



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

**Dinámica Compleja:
Un acoplamiento parabólico – poscríticamente
finito**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO(A) EN CIENCIAS

P R E S E N T A

Rodrigo Robles Montero

Dr. Guillermo Javier Francisco Sienna Loera

MÉXICO, D.F.

MARZO, 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



AA

A Dinobito, mi hermanito.

Ojalá, algún día, sea tan fuerte como tú.

Índice

Prefacio	iii
1 Introducción a la Dinámica Compleja	1
2 Rayos Externos	7
3 Acoplamientos	
3.1 Acoplamientos Topológicos	13
3.2 Acoplamientos Geométricos	17
4 Un acoplamiento con Elemento Poscríticamente Infinito	
4.1 Dinámica de los Polinomios	21
4.2 Acoplamiento de los Polinomios	23
Bibliografía	31

Prefacio

En 1915, la *Académie des Sciences* de Francia anuncia que el tema de investigación de su *Grand Prix des Sciences mathématiques* sería la iteración de funciones, haciendo énfasis en un análisis global. Los trabajos de Gaston Julia, *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*, y de Pierre Fatou, *Sur les équations fonctionnelles*, sobresaldrían por su estudio y se volverían el cimiento de la Dinámica Compleja (u Holomorfa). Véase [Alexander 1994]. Debido a la incapacidad de clasificar las componentes de Fatou y la existencia de Discos de Siegel (probado en los 1940's), el campo sufrió una inactividad mayor hasta los años 1980's cuando se revitalizó con los trabajos de Douady, Hubbard, Sullivan (prueba la inexistencia de Dominios Errantes para funciones racionales), Milnor y Thurston y también gracias al poder masivo de cálculo y graficación de las computadoras que permitieron ver que junto al comportamiento caótico de la dinámica, habían unos objetos de infinita belleza y complejidad, los fractales, formas de auto similitud muy comunes en la naturaleza.

En la actualidad se han construido conjuntos de Julia de medida positiva, se han hecho progresos considerables para demostrar la conjetura MLC (el conjunto de Mandelbrot es localmente conexo), se han entendido con mayor profundidad rebanadas de espacios paramétricos y se ha aplicado la teoría pluri-potencial a la dinámica multidimensional. Además, la Dinámica Compleja se relaciona fuertemente con Grupos Kleinianos, Teoría de Teichmüller y Geometría Hiperbólica y Compleja. Véase [Bonifant Lyubich Sutherland 2011].

Pasando del contexto histórico al personal, fue en la Conferencia de Banff de [Bonifant Lyubich Sutherland 2011] donde conocí por primera vez el acoplamiento entre dos polinomios, el contexto no me era desconocido pues la base eran los rayos externos, los cuales había conocido en mi Tesis de Licenciatura [Montero 2008], y me impresionó el hecho de como de dos fractales se podía obtener uno nuevo por medio de un cociente topológico, en este caso los fractales eran conjuntos de Julia. Cuando regresé mi tutor, Guillermo Sienna, me propuso estudiarlos para la tesina.

Así que, esta tesina está dividida en cuatro capítulos: el primero es una introducción general a la Dinámica Compleja, el segundo presenta las bases para la construcción de los rayos externos de polinomios complejos con conjuntos de Julia localmente conexos, el tercero es sobre acoplamientos topológicos y geométricos y los resultados obtenidos por Mary Rees, Tan Lei y Mitsuhiro Shishikura para polinomios cuadráticos poscríticamente finitos. El cuarto capítulo presenta un acoplamiento geométrico con un polinomio poscríticamente infinito (la coliflor de $z^2 + \frac{1}{4}$) y uno finito (el intervalo de $z^2 - 2$), es decir, fuera de las hipótesis del teorema. Este es un ejemplo original de Guillermo y mío, y se escribirá un artículo para su publicación.

Rodrigo R. Montero

Ciudad de México, Febrero 2012

1 Introducción a la Dinámica Compleja

Los sistemas dinámicos han sido estudiados por la humanidad desde hace mucho tiempo debido a su relación natural con el Universo en el que vivimos. El concepto intuitivo de sistema dinámico involucra un espacio con objetos en él, los cuales se mueven por dicho espacio de algún modo según transcurre el tiempo. Nótese la ambigüedad en esto, ¿qué es un espacio? ¿qué son los objetos? ¿qué es el movimiento? ¿qué es el tiempo? Nos interesaremos sólo en el aspecto matemático de la cuestión, así que daremos una definición:

Definición 1.1

Diremos que una tríada (T, X, F) es un sistema dinámico si T es un monoide (existe una función $+$: $T \times T \rightarrow T$, que es asociativa y tiene un elemento neutro en T), X es un conjunto y F es una función $F : T \times X \rightarrow X$, los cuales satisfacen:

1. $F(0, x) = x$
2. $F(t_2, F(t_1, x)) = F(t_1 + t_2, x)$

Llamaremos a la función $F(t, x)$ la función evolución del sistema dinámico (el movimiento), la cual asocia a todo punto del conjunto X una única imagen que depende de la variable t , a la cual llamaremos parámetro de evolución (el tiempo), el conjunto X será el espacio fase (el espacio y los objetos), y la variable x representa un estado inicial del sistema.

Nótese el parecido de esta definición con la acción de grupos en un conjunto, la diferencia es que T es un monoide y no un grupo. Esta definición nos da más libertad que la acción de grupos porque no necesitamos un inverso en T que asocie una única imagen, lo cual nos es necesario porque las funciones que usaremos en Dinámica Compleja rara vez son invertibles de manera global.

El sistema dinámico en el que trabajaremos estará dado por $T = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $X = \hat{\mathbb{C}} = S^2$, $F(n, z) = f^n(z) = f \circ \dots \circ f(z)$ con $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional, a este sistema le denominaremos Dinámica Compleja de una variable compleja generada por f . Cuando la función f no es invertible hablar de f^{-n} no tiene sentido si la queremos ver como función, y si la vemos como imagen inversa, no tiene porque asociar a un solo punto de X una única imagen dependiente de $-n$. Sin embargo, estudiar las imágenes inversas sí proporciona información valiosa sobre la Dinámica Compleja de f , así que denotaremos a $f^{-n}(z)$ como la imagen inversa de z bajo n composiciones de f .

Una de las metas principales de la Dinámica Compleja es entender el comportamiento final o asintótico del proceso iterativo. En este caso tenemos un proceso discreto y queremos estudiar el comportamiento de los puntos $z, f(z), f^2(z), \dots$, que vistos como un conjunto motiva la siguiente definición.

Definición 1.2

La órbita hacia adelante u órbita de z bajo f consiste en el conjunto de puntos

$$Orb_f(z) = Orb(z) = \{f^n(z) : n \in \mathbb{N}\} = \{z_n\}.$$

Las órbitas pueden ser conjuntos muy complicados, incluso para funciones no lineales muy simples como las que hay en el círculo unitario bajo z^2 , sin embargo hay algunas órbitas muy simples que serán esenciales en nuestro estudio.

Definición 1.3

1. z es un punto fijo de f , si $f(z) = z$. Y el conjunto de puntos fijos de f es $Fix(f)$.
2. z es un punto periódico de f de período n , si $f^n(z) = z$ donde n es el menor entero positivo donde esto sucede. Y el conjunto de puntos periódicos de período n es $Per_n(f)$. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico es una órbita periódica.
3. z es eventualmente periódico de período n en f , si z no es periódico pero existe $m > 0$ tal que $f^{n+i}(z) = f^i(z)$ para toda $i \geq m$.
4. z asintótico a p en f , si $\lim_{i \rightarrow \infty} d(f^i(z), f^i(p)) = 0$.

Si tenemos un disco abierto lo suficientemente pequeño D alrededor de un punto periódico z_0 de período n y f es una función holomorfa en z_0 , la derivada de la función f^n , rotará y, ampliará o contraerá, el disco D en un factor $|(f^n)'(z_0)|$, véase [Needham 1997], es decir, por definición de derivada, de manera aproximada tenemos que

$$|f^n(z) - z_0| = |f^n(z) - f^n(z_0)| = |(f^n)'(z_0)| |z - z_0|.$$

Esto nos permite estudiar el comportamiento de las órbitas de puntos cercanos a un punto periódico z_0 . Si $|(f^n)'(z_0)| < 1$, las órbitas de los puntos cercanos a z_0 se acercarán a él, si $|(f^n)'(z_0)| > 1$, las órbitas de los puntos cercanos a z_0 se alejarán de él. Además, esta órbita periódica $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ cumple $(f^n)'(z_i) = f'(z_0)f'(z_1) \cdots f'(z_{n-1})$, por la regla de la cadena, es decir, la derivada en cualquier punto de la órbita es el mismo. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.4

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto periódico de período n de f . El multiplicador de la órbita de z_0 se define como $\lambda = (f^n)'(z_0)$. Si $z_0 = \infty$, el multiplicador se define como $\lambda(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{(f^n)'(z)}$. Y decimos que la órbita periódica es: atractora si $0 < |\lambda| < 1$, repulsora si $|\lambda| > 1$, indiferente si $|\lambda| = 1$, superatractora si $|\lambda| = 0$.

En muchas ramas de las matemáticas existe un concepto que hace su aparición una y otra vez, en Sistemas Dinámicos este concepto es clave pues transmite distintos tipos de información dinámica entre dos sistemas dinámicos. Esto es muy útil si tenemos dos sistemas con la misma información dinámica y uno es más fácil de estudiar.

Definición 1.5

Dos funciones complejas f, g son conjugadas si existe $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ invertible tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$. Para funciones racionales, si ϕ es conforme entonces f y g son equivalentes o isomorfas. ϕ es la conjugación de f y g .

La calidad de ϕ determina la cantidad de estructura de f que es preservada, por ejemplo, estructura topológica, medible, quasiconforme, conforme, etc. Además la conjugación:

- Preserva puntos fijos y puntos periódicos, pues $z = f(z) \Leftrightarrow \phi(z) = \phi \circ f(z) = g \circ \phi(z) \Leftrightarrow \phi(z) = g(\phi(z))$.
- Se mantiene bajo iteración, pues bajo invertibilidad $g^n = \phi \circ f^n \circ \phi^{-1}$.
- Da una correspondencia biyectiva entre $Per_n(f)$ y $Per_n(g)$, pues ϕ es biyectiva.
- Si ϕ es conforme preserva multiplicadores, pues si $f(z_0) = z_0$ entonces

$$[\phi \circ f(z_0)]' = [g \circ \phi(z_0)]' \Leftrightarrow \phi'(f(z_0))f'(z_0) = g'(\phi(z_0))\phi'(z_0) \Leftrightarrow f'(z_0) = g'(\phi(z_0)).$$

Por tanto, al estar trabajando en la esfera de Riemann, resulta conveniente saber cuales son todos los automorfismos de S^2 . El siguiente teorema nos dice cuales son y se puede ver una demostración en [Milnor 2006].

Teorema 1.6

El grupo $G(\hat{\mathbb{C}})$ de todos los automorfismos conformes de la esfera de Riemann es igual al grupo de todas las transformaciones de Möbius

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0,$$

el cual es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$, el grupo de las matrices en \mathbb{C} de 2×2 y determinante uno, módulo $\{\pm I\}$.

De aquí se deduce que si f y g son funciones racionales equivalentes, el grado de f es el mismo que el grado de g .

Ahora hablaremos de los dos conjuntos fundamentales en Dinámica Compleja, estos son complementarios y sólo en uno de ellos estará contenida la órbita de cualquier punto, el conjunto de Fatou donde la dinámica se “comporta bien” y el conjunto de Julia donde la dinámica es “caótica”. Para introducir estos conjuntos necesitamos dos definiciones:

Definición 1.7

Decimos que una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ definidas de un espacio métrico a otro convergen uniformemente a una función $f(x)$ en un conjunto E del dominio, si para toda $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > n_0$ y para toda $x \in E$, $|d(f_n(x), f(x))| < \varepsilon$. Además si para cada $x \in E$ existe un abierto en el que $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)$, decimos que $\{f_n(x)\}$ converge uniforme y localmente en E .

En la convergencia uniforme y local, es equivalente pedir conjuntos compactos en lugar de abiertos en cada $x \in F$.

Definición 1.8

Una familia de funciones \mathcal{F} de un espacio métrico X a otro espacio métrico es una familia normal si toda sucesión infinita de funciones de \mathcal{F} contiene una subsucesión que converge uniforme y localmente en X a una función f , la cual no necesariamente está en \mathcal{F} .

En nuestro caso, los dos espacios métricos son la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, y se puede pensar en la convergencia uniforme en términos de la métrica cordal o esférica, o la métrica euclídeana usual de \mathbb{C} , con el agregado de que la sucesión puede divergir uniforme y localmente al infinito. Además para familias de funciones holomorfas de $\hat{\mathbb{C}}$ en sí mismo tenemos el siguiente resultado que permite determinar familias normales bajo condiciones extremadamente sencillas. Una prueba de este teorema se puede ver en [Milnor 2006] y [Gamelin 2001].

Teorema 1.9 [Montel]

Sea S una superficie de Riemann y \mathcal{F} una familia de funciones holomorfas $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, cada una de las cuales omite tres valores distintos $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$, entonces \mathcal{F} es una familia normal.

Una superficie en la que usualmente se usa este teorema es en una región de $\hat{\mathbb{C}}$, un conjunto abierto y conexo.

En el contexto de la dinámica compleja, esta familia de funciones estará compuesta por las iteraciones de la función holomorfa f . Así que la normalidad en estas iteraciones de f en algún conjunto nos indica que hay una regularidad en la dinámica de la función, expresada en el hecho de que hay una convergencia uniforme y local en alguna subsucesión $\{f^n\}$ a otra función F , que también resulta ser holomorfa por el Teorema de Weierstrass.

Definición 1.10

Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función. Se define al dominio de normalidad para la familia de iteraciones $\{f^n\}$ como el conjunto de Fatou $F(f) = F$ y a su complemento $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$ como el conjunto de Julia $J(f) = J$.

Esto nos lleva a la siguiente dicotomía local básica. Si en $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ existe alguna vecindad U tal que $\{f^n\}$ restringidas a U forman una familia normal que van a $\hat{\mathbb{C}}$, entonces $z_0 \in F(f)$. Si esta vecindad no existe, entonces $z_0 \in J(f)$.

Por definición de normalidad, el conjunto de Fatou F es abierto y el conjunto de Julia J es cerrado.

Veamos un ejemplo sencillo: $f(z) = z^2 = r^2 e^{i2\theta}$, con $f^n(z) = z^{2^n} = r^{2^n} e^{i2^n\theta}$. Lo que implica que si $r < 1$ o $r > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{2^n}$ es 0 o ∞ , respectivamente. Es decir, el disco abierto unitario \mathbb{D} y $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ están contenidos en el conjunto de Fatou F , pues cualquier subsucesión de $\{z^{2^n}\}$ converge uniforme y localmente a la función constante 0 e ∞ , respectivamente. Y ahora, usando la dicotomía local de arriba, si z_0 está en el círculo unitario S^1 , cualquier vecindad se partirá en tres pedazos: el pedazo que está contenido en \mathbb{D} convergerá a la constante 0, el pedazo que está contenido $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ convergerá a la constante ∞ , y el tercer pedazo se quedará en S^1 , por lo que el resultado, en caso de que sea función, no es una función continua en S^1 , de hecho resultará que la unión de todas estas imágenes es $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$. Por tanto $S^1 \subseteq J$. Y como ya hemos usado toda la esfera de Riemann tenemos que $F = \hat{\mathbb{C}} \setminus S^1$ y $J = S^1$. En este caso, el conjunto de Julia resultó ser una variedad, pero esto es inusual pues sólo hay dos variedades más que pueden ser el conjunto de Julia de funciones racionales de grado $d \geq 2$: el intervalo cerrado y $S^2 = \hat{\mathbb{C}}$.

Ahora expondremos una serie de conceptos y propiedades de los conjuntos de Julia y de Fatou, esto nos dará una idea general suficientemente sólida para empezar a entender que son estos conjuntos. No pondremos pruebas de estos resultados, pero éstas pueden encontrarse en [Milnor 2006], a menos que se exprese algo distinto.

Lema 1.11

Los conjuntos de Julia J y de Fatou F bajo una función racional $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ son completamente invariantes, es decir, $f(J) = J = f^{-1}(J)$ y $f(F) = F = f^{-1}(F)$.

Lema 1.12

Para toda $k > 0$, los conjuntos de Julia $J(f^k)$ y de Fatou $F(f^k)$ de la k –ésima iteración de f , son los mismos que el conjunto de Julia $J(f)$ y de Fatou $F(f)$ de f .

Definición 1.13

Sea Orb_f una órbita atractora o superatractora de período n , definimos su cuenca de atracción como el conjunto abierto $\mathcal{A} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ compuesta de todos los puntos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ cuyas iteraciones $f^n(z), f^{2n}(z), \dots$ convergen a un punto de Orb_f , es decir, \mathcal{A} es el conjunto de puntos asintóticos a los puntos de Orb_f . En el caso de un punto fijo, a la componente conexa de \mathcal{A} que lo contiene la denominaremos la cuenca de atracción inmediata de la órbita \mathcal{A}^ .*

Lema 1.14

Toda órbita periódica atractora o superatractora está contenida en el conjunto de Fatou de f . Además, toda la cuenca de atracción \mathcal{A} para una órbita periódica atractora está contenida en el conjunto de Fatou. Sin embargo, toda órbita periódica repulsora está contenida en el conjunto de Julia de f .

Definición 1.15

Un punto periódico $z_0 = f^n(z_0)$ es un punto parabólico si el multiplicador λ es una raíz de la unidad y no hay iteración de f que sea el mapeo identidad.

Lema 1.16

Todo punto periódico parabólico pertenece al conjunto de Julia de f .

A partir de ahora y por el resto del capítulo las funciones serán racionales de grado $d \geq 2$, a menos que se indique otra cosa.

Lema 1.17

Si f es una función racional de grado 2 o más, entonces el conjunto de Julia $J(f)$ es distinto del vacío. De hecho, $J(f)$ es infinito ([Beardon 1990]).

Definición 1.18

Definimos a la gran órbita de un punto z bajo $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ como el conjunto $go(z, f)$ de todos los puntos $\tilde{z} \in \hat{\mathbb{C}}$ cuyas órbitas intersectan la órbita de z eventualmente. Por tanto, z y \tilde{z} tienen la misma gran órbita si y sólo si $f^m(z) = f^n(\tilde{z})$ para algunas $m, n \geq 0$. Y definimos la gran órbita finita o excepcional bajo f si $go(f, z)$ es finito. Al conjunto de todas las gran órbitas finitas se le denotará como $\mathcal{E}(f)$.

Lema 1.19

Si $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un mapeo racional de grado $d \geq 2$, entonces $\mathcal{E}(f)$ tiene a lo más dos puntos. Estas dos gran órbitas finitas, en caso de que existan, siempre deben ser puntos periódicos superatractores de f .

Teorema 1.20

Sea z_1 un punto arbitrario del conjunto de Julia $J(f) \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ y sea N una vecindad arbitraria de z_1 . Entonces, la unión U de las imágenes $f^n(N)$ contiene a todo el conjunto de Julia y contiene a $\hat{\mathbb{C}}$ menos, a lo más, dos puntos. Dicho de manera más precisa, si N es suficientemente pequeño, entonces U es el complemento $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$. Además, para una n suficientemente grande, la imagen $f^n(N \cap J)$ es igual al conjunto de Julia $J(f)$.

Corolario 1.21

Si el conjunto de Julia tiene un punto interior, entonces debe ser toda la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Corolario 1.22

Si $A \subset \hat{\mathbb{C}}$, es la cuenca de atracción para alguna órbita atractora o superatractora, entonces su frontera $\partial A = \overline{A} \setminus A$ es igual a todo el conjunto de Julia. Además, toda componente conexa del conjunto de Fatou $\hat{\mathbb{C}} \setminus J$ coincide con alguna componente conexa de A o es ajena a A .

Corolario 1.23

Si z_0 es cualquier punto del conjunto de Julia $J(f)$, entonces el conjunto de todas las imágenes inversas de todas las iteraciones de $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : f^n(z) = z_0, n \geq 0\}$ es denso en el conjunto de Julia $J(f)$.

Corolario 1.24

El conjunto de Julia $J(f)$ no tiene puntos aislados y por tanto es un conjunto perfecto, es decir, cada punto de $J(f)$ es un punto de acumulación de J .

Corolario 1.25

Para cualquier función racional de grado $d \geq 2$, su conjunto de Julia J es conexo o tiene un número no numerable de componentes conexas.

Con una que otra excepción, cualquier forma observada alrededor de un punto del conjunto de Julia J será observada regularmente y a cualquier escala en casi cualquier otro punto del conjunto de Julia J . Este comportamiento “fractal” nos dice mucho acerca de la imagen visual del conjunto de Julia y sus características geométricas. Para establecer esto de manera más precisa damos la siguiente definición:

Definición 1.26

Sean z y \tilde{z} dos puntos en $J(f)$, decimos que (J, z) es conforme y localmente isomorfo a (J, \tilde{z}) si existe un isomorfismo conforme de una vecindad N de z a una vecindad \tilde{N} de \tilde{z} el cual lleva z a \tilde{z} y $J \cap N$ a $J \cap \tilde{N}$.

Lema 1.27

El conjunto de puntos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ para los cuales (J, z) es conforme y localmente isomorfo a (J, z_0) es denso en $J(f)$ a menos que para toda órbita hacia atrás $z_0 \leftarrow z_1 \leftarrow z_2 \leftarrow \dots$ bajo f que termine en z_0 , algún z_j con $j > 0$ es un punto crítico. Además, los puntos z_0 en donde ocurre esta propiedad son finitos.

Como veremos inmediatamente, el siguiente teorema es importante por la relación que guarda con el comportamiento “caótico” del conjunto de Julia.

Teorema 1.28

El conjunto de Julia para cualquier mapeo racional de grado $d \geq 2$ es igual a la cerradura de sus puntos periódicos repulsivos.

Este teorema también es verdadero para funciones enteras como se puede ver en [Morosawa 1998] quien lo denomina el Primer Teorema Fundamental de la Dinámica Compleja. El conjunto de Julia puede definirse como la cerradura de sus puntos periódicos repulsivos y mostrarse que esta definición es equivalente a la dada con familias normales.

Al definir el conjunto de Julia, dijimos que presentaba un comportamiento dinámico “caótico”, pero ¿qué quiere decir caótico? La siguiente definición de sistema dinámico caótico fue introducida por Robert Devaney y puede verse en [Devaney 1985], pero antes introduciremos dos conceptos que entran en la definición de caos.

Definición 1.29

Sea X un espacio topológico y sea $f : X \rightarrow X$ un mapeo continuo, f es transitivo topológicamente si para cualquier par de abiertos $U, V \subset X$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Esto implica que en un mapeo transitivo topológicamente el sistema dinámico no puede descomponerse en dos conjuntos abiertos ajenos que sean invariantes bajo el mapeo. Además, si un mapeo tiene una órbita densa, al tomar un abierto U en cualquier punto de la órbita y otro abierto V en X , existirá un $k > 0$ tal que $f^k(U)$ intersecta a V por la densidad de la órbita y por tanto el mapeo es transitivo topológicamente.

Definición 1.30

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \rightarrow X$ un mapeo continuo, f tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ y para toda vecindad N de x , existe $y \in N$ y $n \geq 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

Intuitivamente, un mapeo f tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales si existen puntos arbitrariamente cercanos a x los cuales se separan eventualmente de x a una distancia δ bajo iteración de f . Vemos que no todos los puntos cerca de x necesitan separarse eventualmente, pero debe haber al menos un punto que sí lo haga en cualquier vecindad de x . Si un mapeo tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales, entonces para propósitos prácticos, la dinámica del mapeo puede alterar el cálculo numérico. Errores pequeños en el cálculo, introducidos por redondeo, pueden agrandarse bajo iteración y los resultados del cálculo numérico de una órbita, sin importar que tan exacto sea, pueden no tener ningún parecido a la órbita verdadera. Esto implica cierta inestabilidad en el sistema dinámico.

Definición 1.31 [Devaney 1985]

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \rightarrow X$ un mapeo continuo, se dice que el sistema dinámico generado por f bajo iteración es caótico si satisface:

1. *El conjunto de todos los puntos periódicos es denso en X .*
2. *f es transitivo topológicamente.*
3. *(f tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales.)*

Hemos colocado la tercer condición entre parentésis porque no es necesaria. Después que Devaney dió la definición, se vió que las dos primeras condiciones implican la tercera bajo las mismas hipótesis, como se puede ver en [Banks 1992]. Sin embargo, incluimos la tercer condición porque es la esencia del comportamiento “caótico”, como vimos en la discusión de la Definición 1.31. En particular, en el conjunto de Julia de funciones racionales, la primer condición está dada por el Teorema 1.29, la segunda condición es un corolario inmediato del Teorema 1.20, y una prueba de la tercer condición puede verse en [Morosawa 1998]. Además, las funciones enteras también cumplen estos tres requisitos ([Morosawa 1998]). Por tanto, para funciones racionales y enteras, la Dinámica Compleja generada por estas es caótica en sus conjuntos de Julia.

2 Rayos Externos

Los rayos externos son una herramienta valiosa para entender los conjuntos de Julia de polinomios complejos y también su espacio paramétrico, en ellos se basará la construcción de “acoplamiento”, por lo que veremos algunas de sus propiedades. A su vez, para la construcción de los rayos externos, necesitamos el clásico Teorema de Böttcher. Éste, forma parte de la Teoría Local del Punto Fijo, es decir, el estudio de la dinámica de un mapeo holomorfo en alguna vecindad pequeña en torno a un punto fijo, la cual es fundamental para la comprensión de la dinámica global.

Teorema 2.1 [Böttcher 1904]

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un mapeo holomorfo con punto fijo superattractor z_0 , tal que $f(z) = z_0 + a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots$ con $a_n \neq 0$ y $n \geq 2$, entonces existe un cambio de coordenadas localmente holomorfo $w = \phi(z)$, con $\phi(z_0) = 0$, el cual conjugua f con el mapeo de la n -ésima potencia $w \mapsto w^n$ en toda una vecindad del cero, es decir, $\phi(f(z)) = [\phi(z)]^n$. Además, ϕ es única salvo multiplicación por una $(n - 1)$ raíz de la unidad.

Veamos la demostración. Primero veamos que $f(z)$ es conjugable a un mapeo con punto fijo en cero y con coeficiente $a_n = 1$, y así trabajar con este nuevo mapeo será más manejable. Sea $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $h(z) = z + z_0$, entonces $f^*(z) = h^{-1} \circ f \circ h(z) = h^{-1} \circ f(z + z_0) = h^{-1}(z_0 + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$, por lo cual f es conjugable a un mapeo con su punto fijo en cero. Ahora sea $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $g(z) = z/c$, donde escogemos una solución c de la ecuación $a_n = c^{n-1}$, entonces $f^{**}(z) = g^{-1} \circ f^* \circ g(z) = g^{-1} \circ f(z/c) = g^{-1}(a_n \frac{z^n}{c^n} + a_{n+1} \frac{z^{n+1}}{c^{n+1}} + \dots) = c(\frac{z^n}{c} + a_{n+1} \frac{z^{n+1}}{c^{n+1}} + \dots) = z^n + b_1 z^{n+1} + \dots$, así que f^* es conjugable a un mapeo con $a_n = 1$.

Así que ahora podemos asumir que nuestro mapeo es de la forma $f(z) = z^n(1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots)$, o también

$$f(z) = z^n(1 + \eta(z)), \quad \text{con} \quad \eta(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots \quad (2 : 1)$$

Dado que $\eta(z)$ es una serie de potencias convergente por la holomorffia de $f(z)$ y tiene su centro en cero, podemos encontrar un radio $0 < r < \frac{1}{2}$ lo suficientemente pequeño tal que $|\eta(z)| < \frac{1}{2}$ en el disco $\mathbb{D}_r = \mathbb{D}_r(0)$ de radio r y centro en 0. Vemos que $|f(z)| = |z^n| |1 + \eta(z)| \leq |z|^n (1 + |\eta(z)|) \leq \frac{3}{2} |z|^n \leq \frac{3}{4} |z|$ pues $n \geq 2$ y $z \in \mathbb{D}_r$, lo que implica que $f(z) : \mathbb{D}_r \rightarrow \mathbb{D}_r$. Por otro lado $f(z) = z^n + z^n \eta(z)$, así que si $z \in \partial \mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$, $|z^n| |\eta(z)| < \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} = |z^n|$, y por el Teorema de Rouché, $f(z)$ y z^n tienen el mismo número de ceros en $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$, a saber n , lo que implica que $f(z) \neq 0$ en $\mathbb{D}_r \setminus \{0\}$ pues ya sabíamos que $f(z)$ tenía n ceros en 0.

Entonces, la k -ésima iteración f^k también mapea \mathbb{D}_r en sí mismo e inductivamente vemos que tiene la forma $f^k(z) = z^{n^k}(1 + n^{k-1} b_1 z + \dots)$. Así que definamos en el disco \mathbb{D}_r el mapeo

$$\phi_k(z) = \sqrt[n^k]{f^k(z)} = z(1 + n^{k-1} b_1 z + \dots)^{1/n^k} = z(1 + \frac{b_1}{n} z + \dots),$$

donde la última igualdad está bien definida porque el mapeo $(1 + n^{k-1} b_1 z + \dots)^{1/n^k}$ es holomorfo en el cero y escogemos la rama de la raíz n^k -ésima de tal modo que la derivada de ϕ_k sea uno en el origen (i.e., $1^{1/n^k} = 1$), por lo que el primer coeficiente en la serie de Taylor de la raíz es $\left[\frac{1}{n^k} (1 + n^{k-1} b_1 z + \dots)^{\frac{1}{n^k} - 1} (n^{k-1} b_1 + z(\dots)) \right]_0 = \frac{b_1}{n}$.

También vemos que

$$[\phi_k(f(z))] = [f^k(f(z))]^{1/n^k} = [f^{k+1}(z)]^{n/n^{k+1}} = [\phi_{k+1}(z)]^n,$$

por lo que si ϕ_k converge uniformemente a una función $\phi : \mathbb{D}_r \rightarrow \mathbb{D}_1 = \mathbb{D}$, satisficará $\phi \circ f(z) = [\phi(z)]^n$.

Para ver la convergencia haremos un cambio de variable, sea $z = e^Z$ donde Z se mueve sobre el semiplano izquierdo \mathbb{H}_r definido por la desigualdad $Re(Z) < \log r$, o dicho de otro modo, $e^{Re(Z)} < r$. En la figura 2.1 se muestra este mapeo.

Mediante la conjugación

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \mathbb{D}_r & \longrightarrow & \mathbb{D}_r \\ e^Z & \uparrow & \downarrow \log z \\ \mathbb{H}_r & \longrightarrow & \mathbb{H}_r \\ & F & \end{array}$$

el mapeo $f(z)$ en el disco \mathbb{D}_r corresponde al mapeo $F(Z) = \log f(e^Z)$ de \mathbb{H}_r en sí mismo. Haciendo $\eta = \eta(e^Z) = b_1 e^Z + b_2 e^{2Z} + \dots$ como en (2 : 1), con $|\eta| < 1/2$, vemos que F puede escribirse de manera más precisa como

$$F(Z) = \log(e^{nZ}(1 + \eta)) = nZ + \log(1 + \eta) = nZ + (\eta - \eta^2/2 + \eta^3/3 - \dots)$$

donde la última igualdad da una elección explícita de la rama de logaritmo que estamos usando, la rama principal. Así que $F : \mathbb{H}_r \rightarrow \mathbb{H}_r$ es una función bien definida y holomorfa.

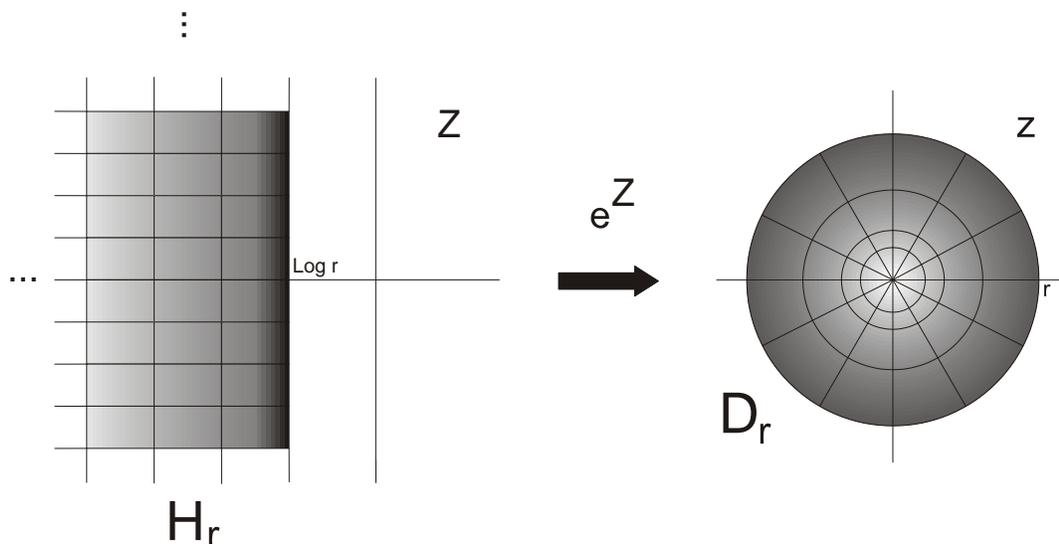


Figura 2.1

Ahora usaremos la propiedad que construimos para η al principio de la prueba, es decir, como $|\eta| < 1/2$, tenemos que $(1 + \eta) \subseteq \mathbb{D}_{1/2}(1) \subseteq R = \{z : \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{3}{2}\}$. Por medio de cálculo diferencial básico, se puede ver que la recta $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ intersecta a la frontera del disco $\mathbb{D}_{1/2}(1)$ en $x = 3/4$, lo que implica que $\mathbb{D}_{1/2}(1) \subseteq P = \{z : \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{3}{2}, -\frac{5}{27}\pi \leq \arg z \leq \frac{5}{27}\pi\} \subseteq R$. Dado que $\text{Log}(z) = \log |z| + i(\arg z)$, por el Teorema del Módulo Máximo, el máximo de $\text{Log}(z)$ en P se alcanza en $z_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{27}\pi i$, con $|P(z_0)| \approx 0.91$, el cual es una cota para $\text{Log}(z)$ en $\mathbb{D}_{1/2}(1)$, también por el Teorema del Módulo

Máximo. Por lo tanto, para toda $z \in \mathbb{H}_r$, tenemos que

$$|F(Z) - nZ| = |\text{Log}(1 + \eta)| < 1 \quad (2 : 2)$$

Análogamente, el mapeo $\phi_k(z) = \sqrt[n^k]{f^k(z)}$ en \mathbb{D}_r corresponde a un mapeo

$$\Phi_k(Z) = \text{Log} \phi_k(e^Z) = \text{Log} [f^k(e^Z)]^{1/n^k} = \frac{1}{n^k} [\text{Log} f^k(e^Z)] = \frac{F^k(Z)}{n^k},$$

el cual esta bien definido y es holomorfo en \mathbb{H}_r . Por esto, por (2 : 2) y como $F : \mathbb{H}_r \rightarrow \mathbb{H}_r$, se obtiene

$$|\Phi_{k+1}(Z) - \Phi_k(Z)| = \frac{|F^{k+1}(Z) - nF^k(Z)|}{n^{k+1}} < \frac{1}{n^k}.$$

Entonces $\Phi_k(Z)$ converge uniformemente a una función límite $\Phi(Z)$ en \mathbb{H}_r donde

$$\Phi_k(F(Z)) = \frac{F^k(F(Z))}{n^k} = \frac{nF^{k+1}(Z)}{n^{k+1}} = n\Phi_{k+1}(Z),$$

y por tanto $\Phi(F(Z)) = n\Phi(Z)$. Como el mapeo exponencial de \mathbb{H}_r en \mathbb{D}_r reduce distancias,

$$|\phi_{k+1}(z) - \phi_k(z)| < \frac{1}{n^k}$$

para $z \in \mathbb{D}_r$. Así que, cuando $k \rightarrow \infty$, la sucesión de funciones holomorfas $\{\phi_k(z)\}$ convergen uniformemente a una función límite $\phi(z)$ en \mathbb{D}_r , la cual es holomorfa por el Teorema de Weierstrass, con $\phi(0) = 0$. Como $[\phi_k(f(z))] = [\phi_{k+1}(z)]^n$, al tomar el límite cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos que

$$\phi \circ f(z) = [\phi(z)]^n.$$

Para ver la unicidad, supongamos que existen ϕ_1 y ϕ_2 tal que conjugan a $f(z)$ con el mapeo z^n , es decir

$$\phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}(w) = w^n = \phi_2 \circ f \circ \phi_2^{-1}(w).$$

Definimos $\Phi : \phi_1(\mathbb{D}_r) \rightarrow \phi_1(\mathbb{D}_r)$ con $\Phi(w) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(w) = c_1w + c_k w^k + \dots$, holomorfo por composición, entonces

$$\Phi(w^n) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}(w) = \phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}(w) = [\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(w)]^n = [\Phi(w)]^n,$$

pues $\phi_2 \circ f(z) = [\phi_2(z)]^n$. Así, tenemos por un lado que $\Phi(w^n) = c_1w^n + c_k w^{nk} + \dots$, y por el otro $[\Phi(w)]^n = (c_1w + c_k w^k + \dots)^n = c_1^n w^n + n c_1^{n-1} c_k w^{n+k-1} + \dots$. En esta última serie, el primer término se puede calcular directamente de la serie de Taylor pues $\frac{d[\Phi(w)]^n}{dw} = n[\Phi(w)]^{n-1} \frac{d[\Phi(w)]}{dw}$, y como la serie está centrada en cero, al calcular las

siguientes derivadas hasta la $n - \text{ésima}$ el único término que no desaparece es $n! \left[\frac{d[\Phi(w)]}{dw} \left[\frac{d[\Phi(w)]}{dw} \right]^{n-1} (0) \right] = n! c_1^n$, pues los demás términos contienen una potencia positiva de Φ que evaluada en cero es cero. El segundo término puede calcularse del binomio de Newton al tomar sólo los términos que nos interesan, así vemos que $\binom{n}{1} (c_1w)^{n-1} (c_k w^k) =$

$\frac{n!}{(n-1)!} c_1^{n-1} c_k w^{n+k-1}$. Como n y k son mayores a 1, $nk > n + k - 1$, entonces $c_1 = c_1^n$ y todos los demás términos de Φ son cero. Por tanto $\Phi(w) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(w) = c_1w$, es decir, $\phi_2(z) = c_1\phi_1(z)$ con $c_1^{n-1} = 1$ pues $c_1 \neq 0$. ■

Ahora aplicaremos este teorema a la dinámica de polinomios. Sea

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad f(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

un polinomio complejo de grado $d \geq 2$, con $a_d \neq 0$. Como vimos en la demostración pasada, este polinomio es conjugable a un polinomio mónico tal que $a_d = 1$, así que podemos suponer que nuestro polinomio es mónico. Los polinomios se relacionan con un conjunto derivado de los conjuntos de Julia y de Fatou que definimos como:

Definición 2.2

Definimos al conjunto de Julia Lleno de una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como el conjunto de todas las $z \in \mathbb{C}$ para las cuales su órbita bajo f es acotada y lo denotamos como $K = K(f)$.

La primera relación está dada por el siguiente lema, cuya demostración puede verse en [Milnor 2006]:

Lema 2.3

Para cualquier polinomio f de grado mayor a 1, su conjunto de Julia Lleno $K \subset \mathbb{C}$ es compacto, con complemento conexo, con frontera ∂K igual al conjunto de Julia $J = J(f)$ y con interior igual a la unión de todos los componentes acotados U del conjunto de Fatou $F = F(f) = \mathbb{C} \setminus J$. Por tanto K es igual a la unión de todos los U junto con J . Cualquier componente acotada U es simplemente conexa necesariamente.

Si queremos agregar el ∞ al polinomio f , necesitamos estudiar como se comportan dinámicamente los polinomios cerca del ∞ . Así que consideramos la conjugación $\zeta = 1/z$ y estudiamos la conjugada a f , la función racional $F(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)}$. Dado que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, el ∞ es un punto fijo bajo f , esto también puede deducirse del hecho de que

$$F(\zeta) = \frac{1}{\frac{1}{\zeta^d + \frac{a_{d-1}}{\zeta^{d-1}} + \cdots + \frac{a_1}{\zeta} + a_0}} = \frac{\zeta^d}{1 + a_{d-1}\zeta + \cdots + a_1\zeta^{d-1} + a_0\zeta^d},$$

por lo que $\lim_{\zeta \rightarrow 0} F(\zeta) = 0$, y 0 es un punto fijo bajo F . El multiplicador en el ∞ por definición es

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f'(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{dz^{d-1} + (d-1)a_{d-1}z^{d-2} + \cdots + a_1} = 0$$

lo que indica que el ∞ es un punto fijo superatractor de f , y por tanto 0 es un punto fijo superatractor de F .

Nos interesará la información que dé el límite $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)}$, pues nos dice cuanto se parecen las funciones entre sí en el punto a , cuando este límite sea uno diremos que $f(z) \sim g(z)$ cuando $z \rightarrow a$. Así, vemos que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^d} = \lim_{z \rightarrow \infty} 1 + \frac{a_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{d-1}} + \frac{a_0}{z^d} = 1$, por lo que $f(z) \sim z^d$ cuando $z \rightarrow \infty$, de manera análoga tenemos que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{F(\zeta)}{\zeta^d} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{1 + a_{d-1}\zeta + \cdots + a_1\zeta^{d-1} + a_0\zeta^d} = 1,$$

por lo que $F(\zeta) \sim \zeta^d$ cuando $\zeta \rightarrow 0$. Por tanto existe un mapeo de Bötcher asociado

$$\phi : \mathbb{D}_r \rightarrow \mathbb{D} \quad \phi(\zeta) = \lim_{k \rightarrow \infty} [F^k(\zeta)]^{1/d^k},$$

con $\phi'(0) = 1$ y $\phi(z) \sim z$ cuando $z \rightarrow 0$, como se puede ver en la prueba del Teorema de Bötcher. Para volver a trabajar

en el ∞ con la variable z , hacemos la conjugación usual

$$\hat{\phi}(z) = \frac{1}{\phi(1/z)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{[F^k(1/z)]^{1/d^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} [f^k(z)]^{1/d^k},$$

con $\hat{\phi} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/r} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $\hat{\phi}(z) \sim z$ cuando $z \rightarrow \infty$ y $\hat{\phi}$ conjuga el polinomio f con la d -ésima potencia tal que

$$\hat{\phi}(f(z)) = [\hat{\phi}(z)]^d.$$

Entonces en un polinomio $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de grado $d \geq 2$, el ∞ es un punto fijo superatractor y por el Lema 1.14 el ∞ está en el conjunto de Fatou de f , al igual que su cuenca de atracción $\mathcal{A}(\infty)$. Por el corolario 1.22, $\partial\mathcal{A}(\infty) = J$ y por el Lema 2.3, la cuenca de atracción $\mathcal{A}(\infty)$ coincide con la cuenca de atracción inmediata $\mathcal{A}^*(\infty)$. Como el conjunto de Julia es invariante, ∞ es un punto fijo, $\mathcal{A}(\infty)$ es conexa y f es continua, entonces $f^{-1}(\mathcal{A}(\infty)) = \mathcal{A}(\infty) = f(\mathcal{A}(\infty))$. También por el Corolario 1.22, la componente conexa de Fatou que contiene al infinito, denotada como F_∞ , es la misma que la cuenca de atracción del infinito $\mathcal{A}(\infty)$ y por tanto F_∞ es completamente invariante.

Esto establece el contexto para el siguiente teorema, del cual se puede ver una prueba en [Milnor 2006].

Teorema 2.4

Sea f un polinomio de grado $d \geq 2$. Si el conjunto de Julia Lleno $K = K(f)$ contiene todos los puntos críticos de f , entonces K y $J = \partial K$ son conexos, y el complemento de K es isomorfo conformemente al exterior del disco unitario cerrado $\overline{\mathbb{D}}$ bajo un isomorfismo

$$\hat{\phi} : \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}},$$

el cual conjuga f en $\mathbb{C} \setminus K$ con la d -ésima potencia $w \mapsto w^d$. Por otro lado, si al menos un punto crítico de f pertenece a $\mathbb{C} \setminus K$, entonces K y J tiene una infinidad no numerable de componentes conexas.

Además si todos los puntos críticos de f están en $\mathbb{C} \setminus K$, entonces J es totalmente desconexo, es decir, sus componentes conexas son puntos, y el conjunto de Fatou F es igual a F_∞ , esto se puede ver en [Gamelin 2001].

Al mapeo inverso de $\hat{\phi}$ le llamaremos $\varphi : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$. Por el Teorema 2.1 $\phi(f(z)) = [\phi(z)]^d$, por lo que φ cumple

$$\varphi(w^d) = f(\varphi(w)).$$

Bajo este contexto, ya podemos definir rayos externos:

Definición 2.5

Sea f un polinomio de grado $d \geq 2$, y sea K un conjunto conexo. Definimos el rayo externo $\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_t(K)$ de ángulo t como la curva

$$\{\varphi(re^{2\pi it}) \in \mathbb{C} \setminus K : 1 < r < \infty\}.$$

Diremos que si $\lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{2\pi it})$ existe, el rayo tiene un punto de aterrizaje y es dicho límite.

Por el Teorema 2.1 tenemos que $f(\mathcal{R}_t) = \mathcal{R}_{dt}$, pues $f(\mathcal{R}_t) = f \circ \varphi(re^{2\pi it}) = \varphi([re^{2\pi it}]^d) = \varphi(re^{2\pi idt}) = \mathcal{R}_{dt}$. En particular, si el ángulo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es periódico bajo la multiplicación por n , entonces el rayo \mathcal{R}_t es periódico. Por ejemplo, como $\mathcal{R}_t \xrightarrow{f} \mathcal{R}_{nt} \xrightarrow{f} \mathcal{R}_{n^2t} \xrightarrow{f} \dots$, si $n^p t \equiv t \pmod{\mathbb{Z}}$, entonces $f^p(\mathcal{R}_t) = \mathcal{R}_t$. El punto de aterrizaje del rayo de ángulo cero será el punto fijo β y el punto de aterrizaje del rayo de ángulo $1/2$ sera el punto prefijo $-\beta$.

Nos interesa saber cuando podemos extender φ a $\partial\mathbb{D}$, es decir, cuando podemos aterrizar todos los rayos asociados a un conjunto de Julia, para esto necesitamos el siguiente teorema, una demostración se puede consultar en [Milnor 2006].

Teorema 2.6 [Carathéodory 1913]

Un isomorfismo conforme $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U \subset \hat{\mathbb{C}}$ se extiende a un mapeo continuo del disco cerrado $\bar{\mathbb{D}}$ sobre \bar{U} si y sólo si la frontera ∂U es localmente conexa, o si y sólo si el complemento $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ es localmente conexo. Además, si la frontera de U es una curva cerrada y simple, entonces $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U$ se extiende a un homeomorfismo del disco cerrado $\bar{\mathbb{D}}$ sobre la cerradura \bar{U} .

Cuando esta extensión exista, será conveniente parametrizar el círculo unitario por los números reales módulo uno. El mapeo $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial K(f)$ definido por

$$\gamma(t) = \gamma_f(t) = \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{2\pi it}),$$

será denominado la semiconjugación de Carathéodory del círculo de los reales módulo uno al conjunto de Julia. Con el Teorema 2.6 ya se puede establecer un criterio que muestra las relaciones entre los rayos externos, la topología de J y de K y el mapeo de Böttcher. Una prueba puede verse en [Milnor 2006].

Teorema 2.7

Sea f un polinomio de grado $d \geq 2$ dado que su conjunto de Julia sea conexo, las siguientes condiciones son equivalentes:

- *Todo rayo externo \mathcal{R}_t aterriza a un punto $\gamma(t)$ el cual depende continuamente del ángulo t .*
- *El conjunto de Julia J es localmente conexo.*
- *El conjunto de Julia lleno K es localmente conexo.*
- *El inverso del mapeo de Böttcher $\varphi : \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$ se extiende de manera continua sobre la frontera $\partial\mathbb{D}$, y este mapeo extendido manda $e^{2\pi it} \in \partial\mathbb{D}$ en $\gamma(t) \in J(f)$.*

Además, cuando estas condiciones son satisfechas, la semiconjugación de Carathéodory $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J(f)$ satisface la semiconjugación $\gamma(dt) = f(\gamma(t))$ y mapea el círculo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sobre el conjunto de Julia $J(f)$. Y el conjunto de Julia J es una curva simple y cerrada si y sólo si γ es un homeomorfismo.

Por último, la función $z \mapsto \left| \hat{\phi}(z) \right|$ se extiende de manera continua por toda la cuenca de atracción $\mathbb{C} \setminus K$, tomando valores $\left| \hat{\phi}(z) \right| > 1$. En vez de trabajar con esta función trabajaremos con su logaritmo porque es una función de Green. Por esto, llamaremos función de Green o función potencial canónica asociada con el conjunto de Julia lleno K del polinomio mónico f de grado d a la función $G : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ como

$$G(z) = \begin{cases} \log \left| \hat{\phi}(z) \right| & z \in \mathbb{C} \setminus K \\ 0 & z \in K \end{cases},$$

la cual es una función armónica y de Green. Las curvas de nivel de G en la cuenca de atracción se conocen como equipotenciales y se cumple que $G(f(z)) = dG(z)$, lo cual muestra que f mapea cada equipotencial a una equipotencial por medio de un mapeo cubriente de grado d . Estas equipotenciales son ortogonales a los rayos externos.

3 Acoplamientos

3.1. Acoplamientos Topológicos

El acoplamiento es una forma de construir un mapeo racional o una cubierta ramificada de S^2 a partir de un par de polinomios con conjuntos de Julia localmente conexos. Cuando esto sea posible, podremos entender la Dinámica Compleja del mapeo racional en términos de las dinámicas de los polinomios. El concepto de acoplamiento, o mating en inglés, fue introducido por [Douady 1983] en términos un poco distintos, relacionados con teoría de categorías.

Definición 3.1

Sean f_1 y f_2 polinomios de grado $d \geq 2$, y sean los conjuntos de Julia llenos $K_1 = K(f_1)$ y $K_2 = K(f_2)$ localmente conexos. Definimos el acoplamiento topológico como una función continua $f_1 \amalg f_2$ que va de un espacio compacto asociado $K_1 \amalg K_2$ sobre sí mismo. Considerando las semiconjugaciones de Carathéodory $\gamma_j : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial K_j$, $K_1 \amalg K_2$ es el espacio cociente de la unión ajena de K_1 y K_2 en el cual $\gamma_1(t) \sim \gamma_2(-t)$ es la relación de equivalencia más pequeña para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Este acoplamiento topológico $f_1 \amalg f_2$ puede verse como

$$f_1 \amalg f_2 \Big|_{K_1^\circ} = f_1 \quad \text{y} \quad f_1 \amalg f_2 \Big|_{K_2^\circ} = f_2,$$

por lo que $f_1 \amalg f_2$ es continua en $K_1^\circ \cup K_2^\circ$, pues f_1 y f_2 son continuas. Además, el comportamiento de f_1 y f_2 en las fronteras de los conjuntos de Julia llenos K_1 y K_2 es el mismo bajo la identificación, pues son localmente conexos y por el Teorema 2.7 la semiconjugación de Carathéodory cumple $\gamma(dt) = f(\gamma(t))$ y dado que $\gamma_1(t) \sim \gamma_2(-t)$ tenemos

$$f_1(\gamma_1(t)) = \gamma_1(dt) \sim \gamma_2(-dt) = f_2(\gamma_2(-t)).$$

Es decir que $f_1 \amalg f_2 = \begin{cases} f_1 & z \in K_1 \\ f_2 & z \in K_2 \end{cases}$, ya que está bien definida en las fronteras de los conjuntos de Julia llenos

K_1 y K_2 . Esto implica que $f_1 \amalg f_2$ es continua en $K_1 \amalg K_2$, ya que f_1 y f_2 son continuas en K_1 y K_2 respectivamente. En particular, las inclusiones son semiconjugaciones para f_1 y f_2 con $f_1 \amalg f_2$, es decir los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccccc} & f_1 & & f_2 & \\ & \rightarrow & & \rightarrow & \\ K_1 & & K_1 & & K_2 \\ i \downarrow & & \downarrow & i & \downarrow & i \\ K_1 \amalg K_2 & \rightarrow & K_1 \amalg K_2 & & K_1 \amalg K_2 \\ & f_1 \amalg f_2 & & f_1 \amalg f_2 & \end{array}$$

En esta generalidad, no hay razón para esperar que este espacio $K_1 \amalg K_2$ se comporte bien. Sin embargo, en muchos casos resulta que $K_1 \amalg K_2$ es una 2-esfera topológica, y además podemos darle una estructura conforme a esta esfera de tal modo que $f_1 \amalg f_2$ sea un mapeo holomorfo, una función racional de grado d .

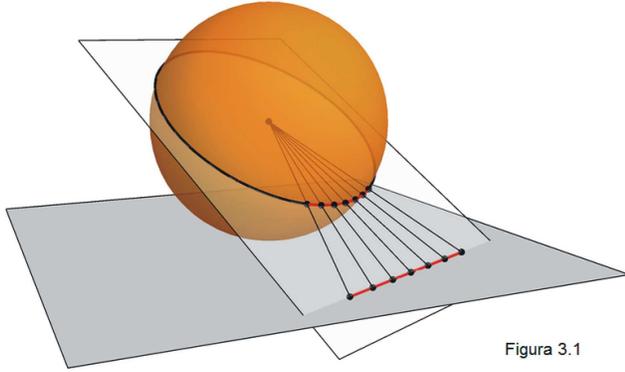


Figura 3.1

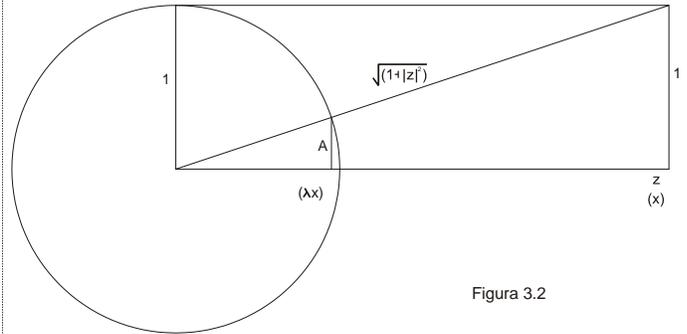


Figura 3.2

Ahora veamos una interpretación geométrica del acoplamiento topológico. Para esto necesitamos la proyección gnomónica, la cual es la proyección radial del centro de S^2 , la 2-esfera, a alguno de sus planos tangentes, con la propiedad característica de que manda círculos máximos en S^2 a rectas en el plano tangente. Dado que esto implica que dos puntos de hemisferios distintos van a dar a uno solo en el plano, nos fijaremos únicamente en la proyección del hemisferio abierto que intersecta al plano tangente con frontera el ecuador de S^2 que es paralelo al plano, esto nos permite ver la proyección gnomónica como una función biyectiva. En la Figura 3.1, tomada de [Wikipedia 3.1], se muestra esta proyección.

En este caso, S^2 será la esfera unitaria con centro en el origen encajada en $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ y haremos la proyección gnomónica respecto a los planos tangentes $\mathbb{C} \times \{1\}$ y $\mathbb{C} \times \{-1\}$. Construyamos, en base a la Figura 3.2, la primer proyección pero de manera inversa, del plano tangente $\mathbb{C} \times \{1\}$ al hemisferio norte H^+ de S^2 . Por semejanza de triángulos tenemos que

$$\frac{A}{1} = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Para calcular la coordenada x proyectamos al plano xz , en la Figura 3.2 se representa por las coordenadas entre paréntesis (λx) y (x) , y por semejanza de triángulos se obtiene

$$\frac{\lambda x}{A} = \frac{x}{1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = A.$$

El procedimiento para la coordenada y es el mismo, por lo que la primer proyección gnomónica la podemos ver como la función

$$v_1 : \mathbb{C} \rightarrow H^+ \quad v_1(z) = \frac{(z, 1)}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

De este modo identificamos el plano dinámico \mathbb{C} de f_1 con el hemisferio norte H^+ de S^2 .

El proceso para el hemisferio sur H^- es totalmente análogo, pero como queremos interpretar el acoplamiento topológico, necesitamos introducir la información de la identificación $\gamma_1(t) \sim \gamma_2(-t)$, es decir la conjugación del plano dinámico \mathbb{C} de f_2 , lo cual es una rotación R de π radianes en $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ respecto al eje x en la proyección gnomónica dado por $(x + iy, A) \xrightarrow{R} (x - iy, -A)$ por lo que $v_2 = R \circ v_1$ y obtenemos la segunda proyección gnomónica

$$v_2 : \mathbb{C} \rightarrow H^- \quad v_2(z) = \frac{(\bar{z}, -1)}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Y así, identificamos el plano dinámico \mathbb{C} de f_2 con el hemisferio sur H^- de S^2 .

Continuando con la suposición de que f_1 y f_2 son polinomios mónicos, por los Teoremas 2.1, 2.4 y la discusión que le precedió a este último, sabemos que la función de Böttcher $\hat{\phi} : \mathbb{C}/K \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{D}$ es

$$\hat{\phi}(z) = \frac{1}{\phi(1/z)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi_k(1/z)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z}{(1 + \frac{b_1}{n} \frac{1}{z} + \dots)}$$

Entonces $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z/(1 + \frac{b_1}{n} \frac{1}{z} + \dots)}{z} = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$, es decir, $\phi_k(z) \sim z$ cuando $z \rightarrow \infty$. Dada la convergencia de las ϕ_k a ϕ esto implica que $\hat{\phi}(z) \sim z$ cuando $z \rightarrow \infty$. Como φ es la función inversa de $\hat{\phi}$, esto implica que $\varphi(z) \sim z$ cuando $z \rightarrow \infty$. Entonces si dejamos a t fijo para el rayo $\mathcal{R}_t(K_1)$, para r suficientemente grande $\varphi(re^{2\pi it}) \sim re^{2\pi it}$ por lo que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_1(\varphi(re^{2\pi it})) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(\varphi(re^{2\pi it}), 1)}{\sqrt{|\varphi(re^{2\pi it})|^2 + 1}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(re^{2\pi it}, 1)}{\sqrt{r^2 + 1}} = (e^{2\pi it}, 0).$$

Análogamente obtenemos $\lim_{r \rightarrow \infty} v_2(\varphi(re^{-2\pi it})) = (e^{2\pi it}, 0)$ para $\mathcal{R}_{-t}(K_2)$. Es decir, los rayos externos de K_1 y K_2 coinciden en el mismo punto del ecuador de S^2 .

Como vimos en la discusión que precede al Teorema 2.4, el infinito es un punto fijo superatractor con f conjugable a w^d en una vecindad de ∞ , por lo que tenemos el siguiente diagrama donde $s \in S^2$ está lo suficientemente cercano al ecuador para que su proyección gnomónica caiga en dicha vecindad del Teorema de Böttcher 2.1:

$$\begin{array}{ccccc} & s & & s & \\ v_i^{-1} & \downarrow & & \uparrow & v_i \\ & z & \xrightarrow{f_i} & z & , \\ \hat{\phi} & \downarrow & & \uparrow & \varphi \\ & w & \xrightarrow{w^d} & w & \end{array}$$

es decir que tenemos la siguiente conjugación

$$v_i \circ f_i \circ v_i^{-1}(s) = v_i \circ \varphi \circ (w^d) \circ \hat{\phi} \circ v_i^{-1}(s) = (v_i \circ \varphi) \circ (w^d) \circ (v_i \circ \varphi)^{-1}(s),$$

por lo que los mapeos $v_1 \circ f_1 \circ v_1^{-1}(s)$ en el hemisferio norte y $v_2 \circ f_2 \circ v_2^{-1}(s)$ en el hemisferio sur tienden a los mismos valores límites $(z, 0) \mapsto (z^d, 0)$ cuando nos aproximamos al ecuador.

El hecho de que estos dos mapeos $v_i \circ f_i \circ v_i^{-1}$ tiendan a la misma función analítica en el ecuador nos permite definir un mapeo suave $f_1 \uplus f_2$ de toda la esfera S^2 en sí misma.

Definición 3.2

Sean f_1 y f_2 polinomios de grado $d \geq 2$, y con sus conjuntos de Julia llenos $K_1 = K(f_1)$ y $K_2 = K(f_2)$ localmente conexos. Definimos el acoplamiento formal como la función $f_1 \uplus f_2 : S^2 \rightarrow S^2$ dada por

$$f_1 \uplus f_2(s) = \begin{cases} v_1 \circ f_1 \circ v_1^{-1}(s) & s \in H^+ \\ v_2 \circ f_2 \circ v_2^{-1}(s) & s \in H^- \\ (s^d, 0) & s \in \mathbb{C} \times \{0\} \end{cases} .$$

Compárese esta definición con [Shishikura 2000].

Ahora definamos la relación de equivalencia en rayos como la relación de equivalencia más pequeña $\overset{\text{rayo}}{\sim}$ en S^2 tal que la cerradura de la imagen $v_1(\mathcal{R}_t(K_1))$, al igual que la cerradura de $v_2(\mathcal{R}_{-t}(K_2))$, se encuentran en una clase de

equivalencia. Por construcción de $K_1 \amalg K_2$ y de $S^2 / \overset{rayo}{\sim}$, es claro que hay un homeomorfismo natural h entre estos dos espacios, y además el mapeo $f_1 \uplus f_2$ en S^2 corresponde al mapeo $f_1 \amalg f_2$ en $K_1 \amalg K_2$ de modo que el siguiente diagrama conmuta, con q el mapeo cociente,

$$\begin{array}{ccc}
 & f_1 \uplus f_2 & \\
 S^2 & \rightarrow & S^2 \\
 q \downarrow & & \downarrow q \\
 S^2 / \overset{rayo}{\sim} & & S^2 / \overset{rayo}{\sim} \\
 h \downarrow & & \downarrow h \\
 K_1 \amalg K_2 & \rightarrow & K_1 \amalg K_2 \\
 & f_1 \amalg f_2 &
 \end{array}$$

La conmutatividad del diagrama es natural cuando $s \in v_1(\text{int}(K_1)) \cup v_2(\text{int}(K_2))$. Si $s \in v_1(\overline{\mathcal{R}_t(K_1)})$ entonces

$$f_1 \amalg f_2 \circ h \circ q(s) = f_1 \amalg f_2(\gamma_1(t)) = f_1(\gamma_1(t)) = \gamma_1(dt).$$

Por otro lado, como $f(\mathcal{R}_t) = \mathcal{R}_{dt}$, $v_1 \circ f_1 \circ v_1^{-1}(s) \in v_1(\overline{\mathcal{R}_{dt}(K_1)})$, se tiene que

$$h \circ q \circ f_1 \uplus f_2(s) = \begin{cases} h \circ q \circ v_1 \circ f_1 \circ v_1^{-1}(s) & s \in H^+ \\ h \circ q \circ (s^d, 0) & s \in \mathbb{C} \times \{0\} \end{cases} = \gamma_1(dt).$$

Si $s \in v_2(\overline{\mathcal{R}_{-t}(K_2)})$ el procedimiento es el mismo.

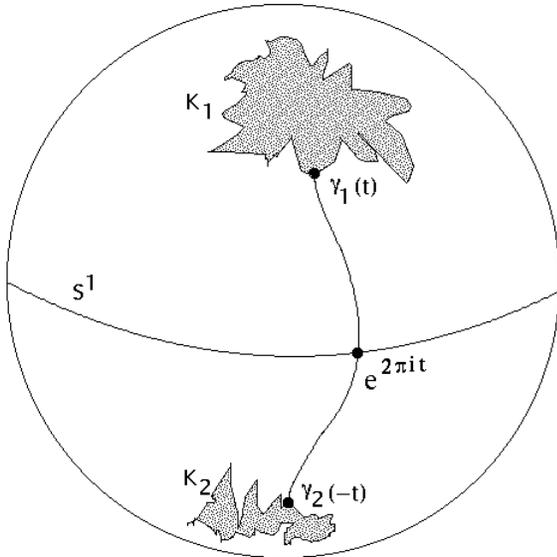


Figura 3.3

En la Figura 3.3, tomada de [Milnor 2004], se muestra como las imágenes de los rayos externos $\mathcal{R}_t(K_1)$ y $\mathcal{R}_{-t}(K_2)$ se unen de manera suave en el punto $(e^{2\pi i t}, 0)$ en el ecuador S^1 . Por definición, estos dos rayos se colapsan en un punto $\hat{\gamma}(t)$ en el espacio cociente $S^2 / \overset{rayo}{\sim}$, el cual es homeomorfo a $K_1 \amalg K_2$.

Esta descripción geométrica tiene varias ventajas, en particular nos permite usar el siguiente resultado clásico de [Moore 1925] que dice: *Si, en un plano S , M es un conjunto de puntos cerrado y acotado sin subconjuntos que separen a S , y todo subconjunto conexo maximal de M es considerado como un elemento, y todo punto que no pertenece a M es considerado como un elemento, entonces el conjunto de todos estos elementos es equivalente topológicamente al conjunto de todos los puntos en un plano.* Este teorema es reformulado en [Milnor 2004] como:

Teorema 3.3 Moore

Sea \simeq una relación de equivalencia en la esfera S^2 topológicamente cerrada. (Es decir, suponemos que el conjunto de todas las parejas (x, y) tal que $x \simeq y$ forma un subconjunto cerrado en $S^2 \times S^2$.) También supongamos que cada clase de equivalencia es conexa, pero no es toda la esfera. Entonces el espacio cociente S^2 / \simeq es homeomorfo a S^2 si y sólo si no existe clase de equivalencia que separe la esfera en dos o más componentes.

El conjunto de las parejas (x, y) tal que $x \overset{rayo}{\simeq} y$ es el conjunto

$$\left(v_1(\overline{\mathcal{R}_t(K_1)}) \cup (e^{2\pi it}, 0) \cup v_2(\overline{\mathcal{R}_{-t}(K_2)}) \right) \times \left(v_1(\overline{\mathcal{R}_t(K_1)}) \cup (e^{2\pi it}, 0) \cup v_2(\overline{\mathcal{R}_{-t}(K_2)}) \right)$$

el cual es cerrado en $S^2 \times S^2$, por lo que $\overset{rayo}{\simeq}$ es topológicamente cerrada, y $v_1(\overline{\mathcal{R}_t(K_1)}) \cup (e^{2\pi it}, 0) \cup v_2(\overline{\mathcal{R}_{-t}(K_2)})$ es arcoconexa, por lo que cada clase de equivalencia $\overset{rayo}{\simeq}$ es conexa. Por tanto, para aplicar el teorema de Moore a acoplamiento topológico lo único que necesitamos verificar es que la clase de equivalencia no separe a la esfera.

3.2. Acoplamiento Geométricos

Ahora estamos en condiciones de definir el acoplamiento geométrico, el cual simplemente se denominará acoplamiento para abreviar.

Definición 3.4

Se dice que un mapeo racional $F : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de grado d es un acoplamiento geométrico de los polinomios f_1 y f_2 de grado d , si existe una conjugación topológica h del mapeo $f_1 \amalg f_2$ en el espacio $K_1 \amalg K_2$ con el mapeo racional F en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, donde $h : K_1 \amalg K_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo que preserva la orientación, y es holomorfo en los interiores (si existe(n)) de K_1 y de K_2 . Es decir, $h \circ (f_1 \amalg f_2) = F \circ h$, a lo cual se denotará brevemente como $F \cong f_1 \amalg f_2$.

¿Esta función racional es única salvo conjugación por una transformación de Möbius? [Milnor 2004] muestra que esto no es cierto para polinomios de grado 4, pero parece ser cierta para polinomios de grado 2. Además, dice que esta pregunta sobre unicidad es parte de una pregunta más grande sobre rigidez: “si dos mapeos racionales son conjugables topológicamente bajo un homeomorfismo que preserva la orientación y que es holomorfo en el conjunto de Fatou, ¿cuándo se tiene que son conjugables de manera holomorfa?”

El ejemplo más sencillo de acoplamiento geométrico sucede cuando f_1 es un polinomio de grado d y $f_2(z) = z^d$, de tal modo que K_2 es el disco unitario cerrado $\overline{\mathbb{D}}$ y $J(f_2)$ es el círculo unitario S^1 . Entonces, por el Teorema de Moore, $K_1 \amalg K_2$ es homeomorfo a S^2 , dado que en todo punto de $J(f_2)$ sólo aterriza un rayo $\mathcal{R}_t(f_2)$ y por tanto no se puede separar la esfera en dos o más componentes. Afirmando que el mapeo racional correspondiente a $f_1 \amalg f_2$ es simplemente f_1 . Para ver esto defino el homeomorfismo $h : K_1 \amalg K_2 \rightarrow S^2$ como

$$h(z) = \begin{cases} z & z \in K_1 \\ \hat{\varphi}_1(z) & z \in K_2 \end{cases},$$

donde $\hat{\varphi}_1 : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus K_1$ es la función con dominio intercambiado en la esfera de la función $\varphi_1 : \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus K_1$ (pues $\overline{\mathbb{D}}$ y $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ son biholomorfos por la inversión compleja $1/z$), la inversa de la función de Böttcher $\hat{\varphi}_1$ correspondiente a f_1 en el infinito (ver discusión previa al Teorema 2.4), extendida de manera continua a $\partial\overline{\mathbb{D}}$ por el Teorema de Carathéodory. Además, como $\hat{\varphi}_1(z) \sim z$ cuando $z \rightarrow 0$, pues $\hat{\varphi}_1(z) \sim z$ cuando $z \rightarrow \infty$, y por las características de φ , h no sólo es un homeomorfismo que preserva la orientación sino que además es un biholomorfismo en $\hat{\mathbb{C}}$. Falta comprobar que $h \circ (f_1 \amalg f_2) = f_1 \circ h$. Si $z \in K_1$, $f_1 \amalg f_2(z) = f_1(z)$ y $h(z) = z$, entonces $h \circ (f_1 \amalg f_2)(z) = f_1(z) = f_1 \circ h(z)$. Si $z \in K_2$,

$f_1 \amalg f_2(z) = z^d$ y $h(z) = \hat{\varphi}_1(z)$, entonces $h \circ (f_1 \amalg f_2)(z) = \hat{\varphi}_1(z^d) = f_1(\hat{\varphi}_1(z)) = f_1 \circ h(z)$. Por tanto, la función $z \mapsto z^d$ funciona como un neutro en el acoplamiento geométrico de polinomios de grado d , pues $f_1 \cong f_1 \amalg (z \mapsto z^d)$.

El siguiente lema expone algunas de las propiedades de los acoplamientos geométricos, una prueba se pueda consultar en [Milnor 2004]. Recordemos que β y $-\beta$ son los puntos fijo y prefijo del polinomio que son los puntos de aterrizaje de los rayos externos con ángulos cero y un medio.

Lema 3.5

Si $F \cong f_1 \amalg f_2$ es un acoplamiento geométrico de polinomios cuadráticos, entonces:

1. *Los puntos fijos β de f_1 y f_2 se identifican en un punto en $K_1 \amalg K_2$, pero ningún otro punto en K_1 o K_2 se identifica con alguno de estos puntos fijos β .*
2. *De manera análoga los puntos $-\beta$ de K_1 y de K_2 se identifican en un punto en $K_1 \amalg K_2$, pero no se identifican con ningún otro punto.*
3. *Los puntos críticos de f_1 y f_2 corresponden a los dos puntos críticos de F . En particular, estos dos puntos siempre son distintos bajo el acoplamiento.*

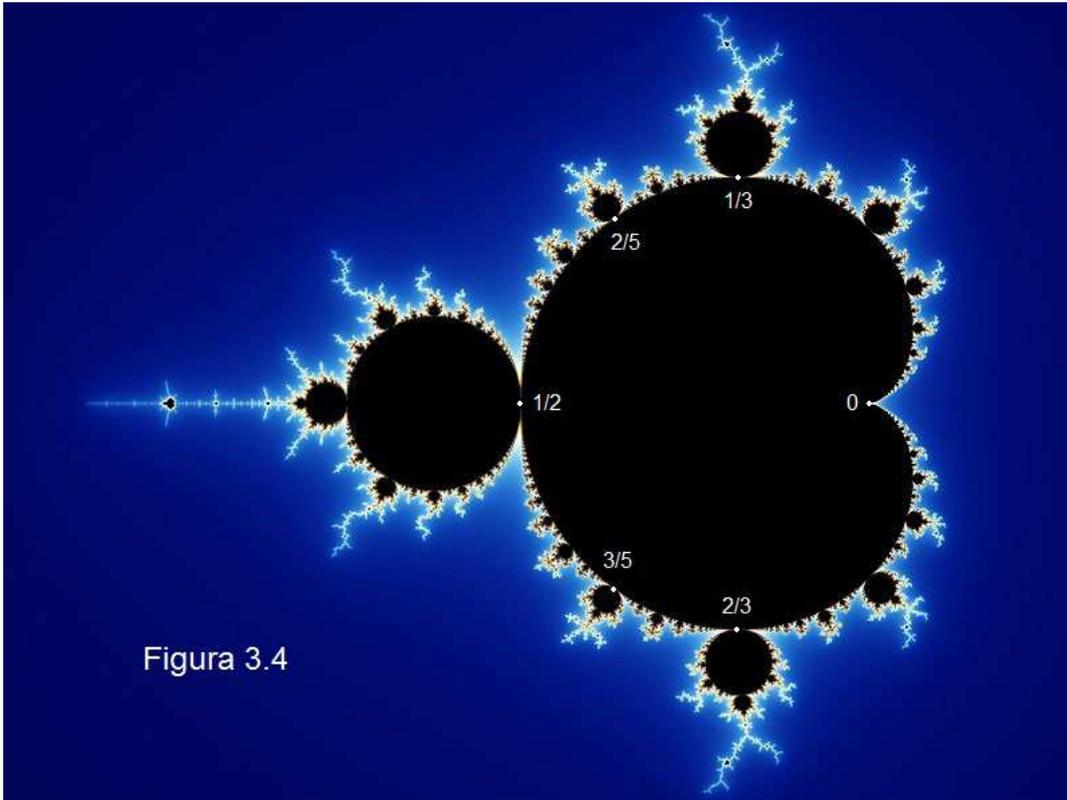


Figura 3.4

Por otro lado, recordando que $f_c(z) = z^2 + c$ y dado que c es cualquier número complejo, esto implica que para cada número complejo λ existe un único polinomio f_c con punto fijo $z_0 = f(z_0)$ y con multiplicador $f'(z_0) = \lambda$, es decir, $z_0^2 + c = z_0$ y $2z_0 = \lambda$. Lo cual implica que podemos poner a c en función de λ , $c = c(\lambda) = \lambda/2 - (\lambda/2)^2$. Cuando $|\lambda| = 1$, el conjunto de c 's resultantes se puede ver como la imagen del círculo $\{z_0 : |z_0| = \frac{1}{2}\}$ bajo la función $w \mapsto w - w^2$, la cual es la composición $f \circ g \circ h$ de las funciones $h(w) = w - \frac{1}{2}$, $g(w) = w^2$ y $f(w) = \frac{1}{4} - w$, es decir la cardioide principal del conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \{c_n\} \text{ está acotada}, c_n = f_c^n(0)\} = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ es conexo}\}$, la frontera de la componente hiperbólica de los ciclos atractores de longitud 1. Así que cuando λ varía sobre el círculo unitario, el

parámetro correspondiente $c(\lambda)$ varía sobre esta cardioide. Ahora, se sabe que el conjunto de Mandelbrot es conexo, véase [Douady – Hubbard 1982] y [Montero 2008], y para cada raíz de la unidad $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}} \neq 1$, resulta que existe una componente conexa $\mathcal{M}(p/q)$ de $\mathcal{M} \setminus (\text{cardioide})$ que se encuentra afuera de la cardioide pero está pegada a ella por el punto $c(\lambda)$. La cerradura $\overline{\mathcal{M}}(p/q)$ es llamado el p/q – miembro de \mathcal{M} .

La Figura 3.4 es una modificación de [Wikipedia 3.4], y muestra algunos de los puntos $c(\lambda)$. El racional p/q que acompaña a estos puntos es el argumento de λ .

Una propiedad característica de los polinomios f_c con c que pertenece al p/q – miembro, es que existen q rayos externos $\mathcal{R}_{t_j}(K)$ que aterrizan en un punto fijo común de f , con ángulos $0 < t_1 < \dots < t_q < 1$, tal que $f(\mathcal{R}_{t_j}) = \mathcal{R}_{t_k}$, donde $k \equiv j + p \pmod{q}$. Estos ángulos t_j son determinados de manera única por p/q . A este punto de aterrizaje común se le llama el punto fijo α de f .

Veamos que sucede cuando intentamos hacer un acoplamiento entre dos polinomios f_{c_1}, f_{c_2} con $c_1 \in p/q$ – miembro y $c_2 \in (-p/q)$ – miembro, es decir cuando pertenecen a p/q – miembros conjugados de \mathcal{M} . Como $q > 1$, existen al menos dos rayos distintos $\mathcal{R}_{t_1}(K_1)$ y $\mathcal{R}_{t_2}(K_1)$ que aterrizan en el punto fijo α_1 de $K_1 = K(f_{c_1})$, del mismo modo existen al menos dos rayos distintos $\mathcal{R}_{s_1}(K_2)$ y $\mathcal{R}_{s_2}(K_2)$ que aterrizan en el punto fijo α_2 de $K_2 = K(f_{c_2})$. El caso más sencillo es cuando acoplamos topológicamente a f_c con $f_{\bar{c}}$. Dado que $f_{\bar{c}}(z) = \overline{f_c(\bar{z})}$, que dicho de otro modo es que f_c y $f_{\bar{c}}$ son topológicamente conjugadas y la conjugación es la conjugación compleja, entonces $K(f_{\bar{c}}) = \{\bar{z} \in \mathbb{C} : z \in K(f_c)\}$. Por tanto si $K_c = K(f_c)$ y $K_{\bar{c}} = K(f_{\bar{c}})$, $s_j = -t_j$ y tenemos que $\mathcal{R}_{t_1}(K_c)$ y $\mathcal{R}_{-t_1}(K_{\bar{c}})$ están en una clase de equivalencia al igual que $\mathcal{R}_{t_2}(K_c)$ y $\mathcal{R}_{-t_2}(K_{\bar{c}})$ con extremos los puntos fijos α de f_c y $\bar{\alpha}$ de $f_{\bar{c}}$, por lo cual forman una curva cerrada y por el Teorema de Moore esto implica que $K_1 \amalg K_2$ no es una esfera de dimensión dos, por tanto no existe un acoplamiento geométrico por definición. Regresando al caso general, como $c_1 \in p/q$ – miembro entonces $\bar{c}_1 \in (-p/q)$ – miembro de \mathcal{M} con rayos $\mathcal{R}_{-t_1}(K(f_{\bar{c}_1}))$ y $\mathcal{R}_{-t_2}(K(f_{\bar{c}_1}))$ aterrizando en $\bar{\alpha}$, y como los ángulos t_j son determinados de manera única por $-p/q$, tenemos la igualdad en los ángulos $s_j = -t_j$, por lo que los rayos $\mathcal{R}_{-t_1}(K_2)$ y $\mathcal{R}_{-t_2}(K_2)$ que aterrizan en el punto fijo α_2 junto los rayos $\mathcal{R}_{t_1}(K_1)$ y $\mathcal{R}_{t_2}(K_1)$ que aterrizan en el punto fijo α_1 , forman un lazo cerrado, y por tanto no existe un acoplamiento geométrico si los puntos c_1 y c_2 están en p/q – miembros conjugados de \mathcal{M} .

Recordemos que un espacio cubriente de un espacio topológico X es un espacio topológico X' junto con un mapeo continuo y sobreyectivo $p : X' \rightarrow X$ tal que existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de X tal que para cada α , $p^{-1}(U_\alpha)$ es una unión ajena de conjuntos abiertos en X' , cada uno de los cuales es mapeado homeomorficamente sobre U_α por p . La cardinalidad de el conjunto $p^{-1}(x)$ es constante localmente en X , por tanto si X es conexo, esta cardinalidad es constante según como x se mueve por X y es denominado el grado del cubriente, el cual también es el índice de $p_*(\pi_1(X', x'_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$ y puede ser finito o infinito, véase [Hatcher 2002].

En caso de que tengamos un mapeo holomorfo $p : S' \rightarrow S$ entre superficies de Riemann, diremos que p es un mapeo cubriente entre superficies si p es un mapeo cubriente y si el homeomorfismo de los abiertos conexos de $p^{-1}(U_\alpha)$ es un isomorfismo conforme. Diremos que un mapeo $p : S' \rightarrow S$ es un mapeo propio si la imagen inversa $p^{-1}(K)$ de cualquier subconjunto compacto en S es un subconjunto compacto de S' . Esto implica que todo mapeo propio es *finito* a 1 y la función $\sum_{p(a)=b} m(p, a)$, donde $m(p, a)$ es la multiplicidad de p en a , es independiente de b . Diremos que este mapeo entre superficies de Riemann es una cubierta ramificada de grado d . De manera más general, diremos que un mapeo holomorfo $p : S' \rightarrow S$ entre superficies de Riemann es una cubierta ramificada si todo punto de S tiene una vecindad conexa U tal que cada componente de $p^{-1}(U)$ es mapeado sobre U por un mapeo propio. Véase [Milnor 2006] y compárese con [McMullen 2005].

Para la discusión de abajo necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.6

Sea $f, g : S^2 \rightarrow S^2$ cubiertas ramificadas que preservan la orientación. Sean $\Omega_f = \{\text{puntos críticos de } f\}$ y $P_f = \bigcup_{n>0} f^n(\Omega_f)$, de tal modo que las cardinalidades de P_f y P_g sean finitas (es decir, f y g son poscríticamente finitos). Diremos que f y g son Thurston equivalentes si existen homeomorfismos que preservan la orientación $\theta, \theta' : S^2 \rightarrow S^2$ tal que $\theta = \theta'$ en P_f , $\theta(P_f) = P_g$, θ y θ' son isotópicas relativas a P_f y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & \theta' & \\ & S^2 \rightarrow S^2 & \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ & S^2 \rightarrow S^2 & \\ & \theta & \end{array} .$$

Veáanse [Douady – Hubbard 1993], [Rees 1992] y [Shishikura 2000].

Según la interpretación de [Milnor 2004], Mary Rees y Tan Lei estudiaron los acoplamientos bajo la hipótesis de que $f_{c_1} = z^2 + c_1$ y $f_{c_2} = z^2 + c_2$ tienen una órbita crítica periódica. Ellos mostraron que el acoplamiento formal $f_{c_1} \uplus f_{c_2}$ es Thurston equivalente a algún mapeo racional si y sólo si los puntos c_1 y c_2 no pertenecen a p/q – miembros conjugados de \mathcal{M} . Mary Rees mejoraría este resultado, asumiendo que f_{c_1} y f_{c_2} tienen órbitas críticas periódicas y que los puntos c_1 y c_2 no pertenecen a p/q – miembros conjugados de \mathcal{M} , mostró que la función racional construída por ella y Tan Lei era en realidad un acoplamiento geométrico de f_{c_1} y f_{c_2} . Cabe mencionar que el trabajo de Rees fue establecido en términos de laminaciones. Véase [Rees 1992], [Tan 1991].

Shishikura generalizaría más tarde este resultado, ampliando la hipótesis para que los polinomios f_{c_1} y f_{c_2} fueran poscríticamente finitos y definiendo acoplamiento degenerado, probaría que si este acoplamiento degenerado es Thurston equivalente a un mapeo racional F , entonces el acoplamiento geométrico entre ellos existe y es único salvo conjugación compleja. Véase [Shishikura 2000].

Según [Milnor 2004], esta discusión establece el siguiente resultado:

Teorema 3.7

Para polinomios cuadráticos f_{c_1} y f_{c_2} poscríticamente finitos las siguientes condiciones son equivalentes:

- *El acoplamiento geométrico existe.*
- *Los puntos c_1 y c_2 no pertenecen a p/q – miembros conjugados del conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} .*
- *El espacio compacto $K_1 \amalg K_2$, asociado al acoplamiento topológico, es una esfera topológica de dimensión 2.*

Este resultado no se generaliza a polinomios cúbicos, en [Shishikura Tan 2000] se muestra un ejemplo cúbico en el cual el acoplamiento geométrico no existe, pero $K_1 \amalg K_2$ es una esfera topológica de dimensión 2.

En el siguiente capítulo se expondrá un ejemplo de acoplamiento geométrico cuyos polinomios cuadráticos no cumplen las hipótesis de este teorema, haremos el acoplamiento entre el poscríticamente finito $f_{-2}(z) = z^2 - 2$ y el poscríticamente infinito $f_{1/4}(z) = z^2 + \frac{1}{4}$, el primero pertenece al $1/2$ – miembro de \mathcal{M} y el segundo no pertenece a ninguno, y ambos son los extremos reales del conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} .

4 Un Acoplamiento con Elemento Poscríticamente Infinito

Ahora construiremos un acoplamiento geométrico de un polinomio poscríticamente infinito con un polinomio poscríticamente finito, es decir, donde no se cumplen las hipótesis del Teorema 3.7. Estos polinomios serán $f_{1/4}(z) = z^2 + \frac{1}{4}$ y $f_{-2}(z) = z^2 - 2$, respectivamente. Así que veamos la dinámica compleja de estos polinomios cuadráticos.

4.1. Dinámica de los Polinomios

Primero estudiemos $f_{-2}(z) = z^2 - 2$ y veamos que su conjunto de Julia es el intervalo real $[-2, 2] \times \{0\}$. Para poder hacerlo introduciremos la siguiente función, sea $\varphi : \{|w| > 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus ([-2, 2] \times \{0\})$ tal que $\varphi(w) = w + 1/w$. En realidad φ es definible en toda la esfera de Riemann, pero hemos escogido el dominio de φ como el exterior del disco unitario porque ahí la función φ es uno a uno y al ser una función racional de grado 2, toda imagen tiene dos preimágenes contadas con multiplicidad y como $\varphi(w) = \varphi(1/w)$, la imagen de $\{|w| < 1\}$ es la misma que la imagen de $\{|w| > 1\}$. Además, veremos que φ es la inversa a la función de Böttcher $\hat{\phi}$ del Teorema 2.4. Al considerar la extensión de φ en $\hat{\mathbb{C}}$, obtenemos $\varphi(S^1) = [-2, 2] \times \{0\}$, pues si w está en el círculo unitario S^1 , $w = e^{i\theta}$ y $f(w) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos \theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, y cuando S^1 es recorrido una vez el intervalo real $[-2, 2]$ es recorrido dos veces. Además, vemos que

$$\varphi(w) = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \cos \theta \left(r + \frac{1}{r} \right) + i \sin \theta \left(r - \frac{1}{r} \right) = u + iv.$$

Así, la imagen de las rectas $\{re^{i\theta_0} : 1 < r, \theta_0 \in [0, 2\pi]\}$ cumplen

$$\frac{u^2}{4\cos^2\theta_0} - \frac{v^2}{4\sin^2\theta_0} = \frac{1}{4} \left(r^2 + 2 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{4} \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \right) = 1,$$

es decir, van a dar a hipérbolas que se acercan perpendicularmente al intervalo real $[-2, 2]$. Del mismo modo, la imagen de los círculos $\{r_0e^{i\theta} : r_0 \in (1, \infty), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ cumplen

$$\frac{u^2}{\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

es decir, van a dar a elipses, con focos en ± 2 , que rodean al intervalo real $[-2, 2]$ y tienden a él cuando r tiende a 1. Vease [Markushevich 1970] para más detalles de esta función. φ aparece frecuentemente en muchos problemas y debido a las aplicaciones en aeromecánica que encontró Nikolái Joukowski es denominada función de Joukowski.

Vemos que

$$f_{-2} \circ \varphi(w) = \left(w + \frac{1}{w} \right)^2 - 2 = w^2 + \frac{1}{w^2} = \varphi(w^2),$$

es decir, φ es una buena candidata a ser la inversa de la función de Böttcher ϕ para f_{-2} del punto fijo superatractor ∞ . Esto implica que si $z \in \mathbb{C} \setminus ([-2, 2] \times \{0\}) \Rightarrow re^{i\theta} = w = \varphi^{-1}(z) \in \{|w| > 1\}$, entonces $f_{-2}(z) = \varphi(w^2) = \varphi(r^2 e^{i2\theta})$. Interpretándolo geoméricamente, tomamos un z que está en la intersección de una hipérbola y una elipse, va a dar a w bajo φ^{-1} que se encuentra en la intersección de una recta con un círculo, como $r > 1$, bajo w^2 va a dar a un círculo de radio r^2 más cercano a ∞ intersectado con la recta de ángulo 2θ , y al aplicar φ , w^2 es mandado a la intersección de una hipérbola con una elipse $\varphi(\{r^2 e^{i2\theta} : r \in (1, \infty), 0 \leq \theta \leq 2\pi\})$ más cercana a ∞ , pues los semiejes mayores $r^2 + 1/r^2$, $r + 1/r$, y los semiejes menores $r^2 - 1/r^2$, $r - 1/r$, satisfacen que $r^2 + \frac{1}{r^2} > r + \frac{1}{r}$ y $r^2 - \frac{1}{r^2} > r - \frac{1}{r}$, pues como $r > 1$, la primera desigualdad es equivalente a $(r-1)^2(r^2+r+1) = r^4 - r^3 - r + 1 > 0$, y la segunda es trivial pues $r^2 > r$ y $-1/r^2 > -1/r$. Por tanto, dado que $f_{-2}^n(z) = \varphi(w^{2^n})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{-2}^n(z) = \infty$ para toda $z \in \mathbb{C} \setminus ([-2, 2] \times \{0\})$.

Ahora veamos que sucede con $f(z)$ si $z \in [-2, 2] \times \{0\}$, se sigue que $z = x + 0i = x$ y cumple la desigualdad,

$$|x| \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x^2 - 2 \leq 2 \Leftrightarrow f_{-2}(z) \in \mathbb{C} \setminus ([-2, 2] \times \{0\}).$$

Esto implica que la cuenca de atracción del infinito es $\mathbb{C} \setminus ([-2, 2] \times \{0\})$ y por el Corolario 1.22

$$J(f_{-2}) = \partial(\mathcal{A}(\infty)) = [-2, 2] \times \{0\}.$$

Además, $F(f_{-2}) = \mathcal{A}(\infty) = \mathbb{C} \setminus ([-2, 2] \times \{0\})$ y el conjunto de Julia lleno $K_{-2} = K(f_{-2}) = J(f_{-2})$. Ahora sí podemos decir que $\varphi : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus ([-2, 2] \times \{0\})$ es la inversa de la función de Böttcher ϕ no sólo de la asociada al punto fijo superatractor ∞ , sino que además es la inversa de la función de Böttcher $\hat{\phi}$ asociada a f_{-2} del Teorema 2.4, la extensión a toda la cuenca de atracción del ∞ .

Vemos que los puntos fijos de f_{-2} son las raíces de la ecuación $z^2 - z - 2 = 0$, por lo que $Fix(f_{-2}) = \{-1, 2\}$, y estos dos puntos fijos son repulsores, pues $(f_{-2})'(-1) = -2$ y $(f_{-2})'(2) = 4$. La órbita del punto crítico es una órbita prefija muy sencilla: $0 \mapsto -2 \mapsto 2 \cup$

En la Figura 4.1, una imagen producida gracias al programa de [Kawahira 2001], se muestra el conjunto de Julia $J(f_{-2})$. Las hipérbolas corresponden a algunos rayos externos $\mathcal{R}_t(K(f_{-2}))$, todos los que no tienen nomenclatura corresponden a los rayos de ángulo $\frac{i}{32}$ con $0 < i < 32$ y distinto de 16, los rayos con ángulo 0 y $\frac{1}{2}$ son los rayos $[-\infty, -2] \times \{0\}$ y $[2, \infty] \times \{0\}$, respectivamente. Se muestran los rayos con ángulos $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, porque son los que aterrizan en el punto fijo -1 .

Para $f_{1/4}(z) = z^2 + 1/4$, sabemos que los puntos fijos son las raíces de la ecuación $z^2 - z - \frac{1}{4} = (z - \frac{1}{2})^2 = 0$, así que $Fix(f_{1/4}) = \{\frac{1}{2}\}$, el cual es un punto fijo parabólico, ya que $(f_{1/4})'(\frac{1}{2}) = 1$. La órbita del punto crítico 0 es una sucesión creciente cuyo límite es el punto fijo $\frac{1}{2}$, lo cual es una consecuencia de que $x^2 + \frac{1}{4}$ es una función creciente en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y que $\frac{1}{2}$ es punto fijo. Esto quiere decir que $\frac{1}{4} \in \mathcal{M}$, por lo que $J(f_{1/4})$ es conexo.

Aunque no podemos calcular el conjunto de Julia de manera tan exacta como se hizo con f_{-2} , las gráficas por computadora dan una aproximación bastante eficaz. En la figura 4.2, también producida gracias al programa de [Kawahira 2001], se muestra la órbita del 0 como los puntos que se acumulan en $\frac{1}{2}$, también se muestra al conjunto de Julia lleno $K_{1/4} = K(f_{1/4})$ como el objeto negro parecido a una coliflor. El conjunto de Julia es la frontera de $K_{1/4}$ por el Lema 2.3, y de hecho $J(f_{1/4})$ es conocido como la coliflor. Las curvas que aterrizan en la coliflor, son precisamente los rayos externos correspondientes a los ángulos $\frac{i}{32}$ con $0 \leq i \leq 32$.

De hecho, todos los rayos externos aterrizan en un punto de la coliflor y todos los puntos de aterrizaje son distintos, es decir, por el Teorema 2.7, $J(f_{1/4})$ es localmente conexo y no existen dos rayos que aterricen en el mismo punto. La última observación implica, por el Teorema de Moore (dado que no hay una clase de equivalencia de la Definición 3.1 que separe a la esfera), que $K_{1/4} \amalg K_{-2}$ es homeomorfo a la esfera S^2 , lo que es un buen comienzo para hacer el acoplamiento geométrico entre $f_{1/4}$ y f_{-2} .

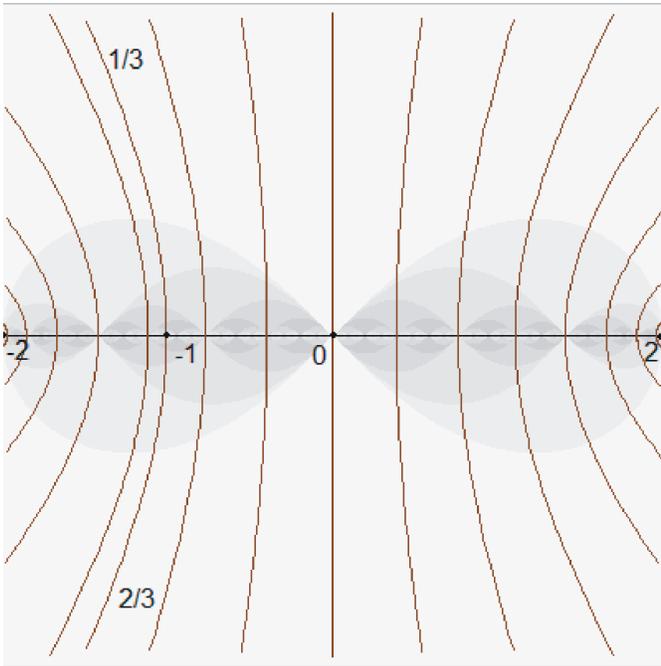


Figura 4.1

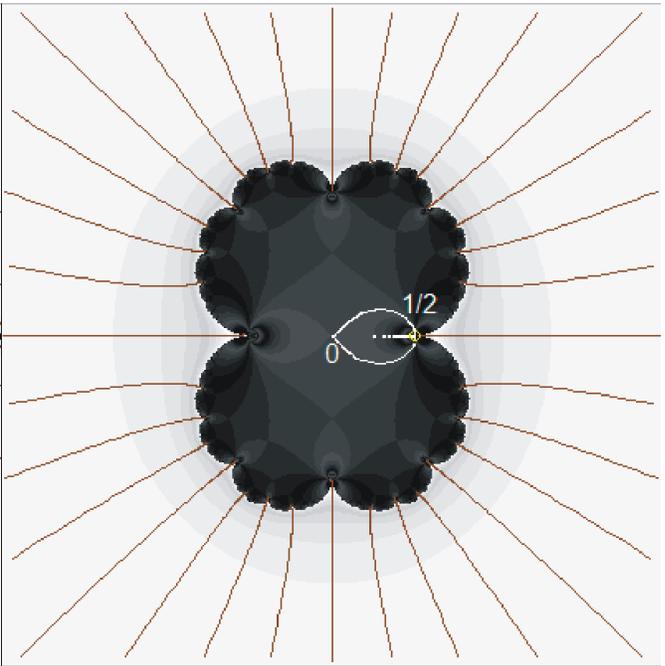


Figura 4.2

4.2. Acoplamiento de los Polinomios

Ahora construiremos el acoplamiento geométrico para estos dos polinomios. Si queremos que una función racional de grado 2 sea un candidato para ser conjugada al acoplamiento $f_{1/4} \amalg f_{-2}$, ésta tiene que cumplir las propiedades del Lema 3.5, porque si no las cumpliera, el candidato inmediatamente quedaría descartado por contrapositiva.

Normalización

Dado que los puntos críticos de ambos polinomios son el cero, en el acoplamiento, estos dos puntos tienen que ir a los polos. Del mismo modo los puntos fijos $\pm\beta$, puntos de aterrizaje de los rayos con ángulo 0 y $\frac{1}{2}$ en ambos polinomios, van a dar a un punto en $K_{1/4} \amalg K_{-2} \stackrel{hom}{\simeq} \hat{C}$ bajo el acoplamiento topológico. Para facilitar la construcción de la función racional, colocaremos los puntos críticos 0 e ∞ en ± 1 , los puntos fijos $\pm\beta$ en ∞ y el 0, véase la Figura 4.3.

Sea $F(z) = \frac{az^2 + bz + c}{dz^2 + ez + f}$, entonces $F'(z) = \frac{(ae - bd)z^2 + 2(af - cd)z + (bf - ce)}{(dz^2 + ez + f)^2}$. Como queremos que $F(\infty) = \infty$, entonces $d = 0$, lo que implica que $F'(z) = \frac{aez^2 + 2afz + bf - ce}{(ez + f)^2}$. Como también queremos que $F'(\pm 1) = 0$, entonces $ae \pm 2af + bf - ce = 0$, lo que al resolver el sistema tenemos que $4af = 0$, con $a \neq 0$ pues sino F dejaría de ser de grado 2, por lo que $f = 0$. Además, $e \neq 0$, pues sino F sería un polinomio de grado 2 y tendría otro punto crítico en el ∞ , pero en el acoplamiento que estamos construyendo ya consideramos los dos únicos puntos críticos que pueden haber. Así que sustituyendo en el sistema de ecuaciones y como $e \neq 0$, entonces $a = c$. Así que $F(z) = \frac{az^2 + bz + a}{ez}$, cumple lo requerido. Por tanto, podemos reescribir a F como

$$F(z) = a \left(z + \frac{1}{z} \right) + b.$$

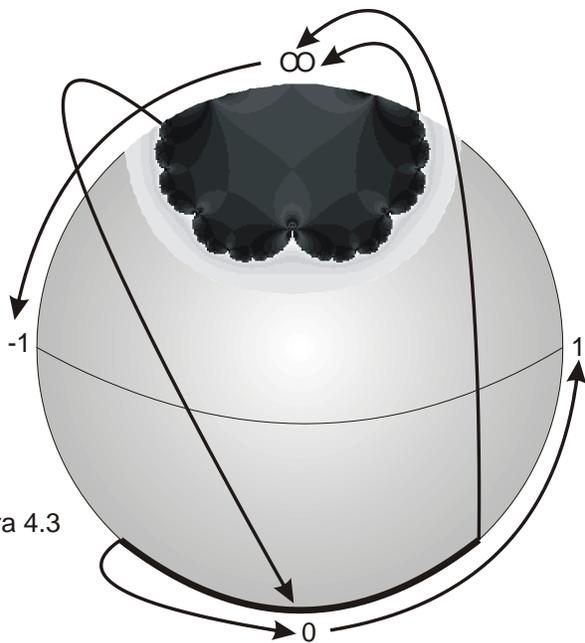


Figura 4.3

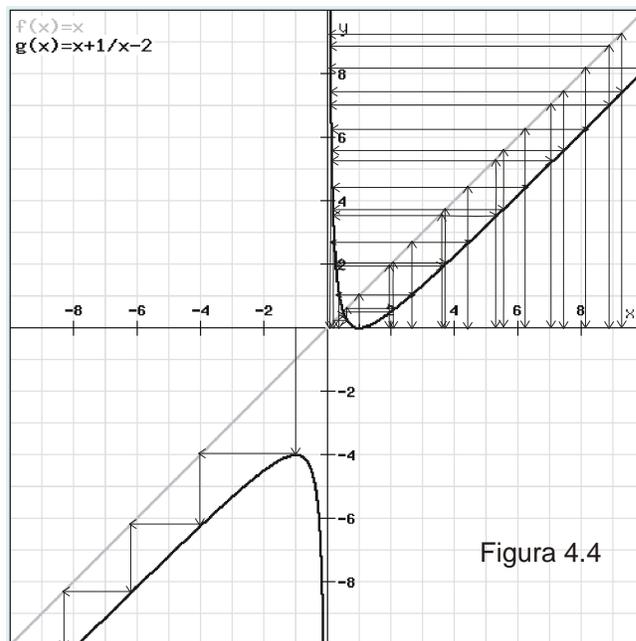


Figura 4.4

Dinámica de la Normalización

Ahora necesitamos encontrar los valores explícitos de a y b , para hacer esto notemos que en general, para los acoplamientos topológicos, todas las órbitas de los puntos que están en los conjuntos de Julia no se ven afectadas en su comportamiento dinámico al momento de hacer el espacio cociente. Esta es nada más una observación puntual, es decir, no describe el comportamiento global del acoplamiento, ni siquiera el de una vecindad, pues de hecho el cociente de los conjuntos de Julia puede ser muy distinto, como muestra [Milnor 2004], donde el acoplamiento de dos dendritas es una $2 - esfera$. Donde queda totalmente igual de manera global es en el interior de los conjuntos de Julia llenos, o sea, en las componentes acotadas del conjunto de Fatou, porque el cociente no afecta a ninguno de esos puntos.

En el caso de $f_{1/4} \amalg f_{-2}$, el interior de $K_{-2} = K(f_{-2})$ es vacío, mientras que el interior de $K_{1/4} = K(f_{1/4})$ es homeomorfo a un disco abierto. Por el Lema 3.5, el punto fijo $\beta_{1/4} = \frac{1}{2}$ de $f_{1/4}$ se identificará de manera única con el punto fijo $\beta_{-2} = 2$ de f_{-2} en un punto de $K_{1/4} \amalg K_{-2} \stackrel{hom}{\simeq} S^2$, el cual, como ya dijimos arriba, colocaremos en el ∞ . Pero $\frac{1}{2}$ de $f_{1/4}$ es un punto fijo parabólico con $f'(\frac{1}{2}) = 1$ e $int(K_{1/4}) \neq \emptyset$, por lo que en nuestra función racional, ∞ debe ser un punto parabólico. Como $F'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{F'(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{a(1 - \frac{1}{z^2})} = \frac{1}{a}$, entonces escogemos $a = 1$.

Ahora, las órbitas críticas deben comportarse dinámicamente del mismo modo en \hat{C} bajo nuestra función racional F que como se comportan bajo $f_{1/4}$ y f_{-2} . Para f_{-2} tenemos que $0 \mapsto -2 \mapsto 2 \circlearrowleft$. Como 1 es el punto crítico correspondiente a 0 y el ∞ es el punto fijo correspondiente a 2 bajo f_{-2} en el acoplamiento geométrico, se tiene que cumplir que $F^2(1) = \infty$. Como $F(1) = 2 + b$ y $F(0) = \infty$, necesitamos que $F(1) = 0$, por lo que $b = -2$, y ahora ya tenemos nuestro candidato para el acoplamiento geométrico:

$$F(z) = z + \frac{1}{z} - 2.$$

Sabemos que ∞ es un punto fijo de F , ¿qué pasa con los demás? Si todo está bien, debería de haber sólo otro punto fijo, lo cual es cierto pues los puntos fijos de F cumplen la ecuación $-2z + 1 = 0$, por lo que $Fix(F) = \{\frac{1}{2}, \infty\}$. Además, de manera intuitiva, este punto fijo $\frac{1}{2}$ en F , correspondiente al punto fijo -1 de f_{-2} , no debería verse afectado en su multiplicador al momento de hacer el acoplamiento (los puntos de aterrizaje de los rayos de ángulo $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de f_{-2} no

afectan sus vecindades de un modo particular) y debería ser repulsor al igual que -1 de f_{-2} , y esto también es cierto, pues como $F'(z) = 1 - 1/z^2$, $F'(\frac{1}{2}) = -3$. Así que $\frac{1}{2} \in J(F)$.

A sí mismo, la órbita del punto crítico -1 , debe acumularse en el ∞ , pues hereda el mismo comportamiento dinámico de la órbita del punto crítico 0 de $f_{1/4}$ que se acumula en $\frac{1}{2}$. Vemos que $F(-1) = -4$, $F^2(-1) = -6\frac{1}{4}$, $F^3(-1) = -8\frac{1}{4} - \frac{4}{25}$. Este comportamiento se mantiene porque $F(x) < x$ si $x < 0$ en \mathbb{R} , pues $\frac{1}{x} < 0 < 2 \Rightarrow \frac{1}{x} - 2 < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} - 2 < x$, y como el único punto fijo finito de F es positivo, $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(z) = \infty$ para $z \in \mathbb{R}^- \times \{0\}$ en $\hat{\mathbb{C}}$, en particular para -1 . De hecho, $\{F^n(-1)\}$ es una sucesión decreciente hacia el punto fijo ∞ , al igual que $\{f_{1/4}^n(0)\}$ era una sucesión creciente hacia el punto fijo $\frac{1}{2}$. En la Figura 4.4, una modificación de una gráfica hecha por el programa de [Kummer], se visualiza como se escapa la órbita de -1 bajo $F(x)$ a $-\infty$, al verla como una función real.

Ahora veamos que el conjunto de Julia de F es $J(F) = \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$, para esto veremos que las dos contenciones de conjuntos se cumplen.

Como ∞ es un punto fijo parabólico de F , $\infty \in J(F)$ por el Lema 1.16, por lo que 0 también está en $J(F)$ pues $F(0) = \infty$. Por el Corolario 1.23 el conjunto de las imágenes inversas de cualquier punto en el Julia es denso en el Julia, así que veamos que pasa con las imágenes inversas de 0 . Para encontrar la imagen de w bajo $F(z)$ vemos que $F(z) = w \Rightarrow z^2 + 1 - 2z = zw \Rightarrow z^2 - (w+2)z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{w+2 \pm \sqrt{w(w+4)}}{2}$. Si $w \in \mathbb{R}$, nos interesa saber cuando las imágenes inversas siguen siendo reales, lo cual sucede cuando $w(w+4) \geq 0$, es decir, cuando $w \in (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$. Esto nos indica que la imagen inversa de $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es real, y vuelve a ser no negativa cuando $w+2 \geq \sqrt{w(w+4)} \Leftrightarrow w^2 + 4w + 4 \geq w^2 + 4w \Leftrightarrow 4 \geq 0$. Por tanto $F^{-1}(\mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$, lo cual también se puede ver fácilmente de la Figura 4.4.

Por el Corolario 1.23, $A_0 = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : F^n(z) = 0, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $J(F)$. Por lo dicho arriba $A_0 \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$ y esto implica que $J(F) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$, pues si hubiera algún $z_0 \in J(F) \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\})$, como $\mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$ es cerrado en $\hat{\mathbb{C}}$ existiría una vecindad V en z_0 contenida en el complemento de $\mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$, es decir, $V \cap (\mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}) = \emptyset$, por otro lado A_0 es denso en $J(F)$ por lo que $V \cap A_0 \neq \emptyset$ y como $A_0 \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$ entonces $V \cap (\mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, por tanto $J(F) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$. En la Figura 4.4 se muestra algunas imágenes inversas de -1 , lo cual muestra de manera intuitiva que A_0 es denso en $\mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$.

Para ver la otra contención necesitaremos algunos conceptos y resultados sobre puntos fijos parabólicos dados en [Milnor 2006]. Para esto consideramos funciones holomorfas en alguna vecindad del origen $f(z) = z + az^{n+1} + \dots$ con $n \geq 1$ y $a \neq 0$. Diremos que un número complejo \mathbf{v} es un vector repulsor para f en el origen si el producto $na\mathbf{v}^n = 1$, y que es un vector atractor si $na\mathbf{v}^n = -1$. El vector \mathbf{v} debe pensarse como un vector tangente a \mathbb{C} en el origen. Existen vectores $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n-1}$, con \mathbf{v}_0 repulsor y $\mathbf{v}_j = e^{\pi i j/n} \mathbf{v}_0$ tal que $na\mathbf{v}_j^n = (-1)^j$. Ahora, si una órbita $f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ converge a cero tal que ninguno de sus elementos es cero, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{z_k} = \mathbf{v}_j$ para algún j impar, cuando esto suceda diremos que $\{z_k\}$ tiende a cero en la dirección del vector atractor \mathbf{v}_j . Dado uno de estos vectores de atracción en el espacio tangente de $\hat{\mathbb{C}}$ en \hat{p} , la cuenca de atracción parabólica $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}(\hat{p}, \mathbf{v}_j)$ se define como el conjunto de todos los puntos $p_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ cuya órbita $p_0 \mapsto p_1 \mapsto \dots$ converge a \hat{p} en la dirección \mathbf{v}_j . Estas n cuencas serán ajenas y conjuntos abiertos totalmente invariantes. De manera equivalente \mathcal{A}_j puede describirse como la componente conexa del conjunto de Fatou $\hat{\mathbb{C}} \setminus J$ que contiene a p_k para una k suficientemente grande siempre que $\{p_k\}$ converja a \hat{p} de la dirección de \mathbf{v}_j . Bajo este contexto enunciamos el siguiente lema, cuya demostración puede verse en [Milnor 2006].

Lema 4.1

Para una función racional $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, cada cuenca de atracción parabólica \mathcal{A}_j está contenida en el conjunto de Fatou $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$, pero cada frontera $\partial \mathcal{A}_j$ está contenida en el conjunto de Julia $J(f)$.

Ahora regresemos a nuestra función racional $F(z) = z + \frac{1}{z} - 2$, la cual tiene un punto fijo parabólico en ∞ . Formalmente al pasar el ∞ al origen, $F^*(z) = 1/F(1/z) = z/(z-1)^2$ tiene un punto fijo parabólico en el origen con serie de potencias

centrada en el cero $F^*(z) = z + 2z^2 + \dots$, es decir $n = 1$ y $a = 2$, por lo que $\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{2}$ y $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}$, es decir la órbitas se acercan al origen por el eje real negativo y se alejan por el eje real positivo. Cuando regresamos esta información a ∞ bajo F , las órbitas se acercan a ∞ también por el semicírculo mayor del eje real negativo y se alejan de él por el semicírculo mayor del eje real positivo. Como $n = 1$, sólo hay un vector atractor y un vector repulsor, y por tanto sólo una cuenca de atracción parabólica \mathcal{A}_1 del punto fijo parabólico ∞ , la cual está contenida en el conjunto de Fatou $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(F)$ por el Lema 4.1, el cual también implica, junto con la contención de arriba, que $\partial\mathcal{A}_1 \subseteq J(F) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$. De la Figura 4.4 se deduce que $F(\mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$, por lo que ningún punto de $\mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$ está en \mathcal{A}_1 que es abierto, , por tanto $\mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\} = \partial\mathcal{A}_1$. Así que, juntando las dos contenciones,

$$J(F) = \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}.$$

El Acoplamiento Geométrico

Para ver que F es el acoplamiento geométrico de $f_{1/4} \amalg f_{-2}$, tenemos que rotar de regreso la función de tal modo que los puntos críticos ± 1 vayan a dar al 0 y al ∞ , el punto fijo ∞ al 1 y el punto prefijo 0 al -1 . Como la equivalencia entre funciones está dada por conjugación conforme, y todos los automorfismos conformes de $\hat{\mathbb{C}}$ son las transformaciones de Möbius, rotaremos estos puntos por medio de $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tal que $\frac{a+b}{c+d} = M(1) = 0$, $\frac{a}{c} = M(\infty) = 1$, $\frac{b}{d} = M(0) = -1$, entonces $M(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Así que la función que buscamos es

$$\begin{aligned} G(z) &= M \circ F \circ M^{-1}(z) = M \circ F \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = M \left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1-z}{1+z} - 2 \right) \\ &= \left(\frac{\frac{1+z}{1-z} + \frac{1-z}{1+z} - 3}{\frac{1+z}{1-z} + \frac{1-z}{1+z} - 1} \right) = \frac{5z^2 - 1}{3z^2 + 1}. \end{aligned}$$

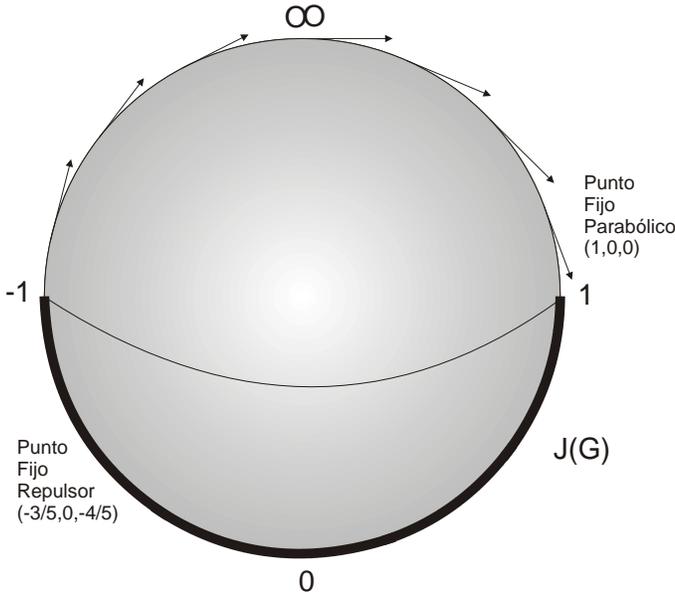


Figura 4.5

La información de F transmitida a G es la siguiente: $Fix(G) = \{-\frac{1}{3}, 1\}$ con $-\frac{1}{3}$ punto fijo repulsor, y 1 punto fijo parabólico, los puntos críticos de G son 0 e ∞ , con conjunto de Julia $J(G) = [-1, 1] \times \{0\}$, conjunto de Fatou $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus ([-1, 1] \times \{0\})$ y con las órbitas de la cuenca de atracción parabólica acercándose por el semicírculo mayor real que va de -1 a 1 y pasa por ∞ , y con órbitas que se alejan por $J(G)$. Véase Figura 4.5.

Ahora veremos que G es el acoplamiento geométrico de $f_{1/4} \amalg f_{-2}$. Para esto, haremos uso del concepto de homotopía, es decir, una función continua $F : X \times I \rightarrow Y$ formada por una familia de funciones tal que $F(x, t) = f_t(x)$ con $f_t : X \rightarrow Y$, cuando esto suceda diremos que f_0 y f_1 son homotópicas, y lo denotaremos por $f_0 \simeq f_1$. También haremos uso del Teorema del Mapeo de Riemann, del cual se pueden ver pruebas en [Ahlfors 1979] y en [Conway 1978].

Teorema 4.2 (del Mapeo de Riemann)

Dada cualquier vecindad abierta, conexa y simplemente conexa Ω que no sea todo el plano \mathbb{C} y dado un punto $a \in \Omega$, existe una única función analítica $g : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que g es un isomorfismo conforme, $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$.

Acoplamiento Formal

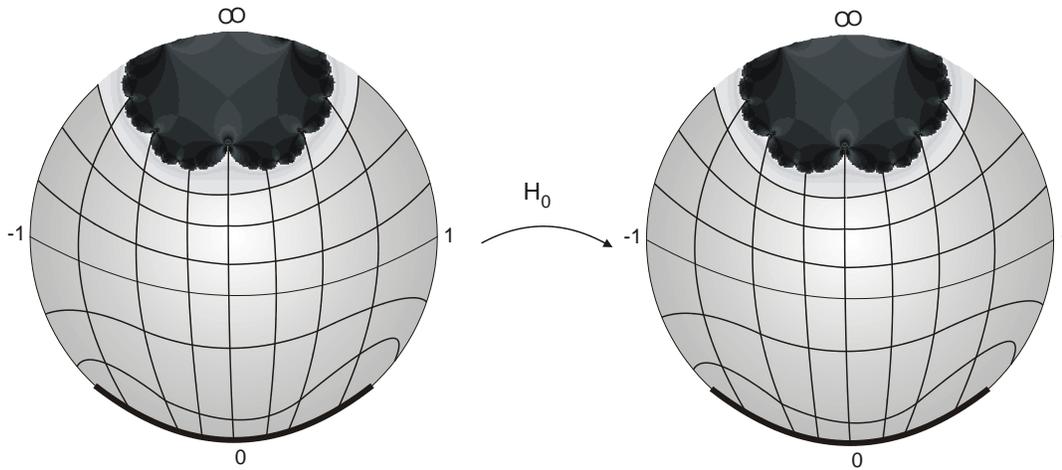


Figura 4.6

Primero construimos una homotopía $H_t : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ con $H_0 = \pi \circ (f_{1/4} \uplus f_{-2}) \circ \pi^{-1}$ y $H_1 = \pi \circ (f_{1/4} \amalg f_{-2}) \circ \pi^{-1}$, donde $\pi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es la proyección estereográfica. La coliflor $J(f_{1/4})$ y el intervalo $J(f_{-2})$ son simétricos respecto al eje real, el eje imaginario y el origen, y esta simetría es heredada a los rayos externos de ambos conjuntos como se puede ver en las Figuras 4.1 y 4.2. Dada esta simetría y la topología de la coliflor y el intervalo, podemos dar una homotopía natural al deformar el dominio y la imagen continuamente para construir H_t . Esta deformación consiste en que cada unión de rayos externos $\mathcal{R}_\theta(f_{1/4}) \cup \mathcal{R}_{-\theta}(f_{-2})$ se contrae por medio de un retracto por deformación al punto de aterrizaje de $\mathcal{R}_{-\theta}(f_{-2})$ del intervalo (es decir, con una homotopía $r_t : \mathcal{R}_\theta(f_{1/4}) \cup \mathcal{R}_{-\theta}(f_{-2}) \rightarrow \mathcal{R}_\theta(f_{1/4}) \cup \mathcal{R}_{-\theta}(f_{-2})$, con $r_1(\mathcal{R}_\theta(f_{1/4}) \cup \mathcal{R}_{-\theta}(f_{-2})) = \left\{ \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{2\pi i \theta}) \right\}$ llevando consigo de manera continua a $K(f_{1/4})$, el origen y el ∞ serán puntos fijos de H_t para cada t . La simetría influye en que la deformación también es simétrica respecto al eje real, el eje imaginario y el origen, es decir, el intervalo no se deforma, y el intervalo proveniente de $J(f_{-2})$ va a dar a él mismo, nótese que los extremos ± 2 de $J(f_{-2})$ van a dar a $\pi \circ v_2(\pm 2) = \frac{\pm 2}{1 + \sqrt{5}} = \pm \beta$ en el dominio de H_1 y el intervalo del que estamos hablando es $[-\beta, \beta]$. Véase la Figura 4.6 para imaginarse esta deformación, considérese que esta figura está en S^2 encajada en \mathbb{R}^3 y que sólo es un diseño, no está bien aproximado al modelo matemático real.

La función $H_t = \pi \circ (f_{1/4} \uplus_t f_{-2}) \circ \pi^{-1}$ en $[-\beta, \beta]$ es la misma que H_0 en $[-\beta, \beta]$, ya que no sufrió ningún cambio durante la deformación. H_t está determinada de manera explícita en $\{\mathcal{R}_\theta(f_{1/4}) \cup \mathcal{R}_{-\theta}(f_{-2}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ por el hecho de que $f(\mathcal{R}_t) = \mathcal{R}_{2t}$, que las potenciales cumplen que $G(f(z)) = nG(z)$ y por la relación $\overset{\text{rayo}}{\sim}$, y este comportamiento explícito en H_0 es llevado punto a punto en las mismas intersecciones de las deformaciones de los rayos y las equipotenciales en el dominio y la imagen de H_t .

Como $\overset{\circ}{K}(f_{1/4})$ es homeomorfo a un disco es una vecindad abierta, conexa y simplemente conexa, lo mismo sucede

con la deformación $K_t(f_{1/4})$ de $K(f_{1/4})$ porque la deformación del dominio y la imagen de H_0 también es homeomorfo a un disco. Entonces por el Teorema del Mapeo de Riemann existen isomorfismos conformes únicos $g_0 : \mathring{K}(f_{1/4}) \rightarrow \mathbb{D}$ con $g_0(\infty) = 0$, $g_0'(\infty) = a$, y $g_t : \mathring{K}_t(f_{1/4}) \rightarrow \mathbb{D}$ con $g_t(\infty) = 0$, $g_t'(\infty) = a$, y por tanto un isomorfismo conforme $g_t^{-1} \circ g_0 : \mathring{K}(f_{1/4}) \rightarrow \mathring{K}_t(f_{1/4})$ con $g_t^{-1} \circ g_0(\infty) = \infty$, además el Teorema de Carathéodory garantiza que este isomorfismo conforme se extiende a su frontera como un homeomorfismo. Y por tanto, $H_t : K_t(f_{1/4}) \rightarrow K_t(f_{1/4})$ es tal que $H_t(z) = g_t^{-1} \circ g_0 \circ f_{1/4} \circ g_0^{-1} \circ g_t(z)$, la cual es una función analítica en el interior de $K_t(f_{1/4})$. Por construcción, esta homotopía es una representación del proceso intermedio en $\overset{raya}{\approx}$ traducida a $\hat{\mathbb{C}}$, así que $H_1 = \pi \circ (f_{1/4} \amalg f_{-2}) \circ \pi^{-1}$.

Para construir la conjugación h de G con $f_{1/4} \amalg f_{-2}$, necesitamos más conceptos y resultados de puntos parabólicos que pueden consultarse en [Milnor 2006] (véase la discusión previa al Lema 4.1). Sea $p \in \hat{\mathbb{C}}$, un punto fijo parabólico de $f(z) = p + (z-p) + a(z-p)^{n+1} + \dots$ con $n \geq 1$ y $a \neq 0$, con f univalente (conforme e inyectiva) en alguna vecindad $N \subset \hat{\mathbb{C}}$ y sea \mathbf{v}_j un vector de atracción en p . Un abierto $\mathcal{P} \subset N$ será llamado un pétalo de atracción para f en el vector \mathbf{v}_j en p si: 1) $f(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$ y 2) una órbita $p_0 \mapsto p_1 \mapsto \dots$ bajo f es absorbida eventualmente por \mathcal{P} si y sólo si converge a p en la dirección de \mathbf{v}_j . Además, N contiene un único pétalo máximo $\mathcal{P}^{máx}$ para \mathbf{v}_j que es la unión de todas las órbitas en N que convergen a p en esa dirección, por ejemplo, la Figura 4.2 muestra con una curva blanca la frontera de $\mathcal{P}^{máx}$ de $z^2 + \frac{1}{4}$. Ahora, formemos un espacio de identificación \mathcal{P}/f al identificar z con $f(z)$ cuando z y $f(z)$ pertenezcan a \mathcal{P} , resulta que \mathcal{P}/f es isomorfo conformemente al cilindro infinito \mathbb{C}/\mathbb{Z} , y \mathcal{P}/f es llamado un cilindro de Écale para \mathcal{P} . Veamos el siguiente teorema de [Milnor 2006].

Teorema 4.3

Para cualquier pétalo atractor \mathcal{P} , existe un único encaje conforme $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ salvo traslación que satisface

$$\alpha(f(z)) = 1 + \alpha(z)$$

para toda $z \in \mathcal{P} \cap f^{-1}(\mathcal{P})$. Esta función se extiende a un único mapeo $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfo en la cuenca de atracción parabólica de \mathcal{P} , donde continúa satisfaciendo la ecuación. Además, si f es racional la cuenca contiene al menos un punto crítico y contiene un único pétalo de atracción $\mathcal{P}^{máx}$ que se mapea univalentemente sobre algún semiplano derecho $\mathbb{H}_c^+ = \{w : \text{Re}(w) > c \in \mathbb{R}\}$ bajo α y el cual es máximo bajo esta propiedad. Este pétalo máximo siempre tiene uno o más puntos críticos en su frontera.

La existencia de la conjugación $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dependerá de propiedades puramente dinámicas: que H_1 y G tienen sólo un punto fijo parabólico y uno repulsor, que tienen una sólo cuenca de atracción parabólica que es todo el conjunto de Fatou, que son una cubierta ramificada de grado 2 de la esfera, y que su conjunto de Julia es un intervalo. Podemos dar de manera explícita esta conjugación para el pétalo $\mathcal{P}_{H_1}^{máx}$ en el dominio de H_1 y el otro pétalo $\mathcal{P}_G^{máx}$ en el dominio de G de tal modo que $\alpha(\mathcal{P}_{H_1}^{máx}) = \mathbb{H}_c^+$ y $\gamma(\mathcal{P}_G^{máx}) = \mathbb{H}_c^+$, donde α y γ son las funciones del Teorema 4.3 de H_1 y G y los semiplanos se \mathbb{H}_c^+ se escogieron iguales porque la unicidad es salvo traslación, podemos utilizar el Teorema 4.3 en H_1 , porque la cuenca de atracción parabólica de H_1 proviene de homotopar la cuenca de atracción parabólica de $f_{1/4}(z) = z^2 + \frac{1}{4}$. Defino $\hat{h} : \mathcal{P}_{H_1}^{máx} \rightarrow \mathcal{P}_G^{máx}$ como $\hat{h} : \gamma^{-1} \circ \alpha$, y vemos que $H_1 = \alpha^{-1} \circ (1 + w) \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ \gamma \circ G \circ \gamma^{-1} \circ \alpha = h^{-1} \circ G \circ h$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_1 & & \\
 & & \mathcal{P}_{H_1}^{m\acute{a}x} & \rightarrow & \mathcal{P}_{H_1}^{m\acute{a}x} \\
 \alpha & & \downarrow & & \downarrow & \alpha \\
 & & \mathbb{H}_c^+ & \xrightarrow{1+w} & \mathbb{H}_c^+ & \\
 \gamma^{-1} & & \downarrow & & \downarrow & \gamma^{-1} \\
 & & \mathcal{P}_G^{m\acute{a}x} & \rightarrow & \mathcal{P}_G^{m\acute{a}x} \\
 & & G & & G
 \end{array} .$$

Esta función \hat{h} la podemos extender fácilmente a la frontera de $\mathcal{P}_{H_1}^{m\acute{a}x}$ de tal modo que el punto crítico ∞ en $\hat{\mathbb{C}}$ de H_1 vaya al punto crítico ∞ de G , si es necesario usamos una traslación. Además, podemos extender analíticamente esta función \hat{h} a toda la cuenca de atracción parabólica $\hat{\mathbb{C}} \setminus ([-\beta, \beta] \times \{0\})$ de H_1 , como consecuencia de que α y β se extienden a toda la cuenca de atracción parabólica a funciones $A : \hat{\mathbb{C}} \setminus ([-\beta, \beta] \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{H}_c^+$ y $B : \hat{\mathbb{C}} \setminus ([-1, 1] \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{H}_c^+$. La regla de correspondencia es como sigue, sea $z \in [\hat{\mathbb{C}} \setminus ([-1, 1] \times \{0\})] \setminus \overline{\mathcal{P}_{H_1}^{m\acute{a}x}}$, entonces existe un n mínimo tal que $H_1^n(z) \in \mathcal{P}_{H_1}^{m\acute{a}x}$, trazamos una curva \mathcal{C} que vaya de z a $H_1^n(z)$, bajo \hat{h} nos da una curva $\hat{h}(\overline{\mathcal{P}_{H_1}^{m\acute{a}x}} \cap \mathcal{C})$ con extremos $\hat{h}(H_1^n(z))$ y un punto en la frontera de $\mathcal{P}_G^{m\acute{a}x}$, ahora escogemos una componente de la imagen inversa $B^{-1}(A(\mathcal{C}))$ de tal modo que sea arcoconexa, que su otro extremo w no esté en $\mathcal{P}_G^{m\acute{a}x}$ (que no sea lazo) y tal que $G^n(w)$ sea el primer punto bajo iteración en estar en $\mathcal{P}_G^{m\acute{a}x}$. El hecho de que las dos funciones sean cubiertas ramificadas de grado 2 define correctamente la extensión analítica (si la curva \mathcal{C} pasará por los puntos críticos y las funciones fueran de grado diferentes se rompería la holomorfía). Esta función, denotada por \hat{h}_{ext} , extendida a toda la cuenca de atracción parabólica se comporta igual que en $\mathcal{P}_{H_1}^{m\acute{a}x}$ pues la cuenca se puede ver como la unión ajena de las componentes de todas las imágenes inversas de algún cilindro de Écale junto con las iteraciones de él mismo, así que el comportamiento en cada componente es el mismo que en el cilindro de Écale contenido en $\mathcal{P}_{H_1}^{m\acute{a}x}$, por lo que la conjugación de H_1 y de G se mantiene en todo $\hat{\mathbb{C}} \setminus ([-1, 1] \times \{0\})$ bajo \hat{h}_{ext} , y por construcción también mantiene la orientación.

Por último, extendamos la conjugación a todo $\hat{\mathbb{C}}$. Por el Teorema del Mapeo de Riemann, existen biholomorfismos únicos $g_{H_1} : \hat{\mathbb{C}} \setminus ([-\beta, \beta] \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{D}$ y $g_G : \hat{\mathbb{C}} \setminus ([-1, 1] \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $g_{H_1}(\infty) = 0 = g_G(\infty)$ y $g'_{H_1}(\infty) = a = g'_G(\infty)$, con a un real positivo. Entonces existe un único biholomorfismo $\hat{g} = g_G^{-1} \circ g_{H_1} : \hat{\mathbb{C}} \setminus ([-\beta, \beta] \times \{0\}) \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus ([-\beta, \beta] \times \{0\})$ con $\hat{g}(\infty) = \infty$ y $\hat{g}'(\infty) = 1$. Si $\hat{h}'(\infty) = z_0$, entonces $z_0 \hat{g}$ también es un biholomorfismo único entre las cuencas de atracción parabólicas que fija el ∞ y tal que su derivada en ∞ es z_0 . Por unicidad $z_0 \hat{g} = \hat{h}_{ext}$, esto nos permite descomponer a \hat{h}_{ext} en dos funciones que pasan por el disco \mathbb{D} , lo cual nos permite usar el Teorema de Carathéodory en $g_{H_1}^{-1}$ y en g_G^{-1} y extender \hat{h}_{ext} al intervalo $([-\beta, \beta] \times \{0\})$ que faltaba, esta función extendida la llamaremos $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. De hecho, h es la extensión natural que puede hacerse por medio de los puntos de aterrizaje de los conjuntos de Julia de H_1 y de G , haciendo corresponder los puntos de aterrizaje por medio de rayos con ángulos iguales, de nuevo la unicidad de h garantiza que ambas extensiones son iguales. La semiconjugación de Carathéodory y la identificación del acoplamiento topológico garantizan la conjugación en el intervalo por medio de h .

Por tanto, esta extensión $h : K_{1/4} \amalg K_{-2} \cong \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo que preserva la orientación y conjuga a $\pi \circ (f_1 \amalg f_2) \circ \pi^{-1}$ con G , además es holomorfo en $\hat{\mathbb{C}} \setminus ([-\beta, \beta] \times \{0\})$, y por tanto

$$G(z) = \frac{5z^2 - 1}{3z^2 + 1},$$

es el acoplamiento geométrico de $f_{1/4} \amalg f_{-2}$.

Bibliografía

[Ahlfors 1979]

Lars Valerian Ahlfors, *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable (third edition)*, Mc Graw Hill.

[Alexander 1994]

Daniel Saunders Alexander, *A History of Complex Dynamics: From Schroder to Fatou and Julia*, Vieweg.

[Banks 1992]

J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, The American Mathematical Monthly Vol.99, No.4, 332-334.

[Beardon 1990]

Alan Frank Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer Verlag.

[Bonifant Lyubich Sutherland 2011]

Araceli Bonifant, Mikhail Lyubich, Scott Sutherland, *Frontiers in Complex Dynamics (Celebrating John Milnor's 80 birthday)*, <http://www.birs.ca/events/2011/5-day-workshops/11w5076/participants> (Final Report (PDF)).

[Böttcher 1904]

Lucjan Emil Böttcher, *The principal laws of convergence of iterates and their applications to analysis (Russian)*, Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch. 14.

[Carathéodory 1913]

Constantin Carathéodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Math. Ann. 73, 323-370 (Gesam. Math. Schr. v. 4.)

[Conway 1978]

John Blich Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Springer Verlag.

[Chueshov 2002]

Igor D. Chueshov, *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*, ACTA Scientific Publishing House.

[Devaney 1985]

Robert Luke Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company.

[Douady 1983]

Adrien Douady, *Systèmes dynamiques holomorphes*, en Séminar Bourbaki, exp. n° 599, p. 39-63.

[Douady – Hubbard 1982]

Adrien Douady, John Hamal Hubbard, *Itération des polynômes quadratiques complexes*”, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, 294, 123-126.

[Douady – Hubbard 1993]

Adrien Douady, John Hamal Hubbard, *A proof of Thurston's topological characterization of rational functions*, Acta Mathematica, 171, 263-297.

[Gamelin 2001]

Theodore William Gamelin, *Complex Analysis*, Springer-Verlag New York.

[Hatcher 2002]

Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press.

[Julia sets 1.1]

The Fractal Program Ratio, <http://www.juliasets.dk/Ratio.htm>.

[Kawahira 2001]

Tomoki Kawahira, <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/programs/otis.html>, Nagoya University.

[Kummer]

Juergen Kummer, <http://rechneronline.de/function-graphs/>

[Markushevich 1970]

Alexei Markushevich, *Teoría de las Funciones Analíticas Volumen I*, Editorial MIR.

[McMullen 2005]

Curtis McMullen, *Complex Analysis on Riemann Surfaces*, Harvard University.

[McMullen 2008]

Curtis McMullen, *Riemann Surfaces, dynamics and geometry*, Harvard University.

[Milnor 2004]

John Milnor, *Pasting Together Julia Sets: A worked out example of mating*, Experimental Mathematics, Volume 13, number 1, 55-92.

[Milnor 2006]

John Milnor, *Dynamics in Complex Variable (Third Edition)*, Annals of Mathematics Studies, number 160, Princeton University Press.

[Montero 2008]

Rodrigo Robles Montero, *Dinámica Compleja: La Conexidad del Conjunto de Mandelbrot*, Universidad Nacional Autónoma de México.

[Moore 1925]

Robert Lee Moore, *Concerning Upper Semi-continuous Collections of Continua*, Transactions of the American Mathematical Society 27:416-428.

[Morosawa 1998]

S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press.

[Needham 1997]

Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press.

[Rees 1992]

Mary Rees, *A partial description of the parameter space of rational maps of degree two: Part I*, Acta Math. 168, 11-87.

[Shishikura 2000]

Mitsuhiro Shishikura, *On a theorem of M. Rees for matings of polynomials*, en [Tan 2000], páginas 289-305.

[Shishikura Tan 2000]

Mitsuhiro Shishikura, Tan Lei, *A family of cubic rational maps and matings of cubic polynomials*, Experimental Mathematics, 9:3-53.

[Tan 1991]

Tan Lei, *Matings of quadratic polynomials*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Volume 12, 589-620.

[Tan 2000]

Tan Lei, editor, *The Mandelbrot Set, Theme and Variations*, Lecture Note Series 274, Cambridge University Press 2000.

[*Wikipedia* 3.1]

Wikipedia, The free encyclopedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Gnomonic.png>, imagen elaborada con Mathematica 7.0.1.

[*Wikipedia* 3.4]

Wikipedia, The free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/File:Mandel_zoom_00_mandelbrot_set.jpg.

[*Willard* 1970]

Stephen Willard, *General Topology*, Addison-Wesley.