface que para toda función $\phi \in L^q(\mathbb{R}^n)$, q conjugado a p, se cumple*

$$\left|\left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, \mathrm{d}\mu \right|\right|_{\mathbb{X}} \;\; \leq \;\; \int_{\mathbb{R}^n} |\phi| g \, \mathrm{d}\lambda. \tag{1.18}$$

En este caso tenemos $g = \frac{\mathrm{d}|\mu|}{\mathrm{d}\lambda}$.

Demostración. Sea $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, consideramos la sucesión de cubos $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ centrados en el origen y cuyas aristas de longitud k son paralelas a los ejes de coordenadas de $\mathbb{R}^n$, de esta forma tenemos $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \cdots \subseteq Q_k \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{R}^n$. Para cada k existe una función no negativa g_k cuya norma en $L^p(Q_k)$ es acotada por $|\mu|_p(\mathbb{R}^n)$, por tanto la sucesión de funciones $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Además la función g_k es la extensión de la función g_{k-1} de Q_{k-1} a Q_k, esto debido a que $g_k = \frac{\mathrm{d}|\mu|}{\mathrm{d}\lambda}$ en Q_k y $g_{k-1} = \frac{\mathrm{d}|\mu|}{\mathrm{d}\lambda}$ en Q_{k-1} de donde deducimos $g_k\Big|_{Q_k} = g_{k-1}$. De esta manera definimos

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

La función g es no negativa en $\mathbb{R}^n$ y satisface $g\Big|_{Q_k} = g_k$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^p \,\mathrm{d}x \leq \sup_k \int_{Q_k} g^p \,\mathrm{d}x = \sup_k \int_{Q_k} g_k^p \,\mathrm{d}x \leq |\mu|_p^p(\mathbb{R}^n),$$

esto es $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Por último tenemos

$$\begin{aligned}\left|\left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi \,\mathrm{d}\mu \right|\right|_{\mathbb{X}} &\leq \sup_k \left|\left| \int_{Q_k} \phi \,\mathrm{d}\mu \right|\right|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \sup_k \int_{Q_k} |\phi| g_k \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \sup_k \int_{Q_k} |\phi| g \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi| g \,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

para toda función ϕ en $L^q(\mathbb{R}^n)$.

La igualdad $|\mu|_p(\mathbb{R}^n) = ||\, g\, ||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ y la implicación contraria se prueban igual que antes. □

Observación 1.2.25. Sea $p > 1$ y q su conjugado, entonces para $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ se cumple

$$\left|\left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi \,\mathrm{d}\mu \right|\right|_{\mathbb{X}} \leq ||\, \mu\, ||_{V^p_{\mathbb{X}}} \, ||\, \phi\, ||_q . \tag{1.19}$$

Funciones μ-integrables y el Teorema de Singer.

Como caso particular de funciones integrables respecto a $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ mencionamos las funciones $\phi \in \mathcal{C}_{0,\mathbb{B}}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{B}$ que se anulan en el infinito, donde $\mathbb{B}$ es un espacio de Banach en dualidad con $\mathbb{X}$. Similarmente las funciones $\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ son μ-integrables.

En efecto, para una función no negativa $\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ sabemos que podemos aproximar a ϕ mediante funciones simples ϕ_k tales que $\phi_k \nearrow \phi$ uniformemente y para las cuales la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k \,\mathrm{d}\mu$ está bien definida además de que $\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_k - \phi_l| \,\mathrm{d}|\mu| \to 0$ cuando $k, l \to \infty$. Por tanto $\int_\Omega \phi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi_k \,\mathrm{d}\mu$ está bien definida. Para una función en general $\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ se realiza la separación $\phi = \phi^+ - \phi^-$ en su parte positiva y negativa (ϕ^+, ϕ^- son positivas) y la integral se define $\int_\Omega \phi \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \phi^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega \phi^- \,\mathrm{d}\mu$, que está bien definida.

Para el espacio $\mathcal{C}_{0,\mathbb{B}}(\mathbb{R}^n)$ nos ayudamos del hecho de que el producto tensorial $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{B}$ es denso en $\mathcal{C}_{0,\mathbb{B}}(\mathbb{R}^n)$, por tanto es suficiente probar que una función de la forma $\sum_{i=1}^N \phi_i \cdot b_i$ con $\phi_i \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, $b_i \in \mathbb{B}$ $i = 1, 2, \ldots, N$, es integrable respecto μ. Pero ya vimos que toda ϕ_i es integrable, por tanto de la Proposición 1.2.10 tenemos $\int_\Omega \phi_i \cdot b_i \,\mathrm{d}\mu = \left\langle b_i, \int_\Omega \phi_i \,\mathrm{d}\mu \right\rangle$ o $\int_\Omega \phi_i \cdot b_i \,\mathrm{d}\mu = \left\langle \int_\Omega \phi_i \,\mathrm{d}\mu, b_i \right\rangle$ de acuerdo si $\mathbb{B} = \mathbb{X}^*$ o $\mathbb{B}^* = \mathbb{X}$ y de aquí que

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \phi_i \cdot b_i \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \phi_i \cdot b_i \,\mathrm{d}\mu$$

está bien definida.

Finalmente procedemos a definir la integral $\int_\Omega \phi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi_k \,\mathrm{d}\mu$ para toda $\phi \in \mathcal{C}_{0,\mathbb{B}}(\mathbb{R}^n)$.

La integral respecto la medida $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)$ define un operador lineal en $\mathcal{C}_{0,\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ mediante $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \phi \,\mathrm{d}\mu$. El Teorema de Singer nos dice más, (ver [14], [23]).

Teorema 1.2.26 (de Singer). *Existe un isomorfismo isométrico entre el dual topológico $[\mathcal{C}_{0,\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)]^*$ de $\mathcal{C}_{0,\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y el espacio de Banach $\mathfrak{M}_{\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)$, donde el funcional $T \in [\mathcal{C}_{0,\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)]^*$ y la medida correspondiente $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)$ están relacionados mediante la ecuación*

$$\begin{aligned} T(f) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi \,\mathrm{d}\mu, \qquad \phi \in \mathcal{C}_{0,\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \\ \|\, T \,\| &= \|\, \mu \,\|. \end{aligned}$$

1.3. Distribuciones vectoriales

En esta sección definimos las distribuciones temperadas Banach valuadas y algunas maximales de funciones vectoriales, también se extenderán al contexto vectorial algunos resultados que sabemos son válidos en el caso escalar.

Funciones de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Considérense las n-tuplas $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ de enteros no negativos, recordamos que si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, y el operador diferencial $D^\beta = \partial^{|\beta|}/\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \cdots \partial x_n^{\beta_n}$, donde a $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$ se le conoce como el *orden* de la n-tupla β.

Definición 1.3.1. Una función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una *función de Schwartz* en $\mathbb{R}^n$ si es infinitamente continua diferenciable en su dominio y satisface la condición de crecimiento

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \phi(x) \right| < \infty. \tag{1.20}$$

Dadas dos funciones de Schwartz ϕ y φ, y un escalar $a \in \mathbb{C}$, entonces la función $\psi : x \mapsto a\phi(x) + \varphi(x)$ es una función de Schwartz. Al espacio de todas las funciones de Schwartz lo denotamos como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (o simplemente $\mathcal{S}$).

Cada par de n-tuplas (α,β) define una seminorma en $\mathcal{S}$ mediante

$$||\, \phi \,||_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \phi(x) \right|.$$

Estas seminormas definen a las pseudo-métricas $d_{\alpha,\beta}(\phi, \varphi) = ||\, \phi - \varphi \,||_{\alpha,\beta}$ (para algunos pares (α, β), $d_{\alpha,\beta}$ es métrica, pero en general son pseudo-métricas). Esta familia de pseudo-métricas es numerable, digamos $\{d'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, a su vez, esta familia define la métrica d en $\mathcal{S}$ como

$$d \;=\; \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \frac{d'_k}{1 + d'_k}.$$

Dotamos de esta manera al espacio $\mathcal{S}$ de una métrica que satisface lo siguiente, (ver [18], [30]).

Proposición 1.3.2. *El espacio métrico $(\mathcal{S}, d)$ es completo.*

Una manera distinta de analizar convergencia en $\mathcal{S}$ es notando que una sucesión de funciones $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a ϕ con la métrica d si y sólo si converge con todas las pseudo-métricas d'_k, de aquí la siguiente

Observación 1.3.3. La sucesión de funciones $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ en $(\mathcal{S}, d)$ si y sólo si $\|\, \phi_k - \phi \,\|_{\alpha,\beta}$ converge a 0 para todo par de n-tuplas (α, β).

También tenemos que los mapeos $(\phi, \varphi) \mapsto \phi + \varphi$ y $\phi \mapsto a\phi$ con a un escalar, son continuos con la métrica d, por tanto $(\mathcal{S}, d)$ es un espacio vectorial topológico.

Definición 1.3.4. Para una función ϕ, los operadores *traslación* τ_x y *reflexión* $\check{}$ están dados como $\tau_x\phi(y) = \phi(y - x)$ y $\check{\phi}(y) = \phi(-y)$.

A continuación mencionamos algunos resultados que cumple el espacio de funciones prueba y que servirán más adelante, (ver [30]).

Proposición 1.3.5. *Sea $\varphi \in \mathcal{S}$, en la topología de $\mathcal{S}$ definida por d se cumple*

1. *Si $\varphi \in \mathcal{S}$, entonces* $\lim_{h\to 0} \tau_h\varphi = \varphi$.
2. *Sea $\varphi \in \mathcal{S}$ y $h = (0, \ldots, h_i, \ldots, 0)$, entonces*

$$\frac{\varphi - \tau_h\varphi}{h_i} \quad \to \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

cuando $|h|$ tiende a 0.

De (1) se obtiene el siguiente resultado.

Lema 1.3.6. *Sea $\phi \in \mathcal{S}$, entonces el mapeo $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}$ definida como $\Psi(h) = \phi(\cdot + h) = \tau_{-h} \circ \phi$, es continuo con la métrica d.*

Demostración. Es suficiente probar continuidad en el origen, pero por 1 de la Proposición 1.3.5 obtenemos que Ψ es continua en 0. □

Lema 1.3.7. *Sea $\phi \in \mathcal{S}$, entonces $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p \in [1,\infty]$, además*

$$\begin{aligned} \|\, \phi \,\|_p &\leq c(n,p) \,\|\, \phi \,\|_{0,0} + c(n,p) \sum_{|\alpha|=n} \|\, \phi \,\|_{2\alpha,0}\,, \qquad p < +\infty. \\ \|\, \phi \,\|_\infty &= \|\, \phi \,\|_{0,0}\,. \end{aligned}$$

La suma corre sobre todas las n-tuplas α cuyo orden sea igual a n.

Demostración. La igualdad $\|\, \phi \,\|_\infty = \|\, \phi \,\|_{0,0}$ es clara. Sea $p < \infty$. Recordemos que el Teorema multinomial nos dice

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m \quad = \quad \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha$$

donde $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_n!$, entonces para $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ tenemos

$$|x|^{2n} = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} x^{2\alpha}$$

y por tanto

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^{2n}|\phi(x)| \leq n! \sum_{|\alpha|=n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{2\alpha}\phi(x)| = n! \sum_{|\alpha|=n} ||\, \phi \,||_{2\alpha,0} \, . \quad (1.21)$$

De aquí el siguiente desarrollo,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{|x|\leq 1} |\phi(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x|>1} |\phi(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq ||\, \phi \,||_{\infty} \left(\int_{|x|\leq 1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + C \left(\int_{|x|>1} |x|^{-2np} \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{\omega_n}{n}\right)^{\frac{1}{p}} ||\, \phi \,||_{0,0} + \left(\frac{\omega_n}{n(2p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} n! \sum_{|\alpha|=n} ||\, \phi \,||_{2\alpha,0} \, ,
\end{aligned}$$

donde $C = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^{2n}|\phi(x)|$, y ω_n representa el "área" de la esfera en $\mathbb{R}^n$ de radio 1, constante que sólo depende de la dimensión n. □

La desigualdad (1.21) se puede generalizar a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^m|\phi(x)| \leq c_{n,m} \sum_{|\alpha|=m} ||\, \phi \,||_{\alpha,0} \, , \qquad (1.22)$$

debido a la desigualdad

$$|x|^m \leq c_{n,m} \sum_{|\alpha|=m} |x^\alpha|.$$

Distribuciones Banach valuadas.

Definición 1.3.8. Una distribución Banach valuada (o distribución vectorial) es un mapeo de $\mathcal{S}$ a un espacio de Banach $\mathbb{X}$ tal que es lineal y continuo en $\mathcal{S}$. Se denotará por $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ al espacio de todas las distribuciones Banach valuadas, y a la aplicación de $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ en $\phi \in \mathcal{S}$ la denotaremos $f(\phi) = \langle f, \phi \rangle$.

Estos objetos no son nuevos, por citar algunos trabajos donde aparecen están [5], [8], [16] y [24].

Ejemplo 1.3.9. Los espacios $L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$.

Sea $f \in L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$. Por el Lema 1.3.7 la función ϕ en $\mathcal{S}$ es una función en $L^q(\mathbb{R}^n)$ con q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Sabemos que la integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$ está bien definida, por lo tanto la aplicación

$$\phi \;\mapsto\; \langle T_f, \phi\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

tiene sentido. T_f es un operador lineal, falta ver que es continuo. Por ser un operador lineal en un espacio metrizable completo, basta ver que la aplicación es continua en el elemento $0 \in \mathcal{S}$. Sea $\{\phi_k\}$ una sucesión tal que $\phi_k \to 0$ en $\mathcal{S}$, la linealidad de T_f, la desigualdad (1.5) y el Lema 1.3.7 implican

$$\begin{aligned} ||\, \langle T_f, \phi_k\rangle \,||_{\mathbb{X}} &\leq ||\, f \,||_{L^p_{\mathbb{X}}} ||\, \phi_k \,||_q \\ &\leq c(n,q)\, ||\, f \,||_{L^p_{\mathbb{X}}} \left(||\, \phi_k \,||_{0,0} + \sum_{|\alpha|=n} ||\, \phi_k \,||_{2\alpha,0} \right), \end{aligned}$$

para $p > 1$, para $p = 1$ tenemos

$$||\, \langle T_f, \phi_k\rangle \,||_{\mathbb{X}} \;\leq\; ||\, f \,||_{L^1_{\mathbb{X}}} ||\, \phi_k \,||_\infty \;=\; ||\, f \,||_{L^1_{\mathbb{X}}} ||\, \phi_k \,||_{0,0}\,.$$

La convergencia de ϕ_k a 0 en $\mathcal{S}$ implican la convergencia de $||\, \phi_k \,||_{0,0}$ y $||\, \phi_k \,||_{2\alpha,0}$ a 0, esto implica que $\langle T_f, \phi_k\rangle$ converge a 0 en $\mathbb{X}$, por tanto el operador T_f es continuo en $\mathcal{S}$ y el operador T_f es una distribución Banach valuada.

Ejemplo 1.3.10. Medidas vectoriales con p-variación acotada en $\mathbb{R}^n$, $p \geq 1$.

Para ϕ en $\mathcal{S}$ definimos la aplicación

$$\phi \;\mapsto\; \langle T_\mu, \phi\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Ya sabemos que T_μ está bien definido, veamos que es continuo. Supongamos que $\phi_k \to 0$ en $\mathcal{S}$, entonces

$$||\, \langle T_\mu, \phi_k\rangle \,||_{\mathbb{X}} \;\leq\; |\mu|_p\, ||\, \phi_k \,||_q \;\leq\; c(n,q)\; |\mu|_p \left(||\, \phi_k \,||_{0,0} + \sum_{|\alpha|=n} ||\, \phi_k \,||_{2\alpha,0} \right),$$

cuando $p > 1$, para $p = \infty$ tenemos

$$||\, \langle T_\mu, \phi_k\rangle \,||_{\mathbb{X}} \;\leq\; |\mu|\, ||\, \phi_k \,||_\infty \;=\; ||\, f \,||_{L^1_{\mathbb{X}}} ||\, \phi_k \,||_{0,0}\,.$$

Al igual que antes la convergencia de ϕ_k a 0 en $\mathcal{S}$ implican la convergencia de $||\, \phi_k \,||_{0,0}$ y $||\, \phi_k \,||_{2\alpha,0}$ a 0 y concluimos que $\langle T_\mu, \phi_k\rangle$ converge a 0 en $\mathbb{X}$. Por lo tanto el operador T_μ es continuo en $\mathcal{S}$ y el operador T_μ es una distribución Banach valuada.

Observamos en los ejemplos anteriores que los operadores T_f y T_μ están acotados por una suma finita de seminormas $||\cdot||_{\alpha,\beta}$ debido a la definición de los operadores, facilitando así la comprobación de la continuidad de éstos. El siguiente resultado nos dice que si un operador de $\mathcal{S}$ está acotado por una suma finita de seminormas $||\cdot||_{\alpha,\beta}$, entonces se obtiene la continuidad del operador.

Proposición 1.3.11. *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach, un operador lineal $T : \mathcal{S} \to \mathbb{X}$ es continuo si y sólo si existe una constante $C > 0$ y enteros positivos m y l tales que*

$$|| \, T(\phi) \, ||_{\mathbb{X}} \leq C \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq l} || \, \phi \, ||_{\alpha,\beta} \, ,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$.

La suma corre sobre todas las n-tuplas α y β cuyos órdenes sean menor o igual a m y l respectivamente.

Este resultado es una extensión del Teorema I.3.11 en [30], y la demostración puede realizarse de la misma manera, esto debido a que la continuidad y la condición mencionada en el Teorema 1.3.11 son propiedades de la estructura topológica del espacio $\mathcal{S}$ y no del contradominio del mapeo T.

Convolución.

Recordamos que dadas dos funciones ϕ y φ en $\mathcal{S}$, la convolución $\phi * \varphi$ es la función definida por la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\varphi(x-y) \, \mathrm{d}y.$$

Esta función está bien definida y cumple $\phi * \varphi(x) = \varphi * \phi(x)$. Observamos además que la aplicación $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y$ la podemos representar como $\varphi \mapsto \langle \phi, \tau_x \check{\varphi} \rangle$.

Deseamos introducir una definición de convolución entre un elemento de $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ y uno en $\mathcal{S}$, pero primero tenemos la siguiente observación.

Observación 1.3.12. Sea f un elemento en $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ y ϕ en $\mathcal{S}$, entonces el operador lineal

$$\varphi \mapsto (f * \phi)(\varphi) \; = \langle f, \check{\phi} * \varphi \rangle, \qquad \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

está bien definido, es Banach valuado y continuo.

En efecto, primero notamos que la convolución $\left(\check{\phi} * \varphi\right)$ es un elemento en $\mathcal{S}$ cuando ϕ y φ son elementos de $\mathcal{S}$. Es claro que es Banach valuado, y la continuidad se obtiene a partir de que es la composición de dos operadores continuos, a saber, el mapeo lineal $\psi \mapsto (\check{\phi} * \psi)$ de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$ y f de $\mathcal{S}$ en $\mathbb{X}$.

Definición 1.3.13. Sea f un elemento en $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ y ϕ en $\mathcal{S}$, la *convolución* de f y ϕ es el operador lineal

$$(f * \phi)(\varphi) \;=\; \langle f, \check{\phi} * \varphi \rangle, \qquad\qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Sin embargo, la convolución de f y ϕ es más que un operador lineal: es una función Banach valuada que se comporta adecuadamente en el siguiente sentido.

Teorema 1.3.14. *Sea $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ y $\phi \in \mathcal{S}$, entonces la convolución $f * \phi$ es la función Banach valuada F, cuyo valor en $x \in \mathbb{R}^n$ es $F(x) = \langle f, \tau_x \check{\phi} \rangle$. Además, F pertenece a la clase $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y junto con todas sus derivadas satisfacen que sus normas crecen a lo más polinomialmente.*

Demostración. Veamos que $f * \varphi = F$ mediante la igualdad $(f * \varphi)(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) F(t)\, \mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
(f * \varphi)(\psi) \;=\; \langle f, \check{\varphi} * \psi \rangle \;&=\; \left\langle f, \int \check{\varphi}(\cdot - t)\psi(t)\, \mathrm{d}t \right\rangle \\
&=\; \left\langle f, \int (\tau_t \check{\varphi})\psi(t)\, \mathrm{d}t \right\rangle \\
&=\; \int \langle f, \tau_t \check{\varphi} \rangle \psi(t)\, \mathrm{d}t \\
&=\; \int F(t)\psi(t)\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Probemos la diferenciabilidad de la función F. Sea $h = (0, \ldots, h_i, \ldots, 0)$, entonces 2 en la Proposición 1.3.5 implica

$$\frac{\tau_{x+h}\check{\varphi} - \tau_x \check{\varphi}}{h_i} \longrightarrow -\tau_x \left(\frac{\partial(\check{\varphi})}{\partial x_i} \right)$$

cuando $|h| \to 0$ en la topología de $\mathcal{S}$. f lineal y continua implica que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h_i} \;=\; \left\langle f, \frac{\tau_{x+h}\check{\varphi} - \tau_x \check{\varphi}}{h_i} \right\rangle \longrightarrow \left\langle f, -\tau_x \left(\frac{\partial(\check{\varphi})}{\partial x_i} \right) \right\rangle,$$

cuando h_i tiende a 0. Esto último junto con 1 de la Proposición 1.3.5 nos asegura que F tiene derivadas parciales continuas. Ahora bien, $(\partial(\check{\varphi})/\partial x_i)$

pertenece a $\mathcal{S}$, por tanto podemos iterar el argumento y concluir que $D^\beta F$ existe y es continuo para cualquier n-tupla de enteros no negativos β, más aún, tenemos la fórmula

$$(D^\beta F)(x) \;=\; (-1)^{|\beta|}\langle f, \tau_x D^\beta(\check{\varphi})\rangle.$$

Esta fórmula también nos dice que si la norma de F fuera lentamente creciente, es decir cualquier polinomio crece más rápido que la norma de F, entonces lo mismo sucede para cualquier derivada de F, debido a que $D^\beta(\check{\varphi}) \in \mathcal{S}$.

Veamos el crecimiento de la norma de F, por el Teorema 1.3.11, existe $C > 0$ y enteros m y l tales que

$$||\, F(x)\,||_{\mathbb{X}} \;=\; ||\, \langle f, \tau_x\check{\varphi}\rangle\,||_{\mathbb{X}} \;\leq\; C(f) \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq l} ||\, \tau_x\check{\varphi}\,||_{\alpha,\beta}\,.$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} ||\, \tau_x\check{\varphi}\,||_{\alpha,\beta} &= \sup_{w\in\mathbb{R}^n} |w^\alpha(-1)^{|\beta|}(D^\beta\varphi)(x-w)| \\ &= \sup_{w\in\mathbb{R}^n} |(x-w)^\alpha D^\beta\varphi(w)| \\ &\leq c(\alpha,n)\sup_{w\in\mathbb{R}^n} |w-x|^{|\alpha|}|D^\beta\varphi(w)|, \end{aligned}$$

debido a la desigualdad

$$|x^\alpha| \;\leq\; c(n,\alpha)|x|^{|\alpha|}, \qquad \text{para toda } n-\text{tupla } \alpha,\; x\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}.$$

Luego

$$\begin{aligned} ||\, F(x)\,||_{\mathbb{X}} &\leq C(f) \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq l} ||\, \tau_x\check{\varphi}\,||_{\alpha,\beta} \\ &\leq C(f) \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq l} c(\alpha,n)\sup_{w\in\mathbb{R}^n} |w-x|^{|\alpha|}|D^\beta\varphi(w)| \\ &\leq C(f,m,n)\sum_{|\beta|\leq l}\sup_{w\in\mathbb{R}^n} |w-x|^{m}|D^\beta\varphi(w)| \\ &\leq C(f,m,n)\sum_{|\beta|\leq l}\sup_{w\in\mathbb{R}^n} (|x|^m+|w|^m)|D^\beta\varphi(w)|. \end{aligned}$$

Esta última expresión nos dice que la función F es acotada por un polinomio. $\square$

Debido a que m y l son enteros positivos que dependen de f obtenemos la cota

$$|| f * \varphi(x) ||_{\mathbb{X}} \leq C(f,n) \sum_{|\beta| \leq l} \sup_{w \in \mathbb{R}^n} (|x|^m + |w|^m)|D^\beta \varphi(w)|. \quad (1.23)$$

para $f \in \mathcal{S}'$ y $\varphi \in \mathcal{S}$.

Observación 1.3.15. Sea $f \in L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}$, entonces el Teorema 1.3.14 nos implica la fórmula

$$f * \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x-y)\,\mathrm{d}y. \quad (1.24)$$

La convolución de un elemento f en $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ con la dilatación de $\Phi \in \mathcal{S}$ está dada por la fórmula

$$f * \Phi_t(x) = t^{-n} \left\langle f, \tau_{\frac{x}{t}} \check{\Phi}\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right\rangle.$$

Para fines prácticos usaremos

$$f * \Phi_t(x) = t^{-n} \left\langle f, \Phi\left(\frac{x-\cdot}{t}\right)\right\rangle.$$

El siguiente resultado (ver [28]) nos ayudará a pasar de una aproximación de la identidad a cualquier otra. Por completez se incluye la prueba.

Lema 1.3.16. *Considérese $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}$, con Φ tal que $\int \Phi \,\mathrm{d}x = 1$. Entonces existe una sucesión $\{\eta^{(k)}\} \subseteq \mathcal{S}$ tal que*

$$\Psi = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \eta^{(k)} * \Phi_{2^{-k}}, \quad (1.25)$$

con $\eta^{(k)} \to 0$ rápidamente, en el sentido de que para cualquier seminorma $|| \cdot ||_{\alpha,\beta}$ y $M \geq 0$ fijo, entonces

$$\left|\left| \eta^{(k)} \right|\right|_{\alpha,\beta} = O(2^{-kM}), \qquad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Demostración. Sea ϕ una función tal que $\hat{\phi} \in \mathcal{C}^\infty$ (usaremos la notación común $\hat{\phi}$ para la *transformada de Fourier* de la función escalar ϕ) y que cumpla que $\hat{\phi}(\xi) = 1$ para $|\xi| \leq 1$ y $\hat{\phi}(\xi) = 0$ para $|\xi| \geq 2$. Con estas consideraciones $1 = \lim_{k\to\infty} \hat{\phi}(2^{-k}\xi)$. Si definimos $\hat{\psi}_0 = \hat{\phi}(\xi)$, y $\hat{\psi}_k(\xi) = \hat{\phi}(2^{-k}\xi) - \hat{\phi}(2^{1-k}\xi)$ para $k \geq 1$, entonces obtenemos la ecuación

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \hat{\psi}_k(\xi). \tag{1.26}$$

Las funciones $\hat{\psi}_k$ tienen soporte en los anillos $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$, para k=1,2,..., y para α una n-tupla se tiene $|\partial_\xi^\alpha \hat{\psi}_k(\xi)| \leq c_\alpha 2^{-k|\alpha|}$.

De la ecuación (1.26) obtenemos

$$\hat{\Psi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \hat{\psi}_k(\xi)\hat{\Psi}(\xi).$$

Por otro lado, la hipótesis $\int \Phi \, dx = 1$ implica $\hat{\Phi}(0) = 1$.

Por el momento vamos a suponer que $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq \dfrac{1}{2}$ para $|\xi| \leq 2$, entonces podemos escribir

$$\hat{\Psi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\hat{\psi}_k(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)} \hat{\Psi}(\xi) \cdot \hat{\Phi}(2^{-k}\xi); \tag{1.27}$$

de donde definimos

$$\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = \frac{\hat{\psi}_k(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)} \hat{\Psi}(\xi). \tag{1.28}$$

El requerimiento $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq \dfrac{1}{2}$ para $|\xi| \leq 2$ no es necesario debido a que existe algún $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq \dfrac{1}{2}$ para $|\xi| \leq 2 \cdot 2^{-k_0}$, y la prueba funciona de la misma manera si reetiquetamos los términos en la ecuación (1.27), haciendo

$$\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = \frac{\hat{\psi}_{k-k_0}(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)} \hat{\Psi}(\xi) \qquad \text{para} \quad k \geq k_0,$$

y $\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = 0$ para $k < k_0$.

Veamos por último la cota para las funciones $\{\eta^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Sea $M \geq 0$ y $||\cdot||_{\alpha,\beta}$ cualquier seminorma y sabemos que

$$||\,\eta^{(k)}\,||_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \eta^{(k)}(x)|.$$

Recordemos que $[(-ix)^\alpha\phi]\hat{} = \partial^\alpha\hat{\phi}$ y $[\partial^\alpha\phi]\hat{} = (i\xi)^\alpha\hat{\phi}$, entonces para cualquier x en $\mathbb{R}^n$ tenemos

$$\begin{aligned} |x^\alpha\partial^\beta\eta^{(k)}(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha\xi^\beta\hat{\eta}^{(k)}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|)^{n+1}}(1+|\xi|)^{n+1}|\partial^\alpha\xi^\beta\hat{\eta}^{(k)}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Se entiende que las derivadas en el lado izquierdo son respecto a la variable x, mientras que las del lado derecho son respecto a la variable ξ. La integral $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi$ es una constante que depende de n, entonces podemos acotar

$$|x^\alpha\partial^\beta\eta^{(k)}(x)| \leq A(n) \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{n+1}\,|\partial^\alpha\xi^\beta\hat{\eta}^{(k)}(\xi)|. \tag{1.29}$$

Ahora bien, por la fórmula de Leibniz y (1.28) tenemos

$$\begin{aligned} (1+|\xi|)^{n+1}\left|\partial^\alpha\xi^\beta\hat{\eta}^{(k)}(\xi)\right| &\leq \sum_{\gamma+\delta=\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\left|\partial^\gamma\frac{\hat{\psi}_k(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)}\right|\;\left|(1+|\xi|)^{n+1}\partial^\delta\xi^\beta\hat{\Psi}(\xi)\right| \\ = \sum_{\gamma+\delta=\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}&\left|\partial^\gamma\frac{\hat{\psi}_k(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)}\right|\frac{1}{(1+|\xi|)^M}\;(1+|\xi|)^M\left|(1+|\xi|)^{n+1}\partial^\delta\xi^\beta\hat{\Psi}(\xi)\right|. \end{aligned}$$

Recordemos que el soporte de la función $\dfrac{\hat{\psi}_k(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)}$ está en el anillo $2^{k-1} < |\xi| < 2^{k+1}$, entonces se obtiene la cota

$$\left|\partial^\gamma\frac{\hat{\psi}_k(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)}\right|\frac{1}{(1+|\xi|)^M} \leq A(\phi,\Phi,M)2^{-kM},$$

donde la constante $A(\phi,\Phi,M)$ depende de las funciones ϕ y Φ y de la constante M. Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} (1+|\xi|)^M\left|(1+|\xi|)^{n+1}\partial^\delta\xi^\beta\hat{\Psi}(\xi)\right| &= (1+|\xi|)^{M+n+1}\left|\partial^\delta\xi^\beta\hat{\Psi}(\xi)\right| \\ &\leq A_{M,n}\left(1+|\xi|^{M+n+1}\right)\left|\partial^\delta\xi^\beta\hat{\Psi}(\xi)\right|. \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos la cota

$$\begin{aligned} (1+|\xi|)^{n+1}|\partial^\alpha\xi^\beta\hat{\eta}^{(k)}(\xi)| &\leq \\ \sum_{\gamma+\delta=\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}A(\phi,\Phi,M)2^{-kM}\;A_{M,n}&\left(\left|\partial^\delta\xi^\beta\hat{\Psi}(\xi)\right| + |\xi|^{M+n+1}\left|\partial^\delta\xi^\beta\hat{\Psi}(\xi)\right|\right) \end{aligned}$$

por tanto tenemos

$$(1+|\xi|)^{n+1}|\partial^\alpha \xi^\beta \hat{\eta}^{(k)}(\xi)| \leq A_{\phi,\Phi,M,n,\alpha} 2^{-kM} \sum_{\delta\leq\alpha} \left(\left|\left| \xi^\beta \hat{\Psi} \right|\right|_{0,\delta} + \sum_{|\alpha'|=M+n+1} \left|\left| \xi^\beta \hat{\Psi} \right|\right|_{\alpha',\delta} \right) \quad (1.30)$$

La suma sobre $\delta \leq \alpha$ significa sobre todas las n-tuplas δ tales que $\delta_i \leq \alpha_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ahora bien, sabemos que la transformada de Fourier es un mapeo continuo del espacio $\mathcal{S}$ en si mismo, esto implica que para toda seminorma $||\cdot||_{\alpha_0,\beta_0}$ existe un conjunto finito de seminormas $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\alpha_0, \beta_0)$ tal que $\left|\left| \hat{\phi} \right|\right|_{\alpha_0,\beta_0} \leq A(\alpha_0, \beta_0) \sum_{||\cdot||_{\alpha'',\beta''}\in\mathcal{F}} ||\, \phi \,||_{\alpha'',\beta''}$.

Entonces para cada $\delta \leq \alpha$ existe una familia finita de seminormas $\mathcal{F}_\delta$ tal que

$$\left|\left| \xi^\beta \hat{\Psi} \right|\right|_{0,\delta} + \sum_{|\alpha'|=M+n+1} \left|\left| \xi^\beta \hat{\Psi} \right|\right|_{\alpha',\delta} \leq A(M,n,\delta) \sum_{||\cdot||_{\alpha'',\beta''}\in\mathcal{F}_\delta} ||\, \partial^\beta \Psi \,||_{\alpha'',\beta''}$$

pero $||\, \partial^\beta \Psi \,||_{\alpha'',\beta''} = ||\, \Psi \,||_{\alpha'',(\beta''+\beta)}$, y como hay un número finito de n-tuplas $\delta \leq \alpha$, por (1.30) tenemos que existe una familia finita de seminormas $\mathcal{F}$ tal que

$$(1+|\xi|)^{n+1}|\partial^\alpha \xi^\beta \hat{\eta}^{(k)}(\xi)| \leq A_{\phi,\Phi,M,n,\alpha} 2^{-kM} \sum_{||\cdot||_{\alpha'',\beta''}\in\mathcal{F}} ||\, \partial^\beta \Psi \,||_{\alpha'',\beta''} \,. \quad (1.31)$$

De (1.29) y (1.31) obtenemos

$$||\, \eta^{(k)} \,||_{\alpha,\beta} \leq A(\phi,\Phi,M,n,\alpha,\beta)\, 2^{-kM} \sum_{||\cdot||_{\alpha'',\beta''}\in\mathcal{F}} ||\, \Psi \,||_{\alpha'',\beta''} \,. \quad (1.32)$$

□

En la demostración al Lema anterior observamos que en la cota sobre las funciones $\{\eta^{(k)}\}$ existe dependencia de la función Ψ. Esto lo mejoramos en el siguiente resultado.

Afirmación 1.3.17. Considérense las funciones Φ, Ψ, ϕ y la sucesión $\{\eta^{(k)}\}$ como en el Lema 1.3.16 y su demostración. Sea $\mathcal{F}_0$ una familia finita de seminormas y $M > 0$, entonces existe una familia finita de seminormas $\mathcal{F}$ tal que si $\Psi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$, donde

$$\mathcal{S}_\mathcal{F} = \{\varphi \in \mathcal{S} : ||\, \varphi \,||_{\alpha,\beta} \leq 1, \text{para todo } ||\cdot||_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}\}, \quad (1.33)$$

entonces

$$\big|\big| \, \eta^{(k)} \, \big|\big|_{\alpha,\beta} \;\leq\; A(\phi,\Phi,n,M,\mathcal{F}_0)\, 2^{-kM}, \;\text{ para todo } k, \; ||\cdot||_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}_0. \quad (1.34)$$

En efecto, como ya vimos, para cada seminorma $||\cdot||_{\alpha,\beta}$ en $\mathcal{F}_0$ existe una familia finita $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ que satisface la desigualdad (1.32), por tanto hacemos $\mathcal{F} = \bigcup_{||\cdot||_{\alpha,\beta}\in\mathcal{F}_0} \mathcal{F}(\alpha,\beta)$, que sigue siendo una familia finita de seminormas. Si la función Ψ pertenece al conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\big|\big| \, \eta^{(k)} \, \big|\big|_{\alpha,\beta} &\leq c(\phi,\Phi,n,M,\alpha,\beta)\, 2^{-kM} \sum_{||\cdot||_{\alpha',\beta'}\in\mathcal{F}(\alpha,\beta)} ||\,\Psi\,||_{\alpha',\beta'} \\
&\leq A(\phi,\Phi,n,M,\alpha,\beta)\, 2^{-kM} |\mathcal{F}(\alpha,\beta)|,
\end{aligned}$$

debido a que existe un número finito de pares de n-tuplas (α,β), concluimos con la desigualdad

$$\big|\big| \, \eta^{(k)} \, \big|\big|_{\alpha,\beta} \;\leq\; A(\phi,\Phi,n,M,\mathcal{F}_0)\, 2^{-kM}.$$

Cabe resaltar que la constante $A(\phi,\Phi,n,M,\mathcal{F}_0)$ depende de las funciones ϕ (ver demostración al Lema 1.3.16) y Φ, de los valores n y M y de la familia finita de seminormas $\mathcal{F}_0$, pero no depende de la función Ψ.

Transformadas de Fourier.

En la teoría escalar de distribuciones se puede definir la diferenciación, traslación, conjugación y la transformada de Fourier de distribuciones mediante la aplicación de estos operadores a los elementos de Schwartz $\mathcal{S}$, esto es, si f es una distribución, entonces

$$\begin{aligned}
D^\beta f &: \varphi \mapsto (-1)^{|\beta|} f(D^\beta \varphi) \\
\tau_h f &: \varphi \mapsto f(\tau_h \varphi) \\
\check{f} &: \varphi \mapsto f(\check{\varphi}) \\
\hat{f} &: \varphi \mapsto f(\hat{\varphi}).
\end{aligned}$$

Este mismo procedimiento podemos realizarlo en el caso de distribuciones vectoriales.

Definición 1.3.18. Sea $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$, definimos la *transformada de Fourier de f* como el operador lineal

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle \;=\; \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \qquad (1.35)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}$.

El operador $\hat{f}$ está bien definido y es continuo debido a que es la composición de dos operadores continuos, a saber, la transformada de Fourier escalar y la distribución vectorial f.

Observación 1.3.19. Cuando $f \in L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ el operador $\hat{f}$ es una función vectorial definida en $\mathbb{R}^n$ mediante

$$\hat{f}(\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.36}$$

La función $\hat{f}$ satisface también continuidad uniforme en $\mathbb{R}^n$.

La integral en (1.3.19) está bien definida debido a que la función $x \mapsto e^{-ix\cdot\xi} f(x)$ está acotada por la función escalar $||\, f(x)\, ||_{\mathbb{X}}$ que es integrable, entonces si a esta integral la denotamos por el vector $g(\xi)$ obtenemos una función vectorial, además para $\varphi \in \mathcal{S}$ satisface

$$\begin{aligned}
\langle g, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \langle f, \hat{\varphi}\rangle.
\end{aligned}$$

El intercambio en el orden de integración en la tercera igualdad es gracias al Teorema de Fubini ya que la función $(x,\xi) \mapsto e^{-ix\cdot\xi} f(x)\varphi(\xi)$ pertenece al espacio $L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. En efecto, $\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\left|\, e^{-ix\cdot\xi} f(x)\varphi(\xi)\,\right|\right|_{\mathbb{X}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi \;\leq\; ||\, f\, ||_{L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)}\, ||\, \varphi\, ||_1 \;<\; \infty$. De este desarrollo y la definición del operador $\hat{f}$ obtenemos la igualdad

$$\langle g, \varphi\rangle \;=\; \langle \hat{f}, \varphi\rangle$$

para todo elemento φ en $\mathcal{S}$, de donde deducimos la igualdad (1.36). La continuidad uniforme de $\hat{f}$ en $\mathbb{R}^n$ se verifica como en el caso escalar.

Al igual que en el caso escalar tenemos que la transformada de Fourier de una convolución es el producto de las transformadas.

Observación 1.3.20. Sea f una función vectorial integrable y ϕ una función en el espacio de Schwartz, entonces

$$(f * \phi)\hat{}\,(\xi) \;=\; \hat{f}(\xi)\;\hat{\phi}(\xi). \tag{1.37}$$

La prueba de esta fórmula es idéntica al del caso escalar.

Veamos ahora que la transformada de Fourier es un mapeo biyectivo en el espacio $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$.

Proposición 1.3.21. *La transformada de Fourier es un isomorfismo del espacio $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ sobre $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$.*

Demostración. Para ver que es inyectiva, consideremos f y g elementos del espacio $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ tales que $\hat{f} = \hat{g}$, esto implica que $f(\hat{\varphi}) = g(\hat{\varphi})$ para toda φ en $\mathcal{S}$, pero la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{S}$, (ver [31]), lo que nos implica que $f(\varphi) = g(\varphi)$ para toda φ en $\mathcal{S}$ y concluimos asi que $f = g$.

Veamos ahora que es sobre. Sea $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$, buscamos un elemento g en $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ tal que $\hat{g} = f$. Ésto lo conseguimos si hacemos $g = f \circ \mathfrak{F}^{-1}$ (los símbolos $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}^{-1}$ representan también a los operadores transformada de Fourier y la inversa a la transformada de Fourier), entonces para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}$ tenemos la igualdad

$$\hat{g}(\varphi) = g(\hat{\varphi}) = f \circ \mathfrak{F}^{-1} \circ \mathfrak{F}(\varphi) = f(\varphi).$$

$\square$

La transformada de Fourier de distribuciones vectoriales se comporta distinto al de distribuciones escalares cuando nos restringimos al espacio $L^2_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ en el siguiente sentido (ver [19]).

1.3.22. La transformada de Fourier no mapea $L^2_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ en $L^2_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ a menos de que $\mathbb{X}$ sea un espacio de Hilbert.

1.4. Funciones maximales.

En esta sección definimos algunas funciones maximales que utilizaremos.

Definición 1.4.1. Sea $f \in L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, la *función maximal de Hardy-Littlewood vectorial Mf* se define como

$$Mf(x) \;=\; \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \|\, f(y) \,\|_{\mathbb{X}} \; \mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $B(x,r)$ es la bola centrada en x de radio r.

Observemos que la definición es similar a la escalar, tan sólo sustituimos la norma escalar por la del espacio de Banach.

Teorema 1.4.2 (Teorema de la función maximal de Hardy-Littlewood). *Sea f una función vectorial en $L^p_{\mathbb{X}}$ con $p > 1$, entonces existe una constante c(p,n) tal que*

$$|| \, Mf \, ||_p \;\; \leq \;\; c(p,n) \, || \, f \, ||_{L^p_{\mathbb{X}}} \, . \tag{1.38}$$

La demostración es similar a la del caso escalar por lo que la omitimos, (ver [27],[30]).

Definición 1.4.3. Sea u una función vectorial definida en el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$, la *función maximal no tangencial* está definida por

$$\mathcal{M}_{nt}u(x) \;\; = \;\; \sup_{|x-y|<t} || \, u(y,t) \, ||_{\mathbb{X}} \, , \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposición 1.4.4. *Sea u una función Banach valuada definida en el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$, si definimos la función maximal no tangencial de apertura a como*

$$\mathcal{M}_{nt,a}u(x) \;\; = \;\; \sup_{|x-y|<at} || \, u(y,t) \, ||_{\mathbb{X}} \, ,$$

entonces la integrabilidad de $\mathcal{M}_{nt,a}u$ no depende de la apertura a, más aún, si a y b son dos escalares tales que $a \geq b > 0$ y la integral $\int \mathcal{M}_{nt,b}u$ es finita, entonces

$$\int \mathcal{M}_{nt,a}u(x) \, \mathrm{d}x \;\; \leq \;\; c_n \left(\frac{a+b}{b} \right)^n \int \mathcal{M}_{nt,b}u(x) \, \mathrm{d}x.$$

Por lo tanto, si la maximal no tangencial es integrable para alguna apertura, entonces la maximal no tangencial es integrable para cualquier apertura.

Para la prueba hacemos $F(x,t) = || \, u(x,t) \, ||_{\mathbb{X}}$ en II.2.5 de [28].

Definición 1.4.5. Sea $\Phi \in \mathcal{S}$ y $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$, la *función maximal $M_\Phi f$* se define como

$$M_\Phi f(x) \;\; = \;\; \sup_{t>0} || \, f * \Phi_t(x) \, ||_{\mathbb{X}} \, , \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ya vimos que la convolución de $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ y $\Phi \in \mathcal{S}$ es una función vectorial definida en $\mathbb{R}^n$, y si hacemos la convolución con la dilatación de Φ, entonces $f * \Phi_t(\cdot)$ es una función vectorial definida en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y en este espacio se puede calcular la maximal no tangencial de esta función.

Definición 1.4.6. Sea $\Phi \in \mathcal{S}$ y $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$, la *función maximal* $M^*_\Phi f$ se define como

$$M^*_\Phi f(x) \quad = \quad \sup_{|x-y|<t} \|\, f * \Phi_t(y)\, \|_{\mathbb{X}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Lema 1.4.7. *Sean $\Phi \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$, $a > 1$ y Φ_a la dilatación de Φ, entonces se cumple la desigualdad puntual*

$$M^*_{\Phi_a} f \quad \leq \quad M^*_\Phi f.$$

Demostración. Haciendo $t' = at$ y por definición de $M^*_\Phi f$ y $f * \Phi_t(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
M^*_\Phi f(x) &= \sup_{|x-y|<t'} (t')^{-n} \left\| \left\langle f, \Phi\left(\frac{y-\cdot}{t'}\right)\right\rangle \right\|_{\mathbb{X}} \\
&= \sup_{|x-y|<at} (at)^{-n} \left\| \left\langle f, \Phi\left(\frac{y-\cdot}{at}\right)\right\rangle \right\|_{\mathbb{X}} \\
&\geq \sup_{|x-y|<t} (at)^{-n} \left\| \left\langle f, \Phi\left(\frac{y-\cdot}{at}\right)\right\rangle \right\|_{\mathbb{X}} \\
&= \sup_{|x-y|<t} t^{-n} \left\| \left\langle f, \Phi_a\left(\frac{y-\cdot}{t}\right)\right\rangle \right\|_{\mathbb{X}} \\
&= M^*_{\Phi_a} f(x).
\end{aligned}$$

□

También se puede definir la función maximal no tangencial de la convolución $f * \Phi_t$ con peso.

Definición 1.4.8. Sea $\Phi \in \mathcal{S}$ y $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$, la *función maximal* $M^{**}_{N,\Phi} f$ se define como

$$M^{**}_{N,\Phi} f(x) \quad = \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^n, t>0} \|\, f * \Phi_t(x-y)\, \|_{\mathbb{X}} \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-N}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Por último definimos una función maximal a partir de un conjunto finito de seminormas.

Definición 1.4.9. Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de seminormas $||\cdot||_{\alpha,\beta}$ y considérese el conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ definido en (1.33). Definimos la función *gran maximal* $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f$ como

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x) = \sup_{\Phi\in\mathcal{S}_{\mathcal{F}}} M_{\Phi}f(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

Observación 1.4.10. Todas las funciones maximales antes definidas son escalares y no negativas.

Capítulo 2

Espacios de Hardy vectoriales.

En este capítulo definimos los espacios de Hardy vectoriales. También enunciamos el teorema de caracterización de $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}$ por funciones maximales. Este resultado nos da una manera distinta de visualizar al espacio de distribuciones vectoriales, a saber, son aquellas que su convolución con funciones prueba satisfacen propiedades de p-integrabilidad. Aunque estamos en el contexto vectorial, las demostraciones son adaptadas del caso escalar que son variantes de la prueba original de Stein y Weiss en [29], constatando que el cambio de la norma escalar por norma del espacio de Banach no altera el camino de la prueba.

Finalmente mostraremos los valores frontera de los espacios de Hardy vectoriales $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ para $p > 0$.

2.1. Definición.

Definición 2.1.1. Llamamos **espacio de Hardy vectorial** al conjunto de funciones Banach valuadas definidas en el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$, tales que son armónicas en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y cuyas funciones maximales no tangenciales son p-integrables, $p > 0$. A tal espacio lo denotamos como $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, o simplemente $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}$.

El conjunto $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}$ es en realidad un espacio vectorial debido a que si u y v son elementos de $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}$, entonces la función $u + cv$ con c una constante, es una función armónica en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y tiene función maximal no tangencial p-integrable como consecuencia de las desigualdades triangulares que satisfacen tanto la norma del espacio de Banach $\mathbb{X}$ como el supremo.

A este espacio se le asigna la norma

$$|| \, u \, ||_{\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}} \;=\; || \, \mathcal{M}_{nt}(u) \, ||_p$$

cuando $p \geq 1$, y cuando $p < 1$ la p-norma

$$|| \, u \, ||_{\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}} \;\; = \;\; || \, \mathcal{M}_{nt}(u) \, ||^p_p \, .$$

2.2. Valores frontera de $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

En esta sección vamos a probar que los valores frontera de las funciones en el espacio de Hardy vectorial $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}$ son las medidas en $V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ para $p \geq 1$ mientras que para $p < 1$ es un subespacio de $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$.

2.2.1. Valores frontera para $p \geq 1$.

O. Blasco demuestra en [5] que las funciones en el espacio de Hardy vectorial del disco, es decir, el espacio de funciones armónicas u en el disco unitario complejo $\mathbb{D}$ y cuyas integrales $\int_{\mathbb{T}} |u(r,\theta)|^p \, d\theta$ son uniformemente acotadas sobre $r \in (0,1)$, tienen como valores frontera al espacio $V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{T})$, donde $\mathbb{T} \; = \; \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

El procedimiento para generar funciones armónicas es por medio de la integral de Poisson y necesitaremos recordar la función núcleo de Poisson.

Consideramos la función positiva P definida en $\mathbb{R}^n$ como

$$P(x) \;\; = \;\; c_n \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \; ,$$

donde $c_n \; = \; \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \pi^{\frac{n+1}{2}}$.

Para una función escalar ϕ definida en $\mathbb{R}^n$ y $t > 0$, llamamos *la dilatación de ϕ a la t* a la función

$$\phi_t(x) \;\; = \;\; \frac{1}{t^n} \, \phi\left(\frac{x}{t}\right) \; . \tag{2.1}$$

Definición 2.2.1. El núcleo de Poisson P_t es la dilatación de la función P a la $t > 0$, esto es

$$P_t(x) \; = \; c_n \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \; . \tag{2.2}$$

De esta forma podemos también interpretar al núcleo de Poisson como una función definida en el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ haciendo $P(x,t) = P_t(x)$.

A continuación listamos algunas propiedades que satisface el núcleo de Poisson (ver [27]) y que utilizaremos más adelante.

1.
$$\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 1, \qquad \text{para todo } t>0.$$

2. El núcleo de Poisson es una función armónica en el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$, es decir
$$\Delta_{(x,t)} P_t(x) \;=\; 0.$$

3. El núcleo de Poisson es una función p-integrable para todo $p \geq 1$ ya que es integrable y acotada.

4. Sean f una función escalar definida en $\mathbb{R}^n$ que pertenece al espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, y m una medida de variación acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces las funciones definidas por la integral del núcleo de Poisson
$$u(x,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(y) P_t(x-y)\,\mathrm{d}y, \tag{2.3}$$
$$v(x,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\,\mathrm{d}m(y) \tag{2.4}$$
son armónicas.

El último punto nos muestra que el núcleo de Poisson genera funciones armónicas. Las integrales en (2.3) y (2.4) reciben el nombre de *integral de Poisson de f* e *integral de Poisson de m* respectivamente. Por supuesto, las funciones u y v satisfacen más propiedades que ser armónicas, no las mencionaremos aquí pero recomendamos al lector ver [17], [30] para una descripción más detallada y completa de las integrales de Poisson. Veamos que para $p>1$ estas integrales de Poisson de $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}$ generan funciones en $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}$.

Sea $p>1$. Consideramos una medida μ en $V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, entonces la integral de Poisson
$$\mu * P_t(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) \tag{2.5}$$
genera una función $u = \mu * P_t$ armónica en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ con maximal no tangencial en $L^p(\mathbb{R}^n)$. A la integral en (2.5) la denotamos como P_μ.

En efecto, debido a que $P_t \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ con p y q exponentes conjugados la función u está bien definida. Para probar que u es armónica basta mostrar que es débilmente armónica. Consideramos $\xi^* \in \mathbb{X}^*$ cualquiera, entonces la Proposición 1.2.10 nos implica

$$\xi^* \circ u(x,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\, \mathrm{d}\mu_{\xi^*}(y)$$

donde $\mu_{\xi^*} = \xi^* \circ \mu$ es una medida compleja de variación acotada. Los operadores laplaciano Δ e integral respecto a μ_{ξ^*} conmutan, entonces

$$\Delta_{(x,t)}\; \xi^* \circ u(x,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{(x,t)} P_t(x-y)\, \mathrm{d}\mu_{\xi^*}(y) \;=\; 0$$

y como ξ^* es arbitrario, tenemos que u es débilmente armónica.

Veamos por último que $\mathcal{M}_{nt}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. La Proposición 1.2.24 nos implica la existencia de una función positiva $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y-z)\, \mathrm{d}\mu(z) \right\|_{\mathbb{X}} \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y-z) g(z)\, \mathrm{d}z,$$

y de la teoría escalar sabemos que $\mathcal{M}_{nt} g * P_t \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, por tanto $\mathcal{M}_{nt}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Afirmamos también que $\lim_{t\to 0} u(\cdot,t)$ existe en el sentido de distribuciones Banach valuadas. En efecto, sea $\phi \in \mathcal{S}$, entonces por el Teorema de Fubini (ver [2], [21])

$$\begin{aligned}
\langle P_\mu, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\, \mathrm{d}\mu(y)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) P_t(x-y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\mu(y) \\
&\to \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \langle \mu, \phi\rangle
\end{aligned}$$

cuando t tiende a cero. La convergencia se debe a la desigualdad

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f_k\, \mathrm{d}\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f_l\, \mathrm{d}\mu \right\|_{\mathbb{X}} \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f_l|\, \mathrm{d}|\mu|$$

y al hecho de que la convolución de una función prueba con el núcleo de Poisson converge uniformemente a la función prueba. Concluimos asi que P_μ converge a μ cuando $t \to 0$ en el sentido de distribuciones vectoriales.

De lo anterior podemos deducir que si μ y ν son dos medidas vectoriales diferentes con p-variación acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces sus integrales de Poisson son funciones de Hardy vectoriales diferentes. En efecto, notamos primero que la suma de las integrales de Poisson de las medidas μ y ν es igual a la integral de Poisson de la suma de las medidas, esto es $P_\mu + P_\nu = P_{\mu+\nu}$. Así, es suficiente probar que si $P_\mu = 0$, entonces $\mu = 0$. Pero la convergencia $P_\mu \to \mu$ en distribuciones nos implica que $\mu = 0$ si $P_\mu = 0$.

De esta forma hemos probado la inclusión

$$V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+), \qquad p > 1. \tag{2.6}$$

La inclusión contraria la tenemos en el siguiente resultado.

Proposición 2.2.2. *Sea $p \geq 1$, entonces cada $u \in \mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ es la integral de Poisson de una medida $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$. Además $u(\cdot, t) \to \mu$ en el sentido de distribuciones cuando t tiende a cero.*

Obtenemos así la inclusión

$$\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \hookrightarrow V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n), \qquad p \geq 1. \tag{2.7}$$

Por lo tanto para $p > 1$, la transformada de Poisson es un isomorfismo de $V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ y para $p = 1$ la transformada de Poisson es un isomorfismo de un subespacio de $V^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathfrak{h}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. La descripción específica de estas medidas la encontramos en el Teorema 3.1.1 que se muestra más adelante. Esta identificación del espacio $\mathfrak{h}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ no es única pues en [7] Blasco identifica a sus elementos con operadores, (ver Observación 2.2.3).

El resultado de la Proposición 2.2.2 es obtenido por Blasco en [5] para el espacio de Hardy vectorial en el disco unitario. Recordemos que en el caso escalar tenemos que $\mathfrak{h}^p(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cong L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$, vía el núcleo de Poisson, y en el caso vectorial sucede que $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cong L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ cuando y sólo cuando el espacio de Banach $\mathbb{X}$ posee la propiedad de Radon-Nikodym (ver Definición 0.0.1 y [10]). La ventaja de mencionar el espacio $V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ en la Proposición 2.2.2 es que no se requiere la pRN sobre $\mathbb{X}$.

Demostración. (Proposición 2.2.2). Sea $u \in \mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $p \geq 1$, mostraremos que existe $\mu \in V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = \mu * P_t$. Consideramos la familia de funciones Banach valuadas $u_t(x) = u(x, t)$ definidas en $\mathbb{R}^n$, entonces la familia de funciones $\{u_t\}_{t>0}$ pertenecen al espacio $L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y están acotadas uniformemente por $\|\mathcal{M}_{nt}(u)\|_p$. Por otro lado tenemos las inclusiones

$$L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1_{\mathbb{X}^{**}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathfrak{M}_{\mathbb{X}^{**}}(\mathbb{R}^n) \cong [\mathcal{C}_{0,\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)]^* \tag{2.8}$$

para $p = 1$, y para $p > 1$

$$L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p_{\mathbb{X}^{**}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow V^p_{\mathbb{X}^{**}}(\mathbb{R}^n) \cong [L^q_{\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)]^* . \tag{2.9}$$

Por tanto podemos considerar a la familia $\{u_t\}_{t>0}$ contenida en el dual de $\mathcal{C}_{0,\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)$ cuando $p = 1$ o en el dual de $L^q_{\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)$ cuando $p > 1$ y por el Teorema de Banach-Alaoglu existe una medida $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathbb{X}^{**}}$ o $\mu \in V^p_{\mathbb{X}^{**}}$ si $p > 1$, tal que

$$u_{t_n} \quad \to \quad \mu \tag{2.10}$$

para alguna sucesión de la familia $\{u_t\}_{t>0}$ en la topología débil estrella, esto significa que para cualquier elemento $\phi \in \mathcal{C}_{0,\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)$ o $\phi \in L^q_{\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)$ tenemos la convergencia $\langle u_{t_n}, \phi\rangle \to \langle \mu, \phi\rangle$ en $\mathbb{C}$.

Veamos que si $p = 1$, entonces la medida obtenida $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathbb{X}^{**}}$ es λ-continua y por tanto $\mu \in V^1_{\mathbb{X}^{**}}$. Para cada $\ell \in \mathbb{X}^{***}$, la medida compleja $\ell \circ \mu$ tiene como densidad a una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ debido a que es el límite en la frontera de la función escalar $\ell \circ u \in \mathfrak{h}^1(\mathbb{R}^{n+1}_+) = \mathfrak{h}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ y se sabe que las funciones límites en la frontera del espacio $\mathfrak{h}^1(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ es un subespacio de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, si un conjunto de Borel A tiene medida de Lebesgue igual a cero, entonces $\ell \circ \mu(A) = 0$ para cada $\ell \in \mathbb{X}^{***}$, de donde se sigue la igualdad $\mu(A) = 0$ y por lo tanto μ es λ-continua.

Ahora probamos que la medida μ genera a la función u, es decir

$$u(x,t) \quad = \quad \int P_t(x-y)\, \mathrm{d}\mu(y), \qquad\qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+. \tag{2.11}$$

Sea $t > 0$ fijo, sabemos que el núcleo de Poisson es continuo además de que es q-integrable, entonces para cualquier elemento ξ^* en $\mathbb{X}^*$ tenemos que $P_t(x-\cdot)\cdot\xi^* \in \mathcal{C}_{0,\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)$ y/o $P_t(x-\cdot)\cdot\xi^* \in L^q_{\mathbb{X}^*}(\mathbb{R}^n)$, por tanto la convergencia (2.10) nos implica

$$\langle u_{t_n}, P_t(x-\cdot)\cdot\xi^*\rangle \quad\longrightarrow\quad \langle \mu, P_t(x-\cdot)\cdot\xi^*\rangle, \qquad \text{cuando } \; n\to\infty,$$

en $\mathbb{C}$, pero

$$\langle \mu, P_t(x-\cdot)\cdot\xi^*\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\xi^*\, \mathrm{d}\mu(y) \quad = \quad \left\langle \int P_t(x-y)\, \mathrm{d}\mu(y), \xi^* \right\rangle,$$

y

$$\begin{aligned} \langle u_{t_n}, P_t(x-\cdot)\cdot\xi^*\rangle \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\xi^* \; u_{t_n}(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \quad \left\langle \int P_t(x-y) u(y,t_n)\, \mathrm{d}y, \xi^* \right\rangle . \end{aligned}$$

Entonces para cada (x,t) tenemos la convergencia débil

$$\int P_t(x-y)u(y,t_n)\,\mathrm{d}(y) \longrightarrow \int P_t(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y), \tag{2.12}$$

cuando $n\to\infty$. Por otro lado también tenemos la igualdad

$$\int P_t(x-y)u(y,t_n)\,\mathrm{d}y \;=\; u(x,t+t_n). \tag{2.13}$$

En efecto, si $\xi^*\in\mathbb{X}^*$, entonces $\xi^*\circ u$ es una función compleja armónica con maximal no-tangencial en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y continua en el hiperplano $\{(x,\tau+t_n) : x\in\mathbb{R}^n, \tau\in\mathbb{R}^+\}$, por tanto

$$\begin{aligned}
\langle \xi^*, u(x,t+t_n)\rangle &= \xi^*\circ u(x,t+t_n)\\
&= \int P_t(x-y)\;\xi^*\circ u(y,t_n)\,\mathrm{d}y\\
&= \left\langle \xi^*, \int P_t(x-y)u(y,t_n)\,\mathrm{d}y \right\rangle.
\end{aligned}$$

Debido a que ξ^* es arbitrario tenemos la igualdad (2.13).

La función u es armónica y por tanto continua cuando $t>0$, de aquí la convergencia

$$u(x,t+t_n) \;\longrightarrow\; u(x,t), \tag{2.14}$$

cuando $n\to\infty$ y $t>0$. Cabe notar que esta última convergencia es en norma.

De las convergencias (2.12) y (2.14) y la igualdad (2.13) obtenemos (2.11).

Veamos por último que la medida μ toma valores en $\mathbb{X}$, pues las inclusiones en (2.8) y (2.9) nos indican solamente que la medida μ toma valores en el espacio $\mathbb{X}^{**}$. Supongamos la existencia de un conjunto boreliano A tal que $\mu(A)\in\mathbb{X}^{**}\backslash\mathbb{X}$, donde μ es la medida límite en la ecuación (2.10). Recordemos que el conjunto A tiene medida de Lebesgue finita, ya que así se requería en la definición de medidas en $V^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, (ver Definición 1.2.21).

El teorema de Hahn-Banach nos asegura la existencia de un funcional $\ell\in(\mathbb{X}^{**})^*$ tal que $\ell(\mathbb{X})=0$ y $\ell(\mu(A))=1$. Entonces la función escalar $v=\ell\circ u$ es armónica con supremo no tangencial en $L^p(\mathbb{R}^n)$, por tanto v es la convolución $P_t * g$, donde g es un elemento de $L^p(\mathbb{R}^n)$ o $V^1(\mathbb{R}^n)$ cuando $p=1$ (ver III. 4.1 en [28]). La unicidad del valor frontera de la función $v=\ell\circ u=P_t*(\ell\circ\mu)$ nos arroja la igualdad $g=\ell\circ\mu$.

También sabemos que la función $v(\cdot,t)$ converge a g en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p>1$, cuando $t\to 0$, esto junto con $|A|<\infty$ nos implica la convergencia

$$\lim_{t\to 0}\int_A v_t \,\mathrm{d}\lambda = \int_A g \,\mathrm{d}\lambda. \tag{2.15}$$

Ahora bien, calculando algunas integrales tenemos

$$\int_A v(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_A (\ell\circ u)(x,t)\,\mathrm{d}x = \ell\left(\int_A u(x,t)\,\mathrm{d}x\right) = 0, \tag{2.16}$$

debido a que $u(x,t)\in\mathbb{X}$ para todo punto (x,t) en el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$, por otro lado

$$\int_A g(x)\,\mathrm{d}x = \int_A \mathrm{d}(\ell\circ\mu)(x) = \ell\left(\int_A \mathrm{d}\mu(x)\right) = 1. \tag{2.17}$$

De las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.17) obtenemos

$$0 = \lim_{t\to 0}\int_A v(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_A g\,\mathrm{d}\lambda = 1.$$

Esta contradicción viene de suponer la existencia de un conjunto A tal que $\mu(A)\in\mathbb{X}^{**}\setminus\mathbb{X}$. Por tanto μ es $\mathbb{X}$-valuada. □

Observación 2.2.3. De la demostración de la Proposición 2.2.2 vemos que, como en el caso escalar, si definimos el espacio de Hardy en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ como el espacio de funciones armónicas u tales que

$$\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}\|u(x,t)\|_{\mathbb{X}}\,\mathrm{d}x \quad < \quad +\infty,$$

entonces los límites en la frontera de funciones en este espacio de Hardy es el espacio $\mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$.

Blasco identifica en [7] a este espacio de Hardy vectorial con el espacio de operadores cono absolutamente sumantes. De esta manera estamos aportando una identificación más a los espacios de Hardy vectoriales.

Observación 2.2.4. Sean u y μ como en la Proposición 2.2.2, supóngase además que la medida μ tiene como densidad la función f, entonces las funciones $u(\cdot,t)$ convergen a f en $L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ cuando t tiende a cero.

En efecto, el teorema de diferenciación de Lebesgue es válido para funciones Banach valuadas, por tanto podemos seguir la demostración del caso escalar que no escribiremos aquí.

2.2.2. Valores frontera para $p < 1$.

En esta sección vamos a probar que, al igual que en el caso escalar, los valores frontera para el espacio de Hardy vectorial $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ para $p < 1$ son distribuciones vectoriales. Para ello necesitamos unos resultados técnicos.

Lema 2.2.5. *Sea u una función Banach valuada en el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ con maximal no tangencial p-integrable para $p > 0$, entonces para $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ tenemos*

$$|| \, u(x,t) \, ||_{\mathbb{X}} \;\; \leq \;\; (|| \, \mathcal{M}_{nt} u \, ||_p) t^{-\frac{n}{p}}. \tag{2.18}$$

Además $u(\cdot,t) \in L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t > 0$ con la cota

$$|| \, u(\cdot,t) \, ||_1 \;\; \leq \;\; || \, \mathcal{M}_{nt} u \, ||_p \;\, t^{n-\frac{n}{p}}. \tag{2.19}$$

Demostración. La desigualdad (2.18) se sigue de la siguiente serie de desigualdades.

$$\begin{aligned} || \, u(x,t) \, ||^p_{\mathbb{X}} \;\; &\leq \;\; \min_{|x-y| \leq t} [\mathcal{M}_{nt} u(y)]^p \;\leq\; \frac{1}{t^n} \int_{|x-y| \leq t} (\mathcal{M}_{nt} u(y))^p \, \mathrm{d}y \\ &\leq \;\; t^{-n} \, || \, \mathcal{M}_{nt} u \, ||^p_p . \end{aligned}$$

La primera desigualdad es válida debido a que el punto (x,t) siempre cae en los conos $\Gamma(y)$ con y tal que $|x - y| < t$, donde $\Gamma(y) = \{(w,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |w-y| < t\}$. La segunda desigualdad se debe a que el mínimo está por debajo del promedio.

Para la desigualdad (2.19) utilizamos (2.18)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} || \, u(x,t) \, ||_{\mathbb{X}} \; \mathrm{d}x \;\; &= \;\; \int_{\mathbb{R}^n} || \, u(x,t) \, ||^p_{\mathbb{X}} \, || \, u(x,t) \, ||^{1-p}_{\mathbb{X}} \; \mathrm{d}x \\ &\leq \;\; \left(|| \, \mathcal{M}_{nt} u \, ||_p \, t^{-\frac{n}{p}} \right)^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} || \, u(x,t) \, ||^p_{\mathbb{X}} \; \mathrm{d}x \\ &\leq \;\; \left(|| \, \mathcal{M}_{nt} u \, ||_p \, t^{-\frac{n}{p}} \right)^{1-p} || \, \mathcal{M}_{nt} u \, ||^p_p \\ &= \;\; || \, \mathcal{M}_{nt} u \, ||_p \, t^{n-\frac{n}{p}}. \end{aligned}$$

□

Para el resultado que nos atañe es necesario trabajar con la aplicación de una distribución vectorial al núcleo de Poisson, que al igual que en el caso escalar no se puede definir para cualquier distribución sino que se requiere cierta condición sobre ésta.

Definición 2.2.6. Sea $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$, decimos que f es una distribución Banach valuada acotada (o simplemente distribución acotada) si para toda ϕ en $\mathcal{S}$ la función $f * \phi$ es acotada.

A continuación damos una condición suficiente para que una distribución Banach valuada sea acotada.

Proposición 2.2.7. *Sea $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$. Entonces f es una distribución acotada si y sólo si la distribución escalar $\xi^* \circ f$ es una distribución acotada para todo $\xi^* \in \mathbb{X}^*$.*

Demostración. Supongamos que f es una distribución débilmente acotada y sea $\varphi \in \mathcal{S}$, entonces para cualquier $\xi^* \in \mathbb{X}^*$ la función escalar $(\xi^* \circ f) * \varphi$ es acotada y la igualdad $(\xi^* \circ f) * \varphi(x) = \xi^*(f * \varphi(x))$ implica que el conjunto $\{f * \varphi(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{X}$ es débilmente acotado, y por lo tanto acotado. Concluimos así que existe una constante C_φ que satisface $|| f * \varphi(x) ||_{\mathbb{X}} \leq C_\varphi$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, esto es, la función $f * \varphi$ es acotada, y como φ es un elemento en $\mathcal{S}$ arbitrario tenemos que $f * \varphi$ es acotada para toda $\varphi \in \mathcal{S}$, por tanto f es una distribución acotada.

La implicación contraria es clara. □

A continuación presentamos nuestro resultado principal en esta sección.

Teorema 2.2.8. *Sea $u \in \mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ con $p \leq 1$. Si hacemos $f_t = u(\cdot, t)$, $t > 0$, entonces existe una distribución Banach valuada f tal que $\lim_{t \to 0} f_t = f$ en el sentido de distribuciones. Además f determina de manera única a u mediante la integral de Poisson.*

Demostración. Consideramos la familia de funciones u_τ, $\tau > 0$, definidas en el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ como $u_\tau(x,t) = u(x, t+\tau)$. No es difícil ver que $\mathcal{M}_{nt} u_\tau(x) \leq \mathcal{M}_{nt} u(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, lo que nos implica que $u_\tau \in \mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}$. Afirmamos que $u_\tau \in \mathfrak{h}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ y satisface

$$|| \mathcal{M}_{nt} u_\tau ||_1 \quad \leq \quad || \mathcal{M}_{nt} u_\tau ||_p \, \tau^{n - \frac{n}{p}}. \tag{2.20}$$

En efecto, por (2.18) $|| u_\tau(y,t) ||_{\mathbb{X}} = || u(y, \tau + t) ||_{\mathbb{X}} \leq || \mathcal{M}_{nt} u ||_p \, (\tau + t)^{-\frac{n}{p}}$, y por tanto

$$\mathcal{M}_{nt}(u_\tau)(x) \leq || \mathcal{M}_{nt} u ||_p \, \tau^{-\frac{n}{p}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{nt}(u_\tau)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{M}_{nt}(u_\tau)(x)]^{1-p}[\mathcal{M}_{nt}(u_\tau)(x)]^p\,\mathrm{d}x \\ &\leq \left\{ \|\, \mathcal{M}_{nt}u\,\|_p\, \tau^{-\frac{n}{p}} \right\}^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{M}_{nt}(u_\tau)(x)]^p\,\mathrm{d}x \\ &= \|\, \mathcal{M}_{nt}u\,\|_p\, \tau^{n-\frac{n}{p}}.\end{aligned}$$

Queda probada así la afirmación. De la definición de f_t se tiene que $f_t \in L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ además $\|\, f_t\,\|_{L^p_{\mathbb{X}}} \leq \|\, \mathcal{M}_{nt}u\,\|_p$ para todo $t > 0$. De aquí se sigue que la convolución $f_t * P_\tau$ está bien definida para $t, \tau > 0$. De la diferenciabilidad de u_τ en todo $(x,t) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, se sigue que $u_\tau(x,t) = f_\tau * P_t(x)$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Entonces $u(x,t) = u_\tau(x, t-\tau) = f_\tau * P_{t-\tau}(x)$, y de esta forma obtenemos

$$f_t(x) = f_\tau * P_{t-\tau}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \text{ y } t > \tau.$$

Esta igualdad nos indica que la función f_t es la convolución del núcleo de Poisson y la función vectorial f_τ. De la Observación 1.3.20 obtenemos

$$\hat{f}_t(\xi) = \hat{f}_\tau(\xi)\ (P_{t-\tau})\hat{}\,(\xi), \tag{2.21}$$

y sabemos que $(P_{t-\tau})\hat{}\,(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|(t-\tau)}$, entonces

$$\hat{f}_t(\xi)\ \mathrm{e}^{2\pi|\xi|t} = \hat{f}_\tau(\xi)\ \mathrm{e}^{2\pi|\xi|\tau}. \tag{2.22}$$

Si definimos la función vectorial $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{X}$ como sigue

$$\psi(\xi) = \hat{f}_t(\xi)\ \mathrm{e}^{2\pi|\xi|t}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

entonces por (2.22) ψ no depende del parámetro t, por tanto

$$\begin{aligned}\|\, \psi(\xi)\ \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|t}\,\|_{\mathbb{X}} &= \left\|\, \hat{f}_t(\xi)\, \right\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\, f_t(x)\,\|_{\mathbb{X}}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\, u(x,t)\,\|_{\mathbb{X}}\ \mathrm{d}x \\ &\leq Ct^{n-\frac{n}{p}} = Ct^{-N},\end{aligned}$$

donde $N = n/p - n > 0$. Obtenemos así una cota para la función ψ dada por

$$\|\, \psi(\xi)\,\|_{\mathbb{X}} \leq Ct^{-N}\ \mathrm{e}^{2\pi|\xi|t}$$

para toda $t > 0$, lo que nos implica

$$\|\, \psi(\xi)\, \|_{\mathbb{X}} \;\leq\; C \inf_{t>0} t^{-N} \mathrm{e}^{2\pi|\xi|t} \;=\; C|\xi|^N.$$

Así, ψ es una función vectorial lentamente creciente y por tanto es una distribución vectorial temperada.

Sabemos por la Proposición 1.3.21 que la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ en $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$, por lo tanto existe f en $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ única tal que $\hat{f} = \psi$.

Ahora vamos a probar que la función f es precisamente el límite de las funciones f_t cuando t tiende a cero en el sentido de distribuciones vectoriales, es decir, vamos a probar que para cualquier ϕ en $\mathcal{S}$ se cumple que

$$\langle f_t, \phi\rangle \;\rightarrow\; \langle f, \phi\rangle$$

en $\mathbb{X}$ cuando t tiende a cero. Sea $\phi \in \mathcal{S}$, y sea $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que $\hat{\varphi} = \phi$, entonces de la definición de transformada de Fourier de distribuciones Banach valuadas tenemos

$$\begin{aligned}
\langle f_t, \phi\rangle &= \langle f_t, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{f}_t, \varphi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|t}\; \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\
&\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)\; \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\
&= \langle \hat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \hat{\varphi}\rangle \\
&= \langle f, \phi\rangle
\end{aligned}$$

cuando t tiende a cero.

Veamos por último que en el sentido de distribuciones se cumple la igualdad

$$u(x,t) \;=\; f * P_t(x). \tag{2.23}$$

Para que la convolución con el núcleo de Poisson esté bien definida lo primero que hay que probar es que f es una distribución acotada. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$ arbitraria, entonces

$$\|\, f * \varphi(x)\, \|_{\mathbb{X}} \;=\; \|\, \langle f, \tau_x \check{\varphi}\rangle \,\|_{\mathbb{X}} \;=\; \lim_{t\to 0} \|\, \langle f_t, \tau_x \check{\varphi}\rangle \,\|_{\mathbb{X}} \;\leq\; \|\, \mathcal{M}_{nt} u\, \|_p \,\|\, \varphi\, \|_q\,,$$

por tanto f es una distribución vectorial acotada.

De la definición de la función vectorial ψ y la igualdad $\psi = \hat{f}$ tenemos

$$\hat{f}_t(\xi) \;=\; \hat{f}(\xi)\; \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|t},$$

si aplicamos a esta igualdad la inversa del operador transformada de Fourier obtenemos

$$u(x,t) \;=\; f_t(x) = f * P_t(x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n.$$

□

Valores frontera de $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ para $p > 0$.

Debido a que las medidas con p-variación acotada con $p \geq 1$ son distribuciones temperadas, entonces podemos resumir las Proposiciones 2.2.2 y 2.2.8 en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.9. *Sea u una función Banach valuada armónica en el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$ con maximal no tangencial p-integrable para $p > 0$, entonces la función u posee valores frontera f en el sentido de distribuciones vectoriales y estos valores determinan de manera única a la función u mediante*

$$u(x,t) \;=\; f * P_t(x).$$

.

2.3. Caracterización por funciones maximales.

En esta sección definimos el espacio de Hardy vectorial $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y más adelante veremos que coincide con $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. El espacio $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ está formado por distribuciones vectoriales que tienen maximales acotadas como se describen en el siguiente resultado que extiende el teorema clásico de Fefferman y Stein en [15]. Para la definición de funciones maximales ver la Sección 1.4.

Teorema 2.3.1. *Sea $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$ y $0 < p \leq \infty$. Entonces son equivalentes*

(i) existe Φ en $\mathcal{S}$ con $\int \Phi \neq 0$ tal que $M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

(ii) existe una familia finita $\mathcal{F}$ de seminormas en $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

(iii) f es una distribución vectorial acotada y $\mathcal{M}_{nt}(u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $u(x,t) = f * P_t(x)$.

Observación 2.3.2. El conjunto finito $\mathcal{F}$ en la función gran maximal $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ no depende de la distribución Banach valuada (ver demostración más adelante), por tanto si se considera un entero positivo N y consideramos el conjunto finito

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N \quad = \quad \{|| \cdot ||_{\alpha\beta} \, : |\alpha| \leq N, |\beta| \leq N\},$$

entonces para alguna $\Phi \in \mathcal{S}$ y N suficientemente grande, dependiendo de p y n, obtenemos que las cantidades

$$|| \, M_{\Phi} f \, ||_p \qquad || \, M_{\Phi}^* f \, ||_p \qquad || \, \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \, ||_p \qquad || \, \mathcal{M}_{nt}(f * P_t) \, ||_p \, . \tag{2.24}$$

son todas comparables entre sí, de aquí que podemos escoger alguna de éstas como norma de f. Cuando $p \geq 1$, $|| \, f \, ||_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}}$ es cualquier cantidad en (2.24), si $p < 1$, $|| \, f \, ||_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}}$ es cualquier cantidad en (2.24) a la potencia p.

Definición 2.3.3. Sea $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$, decimos que f está en el espacio de Hardy vectorial $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ si satisface alguna de las condiciones en el Teorema 2.3.1.

Corolario 2.3.4. *(Teorema 2.3.1) Si f es un elemento de $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, entonces para toda $\Phi \in \mathcal{S}$ se tiene que $M_{\Phi} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Por el inciso (ii) existe una familia $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sea $\Phi \in \mathcal{S}$, entonces la función $\Psi = \Phi / C$ está en $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, donde

$$C \quad = \max_{|| \cdot ||_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}} || \, \Phi \, ||_{\alpha,\beta} \, .$$

Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $M_{\Phi} f(x) = C M_{\Psi} f(x) \leq C \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)$, de donde concluimos que $M_{\Phi} f \in L^p$. □

Antes de probar el Teorema 2.3.1 presentamos la relación entre los espacios $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Teorema 2.3.5. *Sea $p > 0$ y u una función Banach valuada tal que es armónica en $\mathbb{R}^{n+1}_+$, entonces $\mathcal{M}_{nt} u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $u = f * P_t$ para alguna f en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$.*

Demostración. Si f está en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$, entonces $u = f * P_t$ es armónica y por (iii) $\mathcal{M}_{nt}(u)$ está en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sea ahora u una función en $\mathfrak{h}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, por el Teorema 2.2.9 existe una distribución vectorial f tal que $u = f * P_t$. Resta demostrar que $f \in \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$.

Veamos primero que f es una distribución acotada. En efecto, las funciones $f_\epsilon := u(\cdot, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, son distribuciones acotadas uniformemente en ϵ. Esto debido a que $f_\epsilon \in L^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y para $\phi \in \mathcal{S}$ arbitraria se cumple

$$\begin{aligned} \|\, f_\epsilon * \phi(x) \,\|_{\mathbb{X}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\, f_\epsilon(y) \,\|_{\mathbb{X}} |\phi(x-y)| \,\mathrm{d}y \leq \|\, f_\epsilon \,\|_{L^p_{\mathbb{X}}} \|\, \phi \,\|_q \\ &\leq \|\, \mathcal{M}_{nt} u \,\|_p \|\, \phi \,\|_q . \end{aligned}$$

De aquí que

$$\|\, f * \phi(x) \,\|_{\mathbb{X}} \leq \sup_{\epsilon > 0} \|\, f_\epsilon * \phi(x) \,\|_{\mathbb{X}} \leq \|\, \mathcal{M}_{nt} u \,\|_p \|\, \phi \,\|_q \qquad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto f es acotada, y de la igualdad $u = f * P_t$ tenemos $\mathcal{M}_{nt}(f * P_t) \leq \mathcal{M}_{nt} u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Del inciso (iii) del Teorema 2.3.1 concluimos que $f \in \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$. □

Demostración del Teorema 2.3.1.

La demostración es una extensión del caso real reemplazando la norma por el módulo. En la demostración de la implicación (i) ⇒ (ii), se prueba el control que la función maximal $M_\Phi f$ ejerce a la función maximal $M^*_\Phi f$, este resultado por sí solo es muy importante si se considera que el supremo sobre una recta controla al supremo sobre una región que contiene a la recta.

Demostración. (*Teorema 2.3.1*).

Prueba de la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$.

Sea Φ en $\mathcal{S}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi = 1$ y la función maximal $M_\Phi f$ está en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Queremos demostrar que existe una familia finita de seminormas $\mathcal{F}$ tal que la función gran maximal $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f$ está en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

El procedimiento será probar que si $M^*_\Phi f$ pertenece a L^p, entonces para $N > n/p$ se cumple $\left\|\, M^{**}_{N,\Phi} f \,\right\|_p \leq c \|\, M^*_\Phi f \,\|_p$. Continuaremos probando la existencia de una familia finita de seminormas $\mathcal{F}$ tal que la función gran maximal $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f$ está controlada puntualmente por la función maximal $M^{**}_{N,\Phi} f$. Dejaremos hasta el final la prueba del control de $M^*_\Phi f$ por $M_\Phi f$ en L^p.

Prueba de que $\left\|\, M^{**}_{N,\Phi} f \,\right\|_p \leq c \|\, M^*_\Phi f \,\|_p$ si $Np > n$. Si ponemos $u(x,t) = \|\, f * \Phi_t(x) \,\|^p_{\mathbb{X}}$ en la Proposición 1.4.4 obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{|y| < at} \|\, f * \Phi_t(x-y) \,\|^p_{\mathbb{X}} \,\mathrm{d}x \leq c_n (1+a)^n \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{|y|<t} \|\, f * \Phi_t(x-y) \,\|^p_{\mathbb{X}} \,\mathrm{d}x, \tag{2.25}$$

para $a > 1$. También si $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ y $N \geq 0$, entonces

$$|| \, f * \Phi_t(x-y) \, ||_{\mathbb{X}}^p \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{(1-k)Np} \sup_{|y|<2^k t} || \, f * \Phi_t(x-y) \, ||_{\mathbb{X}}^p \,, \quad (2.26)$$

donde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Comprobemos la desigualdad (2.26). Cuando $|y| < t$, el término $k = 0$ de la suma lo mayoriza. En efecto, cuando $|y| < t$ se cumple

$$|| \, f * \Phi_t(x-y) \, ||_{\mathbb{X}}^p \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq 2^{Np} \sup_{|y|<t} || \, f * \Phi_t(x-y) \, ||_{\mathbb{X}}^p \,.$$

Cuando $2^{k-1}t < |y| < 2^k t$ tenemos

$$|| \, f * \Phi_t(x-y) \, ||_{\mathbb{X}}^p \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq 2^{(1-k)Np} \sup_{|y|<2^k t} || \, (f * \Phi_t)(x-y) \, ||_{\mathbb{X}}^p \,.$$

Así, la desigualdad (2.26) se da porque el sumando k-ésimo supera a la función del lado izquierdo cuando y está en el cascarón de radio $(2^{k-1}, 2^k)$.

De la desigualdad (2.26) obtenemos:

$$\begin{aligned} M_{N,\Phi}^{**} f(x)^p &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n, t>0} || \, f * \Phi_t(x-y) \, ||_{\mathbb{X}}^p \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{(1-k)Np} \sup_{|y|<2^k t} || \, f * \Phi_t(x-y) \, ||_{\mathbb{X}}^p \,. \end{aligned}$$

Integramos sobre todo $\mathbb{R}^n$, utilizamos el teorema de Tonelli y la desigualdad (2.25) respectivamente para obtener,

$$\begin{aligned} \int M_{N,\Phi}^{**} f(x)^p \, \mathrm{d}x &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{(1-k)Np} \int \sup_{|y|<2^k t} || \, f * \Phi_t(x-y) \, ||_{\mathbb{X}}^p \, \mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{(1-k)Np} c_n (1+2^k)^n \int \sup_{|y|<t} || \, f * \Phi_t(x-y) \, ||_{\mathbb{X}}^p \, \mathrm{d}x \\ &\leq c_n \, || \, M_\Phi^* f \, ||_p^p \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{(1-k)Np} (1+2^k)^n \\ &= C_{N,p}^p \, || \, M_\Phi^* f \, ||_p^p \,, \end{aligned}$$

ya que la serie converge cuando $Np > n$.

Prueba de que existen distribuciones f tales que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \ \leq \ c M_{N,\Phi}^{**} f$ puntualmente. La estrategia es mostrar la existencia de una familia finita $\mathcal{F}$ tal que si Ψ está en $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, entonces la maximal $M_\Psi f$ es acotada puntualmente por $M_{N,\Phi}^{**} f$, lo que nos implica la cota puntual de la gran maximal $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f$ por $M_{N,\Phi}^{**} f$, un tipo de control sobre la gran maximal más fuerte que el que se desea probar.

Sea $\Psi \in \mathcal{S}$, entonces por el Lema 1.3.16 existe una sucesión de funciones $\{\eta^{(k)}\}$ en $\mathcal{S}$ tal que podemos representar a Ψ como la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \eta^{(k)} * \Phi_{2^{-k}}$, por tanto $\Psi_t = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \eta_t^{(k)} * \Phi_{2^{-k}t}$. Desarrollando la maximal $M_\Psi f$:

$$\begin{aligned} M_\Psi f(x) &= \sup_{t>0} || \, f * \Psi_t(x) \, ||_{\mathbb{X}} \\ &= \sup_{t>0} \left|\left| \sum_{k\in\mathbb{N}_0} f * \Phi_{2^{-k}t} * \eta_t^{(k)}(x) \right|\right|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \sup_{t>0} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \int || \, f * \Phi_{2^{-k}t}(x-y) \, ||_{\mathbb{X}} \, |\eta_t^{(k)}(y)| \, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Insertamos en el integrando el factor

$$\left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{-N} \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N},$$

entonces

$$M_\Psi f(x) \ \leq \ M_{N,\Phi}^{**} f(x) \sup_{t>0} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \int \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N} |\eta_t^{(k)}(y)| \, \mathrm{d}y. \tag{2.27}$$

Pero

$$\begin{aligned} \int \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N} |\eta_t^{(k)}(y)| \, \mathrm{d}y &= \int \left(1 + 2^k|y|\right)^N |\eta^{(k)}(y)| \, \mathrm{d}y \\ &= \int \left(1 + 2^k|y|\right)^N \frac{(1+|y|)^{n+1}}{(1+|y|)^{n+1}} |\eta^{(k)}(y)| \, \mathrm{d}y \\ &\leq A_n \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left[(1+2^k|y|)^N (1+|y|)^{n+1} |\eta^{(k)}(y)|\right], \end{aligned}$$

donde $A_n = \int \frac{1}{(1+|y|)^{n+1}} \, \mathrm{d}y$. Por otro lado quisiéramos tener la desigualdad

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} (1+2^k|y|)^N (1+|y|)^{n+1} |\eta^{(k)}(y)| \ \leq \ c 2^{-k}, \tag{2.28}$$

para toda k en $\mathbb{N}_0$, donde c es una constante que no dependa de k, cuando la función Ψ pertenece al conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ para una familia finita de seminormas $\mathcal{F}$. La existencia de la familia $\mathcal{F}$ la probaremos más adelante.

Hacemos notar que requerimos condiciones de acotamiento únicamente sobre la función original Ψ, pero esto implicará cotas sobre las funciones $\eta^{(k)}$'s que a su vez implicarán la desigualdad (2.28).

Continuamos la demostración principal de esta sección diciendo que existe una familia finita $\mathcal{F}$ tal que si la función Ψ pertenece al conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, entonces todas las funciones $\eta^{(k)}$'s satisfacen la desigualdad (2.28) y por tanto

$$M_\Psi f(x) \;\leq\; M^{**}_{N,\Phi} f(x) \sup_{t>0} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} c\, 2^{-k} \;=\; c M^{**}_{N,\Phi} f(x),$$

para toda Ψ en $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, y por lo tanto

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) \;\leq\; c\, M^{**}_{N,\Phi} f(x) \qquad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Existencia de la familia finita $\mathcal{F}$. Sabemos que existen constantes a_N y a_n que dependen de N y n respectivamente que satisfacen las desigualdades

$$\begin{aligned}(1+2^k|y|)^N &\leq a_N(1+2^{kN}|y|^N),\\ (1+|y|)^{n+1} &\leq a_n(1+|y|^{n+1}),\end{aligned}$$

utilizando estas desigualdades obtenemos

$$\begin{aligned}&(1+2^k|y|)^N(1+|y|)^{n+1}|\eta^{(k)}(y)| \leq\\ &A_{N,n}\left(|\eta^{(k)}(y)| + 2^{kN}|y|^N|\eta^{(k)}(y)| + |y|^{n+1}|\eta^{(k)}(y)| + 2^{kN}|y|^{N+n+1}|\eta^{(k)}(y)|\right) \leq\\ &A_{N,n}2^{kN}\left(\left|\left|\, \eta^{(k)} \,\right|\right|_{0,0} + \sum_{|\alpha|=N} \left|\left|\, \eta^{(k)} \,\right|\right|_{\alpha,0} + \sum_{|\alpha|=n+1} \left|\left|\, \eta^{(k)} \,\right|\right|_{\alpha,0} + \sum_{|\alpha|=N+n+1} \left|\left|\, \eta^{(k)} \,\right|\right|_{\alpha,0}\right),\end{aligned}$$

debido a que por (1.22) tenemos $|y|^m|\eta^{(k)}(y)| \;\leq\; c_{n,m}\sum_{|\alpha|=m} \left|\left|\, \eta^{(k)} \,\right|\right|_{\alpha,0}$, para $m = N, n+1, N+n+1$. Consideramos la familia finita de seminormas

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ ||\cdot||_{0,0}\,, ||\cdot||_{\alpha,0}\,, ||\cdot||_{\beta,0}\,, ||\cdot||_{\gamma,0} \;:\; |\alpha| = N, |\beta| = n+1, |\gamma| = N+n+1 \right\},$$

y hacemos $M = N+1$. Entonces las funciones Ψ y Φ, la familia finita de seminormas $\mathcal{F}_0$ y la constante $M \geq 0$ cumplen las hipótesis de la Afirmación 1.3.17, que nos garantiza la existencia de una familia finita $\mathcal{F}$ tal que si la función Ψ está en el conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Entonces $\left|\left|\, \eta^{(k)} \,\right|\right|_{\alpha,\beta} \leq c\, 2^{-k(N+1)}$ para toda $k \in \mathbb{N}_0$ y toda seminorma $||\cdot||_{\alpha,\beta}$ en $\mathcal{F}_0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(1+2^k|y|)^N(1+|y|)^{n+1}|\eta^{(k)}(y)| \;&\leq\; A_{N,n}2^{kN}\left(|\mathcal{F}_0|\, c\, 2^{-k(N+1)}\right)\\ &=\; C\, 2^{-k}, \qquad\qquad \text{para todo } \; y \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

de donde se sigue (2.28).

Hasta aquí hemos probado la existencia de una familia finita $\mathcal{F}$ tal que la maximal $M_\Phi^* f$ controla a la gran maximal $\mathcal{M}_\mathcal{F} f$ para alguna Φ en $\mathcal{S}$. Para finalizar la prueba de la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ a continuación vamos a probar el control de la maximal no tangencial $M_\Phi^* f$ por la maximal "radial" $M_\Phi f$.

2.3.1. Control de la maximal no tangencial por la maximal radial.

Prueba del control de $M_\Phi^* f$ por $M_\Phi f$. Sean $\epsilon \in (0,1)$ y $N_0 > 0$, definimos la *función maximal no tangencial truncada* como

$$M_\Phi^{\epsilon,N_0} f(x) \quad = \quad \sup_{|x-y|<t<\epsilon^{-1}} || \, f * \Phi_t(y) \, ||_{\mathbb{X}} \left(\frac{t}{t+\epsilon} \right)^{N_0} \frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}}.$$

Mostraremos que existe N_0 tal que

$$\left|\left| \, M_\Phi^{\epsilon,N_0} f \, \right|\right|_p \quad \leq \quad C(n, N_0, p, f, \Phi) \, || \, M_\Phi f \, ||_p \, . \tag{2.29}$$

Habiendo probado (2.29) para alguna N_0, el Lema de Fatou implica el control que queremos.

Vamos a probar primero que $M_\Phi^{\epsilon,N_0} f$ pertenece al espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n) \bigcap L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando N_0 es suficientemente grande.

De la desigualdad (1.23) existen enteros no negativos m y l y una constante $C(f,n) > 0$, tales que

$$\begin{aligned}
|| \, f * \Phi_t(y) \, ||_{\mathbb{X}} \quad &\leq \quad C(f,n) \sum_{|\beta| \leq l} \sup_{w \in \mathbb{R}^n} (|y|^m + |w|^m) |D^\beta \Phi_t(w)| \\
&\leq \quad C(f,n)(1+|y|^m) \sum_{|\beta| \leq l} \sup_{w \in \mathbb{R}^n} (1+|w|^m) |D^\beta \Phi_t(w)| \\
&\leq \quad C(f,n) \frac{(1+|y|^m)}{\text{mín}\{t^n, t^{n+l}\}} (1+t^m) \sum_{|\beta| \leq l} \sup_{w \in \mathbb{R}^n} \left(1 + \left|\frac{w}{t}\right|^m\right) \left| D^\beta \Phi\left(\frac{w}{t}\right) \right| \\
&\leq \quad C(f,n)(1+\epsilon|y|)^m \epsilon^{-m} (t^{-n} + t^{-n-l})(1+t^m) C(\Phi).
\end{aligned}$$

Multiplicamos ambos lados por $\left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0} \frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}}$. Notamos que $(t+\epsilon)^{-N_0} \leq \epsilon^{-N_0}$, y escogemos $N_0 > n + l$ para acotar el producto $(t^{-n} + t^{-n-l}) t^{N_0}$ por una constante que dependerá de ϵ, N_0, n, l si $0 < t < \epsilon^{-1}$. Entonces

$$|| \, f * \Phi_t(y) \, ||_{\mathbb{X}} \left(\frac{t}{t+\epsilon} \right)^{N_0} \frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}} \; \leq \; C(f,\Phi) \frac{\epsilon^{-m}(1+\epsilon^{-m})\epsilon^{-N_0} C(N_0,n,l)}{(1+\epsilon|y|)^{N_0-m}}.$$

Debido a que $|x-y|<\epsilon^{-1}$, tenemos $-\epsilon^{-1}<|x|-|y|<\epsilon^{-1}$, luego $1+\epsilon|x|<2+\epsilon|y|<2(1+\epsilon|y|)$.

Concluimos así con la desigualdad

$$M_{\Phi}^{\epsilon,N_0}f(x) \;\leq\; \frac{C(f,\Phi,n,N_0,\epsilon)}{(1+\epsilon|x|)^{(N_0-m)}}.$$

Si hacemos $N_0 > \text{máx}\left\{n+l, \frac{n}{p}+m\right\}$ llegamos a que $M_{\Phi}^{\epsilon,N_0}f$ pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)\bigcap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Con el objetivo de mostrar que la integral de la maximal $M_{\Phi}^{\epsilon,N_0}f$ se concentra en un conjunto particular, introducimos a continuación dos maximales más, pero antes consideramos algo de notación.

Ponemos $\Phi^i=\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi$, y notamos que $\frac{\partial}{\partial x_i}f*\Phi_t(x)=\frac{1}{t}f*(\Phi^i)_t(x)$. Escribiremos Φ_t^i en lugar de $(\Phi^i)_t$. Por lo tanto

$$\nabla_x(f*\Phi_t)(x) \;=\; \frac{1}{t}(f*\Phi_t^1(x), f*\Phi_t^2(x),\ldots,f*\Phi_t^n(x)) \;\in\; \mathbb{X}^n.$$

Definimos también

$$||\, \nabla_x f*\Phi_t(x)\,||_{\mathbb{X}^n} \;=\; \frac{1}{t}\left\{\sum_{i=1}^{n}||\, f*\Phi_t^i(x)\,||_{\mathbb{X}}^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.30}$$

Las nuevas maximales que consideramos son:

$$M_{\nabla\Phi}^{\epsilon,N_0}f(x) \;=\; \sup_{|x-y|<t<\epsilon^{-1}} t\,||\,\nabla_x f*\Phi_t(y)\,||_{\mathbb{X}^n}\left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0}\frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}},$$

$$M_{\Phi}^{\epsilon,N_0,L}f(x) \;=\; \sup_{y\in\mathbb{R}^n,0<t<\epsilon^{-1}} ||\, f*\Phi_t(y)\,||_{\mathbb{X}}\left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0}\frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{L}.$$

A continuación vamos a probar la existencia de una constante $L>0$ tal que se cumple la desigualdad

$$\left|\left|\, M_{\Phi}^{\epsilon,N_0,L}f\,\right|\right|_p \;\leq\; C(p)\left|\left|\, M_{\Phi}^{\epsilon,N_0}f\,\right|\right|_p \tag{2.31}$$

y la desigualdad puntual

$$M_{\nabla\Phi}^{\epsilon,N_0}f(x) \;\leq\; C(N_0,L,\Phi,n)M_{\Phi}^{\epsilon,N_0,L}f(x). \tag{2.32}$$

Enseguida probamos (2.31). Para cualquier $z \in B(y,t)$ y $t < \epsilon^{-1}$ se cumple que

$$|| \, f * \Phi_t(y) \, ||_{\mathbb{X}} \left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0} \frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}} \;\leq\; M_\Phi^{\epsilon,N_0} f(z),$$

por tanto, para $0 < q < \infty$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $t < \epsilon^{-1}$ notamos que $B(y,t) \subseteq B(x, |x-y|+t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
& || \, f * \Phi_t(y) \, ||_{\mathbb{X}} \left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0} \frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}} \\
\leq \;& \left(\frac{1}{|B(y,t)|}\int_{B(y,t)} (M_\Phi^{\epsilon,N_0} f)^q(z)\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq \;& \left(\frac{t+|x-y|}{t}\right)^{\frac{n}{q}} \left(\frac{1}{|B(x,|x-y|+t)|}\int_{B(x,|x-y|+t)} (M_\Phi^{\epsilon,N_0} f)^q(z)\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq \;& \left(\frac{t+|x-y|}{t}\right)^{L} \left\{ M[(M_\Phi^{\epsilon,N_0} f)^q](x) \right\}^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

tomando $L > n/q$, por tanto

$$M_\Phi^{\epsilon,N_0,L} f(x) \;\leq\; \left\{ M[(M_\Phi^{\epsilon,N_0} f)^q](x) \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Aplicando el teorema de la maximal de Hardy-Littlewood (Teorema 1.4.2), con la restricción $0 < q < p$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int \left(M_\Phi^{\epsilon,N_0,L} f(x)\right)^p \mathrm{d}x \;&\leq\; \int \left\{ M\left[(M_\Phi^{\epsilon,N_0} f)^q\right](x) \right\}^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x \\
&\leq\; C(p,q) \int \left\{ \left[(M_\Phi^{\epsilon,N_0} f)^q\right](x) \right\}^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x \\
&=\; C(p,q) \left|\left| \, M_\Phi^{\epsilon,N_0} f \, \right|\right|_p^p,
\end{aligned}$$

como queríamos probar.

Prueba de la desigualdad (2.32). $\Phi \in \mathcal{S}$ implica que $\Phi^i \in \mathcal{S}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por el Lema 1.3.16 existen funciones prueba $\eta^{(i,k)}$ tales que

$$\Phi^i = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \Phi_{2^{-k}} * \eta^{(i,k)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|\, f * \Phi_t^i(y)\,\|_{\mathbb{X}} \left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0} \frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}} & \\
\leq & \left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0} \frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|\, f * \Phi_{2^{-k}t} * \eta_t^{(i,k)}(y)\,\right\|_{\mathbb{X}} \\
\leq & \left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0} \frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \int \|\, f * \Phi_{2^{-k}t}(y-z)\,\|_{\mathbb{X}}\, |\eta_t^{(i,k)}(z)|\, \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Multiplicamos el integrando por un uno de la forma

$$\left(\frac{2^{-k}t}{2^{-k}t+\epsilon}\right)^{N_0} \left(\frac{2^{-k}t}{2^{-k}t+|x-(y-z)|}\right)^{L} \left(\frac{2^{-k}t+\epsilon}{2^{-k}t}\right)^{N_0} \left(\frac{2^{-k}t+|x-(y-z)|}{2^{-k}t}\right)^{L}.$$

Tenemos las desigualdades

$$\left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0} \left(\frac{2^{-k}t+\epsilon}{2^{-k}t}\right)^{N_0} \leq \frac{1}{2^{-kN_0}}, \quad (1+\epsilon|z|)^{N_0} \leq \left(1+\left|\frac{z}{t}\right|\right)^{N_0}, \quad \text{si } \ 0<t<\epsilon^{-1}.$$

Para $|x-y|<t$ conseguimos

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \int \frac{\|\, f * \Phi_{2^{-k}t}(y-z)\,\|_{\mathbb{X}}}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}} |\eta_t^{(i,k)}(z)|\, \mathrm{d}z \\
\leq\ & M_\Phi^{\epsilon,N_0,L} f(x) \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{kN_0} \int \left(1+\left|\frac{z}{t}\right|\right)^{N_0} t^{-n} \left(\frac{2^{-k}t+|x-(y-z)|}{2^{-k}t}\right)^{L} \left|\eta^{(i,k)}\left(\frac{z}{t}\right)\right| \mathrm{d}z \\
\leq\ & M_\Phi^{\epsilon,N_0,L} f(x) \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{kN_0} \int (1+|w|)^{N_0} (1+2^k+2^k|w|)^L |\eta^{(i,k)}(w)|\, \mathrm{d}w \\
\leq\ & 2^L M_\Phi^{\epsilon,N_0,L} f(x) \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{kN_0} 2^{kL} \int (1+|w|)^{N_0+L} |\eta^{(i,k)}(w)|\, \mathrm{d}w.
\end{aligned}$$

Como antes, tenemos la cota sobre la integral

$$\begin{aligned}
\int (1+|w|)^{N_0+L} |\eta^{(i,k)}(w)|\, \mathrm{d}w \ & \leq\ A_n \sup_{w\in\mathbb{R}^n} (1+|w|)^{N_0+L+n+1} |\eta^{(i,k)}(w)| \\
& \leq\ A(n,N_0,L) \sup_{w\in\mathbb{R}^n} \left(1+|w|^{N_0+L+n+1}\right) |\eta^{(i,k)}(w)|,
\end{aligned}$$

donde A_n es el valor de la integral $\int \frac{1}{(1+|w|)^{n+1}}\, \mathrm{d}w$, y por (1.22) tenemos

$$\int (1+|w|)^{N_0+L} |\eta^{(i,k)}(w)| \, \mathrm{d}w$$
$$\leq \; c(n,N_0,L) \left(|| \, \eta^{(i,k)} \, ||_{0,0} + \sum_{|\alpha|=N_0+L+n+1} || \, \eta^{(i,k)} \, ||_{\alpha,0} \right).$$

Dada la familia finita de seminormas $\mathcal{F}_0 = \{|| \; ||_{0,0} \, , || \; ||_{\alpha,0} \, : |\alpha| = N_0 + L + n + 1\}$, y siguiendo la demostración a la Afirmación 1.3.17, tenemos la existencia de una familia finita de seminormas $\mathcal{F}_i$ tal que

$$\begin{aligned} || \, \eta^{(i,k)} \, ||_{\alpha,\beta} \;&\leq\; c(\phi,\Phi,N_0,L,n,(\alpha,\beta)) \, 2^{-k(N_0+L+1)} \sum_{|| \, \cdot \, ||_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{F}_i} || \, \Phi^i \, ||_{\alpha',\beta'} \\ &=\; c(\Phi,N_0,L,n) \, 2^{-k(N_0+L+1)}, \end{aligned}$$

para todo $(\alpha,\beta) \in \mathcal{F}_0$. Las constantes $c(\Phi,N_0,L,n)$ no son iguales en cada desigualdad, pero se escriben así para señalar la dependencia sólo de N_0, L, n y de la función Φ, y que las constantes $c(\Phi,N_0,L,n)$ incluyen la cota para las sumas $\sum_{|| \, \cdot \, ||_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{F}_i} || \, \Phi^i \, ||_{\alpha',\beta'}$ para toda $i = 1,2,\ldots,n$, que finalmente dependen sólo de los valores ya escritos, así, no existe dependencia de los índices i's.

Concluimos así con la cota sobre la integral,

$$\int (1+|w|)^{N_0+L} |\eta^{(i,k)}(w)| \, \mathrm{d}w \;\leq\; c(n,N_0,L,\Phi) \; 2^{-k(N_0+L+1)},$$

que sustituimos para acotar el valor

$$\begin{aligned} &\left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \int \frac{|| \, f * \Phi_{2^{-k}t}(y-z) \, ||_{\mathbb{X}}}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}} |\eta_t^{(i,k)}(z)| \, \mathrm{d}z \\ \leq\;& 2^L M_\Phi^{\epsilon,N_0,L} f(x) \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{k(N_0+L)} \int (1+|w|)^{N_0+L} |\eta^{(i,k)}(w)| \, \mathrm{d}w \\ \leq\;& c(n,N_0,L,\Phi) \; 2^L M_\Phi^{\epsilon,N_0,L} f(x) \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{k(N_0+L)} \; 2^{-k(N_0+L+1)} \\ =\;& C(n,N_0,L,\Phi) \; M_\Phi^{\epsilon,N_0,L} f(x), \end{aligned}$$

y por tanto concluimos

$$|| \, f * \Phi_t^i(y) \, ||_{\mathbb{X}} \left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^{N_0} \frac{1}{(1+\epsilon|y|)^{N_0}} \;\leq\; C(n,N_0,L,\Phi) \; M_\Phi^{\epsilon,N_0,L} f(x).$$

Observemos que la cota se da independiente de i. Utilizando esta última desigualdad, la ecuación (2.30) y la definición de $M_{\nabla\Phi}^{\epsilon,N_0} f$ obtenemos la desigualdad (2.32).

De las desigualdades (2.31) y (2.32) conseguimos

$$\Big|\Big| \; M^{\epsilon,N_0}_{\nabla\Phi} f \; \Big|\Big|_p \;\; \leq \;\; C(p, N_0, L, n, \Phi) \, \Big|\Big| \; M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f \; \Big|\Big|_p .$$

Ponemos

$$E \;\; = \;\; \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : M^{\epsilon,N_0}_{\nabla\Phi} f(x) \; \leq \; \lambda M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f(x) \Big\} ,$$

con $\lambda > 0$, entonces

$$\int_{E^C} M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f^p(x) \;\; \leq \;\; \lambda^{-p} \int_{E^C} M^{\epsilon,N_0}_{\nabla\Phi} f^p(x) \; \leq \; \lambda^{-p} C(p, N_0, L, n, \Phi) \, \Big|\Big| \; M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f \; \Big|\Big|^p_p .$$

Si hacemos λ tal que $\lambda^{-p} C(p, N_0, L, n, \Phi) \leq \frac{1}{2}$, concluimos entonces que

$$\int_{E^C} M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f^p(x) \;\; \leq \;\; \frac{1}{2} \, \Big|\Big| \; M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f \; \Big|\Big|^p_p \tag{2.33}$$

Como afirmamos anteriormente, la integral de $M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f$ está concentrada en el conjunto E. Ahora vamos a probar que en este conjunto la maximal $M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f$ es controlada por la maximal de Hardy Littlewood. En efecto, para $0 < q < \infty$, y todo $x \in E$ se cumple

$$M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f(x) \;\; \leq \;\; C(n, N_0, \lambda, q) \left\{ M[(M_\Phi f)^q](x) \right\}^{\frac{1}{q}} . \tag{2.34}$$

Por definición de $M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f$, existe $(y_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ tal que $|x - y_0| < t_0 < \epsilon^{-1}$ y

$$|| \; f * \Phi_{t_0}(y_0) \; ||_{\mathbb{X}} \left(\frac{t_0}{t_0 + \epsilon} \right)^{N_0} \frac{1}{(1 + \epsilon |y_0|)^{N_0}} \;\; \geq \;\; \frac{1}{2} M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f(x).$$

También por definición del conjunto E y por definición de $M^{\epsilon,N_0}_{\nabla\Phi} f$ se cumple que para $x \in E$ y z tal que $|x - z| < t_0 < \epsilon^{-1}$ se tiene

$$t_0 \, || \; \nabla f * \Phi_{t_0}(z) \; ||_{\mathbb{X}^n} \left(\frac{t_0}{t_0 + \epsilon} \right)^{N_0} \frac{1}{(1 + \epsilon |z|)^{N_0}} \;\; \leq \;\; \lambda M^{\epsilon,N_0}_{\Phi} f(x),$$

por tanto, de las dos últimas desigualdades se obtiene

$$t_0 \, || \; \nabla f * \Phi_{t_0}(z) \; ||_{\mathbb{X}^n} \;\; \leq \;\; 2\lambda \, || \; f * \Phi_{t_0}(y_0) \; ||_{\mathbb{X}} \left(\frac{1 + \epsilon |z|}{1 + \epsilon |y_0|} \right)^{N_0} .$$

Esta desigualdad es válida para todo z tal que $|x - z| < t_0 < \epsilon^{-1}$.

El Teorema del Valor Medio y nuestra última desigualdad permiten el siguiente desarrollo: para alguna ξ en la recta que une a z con y_0, se cumple

$$\begin{aligned} ||\, f * \Phi_{t_0}(z) - f * \Phi_{t_0}(y_0)\, ||_{\mathbb{X}} &= ||\, \nabla f * \Phi_{t_0}(\xi)\, ||_{\mathbb{X}^n}\, |z - y_0| \\ &\leq \frac{2\lambda}{t_0} ||\, f * \Phi_{t_0}(y_0)\, ||_{\mathbb{X}} \left(\frac{1+\epsilon|\xi|}{1+\epsilon|y_0|}\right)^{N_0} |z - y_0| \end{aligned}$$

pues y_0 y z están en el cono truncado de altura ϵ^{-1} con vértice en x y como consecuencia el elemento ξ pertenece a este conjunto. Entonces $|y_0 - \xi| < 2\epsilon^{-1}$, y además

$$\left(\frac{1+\epsilon|\xi|}{1+\epsilon|y_0|}\right)^{N_0} \leq C_{N_0}\,(1+\epsilon|y_0-\xi|)^{N_0} \leq 2^{N_0}(1+\epsilon|y_0-\xi|) \leq 2^{N_0}3.$$

Por tanto

$$||\, f * \Phi_{t_0}(z) - f * \Phi_{t_0}(y_0)\, ||_{\mathbb{X}} \leq \frac{3\ 2^{N_0+1}\lambda}{t_0} ||\, f * \Phi_{t_0}(y_0)\, ||_{\mathbb{X}}\, |z - y_0|.$$

Si escogemos z dentro del cono truncado con vértice en x, además de que $|z - y_0| < t_0/3\ 2^{N_0+2}\lambda$, entonces

$$||\, f * \Phi_{t_0}(z) - f * \Phi_{t_0}(y_0)\, ||_{\mathbb{X}} \leq \frac{1}{2} ||\, f * \Phi_{t_0}(y_0)\, ||_{\mathbb{X}}\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} ||\, f * \Phi_{t_0}(z)\, ||_{\mathbb{X}} &\geq ||\, f * \Phi_{t_0}(y_0)\, ||_{\mathbb{X}} - ||\, f * \Phi_{t_0}(z) - f * \Phi_{t_0}(y_0)\, ||_{\mathbb{X}} \\ &\geq \frac{1}{2} ||\, f * \Phi_{t_0}(y_0)\, ||_{\mathbb{X}} \\ &\geq \frac{1}{4} M_{\Phi}^{\epsilon, N_0} f(x). \end{aligned}$$

Concluimos con el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} M[(M_\Phi f)^q](x) &\geq \frac{1}{|B(x,t_0)|} \int_{B(x,t_0)} (M_\Phi f)^q(w)\, \mathrm{d}w \\ &\geq \frac{1}{|B(x,t_0)|} \int_{B(x,t_0) \bigcap B(y_0, \frac{t_0}{4\lambda})} (M_\Phi f)^q(w)\, \mathrm{d}w \\ &\geq \frac{1}{|B(x,t_0)|} \int_{B(x,t_0) \bigcap B(y_0, \frac{t_0}{4\lambda})} ||\, f * \Phi_{t_0}(w)\, ||_{\mathbb{X}}\ \mathrm{d}w \\ &\geq \frac{1}{|B(x,t_0)|} \int_{B(x,t_0) \bigcap B(y_0, \frac{t_0}{4\lambda})} \frac{1}{4^q} (M_{\Phi}^{\epsilon, N_0} f)^q(x)\, \mathrm{d}w \\ &= \frac{|B(x,t_0) \bigcap B(y_0, \frac{t_0}{4\lambda})|}{|B(x,t_0)|} \frac{1}{4^q} (M_{\Phi}^{\epsilon, N_0} f)^q(x) \\ &\geq C(n, N_0, \lambda) 4^{-q} (M_{\Phi}^{\epsilon, N_0} f)^q(x), \end{aligned}$$

donde se usa el hecho de que si $|x-y_0|<t_0$ y $\delta>0$, entonces

$$\frac{|B(x,t_0)\bigcap B(y_0,\delta t_0)|}{|B(x,t_0)|} \;\geq\; c(n,\delta)>0,$$

y el mínimo de esta constante se alcanza cuando $|x-y_0|=t_0$. Con esto queda probada la desigualdad (2.34).

La desigualdad (2.34) junto con el requerimiento de $0<q<p$ nos implica

$$\begin{aligned}\int_E (M_\Phi^{\epsilon,N_0}f)^p &\leq C(n,N_0,f,\Phi,p)\int \{M[(M_\Phi f)^q]\}^{\frac{p}{q}}\\ &\leq C(n,N_0,f,\Phi,p)\int [(M_\Phi f)^q]^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

Concluimos con la desigualdad

$$\int_E (M_\Phi^{\epsilon,N_0}f)^p \;=\; C(n,N_0,f,\Phi,p)\,||\, M_\Phi f\,||_p^p. \tag{2.35}$$

De (2.33) y (2.35) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}\left|\left|\, M_\Phi^{\epsilon,N_0}f\,\right|\right|_p^p &= \int_E (M_\Phi^{\epsilon,N_0}f)^p+\int_{E^C}(M_\Phi^{\epsilon,N_0}f)^p\\ &\leq C(n,N_0,f,\Phi,p)\,||\, M_\Phi f\,||_p^p+\frac{1}{2}\left|\left|\, M_\Phi^{\epsilon,N_0}f\,\right|\right|_p^p.\end{aligned}$$

Recordemos que $M_\Phi^{\epsilon,N_0}f$ pertenece a L^p, así que su norma en L^p es finita, por tanto

$$\left|\left|\, M_\Phi^{\epsilon,N_0}f\,\right|\right|_p \leq C(n,N_0,f,\Phi,p)\,||\, M_\Phi f\,||_p.$$

Prueba de la implicación $(ii)\Rightarrow(iii)$.

Supongamos que existe una familia $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sea $\Phi\in\mathcal{S}$, entonces por la demostración al Corolario 2.3.4 tenemos que $M_\Phi f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, y por lo tanto $M_\Phi^* f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sabiendo que la cantidad $||\, M_\Phi^* f\,||_p$ es finita, podemos hacer la siguiente serie de cotas de igual forma que en la prueba al Lema 2.2.5.

$$\begin{aligned}||\, f*\Phi_t(x)\,||_{\mathbb{X}}^p &\leq \min_{|x-y|\leq t}[M_\Phi^* f(y)]^p \leq \frac{c}{t^n}\int_{|x-y|\leq t}(M_\Phi^* f(y))^p\,\mathrm{d}y\\ &\leq ct^{-n}\,||\, M_\Phi^* f\,||_p^p.\end{aligned}$$

Por tanto $\|\, f * \Phi(x) \,\|_{\mathbb{X}} \;=\; \|\, f * \Phi_1(x) \,\|_{\mathbb{X}} \;\leq\; c \,\|\, M_{\Phi}^{*} f \,\|_{p}$. Concluimos que la función $f * \Phi$ es acotada, y como Φ era arbitraria en $\mathcal{S}$, tenemos que la distribución f es acotada.

Probaremos ahora que la maximal no tangencial de $u = f * P_t$ pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Usamos la descomposición en serie del núcleo de Poisson que se muestra en [28, p. 98]

$$P(x) = c_n(1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-k}\Phi^{(k)}_{2^k}(x),$$

donde la sucesión $\{\Phi^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ es acotada en $\mathcal{S}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{nt}u(x) &= \sup_{|x-y|<t} \|\, f * P_t(y) \,\|_{\mathbb{X}} \\
&= \sup_{|x-y|<t} \left\| f * \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-k}\Phi^{(k)}_{2^k t}(y) \right\|_{\mathbb{X}} \\
&= \sup_{|x-y|<t} \left\| \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-k} f * \Phi^{(k)}_{2^k t}(y) \right\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-k} \sup_{|x-y|<t} \left\| f * \Phi^{(k)}_{2^k t}(y) \right\|_{\mathbb{X}} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-k} M^{*}_{\Phi^{(k)}_{2^k}} f(x) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-k} M^{*}_{\Phi^{(k)}} f(x),
\end{aligned}$$

utilizando el Lema 1.4.7. De esta forma la maximal $\mathcal{M}_{nt}u$ será p-integrable si la suma $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-k} M^{*}_{\Phi^{(k)}} f$ es p-integrable. Nos enfocaremos pues en probar que la suma mencionada está en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Debido a que la sucesión $\{\Phi^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ es acotada en $\mathcal{S}$ y el conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ es una vecindad del 0 en $\mathcal{S}$ tenemos la existencia de una constante $C \geq 0$ tal que $\{\Phi^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq\; C\; \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, entonces la sucesión $\{\frac{1}{C}\Phi^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ está contenida en el conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, por tanto se cumple $M_{\Phi^{(k)}} f(x) \leq C\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, esta estimación y la Sección 2.3.1 implican que $M^{*}_{\Phi^{(k)}} f$ pertenece al espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ para toda k además de la cota uniforme

$$\left\| M^{*}_{\Phi^{(k)}} f \right\|_{p} \;\leq\; C \,\|\, \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \,\|_{p}\,.$$

Consideramos ahora las sumas parciales $s_m = \sum_{k=0}^{m} 2^{-k} M^{*}_{\Phi^{(k)}} f$, para $p \geq$

1 tenemos

$$\begin{aligned} \| s_m - s_l \|_p &= \left\| \sum_{k=l}^{m} 2^{-k} M^*_{\Phi^{(k)}} f \right\|_p \\ &\leq \sum_{k=l}^{m} 2^{-k} \| M^*_{\Phi^{(k)}} f \|_p \\ &\leq C \| \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \|_p \sum_{k=l}^{m} 2^{-k} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $m, l \to \infty$. Esto implica que la sucesión $\{s_m\}$ converge a un elemento p-integrable.

Cuando p es menor a 1, el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ sigue siendo completo pero con la métrica $\mathrm{d}(f, g) = \| f - g \|_p^p$, (ver Teorema 8.16 en [32]). Que las sumas parciales s_m forman una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{R}^n)$ se prueba similarmente al caso $p \geq 1$. En efecto, teniendo en cuenta la desigualdad $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ para $a, b > 0$, (ver [32, p. 133]), y que la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-pk}$ converge cuando p está entre 0 y 1, tenemos que

$$\begin{aligned} \| s_m - s_l \|_p^p &= \left\| \sum_{k=l}^{m} 2^{-k} M^*_{\Phi^{(k)}} f \right\|_p^p \\ &\leq \sum_{k=l}^{m} 2^{-kp} \| M^*_{\Phi^{(k)}} f \|_p^p \\ &\leq C \| \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \|_p^p \sum_{k=l}^{m} 2^{-kp}. \end{aligned}$$

En resumen hemos probado que la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-k} M^*_{\Phi^{(k)}} f$ es una función p-integrable y como esta serie acota a la maximal no tangencial $\mathcal{M}_{nt} u$, tenemos que $\mathcal{M}_{nt} u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 0$. Queda así probada la implicación $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Prueba de la implicación $(iii) \Rightarrow (i)$.

Vamos a probar que $M_\Phi f$ está en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con Φ una función de prueba definida a partir del núcleo de Poisson suponiendo que $\mathcal{M}_{nt}(f * P_t)$ es p-integrable.

Consideramos una función η real definida sobre $(1, \infty)$ que es rápidamente decreciente en ∞ y satisface las condiciones de momento $\int_1^\infty \eta(s)\, \mathrm{d}s = 1$, $\int_1^\infty s^k \eta(s)\, \mathrm{d}s = 0$, para $k = 1, 2, \ldots$. Se define entonces

$$\Phi(x) = \int_1^\infty \eta(s) P_s(x)\, \mathrm{d}s. \tag{2.36}$$

Por el Teorema de Fubini se tiene $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Veamos a continuación que esta función tiene rápido decaimiento. Desarrollando el polinomio de Taylor de la función $(1+t^2)^{-(n+1)/2}$ tenemos

$$(1+t^2)^{-(n+1)/2} \;=\; \sum_{k<R} a_k t^k + O(t^R).$$

Aplicándolo al núcleo de Poisson tenemos

$$\frac{c_n s}{(s^2+|x|^2)^{\frac{(n+1)}{2}}} \;=\; c_n \sum_{k<R} a_k s |x|^{-1-n} \left(\frac{s}{|x|}\right)^k + c_n O(s^{R+1}|x|^{-R-n-1}).$$

De la definición de Φ y las condiciones de momento de la función η tenemos

$$|\Phi(x)| \;\le\; c_n \left| \int_1^\infty \eta(s) O(s^{R+1}|x|^{-R-n-1})\,\mathrm{d}s \right|$$

de donde se sigue que Φ decrece rápidamente. El mismo argumento aplica a cualquier derivada de Φ (debido a que en todos los términos de las derivadas del núcleo de Poisson aparecerá el factor $(s^2+|x|^2)^{-(n+1)/2}$). Esto significa que $\Phi \in \mathcal{S}$.

Por último veamos que $M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Por definición de convolución y de la función Φ tenemos

$$||\, f * \Phi_t(x)\,||_{\mathbb{X}} = \left|\left| t^{-n} \left\langle f, \int_1^\infty \eta(s) P_s\left(\frac{x-\cdot}{t}\right)\,\mathrm{d}s \right\rangle \right|\right|_{\mathbb{X}}.$$

Ahora bien, la aplicación f conmuta con la integral de Riemann debido a que ésta es continua en $\mathcal{S}$, por definición de dilatación tenemos la fórmula $\langle f, \phi_t\rangle = t^{-n}\langle f, \phi\left(\frac{\cdot}{t}\right)\rangle$, y por definición de convolución, obtenemos finalmente

$$||\, f * \Phi_t(x)\,||_{\mathbb{X}} = \left|\left| \int_1^\infty \eta(s)(f * P_{st})(x)\,\mathrm{d}s \right|\right|_{\mathbb{X}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} M_\Phi f(x) \;&\le\; \int_1^\infty |\eta(s)| \sup_{t>0} ||\, f * P_{st}(x)\,||_{\mathbb{X}}\,\mathrm{d}s \\ &=\; \sup_{t>0} ||\, f * P_t(x)\,||_{\mathbb{X}} \cdot \int_1^\infty |\eta(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\le\; \int_1^\infty |\eta(s)|\,\mathrm{d}s \cdot \mathcal{M}_{nt}(f * P_t)(x), \end{aligned}$$

así que $M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

□

Capítulo 3

Descomposición atómica.

En el capítulo anterior vimos que los elementos del espacio $\mathfrak{h}_{\mathbb{X}}^p$ los podemos considerar como elementos de $\mathbb{H}_{\mathbb{X}}^p$ mediante la convolución con el núcleo de Poisson. En este capítulo mostraremos que los elementos de $\mathbb{H}_{\mathbb{X}}^p$ se pueden descomponer en "bloques" llamados medidas átomos cuando $p \leq 1$.

En la primera sección mostraremos que una medida regular con variación acotada contablemente aditiva tal que su gran maximal está en $L^p(\mathbb{R}^n)$ se puede descomponer en la forma $\mu = g + b$, donde g es una medida cuya norma está acotada por la medida volumen, y b es la suma ajena de medidas bloques. Finalizamos esta sección mostrando la densidad del espacio $V_{\mathbb{X}} \cap \mathbb{H}_{\mathbb{X}}^p$ en $\mathbb{H}_{\mathbb{X}}^p$.

En la segunda sección se realiza la descomposición del espacio de Hardy Banach valuado para $p \leq 1$; primero se descompone un elemento en la intersección $V_{\mathbb{X}} \bigcap \mathbb{H}_{\mathbb{X}}^p$, posteriormente un elemento de $\mathbb{H}_{\mathbb{X}}^p$ utilizando la densidad del espacio $V_{\mathbb{X}} \cap \mathbb{H}_{\mathbb{X}}^p$ en $\mathbb{H}_{\mathbb{X}}^p$.

3.1. Descomposición de Calderón-Zygmund.

De aquí en adelante denotaremos la función gran maximal simplemente como $\mathcal{M}$ en lugar de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$, donde el conjunto finito $\mathcal{F}$ se mantendrá fijo hasta que se requiera lo contrario. También relajaremos las condiciones sobre la función Φ, a saber, que satisfaga las condiciones de una aproximación a la identidad, esto es, $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, con soporte en la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$ y que $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$.

Decimos que una familia de conjuntos $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ posee la propiedad de la *intersección acotada* cuando existe un número entero $M > 0$ tal que cualquier conjunto A_k intersectará a lo más a M conjuntos de la familia.

Recordamos que $\mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de medidas regulares con variación uniformemente acotada sobre todos los conjuntos acotados.

Teorema 3.1.1. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue para cada cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Supongamos que $\mathcal{M}\mu \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 0$. Entonces para cualquier constante fija $A > 0$ existe una descomposición $\mu = g + b$, $b = \sum_k b_k$, y una colección de cubos $\{Q_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$, tales que*

1. *$\{Q_k^*\}$ tiene la propiedad de la intersección acotada, y*

$$\bigcup_k Q_k^* \quad = \quad \{x : \mathcal{M}\mu(x) > A\}.$$

2. *Cada medida b_k tiene soporte en Q_k^*, $b_k(\mathbb{R}^n) = 0$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\Phi b_k(x))^p \, \mathrm{d}x \quad \leq \quad c \int_{Q_k^*} (\mathcal{M}\mu(x))^p \, \mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

3. *La medida g es acotada:*

$$|| \, g \, ||_{V_{\mathbb{X}}^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \leq \quad cA. \tag{3.2}$$

Definición 3.1.2. A la descomposición de la medida μ se le conoce como *descomposición de Calderón-Zygmund.*

La condición sobre μ en el caso escalar es que sea una función integrable, en el contexto Banach valuado a μ le pedimos sea una medida con variación acotada.

Hacemos notar que se mantiene la notación clásica para las partes g y b de μ, esto siguiendo la aceptación de que la medida g se denota así por "good" en inglés debido a que se comporta adecuadamente en el sentido de que es acotada por la medida de Lebesgue como se puede observar en la desigualdad (3.2), y la medida b denotada así por "bad" en inglés, es la parte mala de la medida μ; no obstante, este teorema nos dice que a b podemos representarla por medio de una serie de medidas bloques b_k, las cuales tienen soporte en un cubo acotado y satisface condiciones de momento, más aún, si Φ es una función prueba, entonces la desigualdad (3.1) nos dice que $b_k \in \mathbb{H}_{\mathbb{X}}^p$.

La demostración la dividimos en secciones.

Cubierta y partición de la unidad. Definimos el conjunto

$$\Omega \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}\mu(x) > A\},$$

y consideramos $F = \Omega^C$.

Notamos que Ω es abierto en $\mathbb{R}^n$, por lo que hacemos uso del *lema de la cubierta de Whitney*, que nos dice que dada esta separación del espacio euclídeo, entonces existe una familia de cubos $\{Q_k\}$ cerrados tales que

1. $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_k$,
2. $Q_k^\circ \bigcap Q_j^\circ = \emptyset$, para todo $i \neq j$, donde Q_k° es el interior del cubo Q_k
3. $d_k \;\leq\; d(Q_k, F) \;\leq\; 4d_k$, d_k es la longitud de la diagonal del cubo Q_k, $d(Q_k, F)$ es la distancia del cubo Q_k al conjunto F, (ver Figura 3.1).

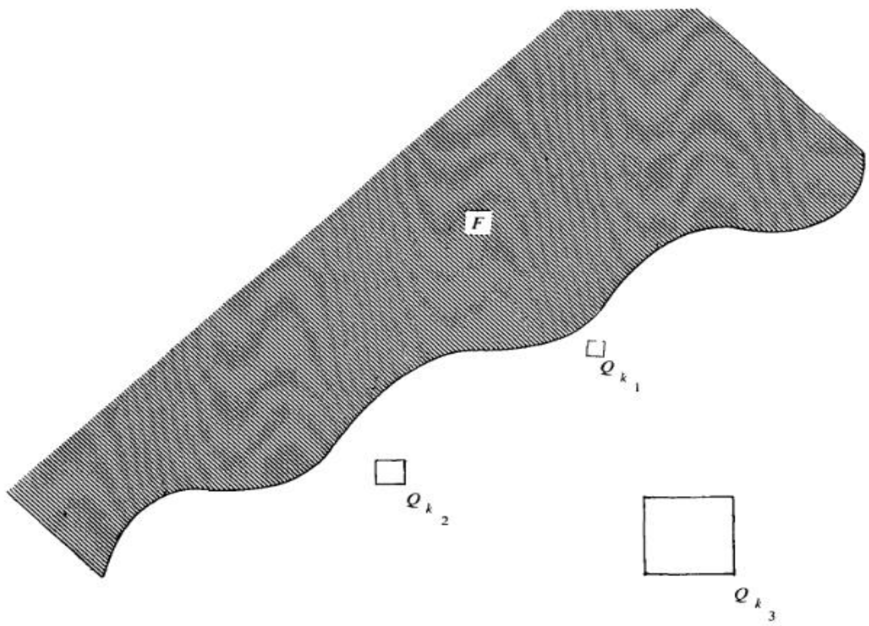

Figura 3.1: Cubos cuyo diámetro es comparable con la distancia al complemento de Ω

Si l_k es la longitud de las aristas del cubo Q_k, entonces la Propiedad 3 implica $\sqrt{n}l_k \;\leq\; d(Q_k, F) \;\leq\; 4\sqrt{n}l_k$. Para dos constantes fijas $1 < \widetilde{a} < a^*$, obtenemos los cubos $Q_k \subset \widetilde{Q}_k \subset Q_k^*$, que son dilataciones del cubo Q_k por los factores $\widetilde{a}$ y a^*, esto es, los cubos $\widetilde{Q}_k$ y Q_k^* están centrados en x_k y sus aristas tienen longitud $\widetilde{a}l_k$ y a^*l_k respectivamente. Además, si tomamos a^*

suficientemente cercano a 1, tenemos $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_k^* = \Omega$, y la familia $\{Q_k^*\}$ tiene la propiedad de la intersección acotada. La familia $\{\widetilde{Q_k}\}$ también tiene la propiedad de la intersección acotada, siendo M el número mayor de intersecciones. Por último tenemos que las longitudes l_k y l_i son comparables cuando los cubos Q_k^* y Q_i^* se intersectan, (ver Sección 3.4).

Para definir los elementos bloques es necesario construir una partición de la unidad para el conjunto Ω subordinada a la cubierta $\{\widetilde{Q}_k\}$.

Consideramos una función $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ suave, tal que vale 1 en el cubo de longitud 1 centrado en el origen y 0 fuera del cubo concéntrico de longitud $\tilde{a}$. Hacemos $\varphi_k(x) = \varphi\left(\dfrac{x - x_k}{l_k}\right)$, donde x_k es el centro del cubo Q_k.

Definimos $\phi_k = \dfrac{\varphi_k}{\sum_j \varphi_j}$, entonces ϕ_k satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x)\,\mathrm{d}x \;\backsimeq\; |Q_k^*| \backsimeq l_k^n, \tag{3.3}$$

$$|\partial^\beta \phi_k(x)| \;\leq\; C_\beta l_k^{-|\beta|}. \tag{3.4}$$

Estas propiedades de ϕ_k se muestran en la Sección 3.4.

Denotamos por $\widetilde{\phi}_k$ a la función ϕ_k normalizada, esto es $\widetilde{\phi}_k = \phi_k / \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x)\,\mathrm{d}x$, por lo que se cumple $\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\phi}_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Observemos que la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k\,\mathrm{d}\mu$ tiene sentido, y de hecho, por el Ejemplo 1.3.10 la medida μ define un operador lineal y la aplicación sobre ϕ_k, que denotamos por $\langle \mu, \phi_k \rangle$, está dada por esta integral.

Las medidas bloques. La medidas bloques deben satisfacer tres condiciones: soporte en un cubo acotado, $b_k(\mathbb{R}^n) = 0$ y que su maximal esté acotada. Se intuye entonces que se definirá b_k a partir de las funciones que conforman la partición de la unidad $\{\phi_k\}$ para la condición del soporte. Las otras condiciones requieren que la medida b_k satisfaga la condición de momento

$$\langle b_k, q \rangle \;=\; 0$$

para todo polinomio q de grado a lo más d, donde d es un entero no negativo tal que satisface $p > n/(n+d+1)$ (más adelante veremos el porqué de este requerimiento tan preciso). La condición de momento se obtiene si definimos las medidas bloques como

$$\mathrm{d}b_k(x) \;=\; \phi_k(x)(\,\mathrm{d}\mu(x) - h_k(x)\,\mathrm{d}x).$$

A continuación mostramos la definición de la función $h_k(x)$, que finalmente es un polinomio, y que la medida b_k satisface la condición de momento requerida y posteriormente probamos las propiedades faltantes sobre la medida b_k.

Sea $\mathcal{P}$ el espacio de polinomios en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{P}_d$ el espacio vectorial de dimensión finita formado por polinomios en $\mathbb{R}^n$ de grado a lo más d. Sea $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert $L^2(Q_k^*, \widetilde{\phi}_k\,\mathrm{d}x)$ y $\mathcal{H}_d$ denotará a $\mathcal{P}_d$ como subespacio de $\mathcal{H}$. El producto interior $(f,g)_{L^2(Q_k^*)}$ es la integral $\int_{Q_k^*} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, mientras que $(f,g)_{\mathcal{H}}$ representará $\int_{Q_k^*} f(x)g(x)\widetilde{\phi_k}(x)\,\mathrm{d}x$ y cuando no se especifique se considerará $(f,g)_{L^2(Q_k^*)}$.

Sean $q_1, q_2, \ldots, q_N$ polinomios que forman una base ortonormal para $\mathcal{H}_d$, entonces
$(q_i, q_j\widetilde{\phi}_k)_{L^2(Q_k^*)} = \delta_{ij}$. Para los elementos $q \in \mathcal{P}$ y $x \in \mathbb{X}$ el producto $q \cdot x \in \mathcal{P} \otimes \mathbb{X}$ define una aplicación en $\mathcal{S}$ dada como

$$\varphi \ \mapsto \ \langle q\cdot x, \varphi\rangle = (q,\varphi)_{L^2}\cdot x,$$

por lo que podemos ver al producto $q \cdot x$ como un elemento de $\mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$.

Ahora definimos el operador $P_{\mathbb{X}} : \mathcal{S}'_{\mathbb{X}} \longrightarrow \mathcal{H}_d \otimes \mathbb{X}$ como

$$P_{\mathbb{X}} \quad : \quad f \mapsto \sum_{j=1}^{N} q_j \langle f, q_j\widetilde{\phi}_k\rangle. \tag{3.5}$$

Notamos que el producto $q_j\widetilde{\phi}_k$ es infinitamente diferenciable con soporte compacto por lo que la aplicación $\langle f, q_i\widetilde{\phi}_k\rangle$ está bien definida para todo $f \in \mathcal{S}'_{\mathbb{X}}$. No es difícil ver que este operador es lineal, además

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{X}}^2 f = P_{\mathbb{X}}(P_{\mathbb{X}} f) &= \sum_{i=1}^{N} q_i \left\langle \sum_{j=1}^{N} q_j \langle f, q_j\widetilde{\phi}_k\rangle, q_i\widetilde{\phi}_k \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N} q_i \left\{ \sum_{j=1}^{N} (q_j, q_i\widetilde{\phi}_k)\langle f, q_j\widetilde{\phi}_k\rangle \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} q_i \langle f, q_i\widetilde{\phi}_k\rangle = P_{\mathbb{X}} f,
\end{aligned}$$

por tanto el operador $P_{\mathbb{X}}$ es una proyección. Veamos ahora que $P_{\mathbb{X}}\mu$ tiene la propiedad de que $\langle(\mu - P_{\mathbb{X}}\mu), q\phi_k\rangle = 0$ para todo $q \in \mathcal{H}_d$. En efecto, es suficiente probarlo para q_i, un elemento básico de $\mathcal{H}_d$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \mu - P_{\mathbb{X}}\mu, q_i\phi_k\rangle &= \langle \mu, q_i\phi_k\rangle - \langle P_{\mathbb{X}}\mu, q_i\phi_k\rangle \\
&= \langle \mu, q_i\phi_k\rangle - \sum_{j=1}^{N} (q_j, q_i\phi_k)\langle \mu, q_j\widetilde{\phi}_k\rangle \\
&= \langle \mu, q_i\phi_k\rangle - \langle \mu, q_i\phi_k\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Observamos que $\langle(\mu - P_{\mathbb{X}}\mu), q\phi_k\rangle = \langle(\mu - P_{\mathbb{X}}\mu)\phi_k, q\rangle$. De esta forma si definimos los polinomios $h_k(x) = P_{\mathbb{X}}\mu(x)$ entonces las medidas b_k's definidas arriba satisfacen la condición de momento $\langle b_k, q\rangle = 0$ para todo polinomio $q \in \mathcal{H}_d$.

Con esta propiedad sobre b_k obtenemos $b_k(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}b_k(x) = \langle b_k, 1\rangle = 0$. Resta probar la desigualdad (3.1) y para ello necesitamos cotas sobre los polinomios h_k's así como un resultado que nos da una estimación de la aplicación de una distribución Banach valuada a una función especial en términos de la función gran maximal.

Lema 3.1.3. *Sea $N_0 > 0$ fijo y consideramos $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_{N_0}} = \{\phi \in \mathcal{S} : ||\, \phi\, ||_{\alpha,\beta} \leq 1,$ para todo $|\alpha|, |\beta| < N_0\}$. Sea f un distribución Banach valuada y φ una función en $\mathcal{S}$ con soporte en la bola $B = B(x_0, r)$ y tal que $|\partial^\alpha \varphi| \leq r^{-n-|\alpha|}$ para toda $|\alpha| \leq N_0$, entonces*

$$||\, \langle f, \varphi\rangle\, ||_{\mathbb{X}} \;\leq\; C\mathcal{M}_{\mathcal{F}_{N_0}} f(x), \qquad \text{para todo } x \in B.$$

Demostración. Para cada $x \in B \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos $\varphi_x(y) = r^n \varphi(x - ry)$. Entonces

$$\partial^\alpha \varphi_x(y) \;=\; (-1)^{|\alpha|} r^{n+|\alpha|}\, \partial^\alpha \varphi(x - ry). \tag{3.6}$$

La última cantidad es distinta de cero sólo si $x - ry \in B$, esto implica que $|y| \leq 2$. En efecto, si $|y| > 2$, entonces

$$|(x - ry) - x_0| = |ry - (x - x_0)| \;\geq\; r|y| - |x - x_0| > 2r - r,$$

es decir, $x - ry \notin B$. Entonces $|y| \leq 2$ y de (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} |y^\beta \partial^\alpha \varphi_x(y)| &\leq 2^{N_0} r^{n+|\alpha|}\, |\partial^\alpha \varphi(x - ry)| \\ &\leq 2^{N_0} r^{n+|\alpha|} r^{-n-|\alpha|} \;=\; 2^{N_0}, \end{aligned}$$

para todo $|\alpha|, |\beta| \leq N_0$ debido a la hipótesis sobre la función φ. Entonces obtenemos que $||\, \varphi_x\, ||_{\alpha,\beta} \leq 2^{N_0}$ independientemente de x, por tanto $\frac{1}{2^{N_0}}\varphi_x \in \mathcal{F}_{N_0}$.

Por definición de φ_x se tiene que $(\varphi_x)_r(x - y) = \varphi(y)$. Entonces

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f, (\varphi_x)_r(x - \cdot)\rangle = \langle f, \tau_x((\varphi_x)_r)\check{}\,\rangle = f * (\varphi_x)_r(x).$$

Por lo tanto

$$||\, \langle f, \varphi\rangle\, ||_{\mathbb{X}} \;\leq\; 2^{N_0}\mathcal{M}_{\mathcal{F}_{N_0}} f(x), \qquad \text{para todo } x \in B.$$

□

Observación 3.1.4. Los polinomios h_k satisfacen

$$||\, \phi_k(x)\; h_k(x)\, ||_{\mathbb{X}} \;\leq\; c_d A, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \tag{3.7}$$

$$||\, \phi_k(x)\; h_k(x)\, ||_{\mathbb{X}} \;\leq\; c_d \mathcal{M}\mu(x) \qquad \text{para todo } x \in Q_k^*. \tag{3.8}$$

Para probar estas desigualdades necesitamos la cota

$$\sup_{x\in Q_k^*} |\partial^\beta q(x)| \;\; \leq \;\; A_\beta l_k^{-|\beta|} \, || \, q \, ||_{\mathcal{H}} \, , \qquad\qquad \text{para todo} \;\; q \in \mathcal{P}_d. \quad (3.9)$$

Primero probamos (3.9) para el cubo unitario centrado en el origen, así, $\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert $L^2(Q^*, \widetilde{\phi}\, \mathrm{d}x)$ y $\mathcal{H}_d$ es el subespacio de $L^2(Q^*, \widetilde{\phi}\, \mathrm{d}x)$ que consiste en polinomios de grado a lo más d. Sea q un polinomio en $\mathcal{H}_d$ y P el operador proyección de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}_d$, entonces

$$q = P(q) \;\; = \;\; \sum_{i=i}^{N} (q, q_i)_{\mathcal{H}} \; q_i,$$

donde q_1, q_2, $\ldots$, q_N forman una base para el espacio $\mathcal{H}_d$, por tanto

$$\partial^\beta q \;\; = \;\; \sum_{i=i}^{N} (q, q_i)_{\mathcal{H}} \; \partial^\beta q_i.$$

Ahora bien, cada q_i es un polinomio de grado a lo más d, entonces existe una constante A_β tal que $|\partial^\beta q_i(x)| \leq A_\beta$ para todo $x \in Q^*$, para toda $i = 1, 2, \ldots, N$ y para toda n-tupla β, de esta manera

$$\begin{aligned} |\partial^\beta q(x)| \;\; &\leq \;\; \sum_{i=i}^{N} |(q, q_i)_{\mathcal{H}}| |\partial^\beta q_i(x)| \\ &\leq \;\; A_\beta \sum_{i=i}^{N} || \, q \, ||_{\mathcal{H}} \, || \, q_i \, ||_{\mathcal{H}} \\ &\leq \;\; A_{\beta,N} \, || \, q \, ||_{\mathcal{H}} \, . \end{aligned}$$

Notemos que la constante $A_{\beta,N}$ no depende del polinomio q, por tanto

$$\sup_{x\in Q^*} |\partial^\beta q(x)| \;\; \leq \;\; A_{\beta,N} \, || \, q \, ||_{\mathcal{H}} \, , \qquad\qquad \text{para todo} \;\; q \in \mathcal{H}_d.$$

Consideramos ahora $\mathcal{H} = L^2(Q_k^*, \widetilde{\phi}_k \, \mathrm{d}x)$, $\mathcal{H}_d$ como antes y q un polinomio en $\mathcal{H}_d$. Existe un polinomio $\widetilde{q}$ definido en Q^* tal que

$$q(x) \;\; = \;\; \widetilde{q}\left(\frac{x - x_k}{l_k}\right), \qquad\qquad x \in Q_k^*,$$

por tanto

$$\partial^\beta q(x) \;\; = \;\; l_k^{-|\beta|} \; \partial^\beta \widetilde{q}\left(\frac{x - x_k}{l_k}\right),$$

pero $(x-x_k)/l_k$ es un punto en Q^* y ya vimos que existe una constante $A_{\beta,N}$ tal que

$$\left|\partial^\beta \widetilde{q}\left(\frac{x-x_k}{l_k}\right)\right| \;\leq\; A_{\beta,N}\,||\,\widetilde{q}\,||_{L^2(Q^*,\widetilde{\phi}\,\mathrm{d}x)}\,.$$

Entonces

$$|\partial^\beta q(x)| \;\leq\; A_{\beta,N}\; l_k^{-|\beta|}\;\;||\,\widetilde{q}\,||_{L^2(Q^*,\widetilde{\phi}\,\mathrm{d}x)}\,,$$

pero

$$\begin{aligned}
\int_{Q^*}|\widetilde{q}(x)|^2\widetilde{\phi}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\int\phi}\int_{Q^*}|q(l_kx+x_k)|^2\phi(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\int\phi}\int_{Q_k^*}|q(y)|^2\;\phi\left(\frac{y-x_k}{l_k}\right)\;l_k^{-n}\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{l_k^{-n}\int\phi_k}{\int\phi}\int_{Q_k^*}|q(x)|^2\;\widetilde{\phi}_k(x)\,\mathrm{d}x\\
&= ||\,q\,||_{\mathcal{H}}\,,
\end{aligned}$$

obteniendo así la desigualdad (3.9).

Debido a que los elementos básicos q_i de $\mathcal{H}_d(Q_k^*)$ son polinomios y por la desigualdad (3.9) obtenemos que $|\partial^\beta q_i| \leq A_{\beta,N} l_k^{-|\beta|}$ para todo $|\beta| \geq 0$ y toda $i = 1, 2, \ldots, N$.

De la desigualdad $|\partial^\beta \widetilde{\phi}_k| \leq A_\beta l_k^{-n-|\beta|}$ y la fórmula de Leibniz tenemos

$$|\partial^\alpha q_i\widetilde{\phi}_k| \;\leq\; \sum_{\beta\leq\alpha}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\end{array}\right)\left|\partial^\beta q_i\partial^{\alpha-\beta}\widetilde{\phi}_k\right| \;\leq\; A_{\alpha,N}l_k^{-n-|\alpha|}.$$

Ahora hacemos $\varphi = cq_i\widetilde{\phi}_k$ y $r = 5\sqrt{n}l_k$, donde la constante c depende de α, n y N para tener $|\partial^\alpha\varphi| \leq r^{-n-|\alpha|}$. Aplicamos el Lema 3.1.3 a la función φ y obtenemos $\left|\left|\,\langle\mu, q_i\widetilde{\phi}_k\rangle\,\right|\right|_{\mathbb{X}} \leq c_1\mathcal{M}\mu(z)$ con $z \in Q_k^*$, además si $z \in B(x_k, r)\bigcap\Omega^C$, entonces $\left|\left|\,\langle\mu, q_i\widetilde{\phi}_k\rangle\,\right|\right|_{\mathbb{X}} \leq c_2 A$.

Ahora bien, por la definición de $h_k(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
||\,\phi_k(x)h_k(x)\,||_{\mathbb{X}} &= \left|\left|\,\phi_k(x)\left(\sum_{i=1}^N q_i(x)\langle\mu, q_i\widetilde{\phi}_k\rangle\right)\right|\right|_{\mathbb{X}}\\
&\leq |\phi_k(x)|\sum_{i=1}^N|q_i(x)|\left|\left|\,\langle\mu, q_i\widetilde{\phi}_k\rangle\,\right|\right|_{\mathbb{X}}.
\end{aligned}$$

Cuando $x \notin Q_k^*$ se cancela cada término de la última suma debido a la función ϕ_k. Cuando $x \in Q_k^*$, la función ϕ_k está acotada por 1. Como ya mencionamos, los polinomios q_i's están acotados uniformemente en Q_k^* por una constante C, por tanto

$$|| \, \phi_k(x)h_k(x) \, ||_{\mathbb{X}} \;\; \leq \;\; \sum_{i=1}^{N} C \;\, cA \;\; = \;\; c_d A,$$

probando así la desigualdad (3.7). De manera similar probamos (3.8);

$$|| \, \phi_k(x)h_k(x) \, ||_{\mathbb{X}} \;\; \leq \;\; \sum_{i=1}^{N} C \;\, c\mathcal{M}\mu(x) = c_d \; \mathcal{M}\mu(x), \qquad\qquad \text{si} \;\; x \in Q_k^*.$$

Ahora probamos la desigualdad (3.1) para la que requerimos de las desigualdades

$$M_\Phi b_k(x) \leq c\mathcal{M}\mu(x), \qquad\qquad x \in Q_k^*. \tag{3.10}$$

$$M_\Phi b_k(x) \;\; \leq \;\; cA \frac{l_k^{n+d+1}}{|x - x_k|^{n+d+1}}, \qquad x \notin Q_k^*. \tag{3.11}$$

En efecto, con (3.10) y (3.11) podemos desarrollar

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (M_\Phi b_k(x))^p \, \mathrm{d}x \;\; &= \;\; \left(\int_{Q_k^*} + \int_{(Q_k^*)^C} \right) (M_\Phi b_k(x))^p \, \mathrm{d}x \\
&\leq \;\; \int_{Q_k^*} (\mathcal{M}\mu(x))^p \, \mathrm{d}x + \int_{(Q_k^*)^C} \left\{ cA \frac{l_k^{n+d+1}}{|x - x_k|^{n+d+1}} \right\}^p \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Calculando la última integral

$$\begin{aligned}
&(cA)^p l_k^{p(n+d+1)} \int_{(Q_k^*)^C} \frac{1}{|x - x_k|^{p(n+d+1)}} \, \mathrm{d}x \\
&\qquad \cong \;\; (cA)^p l_k^{p(n+d+1)} c_n \int_{l_k}^{\infty} \frac{1}{r^{p(n+d+1)}} r^{n-1} \, \mathrm{d}r \\
&\qquad = \;\; c_{n,p} A^p l_k^{p(n+d+1)} l_k^{n-p(n+d+1)}
\end{aligned}$$

siempre que $p > \dfrac{n}{n+d+1}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{(Q_k^*)^C} \left\{ cA \frac{l_k^{n+d+1}}{|x - x_k|^{n+d+1}} \right\}^p \mathrm{d}x \;\; &\cong \;\; c_{n,p,a^*} A^p |Q_k^*| \\
&\leq \;\; c_{n,p,a^*} \int_{Q_k^*} (\mathcal{M}\mu)^p,
\end{aligned}$$

la desigualdad es válida debido a que $\mathcal{M}\mu(x) > A$ en Ω, en particular cuando $x \in Q_k^*$, así obtenemos (3.1).

Prueba de la desigualdad (3.10). Por definición de la medida b_k tenemos

$$M_\Phi b_k(x) \leq M_\Phi(\phi_k \,\mathrm{d}\mu)(x) + M_\Phi(\phi_k h_k)(x). \tag{3.12}$$

Veamos la cota para el término $M_\Phi(\phi_k \,\mathrm{d}\mu)(x)$. Para $x \in Q_k^*$ la convolución $\phi_k \,\mathrm{d}\mu * \Phi_t(x)$ está dada por la fórmula $\langle \mu, \phi_k \Phi_t(x-\cdot)\rangle$. Para poder aplicar el Lema 3.1.3, hacemos

$$\varphi(y) = \phi_k(y)\Phi_t(x-y). \tag{3.13}$$

Por la fórmula de Leibniz obtenemos la siguiente estimación sobre las derivadas de la función φ.

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \varphi(y)| &\leq \frac{1}{t^n}\sum_{\beta\leq\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\left|\partial^\beta \phi_k(y)\cdot \partial^{\alpha-\beta}\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{t^n}\sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha,\beta}\left[c_{\beta,\phi_k} l_k^{-|\beta|}\cdot c_{\alpha,\beta,\Phi} t^{-|\alpha-\beta|}\right] \\
&= c_{\alpha,\phi_k,\Phi} t^{-n}\sum_{\beta\leq\alpha}\left[l_k^{-|\alpha|}\cdot t^{-|\alpha-\beta|}\right] \\
&\leq \begin{cases} c_{\alpha,\phi_k,\Phi} t^{-n-|\alpha|}, & \text{cuando } t \leq l_k \\ c_{\alpha,\phi_k,\Phi} l_k^{-n-|\alpha|}, & \text{cuando } t > l_k \end{cases}.
\end{aligned}$$

Además

$$\mathrm{sop}\ \{\varphi\} = \mathrm{sop}\ \{\phi_k \Phi_t(x-\cdot)\} \subset Q_k^* \bigcap B(x,t).$$

Por tanto, el radio de la bola B en el Lema 3.1.3 lo escogemos de acuerdo a la magnitud de t; cuando $t \leq l_k$ escogemos la bola $B(x,t)$ que contiene el soporte de φ, para $t > l_k$ escogemos $B = B(x, 2\sqrt{n} l_k)$ que contiene al cubo Q_k^* y por tanto al soporte de φ. Entonces para cualquier t tenemos

$$||\ \phi_k \,\mathrm{d}\mu * \Phi_t(x)\ ||_{\mathbb{X}} = ||\ \langle \mu, \varphi\rangle\ ||_{\mathbb{X}} \leq c\mathcal{M}\mu(x).$$

Si tomamos el supremo sobre $t > 0$ obtenemos

$$M_\Phi(\phi_k \,\mathrm{d}\mu)(x) \leq c\mathcal{M}\mu(x), \qquad x \in Q_k^*. \tag{3.14}$$

Veamos ahora la cota para el término $M_\Phi(\phi_k h_k)(x)$. Tenemos que

$$||\ \phi_k h_k * \Phi_t(x)\ ||_{\mathbb{X}} \leq c_d A \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x-y)\,\mathrm{d}y = c_d A \qquad x \in Q_k^*,$$

debido a (3.7), pero si $z \in Q_k^* \subseteq \Omega$, entonces $\mathcal{M}\mu(z) > A$. En particular $\|\, \phi_k h_k * \Phi_t(x) \,\|_{\mathbb{X}} \leq c\mathcal{M}\mu(x)$ para $x \in Q_k^*$. Tomando el supremo sobre $t > 0$ obtenemos

$$M_\Phi(\phi_k h_k)(x) \leq c\mathcal{M}\mu(x), \qquad x \in Q_k^*. \tag{3.15}$$

De las ecuaciones (3.12), (3.14) y (3.15) se sigue la desigualdad (3.10).

Prueba de la desigualdad (3.11). Por las condiciones de momento que satisface la medida bloque b_k tenemos

$$b_k * \Phi_t(x) = \langle b_k, \Phi_t(x - \cdot)\rangle = \langle b_k, \Phi_t(x - \cdot) - q\rangle,$$

donde q es el polinomio de Taylor de grado d para la función $y \mapsto \Phi_t(x - y)$ alrededor del punto $y = x_k$. Por definición de b_k

$$b_k * \Phi_t(x) \;=\; \langle \phi_k\, \mathrm{d}\mu, \Phi_t(x - \cdot) - q\rangle - \langle \phi_k h_k, \Phi_t(x - \cdot) - q\rangle,$$

entonces

$$\begin{aligned} M_\Phi b_k(x) &\leq \sup_{t>0}\langle \phi_k\, \mathrm{d}\mu, \Phi_t(x - \cdot) - q\rangle + \sup_{t>0}\langle \phi_k h_k, \Phi_t(x - \cdot) - q\rangle \\ &= \; I_1 \;+\; I_2. \end{aligned}$$

Veamos la cota para I_1. Recordarmos que $|\partial^\alpha \widetilde{\phi}_k| \leq A_\alpha l_k^{-n-|\alpha|}$. Ahora bien, la función Φ tiene soporte en la bola unitaria centrada en cero, $x \notin Q_k^*$ y x_k es el centro del cubo Q_k^*, por tanto $\frac{1}{2}a^* l_k \leq |x - x_k| \leq t$, además $y \in \widetilde{Q}_k$, lo que implica $(a^* - \tilde{a})l_k \leq |x - x_k| \leq t$, entonces

$$t \;\geq\; |x - y|, |x - x_k| \;\geq\; cl_k \tag{3.16}$$

donde la constante c es independiente de k.

Con esto último presente y $|\alpha| > d$ tenemos que la derivada $\partial^\alpha q$ se anula, además $\partial^\alpha \Phi_t = t^{-n-|\alpha|}(\partial^\alpha \Phi)$, por tanto

$$|\partial^\alpha \Phi_t| \;\leq\; C_\alpha t^{-n} t^{-|\alpha|} \leq C_\alpha t^{-n-d-1} t^{-|\alpha|+d+1} \leq C_\alpha \frac{l_k^{d+1}}{|x - x_k|^{n+d+1}} l_k^{-|\alpha|}.$$

Cuando $|\alpha| \leq d$ y debido a que q es el polinomio de Taylor de grado d, tenemos que $\partial^\alpha q$ es el polinomio de Taylor de grado $d - |\alpha|$ de la función $(\partial^\alpha \Phi_t(x - \cdot))$, por tanto, de la fórmula del residuo obtenemos

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(\Phi_t - q) &= \partial^\alpha \Phi_t - \partial^\alpha q \\ &= \frac{1}{(d - |\alpha| + 1)!}\; \frac{1}{t^{n+d+1}}\; \partial^{d+1}\Phi(\xi)\; (y - x_k)^{d-|\alpha|+1}. \end{aligned}$$

Concluimos que para cualquier n-tupla de enteros positivos α se tiene la desigualdad

$$|\partial^\alpha[\Phi_t(x-y)-q(y)]| \leq A_\alpha \frac{l_k^{d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}} l_k^{-|\alpha|}, \qquad x \notin Q_k^*. \quad (3.17)$$

Por lo tanto si definimos la función

$$\varphi(y) = \frac{|x-x_k|^{n+d+1}}{l_k^{n+d+1}} \phi_k(y)[\Phi_t(x-y)-q(y)],$$

obtenemos la cota

$$|\partial^\alpha \varphi| \leq A_\alpha l_k^{-n-|\alpha|}.$$

Podemos entonces aplicar el Lema 3.1.3 a μ y φ, obteniendo

$$|| \langle \mu, \varphi \rangle ||_{\mathbb{X}} \leq c\mathcal{M}\mu(x) \leq cA.$$

De la definición de φ, y calculando el supremo sobre $t>0$ obtenemos

$$I_1 \leq cA \frac{l_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}}, \qquad x \notin Q_k^*. \quad (3.18)$$

Para I_2, usamos la desigualdad (3.17) con $\alpha = 0$, entonces

$$\begin{aligned} || \langle \phi_k h_k, \Phi_t(x-\cdot)-q \rangle ||_{\mathbb{X}} &= \left|\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t(x-y)-q(y))\phi_k(y)h_k(y)\,\mathrm{d}y \right|\right|_{\mathbb{X}} \\ &\leq cA \frac{l_k^{d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}} \int_{Q_k^*} \mathrm{d}y \\ &= cA \frac{l_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}}. \end{aligned}$$

Calculando el supremo sobre $t>0$ obtenemos

$$I_2 \leq cA \frac{l_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}}. \quad (3.19)$$

Las desigualdades (3.18) y (3.19) implican la desigualdad (3.11).

La medida buena. Definimos la medida g como

$$\mathrm{d}g(x) = \begin{cases} \mathrm{d}\mu(x), & x \in \Omega^C \\ \sum_k \phi_k(x) h_k(x)\,\mathrm{d}x, & x \in \Omega \end{cases}$$

Tomando en cuenta que $b = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} g + b &= \mu\chi_{\Omega^C} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \phi_k h_k + \sum_{k\in\mathbb{N}} \phi_k(\mu - h_k) = \mu\chi_{\Omega^C} + \mu \sum_k \phi_k \\ &= \mu\chi_{\Omega^C} + \mu\chi_{\Omega} \\ &= \mu. \end{aligned}$$

Probamos ahora que $g \in V^\infty_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$. Si $E \subseteq \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} \|\, g(E) \,\|_{\mathbb{X}} &= \left\| \int_E \left(\sum_k \phi_k h_k \right) \mathrm{d}x \right\|_{\mathbb{X}} \leq \int_E \left(\sum_k \|\, \phi_k h_k \,\|_{\mathbb{X}} \right) \mathrm{d}x \\ &\leq \int_E McA\,\mathrm{d}x \leq cA|E|. \end{aligned}$$

Ahora sea $E \subseteq \Omega^C$, por lo tanto $g(E) = \mu(E)$ y vamos a probar entonces que $\|\, \mu(E) \,\|_{\mathbb{X}}$ es acotada por $cA|E|$. En efecto, consideramos un funcional $\xi^* \in \mathbb{X}^*$, y sea μ_* la medida composición $\xi^* \circ \mu$, entonces μ_* es una medida compleja de variación acotada, por tanto existe $f_* \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathrm{d}\mu_*(x) = f_*(x)\,\mathrm{d}x$. Por otro lado recordamos que $\|\, \mu(E) \,\|_{\mathbb{X}}$ puede ser calculada mediante el supremo $\sup_{\|\, \xi^* \,\|_{\mathbb{X}^*} \leq 1} |\langle \xi^*, \mu(E)\rangle|$, pero tenemos

$$\begin{aligned} |\langle \xi^*, \mu(E)\rangle| &= |\mu_*(E)| \\ &= \left| \int_E f_*(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_E \lim_{t\to 0} f_* * \Phi_t(x)\,\mathrm{d}x \right| \end{aligned}$$

pues Φ es una aproximación a la identidad, por lo tanto

$$|\langle \xi^*, \mu(E)\rangle| \leq \overline{\lim_{t\to 0}} \int_E |f_* * \Phi_t(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Además

$$\begin{aligned} f_* * \Phi_t(x) &= \int \Phi_t(x-y) f_*(y)\,\mathrm{d}y = \int \Phi_t(x-y)\,\mathrm{d}\mu_*(y) \\ &= \left\langle \xi^*, \int \Phi_t(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) \right\rangle \\ &= \langle \xi^*, \mu * \Phi_t(x)\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
\|\, \mu(E) \,\|_{\mathbb{X}} &= \sup_{\|\, \xi^* \,\|_{\mathbb{X}^*} \leq 1} |\langle \xi^*, \mu(E) \rangle| \\
&\leq \sup_{\|\, \xi^* \,\|_{\mathbb{X}^*} \leq 1} \overline{\lim_{t \to 0}} \int_E |f_* * \Phi_t(x)| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \sup_{\|\, \xi^* \,\|_{\mathbb{X}^*} \leq 1} \overline{\lim_{t \to 0}} \int_E \|\, \xi^* \,\|_{\mathbb{X}^*} \,\|\, \mu * \Phi_t(x) \,\|_{\mathbb{X}} \, \mathrm{d}x \\
&\leq \overline{\lim_{t \to 0}} \int_E \mathcal{M}\mu(x) \, \mathrm{d}x \\
&\leq cA \int_E \mathrm{d}x \\
&\leq cA|E|.
\end{aligned}$$

Observemos que en esta última parte de la demostración al Teorema 3.1.1 es donde se usa la hipótesis de variación acotada sobre μ para mostrar que la medida g es acotada. No obstante si quitamos la propiedad de variación acotada sobre μ seguimos obteniendo propiedades sobre la medida "buena", a saber, la medida g pertenece al espacio $\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$. A continuación mostramos esto último.

3.1.1. Una variante al Teorema de descomposición Calderón-Zygmund.

Teorema 3.1.5. *Sea μ una medida como en el Teorema 3.1.1 sólo que ahora no es de variación acotada. Entonces se cumplen todas las tesis del teorema excepto la desigualdad (3.2), que es sustituida por*

$$M_\Phi g(x) \;\leq\; c\mathcal{M}\mu(x)\chi_{\Omega^C}(x) + cA \sum_k \frac{l_k^{n+1}}{(l_k + |x - x_k|)^{n+1}}. \tag{3.20}$$

Demostración. Definimos g igual que antes, es decir, a partir de μ y de $b = \sum_k b_k$ hacemos

$$g = \mu - b.$$

Para probar (3.20) consideramos primero el caso $x \notin \Omega$.
Por la definición de g, tenemos que $M_\Phi g \leq M_\Phi \mu + \sum_{k \in \mathbb{N}} M_\Phi b_k$. Pero $M_\Phi \mu \leq \mathcal{M}\mu$.

Por otro lado, si $x \notin \Omega$, entonces $x \notin Q_k^*$, por tanto $cl_k \leq |x - x_k|$, lo que nos implica

$$\frac{l_k^{n+1}}{|x - x_k|^{n+1}} \leq c\frac{l_k^{n+1}}{(l_k + |x - x_k|)^{n+1}},$$

junto con (3.11) con $d = 0$ tenemos

$$M_\Phi b_k(x) \leq cA\frac{l_k^{n+1}}{(l_k + |x - x_k|)^{n+1}}. \tag{3.21}$$

Cuando $x \in \Omega$, entonces $x \in Q_m^*$ para algún m. Entonces hacemos

$$g = \mu - \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k = \mu - \sum_C b_k - \sum_L b_k,$$

donde la suma $\sum_C$ es sobre los cubos Q_k^* *cerca* de Q_m^*, esto es $Q_k^* \bigcap Q_m^* \neq \emptyset$, y la suma $\sum_L$ es sobre los cubos Q_k^* *lejos* de Q_m^*, es decir $Q_k^* \bigcap Q_m^* = \emptyset$. Recordar que hay a lo más M cubos cerca de Q_m^*.

Cuando los cubos Q_k^* están lejos de Q_m^*, volvemos a la propiedad $cl_k \leq |x - x_k|$, pues $x \notin Q_k^*$, y por tanto volvemos a tener

$$\sum_L M_\Phi b_k(x) \leq cA\sum_L \frac{l_k^{n+1}}{(l_k + |x - x_k|)^{n+1}}.$$

Cuando los cubos Q_k^* están cerca de Q_m^* hacemos

$$\mu - \sum_C b_k = \mu - \sum_C \phi_k\mu - \sum_C \phi_k h_k.$$

En la última suma sabemos que si $x \in Q_m^*$, entonces $|x - x_m| \leq \sqrt{n}l_m$, luego $l_m + |x - x_m| \leq c_n l_m$ y por tanto

$$1 \leq c_n\frac{l_m^{n+1}}{(l_m + |x - x_m|)^{n+1}}.$$

También tenemos la desigualdad $M_\Phi(\phi_k h_k)(x) \leq cA$ (ver el desarrollo en la desigualdad (3.15)). Entonces

$$\sum_C M_\Phi(h_k\phi_k) \leq cAM \leq c_M A\frac{l_m^{n+1}}{(l_m + |x - x_m|)^{n+1}}.$$

Veamos la convolución de Φ_t con $\mu - \sum_C \mu\phi_k$. Consideramos una constante c_0 tal que $c_0 l_m = \sup\{r > 0 : B(x,r) \subset Q_m^*\}$. Entonces para $t \leq c_0 l_m$ se cumple $(\mu - \sum_C \phi_k \mu) * \Phi_t(x) = 0$ debido a que $1 - \sum_c \phi_k = 0$ en Q_m^* y $\Phi_t(x - \cdot)$ tiene soporte en $B(x,t) \subset Q_m^*$.

Para $t > c_0 l_m$ notamos que

$$\left(\mu - \sum_C \phi_k \mu\right) * \Phi_t(x) = \left\langle \mu, (1 - \sum_C \phi_k)\Phi_t(x - \cdot) \right\rangle,$$

luego, consideramos la función $\varphi = (1 - \sum_C \phi_k)\Phi_t(x - \cdot)$. Observamos que

$$\partial^\alpha \sum_C \phi_k = \sum_C l_k^{-|\alpha|} \partial^\alpha \phi,$$

pero sabemos que las cantidades l_k y l_m son equivalentes cuando los cubos Q_k^* y Q_m^* tienen intersección no vacía, ver Sección 3.4, por tanto

$$|\partial^\alpha \sum_C \phi_k| \leq A_\alpha M l_m^{-|\alpha|}.$$

Recordemos además que $|\partial^\alpha \Phi_t| \leq A_\alpha t^{-n-|\alpha|} |\partial^\alpha \Phi|$, entonces

$$|\partial^\alpha \varphi| \leq A_{\alpha,M} l_m^{-n-|\alpha|}.$$

Una vez más usamos el Lema 3.1.3, por lo que consideramos la bola $B = B(x,r)$, donde $r = cl_m$, con c lo suficientemente grande para que $B \bigcap \Omega^C \neq \emptyset$, entonces

$$|\langle \mu, \varphi \rangle| \leq \mathcal{M}\mu(y) \leq cA, \qquad \text{si } \; y \in B \bigcap \Omega^C,$$

por lo tanto

$$\sup_{t>0} \left\| \left(\mu - \sum_C \phi_k \mu\right) * \Phi_t(x) \right\|_{\mathbb{X}} \leq cA \leq cA \frac{l_m^{n+1}}{(l_m + |x - x_m|)^{n+1}}.$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned}
M_\Phi g &\leq M_\Phi \left(\mu - \sum_C \phi_k \mu\right) + \sum_C M_\Phi(\phi_k h_k) + \sum_L M_\Phi b_k \\
&\leq cA \frac{l_m^{n+1}}{(l_m + |x - x_m|)^{n+1}} + cA \frac{l_m^{n+1}}{(l_m + |x - x_m|)^{n+1}} + cA \sum_L \frac{l_k^{n+1}}{(l_k + |x - x_k|)^{n+1}} \\
&\leq cA \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{l_k^{n+1}}{(l_k + |x - x_k|)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

De esta forma

$$M_\Phi g \quad \leq \quad \begin{cases} c\mathcal{M}\mu(x) + cA\sum_k \dfrac{l_k^{n+1}}{(l_k+|x-x_k|)^{n+1}}, & x \notin \Omega, \\ cA\sum_k \dfrac{l_k^{n+1}}{(l_k+|x-x_k|)^{n+1}}, & x \in \Omega \end{cases}$$

como queríamos probar. □

Corolario 3.1.6. *La medida g en el Teorema 3.1.5 pertenece al espacio $\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Integrando el término $\mathcal{M}\mu \cdot \chi_{\Omega^C}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}\mu \cdot \chi_{\Omega^C} = \int_{\Omega^C} (\mathcal{M}\mu)^{1-p}(\mathcal{M}\mu)^p \leq A^{1-p}\int_{\Omega^C}(\mathcal{M}\mu)^p < \infty,$$

debido a que $p \leq 1$. Por otro lado

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{(l_k+|x-x_k|)^{n+1}} \quad = \quad c l_k^{-1},$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} cA\sum_k \frac{l_k^{n+1}}{(l_k+|x-x_k|)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \quad &= \quad cA\sum_k l_k^n = cA\sum_k |Q_k| = cA|\Omega| \\ &< \quad \infty. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} M_\Phi g(x)\,\mathrm{d}x \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}\mu(x)\cdot\chi_{\Omega^C}(x)\,\mathrm{d}x + cA\sum_k \int \frac{l_k^{n+1}}{(l_k+|x-x_k|)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &< \quad \infty. \end{aligned}$$

Esto significa que $M_\Phi g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y por tanto $g \in \mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$. □

Corolario 3.1.7. *La medida g en el Teorema 3.1.5 es de variación acotada.*

Demostración. El Teorema 2.3.5 y la inclusión en (2.7) nos implican

$$\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}} \cong \mathfrak{h}^1_{\mathbb{X}} \subseteq V^1_{\mathbb{X}},$$

y como $g \in \mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}$, concluimos que $g \in V^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$. □

3.1.2. Densidad del espacio $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.1.8. *Sea $p < 1$, entonces el espacio $V^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea μ un elemento en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$. Por el Teorema 3.1.5, haciendo $A = k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, existen medidas b_k,g_k tales que $\mu = g_k + b_k$. El Corolario 3.1.7 nos dice que g_k es de variación acotada. Por otro lado, $\mu, b_k \in \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$ implica que $g_k \in \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$. Por tanto $g_k \in V^1_{\mathbb{X}} \cap \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$.

Tenemos además

$$|| \, \mu - g_k \, ||^p_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}} \;\; = \;\; || \, b_k \, ||^p_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}} \; \leq \; c_M \int_{\{\mathcal{M}\mu > A_k\}} \mathcal{M}\mu^p(x) \, \mathrm{d}x,$$

por la desigualdad (3.1) y el hecho de que cada x pertenece a lo más a M cubos. Por hipótesis $\mathcal{M}\mu \in L^p(\mathbb{R}^n)$ por lo que la integral tiende a cero cuando k tiende a ∞. Por lo tanto $g_k \to \mu$ en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$. □

3.2. Descomposición atómica.

Comenzamos con la definición de una medida átomo y algunas de sus propiedades.

Definición 3.2.1. Sea $p \leq 1$. Una medida ν es una **medida p-átomo** si satisface las siguientes condiciones.

1. El *soporte* de la medida ν está contenido en una bola de volumen finito.

2. Es *acotada* por el volumen de la bola B a la potencia $-1/p$, $|| \, \nu \, ||_{V^\infty_{\mathbb{X}}} \leq \dfrac{c}{|B|^{\frac{1}{p}}}$, por tanto la medida ν es de variación acotada y por tanto tiene sentido la integral de funciones continuas, en particular la integral de polinomios, para los cuales enunciamos una tercer propiedad.

3. La *condición de momento*, $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \, \mathrm{d}\nu(x) = 0$, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq n \left\lceil \dfrac{1}{p} - 1 \right\rceil$ (el entero más pequeño que acota por arriba a $1/p - 1$).

Observación 3.2.2. Sea ν una medida p-átomo, entonces ν es un elemento de $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$ y su seminorma en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$ es uniformemente acotada.

En efecto, sea Φ una función en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, positiva, con soporte en la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$ y tal que $A = \int \Phi \neq 0$, por lo que $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, consideramos la constante A_Φ que acota a $|\partial^\alpha \Phi(x)|$ para todo $x \in B(0,1)$ y $|\alpha| = 0, 1, \ldots, \lceil 1/p - 1 \rceil$.

Consideramos también $B = B(\overline{x}, r)$ la bola donde se encuentra el soporte de la medida ν. Debido a que $\nu \in V_{\mathbb{X}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la convolución de ν y la función Φ está bien definida además de que

$$|| \, \nu * \Phi_t(x) \, ||_{\mathbb{X}} \;=\; \left|\left| \int \Phi_t(x-y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right|\right|_{\mathbb{X}} \;\leq\; || \, \nu \, ||_{V_{\mathbb{X}}^\infty} \, || \, \Phi \, ||_1$$

por (1.19), tomamos el supremo sobre $t > 0$ y obtenemos

$$M_\Phi \nu(x) \;\leq\; c_\Phi |B|^{-\frac{1}{p}} \qquad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.22}$$

Por otro lado, si $x \notin 2B$ $(2B = B(\overline{x}, 2r))$, tenemos que

$$\begin{aligned} || \, \nu * \Phi_t(x) \, ||_{\mathbb{X}} \;&=\; \left|\left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x-y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right|\right|_{\mathbb{X}} \\ &=\; \left|\left| \int_{\mathbb{R}^n} [\Phi_t(x-y) - p(y)] \, \mathrm{d}\nu(y) \right|\right|_{\mathbb{X}} \end{aligned}$$

para todo polinomio p de grado menor igual a $n \left\lceil \dfrac{1}{p} - 1 \right\rceil$. En particular consideramos el polinomio de Taylor $q_{x,t}(y)$ de grado d alrededor de $\overline{x}$ de la función $y \mapsto \Phi_t(x-y)$, con d la parte entera de $n(p^{-1} - 1)$, entonces

$$|\Phi_t(x-y) - q_{x,t}(y)| \;\leq\; A_\Phi \frac{|y - \overline{x}|^{d+1}}{t^{n+d+1}}.$$

Pero afirmamos que $r < t$ y que $|x - \overline{x}| \leq 2t$. En efecto, $y \in B$, de lo contrario $\mathrm{d}\nu(y)$ se cancelaría en la integral de arriba. También $y \in B(x,t)$ debido al soporte de la función Φ, entonces $r \leq t$ implica $|x - \overline{x}| \leq |x - y| + |y - \overline{x}| < t + r \leq 2r$ lo que contradice $x \notin 2B$. Por tanto $r < t$, que a su vez implica $|x - \overline{x}| \leq |x-y| + |y - \overline{x}| < t + r < 2t$, como queríamos probar y por tanto llegamos a la desigualdad

$$|\Phi_t(x-y) - q_{x,t}(y)| \;\leq\; c_{n,p,\Phi} \frac{|y - \overline{x}|^{d+1}}{|x - \overline{x}|^{n+d+1}}, \qquad \text{para todo} \quad x \notin 2B.$$

Volviendo al cálculo de la convolución de ν y Φ tenemos

$$\begin{aligned}
\|\, \nu * \Phi_t(x) \,\|_{\mathbb{X}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [\Phi_t(x-y) - q_{x,t}(y)] \,\mathrm{d}\nu(y) \right\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq \|\, \nu \,\|_{V^\infty_{\mathbb{X}}} \left\| \int_B [\Phi_t(x-y) - q_{x,t}(y)] \,\mathrm{d}y \right\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq \frac{1}{|B|^{\frac{1}{p}}} \frac{c_{n,p,\Phi}}{|x-\overline{x}|^{n+d+1}} \int_B |y-\overline{x}|^{d+1} \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Resolviendo la última integral y tomando el supremo sobre $t > 0$ llegamos a la desigualdad

$$M_\Phi \nu(x) \;\leq\; c_{p,n,\Phi} \frac{1}{|B|^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{r}{|x-\overline{x}|} \right)^{n+d+1}. \tag{3.23}$$

De las desigualdades (3.22) y (3.23) acotamos la siguiente integral,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} M_\Phi \nu^p(x) \,\mathrm{d}x &= \left(\int_{2B} + \int_{2B^C} \right) M_\Phi \nu^p(x) \,\mathrm{d}x \\
&\leq c_\Phi |B|^{-1} \int_{2B} \mathrm{d}x + c_{p,n,\Phi} |B|^{-1} r^{p(n+d+1)} \int_{2B^C} \frac{\mathrm{d}x}{|x-\overline{x}|^{p(n+d+1)}} \\
&= c_{p,n,\Phi}.
\end{aligned}$$

$c_{p,n,\Phi}$ es una constante que depende de las constantes n,p y de la función Φ, pero no de la medida ν, y queda probada esta observación que da pie al siguiente resultado.

Observación 3.2.3. Si $\{a_k\}$ es una familia numerable de medidas p-átomos y $\{\lambda_k\}$ una sucesión de números complejos en $\ell^p(\mathbb{N})$ (el espacio de sucesiones p-sumables), entonces la serie

$$\mu \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k a_k \tag{3.24}$$

pertenece al espacio $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$.

En efecto, denotamos por μ_N a la suma parcial $\sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$, entonces

$$M_\Phi \mu_N \;\leq\; \sum_{k=1}^N \lambda_k M_\Phi a_k.$$

Además

$$\left(\sum_{k=1}^N \lambda_k M_\Phi a_k \right)^p \;\leq\; \sum_{k=1}^N |\lambda_k|^p (M_\Phi a_k)^p,$$

debido a que $p \leq 1$. Por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_\Phi \mu_N]^p(x)\, \mathrm{d}x \quad \leq \quad \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^p [M_\Phi a_k]^p(x)\, \mathrm{d}x \leq C \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^p.$$

De la desigualdad de arriba observamos que la serie en (3.24) converge en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$, más aún, se observa que en la convergencia no importa el orden de los sumandos, y a este tipo de convergencia se le llama *convergencia incondicional.*

Uno de los objetivos del presente trabajo es la dirección contraria a este desarrollo, esto es, dado un elemento μ en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$, existe una sucesión en $\ell^p(\mathbb{N})$ y una sucesión de medidas p-átomos tales que μ pueda ser representado por la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k a_k$. A este proceso le llamaremos descomposición del elemento μ. Sin embargo, antes de considerar $\mu \in \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$ realizamos la descomposición en un espacio denso en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$, a saber, en $V^1_{\mathbb{X}} \bigcap \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$.

3.2.1. Descomposición atómica para $V^1_{\mathbb{X}} \bigcap \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$.

Teorema 3.2.4. *Sea $\mu \in V^1_{\mathbb{X}} \bigcap \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$, entonces existen $\{\lambda_j\}$ en ℓ^1 y $\{a_j\}$ medidas átomos tales que*

$$\mu \quad = \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j a_j,$$

donde la convergencia es en el sentido de distribuciones, además tenemos

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p \quad \leq \quad C \,||\, \mu \,||^p_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}}\,.$$

Demostración. Sea $\mu \in V^1_{\mathbb{X}} \bigcap \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$, entonces para cada $j \in \mathbb{Z}$ podemos hacer la separación $\mu = G_j + B_j$, con $B_j = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{j,k}$, y $\Omega_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}\mu(x) > 2^j\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q^*_{j,k}$, por el Teorema 3.1.1. Notamos que $\Omega_{j+1} \subset \Omega_j$.

El Teorema 3.1.8 nos dice que $G_j \to \mu$ en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$ cuando $j \to \infty$, además $||\, G_j \,||_{V^\infty_{\mathbb{X}}} \leq c2^j$ por (3.2), por tanto $G_j \to 0$ cuando $j \to -\infty$. Entonces

$$\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=-\infty}^{N} G_{j+1} - G_j. \tag{3.25}$$

Debido a $\| G_{j+1}(E) - G_j(E) \|_{\mathbb{X}} \leq \| G_{j+1}(E) \|_{\mathbb{X}} + \| G_j(E) \|_{\mathbb{X}}$, por (3.2) obtenemos $\| G_{j+1} - G_j \|_{V^\infty_{\mathbb{X}}} \leq c2^j$. También tenemos que el soporte de $G_{j+1} - G_j$ está contenido en Ω_j, para convencerse considerar esta diferencia como $B_j - B_{j+1}$.

Recordemos que las funciones bloques están dadas por $\mathrm{d}b_{j,k} = \phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j,k}\,\mathrm{d}x)$, donde $h_{j,k}$ son funciones obtenidas por la proyección $P_{j,k}\mu$, donde $P_{j,k} : \mathcal{S}'_{\mathbb{X}} \longrightarrow \mathcal{H}_{d,j,k} \otimes \mathbb{X}$ y $\mathcal{H}_{d,j,k}$ es el subespacio vectorial de $L^2(Q^*_{j,k}, \widetilde{\phi}_{j,k}\,\mathrm{d}x)$ de dimensión finita formado por polinomios en $\mathbb{R}^n$ de grado a lo más d, y si $q_1, q_2, \ldots, q_N$ son polinomios que forman una base ortonormal en $L^2(Q^*_{j,k}, \widetilde{\phi}_{j,k}\,\mathrm{d}x)$, entonces

$$P_{j,k}\mu \;=\; \sum_{i=1}^{N} q_i \langle \mu, q_i \widetilde{\phi}_{j,k} \rangle.$$

Definimos ahora el polinomio $H_{k,l}$ de grado a lo más d como

$$H_{k,l} \;=\; P_{j+1,l}[\phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x)]. \tag{3.26}$$

Observaciones sobre los polinomios $H_{k,l}$.

1. El polinomio $H_{k,l}$ es distinto de cero si $Q^*_{j,k} \bigcap Q^*_{j+1,l} \neq \emptyset$. En efecto, consideramos los polinomios q_1, q_2, $\ldots$, q_N que forman una base del espacio de Hilbert $L^2(Q^*_{j+1,l}\,,\ \widetilde{\phi}_{j+1,l}\,\mathrm{d}x)$, entonces los términos de $H_{k,l}$ son de la forma

   $$q_i\ \langle \phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x)\ ,\ q_i \widetilde{\phi}_{j+1,l} \rangle,$$

   donde se observa la multiplicación de $\phi_{j,k}$ con $\phi_{j+1,l}$ por lo que deducimos esta observación.

2. Si la intersección $Q^*_{j,k} \bigcap Q^*_{j+1,l}$ es distinta del vacío, entonces $\mathrm{diam}[Q_{j,k}] \geq c{\cdot}\mathrm{diam}[Q_{j+1,l}]$. Del lema de la cubierta para Ω_j existe una constante independiente de k tal que $c\ l_{j,k} \geq d(Q^*_{j,k}, \Omega_j^C) + \mathrm{diam}(Q_{j,k}) \geq d(y, \Omega_j^C) \geq d(y, \Omega_{j+1}^C)$ para cualquier $y \in Q^*_{j,k} \bigcap Q^*_{j+1,l}$ y tomando en cuenta que $\Omega_{j+1} \subseteq \Omega_j$, y por el lema de la cubierta para Ω_{j+1} existe una constante independiente de k tal que $d(y, \Omega_{j+1}^C) \geq c_1 l_{j+1,l}$ y recordemos que $\mathrm{diam}[Q_{j,k}] = 2\sqrt{n} l_{j,k}$.

3. $\| H_{k,l}(x)\ \phi_{j+1,l}(x) \|_{\mathbb{X}} \leq c2^j$. Como se mencionó en el primer punto, los coeficientes del polinomio $H_{k,l}$ son de la forma $q_i\ \langle \phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu -$

$h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x)$, $q_i\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle$. Vamos a probar que éstos están acotados en norma. Comenzamos con $\langle\phi_{j,k}\,\mathrm{d}\mu$, $q_i\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle$. La prueba de esta cota es similar a la que se realizó para (3.7) y (3.8), en este caso tomamos en cuenta las desigualdades

$$\begin{aligned}|\partial^\beta q_i(x)| &\leq A_\beta l_{j+1,l}^{-|\beta|},\\ |\partial^\beta \widetilde{\phi}_{j+1,l}(x)| &\leq A_\beta l_{j+1,l}^{-n-|\beta|},\\ |\partial^\beta \phi_{j,k}(x)| \leq A_\beta l_{j,k}^{-|\beta|} &\leq c l_{j+1,l}^{-|\beta|}.\end{aligned}$$

Entonces, por la observación anterior y recordando que q_1, q_2, ..., q_N son base del espacio $L^2(Q^*_{j+1,l}$, $\widetilde{\phi}_{j+1,l}\,\mathrm{d}x)$, definimos la función

$$\varphi = \phi_{j,k}\; q_i\; \widetilde{\phi}_{j+1,l}.$$

De esta forma obtenemos la cota

$$\left\|\, \langle\phi_{j,k}\,\mathrm{d}\mu\ ,\ q_i\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle \,\right\|_{\mathbb{X}} \leq c2^{j+1}. \tag{3.27}$$

Para $\langle\phi_{j,k}h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x$, $q_i\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle$ describimos el polinomio $h_{j+1,l}$ por medio de los elementos base, esto es
$h_{j+1,l} = P_{j+1,l}\mu = \sum_{m=1}^N q_m\,\langle\,\mathrm{d}\mu\ ,\ q_m\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle$, entonces

$$\left\|\, \langle\phi_{j,k}h_{j+1,l}\ ,\ q_i\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle \,\right\|_{\mathbb{X}} \leq \sum_{m=1}^N |\langle\phi_{j,k}q_m\ ,\ q_i\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle| \left\|\,\langle\,\mathrm{d}\mu\ ,\ q_m\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle\,\right\|_{\mathbb{X}}$$

pero $\left\|\,\langle\,\mathrm{d}\mu\ ,\ q_m\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle\,\right\|_{\mathbb{X}} \leq c2^{j+1}$ para todo $m = 1, 2, \ldots, N$, y
$\sum_{m=1}^N |\langle q_m\phi_{j,k}\ ,\ q_i\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle| \leq C\sum_{m=1}^N |\langle q_m\ ,\ q_i\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle|$
$= C\sum_{m=1}^N \delta_{m,i} = C$, por lo tanto

$$\left\|\, \langle h_{j+1,l}\phi_{j,k}\ ,\ q_i\widetilde{\phi}_{j+1,l}\rangle \,\right\|_{\mathbb{X}} \leq c2^{j+1}. \tag{3.28}$$

Las desigualdades (3.27) y (3.28) prueban esta observación.

4. $\sum_{k\in\mathbb{N}} H_{k,l} = 0$. En efecto, por definición de $H_{k,l}$ en (3.26), tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} H_{k,l} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} P_{j+1,l}\left[\phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x)\right]\\ &= P_{j+1,l}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j+1,l})\,\mathrm{d}x\right]\\ &= P_{j+1,l}\left[\chi_{\Omega_j}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x)\right]\\ &= P_{j+1,l}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x)\\ &= P_{j+1,l}\mu - P_{j+1,l}^2\mu\\ &= 0,\end{aligned}$$

debido a que $Q^*_{j+1,l} \subseteq \Omega_{j+1} \subseteq \Omega_j$.

Construcción de las medidas átomos. Para definir las medidas que serán la base de las medidas átomos, tomamos en cuenta el siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned} G_{j+1} - G_j &= B_j - B_{j+1} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j,k}\,\mathrm{d}x) - \sum_{l\in\mathbb{N}} \phi_{j+1,l}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Entonces escribimos

$$G_{j+1} - G_j = \sum_{k\in\mathbb{N}} A_{j,k}, \tag{3.29}$$

donde las medidas $A_{j,k}$ están definidas como

$$\mathrm{d}A_{j,k} = \phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j,k}\,\mathrm{d}x) - \sum_{l\in\mathbb{N}} \phi_{j+1,l}\phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x) + \sum_{l\in\mathbb{N}} \phi_{j+1,l}H_{k,l}\,\mathrm{d}x. \tag{3.30}$$

Para cerciorarse notamos que la suma sobre k de los primeros términos nos da B_j y B_{j+1} respectivamente debido a que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \phi_{j,k} = 1$ en el soporte de $\phi_{j+1,l}$ (recordar que $\operatorname{sop}\phi_{j+1,l} \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega_j$), y finalmente $\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \phi_{j+1,l}H_{k,l}\,\mathrm{d}x = \sum_{l\in\mathbb{N}} \phi_{j+1,l}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} H_{k,l}\right)\mathrm{d}x = 0$. A continuación examinamos los términos $A_{j,k}$.

Propiedades de las medidas $A_{j,k}$

1. Las medidas $A_{j,k}$ tienen soporte en una bola $B_{j,k}$ que contiene a $Q^*_{j,k}$ y a todos los cubos $Q^*_{j+1,l}$ que intersectan a $Q^*_{j,k}$. Para convencerse, notamos que el primer término en (3.30) tiene soporte en $Q^*_{j,k}$, la primer suma en (3.30) tiene como soporte a la unión de todas las intersecciones de $Q^*_{j+1,l}$ con $Q^*_{j,k}$, $l \in \mathbb{N}$, finalmente la segunda suma tiene como soporte a la unión de todos los cubos $Q^*_{j+1,l}$ que intersectan $Q^*_{j,k}$ debido a que en este caso los polinomios $H_{k,l}$ no se cancelan (ver (1) en las observaciones a (3.26)). Por lo tanto podemos hacer la consideración de que el soporte de $A_{j,k}$ está contenido en la bola $B_{j,k}$ que contiene a $Q^*_{j,k}$ y a todos los cubos $Q^*_{j+1,l}$ que intersectan a $Q^*_{j,k}$. Además, por la observación (2) a los polinomios $H_{k,l}$ en la ecuación (3.26), podemos considerar $|B_{j,k}| = c|Q_{j,k}|$.

2. Las medidas $A_{j,k}$ son acotadas por $c2^j$. En efecto, los términos que involucran a la medida μ directamente en la definición de las medidas $A_{j,k}$ son

$$\begin{aligned}\phi_{j,k}\,\mathrm{d}\mu-\sum_{l\in\mathbb{N}}\phi_{j+1,l}\phi_{j,k}\,\mathrm{d}\mu &= \left(1-\sum_{l\in\mathbb{N}}\phi_{j+1,l}\right)\phi_{j,k}\,\mathrm{d}\mu\\ &= \chi_{\Omega_{j+1}^C}\phi_{j,k}\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

por tanto, para E medible tenemos

$$\begin{aligned}\left|\left|\left[\phi_{j,k}\mu-\sum_{l\in\mathbb{N}}\phi_{j+1,l}\phi_{j,k}\mu\right](E)\right|\right|_{\mathbb{X}} &= \left|\left|\int_E\chi_{\Omega_{j+1}^C}(x)\ \phi_{j,k}(x)\ \ \mathrm{d}\mu(x)\right|\right|_{\mathbb{X}}\\ &\leq \left|\left|\ \mu(Q_{j,k}^*\bigcap E)\ \right|\right|_{\mathbb{X}}\\ &\leq c2^j|E|,\end{aligned}$$

debido a la desigualdad (3.2). También

$$\begin{aligned}\left|\left|\left(\sum_{l\in\mathbb{N}}\phi_{j+1,l}\phi_{j,k}h_{j+1,l}\right)(E)\right|\right|_{\mathbb{X}} &\leq \int_E\left(\phi_{j,k}(x)\sum_{l\in\mathbb{N}}||\ \phi_{j+1,l}(x)\ h_{j+1,l}(x)\ ||_{\mathbb{X}}\right)\ \mathrm{d}x\\ &\leq \int_E\phi_{j,k}(x)\ c2^{j+1}M\ \ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

debido a que cada punto pertenece a lo más a M cubos $Q_{j+1,l}^*$, por tanto

$$\left|\left|\left(\sum_{l\in\mathbb{N}}\phi_{j+1,l}\phi_{j,k}h_{j+1,l}\right)(E)\right|\right|_{\mathbb{X}} \leq c2^j|E|.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\left|\left|\left(\sum_{l\in\mathbb{N}}\phi_{j+1,l}(x)H_{k,l}(x)\right)(E)\right|\right|_{\mathbb{X}} &\leq \int_E\sum_{l\in\mathbb{N}}||\ \phi_{j+1,l}(x)H_{k,l}(x)\ ||_{\mathbb{X}}\ \mathrm{d}x\\ &\leq \int_E c2^{j+1}M\,\mathrm{d}x\\ &\leq c2^j|E|.\end{aligned}$$

3. Las medidas $A_{j,k}$ satisfacen las condiciones de momento $\int_{\mathbb{R}^n}x^\alpha\,\mathrm{d}A_{j,k}(x)=0$ para todo multi-índice α tal que $|\alpha|\leq n\left\lceil\frac{1}{p}-1\right\rceil$. La condición de

momento se satisface para $\phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j,k}\,\mathrm{d}x) = \mathrm{d}b_{j,k}$. Para el resto tenemos

$$\begin{aligned} -\sum_{l\in\mathbb{N}} \phi_{j+1,l}\phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x) + \sum_{l\in\mathbb{N}} \phi_{j+1,l} H_{k,l}\,\mathrm{d}x \\ = -\sum_{l\in\mathbb{N}} \phi_{j+1,l}[\phi_{j,k}(\,\mathrm{d}\mu - h_{j+1,l}\,\mathrm{d}x) - H_{k,l}\,\mathrm{d}x]. \end{aligned}$$

Si definimos el elemento $\psi = (\mu - h_{j+1,l})\phi_{j,k}$, entonces la última suma es igual a

$$-\sum_{l\in\mathbb{N}} \phi_{j+1,l}\,(\psi - P_{j+1,l}\psi)\,.$$

De la definición del operador proyección $P_{j+1,l}$ tenemos que $\langle \phi_{j+1,l}(\psi - P_{j+1,l}\psi), q\rangle = 0$ para todo polinomio q de grado a lo más $d = n(p^{-1} - 1)$ y para toda $l \in \mathbb{N}$, de aquí que la suma $\sum_{l\in\mathbb{N}} \phi_{j+1,l}\,(\psi - P_{j+1,l}\psi)$ satisface la condición de momento, y por tanto las medidas $A_{j,k}$ satisfacen la condición de momento.

Definición de las medidas átomos y sus constantes. Hacemos

$$\begin{aligned} \lambda_{j,k} &= 2^j |B_{j,k}|^{\frac{1}{p}} \\ a_{j,k} &= \lambda_{j,k}^{-1} A_{j,k}. \end{aligned}$$

Observamos que las medidas $a_{j,k}$ tienen soporte contenido en una bola de volumen finito, son acotadas debido a que

$$\|\, a_{j,k} \,\|_{V_{\mathbb{X}}^{\infty}} = \frac{\|\, A_{j,k} \,\|_{V_{\mathbb{X}}^{\infty}}}{\lambda_{j,k}} \leq \frac{c2^j}{2^j |B_{j,k}|^{\frac{1}{p}}} = c|B_{j,k}|^{-\frac{1}{p}}.$$

Finalmente, satisfacen la condición de momento requerida debido a que las medidas $A_{j,k}$ la satisfacen.

De las ecuaciones (3.25) y (3.29) tenemos que la medida μ estará representada por

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} G_{j+1} - G_j \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} A_{j,k} \\ &= \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ k\in\mathbb{N}}} \lambda_{j,k} a_{j,k}. \end{aligned}$$

Mostramos a continuación la p-sumabilidad de la sucesión $\{\lambda_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ k\in\mathbb{N}}} |\lambda_{j,k}|^p &= \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ k\in\mathbb{N}}} 2^{jp}|B_{j,k}| \\
&= c\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ k\in\mathbb{N}}} 2^{jp}|Q^*_{j,k}| \\
&\leq cM\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jp}|\Omega_j| \\
&= cM\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jp}2^{j-1}2^{1-j}2^p2^{-p}|\Omega_j| \\
&= cM2^p\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{j-1})^{p-1}|\Omega_j| \int_{2^{j-1}}^{2^j} \mathrm{d}\lambda \\
&\leq c_{M,p}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^{j-1}}^{2^j} \lambda^{p-1}|\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}\mu(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda \\
&= c_{M,p}\int (\mathcal{M}\mu)^p\,\mathrm{d}\lambda \\
&= c_{M,p}\,||\,\mu\,||_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}}.
\end{aligned}$$

□

3.2.2. Descomposición atómica del espacio de Hardy $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.2.5. *Sea μ un elemento en el espacio de Hardy $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, $p\leq 1$, entonces existe una sucesión de números $\{\lambda_j\}$ en ℓ^p y una sucesión de medidas p-átomos $\{a_j\}$ tales que*

$$\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j a_j,$$

donde la convergencia es en el sentido de distribuciones. Además tenemos

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p \leq C\,||\,\mu\,||^p_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}}.$$

Demostración. Sea $\mu\in\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$, de la demostración al Teorema 3.1.8 podemos considerar una sucesión de medidas $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq V^1_{\mathbb{X}}\bigcap\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$ tal que $\mu_j\to$

μ en $\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$ cuando $j \to \infty$, con la condición extra de que $\|\ \mu_{j+1} - \mu_j\ \|^p_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}} \leq 2^{-j}\ \|\ \mu\ \|^p_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}}$, y consideramos $\mu_0 = 0$, por lo tanto

$$\mu \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{j+1} - \mu_j.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ el elemento $\mu_{j+1} - \mu_j$ pertenece al espacio $V^1_{\mathbb{X}} \bigcap \mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}$, por el Teorema 3.2.4 existe una descomposición atómica que la representa

$$\mu_{j+1} - \mu_j \;=\; \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \lambda_{k,l}\ a_{k,l},$$

entonces

$$\mu \;=\; \sum_{j,k,l \in \mathbb{N}} \lambda_{j,k,l}\ a_{j,k,l}. \tag{3.31}$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j,k,l \in \mathbb{N}} |\lambda_{j,k,l}|^p &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k,l \in \mathbb{N}} |\lambda_{j,k,l}|^p \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\ \mu_{j+1} - \mu_j\ \|^p_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}} \\ &\leq \|\ \mu\ \|^p_{\mathbb{H}^p_{\mathbb{X}}}. \end{aligned}$$

□

3.3. $\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \neq L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$.

Veamos a continuación que a diferencia del caso escalar el espacio $\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ incluye elementos que no son necesariamente funciones a menos que el espacio de Banach posea la propiedad de Radon-Nikodym.

Proposición 3.3.1. *Todos los elementos de $\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ son funciones (tienen como densidad una función en $L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$) si y sólo si $\mathbb{X}$ posee la propiedad de Radon-Nikodym.*

Demostración. Supongamos que todos los elementos de $\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ tienen densidad una función en $L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathbb{X}$ un espacio de Banach arbitrario. Sea Q un cubo en $\mathbb{R}^n$ y ν una medida cualquiera en $V^1_{\mathbb{X}}(Q)$. Vamos a probar que la medida ν tiene como densidad una función en $L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y esto probará que $\mathbb{X}$ posee pRN. Definimos la medida $\mu = \nu - \nu_Q \chi_Q\, \mathrm{d}x$, donde

$\nu_Q = \nu(Q)/|Q|$, entonces μ es múltiplo de un 1-átomo. En efecto, el soporte de μ está contenido en el cubo Q y satisface la condición de momento $\int_{\mathbb{R}^n} 1 \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \, \mathrm{d}\nu(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \nu_Q \chi_Q(x) \, \mathrm{d}x = 0$, y para cualquier medible $A \subseteq Q$ (y por tanto para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^n$ pues $A \bigcap Q \subseteq Q$) se tiene

$$\begin{aligned} \| \mu(A) \|_{\mathbb{X}} &\leq \| \nu(A) \|_{\mathbb{X}} + \left\| \frac{\nu(Q)}{|Q|} \right\|_{\mathbb{X}} |A| \leq \| \nu(Q) \|_{\mathbb{X}} + \left\| \frac{\nu(Q)}{|Q|} \right\|_{\mathbb{X}} |Q| \\ &= C \frac{1}{|Q|}, \end{aligned}$$

donde $C = 2 \| \nu(Q) \|_{\mathbb{X}} |Q|$. Por lo tanto μ es acotada por un múltiplo de $1/|Q|$. Ya vimos que los 1-átomos son elementos del espacio $\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ y por hipótesis existe $f \in L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathrm{d}\mu = f \, \mathrm{d}x$, pero esto implica que $\nu = [f + \nu_Q] \, \mathrm{d}x$, como queríamos probar.

El inverso es claro si recordamos que

$$\mathbb{H}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{h}^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \subseteq V^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n) \cong L^1_{\mathbb{X}}(\mathbb{R}^n),$$

pues el espacio de Banach $\mathbb{X}$ posee pRN. $\square$

3.4. Algunas pruebas.

Aquí mostramos propiedades de las funciones ϕ_k que no se incluyeron anteriormente.

Prueba de $l_k \backsimeq l_j$.

Si los cubos Q_k^* y Q_j^* se intersectan, entonces $l_k \backsimeq l_j$. En efecto, tenemos la siguiente serie de desigualdades de acuerdo a las propiedades de los cubos;

$$\sqrt{n} l_k \leq \mathrm{d}(Q_k, F) \leq \mathrm{d}(Q_k^*, F) + \frac{a^* - 1}{2} d_k \leq \mathrm{d}(x, F) + \frac{a^* - 1}{2} d_k,$$

esto es

$$\frac{3 - a^*}{2} \sqrt{n} l_k \leq \mathrm{d}(x, F), \qquad \text{para todo } x \in Q_k^*, \tag{3.32}$$

y por otro lado

$$\mathrm{d}(x, F) \leq \mathrm{d}(Q_k^*, F) + a^* d_k \leq \mathrm{d}(Q_k, F) + a^* d_k \leq (4 + a^*) \sqrt{n} l_k, \tag{3.33}$$

para todo $x \in Q_k^*$. De esta forma, si $x \in Q_k^* \bigcap Q_j^*$, entonces las desigualdades (3.32) y (3.33) implican la desigualdad

$$l_j^{-1} \leq c_{a^*} l_k^{-1}. \tag{3.34}$$

Prueba de (3.3).

Notemos que

$$\int \phi_k \leq \int_{\widetilde{Q_k}} \mathrm{d}x = \left(\frac{\widetilde{a}}{a^*}\right)^n |Q_k^*|,$$

y por otro lado

$$\int \phi_k \geq \int \frac{\varphi_k}{M} \geq \frac{1}{M}\int_{Q_k} \mathrm{d}x = \frac{1}{(a^*)^n M}|Q_k^*|.$$

Prueba de la desigualdad (3.4) .

Por la fórmula de Leibniz tenemos

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \phi_k &= \partial^\alpha \left(\varphi_k \cdot \frac{1}{\sum_j \varphi_j}\right) \\
&= \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\partial^{\alpha-\beta}\varphi_k \ \partial^\beta \left(\frac{1}{\sum_j \varphi_j}\right).
\end{aligned}$$

No es difícil ver que la función φ_k satisface la desigualdad $|\partial^\alpha \varphi_k| \leq c_\varphi l_k^{-|\alpha|}$, por lo que nos enfocamos en convencernos de la cota $\left|\partial^\alpha \left(1/\sum_j \varphi_j\right)\right| \leq c l_k^{-|\alpha|}$. Notemos que la serie $\sum_j \varphi_j$ es en realidad una suma finita debido a la propiedad de la intersección acotada, por lo tanto podemos derivarla. Utilizando la regla de la cadena tenemos

$$\partial_{i_1}\left(\frac{1}{\sum_j \varphi_j}\right) = \partial_{i_1}\left(\sum_j \varphi_j\right)^{-1} = (-1)\left(\sum_j \varphi_j\right)^{-2}\left(\sum_j l_j^{-1}\left(\partial_{i_1}\varphi\right)_j\right).$$

Si tomamos en cuenta que los términos $\left(\partial_{i_1}\varphi\right)_j$ que no se cancelan corresponden a los índices j tales que los cubos Q_j^* intersectan a Q_k^*, entonces por (3.34) tenemos

$$\left|\partial_{i_1}\left(\frac{1}{\sum_j \varphi_j}\right)\right| \leq c_\varphi \sum_j l_j^{-1} \ \leq \ c_\varphi \sum_j c_{a^*} l_k^{-1} = c_{\varphi,a^*,M} l_k^{-1}.$$

De esta forma se cumple la desigualdad deseada cuando $|\alpha| = 1$.

Si derivamos dos veces la función $1/\sum_j \varphi_j$ tendremos términos de la forma

$$\left(\sum_j \varphi_j\right)^{-3}\left(\sum_{i,j} l_i^{-1} l_j^{-1} \left(\partial_{i_2}\varphi\right)_i \left(\partial_{i_1}\varphi\right)_j\right) \tag{3.35}$$

$$\left(\sum_j \varphi_j\right)^{-2}\left(\sum_{j} l_j^{-2} \left(\partial_{i_2}\partial_{i_1}\varphi\right)_j\right). \tag{3.36}$$

Con el mismo argumento de arriba, tenemos que $\left|\partial^\alpha\left(1/\sum_j \varphi_j\right)\right| \leq c_{\varphi,a^*,M,\alpha} l_k^{-2}$ cuando $|\alpha| = 2$.

Si derivamos tres veces la función $1/\sum_j \varphi_j$, es lo mismo que derivar una vez a los términos en (3.35) y (3.36). No es difícil comprobar que se obtienen términos de la forma

$$\left(\sum_j \varphi_j\right)^{-4}\left(\sum_{i,j,m} l_i^{-1} l_j^{-1} l_m^{-1} \left(\partial_{i_3}\varphi\right)_i \left(\partial_{i_2}\varphi\right)_j \left(\partial_{i_1}\varphi\right)_m\right) \tag{3.37}$$

$$\left(\sum_j \varphi_j\right)^{-3}\left(\sum_{i,j} l_i^{-1} l_j^{-2} \left[\left(\partial_{i_1}\varphi\right)_i \left(\partial_{i_3}\partial_{i_2}\varphi\right)_j + \left(\partial_{i_2}\varphi\right)_i \left(\partial_{i_3}\partial_{i_1}\varphi\right)_j + \left(\partial_{i_3}\varphi\right)_i \left(\partial_{i_2}\partial_{i_1}\varphi\right)_j\right]\right) \tag{3.38}$$

$$\left(\sum_j \varphi_j\right)^{-2}\left(\sum_{j} l_j^{-3} \left(\partial_{i_3}\partial_{i_2}\partial_{i_1}\varphi\right)_j\right) \tag{3.39}$$

Por tanto $\left|\partial^\alpha\left(1/\sum_j \varphi_j\right)\right| \leq c_{\varphi,a^*,M,\alpha} l_k^{-3}$ cuando $|\alpha| = 3$.

Cuando el orden de α es 4, aparecerán términos con factores $l_i^{-1} l_j^{-1} l_m^{-1} l_o^{-1}$, $l_i^{-1} l_j^{-1} l_m^{-2}$, $l_i^{-2} l_j^{-2}$, $l_i^{-1} l_j^{-3}$ y l_j^{-4}, y con el mismo argumento tendremos $\left|\partial^\alpha\left(1/\sum_j \varphi_j\right)\right| \leq c_{\varphi,a^*,M,\alpha} l_k^{-4}$, cuando $|\alpha| = 4$.

Así argumentamos que la cota deseada se cumple, y por tanto tenemos la validez de la desigualdad (3.4).

Capítulo 4

Espacios de Hardy con valores en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

4.1. Algunos resultados de espacios de Hardy con valores en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

A lo largo de este capítulo consideraremos $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, y $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ el espacio de operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$ en si mismo. Ahora veamos algunas propiedades de los elementos de $\mathfrak{h}^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, (ver [22]).

Proposición 4.1.1. *Sea $u \in \mathfrak{h}^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, entonces existe una función $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tal que $u(x,t) \to u_0(x)$ en la topología fuerte de operadores , esto es $u_0(x)\xi = \lim_{t\to 0} u(x,t)\xi$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo elemento $\xi \in \mathcal{H}$. Además u_0 es medible si y sólo si la convergencia es en la topología generada por la norma de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ y en este caso $u_0 \in \mathbb{H}^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Para cada $\xi \in \mathcal{H}$ definimos $u_\xi : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathcal{H}$ como el mapeo $(x,t) \mapsto u(x,t)\xi$, y notamos que $u_\xi \in \mathfrak{h}^1_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Debido a que un espacio de Hilbert tiene la propiedad de Radon Nikodym, (ver [13]), tenemos que el límite $\lim_{t\to 0} u_\xi(x,t)$ existe en $L^1_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sea $L = \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal en $\mathcal{H}$. Por lo tanto para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto A_k de $\mathbb{R}^n$ de medida completa (esto es $|A_k^C| = 0$) en donde $\lim_{t\to 0} u_{\xi_k}(\cdot,t)$ existe. Para $k = 0$, definimos $A_0 = \{x : \mathcal{M}_{nt}u(x) < \infty\}$. A_0 es de medida completa debido a que $\mathcal{M}_{nt}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Consideramos

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k. \tag{4.1}$$

Entonces A es de medida completa en $\mathbb{R}^n$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ definimos el mapeo $u_0(x)$ sobre $\mathcal{H}_0 = \mathfrak{gl}\{L\}$, el generado lineal de L, mediante

$$u_0(x)\xi \;=\; \begin{cases} \text{lím}_{t\to 0} u_\xi(x,t) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Veamos que la función u_0 está bien definida. Esto es claro cuando $x \notin A$. Cuando $x \in A$ el operador $u_0(x)$ está bien definido en el conjunto L, y debido a la linealidad del operador $u(x,t)$ y del límite tenemos que $u_0(x)$ está bien definido y es acotado en el espacio $\mathcal{H}_0$. En efecto

$$\begin{aligned} \|\, u_0(x)\xi \,\|_{\mathcal{H}} &= \left\| \lim_{t\to 0} u(x,t)\xi \right\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \sup_{t>0} \|\, u(x,t)\xi \,\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \sup_{t>0} \|\, u(x,t) \,\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} \|\, \xi \,\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \mathcal{M}_{nt}u(x) \|\, \xi \,\|_{\mathcal{H}} . \end{aligned}$$

Podemos ahora extender el operador $u_0(x)$ a todo el espacio $\mathcal{H}$ mediante el límite. Sea $\xi \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_0$ y $\{\xi_i\}$ una sucesión en $\mathcal{H}_0$ tal que ξ_i converge a ξ. Ya vimos que

$$\|\, u_0(x)\xi_i - u_0(x)\xi_j \,\|_{\mathcal{H}} \;\leq\; \mathcal{M}_{nt}u(x) \|\, \xi_i - \xi_j \,\|_{\mathcal{H}} ,$$

de donde obtenemos que la sucesión $\{u_0(x)\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{H}$ y por tanto la sucesión converge a un elemento de $\mathcal{H}$. Notemos que el elemento ξ_0 no depende de la sucesión $\{\xi_i\}$ que converge a ξ, por tanto el elemento

$$u_0(x)\xi \;=\; \lim_{i\to\infty} u_0(x)\xi_i,$$

está bien definido y es acotado. Queda probado así que $u_0(x)$ es un elemento de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ además de que genera a la función u ;

$$u(x,t)\xi = u_\xi(x,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\; u_0(y)\xi \,\mathrm{d}y, \qquad \xi \in \mathcal{H}, \qquad (4.2)$$

y queda probada la primera parte de la Proposición.

Ahora supongamos que u_0 es medible, entonces probaremos que u_0 es Bochner integrable, y por tanto pertenece al espacio $L^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^n)$. Por último probaremos la convergencia $u \to u_0$ en el espacio $L^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^n)$, de donde concluiremos que la convergencia es en norma.

Sea $x \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
\| u_0(x) \|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} &= \sup_{\| \xi \|_{\mathcal{H}} \leq 1} \| u_0(x)\xi \|_{\mathcal{H}} \\
&= \sup_{\| \xi \|_{\mathcal{H}} \leq 1} \left\| \lim_{t\to 0} u(x,t)\xi \right\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \sup_{\| \xi \|_{\mathcal{H}} \leq 1} \sup_{t>0} \| u(x,t) \|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} \| \xi \|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \mathcal{M}_{nt}u(x).
\end{aligned}$$

Por hipótesis $\mathcal{M}_{nt}u$ es una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$, por tanto $\| u_0 \|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}$ está en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Una función medible y con norma integrable es una función Bochner integrable, además u_0 pertenece al espacio $L^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^n)$.

Veamos a continuación que la función u converge a u_0 en la topología del espacio $L^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^n)$ mostrando que la función u puede ser representada como una integral de Poisson de la función u_0.

Si definimos la función $v(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)u_0(y)\,\mathrm{d}y$, entonces v está bien definida en $\mathbb{R}^{n+1}_+$, toma valores en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, es armónica y $v(\cdot,t)$ converge a u_0 en el espacio $L^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto $v(x,t)\xi = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)u_0(y)\xi\,\mathrm{d}y$. Pero de esta última ecuación y (4.2) tenemos que $u = v$, esto implica que $u(\cdot,t)$ converge a u_0 en $L^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^n)$, es decir, converge en la topología fuerte de operadores.

Inversamente, si u converge a u_0 en norma, entonces u_0 hereda la medibilidad de u debido a que las funciones $u_t = u(\cdot,t)$ son medibles para todo $t > 0$.

$\square$

Observación 4.1.2. Existe al menos una función que es el límite frontera en la topología fuerte de operadores en los espacios de Hardy $\mathfrak{h}^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ que no es medible.

En efecto, si suponemos lo contrario tendríamos que $\lim_{t\to 0} u(\cdot,t)$ existiría en norma para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Pero esto último implicaría que $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tiene la propiedad Radon Nikodym, lo que se sabe es falso.

Para ver la pRN en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ a partir de la medibilidad de toda función límite se procede de manera similar que en la Proposición 3.3.1. Sea $\nu \in V^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(Q)$ y definimos $\mu = \nu - \nu_Q\,\mathrm{d}x$ que es un átomo en $\mathbb{H}^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}$ y por lo tanto la función $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ pertenece al espacio de Hardy $\mathfrak{h}^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Pero por hipótesis $u_0 = \lim_{t\to 0} u(\cdot,t)$ es una función medible y la convergencia es en norma, por lo que obtenemos que la medida μ tiene como densidad la función u_0. Por lo tanto la medida ν tiene como densidad la función $u_0 + \nu_Q$.

A continuación se dan condiciones que implican que una función $u : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ sea armónica.

Para $x \in \mathbb{R}^n$ escribiremos $x = |x|\dfrac{x}{|x|} = rx'$, $x' \in S^{n-1}$ la esfera en $\mathbb{R}^n$ con radio 1. σ denotará la medida de área de S^{n-1}.

Observemos que toda función armónica v en la bola unitaria B con valores en un espacio de Banach $\mathbb{X}$ que es continua en $\overline{B}$ tiene la expansión (ver [1], [30])

$$v(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_k} a_{k,j} Y_j^k(x), \tag{4.3}$$

donde la convergencia es absoluta y uniformemente sobre subconjuntos compactos de B, $\{Y_j^k\}$ es una base ortonormal de $L^2(S^{n-1})$ consistiendo de esféricos armónicos reales, d_k es la dimensión de los zonales armónicos de grado k y los coeficientes

$$a_{k,j} \;=\; \int_{S^{n-1}} v(x')Y_j^k(x')\,\mathrm{d}\sigma(x') \;\in\; \mathbb{X}. \tag{4.4}$$

La expansión (4.3) se deduce a partir de que podemos representar a v (al igual que en el caso escalar) mediante la integral sobre la frontera de B,

$$v(x) \;=\; \int_{S^{n-1}} v(y')P(x,y')\,\mathrm{d}\sigma(y')$$

y el núcleo de Poisson tiene expansión

$$P(x,y') \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_k} Y_j^k(x)Y_j^k(y'), \qquad x \in B, y' \in S^{n-1}.$$

Lema 4.1.3. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $u : \Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ una función localmente acotada tal que $u(\cdot)\xi$ es armónica para cada $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces u es armónica en Ω.*

Demostración. Sea $B(x,r)$ cualquier bola abierta tal que u es acotada en $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ y sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $B(x,r) = B$. Sea C tal que $\| u(x) \|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} \leq C$ para $x \in \overline{B}$, la cual existe por hipótesis, también por hipótesis tenemos que $u(\cdot)\xi$ es armónica en $\overline{B}$, por tanto

$$u(x)\xi \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_k} a_{k,j}(\xi)Y_j^k(x).$$

De la fórmula para los coeficientes $a_{k,j}$ en (4.4) observamos que $\|\, a_{k,j}\xi \,\|_{\mathcal{H}} \leq C\omega_{n-1} \|\, \xi \,\|_{\mathcal{H}}$, donde ω_{n-1} es el área de S^{n-1}, por lo que $\|\, a_{k,j} \,\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} \leq c$ para todo k y j de donde obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_k} \|\, a_{k,j}Y_j^k(x) \,\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} \;\leq\; c\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_k} |Y_j^k(x)|,$$

que convergen uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\overline{B}$. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_k} a_{k,j}Y_j^k(x)$ converge absoluta y uniformemente a $u(x)$, de esta forma vemos que la función u puede ser representada como una serie de funciones armónicas, por lo que ella misma es armónica. □

Observamos que si $u : \Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es armónica, entonces para cada $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, la función $\langle \xi, u(\cdot)^*\eta\rangle = \langle u(\cdot)\xi, \eta\rangle$ es armónica, entonces la función $x \mapsto u(x)^*\eta$ es una función $\mathcal{H}$-valuada y tenemos que es débilmente armónica y por la Proposición 1.1.2 es armónica, entonces si definimos la función u^* como $u^*(x) = u(x)^*$ el Lema 4.1.3 nos implica que u^* es armónica en Ω. También se tiene la igualdad $\mathcal{M}_{nt}u = \mathcal{M}_{nt}u^*$.

Observación 4.1.4. Toda función $u : \Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ puede ser representada como

$$u \;=\; u_1 + iu_2, \tag{4.5}$$

donde cada u_j es armónica y $u_j(x)$ es autoadjunto para cada $x \in \Omega$ y $j = 1, 2$.

En efecto, consideramos $u_1 = (u + u^*)/2$ y $u_2 = i(u^* - u)/2$. También tenemos que si $u \in \mathfrak{h}^p_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}$, entonces $\|\, u_j \,\|_{\mathfrak{h}^p_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}} \leq c_p \|\, u \,\|_{\mathfrak{h}^p_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}}$, $j = 1, 2$. A continuación vamos a probar que para $p = 1$, cada u_j puede ser mayorizado en el orden parcial de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ por una función armónica tomando todos sus valores en el cono de operadores positivos.

Proposición 4.1.5. *Sea $u \in \mathfrak{h}^1_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})}$ tal que $u(x,t)$ es autoadjunto para cada $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Entonces existe $v : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tal que $v(x,t) \geq 0$ y $u(x,t) \leq v(x,t)$ para cada $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$.*

Demostración. Sea u_0 como en la Proposición 4.1.1. Entonces tenemos que $\lim_{t\to 0} u(\cdot,t) = u_0$ existe sobre un conjunto de medida completa. Por tanto también tenemos $\lim_{t\to 0} u(\cdot,t)^2 = u_0^2$, lo que nos implica que para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ y toda $\xi \in \mathcal{H}$ se cumple $\lim_{t\to 0} |u(x,t)|\xi = |u_0(x)|\xi$, donde $|u| = \sqrt{u^2}$, (ver [25]). También tenemos que

$$\|\, |u(x,t)|\xi \,\|_{\mathcal{H}} \leq \|\, u(x,t)\xi \,\|_{\mathcal{H}} \leq \mathcal{M}_{nt}u(x) \|\, \xi \,\|_{\mathcal{H}},$$

de donde deducimos que $|u_0(x)|\xi \leq \mathcal{M}_{nt}u(x) \,||\, \xi \,||_{\mathcal{H}}$ y por lo tanto $|u_0(\cdot)|\xi \in L^1_{\mathcal{H}}$.

Para $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ sea $v(x,t)$ un mapeo lineal sobre $\mathcal{H}$ definido mediante

$$v(x,t)\xi \;\;=\;\; \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)|u_0(y)|\xi \, \mathrm{d}y.$$

Observemos que $||\, v(x,t)\xi \,||_{\mathcal{H}} \leq ||\, \xi \,||_{\mathcal{H}} \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\mathcal{M}_{nt}u(y)\, \mathrm{d}y \leq c_u \,||\, \xi \,||_{\mathcal{H}}$. Entonces por el Lema 4.1.3 la función $v(x,t)$ es armónica con valores en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ y satisface

$$\langle v(x,t)\xi, \xi\rangle \;\;=\;\; \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\langle |u_0(y)|\xi, \xi\rangle \;\geq\; 0.$$

Por otro lado, el teorema espectral nos dice que $u_0(x) \leq |u_0(x)|$ en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, lo que nos implica $u(x,t) \leq v(x,t)$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, como queríamos probar. □

Bibliografía

[1] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic function theory*, volume 137 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001.

[2] K. Bichteler. *Integration theory (with special attention to vector measures)*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 315. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[3] O. Blasco. Hardy spaces of Banach-space-valued functions depending on the geometry of the Banach space. *Extracta Math.*, 1(1):25–27, 1986.

[4] O. Blasco. Boundary values of vector-valued harmonic functions considered as operators. *Studia Math.*, 86(1):19–33, 1987.

[5] O. Blasco. Boundary values of functions in vector-valued Hardy spaces and geometry on Banach spaces. *J. Functional Analysis*, 78(2):346–364, 1988.

[6] O. Blasco. Hardy spaces of vector-valued functions: duality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 308(2):495–507, 1988.

[7] O. Blasco. Vector-valued harmonic functions and cone absolutely summing operators. *Illinois J. Math.*, 33(2):292–300, 1989.

[8] O. Blasco and J. García-Cuerva. Hardy classes of Banach-space-valued distributions. *Math. Nachr.*, 132:57–65, 1987.

[9] J. Bourgain. Vector-valued singular integrals and the H^1-BMO duality. In *Probability theory and harmonic analysis (Cleveland, Ohio, 1983)*, volume 98 of *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.*, pages 1–19. Dekker, New York, 1986.

[10] A. V. Bukhvalov and A. A. Danilevich. Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in a Banach space. *Mat. Zametki*, 31(2):203–214, 317, 1982.

[11] D. L. Burkholder, R. F. Gundy, and M. L. Silverstein. A maximal function characterization of the class H^p. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 157:137–153, 1971.

[12] R. R. Coifman. A real variable characterization of H^p. *Studia Math.*, 51:269–274, 1974.

[13] J. Diestel and Jr. J. J. Uhl. *Vector measures*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977. With a foreword by B. J. Pettis, Mathematical Surveys, No. 15.

[14] N. Dinculeanu. *Vector measures*. International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 95. Pergamon Press, Oxford, 1967.

[15] C. Fefferman and E. M. Stein. H^p spaces of several variables. *Acta Math.*, 129(3-4):137–193, 1972.

[16] M. Folch-Gabayet, M. Guzmán-Partida, and S. Pérez-Esteva. Lipschitz measures and vector-valued Hardy spaces. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 25(5):345–356, 2001.

[17] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104.

[18] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2008.

[19] S. Kwapień. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia Math.*, 44:583–595, 1972.

[20] R. H. Latter. A characterization of $H^p(\mathbf{R}^n)$ in terms of atoms. *Studia Math.*, 62(1):93–101, 1978.

[21] T. Ma. *Banach-Hilbert spaces, vector measures and group representations*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002.

[22] T. Mei. Operator valued Hardy spaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 188(881):vi+64, 2007.

[23] L. Meziani. On the dual space $C_0^*(S, X)$. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 78(1):153–160, 2009.

[24] S. Pérez-Esteva and J. Rivera-Noriega. Vector-valued Hardy spaces in non-smooth domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 330(1):388–405, 2007.

[25] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980. Functional analysis.

[26] L. Schwartz. Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. *J. Analyse Math.*, 4:88–148, 1954/55.

[27] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, volume 30 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[28] E. M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[29] E. M. Stein and G. Weiss. On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H^p-spaces. *Acta Math.*, 103:25–62, 1960.

[30] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, volume 32 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[31] F. Trèves. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2006. Unabridged republication of the 1967 original.

[32] R. L. Wheeden and A. Zygmund. *Measure and integral*. Marcel Dekker Inc., New York, 1977. An introduction to real analysis, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43.

[33] K. Yosida. *Functional analysis*, volume 123 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 1980.