



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMAS TRIDIMENSIONALES LOTKA
VOLTERRA DE COMPETENCIA: UNA
CLASIFICACIÓN DE LAS FAMILIAS
ESTABLES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JUAN CARLOS MENDOZA HERRERA

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. ANA M. GUZMÁN GÓMEZ



Marzo del 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado.

1. Datos del alumno.
Mendoza
Herrera
Juan Carlos
51 71 79 69
Universidad Nacional Autónoma de México.
Facultad de Ciencias.
Matemáticas.
096217629
2. Datos del tutor
Dra.
Ana M.
Guzmán
Gómez
3. Datos del sinodal 1
Dr.
Adolfo
Guillot
Santiago
4. Datos del sinodal 2
Dr.
Faustino
Sánchez
Garduño
5. Datos del Sinodal 3
Dr.
Santiago
López
De Medrano
6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Genaro
De La Vega
Rivera
7. Datos del trabajo escrito
Sistemas Tridimensionales
Lotka Volterra de Competencia:
Una clasificación de las familias estables
96 p
2012

SISTEMAS TRIDIMENSIONALES LOTKA
VOLTERRA DE COMPETENCIA: UNA
CLASIFICACIÓN DE LAS FAMILIAS
ESTABLES.

Juan Carlos Mendoza Herrera

Marzo del 2012

Agradecimientos

A mis profesores, los que me enseñaron lo maravilloso que es el mundo visto con los ojos de la ciencia:

A Javier Fernández García y Rosa María Hernández Trejo, con sus palabras y ejemplo, me motivaron a ingresar y permanecer en la carrera de Matemáticas.

A Alejandro Garcíadiago Dantán, Ana Margarita Guzmán, Carlos Torres Alcaráz, David Meza Alcántara, Francisco Struck Chávez, Guadalupe Carrasco Licéa, Julieta Verdugo Díaz†, Pável Ramírez Hernández, Pedro Miramontes Vidal, Rafael Rojas Barbachano y Santiago López de Medrano; quienes me enseñaron la ciencia con profundidad y pasión. Cuya actitud digna me mostró que se puede ser científico y tener conciencia social devolviendome así el entusiasmo y la convicción por algún día ser un poco como cada uno de ellos.

A los Investigadores: Ana Margarita Guzmán Gómez, Miguel Lara Aparicio y Santiago López de Medrano, por permitirme asistir a sus reuniones a pesar de mis deficiencias, lugar de donde salió la presente tesis y mi interés por la modelación matemática.

A mis sinodales: Adolfo Guillot, Faustino Sánchez, Genaro de la Vega, Santiago López de Medrano por su paciencia y oportunas observaciones.

Al Dr. Alejandro Garcíadiago Dantán por allanarme los caminos de la facultad de ciencias, permitirme trabajar a su lado y brindarme una amistad sincera que espero seguir cultivando en el futuro.

A mi amigo el Matemático y Filósofo Marco Antonio Hernández Ramírez por darme soporte filosófico, por llevar sobre sí el peso de todos los ataques desde las élites y mafias intelectuales de la universidad contra los nuestros y permanecer de pie, como todo un guerrero, siempre digno con el orgullo de ser lo que somos: la raza de bronce, proletarios y concientes.

Dedicatorias

La presente tesis representa el trabajo y el accionar de muchas personas que generaron las condiciones para que existiera. Muchas de ellas son anónimos trabajadores, luchadores sociales, mujeres y hombres cuyos nombres e historias tal vez nunca conoceré sirva pues a ellos mi reconocimiento y agradecimiento a través de las consecuencias de mis actos y la lucha por mis ideales.

En particular a mis mamás (que es como agradecerme a mi mismo): Doña Francisca Mejía† que siempre me soportó con sus manos amorosas, su mirada cálida y su ser acertado. A mi mamá Margarita Herrera que nunca me dejó de cargarme en su seno para mostrarme el mundo sobre sus hombros, señalándome los caminos de la rectitud, la conciencia y el amor.

A mis papás: Don José Herrera† por haberme inculcado tan hondo la semilla de la crítica, la curiosidad y el razonamiento materialista, además de orgullo por mi historia y mi pertenencia a mi clase social. A el Profesor, bailarín, poeta y luchador social **Juan Carlos Mendoza Galoz** por regalarme el ideal de un mundo mejor y posible, por darme un ejemplo al cual estoy obligado a dignificar cada mañana que despierto, por heredarme el amor por el proletariado y las energías de lo que es el *un verdadero revolucionario* ¡Donde quiera que te tengan te vamos a encontrar!

A mis abuelas: A mi Abue Esperanza Galoz Alfonsín por enseñarme a ser un luchador social, por nunca perder la esperanza de poder encontrar a los desaparecidos políticos con vida, a las doñas del comité Eureka! por ser inbatibles en la lucha contra el estado, que día a día construyen un mundo mejor para nosotros; que con una petición simple, concreta exhiben y derrotan lo decadente que es el estado capitalista *¡Vivos los llevaron, vivos los queremos!*

A mis hermanos de lucha: a todos aquellos que lograron que los nuestros no fueran expulsados de tajo de la universidad nacional mis compañeros del CGH y muy particularmente a quienes fueron pilares de la huelga 1999-2000 en la UNAM la UC: Citlali, Cuahutémoc, Emiliano, Javier Alfredo, Marco Antonio, Edgar Noe, Pedro, Rafael, Sergio Yoni, Ursula y Vanesa†; cuyo trabajo incansable, su consecuencia de lucha y radicalidad de ideales nos mantendrá siempre victoriosos.

A mis hermanos de historia: a la organización Hijos por la Identidad y la Justicia contra el Olvido y el Silencio (H.I.J.O.S.-México) por haber aprendido juntos a ser dignos herederos de esta historia, que es la historia de todos, y poder levantar las

banderas de los ideales de nuestros padres. Particularmente a Pável que, desde que me encontré, no suelto en un abrazo fraterno donde se condensan todos los abrazos que nos han faltado.

A Sara Hernández quien me ha adoptado de nuevas maneras, que ha salvaguardado la memoria de uno de mis padres Rafael Ramírez Duarte, devolviendonos mucho de lo que nos arrebataron junto con su presencia. En especial por haberme recibido en su casa, en su familia, pese a las dificultades que de ello se desprende y sin lo cual ésta tesis no se habría podido comenzar.

A mis amigos Edgar Noé Rodríguez Cruz y Marco Antonio Hernandez que se dieron el tiempo de ser mi guía académica en momentos de necesidad. A Pedro Estrella por inspirar esta tesis, ser siempre un hombro solidario y compañero de peripecias.

A mi esposa, compañera y futura madre de mis hijos Alba, por su cálida presencia cada mañana y su no-soportarme-cuando-estoy-muy-matemático. Por ser una digna hija de Elin y Elda.

De nuevo a todos aquellos que a diario luchan por sobrevivir en un mundo de capitalismo globalizado y más que a nadie a los que se juegan la piel a diario, los imprescindibles, para transformar este mundo. A todos los revolucionarios que el sistema a desaparecido y que desde ahí abren una trinchera inderrotable e incansable.

Al final, por más importante, he dejado la constancia de enorme agradecimiento, admiración, respeto y cariño por una Mujer, Luchadora, Académica, Madre y Científica que es Ana M. Guzmán Gómez que me ha llevado a hombros (con todo lo objeto pesado que puedo llegar a ser) revelandome caminos de la dignidad y la consecuencia política que desconocía. Ella en muchos sentidos es la verdadera autora de la tesis. Tu ejemplo, no sólo por la lucha ardua contra el cáncer, me ha marcado y re-hecho para siempre, cualquier título que ostente en un futuro es también tuyo. Trabajaré por ser un digno alumno tuyo.

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Notación.	1
1.2. Términos asociados a puntos fijos.	3
1.3. Bifurcación de Hopf.	5
1.4. Teoría de Poincaré-Bendixson.	8
1.5. El Simplejo Portador.	9
1.6. Criterios para descartar órbitas periódicas.	11
1.6.1. El caso bidimensional	11
1.6.2. El caso tridimensional.	12
2. Sistemas Lotka Volterra	15
2.1. El modelo.	15
2.2. Sistemas LVC en dos dimensiones.	17
2.2.1. Un caso particular	17
2.3. El caso general LVC(2).	20
2.3.1. Ceroclinas y puntos fijos.	20
2.3.2. Las clases ceroclinas estables.	21
2.4. La equivalencia topológica.	27
3. Tres Dimensiones	35
3.1. Introducción.	35
3.2. Elementos de los sistemas LVC(3)	36
3.2.1. Los puntos de equilibrio.	36

3.2.2.	Las ceroclinas	37
3.2.3.	El simplejo portador.	38
3.3.	El análisis lineal.	38
3.4.	La configuración ceroclina.	40
3.5.	Las clases ceroclinas.	44
4.	Dinámica en $Int\Sigma$ para un sistema LVC(3)	51
4.1.	Introducción.	51
4.2.	Clases sin órbitas periódicas.	52
4.2.1.	Clases ceroclinas sin punto interior fijo.	52
4.2.2.	Clases con punto interior fijo.	54
4.2.3.	Clases con dos atractores y dos repulsores	54
4.2.4.	Puntos fijos axiales del mismo tipo	59
4.3.	Ciclos en sistemas LVC(3)	63
4.3.1.	Sistemas sin ciclos	67
4.3.2.	Familias que admiten ciclos límite.	71
4.3.3.	Familia 28.	74
4.3.4.	Familia 29.	75
4.3.5.	Familia 30.	78
4.3.6.	Familia 33.	79
5.	Un sistema de Lotka Volterra con un ciclo límite	81
5.1.	Introducción.	81
5.2.	Un sistema Lotka Volterra cíclico.	81
5.2.1.	El análisis local.	82
5.2.2.	El análisis global	82
5.3.	Un sistema cíclico particular.	83

Introducción

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales es el estudio de la dinámica de poblaciones. Dentro de las ecuaciones usadas para este fin, los sistemas Lotka Volterra tienen un lugar destacado. Por un lado, desde el punto de vista histórico, surgieron (al menos en el caso de Vito Volterra) como una necesidad de dotar de lenguaje formal a la ciencia de la biomatemática, siendo, en ése sentido, de los primeros en hacerlo. Por otro lado, la simplicidad de las expresiones de sus componentes y la sencillez de sus premisas hacen del modelo un ente matemático accesible a diferentes niveles de conocimiento permitiendo que su estudio pueda tener aplicaciones de muy diversa naturaleza (pedagógicas, de modelación, ejemplificadoras, etc)

En la presente tesis revisaremos un caso particular de los sistemas Lotka Volterra, los sistemas totalmente competitivos, es decir los *sistemas Lotka-Volterra de competencia*, LVC. Aunque algunos resultados que expondremos son válidos para el caso n -dimensional, nuestra intención última nos acota al campo de tres dimensiones. Nos ocupa mostrar que existen sistemas LVC(3) que admiten una órbita periódica o ciclo límite, lo cual, en términos biológicos, puede interpretarse como el equilibrio ecológico de tres especies que compiten por recursos; cuestión que esperamos se mantenga como una posibilidad teórica de estos sistemas.

Para llegar al resultado, una vez que acordemos el lenguaje técnico elemental, estudiaremos la dinámica de los sistemas Lotka Volterra de competencia de dos dimensiones. En términos de la configuración de sus rectas ceroclinas particionaremos el espacio de los sistemas estables; demostraremos que la dinámica de un sistema LVC(2) está determinada por su configuración ceroclina y que las clases que así se generan son iguales a las que determinan la equivalencia topológica.

En el estudio de los sistemas LVC en dos dimensiones encontramos que no existen

ejemplos con órbitas periódicas no triviales, es decir los conjuntos ω -límite son puntos; tras introducir una nueva dimensión, es de esperarse nuevas dinámicas, entre ellas, la existencia de ciclos límite.

En el caso tridimensional determinar el total de las familias ceroquinas representa un reto, sin embargo incluimos un método para confirmar la cantidad que M. L. Zeeman describe en el [13], dado que en la literatura no se encuentra mención al respecto.

Mostraremos que en los sistemas $LVC(3)$ no basta con la configuración ceroquina para determinar la dinámica del flujo, pues existen clases en las que encontraremos representantes con ciclos límite y otros sin ellos; quedarán abiertas las cuestiones sobre: las clases topológicas, su relación con las clases ceroquinas y el número de órbitas que puede admitir un sistema de los estudiados.

El principal resultado, nuestro objetivo, es encontrar sistemas $LVC(3)$ que admitan ciclos límite. Al respecto M. L. Zeeman demostró en [13] un teorema que establece las condiciones para que una familia ceroquina admita una bifurcación de Hopf.

En la presente tesis desarrollaremos, con cierto detalle, los resultados expuestos en [13], [14] y [12], (incluyendo la corrección que hace de si misma Zeeman de [13] en [12]) además de exponerlos en una forma sistemática y coherente, para lo cual aclararemos razonamientos, cuentas y pequeños resultados que M.L. Zeeman omite en sus exposiciones.

En particular mostraremos que existen familias ceroquinas en las que pueden llegarse a cumplir las condiciones para que ocurra una bifurcación de Hopf, además de la demostrada por M. L. Zeeman. No todos los sistemas de dichas familias están dentro de las que admiten un ciclo límite. Describiremos un método para hallar familias que admitan una órbita periódica y exhibiremos algunos ejemplos concretos de ellas.

Por último estableceremos una limitante al teorema de M. L. Zeeman según el cual una familia ceroquina admite una bifurcación si sus cofactores sobre la diagonal no son del mismo signo. Mostramos que existe una familia de sistemas $LVC(3)$ que admiten un ciclo límite y que sin embargo los cofactores son todos iguales.

Capítulo 1

Preliminares

El estudio de los sistemas que aquí nos interesan requiere de varios conceptos específicos y resultados previos. En el presente capítulo haremos el recuento de algunos de estos resultados. Hay tópicos que se comentan de manera general y cuando se usen de manera particular serán enunciados explícitamente, en algunos otros la formulación específica y su respectiva prueba quedan en alguna cita.

1.1. Notación.

En adelante

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$$

denota un *vector* en \mathbb{R}^n . El *cono positivo cerrado* en \mathbb{R}^n es

$$\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n\}$$

y el *cono positivo abierto*

$$\text{Int}\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

A los vectores, \mathbf{x} , tales que estén en \mathbb{R}_+^n los llamaremos *vectores positivos* y *estrictamente positivos* en el caso de que $\mathbf{x} \in \text{Int}\mathbb{R}_+^n$. Análogamente \mathbf{x} es *negativo* si $-\mathbf{x}$ es positivo.

Denotemos con $\chi(M)$, con $M \subseteq \mathbb{R}^n$ con tal que $\text{Int}(M) \neq \emptyset$, el *espacio de los campos vectoriales diferenciables*. Si sucede que $\mathbf{F} \in \chi(M)$. La igualdad

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

define un *sistema de ecuaciones diferenciales* donde el punto sobre \mathbf{x} denota a la derivada respecto al tiempo.

Consideremos una función $\phi : \Delta \rightarrow M$, donde Δ es un abierto de $M \times \mathbb{R}$ que contiene a $M \times \{0\}$ e $\mathbf{y} \in M$ arbitrario pero fijo. Si se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\mathbf{y}, t)}{\partial t} &= \mathbf{F}(\phi(\mathbf{y}, t)) \\ \phi(\mathbf{y}, 0) &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

decimos que la función $t \mapsto \phi(\mathbf{y}, t)$ es la *solución de 1.1, con la condición inicial \mathbf{y}* , es decir, del sistema determinado por \mathbf{F} . También nos podremos referir a ella como la *trayectoria de \mathbf{y}* . La función ϕ es el *flujo* de \mathbf{F} , contiene a todas las trayectorias de los puntos en M y también se denota $\phi_t(\mathbf{y}) \equiv \phi(\mathbf{y}, t)$.

Recordemos que en nuestro estudio $M = \mathbb{R}_+^n$.

Consideremos un punto \mathbf{x} en M , el *omega límite* del punto es el conjunto ω para el cual, si $\mathbf{y} \in \omega$ entonces existe una sucesión $\{t_n\}$ tal que $\{t_n\} \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y que cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

es decir, la trayectoria de \mathbf{x} se acumula en torno a ω conforme el tiempo avanza. Al omega límite de \mathbf{x} lo denotaremos como $\omega(\mathbf{x})$. De igual forma podemos definir el *alfa límite*, $\alpha(\mathbf{x})$, sólo haciendo que $t_n \rightarrow -\infty$ en lugar de $t_n \rightarrow \infty$. Cuando $\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para toda¹ $t \in \mathbb{R}$ diremos que \mathbf{x} es un *punto fijo o de equilibrio* del sistema.

Un *punto de equilibrio \mathbf{P} es estable* si para todo $\varepsilon > 0$ la *vecindad con centro en \mathbf{P} y radio ε* , que denotaremos como $V_\varepsilon(\mathbf{P})$, contiene un conjunto abierto V^* tal que $\mathbf{P} \in V^*$ y para cualquier condición inicial $\mathbf{y}_0 \in V^*$ su trayectoria $\phi_t(\mathbf{y}_0)$ permanece en $V_\varepsilon(\mathbf{P})$ para todo $t > 0$. Si además para todo elemento en V^* sucede que su omega límite es el punto fijo de \mathbf{F} diremos que \mathbf{P} es *asintóticamente estable* o que es un *punto atractor* del sistema. Haciendo uso de esta misma notación a un punto fijo atractor del sistema inducido por $-\mathbf{F}$ lo llamaremos *punto repulsor* del flujo \mathbf{F} .

¹Recordemos que en todo lo que sigue t es un parámetro que, generalmente, identificaremos con el tiempo.

Si \mathbf{P} es un punto fijo atractor definimos la *cuenca de atracción de \mathbf{P}* como el conjunto

$$\left\{ \mathbf{y} \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{y}) = \mathbf{P} \right\}.$$

El hecho de que \mathbf{P} sea asintóticamente estable implica que está en el interior de la cuenca de atracción de \mathbf{P}^2 ; más aun la cuenca de atracción de un atractor es un conjunto abierto.

TEOREMA 1.1.1. *Sea \mathbf{P} un atractor asintóticamente estable. La cuenca de atracción de \mathbf{P} es un conjunto abierto.*

Demostración. Tomemos un punto en la cuenca de atracción, digamos \mathbf{y} , elijamos un número real $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $V_\varepsilon(\mathbf{P})$ esté contenida en la cuenca de atracción. Como \mathbf{y} está en la cuenca de atracción de \mathbf{P} afirmamos que existe $T \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\phi_T(\mathbf{y}) \in V_\varepsilon(\mathbf{P}).$$

Sea V una vecindad de $\phi_T(\mathbf{y})$ contenida en $V_\varepsilon(\mathbf{P})$ y sea W la imagen inversa de V bajo ϕ_T . Por continuidad de ϕ_T W es abierto. Con esto hemos encontrado una vecindad W de \mathbf{y} contenida totalmente en la cuenca de atracción de \mathbf{P} , con lo que queda demostrado que la cuenca de atracción es un conjunto abierto. \square

1.2. Términos asociados a puntos fijos.

Estudiando un sistema de ecuaciones de la forma 1.1 con un punto fijo podemos preguntarnos por la dinámica en una vecindad del punto, cuestión que no es inmediata sólo de la definición de atractor o repulsor. Sin embargo en un *sistema lineal de ecuaciones* que tiene la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{1.2}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y A una matriz de $n \times n$, el comportamiento en una vecindad del origen (que es un punto de equilibrio del sistema) depende de la parte real de los valores propios de la matriz A .

Para un sistema lineal, si la matriz A tiene al menos un valor propio con parte real estrictamente positiva y el resto tienen parte real estrictamente negativa, entonces el origen es *un punto silla*. Si la parte real de todos los valores propios de la matriz A es

²Pues su omega límite, dado que es un punto fijo, es él mismo.

positiva diremos que el origen es un *nodo inestable* o *fuelle*, en caso de que la parte real de todos los valores propios sea negativa diremos que el origen es un *nodo estable* o *sumidero* (estos dos últimos casos satisfacen la definición de repulsor y atractor respectivamente) mientras que, si la parte real de todos los valores propios es cero y la imaginaria es no nula, estamos ante un *centro*.

Para algunos sistemas no lineales la dinámica en una cierta vecindad de un punto fijo se encuentra retratada cualitativamente por su parte lineal. Si tenemos un sistema de la forma (1.1) su *parte lineal* o *linealización* en el punto \mathbf{x}_0 es un sistema lineal con matriz asociada descrita por

$$(D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0))_{ij} = \left(\frac{\partial F_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} \right) \quad (1.3)$$

donde $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Las condiciones para que la linealización de un sistema aporte información sobre su dinámica se encuentran en el teorema al que llegaron independientemente Hartman (1959) y Grobman (1960) y que exponemos a continuación como aparece en [11].

TEOREMA 1.2.1 (Hartman-Grobman). *Sea $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ que determina un sistema de ecuaciones de la forma*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Supongamos que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ y que la matriz $A = D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ no tiene valores propios con parte real cero, entonces, existe una vecindad U de \mathbf{x}_0 , y un homeomorfismo que mapea las trayectorias del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

dentro de la vecindad U , en trayectorias cercanas a $\mathbf{0}$ del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

preservando su parametrización respecto al tiempo.

Un punto \mathbf{x}_0 en el que ocurre que $(D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0))_{ij}$ tiene valores propios distintos de cero lo llamaremos *hiperbólico*, la dinámica entorno a los puntos de equilibrio hiperbólicos se clasifica en analogía con los de los sistemas lineales (sillas, fuentes, sumideros).

En cuanto a los puntos de equilibrio no hiperbólicos, sabemos que, su aparición puede estar asociada a la existencia de órbitas periódicas. Este es uno de los temas del presente texto y lo trataremos en la próxima sección.

1.3. Bifurcación de Hopf.

Dada una familia de sistemas de ecuaciones, que depende continuamente de un parámetro, una bifurcación de Hopf ocurre cuando un punto fijo cambia cualitativamente de dinámica, dando lugar a el “nacimiento” de un ciclo límite. En el resto de la sección nos ocupamos de precisar en precisar esta noción, en particular, en el *Teorema de Hopf* que establece condiciones para las cuales una familia de sistemas admite el tipo de bifurcación que nos interesa.

Para precisar la idea de familia de sistemas de ecuaciones, nos referiremos a sus campos vectoriales, cada uno asociado a un parámetro que varía en un intervalo continuo. Los campos vectoriales pueden depender de p -parámetros, esto es $\mathbf{F}_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable para cada $\mu \in \mathbb{R}^p$, para mayor simplicidad supondremos que $p = 1$ (es decir nuestra familia será de un solo parámetro o *monoparamétrica*).

Para cada valor del parámetro existe un sistema de ecuaciones asociado de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_\mu(\mathbf{x})$$

supondremos que cada miembro de la familia tiene un *punto fijo aislado*, es decir, existe una familia de puntos, digamos $\{\mathbf{x}_\mu\}$, para los cuales

$$\mathbf{F}_\mu(\mathbf{x}_\mu) = 0$$

para cada valor de μ , y tal que existe una vecindad entorno a \mathbf{x}_μ donde no hay otros puntos fijos. Supondremos que la matriz $D\mathbf{F}_\mu(\mathbf{x}_\mu)$ tiene un par de valores propios complejos conjugados que denotaremos:

$$\begin{aligned}\lambda(\mu) &= \alpha(\mu) + i\omega(\mu) \\ \bar{\lambda}(\mu) &= \alpha(\mu) - i\omega(\mu).\end{aligned}$$

Observese que tanto la parte real como la imaginaria dependen del valor del parámetro.

Hasta aquí hemos hecho que: los campos vectoriales, los puntos fijos, los valores propios y la parte real e imaginaria de los mismos dependan del parámetro μ ; según se ha dicho, al comienzo de esta sección, nos interesa el valor de μ en que $\alpha(\mu) = 0$ ya que en ese momento \mathbf{x}_μ es un punto de equilibrio no hiperbólico.

Bajo las condiciones enunciadas y utilizando esta notación damos una versión del Teorema de Hopf ³

³Según [11](pp 385) se pueden encontrar ejemplos de éste tipo de bifurcaciones en los

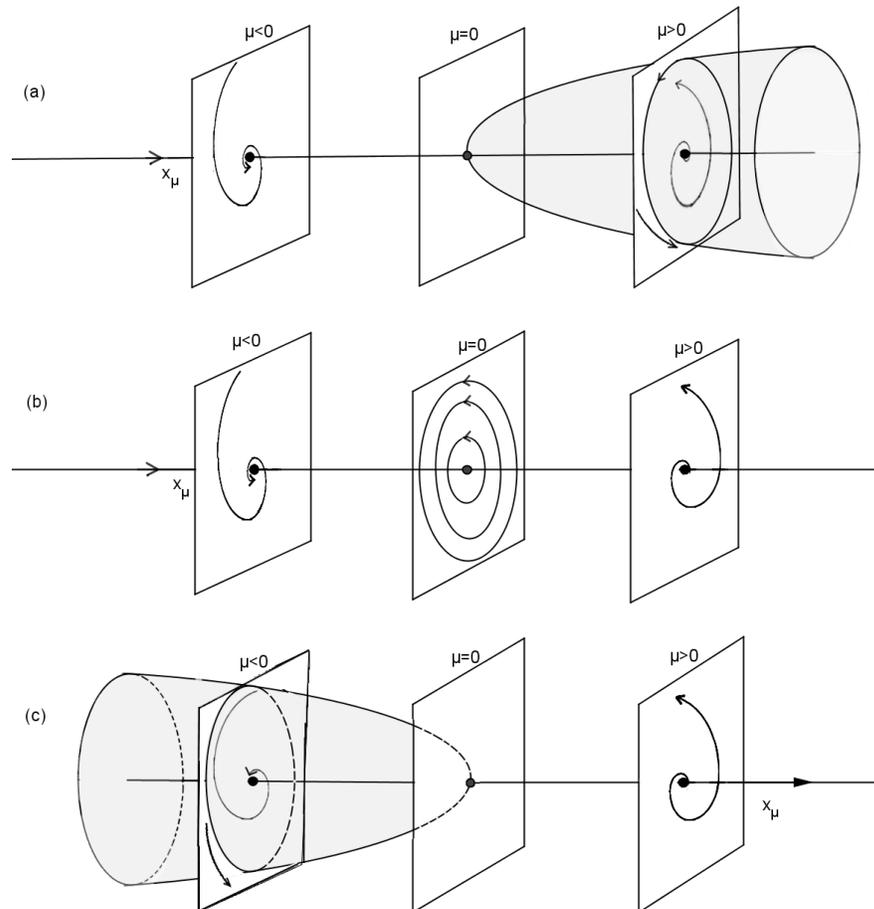


Figura 1.1: Esquema de la bifurcación de Hopf.

TEOREMA 1.3.1 (Bifurcación de Hopf). *Sea $\mathbf{F}_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una familia monoparamétrica, analítica, de campos vectoriales. La familia tiene asociada una familia de puntos fijos aislados $\{\mathbf{x}_\mu\}$. Si sucede que*

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= 0 \\ \alpha'(0) &> 0 \\ \omega(0) &\neq 0\end{aligned}$$

y los $n - 2$ valores propios restantes tienen parte real estrictamente negativa entonces dichos campos vectoriales tienen una familia monoparamétrica de órbitas periódicas; además para valores de μ suficientemente pequeños y una vecindad adecuada de \mathbf{x}_0 las únicas órbitas periódicas de \mathbf{F}_μ son precisamente las de esta familia⁴.

Definición 1.3.1. *Por una familia monoparamétrica de órbitas periódicas se entiende que existe un $\Psi > 0$ suficientemente pequeño y una función $\mu : (0, \Psi) \rightarrow \mathbb{R}$ analítica tal que*

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \mu(\psi) = 0,$$

con la propiedad de que para cada $\psi \in (0, \Psi)$ el sistema de ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\mu(\psi)}(\mathbf{x})$$

tiene un ciclo al que denotaremos así γ_ψ .

Resulta ser que en el intervalo $(0, \Psi)$ la función $\mu(\psi)$ tiene tres posibilidades de comportamiento: es idénticamente cero, es estrictamente negativa o es estrictamente positiva; cada uno de estos comportamientos da lugar a una forma distinta en que surgen las órbitas. Una manera de esquematizar lo que ocurre, para $n = 2$, es la figura 1.3.

trabajos de Henri Poincaré (1892), siendo Aleksandr Andronov (1929) el primero en formular éste teorema para el caso bidimensional. Sin embargo, la generalización a n dimensiones fue hecha por Eberhard Hopf (1942). En algunos textos se le encuentra bajo el nombre de: “teorema de la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf”.

⁴La versión que aquí presentamos del teorema está adecuada al uso que le daremos en capítulos posteriores. Algunas consideraciones y descripciones que hace el teorema se mencionarán fuera del enunciado y de manera puntual, debido a que aportan riqueza al análisis y comprensión en el uso del resultado; sin embargo su inclusión hace más extensa la redacción y desviaría la atención de las hipótesis y consecuencias que se usarán en la presente tesis. En [11] pp 378 y ss, se puede encontrar una discusión más amplia y una demostración del Teorema de Hopf.

En la figura el caso (a) hace referencia a que la función $\mu(\psi)$ es estrictamente positiva en el intervalo $(0, \Psi)$, con lo que el punto fijo \mathbf{x}_μ es atractor para $\mu < 0$ y repulsor para $\mu > 0$ pues la parte real de los valores propios pasa de ser negativa a ser positiva, dando lugar a que la familia de órbitas ocurra para $\mu > 0$ y que dichas órbitas sean atractoras. El caso (b) hace referencia a la posibilidad de que $\mu \equiv 0$, donde tenemos un caso degenerado en el cual todas las γ_ψ existen juntas, foliando la vecindad de \mathbf{x}_0 . En el caso (c) $\mu(\psi) > 0$, entonces ocurre que la familia de órbitas periódicas se encuentra en los valores negativos del parámetro y haciendo que las γ_μ sean repulsoras.

Lo que sucede en los casos genéricos es que un punto cambia de ser repulsor a atractor, o viceversa, en dos intervalos adyacentes del parámetro haciendo que, cuando $\mu = 0$ momento en que ocurre el cambio cualitativo, una órbita periódica “nace” o “muere” con la dinámica que el punto de equilibrio \mathbf{x}_μ acaba de abandonar.

1.4. Teoría de Poincaré-Bendixson.

En este apartado enunciaremos resultados que nos permiten garantizar, para sistemas de ecuaciones en dos dimensiones, que los conjuntos límite son puntos, ciclos o bien trayectorias uniendo puntos fijos; este hecho nos será de mucha utilidad dado que, en el caso tridimensional, un sistema de Lotka Volterra competitivo tiene una dinámica global que se reduce a describir la dinámica en una superficie bidimensional homeomorfa a la unidad simpleja, el simplejo portador.

A comienzos del siglo veinte Henry Poincaré e Ivar Bendixson desarrollaron una teoría acerca de los conjuntos límite para sistemas de ecuaciones planos. Uno de los más emblemáticos, producto de la teoría de Poincaré y Bendixson es el siguiente teorema⁵.

TEOREMA 1.4.1. *(Poincaré Bendixson) Supongamos que Ω es un conjunto límite no vacío, cerrado y acotado de un sistema plano de ecuaciones diferenciales que no contiene puntos de equilibrio. Entonces Ω es una órbita cerrada.*

Las implicaciones que tiene el teorema 1.4.1 son de mucha importancia en capítulos posteriores. A continuación citaremos un corolario y ahondaremos en su utilización más adelante.

⁵Ver [4] pp 225

TEOREMA 1.4.2. Sea γ una órbita cerrada y sea U la región abierta en el interior de γ . Entonces U contiene o bien un punto de equilibrio o bien un ciclo límite⁶.

1.5. El Simplejo Portador.

En enero de 1976 Steven Smale publicó un artículo sobre ciertos sistemas llamados de Kolmogorov⁷. El sistema referido tiene la forma

$$\dot{x}_i = x_i M_i(\mathbf{x}), \quad \text{con } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

donde cada M_i es una función suave y tal que

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_j} \leq 0.$$

La construcción de Smale consiste en escoger adecuadamente las M_i de tal manera que la unidad simpleja

$$\Delta_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

sea un atractor global y para la cual la dinámica pudiera ser especificada. Esta construcción sirve para inducir dinámicas complicadas y/o construir contraejemplos, según sea necesario.

Morris W. Hirsh llama a los modelos de la construcción de Smale *totalmente competitivos* y caracteriza los sistemas que presentan un conjunto invariante atractor⁸. Este mismo autor presenta una versión de la construcción de Smale en [5] para sistemas más generales, en la cual el conjunto invariante es un conjunto homeomorfo a Δ_n que denota como Σ_n y al cual se refiere como “simplejo acarreador⁹” nombre que Mary Lou Zeeman usa en varios artículos en referencia a la “capacidad de carga” del modelo logístico en una dimensión (en particular ver [13]). En adelante nos referiremos a este conjunto como el *simplejo portador*, debido a que porta la dinámica global del sistema, o simplemente Σ , y cuyas características se precisan a continuación.

Presentamos una versión del Teorema de Hirsch (que se encuentra, junto con su demostración, en [5], pp 62, Teorema 3.18).

⁶Op. cit. pp 229

⁷[10]

⁸[3]

⁹Para ser más preciso lo llama *carrying simplex*, ver [6] y [5] pp. 61

TEOREMA 1.5.1 (Existencia del Simplejo). *Si el sistema 1.4 satiface las siguientes condiciones:*

- a) $\frac{\partial M_i}{\partial x_j} < 0^{10}$,
- b) $M_i(0) > 0$,
- c) $M_i(x) < 0$ para $\|x\|$ suficientemente grande.

Entonces existe una hipersuperficie compacta invariante $\Sigma \subset \mathbb{R}_+^n$, con las siguientes propiedades

- i) Σ atrae a cualquier punto en $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.
- ii) $\Sigma \cap \text{int}\mathbb{R}_+^n$ es una variedad localmente Lipschitz.
- iii) Σ es transversal a cualquier línea que sea paralela a un vector positivo y que pase por $\Sigma \cap \text{Int}\mathbb{R}_+^n$.
- iv) Una proyección radial define un homeomorfismo $h : \Sigma \rightarrow \Delta_n$ cuya inversa es localmente Lipschitz sobre un vecindad de $\Delta_n \cap \text{Int}\mathbb{R}_+^n$ y un flujo ψ sobre Δ^n tal que $\Phi_t | \Sigma = h^{-1} \circ \psi_t \circ h$

Adicionalmente, M.L. Zeeman asegura que¹¹ el simplejo es un conjunto balanceado. Mas adelante haremos uso de este hecho por lo que incluimos aquí la definición de conjunto balanceado.

Definición 1.5.1. *Decimos que dos vectores, \mathbf{u} y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, están relacionados si $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ o bien $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ es estrictamente positivo.*

Definición 1.5.2. *Decimos que un conjunto $S \subset \mathbb{R}_+^3$ es balanceado si y sólo si para cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ sucede que no están relacionados.*

Una mayor discusión se encuentra en [6] donde, en particular, se señala a los sistemas Lotka Volterra de competencia n-dimensionales como un caso para los cuales existe un único simplejo portador. En los detalles para demostrar esta afirmación se requiere el desarrollo de la teoría para sistemas monótonos, situación que excede los propósitos del presente trabajo por lo que nos limitaremos a hacer uso del resultado según nos convenga.

¹⁰La interpretación ecológica de éstas condiciones se dará en la sección 2.1 del capítulo 2

¹¹[12] teorema 1.1 pp. 228.

Observemos que el Teorema 1.5.1 afirma que toda la dinámica global de un sistema de Lotka Volterra de competencia en tres dimensiones queda reflejada en una superficie de dimensión dos; lo cual nos permite descartar comportamiento caótico, dado que los conjuntos ω -límite sólo pueden ser puntos o ciclos.

1.6. Criterios para descartar órbitas periódicas.

Nos resulta útil contar con un criterio para probar que no existen órbitas periódicas en algunas familias de los sistemas estudiados.

1.6.1. El caso bidimensional

Comenzaremos con el criterio de Bendixson ya que puede verse como la base de los demás criterios que descartan órbitas periódicas aún para los sistemas en tres dimensiones.

TEOREMA 1.6.1 (Criterio de Bendixson). *Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} \in C^1(S)$ donde S es una región simplemente conexa S en \mathbb{R}^2 . Si la divergencia del campo vectorial \mathbf{F} , $\nabla \cdot \mathbf{F}$, no es idénticamente cero y no cambia de signo en S , entonces $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ no tiene órbitas cerradas contenidas enteramente en S .*

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que $\gamma(t)$ es una órbita cerrada de periodo T de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, sea E la región que encierra γ , $E \subset S$. Entonces, por el Teorema de Green sucede que

$$\iint_E \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA = \oint_{\gamma} (Pdy - Qdx), \quad (1.5)$$

donde $\mathbf{F} = (P, Q)$. Usando que γ es una solución T -periódica y por la regla de la cadena tenemos las igualdades

$$\oint_{\gamma} (Pdy - Qdx) = \int_0^T (P\dot{y} - Q\dot{x})dt = \int_0^T (PQ - QP)dt = 0, \quad (1.6)$$

con $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}, \dot{y})$.

Pero si $\nabla \cdot \mathbf{F}$ no es idénticamente cero ni cambia de signo en E , entonces la doble integral es estrictamente mayor que cero o estrictamente menor que cero en E , lo cual es una contradicción, por tanto no existen órbitas periódicas contenidas enteramente en S . \square

El criterio de Bendixson puede ser generalizado en varios sentidos, algunas son extensiones a tres dimensiones que se hacen según el sistema estudiado o la condición que se disponga para poder aplicar el resultado. En la siguiente sección nos ocuparemos de esta situación.

1.6.2. El caso tridimensional.

El tipo de sistemas que más nos ocupa en el presente trabajo es el LVC en tres dimensiones así que expondremos dos formas de un criterio para descartar órbitas en este caso.¹²

TEOREMA 1.6.2 (Busenberg y Van Den Driessche). *Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial Lipschitz continuo, γ una curva cerrada, simple y suave a pedazos tal que es frontera de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ suave y orientable. Si $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es C^1 en un entorno de S y*

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{F} \leq 0 \quad (\geq 0) \quad \text{sobre } \gamma \quad (1.7)$$

$$(\text{rot} \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad (\leq 0) \quad (1.8)$$

$$(\text{rot} \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} \neq 0 \quad \text{sobre } S \quad (1.9)$$

donde \mathbf{n} es ortonormal a S ; entonces γ no es un ciclo de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ recorrido en el sentido positivo definido por \mathbf{n} .

Demostración. También lo haremos por contradicción. Supongamos que $\gamma(t)$ es una órbita cerrada T -periódica de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Dado que el integrando es no decreciente y el Teorema de Stokes tenemos que

$$0 < \iint_S (\text{rot} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) dA = \oint_{\gamma} \mathbf{g} \cdot dS \quad (1.10)$$

también hemos supuesto que $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{F}(\gamma(t))$ para $t \in [0, T]$ y de 1.7 se deduce

$$\oint_{\gamma} \mathbf{g} \cdot dS = \int_0^T \mathbf{g}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \leq 0 \quad (1.11)$$

¹²Para profundizar en estas formulaciones se puede revisar el artículo de Van den Driessche y Stavros Busenberg [2] así como el de S. P. Van den Driessche y M. L. Zeeman [12].

lo cual es una contradicción, por lo cual γ no es una órbita del sistema recorrida en el sentido positivo definido por \mathbf{n} . Si se cumplen las desigualdades 1.7 y 1.8 que estan entre paréntesis la demostración es análoga. \square

COROLARIO 1.6.3. \mathbf{F} , γ , \mathbf{n} y S como en el Teorema 1.6.2. Si existe un campo vectorial $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido y C^1 en una vecindad de S tal que.

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{F} \equiv 0 \quad \text{sobre } \gamma \quad (1.12)$$

$$(\text{rotg}) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad \text{o} \quad (\text{rotg}) \cdot \mathbf{n} \leq 0 \quad \text{pero} \quad (\text{rotg}) \cdot \mathbf{n} \neq 0 \quad \text{sobre } S \quad (1.13)$$

entonces $\gamma(t)$ no es un ciclo de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Demostración. Supongamos que γ es una órbita periódica. Sigamos la demostración del Teorema 1.6.2 y observemos que con la condición 1.13 la doble integral de 1.10 es estrictamente negativa o estrictamente positiva, sin embargo, la integral de línea que aparece en 1.11, bajo la hipótesis 1.12, es cero con lo cual llegamos a una contradicción y γ no es una ciclo del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. \square

Observemos que en la prueba del Corolario 1.6.3 no se hace referencia al sentido en que es recorrido el ciclo γ , debido a esto no es importante la elección que se haga del vector ortonormal a la superficie S .

Capítulo 2

Sistemas Lotka Volterra

2.1. El modelo.

Supongamos que la tasa instantánea de cambio de una población de una cierta especie es proporcional a su tamaño en cada momento. Una ecuación diferencial que representa la situación anterior es

$$\dot{x} = xN(x) \tag{2.1}$$

donde

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

con $x \geq 0$ representa la población al tiempo t . Al factor de proporcionalidad $N(x)$ se le conoce como *la tasa de crecimiento per cápita*. La tasa de crecimiento puede ser tal que contenga información sobre nacimientos, supervivencia, índices de reproducción, limitantes del medio o algún dato que afecte intrínsecamente el tamaño de la población.

Un modelo como el presentado en (2.1) en el cual la tasa de crecimiento *per cápita* tiene la forma

$$N(x) = \left(r - \frac{x}{K} \right),$$

con $r, K > 0$, se le conoce como *modelo logístico* o simplemente como *ecuación logística*¹.

¹Existe una interesante discusión del modelo logístico en su versión discreta contenida en [7], donde se citan algunas fuentes directas del origen de dicho modelo. Este artículo, en cierta medida, inspiró la presente tesis.

La constante K , en cierto sentido, contiene la información sobre los recursos del medio. Si la población es pequeña comparada con K la tasa de reproducción y supervivencia es alta, relativa a la propia especie, mostrando un crecimiento que tiende al equilibrio K . Cuando la población es “grande” la supervivencia es menor, lo cual se puede interpretar como el resultado de una cantidad limitada de recursos y la competencia por los mismos. Por esto a la constante K también se le denomina *capacidad de carga*[13].

Podemos considerar el mismo modelo para una comunidad de n especies. Supondremos que la tasa de crecimiento *per cápita* de una especie depende del tamaño de cualquiera de las otras especies, lo que da lugar a la expresión

$$\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}) = x_i N_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n$$

donde

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n.$$

El tipo de relación entre las especies de la comunidad, se ve reflejada en el modelo a partir de los signos de las derivadas parciales

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial N_j}{\partial x_i}$$

para $i \neq j$. Si ambas expresiones son positivas, el crecimiento de cada especie promueve el crecimiento de la otra, es decir las especies cooperan entre sí. Cuando el signo de ambas expresiones es negativo, estamos en el caso contrario y diremos que las especies compiten. En el caso donde los signos son opuestos tendremos una relación presa-depredador.

A la matriz

$$DN = \left(\frac{\partial N_i}{\partial x_j} \right)$$

se le conoce como *matriz de comunidad* del sistema.

Cuando el sistema de ecuaciones tiene la forma

$$\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}) = x_i(b_i - (A\mathbf{x})_i), \quad i = 1, \dots, n$$

hablamos de un sistema Lotka Volterra de n dimensiones. En adelante a la matriz A de $n \times n$ la llamaremos *matriz de población*.

En el presente trabajo estudiaremos el caso para el cual A tiene entradas estrictamente positivas y $b_i > 0$; $i=1, \dots, n$; por lo que se llaman sistemas estrictamente

competitivos o *Sistemas Lotka Volterra de Competencia de n dimensiones*. De aquí en adelante abreviaremos la expresión como LVC(n).

Comenzaremos el estudio de los sistemas LVC(2) en la siguiente sección. Para cerrar esta parte remarquemos que según ([13], pp 2), en el caso de los LVC(2) si las dos especies cooperan o compiten no existen ciclos, en el caso de una relación presa-predador sucede lo mismo salvo casos degenerados. Este resultado será usado más adelante, por lo que en la misma referencia se pueden revisar las fuentes directas.

2.2. Sistemas LVC en dos dimensiones.

2.2.1. Un caso particular

Para comenzar el análisis de los LVC(2) se propone la descripción de la dinámica global del siguiente sistema de ecuaciones particular.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(3 - x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(2 - \frac{1}{2}x_1 - x_2) \end{cases} \quad (2.2)$$

Determinemos los conjuntos donde alguna de las dos direcciones se anule, es decir donde suceda alguna de las siguientes condiciones:

- $x_1 = 0$,
- $x_2 = 0$,
- $3 - x_1 - x_2 = 0$
- $2 - \frac{1}{2}x_1 - x_2 = 0$,

gráficamente nos estamos refiriendo a los dos ejes coordenados X_1 , X_2 y dos rectas, \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 , con vector normal $(1, 1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$ respectivamente. Se puede verificar que el campo vectorial sobre ellos es sólo vertical u horizontal por lo que los llamaremos conjuntos de ceroclinas o simplemente *ceroclinas*.

Ahora bien, en el eje X_2 la componente horizontal se anula (sólo tenemos un flujo vertical), lo mismo ocurre con el eje X_1 , con lo cual en el origen se anulan ambas direcciones, es decir el origen es un punto fijo. Con las rectas que hemos nombrado \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 sucede lo mismo que con los ejes, por lo que, si nombramos a las intersecciones:

- $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 = \mathbf{P}$,
- $\mathbf{N}_2 \cap X_2 = \mathbf{R}_2$ y

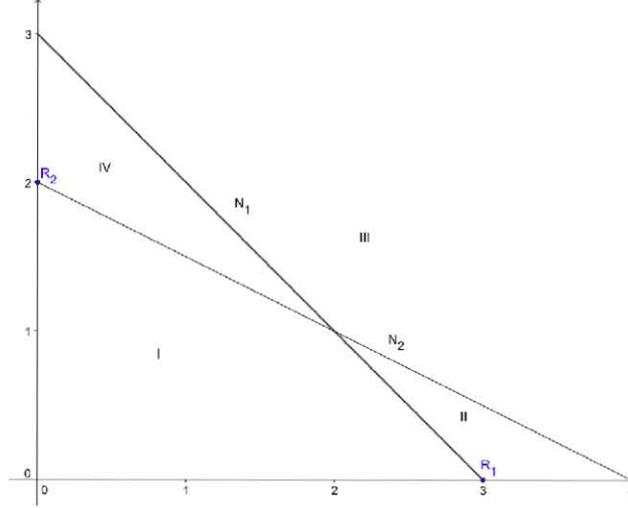


Figura 2.1: Los conjuntos de ceroclinas y las regiones que determinan.

- $\mathbf{N}_1 \cap X_1 = \mathbf{R}_1$,

resulta que \mathbf{P} , \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 son puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones (2.2).

Para determinar el campo de direcciones usemos la figura 2.1 en donde se muestra que las rectas ceroclinas dividen al cuadrante positivo en cuatro regiones.

En cada región los signos de las componentes quedan determinados por la posición de las rectas ceroclinas. Por ejemplo la región I está “por debajo” de ambas rectas por lo que si tomamos un punto con coordenadas (x_1, x_2) en esa región sucederá que

$$\begin{aligned} 3 - x_1 - x_2 &> 0 \\ 2 - \frac{1}{2}x_1 - x_2 &> 0, \end{aligned}$$

lo que en el sistema (2.2) significa que las direcciones ahí son positivas en ambas componentes.

Sobre el eje X_1 , antes del punto \mathbf{R}_1 y sobre el eje tenemos que las direcciones son totalmente horizontales y positivas, mientras que después del punto R_1 igual son horizontales pero negativas, es decir \mathbf{R}_1 atrae sobre el eje X_1 .

También sucede que \mathbf{R}_1 está “por debajo” de N_2 con lo que las componentes verticales de todos los puntos a su alrededor deben ser positivas cuando no sean cero. Así \mathbf{R}_1 es repulsor en la dirección propia que no es el eje horizontal, es decir \mathbf{R}_1 es un

punto silla. Haciendo las observaciones análogas se puede concluir que \mathbf{R}_2 también es un punto silla.

Para terminar de ajustar nuestro retrato fase el Teorema 1.5.1 asegura que existe un conjunto invariante, el simplejo portador Σ , que es transversal a cualquier vector positivo, que es globalmente atractor en el sentido de que cualquier órbita distinta del origen, es asintótica a una en Σ ; con lo que el ω -límite de cualquier punto en $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$ está en Σ , en particular los puntos fijos \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 y \mathbf{P} deben estar en el simplejo portador. Hemos observado que los puntos fijos axiales son puntos sillas por lo que sus variedades inestables también deben estar en Σ y converger a \mathbf{P} . Así que, por un lado, cualquier punto en $\text{Int}\mathbb{R}_+^3$ está siendo atraído a Σ y \mathbf{P} atrae sobre Σ entonces podemos concluir que \mathbf{P} es un atractor global del sistema. De ésta manera hemos completado la descripción del retrato fase que en parte se representa en la figura 2.2 con algunas trayectorias del sistema.

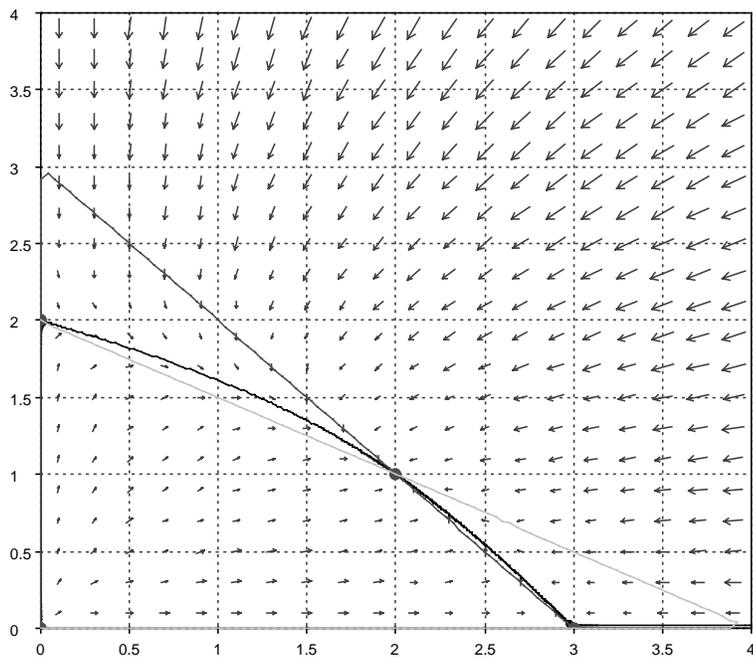


Figura 2.2: Campo vectorial asociado al ejemplo con ceroclinas y simplejo.

2.3. El caso general LVC(2).

En la presente sección nos encaminamos a hacer un análisis lo más general posible del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)\end{aligned}\tag{2.3}$$

haciendo énfasis en lo geométrico, como lo hicimos al principio de la sección 2.2.

2.3.1. Ceroclinas y puntos fijos.

Si la ecuación (2.3) la representamos como

$$\dot{x}_i = x_i N_i(\mathbf{x})$$

podemos determinar los conjuntos de ceroclinas observando el lado derecho de las ecuaciones, es decir $\dot{x}_i = 0$ si y sólo si

$$x_i(N_i) = 0 \text{ si y sólo si } \begin{cases} x_i = 0 \\ \text{o bien } N_i = 0, \end{cases}$$

con $i = 1, 2$ y donde

$$N_i(x_1, x_2) = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2,$$

a la cual denotaremos por $N_i(\mathbf{x})$. Los ceros de la función anterior conforman un conjunto ceroclino, que denotaremos por \mathbf{N}_i , de singular importancia por lo que nos referiremos a él escribiéndolo en negrita para distinguirlo de la función $N_i(\mathbf{x})$, entonces:

$$\mathbf{N}_i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 = 0\},$$

notemos que estos últimos son dos rectas con vector normal positivo.

Conociendo los conjuntos de ceroclinas podemos determinar a los puntos fijos determinando sus intersecciones, tal y como lo hicimos en el ejemplo:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} & \quad \text{si } x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 0, \\ \mathbf{R}_1 &= \left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0\right) \quad \text{si } x_2 = 0 \text{ y } N_1 = 0, \\ \mathbf{R}_2 &= \left(0, \frac{b_2}{a_{22}}\right) \quad \text{si } x_1 = 0 \text{ y } N_2 = 0, \\ \mathbf{P} & \quad \text{si } N_1 = 0 \text{ y } N_2 = 0.\end{aligned}$$

Cabe destacar que \mathbf{P} existirá siempre que las rectas \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 se intersecten. Si existe \mathbf{P} sólo será de nuestro interés cuando esté en el interior del cuadrante positivo \mathbb{R}_+^2 , ya que nuestro estudio se limita a dicho conjunto.

2.3.2. Las clases ceroquinas estables.

En analogía con el análisis hecho a las ecuaciones (2.2) describiremos el comportamiento del campo vectorial determinado por el sistema de ecuaciones (2.3), según la región que las ceroquinas delimitan. Para ello antes estableceremos todas las posibles posiciones cualitativamente distintas de \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 en el cuadrante positivo, posteriormente formalizaremos la idea de “tener una posición de ceroquinas determinada” a través de una propiedad analítica y de ahí seguiremos con nuestra descripción.

Partimos de la suposición de que las rectas ceroquinas no se intersecten en el cuadrante positivo, como se muestra en el caso 1 de la figura 2.3 luego podemos imaginar que movemos uno de los puntos fijos axiales sobre el eje en el sentido positivo, digamos \mathbf{R}_1 en la configuración 1, así nos encontramos con una configuración cualitativamente distinta sólo cuando \mathbf{R}_1 está en la recta \mathbf{N}_2 , la configuración 2, de inmediato deja de tener esa posición para permanecer en la configuración 3 durante el resto del eje. Ahora, si estamos en la configuración 3 podríamos imaginar que movemos el punto \mathbf{R}_2 en dirección al origen y nuevamente estamos en la posición 4 para después entrar en la configuración 5 durante el resto del intervalo que lo aproxima al origen. Finalmente si estamos en la configuración 5 y movemos el punto axial \mathbf{R}_1 en dirección del origen para terminar en la posición 6.

Es importante aquí señalar que las configuraciones 2 y 4 sólo “aparecen” por un momento en el tránsito de una configuración a otra. Lo interesante de las configuraciones 1, 3 y 5 es que, si observamos el espacio de parámetros y la configuración de las ceroquinas es alguna de las anteriores, entonces toda una vecindad de el espacio le corresponderá a sistemas de ecuaciones con la misma configuración ceroquina. Esta observación nos conduce a hacer un estudio sobre lo que llamaremos las *configuraciones ceroquinas estables* que son las correspondientes a las configuraciones 1, 3 y 5. En adelante sólo nos referiremos a sistemas de ecuaciones cuya configuración ceroquina esté en dichas clases.

En el ejemplo, determinar el tipo de estabilidad de los puntos de equilibrio axiales dependió de la posición de los \mathbf{R}_i respecto a la ceroquina \mathbf{N}_j con $i \neq j$. El comportamiento dinámico en torno a los puntos fijos determinó el comportamiento sobre Σ y con ello pudimos describir la dinámica global. Por lo anterior, determinar la posición en la que están los puntos \mathbf{R}_i respecto a la ceroquina \mathbf{N}_j es casi determinar la dinámica global del sistema, como lo demostraremos más adelante. Formalizamos esta idea.

Definición 2.3.1. La configuración ceroclina, de un sistema LVC(2), es la posición de los puntos de equilibrio axiales R_j respecto a la recta N_i con $i, j = 1, 2; i \neq j$.

Si fijamos una de las rectas ceroclinas, digamos N_i , el conjunto $\mathbb{R}_+^2 \setminus N_i$ se puede ver como la unión de dos conjuntos disjuntos: uno acotado, que contiene al origen, y otro que no es acotado. Decimos que un punto, en \mathbb{R}_+^2 , está *antes de* N_i si pertenece a la componente acotada de $\mathbb{R}_+^2 \setminus N_i$ y está *encima de la ceroclina* N_i si pertenece a la componente no acotada del conjunto $\mathbb{R}_+^2 \setminus N_i$.

Ahora examinamos la función $S: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$S(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b},$$

donde A es la matriz de coeficientes (o de población) del sistema (2.3),

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Por la definición de las rectas N_1 y N_2 sus imágenes, tras aplicarles S , son el eje vertical y horizontal respectivamente, mientras que $S(R_2)$ es un punto en el eje horizontal y $S(R_1)$ está en el eje vertical. Con la transformación S la pertenencia a la componente acotada de $\mathbb{R}_+^2 \setminus N_i$ queda caracterizada por el signo de la entrada no nula de $S(R_i)$ que es

$$\text{sgn}((AR_i)_j - b_j) = \text{sgn}\left(\frac{b_i a_{ji}}{a_{ii}} - b_j\right), \quad i \neq j.$$

De esta forma hemos caracterizado una configuración ceroclina mediante el uso de las entradas de la función S .

Definición 2.3.2. Sea $\mathbf{F} \in \text{LVC}(2)$, la configuración ceroclina de F es el par de signos de

$$(AR_i)_j - b_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2\}.$$

Observece que, según lo discutido, la Definición (2.3.1) y la (2.3.2) son equivalentes.

De los sistemas LVC(2), los que nos interesa estudiar, no son los que tienen una configuración ceroclina 2 y 4 de la figura (2.3). Podemos caracterizar a las configuraciones *ceroclinas inestables* como aquellas para que

$$S(\mathbf{R}_i) = (A\mathbf{R}_i) - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

para al menos una $i \in \{1, 2\}$. Si descartamos las configuraciones ceroclinas inestables tenemos cuatro casos, sin embargo, las 1 y 5 son cualitativamente iguales, la diferencia está en la etiquetación de los ejes, razón por la cual las consideraremos la misma.

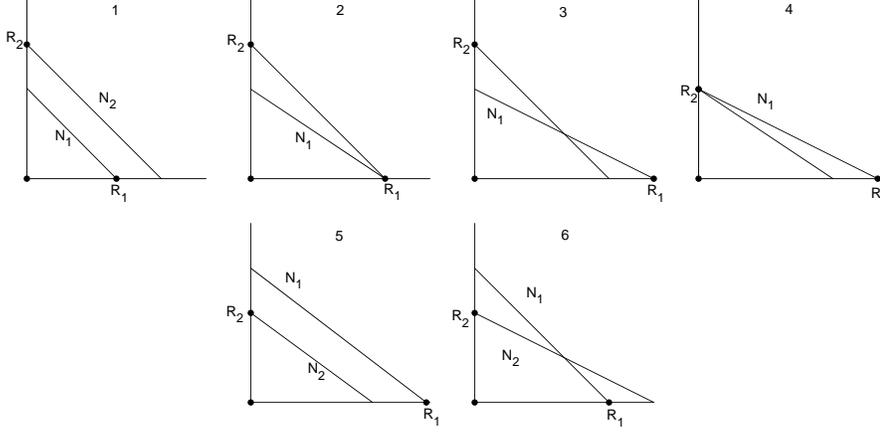


Figura 2.3: Diferentes configuraciones de las ceroclinas.

Definición 2.3.3. *Un sistema LVC(2) es ceroclinamente estable si*

$$(AR_i)_j - b_j \neq 0$$

para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$.

Con esto hemos mostrado que existen tres tipos distintos de configuración ceroclina estables módulo permutación de los ejes, ahora observemos que la relación *tener la misma configuración ceroclina* es una relación de equivalencia en el espacio de sistemas LVC(2) en particular cada configuración ceroclina estable induce una partición bajo esta relación.

Definición 2.3.4. *Sean \mathbf{F} y \mathbf{G} dos sistemas LVC(2). Decimos que \mathbf{F} y \mathbf{G} son ceroclinamente equivalentes si tienen la misma configuración ceroclina, módulo permutación de los ejes.*

La revisión de las configuraciones ceroclinas y la definición de las clases ceroclinas estables tienen sentido en el contexto de determinar la dinámica global del sistema LVC(2) que pertenezca a una clase en particular. Las definiciones que hemos elaborado tienen el objeto de caracterizar las orientaciones del flujo en una región determinada por las ceroclinas. Por ello es importante hacer ver que la dinámica depende de la configuración ceroclina.

Queda por demostrar que la configuración ceroclina, al menos cuando es estable, determina la dinámica global del sistema al que pertenece. La demostración que

ofreceremos usará argumentos geométricos, en la medida de lo posible. Primero demostraremos que los puntos fijos \mathbf{R}_i y \mathbf{P} , de un sistema ceroclinamente estable, son hiperbólicos.

TEOREMA 2.3.1. *En un sistema LVC(2) con configuración ceroclina estable los puntos fijos \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 y \mathbf{P} son hiperbólicos*

Demostración. La linealización entorno al punto \mathbf{R}_1 ² es la matriz

$$DF(\mathbf{R}_1) = \begin{pmatrix} -b_1 & -\frac{a_{12}b_1}{a_{11}} \\ 0 & b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

que tiene los valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -b_1 \\ \lambda_2 &= b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}. \end{aligned}$$

Así λ_1 es el valor propio asociado a la dirección del eje X_1 , por definición de los parámetros del sistema es distinto de cero. Con el valor λ_2 ocurre que

$$\lambda_2 = 0 \text{ si y sólo si } \frac{a_{21}b_1}{a_{11}} - b_2 = 0$$

siendo el lado izquierdo de la última igualdad justo $(A\mathbf{R}_i)_j - b_j$, que en las configuraciones ceroclinas estables siempre es distinto de cero, lo cual demuestra que \mathbf{R}_i es hiperbólico.

Resulta que la matriz

$$DF(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} -a_{11}\hat{x}_1 & -a_{12}\hat{x}_2 \\ -a_{21}\hat{x}_2 & -a_{22}\hat{x}_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\hat{x}_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{\Delta} \quad \text{y} \quad \hat{x}_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{\Delta}$$

(Δ es el determinante de la matriz A) es la linealización de \mathbf{F} entorno a \mathbf{P} .

Como estamos suponiendo que \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 se intersectan y lo hacen en $\text{Int}\mathbb{R}_+^2$ entonces \hat{x}_1 , \hat{x}_2 son un par de números reales positivos. Se puede verificar, elaborando los cálculos algebraicos necesarios, que el cero no es raíz del polinomio característico de la matriz $DF(\mathbf{P})$ y que la parte real de los valores propios es

$$\text{Re}(\lambda) = -(a_{11}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2)$$

²En el caso de \mathbf{R}_2 es análogo.

que siempre es distinta de cero. Ahora sabemos que \mathbf{P} es hiperbólico.

□

Con el Teorema 2.3.1 como base podemos enunciar y demostrar lo siguiente.

TEOREMA 2.3.2. *La configuración de las rectas \mathbf{N}_i determinan el comportamiento dinámico del flujo asociado al sistema (2.3) en una vecindad de los puntos \mathbf{R}_i .*

Demostración. En lo que sigue consideraremos que $i \neq j$ y que ambos índices son uno o dos. Sabemos que el eje coordenado \mathbf{X}_i es invariante al flujo y es un conjunto de ceroclinas por lo que en la restricción a dicho eje, el flujo sólo tiene una dirección.

Si un punto está en la componente acotada por la ceroclina \mathbf{N}_i en la dirección \mathbf{e}_i será positivo, mientras que si está en la componente no acotada el sentido en la dirección \mathbf{e}_i será negativo. Por tanto el sentido sobre el eje \mathbf{X}_i es positivo si está antes de \mathbf{N}_i y negativo si está después; pero \mathbf{N}_i intersecta al eje \mathbf{X}_i en \mathbf{R}_i por lo que \mathbf{R}_i es un atractor en la dirección del eje \mathbf{X}_i .

Siguiendo con la argumentación, ahora consideremos los vectores del flujo en una vecindad de \mathbf{R}_i que no están sobre el eje \mathbf{X}_i . Si \mathbf{R}_i está en la componente acotada por \mathbf{N}_j dichos vectores tendrán la componente en la dirección de \mathbf{e}_j positiva, por lo que, en particular, una dirección propia de \mathbf{R}_i también es positiva y \mathbf{R}_i es un punto silla. Si ocurre que el punto axial está en la componente no acotada por \mathbf{N}_j entonces su dirección propia es negativa y \mathbf{R}_i es un atractor. □

COROLARIO 2.3.3. *La configuración de las rectas \mathbf{N}_i determinan el comportamiento dinámico del flujo en \mathbb{R}_+^2*

Demostración. Sabemos, por el Teorema 1.5.1, que Σ es un conjunto globalmente atractor de codimensión 1. Así la dinámica sobre el simplejo portador está determinada por la dinámica de los puntos axiales \mathbf{R}_i . Por el Teorema 2.3.2 la dinámica de los puntos axiales es, a su vez, determinada por la configuración de las rectas ceroclinas. □

En resumen:

TEOREMA 2.3.4. *Sea $\mathbf{F} \in LVC(2)$ donde $LVC(2)$ es el espacio de los sistemas Lotka Volterra de competencia de dos dimensiones*

- \mathbf{F} es ceroclinamente estable si y sólo si

$$(\mathbf{A}\mathbf{R}_i)_j - b_j \neq 0$$

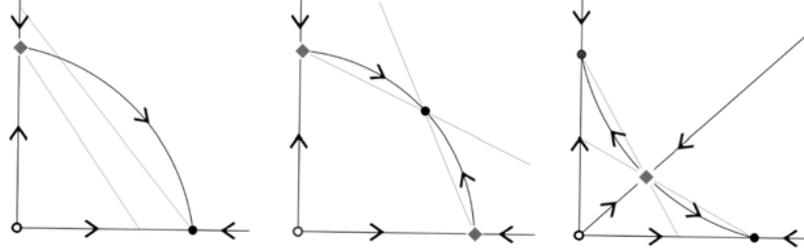


Figura 2.4: Las clases ceroclinas estables en dos dimensiones, con su dinámica en el Σ -esqueleto.

con $i \neq j$ y $j, i = 1, 2$.

- Existen tres clases ceroclíname estables en $LVC(2)$.

Demostración. Queda por demostrar el último inciso, para lo cual describiremos sistemáticamente a dichas familias. Una vez definidos los dos índices $sgn((A\mathbf{R}_i)_j - b_j)$ con $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$ tenemos dos situaciones cualitativamente distintas: los signos son iguales o son distintos. Si son distintos quiere decir que las líneas no se intersecaron dentro del cuadrante positivo y que uno de los puntos es un atractor mientras que el otro es una silla. Los dos signos iguales indica que las rectas ceroclinas se intersecaron en el interior de \mathbb{R}_+^2 , si ambos signos son positivos indica que cada uno de los puntos fijos axiales \mathbf{R}_i están en la componente acotada de la ceroclina contraria, con lo cual, ambos tienen una componente repulsora es decir los dos son puntos silla y \mathbf{P} , que está sobre Σ , es un atractor global. Por otro lado si ambos signos son negativos indican que los \mathbf{R}_i están en la componente no acotada de la ceroclina \mathbf{N}_j , es decir, los puntos axiales son atractores y \mathbf{P} es un punto silla. \square

La dinámica en el punto interior \mathbf{P} (cuando éste existe) está determinada por el tipo de estabilidad de los puntos \mathbf{R}_i , más aún, la estabilidad de \mathbf{P} depende de la interacción de las ceroclinas $(A\mathbf{x})_i = \mathbf{b}_i$ que tienen por vector normal \mathbf{n}_i (ver la figura 2.5) el formado por el renglón i de la matriz de población A . El signo del $\det(A)$ se puede visualizar como la relación entre las pendientes de los vectores normales \mathbf{n}_i . Como ejemplo supongamos que $\det(A) < 0$, si desarrollamos la desigualdad veremos que esto implica que

$$-\frac{a_{12}}{a_{11}} > -\frac{a_{22}}{a_{21}}$$

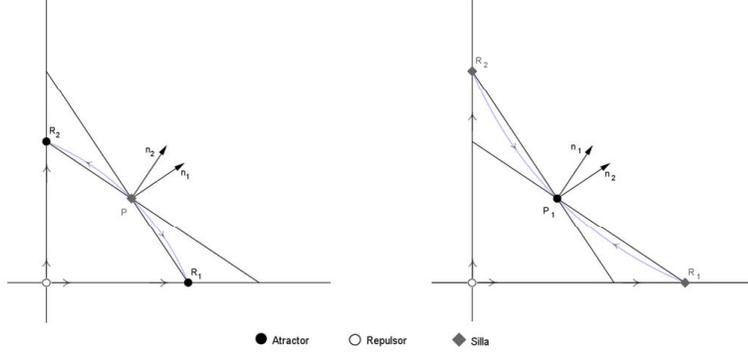


Figura 2.5: Rectas ceroquinas y sus normales, cuando existe \mathbf{P}

es decir que el vector \mathbf{n}_2 está más inclinado que el vector \mathbf{n}_1 .

Ahora podemos afirmar que la estabilidad de \mathbf{P} depende de $\text{sgn}(\det(A))$, según las desigualdades arriba expuestas \mathbf{P} es un atractor global cuando $\det(A) > 0$ y es inestable sobre Σ (es decir es un punto silla) cuando $\det(A) < 0$, ver figura 2.5.

2.4. La equivalencia topológica.

Hemos demostrado que la dinámica global de un sistema LVC(2) está determinada por la dinámica alrededor de sus puntos fijos axiales las cuales, a su vez, dependen de la configuración ceroquina. En esta sección mostramos que las clases ceroquinas estables coinciden con las clases topológicas estables; para ello construimos un homeomorfismo, que garantice la equivalencia topológica, entre dos elementos cualquiera de una clase ceroquina.

Consideremos la función $V_{\mathbf{F}} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, que depende de los parámetros del campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ determinado por el sistema 2.3 y cuya expresión es:

$$V_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = a_{21}x_1 \left(\sum_{j=1}^2 a_{1j}x_j - 2b_1 \right) + a_{12}x_2 \left(\sum_{j=1}^2 a_{2j}x_j - 2b_2 \right) \quad (2.4)$$

con gradiente

$$\nabla V_{\mathbf{F}} = -2(a_{21}(N_1), a_{12}(N_2)) \quad (2.5)$$

donde N_1 y N_2 definidas como al inicio del capítulo. En la desigualdad

$$\nabla V_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (-2)(a_{21}x_1N_1^2 + a_{12}x_2N_2^2) \leq 0$$

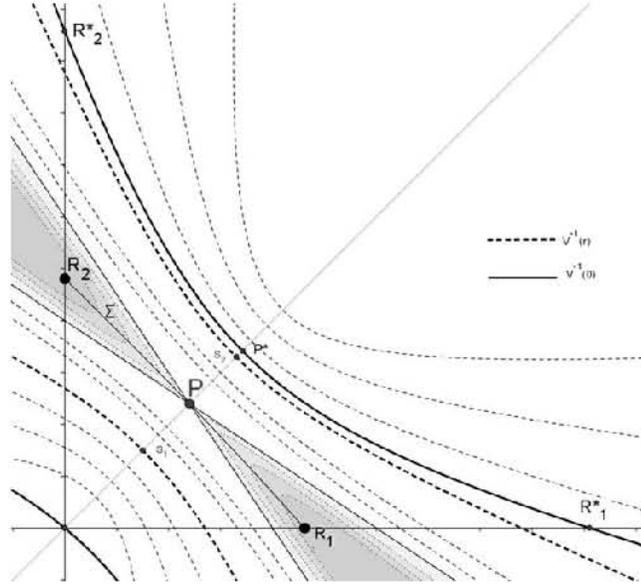


Figura 2.6: Curvas de nivel de la función V .

se puede observar que la igualdad con cero se alcanza en los puntos de equilibrio de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, con lo cual se muestra que las órbitas de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ cortan transversalmente a los conjuntos de nivel de $V_{\mathbf{F}}$ y que ésta última tiene un punto crítico en \mathbf{P} siendo un mínimo cuando $\det(A) > 0$ y un punto silla en el caso de que $\det(A) < 0$ ya que

$$\det \left(\frac{\partial^2 V_{\mathbf{F}}}{\partial x_i \partial x_j} \right) = (a_{21} a_{12}) (\det(A)) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 V_{\mathbf{F}}}{\partial x_1^2} > 0.$$

También resulta que algunas de las curvas de nivel de $V_{\mathbf{F}}$ son un dominio fundamental³ lo cual permitirá dar un sistema de coordenadas adecuado a $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Sigma$ para construir el homeomorfismo buscado.

Hagamos el análisis completo para la familia ceroclina estable número 3, siendo que el análisis para la familia 1 y 2 es análogo. Resulta que, para esa familia, la gráfica de $V_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ es un paraboloides hiperbólico, siendo \mathbf{P} un punto silla y único punto crítico. Los conjuntos de nivel están definidos para todo real, cada uno de ellos es una hipérbola; globalmente tenemos dos familias de hipérbolas con asíntotas comunes

³Un dominio fundamental es un conjunto al que cada órbita, de un sistema dinámico, lo intersecta en un único punto.

siendo el conjunto de nivel correspondiente a $V_{\mathbf{F}}(\mathbf{P})$ las asíntotas y \mathbf{P} el centro de todas ellas.

Para confirmar que la posición de los conjuntos de nivel de $V_{\mathbf{F}}$ es como en la figura 2.6 se demuestra que las asíntotas de dichas hipérbolas tienen pendientes negativas.

Tomemos el polinomio de Taylor, de grado dos, para $V_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ en una vecindad de \mathbf{P} ,

$$T_V(\mathbf{x}) = (a_{11}a_{21})x_1^2 + 2(a_{12}a_{21})x_1x_2 + (a_{12}a_{22})x_2^2 + V_{\mathbf{F}}(\mathbf{P}).$$

Luego traslademos adecuadamente para eliminar el término constante de $T_V(\mathbf{x})$ y reescribamos los coeficientes del polinomio para mayor simplicidad en su manejo. Estas transformaciones dan lugar a la expresión

$$T(\mathbf{x}) = \alpha_1x_1^2 + 2\beta x_1x_2 + \alpha_2x_2^2.$$

Queremos que la expresión para $T(\mathbf{x})$ sea el producto de dos binomios (podemos verificar que los conjuntos de nivel son hipérbolas observando que el discriminante es negativo) es decir que existan constantes c , d y k tales que

$$T(\mathbf{x}) = (x_1 + cx_2)(dx_1 + kx_2)$$

lo cual genera el sistema de ecuaciones

$$ck = \alpha_2$$

$$d = \alpha_1$$

$$k + cd = 2\beta.$$

resolviendo tenemos como solución las siguientes expresiones

$$c = \frac{\alpha_2}{k}$$

$$d = \alpha_1$$

$$k = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha_1\alpha_2},$$

utilizando las expresiones de los parámetros, en términos de las a_{ij} y el hecho de que $\det(A) < 0$ se puede verificar que el interior del radical es positivo y que globalmente $k > 0$.

Las pendientes de nuestras asíntotas tienen las expresiones

$$m_1 = -\frac{1}{c}$$

$$m_2 = -\frac{d}{k},$$

aparentemente los dos signos del radical, en la expresión de k , dan lugar a más de dos soluciones; esto no es así pues, cuando se usa un signo (supongamos el positivo) obtenemos las pendientes m_1 y m_2 mientras que cuando usamos el otro signo obtenemos las mismas pendientes pero renombradas digamos m_2 y m_1 . En conclusión obtenemos dos pendientes, en función de los parámetros a_{ij} , que son negativas.

Las asíntotas de las curvas de nivel de $V_{\mathbf{F}}$ tienen pendiente negativa y pasan por \mathbf{P} , por lo que cada una cruza ambos ejes en su parte positiva. También sabemos que para cualquier $\mathbf{x} \in \Sigma$ resulta que

$$V_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \leq V_{\mathbf{F}}(\mathbf{P})$$

pues Σ es la variedad inestable de \mathbf{P} y $V_{\mathbf{F}}$ es una función de Lyapunov. Por otro lado $V_{\mathbf{F}}(\mathbf{P}) < 0$ y que $V_{\mathbf{F}}(\mathbf{0}) = 0$. Con todo esto si $r \in (V_{\mathbf{F}}(\mathbf{P}), 0)$ resulta que $V_{\mathbf{F}}^{-1}(r)$ es una hipérbola que, cada una de sus ramas, intersecta a los ejes coordenados en su parte positiva y Σ se encuentra entre las dos ramas. Añadiendo que Σ es globalmente atractor concluimos que cada conjunto $V_{\mathbf{F}}^{-1}(r)$ intersecta a todas las órbitas de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, excepto a las que están sobre el simplejo y el origen; además la intersección ocurre en un sólo punto, con lo que $V_{\mathbf{F}}^{-1}(r)$ es un dominio fundamental en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\Sigma \cup \{\mathbf{0}\}\}$.

Construimos ahora un homeomorfismo de $\mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, para lo cual elegimos un sistema de coordenadas particular. Obsérvese que cada punto de $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\Sigma \cup \{\mathbf{0}\}\}$ queda caracterizado por la intersección de su órbita con el dominio fundamental $V_{\mathbf{F}}^{-1}(r)$ y valor que le asigna $V_{\mathbf{F}}$, esto dota a $\mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ del sistema de coordenadas dado por el mapeo $\phi : \mathbb{R}_+^2 \setminus \{\Sigma \cup \{\mathbf{0}\}\} \rightarrow \mathbb{R} \times V_{\mathbf{F}}^{-1}(r)$ definido por

$$\phi(\mathbf{x}) = (V_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}))$$

donde $g(\mathbf{x}) = \vartheta(\mathbf{x}) \cap V_{\mathbf{F}}^{-1}(r)$, donde $\vartheta(\mathbf{x})$ es la órbita de \mathbf{x} , y $r \in (V_{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{P}), 0)$ parte de éste sistema de coordenadas adecuado se ilustra en la figura 2.7.

Señalemos que ϕ está bien definida, pues $V_{\mathbf{F}}^{-1}(r)$ es una región fundamental, y es inyectiva ya que $V_{\mathbf{F}}$ es una función de Lyapunov por lo que es una biyección sobre su imagen, de hecho es un homeomorfismo. Con ésto tomaremos dos sistemas LVC(2) que pertenezcan a la misma clase ceroclina y estableceremos un homeomorfismo que mapea las órbitas de uno en las órbitas del otro preservando la orientación, lo que significa que son topológicamente equivalentes.

TEOREMA 2.4.1. *Si \mathbf{F} y $\tilde{\mathbf{F}}$, dos sistemas LVC(2), tales que pertenecen a la misma clase ceroclina estable, entonces \mathbf{F} y $\tilde{\mathbf{F}}$ son de la misma clase topológica.*

Demostración. Construiremos un homomorfismo entre las órbitas de \mathbf{F} y las de $\tilde{\mathbf{F}}$ de manera que se preserve su orientación, para mostrar la técnica de construcción supondremos que los sistemas pertenecen a la clase ceroclina 3 de la figura (2.4); la construcción en los otros casos es análoga. Denotemos a $V_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$ y $V_{\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{x}) = \tilde{V}(\mathbf{x})$ las funciones de Lyapunov asociadas a cada uno de los sistemas. Con esto sabemos que

$$0 = V(\mathbf{0}) > V(\mathbf{P}) > V(\mathbf{R}_1), V(\mathbf{R}_2)$$

y análogamente

$$0 = \tilde{V}(\mathbf{0}) > \tilde{V}(\tilde{\mathbf{P}}) > \tilde{V}(\tilde{\mathbf{R}}_1), \tilde{V}(\tilde{\mathbf{R}}_2).$$

Si elegimos adecuadamente la etiquetación de los ejes o perturbamos adecuadamente las funciones V y \tilde{V} podemos afirmar (SPG) que $V(\mathbf{R}_1) > V(\mathbf{R}_2)$ y $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{R}}_1) > \tilde{V}(\tilde{\mathbf{R}}_2)$ esto con el fin de elegir un homeomorfismo $h : V(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \tilde{V}(\mathbb{R}_+^2)$ con las siguientes propiedades

$$h(0) = 0, \quad h(V(\mathbf{P})) = \tilde{V}(\tilde{\mathbf{P}}), \quad h(V(\mathbf{R}_1)) = \tilde{V}(\tilde{\mathbf{R}}_1), \quad h(V(\mathbf{R}_2)) = \tilde{V}(\tilde{\mathbf{R}}_2)$$

Una vez fija la función h cada vez que tomemos un $x_0 \in V(\mathbb{R}_+^2)$ resultará que $h(x_0) \in \tilde{V}(\mathbb{R}_+^2)$, lo que permitirá asociar un conjunto de nivel de V con uno de \tilde{V} . En particular sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $V(\mathbf{P}) < r < 0$ con lo que, según sabemos, $V^{-1}(r)$ es una hipérbola con centro en \mathbf{P} y que es un dominio fundamental de las órbitas de \mathbf{F} en $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Sigma \cup \{\mathbf{0}\}$ con lo que se intersecta de manera única con cualquier órbita de \mathbf{F} . Con lo anterior tenemos que $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{P}}) < h(r) < 0$ y además $\tilde{V}^{-1}(h(r))$ es un dominio fundamental.

Si además denotamos con S_1 y S_2 a las intersecciones de la variedad estable del punto \mathbf{P} con el conjunto fundamental $V^{-1}(r)$ entonces podemos definir un homeomorfismo $h_r : V^{-1}(r) \rightarrow \tilde{V}^{-1}(h(r))$ entre los dominios fundamentales de manera que $h_r(S_i) = \tilde{S}_i \quad i \in 1, 2$.

Ahora expresaremos al homeomorfismo que necesitamos. Tomemos un punto de \mathbb{R}_+^2

$$(v, Q) \in V(\mathbb{R}_+^2) \times V^{-1}(r)$$

expresado en el sistema de coordenadas adecuado, luego apliquemos la función $\tilde{\mathbf{H}}$

$$\tilde{\mathbf{H}}(v, Q) = (h(v), h_r(Q))$$

que es un homeomorfismo dado que h y h_r son homeomorfismos.

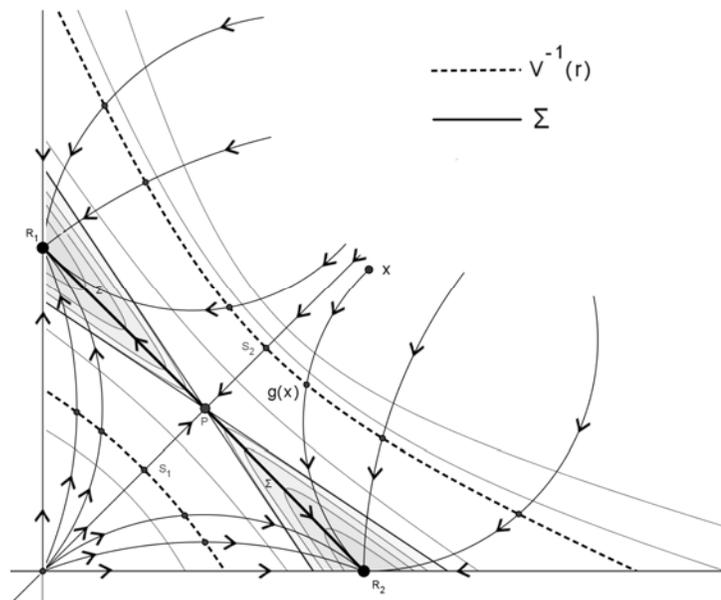


Figura 2.7: Curvas de nivel y trayectorias de \mathbf{F} .

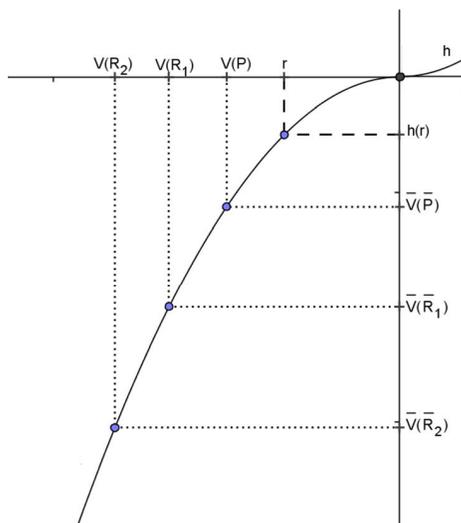


Figura 2.8: $h : V(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \tilde{V}(\mathbb{R}_+^2)$

Así pues \mathbf{H} queda determinada por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{\mathbf{H}} & \\
 & \longrightarrow & \\
 \phi \uparrow & & \uparrow \tilde{\phi} \\
 & \mathbf{H} & \\
 \mathbb{R}_+^2 \setminus \{\tilde{\Sigma} \cup \{0\}\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^2 \setminus \{\Sigma \cup \{0\}\}
 \end{array}$$

o bien

$$\mathbf{H} = \tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{\mathbf{H}} \circ \phi.$$

Así \mathbf{H} es un homeomorfismo de $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\Sigma \cup \{0\}\}$ a $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\tilde{\Sigma} \cup \{0\}\}$ que manda órbitas de \mathbf{F} en órbitas de $\tilde{\mathbf{F}}$ conservando su orientación⁴.

□

⁴Se puede verificar que existe una extensión a todo \mathbb{R}_+^2 pero consideramos pertinente dejar hasta aquí la descripción de dicho homeomorfismo.

Capítulo 3

Tres Dimensiones

3.1. Introducción.

En el estudio de los sistemas LVC en dos dimensiones encontramos que no existen ejemplos con órbitas periódicas no triviales, es decir los conjuntos ω -límite son puntos; tras introducir una nueva dimensión, es de esperarse nuevas dinámicas, entre ellas, la existencia de ciclos límite.

En el presente capítulo se estudian los sistemas Lotka Volterra de competencia tridimensionales, LVC(3). La expresión general de estos sistemas es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ \dot{x}_2 &= x_2(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_3(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3) \end{aligned} \tag{3.1}$$

cuya matriz de parámetros o de población es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

con $b_i > 0$ y $a_{ij} > 0$ para toda $i, j = 1, 2, 3$.

Procederemos por analogía al caso en dos dimensiones, en tanto nos sea posible, señalando las diferencias e indicando cómo se actuó ante ellas.

3.2. Elementos de los sistemas LVC(3)

Comencemos el análisis señalando algunos elementos que serán clave en el proceso de descripción de la dinámica global de un sistema LVC(3).

3.2.1. Los puntos de equilibrio.

En un sistema de la forma (3.1), si algún punto, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^3$, es tal que

$$\dot{x}_i = b_i - (A\mathbf{x})_i = 0 \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, 3\}$$

dicho punto es un punto de equilibrio del sistema. Para que ocurra lo anterior el lado derecho de las igualdades (3.1) debe ser cero lo que se traduce en las condiciones $x_i = 0$ o $N_i(\mathbf{x}) = 0$ donde

$$N_i(\mathbf{x}) = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - a_{i3}x_3. \quad (3.2)$$

En general nos interesa referirnos al conjunto de ceros de la función (3.2), por lo que distinguiremos al conjunto con la letra negrita, es decir

$$\mathbf{N}_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3 | b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - a_{i3}x_3 = 0\}.$$

Regresando a la determinación de los puntos de equilibrio tenemos los siguientes casos:

- a) El origen ya que $x_i = 0$ para toda $i \in \{1, 2, 3\}$
- b) Los *puntos axiales*: son aquellos para los cuales $N_i() = 0$ sobre el eje coordenado X_i a este punto nos referiremos como \mathbf{R}_i y su coordenada distinta de cero es $\frac{b_i}{a_{ii}}$.
- c) Los *puntos planares*, \mathbf{Q}_{ij} , que están determinados por las condiciones $N_i(\mathbf{x}) = 0$, $N_j(\mathbf{x}) = 0$ y $x_k = 0$ con i, j, k distintos. Esto quiere decir que estos puntos son la intersección de los planos \mathbf{N}_i y \mathbf{N}_j sobre el plano coordenado $X_i X_j$.
- d) El punto interior \mathbf{P} que existe cuando los tres planos \mathbf{N}_i con $i \in \{1, 2, 3\}$ se intersectan en el $\text{Int}\mathbb{R}_+^3$.

Estos puntos son los posibles puntos fijos del flujo definido por un sistema Lotka Volterra de competencia de tres dimensiones a condición de que existan dentro del octante positivo.

3.2.2. Las ceroclinas

Los conjuntos de ceroclinas son los que están constituidos por puntos en los que el campo vectorial tiene al menos una dirección nula, es decir para aquellos puntos en los que $\dot{x}_i = 0$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$. Los conjuntos ceroclinos de un sistema Lotka Volterra de tres dimensiones son los planos coordenados y los planos \mathbf{N}_i que de aquí en adelante llamaremos *planos ceroclinos* y cuando no haya confusión simplemente los llamaremos la ceroclina i -ésima.

Un plano ceroclino divide al octante positivo \mathbb{R}_+^3 en dos componentes, una acotada que contienen al origen y otra no acotada. Diremos que un punto está “por debajo” de una ceroclina \mathbf{N}_i cuando éste pertenezca a la componente acotada del conjunto $\mathbb{R}_+^3 \setminus \mathbf{N}_i$. Saber la posición de un punto respecto a una ceroclina, en el sentido anterior tendrá singular importancia en el análisis que haremos a continuación, razón por la cual es importante que caractericemos dicha posición con algún criterio algebraico.

Definamos la función $T : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ donde

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Para entender mejor qué hace la transformación T veamos qué ocurre con la imagen de casos particulares. Por ejemplo, si \mathbf{x}_0 está en \mathbf{N}_1 resulta ser que $T(\mathbf{x}_0)$ estará en el plano coordenado X_2X_3 , ya que estar en \mathbf{N}_1 implica que $N_1 = 0$ y con ello la primera entrada de la transformación es cero. En general $T(\mathbf{N}_i) \subset X_jX_k$ donde $i, j, k = 1, 2, 3$ distintos. Como los planos ceroclinos son transformados, por T , en los planos coordenados resulta que si un punto está en la componente acotada de $\mathbb{R}_+^3 \setminus \mathbf{N}_i$, al aplicarle T su entrada i -ésima, esta será negativa; mientras que si el punto estaba en la componente no acotada ocurrirá lo contrario.

La posición de un punto en el octante positivo respecto al plano ceroclino \mathbf{N}_i se reduce a saber el signo de la entrada i -ésima de la transformación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ si en particular $T_i(\mathbf{x}) = 0$, el punto está en la ceroclina \mathbf{N}_i . En particular un punto axial, \mathbf{R}_i está en la componente acotada de la ceroclina \mathbf{N}_j si

$$T_j(\mathbf{R}_i) = (\mathbf{AR}_i)_j - b_j = \left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}} - b_j \right) < 0$$

mientras que si está en la componente no acotada la desigualdad es la contraria. En el caso del punto de equilibrio planar \mathbf{Q}_{ij} resulta que al estar simultáneamente sobre

las ceroclinas \mathbf{N}_j y \mathbf{N}_i , $T_i(\mathbf{Q}_{ij}) = T_j(\mathbf{Q}_{ij}) = 0$ por lo que la posición que resta por establecer es respecto a la ceroclina \mathbf{N}_k es decir el signo distinto de cero es $T_k(\mathbf{Q}_{ij})$; en todo lo anterior estamos suponiendo que i, j y k son distintos y están en $\{1, 2, 3\}$. Para mayor brevedad en el manejo de estos signos adoptaremos la siguiente notación

$$\text{sgn}(T_j(\mathbf{R}_i)) = s_{ij} \quad \text{y} \quad \text{sgn}(T_k(\mathbf{Q}_{ij})) = \tau_k.$$

Con esto dispuesto queda señalar la forma en que las posiciones de las ceroclinas influyen en la dinámica de un sistema LVC(3). Antes recordaremos un elemento de la dinámica de dichos sistemas de ecuaciones diferenciales.

3.2.3. El simplejo portador.

Recordemos que los sistemas LVC(3) cumplen las condiciones del Teorema de Hirsch 1.5.1 por lo que existe una superficie, Σ , de codimensión 1, homeomorfa a la unidad simpleja Δ_3 y que atrae globalmente. Es decir, que el ω -límite de todos los puntos en \mathbb{R}_+^3 están sobre Σ . En particular los puntos de equilibrio de un sistema LVC(3) (excepto el origen) están sobre dicho conjunto.

El simplejo portador, Σ , es homeomorfo por proyección radial a la unidad simpleja, según el Teorema 1.5.1, con lo que podemos representar al simplejo fuera de su contexto de \mathbb{R}^3 como un triángulo plano en el que los vértices son los puntos fijos axiales. En caso de aparecer algún punto \mathbf{Q}_{ij} se representará en el punto medio de la arista correspondiente. A esta estructura la llamaremos el Σ -esqueleto.

El hecho de que los sistemas Lotka Volterra tridimensionales cumplan con las condiciones de Hirsch-Smale en 1.5.1 garantiza que la dinámica global del flujo inducido por el sistema se encuentre reflejada en el simplejo, es decir, basta con determinar la dinámica sobre Σ para describir la dinámica global.

3.3. El análisis lineal.

En la presente sección mostraremos que los puntos de equilibrio axiales y planares de un sistema LVC(3) son hiperbólicos. Usaremos ese hecho para establecer un vínculo entre el signo de los valores propios de la linealización en los puntos fijos y el lugar de estos últimos respecto a los planos ceroclinos que hemos descrito con anterioridad.

Haremos el análisis lineal en torno al punto \mathbf{R}_1 , en los demás puntos axiales es análogo. El sistema lineal que aproxima a el sistema en \mathbf{R}_1 lo define la matriz de Jacobi

$$DF(\mathbf{R}_1) = \begin{pmatrix} -b_1 & -\frac{a_{12}b_1}{a_{11}} & -\frac{a_{13}b_1}{a_{11}} \\ 0 & b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & b_3 - \frac{a_{31}b_1}{a_{11}} \end{pmatrix},$$

uno de cuyos valores propios es $-b_1 < 0$, lo cual indica que sobre el eje X_1 , \mathbf{R}_1 siempre atrae; los otros dos valores propios de $DF(\mathbf{R}_1)$ están determinados por las expresiones

$$b_j - \frac{a_{j1}b_1}{a_{11}} \text{ con } j \in \{2, 3\}$$

que coinciden, salvo por el signo, con las entradas j -ésimas de la transformación T cuando es evaluada en el punto \mathbf{R}_1 . Nosotros estamos interesados en saber si el punto de equilibrio \mathbf{R}_1 es hiperbólico. De la matriz $DF(\mathbf{R}_1)$ se deduce que las condiciones en las cuales \mathbf{R}_1 no es hiperbólico son

$$\frac{b_j}{a_{j1}} = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad j = 2, 3$$

si sucede la igualdad la interpretación geométrica es que \mathbf{N}_j intersecta al eje X_1 justamente en \mathbf{R}_1 . Tal condición es análoga a la inestabilidad ceroclina del caso bidimensional, más adelante argumentaremos con detalle su exclusión, pero aclaremos ahora que los sistemas con esta condición no serán contemplados en nuestro estudio.

Señalemos una vez más que los signos de los valores propios de la matriz $DF(\mathbf{R}_1)$ son exactamente $-s_{1j}$, esto establece un puente entre la posición de los puntos axiales en el conjunto $\mathbb{R}_+^3 \setminus \mathbf{N}_i$ y el tipo de estabilidad en los mismos; si \mathbf{R}_1 está en la componente acotada del conjunto será repulsor en la dirección i -ésima y viceversa.

Falta argumentar que el punto de equilibrio planar $\mathbf{Q}_{12} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0)$ es un punto de equilibrio hiperbólico para ello analicemos la matriz

$$DF(\mathbf{Q}_{12}) = \begin{pmatrix} -a_{11}\tilde{x}_1 & -a_{12}\tilde{x}_1 & -a_{13}\tilde{x}_1 \\ -a_{21}\tilde{x}_2 & -a_{22}\tilde{x}_2 & -a_{23}\tilde{x}_2 \\ 0 & 0 & b_3 - a_{31}\tilde{x}_1 - a_{32}\tilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Dos de los valores propios de la matriz se pueden hallar pensando en el sistema de ecuaciones que resulta de la condición $x_3 = 0$, que es un sistema LVC(2) con matriz de población

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y con un punto interior de equilibrio. Según lo analizamos en la Sección 2.3 si $\det(A_{12}) < 0$ sucederá que \mathbf{Q}_{12} es un punto silla en el plano coordenado en el que se encuentra, mientras que en el contexto de \mathbb{R}^3 nos dice que repele sobre los bordes del simplejo; ocurre lo contrario cuando $\det(A_{12}) > 0$, en cualquier caso un sistema de este tipo, los valores propios asociados a un punto interior de equilibrio tienen parte real distinta de cero.

El tercer valor propio tiene la expresión de $N_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0)$ por lo que si fuera cero querría decir que \mathbf{Q}_{ij} está sobre la ceroclina \mathbf{N}_3 , situación que excluiremos de los sistemas LVC(3) ceroclinamente estables.

Dicho sea de paso resulta que

$$b_3 - a_{31}\tilde{x}_1 - a_{32}\tilde{x}_2 = -T_k(\mathbf{Q})_{ij} = -\tau_k,$$

es decir el signo del valor propio en la tercera dirección propia es contraria al τ_k , que definimos con anterioridad, con lo cual se establece la relación que tiene con la dinámica en \mathbf{Q}_{ij} en la dirección que apunta “hacia el interior” del simplejo portador.

Con ello concluimos que en el caso de los sistemas que estamos estudiando \mathbf{Q}_{12} es hiperbólico.

3.4. La configuración ceroclina.

Haciendo un ejercicio de síntesis estableceremos la interacción de los distintos elementos dinámicos asociados a un sistema LVC(3).

Ahora sabemos que los signos de los valores propios de la linealización del sistema en los puntos fijos axiales, están relacionados con los signos de la transformación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$, de tal manera que la disposición de los puntos fijos \mathbf{R}_i respecto a las ceroclinas \mathbf{N}_j , $i \neq j$ junto con la información dinámica de los mismos, se encuentra condensada en la matriz de signos

$$(s_{ij}) = \text{sgn}((\mathbf{AR}_i)_j - b_j)$$

A continuación ofreceremos un ejemplo de cómo puede usarse esta matriz. En la figura 3.1 se muestran los planos ceroclinos de un sistema LVC(3). La matriz de signos

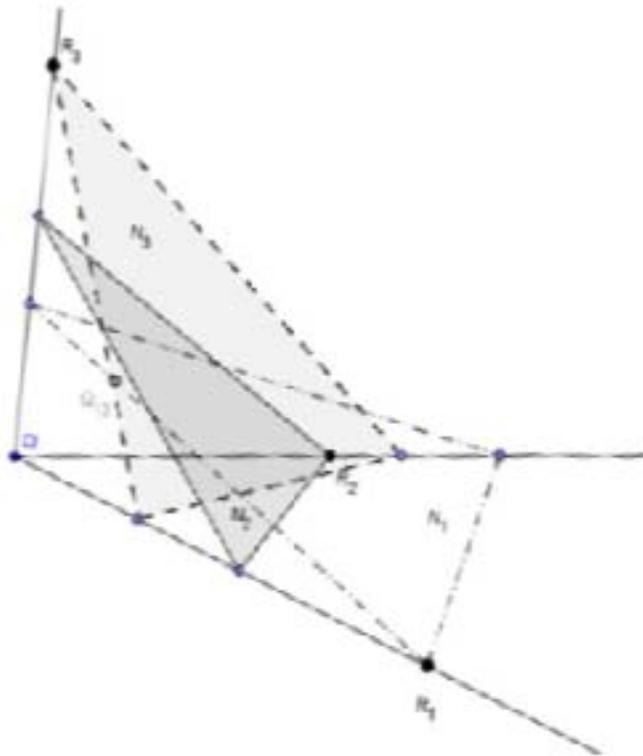


Figura 3.1: Ejemplo de una configuración ceroclina.

asociada es

$$(s_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & - \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$$

El punto \mathbf{R}_1 se encuentra en las componentes no acotadas de $\mathbb{R}_+^3 \setminus \mathbf{N}_i$ con $i = 2, 3$, \mathbf{R}_2 se encuentra en el caso contrario, es decir está en las componentes acotadas de $\mathbb{R}_+^3 \setminus \mathbf{N}_1$ y $\mathbb{R}_+^3 \setminus \mathbf{N}_3$, mientras que \mathbf{R}_3 está en el mismo caso del primer punto de equilibrio axial. En términos de la dinámica del flujo podemos decir que \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_3 son atractores globales del sistema y \mathbf{R}_2 es, restringiéndonos al simplejo, un repulsor. Adicionalmente en la figura (3.1) observamos que existe el punto \mathbf{Q}_{13} y que está en la componente acotada de $\mathbb{R}_+^3 \setminus \mathbf{N}_2$ con lo que $\tau_2 > 0$, por lo cual en la dirección de \mathbf{R}_2 atrae y así el punto de equilibrio planar es un punto silla. Para obtener la última información no es suficiente la matriz de signos, por lo que, se debe recurrir a τ_2 como habíamos convenido con anterioridad.

De la figura, también, podemos deducir la existencia de un punto de equilibrio interior, \mathbf{P} , que es la intersección de los tres planos ceroclinos del cual, de momento, no tenemos más información. Como \mathbf{P} está en $\text{Int}\mathbb{R}_+^3$ podemos decir que, conociendo s_{ij} y de τ_j hemos determinado la dinámica sobre el Σ -esqueleto del sistema LVC(3) cuyos planos ceroclinos se encuentran en la disposición indicada en la figura 3.1. Lo anterior se puede representar en el simplejo de la figura 3.2.

De la discusión anterior sintetizamos los resultados de la presente sección con una definición y un teorema.

Definición 3.4.1. *En un sistema LVC(3) la disposición de los puntos fijos planares y axiales respecto a los planos ceroclinos la llamaremos configuración ceroclina*

Igual que en el caso bidimensional podemos ver que es equivalente hablar de la posición de los puntos fijos, respecto a las ceroclinas que los signos de la transformación T evaluada en los puntos fijos en cuestión.

En este texto nos interesan los sistemas que, en el espacio de parámetros, toda una vecindad de ellos tenga la misma configuración ceroclina, a dichos sistemas los llamaremos *ceroclinamente estables*.

Los sistemas que poseen una configuración ceroclina estable son aquellos cuyos planos ceroclinos, tomados dos a dos, no intersectan a los ejes en un mismo punto y

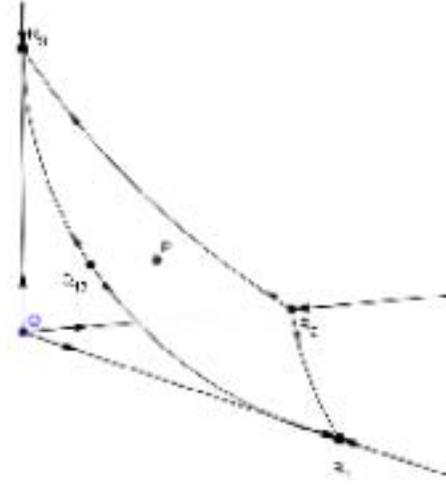


Figura 3.2: Vista del simplejo asociado a la configuración ceroclina del ejemplo con algunas indicaciones del comportamiento del flujo sobre el simplejo.

los que, en caso de que los tres planos se intersecten en un solo punto, su punto de equilibrio interior, \mathbf{P} , está en $\text{Int}(\mathbb{R}_+^3)$.

En términos de la matriz de signos, (s_{ij}) , la estabilidad ceroclina significa que en la diagonal, y sólo en ella, tendrá entradas cero, en las demás serán signos definidos; por esta razón llamaremos a (s_{ij}) la *matriz de signos*.

Definición 3.4.2. *Las clases ceroclínamente estables son aquellas en las que ocurre que*

$$(T(\mathbf{R}_i))_j \neq 0, (T(\mathbf{Q}_{ij}))_k \neq 0$$

para i, j, k distintas tomadas en $\{1, 2, 3\}$.

TEOREMA 3.4.1. *En un sistema de ecuaciones LVC(3) la configuración ceroclina determina el comportamiento dinámico del flujo sobre el Σ -esqueleto.*

Demostración. Supongamos que existe $\mathbf{Q}_{ij} \in \mathbb{R}_+^3$ con $i \neq j$. Tanto los puntos axiales \mathbf{R}_i como el punto planar son hiperbólicos la dinámica en un entorno de ellos está descrita por los valores propios de las matrices $D\mathbf{F}(\mathbf{R}_i)$ y $D\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij})$ respectivamente. Los signos de los valores propios de la matriz de linealización, para \mathbf{R}_i son

$$-sgn((A\mathbf{R}_i)_j - b_j) = s_{ij} \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j$$

esto en las direcciones que no son el eje; análogamente

$$-sgn(A(\mathbf{Q}_{ij})_k - b_k) = \tau_k; \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

con i, j y k distintas entre sí, es el signo del valor propio asociado a la dirección que no está en el plano $X_i X_j$ ¹. Las expresiones de los valores propios son las entradas de la función

$$T(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

evaluada en \mathbf{R}_i y \mathbf{Q}_{ij} , a su vez, dichos signos, están determinados por la configuración ceroquina; entonces podemos concluir que la configuración ceroquina determina la dinámica sobre el Σ -esqueleto. \square

Observemos que este teorema es la versión tridimensional del Teorema 2.3.2.

3.5. Las clases ceroquinas.

Hasta éste momento sabemos que la dinámica global de un sistema LVC(3) es conocida cuando la dinámica sobre el simplejo portador está totalmente descrita. Hemos establecido que la configuración ceroquina determina la dinámica sobre el Σ -esqueleto.

La configuración ceroquina será necesaria en la búsqueda de ciclos límite en sistemas LVC(3). Observemos que el flujo sobre Σ casi está determinado por el análisis entorno a los puntos fijos axiales y planares, quedando pendiente la descripción dinámica entorno al punto interior \mathbf{P} (cuando éste existe en $\text{Int}\mathbb{R}_+^3$). Antes de seguir con el estudio entorno a \mathbf{P} concluiremos éste capítulo haciendo una descripción del espacio de sistemas LVC(3) según su configuración ceroquina.

Para argumentar que el espacio de sistemas se puede particionar módulo su configuración ceroquina sugerimos algunos criterios para deducir las clases ceroquinas estables,

¹Los puntos de equilibrio \mathbf{R}_i y \mathbf{Q}_{ij} se encuentran en el simplejo y sobre un plano coordenado, ambos conjuntos son invariantes por lo que los vectores propios en cada uno de los puntos deben generar el plano coordenado y ser tangentes a Σ , obligándose a ser consistentes entre sí. Esta información la usaremos para determinar la estabilidad de los puntos \mathbf{Q}_{ij} sobre la intersección del simplejo con el plano coordenado correspondiente.

finalmente describiremos un representante de cada clase según su dinámica sobre el Σ -esqueleto.

Se ha establecido que la matriz

$$(s_{ij}) = (\text{sgn}(T_j(\mathbf{R}_i))) \quad i, j = 1, 2$$

junto con el signo τ_k (cuando este existe) caracterizan la configuración ceroclina de un sistema LVC(3). Si contemplamos todas las posibles combinaciones de signos, para éstos elementos, se exhibirán todas las posibles configuraciones ceroclinas que puede adoptar un sistema de los estudiados.

Ahora bien, si simplemente variamos los signos resultarán que algunas de las configuraciones son geoméricamente imposibles y otras serán cualitativamente iguales entre sí. Por lo anterior, las clases ceroclinas estables pueden ser determinadas buscando todas las variaciones de la matriz (s_{ij}) , añadiendo los casos que resulten de tomar en cuenta τ_k y la supresión de las repeticiones.

Cada configuración ceroclina tiene asociado una representación de la dinámica sobre el Σ -esqueleto, a través de un triángulo en cuyos vértices se encuentran representados los puntos \mathbf{R}_i . Sobre las aristas se colocarán flechas en congruencia con la dirección de la dinámica que establece cada signo como se indicó en la sección pasada. Si existen algún punto planar se colocará en el punto medio de la arista que le corresponde. De existir el punto interior \mathbf{P} éste sólo se señalará en el interior del triángulo, de momento desconocemos la dinámica en una vecindad de él.

Dos configuraciones son iguales si al permutar los ejes en la primera resulta la segunda. A continuación mostramos con un ejemplo a lo que nos referimos y luego traduciremos esto en términos de la matriz (s_{ij}) .

En lo que sigue consideraremos exclusivamente el simplejo portador, por lo que, usaremos su representación como un triángulo equilátero plano, fuera de su contexto tridimensional. Consideremos las siguientes matrices

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & - & - \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & - \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$$

en términos del simplejo tienen asociada las dinámicas de la figura 3.3 respectivamente, cualitativamente hablando tenemos la misma dinámica salvo por una rotación o reflexión de Σ ; dicha transformación se consigue al permutar los ejes X_1 y X_2 . La

permutación de los ejes se refleja en el intercambio de signos del primer con el segundo renglón, respetando el cero de la diagonal, de la matriz S_1 con la matriz S_2 .

Podemos explicar el “intercambio” de renglones en términos algebraicos a partir de la permutación de los índices. Por un lado si $i = j$ resulta que

$$s_{ij} = 0$$

por lo que tras aplicarle la permutación (que denotaremos con la letra p)

$$s_{p(i)p(j)} = 0$$

pues todos los elementos sobre la diagonal son cero; es decir, los elementos sobre la diagonal siguen siendo cero tras la permutación.

Por otro lado si $i \neq j$ sucede que

$$p(i) \neq p(j)$$

lo que significa que los signos de la matriz fuera de la diagonal, tras la permutación de ejes, tienen como imagen un elemento fuera de la diagonal. Además

$$s_{ij} \mapsto s_{p(i)p(j)}$$

$$s_{ik} \mapsto s_{p(i)p(k)}$$

con i, j, k distintos entre sí. Lo que, en términos de la matriz (s_{ij}) , resulta en que la imagen de un renglón, tras la permutación, es un renglón.

Por lo anterior un primer criterio para agrupar las clases ceroclinadas será la permutación de los ejes, que en términos de la matriz de signos es el intercambio de renglones con la diagonal en ceros.

Definición 3.5.1. Sean F y G dos sistemas LVC(3) ceroclinadamente estables. Diremos que F y G son ceroclinadamente equivalente si a su configuración ceroclina les corresponde la misma matriz de signos y, en caso de que existan los puntos fijos Q_{ij} , los mismos valores correspondientes a τ_k ; módulo permutación de los ejes.

Ahora describimos breve e informalmente, la manera en que hicimos la deducción de las clases ceroclinadas en las que se particiona el espacio de los sistemas LVC(3) ceroclinadamente estables. Para proceder sistemáticamente decidimos tomar en cuenta el número de signos negativos que aparecen en las matrices de signos, (s_{ij}) , luego consideraremos la distribución de los mismos módulo permutación de los renglones.

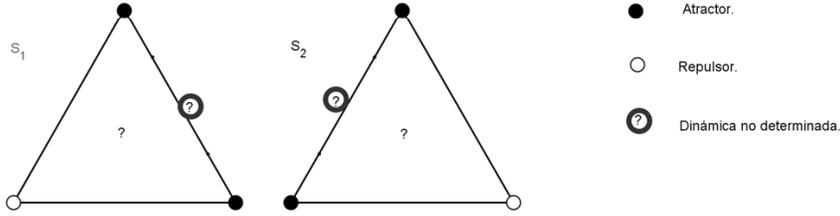


Figura 3.3: Desconocemos si existe \mathbf{P} , la dinámica de los \mathbf{Q} depende de la asignación de los τ_k .

Por ejemplo sólo existe una clase ceroclina con todos sus signos positivos, existe sólo una matriz con un signo menos, existen cuatro matrices cualitativamente distintas con dos signos negativos, etc.

No toda la información sobre la dinámica se encuentra en la matriz de signos, por lo que, si existe un punto planar debemos considerar por separado τ_k que indicará la estabilidad en la dirección que no está sobre el plano coordenado de dicho punto.

Nos resultó útil tener un criterio² que nos permitiera determinar la existencia de un punto de equilibrio planar sólo de la revisión de la matriz (s_{ij}) .

TEOREMA 3.5.1. *En la matriz de signos, $s_{ij} = s_{ji}$ (con $i \neq j$) si y sólo si existe el punto de equilibrio planar \mathbf{Q}_{ij} .*

Una vez elegida una matriz (s_{ij}) y los posibles τ_k de los puntos planares que aparezcan, queda por verificar que dicha configuración sea consistente geoméricamente.

También pueden encontrar criterios que determinen el signo del valor propio de la tercera dirección de un punto planar (τ_k).

TEOREMA 3.5.2. *Si \mathbf{R}_i y \mathbf{R}_j son puntos sillas y existe el punto de equilibrio planar \mathbf{Q}_{ij} ($i \neq j$) entonces \mathbf{Q}_{ij} no es punto silla (restringiéndonos al simplejo).*

²Es importante señalar que los criterios que se enuncian a continuación están redactados de manera informal y sin demostración dado que. esto excede en extensión y profundidad los propósitos de la presente tesis. Nos interesa mostrar que existen clases ceroclinas que admiten una bifurcación de Hopf no tanto la manera en que determinamos las familias ceroclinas, eso puede estar en un texto futuro.

TEOREMA **3.5.3.** *Si (s_{ij}) es simétrica entonces $\text{sgn}(T_k(\mathbf{Q}_{ij})) = s_{ki}$ o $\text{sgn}(T_k(\mathbf{Q}_{ik})) = s_{ij}$ para i, j y k distintas.*

Finalmente es necesario corroborar geoméricamente la existencia del punto de equilibrio interior \mathbf{P} . El resultado de este proceso son 33 clases ceroquinas estables, de las cuales sabemos su dinámica sobre el Σ -esqueleto.

Con lo dicho en ésta sección enlistaremos a continuación la representación del simplejo de las clases ceroquinas estables que obtuvimos por el método descrito, junto con las matrices de signo, (s_{ij}) , y los vectores de signo, (τ_k) , que les dieron origen.

Matriz (s _{ij})	Vector (τ _κ)	Simplejo	Matriz (s _{ij})	Vector (τ _κ)	Simplejo
$\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & - \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ + \\ - \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & - \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ + & 0 & - \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ + \\ - \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ - \\ - \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ + \\ + \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ - \\ - \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ - \\ - \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & - \\ - & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & + \\ - & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ - & 0 & + \\ - & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ + \\ + \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ - & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ - \\ + \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ - \\ - \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ - & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ + \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$	

Figura 3.4: Configuraciones ceroclinas estables.

Matriz (s_{ij})	Vector (τ_k)	Simplejo
$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ + & 0 & - \\ + & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ \\ \end{pmatrix}$	6
$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ + & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ + \end{pmatrix}$	11
$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ + & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ + \\ + \end{pmatrix}$	26
$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & + \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ \\ \end{pmatrix}$	31
$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & + \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ + \\ \end{pmatrix}$	5
$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ + \\ \end{pmatrix}$	9
$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ - \\ \end{pmatrix}$	10
$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ + \\ \end{pmatrix}$	24
$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ \end{pmatrix}$	30
$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$	27
$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - \\ - \\ + \end{pmatrix}$	12

Figura 3.5: Configuraciones ceroquinas estables.

Capítulo 4

Dinámica en $Int\Sigma$ para un sistema LVC(3)

4.1. Introducción.

En el Capítulo 3 mostramos que la dinámica, sobre sus Σ -esqueleto, de un sistema Lotka-Volterra de competencia, estable, en tres dimensiones, LVC(3) queda determinada por el tipo de estabilidad de los puntos fijos axiales, \mathbf{R}_i , y planares, \mathbf{Q}_{ij} ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$). A su vez la dinámica en estos puntos queda determinada por su configuración ceroclina.

Una vez que caracterizamos la configuración ceroclina, haciendo uso de la matriz de signos y los signos τ_k , hemos mostrado que el espacio de los sistemas LVC(3) puede partitionarse según su configuración ceroclina, módulo permutación de los ejes. Quedando establecido que existen 33 familias ceroclinas estables cuya dinámica en el Σ -esqueleto está determinada.

A lo largo de este capítulo describiremos, haciendo uso de distintos recursos, la posible dinámica global de las 33 familias estables que hemos descrito. Para determinar la dinámica global de un sistema LVC(3) resta describir el comportamiento del flujo en $Int\Sigma$. La diferencia con los sistemas LVC(2) será que la configuración ceroclina no es suficiente para determinar la dinámica global, pues mostraremos casos en los que se tienen dos sistemas de ecuaciones, en la misma familia ceroclina, en uno de los cuales

exista una órbita periódica y otro para la que no.

Hasta este punto del análisis un hecho que ha facilitado nuestro estudio es la existencia del simplejo portador. Según el Teorema 1.5.1 el simplejo es homeomorfo a la unidad simpleja, esto es, el flujo del sistema tridimensional se reduce al flujo sobre Σ que es esencialmente bidimensional, esto permite utilizar algunos resultados para sistemas planos, hecho que se deberá tener en cuenta en lo que sigue.

Algunas de las familias que analizaremos más adelante contienen un punto de equilibrio en $\text{Int}\Sigma$, es decir un punto interior \mathbf{P} . Conviene recordar que, según las características algebraicas de un sistema $\text{LVC}(3)$, en $\text{Int}\mathbb{R}_+^3$ a lo más existe un punto de equilibrio¹.

Ahora agruparemos las familias ceroquinas según cualidades dinámicas, luego examinaremos cada caso para determinar la dinámica en el $\text{Int}\mathbb{R}_+^3$.

4.2. Clases sin órbitas periódicas.

4.2.1. Clases ceroquinas sin punto interior fijo.

Las familias 1 a 18 tienen como característica distintiva la inexistencia del punto interior \mathbf{P} .

Observemos que el simplejo es un conjunto compacto² además de invariante, así que cumple las condiciones del Teorema de Poincaré-Bendixson (1.4.1). Demostraremos que la dinámica sobre Σ , para éstas familias estables, queda determinada por la dinámica en su Σ -esqueleto y con ello por la configuración ceroquina.

TEOREMA 4.2.1. *En un sistema $\text{LVC}(3)$, cuya coconfiguración ceroquina pertenece a alguna de las familias entre 1 y 18, la dinámica global está determinada por la dinámica en su Σ -esqueleto.*

Demostración. Determinemos los conjuntos límite para puntos en el simplejo. Sea $\mathbf{x} \in \text{Int}\Sigma$, como Σ es compacto entonces cumple con las hipótesis del teorema 1.4.2 de Poincaré-Bendixson, con lo cual, $\omega(\mathbf{x})$ es un punto o una órbita periódica.

Si $\omega(\mathbf{x})$ fuera un ciclo límite, por 1.4.2, en el conjunto encerrado por dicha órbita habría un punto fijo. De haber un punto fijo en el $\text{Int}\Sigma$ este sería \mathbf{P} mismo que no

¹Esto ya quedó establecido en la Sección 3.1.1.

²Según el Teorema 1.5.1

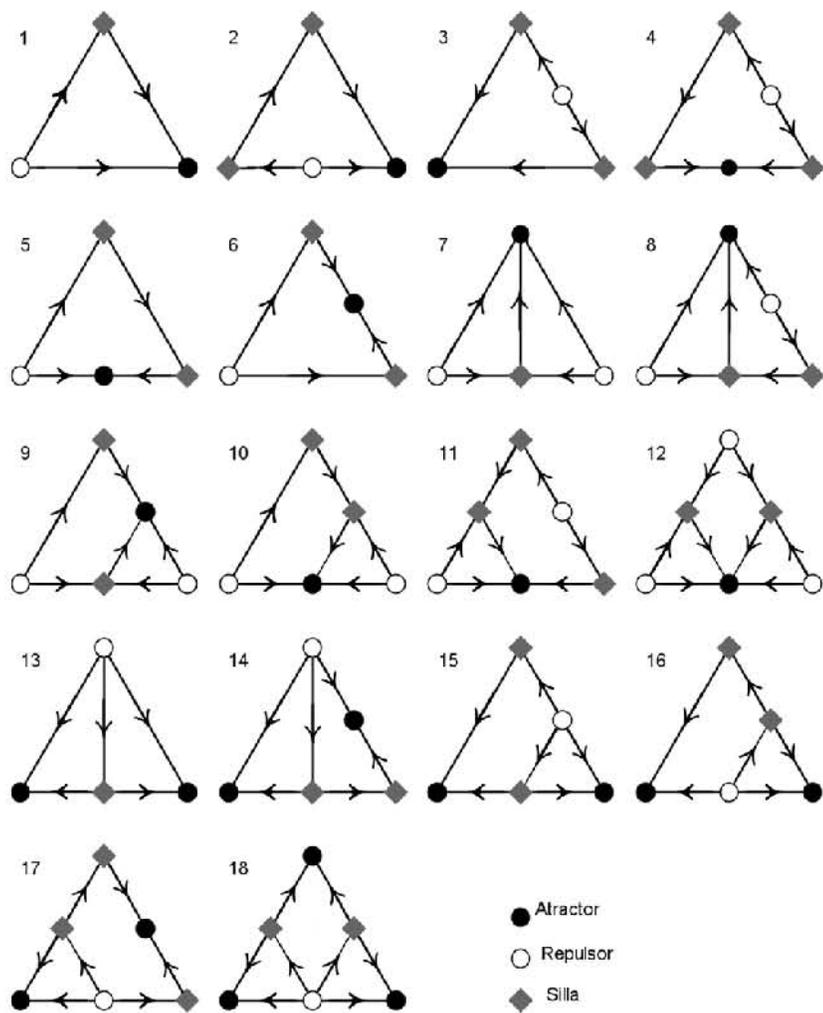


Figura 4.1: Clases ceroclinas sin punto interior fijo.

existe en las familias estudiadas. En el caso del α -límite podemos razonar de manera similar, con ello podemos concluir que los conjuntos límite de cada punto al interior del simplejo portador son puntos.

Además los únicos puntos de equilibrio, que están sobre el simplejo, son los que están sobre el Σ -esqueleto; es decir la dinámica de un punto en Σ está determinada por la dinámica sobre su Σ -esqueleto □

TEOREMA 4.2.2. *En los sistemas pertenecientes a las familia de 1 a 18 la dinámica global está determinada por la configuración ceroclina.*

Demostración. Según el teorema 3.4.1 la configuración ceroclina determina la dinámica sobre el Σ -esqueleto, en cualquiera de las familias ceroclinamente estables.

El resultado anterior garantiza que la dinámica sobre el Σ -esqueleto, en cada una de las familias de 1 a 18, determina el comportamiento del flujo sobre el simplejo y sabemos que la dinámica sobre Σ determina la dinámica global; por lo tanto la configuración ceroclina determina la dinámica global en cada una de las familias entre 1 y 18. □

4.2.2. Clases con punto interior fijo.

En el contexto de la presente sección, y para futuras referencias, presentamos las clases ceroclinas estables con punto interior fijo.

4.2.3. Clases con dos atractores y dos repulsores

Las familia 19 a 25, de nuestra clasificación, se caracterizan por tener dos puntos fijos repulsores y dos atractores en el Σ -esqueleto.

Cuando construimos la partición del espacio de sistemas LVC(3) ceroclinamente estables pudimos verificar, geoméricamente, que cada una de las familias que aquí nos ocupan tienen un punto interior fijo. Sin embargo en esta sección mostraremos que las cualidades dinámicas que caracterizan a estas familias son suficientes para demostrar la existencia de \mathbf{P} y determinar su estabilidad.

TEOREMA 4.2.3. *En cualquiera de las familias de 19 a 25, de la clasificación de sistemas LVC(3) estables, existe el punto interior fijo \mathbf{P}*

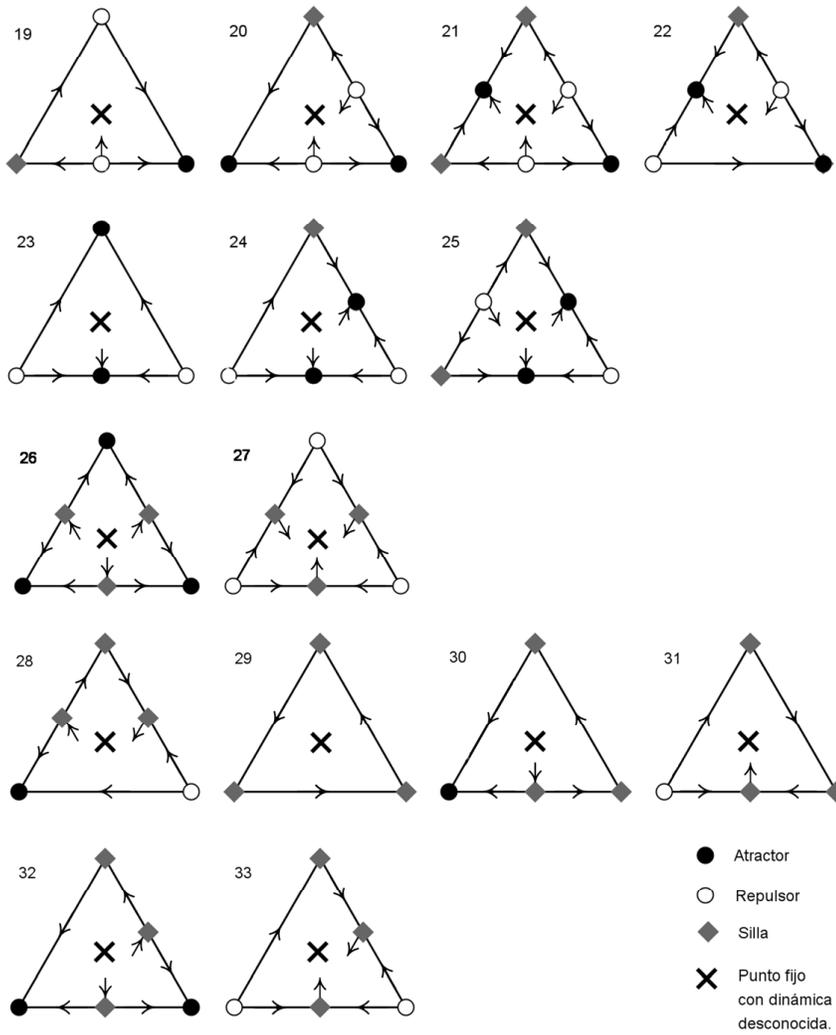


Figura 4.2: Clases ceroquinas con punto interior fijo.

Demostración. Sabemos que cualquiera de los sistemas con configuración ceroclina de 19 a 25, de la clasificación, tiene sobre su Σ -esqueleto, dos atractores y dos repulsores. Denotemos a_1, a_2 a los atractores y r_1, r_2 a los repulsores además llamaremos Ba_i y Br_i ($i \in \{1, 2\}$) a la base de atracción ó repulsión, respectivamente.

Según lo demostrado en la sección 1.1 las bases de atracción son abiertas, por lo que $Ba_1 \cup Ba_2$ es un conjunto abierto. Como Σ es un conjunto cerrado tenemos que

$$\Sigma \setminus \{Ba_1 \cup Ba_2\} \neq \emptyset.$$

Sea $\mathbf{x} \in \Sigma \setminus \{Ba_1 \cup Ba_2\}$, por un lado sabemos que $\omega(\mathbf{x})$ es una órbita periódica o un punto fijo, por otro ninguno de los repulsores pueden estar en $\omega(\mathbf{x})$ por esta razón

$$\omega(\mathbf{x}) \subseteq \text{Int}\Sigma$$

Si $\omega(\mathbf{x})$ es un punto fijo no tiene otra alternativa que ser \mathbf{P} . Si el omega límite de \mathbf{x} es un ciclo, sabemos que éste encerraría a un punto fijo, que tendría que ser \mathbf{P} . Es decir en cualquier caso el punto de equilibrio interior está obligado a existir. \square

Si, por un momento, regresamos a la discusión de la última sección del capítulo tres, tendremos un criterio más para poder clasificar a las familias ceroclinas estables, esto es, si en el Σ -esqueleto existen dos puntos fijos atractores y dos puntos fijos repulsores, entonces, tendrán un punto fijo en $\text{Int}\Sigma$.

Ahora que hemos demostrado la existencia de \mathbf{P} mostraremos que existe una órbita del flujo que converge a él y otra que se aleja del punto interior fijo. Previamente garantizaremos que ésta condición es suficiente para asegurar que es un punto silla. Resulta que \mathbf{P} no siempre es hiperbólico, pero aún en ese caso las posibilidades que tiene son limitadas para demostrarlo citamos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.2.4. ³ *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 conteniendo el origen y sea $\mathbf{F} \in C^1(E)$ con $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Supongamos que el origen es un centro para el sistema lineal, $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ con $A = D\mathbf{F}(\mathbf{0})$. Entonces el origen es un centro, un centro-foco o un foco para el sistema no lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.*

Según este teorema si la matriz $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$ tiene valores propios con parte real cero y parte compleja distinta de cero el punto corresponde a un atractor, un repulsor o hay una infinidad de ciclos que lo encierran, en cuyo caso, no puede ser ni α ni ω límite de

³[8], pp 144

ninguna trayectoria distinta de \mathbf{P} ; con ello limitamos las posibilidades de la dinámica entorno al punto de equilibrio interior pues cumple el Teorema 4.2.4 o es hiperbólico.

Definición 4.2.1. Diremos que un punto de equilibrio \mathbf{x} es simple si el cero no es un valor propio de la matriz $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$

TEOREMA 4.2.5. En un sistema LVC(3), con configuración ceroclina estable, si existe un punto fijo interior \mathbf{P} entonces \mathbf{P} es simple.

Demostración. De la definición basta con mostrar que el cero no es un valor propio de la matriz $D\mathbf{F}(\mathbf{P})$.

Recordemos que la expresión de \mathbf{F} está dada por

$$F_i(\mathbf{x}) = x_i(b_i - (A\mathbf{x})_i)$$

por lo que

$$D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} N_1(\mathbf{x}) - a_{11}x_1 & -a_{12}x_1 & -a_{13}x_1 \\ -a_{21}x_2 & N_2(\mathbf{x}) - a_{22}x_2 & -a_{23}x_2 \\ -a_{31}x_3 & -a_{32}x_3 & N_3(\mathbf{x}) - a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Pero, si

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

resulta que $N_i(\mathbf{P}) = 0$ y con ello la expresión para la matriz anterior es

$$D\mathbf{F}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} -a_{11}p_1 & -a_{12}p_1 & -a_{13}p_1 \\ -a_{21}p_2 & -a_{22}p_2 & -a_{23}p_2 \\ -a_{31}p_3 & -a_{32}p_3 & -a_{33}p_3 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Esta matriz se puede factorizar en dos matrices, como indicamos a continuación

$$D\mathbf{F}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

recordemos que $\mathbf{P} \in \text{Int}\mathbb{R}_+^3$ por lo que $p_i > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$.

Supongamos que la matriz $D\mathbf{F}(\mathbf{P})$ tiene un valor propio cero, esto quiere decir que $\det(D\mathbf{F}(\mathbf{P})) = 0$ pero esto implicaría que el producto de los determinantes de ambas matrices es cero. Como la primera matriz no puede tener determinante cero, resulta

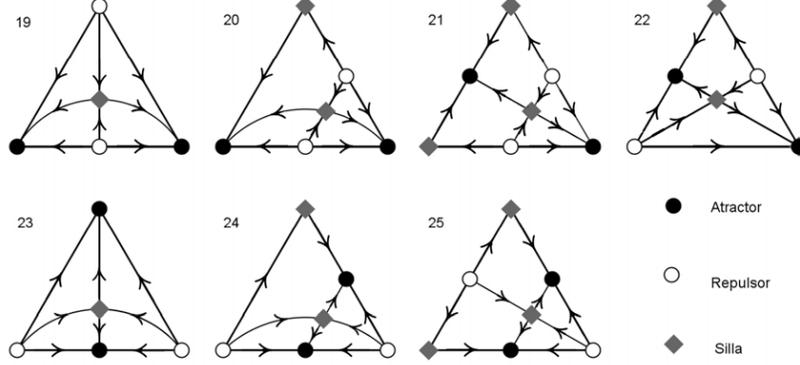


Figura 4.3: Familias con punto interior silla.

que $\det(A) = 0$, es decir que existe una dependencia lineal entre los renglones de A con lo cual los planos ceroclinos se intersectarían en, al menos, toda una recta lo cual contradice la estabilidad ceroclina. Por lo que $\det(D\mathbf{F}(\mathbf{P})) \neq 0$ que es lo que queríamos demostrar. \square

Ahora demostraremos que, además, la dinámica en una vecindad del punto fijo (en realidad en $\text{Int}\Sigma$) está determinada por la configuración ceroclina, pues las familias estudiadas en esta sección siempre tienen un punto silla interior.

TEOREMA 4.2.6. *Si un sistema $\text{LVC}(3)$ pertenece a alguna de las familias ceroclinas estables de 19 a 25 entonces el punto interior \mathbf{P} es un punto silla.*

Demostración. Demostraremos que existe dos trayectorias en Σ , una que tiene a \mathbf{P} como su omega límite y otra donde su alfa límite es el mismo punto, como el punto de equilibrio interior es simple, tenemos que es un punto silla.

Nombremos los siguientes conjuntos

$$I = \Sigma \setminus Ba_1 \cup Ba_2$$

$$E = \Sigma \setminus Br_1 \cup Br_2$$

Sea $V \subset Br_1$ una vecindad de r_1 . Si tomamos una curva, ℓ , dentro de V que una un punto de $Ba_1 \cap V$ con otro de $Ba_2 \cap V$, usando que ℓ es conexa, resulta que existe

un punto $\mathbf{x} \in \Sigma$ tal que $\mathbf{x} \in I \cap \ell$, es decir

$$\omega(\mathbf{x}) \neq \{a_i\}$$

entonces (por el Teorema de Poincaré Bendixson) $\omega(\mathbf{x})$ es \mathbf{P} o una órbita periódica, digamos γ .

Supongamos que $\omega(\mathbf{x}) = \gamma$, esto quiere decir que γ es un ciclo que atrae a su exterior.

Recordemos que cualquier ciclo encierra un punto fijo, por lo que una órbita periódica en $\text{Int}\Sigma$ debe rodear a \mathbf{P} . Además no puede existir otro ciclo en el exterior de γ pues este intersectaría la órbita de \mathbf{x} .

De manera análoga podemos tomar $\mathbf{y} \in E$ suficientemente cercano a a_1 de tal manera que que esté fuera de γ . El $\alpha(\mathbf{y})$ (nuevamente por el Teorema de Poincaré-Bendixson) es \mathbf{P} o una órbita periódica; como \mathbf{P} está dentro de γ resulta que $\alpha(\mathbf{y}) \neq \mathbf{P}$, como no existe otra órbita en el exterior de γ tenemos que el $\alpha(\mathbf{y})$ es γ con lo cual γ es un ciclo que atrae y repele a su exterior, lo cual es una contradicción.

De lo anterior tenemos que $\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{P}$ y $\alpha(\mathbf{y}) = \mathbf{P}$, por lo que \mathbf{P} es una silla. \square

En el Teorema 4.2.6 la dinámica en el interior de Σ dependió de la existencia de dos repulsores y dos atractores sobre el Σ -esqueleto, mismos que se determinaron según su configuración ceroclina. Con esto podemos enunciar un teorema que se desprende de inmediato.

TEOREMA 4.2.7. *En las familias ceroclinas estables 19 a 25 la dinámica global está determinada por la configuración ceroclina.*

4.2.4. Puntos fijos axiales del mismo tipo

Las familias 26 y 27 son tales que todos sus puntos fijos axiales son atractores o repulsores respectivamente, además, contienen un punto interior \mathbf{P} cuya dinámica no hemos determinado. Nos auxiliaremos de algunos resultados algebraicos para mostrar que ninguna de éstas familias acepta un ciclo límite en el interior de Σ , con lo cual, sólo un tipo de dinámica es compatible con la configuración ceroclina, es decir la dinámica global queda determinada.

Para mostrar que los sistemas analizados en esta sección no contienen ciclos límite

haremos uso del criterio de Busenberg-Van Den Driessche ⁴ en la forma del Teorema 1.6.3, resultados enunciados y probados en el Capítulo 1.

Las hipótesis del Teorema 1.6.3 incluyen el uso de un cierto campo vectorial, \mathbf{G} , para el cual $\mathbf{G} \cdot \mathbf{F} \equiv 0$. Usaremos el campo vectorial⁵ $\mathbf{G} : \text{Int}\mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{N_2 b_3}{x_1} - \frac{N_3 b_2}{x_1} \\ \frac{N_3 b_1}{x_2} - \frac{N_1 b_3}{x_2} \\ \frac{N_1 b_2}{x_3} - \frac{N_2 b_1}{x_3} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

una manera alternativa de representar a este campo vectorial es

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (\mathbf{F} \times \mathbf{V})(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

donde

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 N_1 \\ x_2 N_2 \\ x_3 N_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{x_2 x_3} \\ \frac{b_2}{x_1 x_3} \\ \frac{b_3}{x_1 x_2} \end{pmatrix}$$

Señalemos que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es el campo vectorial que define un sistema LVC(3).

Dentro de las hipótesis del criterio 1.6.3 está que $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})$ debe tener un signo constante en Σ .⁶ Para verificar lo anterior mostraremos que, al simplejo de estas familias ceroclinas, siempre es posible encontrarle un campo vectorial normal estrictamente positivo.

Para formalizar presentaremos dos definiciones, luego demostraremos que un conjunto como Σ siempre tiene un campo vectorial ortogonal estrictamente positivo. Buscaremos hacer una caracterización general, por lo que supondremos que estamos trabajando en un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}_+^3$ que sea diferenciable. En adelante, dado $\mathbf{x} \in S$, denotaremos al *espacio tangente* a S en el punto \mathbf{x} por $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(S)$.

Definición 4.2.2. *Decimos que dos vectores, \mathbf{u} y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, están relacionados si $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ o bien $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ es estrictamente positivo.*

Definición 4.2.3. *Decimos que un conjunto $S \subset \mathbb{R}_+^3$ es balanceado si y sólo si para cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ sucede que no están relacionados.*

⁴Ver Teorema 1.6.2 en el capítulo 1

⁵Este campo es usado en [12], donde también existen referencias al origen de $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ y otros usos del mismo.

⁶Ver la hipótesis 1.13

TEOREMA 4.2.8. *Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable balanceada, entonces siempre se puede elegir un campo vectorial normal estrictamente positivo.*

Demostración. Como S es orientable y diferenciable, entonces, tiene un vector normal en cada punto. Supongamos que no se puede elegir un campo vectorial, \mathbf{n} , normal a S estrictamente positivo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe un vector $\mathbf{x} \in S$ tal que su vector ortogonal, puede ser elegido con las siguientes características

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

y $n_1 > 0$, $n_2 \geq 0$ y $n_3 < 0$.

Si nombramos a

$$\mathbf{v} = (-n_3, -n_3, (n_1 + n_2)),$$

se verifica que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$$

es decir el vector \mathbf{v} está sobre el espacio tangente a S por el punto \mathbf{x} ; con lo cual \mathbf{x} y $\mathbf{x} + \mathbf{v}$ también están en el espacio tangente; pero estos vectores están relacionados según la definición 4.2.2, con lo cual el espacio tangente es no balanceado.

Ahora consideremos un cono con vértice en \mathbf{x} y eje la recta

$$\ell = \{\mathbf{x} + t\mathbf{v} | t \in \mathbb{R}\}$$

con ángulo ε entre ℓ y la generatriz. La elección de ε es tal que todos los puntos en el interior del cono están relacionados con \mathbf{x} . Este cono intersecta a S pues $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}(S)$.

Sea $\mathbf{y} \in S$ un punto en la intersección del cono con S , resulta que \mathbf{x} e \mathbf{y} son dos puntos de S que están relacionados, lo cual implica que S es no balanceado contradiciendo nuestra suposición inicial. Por esta razón \mathbf{n} puede ser elegido estrictamente positivo. \square

TEOREMA 4.2.9. *En las familias ceroclinas estables 26 y 27 no existen órbitas periódicas.*

Demostración. Elaboraremos la demostración para la familia 26, para la familia 27 sólo hay que invertir las desigualdades adecuadamente para usar esta misma prueba.

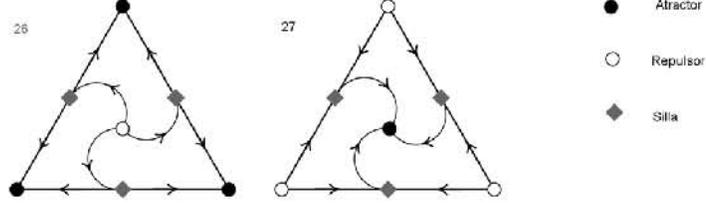


Figura 4.4: Retrato fase sobre Σ para las familias 26 y 27, donde no existen ciclos límite.

Sea $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ un campo vectorial definido por un sistema LVC(3) cuya configuración ceroclina es la de la familia 26, esto quiere decir que

$$(\mathbf{AR}_i)_j - b_j > 0$$

para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$ y tales que $i \neq j$. Estas condiciones son equivalentes al siguiente conjunto de desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &> b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \\ 0 &> b_3 a_{11} - b_1 a_{31} \\ 0 &> b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ 0 &> b_3 a_{22} - b_2 a_{32} \\ 0 &> b_1 a_{33} - b_3 a_{13} \\ 0 &> b_2 a_{33} - b_3 a_{23} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por otro lado si definimos $\mathbf{G} : \text{Int}\mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como en 4.3 resulta ser que

$$(\mathbf{G} \cdot \mathbf{F})(\mathbf{x}) = ((\mathbf{F} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{F})(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \text{Int}\mathbb{R}_+^3$$

Ahora podemos usar la expresión 4.2 para calcular el rotacional de $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ que es

$$\text{Rot}(\mathbf{G})(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{x_3} + \frac{b_1 a_{33} - b_3 a_{13}}{x_2} \\ \frac{b_2 a_{33} - b_3 a_{23}}{x_1} + \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{x_3} \\ \frac{b_3 a_{11} - b_1 a_{31}}{x_2} + \frac{b_3 a_{22} - b_2 a_{32}}{x_1} \end{pmatrix}$$

las expresiones en los numeradores son las que aparecen en las desigualdades 4.4 que definen a la familia 26; en particular nos asegura que

$$\text{Rot}(\mathbf{G})_i < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \text{Int}\mathbb{R}_+^3, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Como Σ siempre es un conjunto balanceado⁷ entonces el teorema 4.2.8 nos asegura que siempre podemos elegir un campo vectorial normal tal que $\mathbf{n} \in \text{Int}\mathbb{R}_+^3$; de esta manera sucede que

$$\text{Rot}(\mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \text{Int}\Sigma.$$

En lo anterior hemos verificado que se cumplen las hipótesis de los Teoremas 1.6.2 y 1.6.3 lo cual nos asegura que en $\text{Int}\Sigma$ no pueden existir órbitas periódicas. \square

Para cerrar esta sección enunciemos un teorema cuya demostración es inmediata del Teorema anterior.

TEOREMA 4.2.10. *En los sistemas LVC(3) que pertenezcan a las familias ceroquinas estables 26 y 27 su dinámica global está determinada por su configuración ceroquina.*

4.3. Ciclos en sistemas LVC(3)

Hemos analizado las primeras 27 familias ceroquinas estables descritas en la última sección del Capítulo 3. En ellas pudimos demostrar que la dinámica global está determinada por sus respectivas configuraciones ceroquinas y que en ninguna de ellas existen ciclos límite.

En la presente sección analizamos el comportamiento dinámico de las familias 28 a 33 de la descripción antes mencionada. Una peculiaridad de las familias que analizaremos es que la configuración ceroquina no es suficiente para determinar la dinámica global, más aún, mostramos que existen casos para los cuales un sistema LVC(3), en cada una de las familias 28 a 33, no admiten una órbita periódica y otros para los que si, estableciendo que la clasificación de éstos sistemas según su configuración ceroquina no coincide con la equivalencia topológica.

Para comenzar haremos un conjunto de observaciones algebraicas y a continuación abordaremos en los casos que nos interesa construir.

Una característica común de las familias ceroquinas aquí estudiadas es que tiene un punto de equilibrio, \mathbf{P} , en el interior de \mathbb{R}_+^3 . Podemos manipular el campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, que determina un sistema de ecuaciones, para obtener un sistema topológicamente equivalente en el que

$$\mathbf{P} = (1, 1, 1)^t.$$

⁷Según el Teorema 1.5.1

TEOREMA 4.3.1. *Para cualquier sistema en las clases ceroclinas 28 a 33 existe un sistema, topológicamente equivalente, en el que \mathbf{P} está en $(1, 1, 1)^t$*

Demostración. Recordemos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & (b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 & (b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3) \\ x_3 & (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3) \end{pmatrix},$$

de donde se deduce la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{x}) &= x_i(\mathbf{b} - A\mathbf{x})_i \\ &= x_i(A\mathbf{P} - A\mathbf{x})_i \\ &= x_i(A(\mathbf{P} - \mathbf{x}))_i, \end{aligned}$$

dado que $A\mathbf{P} = \mathbf{b}$.

Hagamos el cambio de variable $\mathbf{x} \mapsto P^D\mathbf{x}$ donde

$$P^D = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{P}^t = (P_1, P_2, P_3)$ resulta que

$$\begin{aligned} ((P^D)^{-1}\mathbf{F}P^D)_i(\mathbf{x}) &= \frac{1}{P_i}(P_i x_i (A(P^D\mathbf{1} - P^D\mathbf{x}))_i) \\ &= x_i(\tilde{A}(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i \\ &= \tilde{F}_i(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

donde $\tilde{A} = AP^D$ y $\mathbf{1} = (1, 1, 1)^t$.

Así hemos construido un sistema LVC(3) asociado al campo vectorial $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ que es topológicamente equivalente al campo original \mathbf{F} pero que tiene su punto de equilibrio interior en $(1, 1, 1)^t$. Además dada la naturaleza de P^D podemos asegurar que \mathbf{F} y $\tilde{\mathbf{F}}$ tienen la misma configuración ceroclina. □

La necesidad de mostrar que un sistema LVC(3) puede ser de la forma

$$\dot{x}_i = x_i(A(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i$$

está en que, para este sistema, $D\mathbf{F}(\mathbf{P}) = -A$ lo cuál nos permitirá deducir y establecer propiedades a partir de la matriz A . De hecho, en cierto sentido, podemos hablar de

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$ y de A indistintamente, según lo permita el contexto. Este abuso de notación puede simplificar la verificación de ciertas observaciones.

Un elemento, para la subsecuente discusión, es el signo de $\det(D\mathbf{F}(\mathbf{P}))$ mismo que nos podría servir de discriminante entre algunos sistemas que tienen ciclos límite y otros que no.

TEOREMA 4.3.2. *Para un sistema en cualquiera de las familias entre 28 y 33 $\det(D\mathbf{F}(\mathbf{P})) < 0$.*

Demostración. Sabemos que $\det(D\mathbf{F}(\mathbf{P}))$ es igual al producto de sus valores propios y, además, $D\mathbf{F}(\mathbf{P}) = -A$. Según el Teorema de Perrón-Frobenius⁸, como la matriz A tiene entradas estrictamente positivas, $-A$ tiene un valor propio negativo, λ , de mayor magnitud que los otros valores propios. El valor λ tiene asociado un espacio propio unidimensional que se corresponde con la dirección estable de \mathbf{P} ; recordemos que esta dirección existe puesto que el punto interior está sobre Σ el cual, a su vez, atrae globalmente. Los otros dos valores propios de la matriz A deben ser los que determinan la dinámica de \mathbf{P} en el $\text{Int}\Sigma$.

Según la geometría de las familias estudiadas \mathbf{P} no puede ser un punto silla⁹ por lo que el punto fijo interior puede ser atractor, repulsor o centro. En los dos primeros casos la parte real de los valores propios tiene el mismo signo por lo que su producto es positivo, mientras que en el otro caso los valores propios son complejos conjugados sólo con parte imaginaria. En cualquier caso resulta que

$$\det(D\mathbf{F}(\mathbf{P})) = \lambda \cdot \det(D\mathbf{F}(\mathbf{P})|_{T_{\mathbf{P}}(\Sigma)}) < 0$$

□

TEOREMA 4.3.3. *En cualquier sistema LVC(3) cuya configuración cero-clina sea la de alguna de las familia entre 28 y 33 el punto de equilibrio \mathbf{P} , sobre Σ , no es silla.*

Demostración. Supongamos que el punto \mathbf{P} es un punto silla. Denotaremos por E a la variedad estable y por I a la variedad inestable. Además demostraremos que, como consecuencia de que \mathbf{P} sea silla, no puede haber ciclos límite en el interior de Σ .

⁸Este teorema garantiza que si A es una matriz positiva, entonces el radio espectral es un valor propio de A . El radio espectral para matrices positivas es tal que $|\lambda_i| < \rho(A)$ y se define como $\text{Sup}\{|\lambda_i| \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ donde cada λ_i es un valor propio de la matriz A . Para más detalles consultar [1] pp. 26 ss

⁹Esta afirmación se demostrará inmediatamente después de que se concluya la presente.

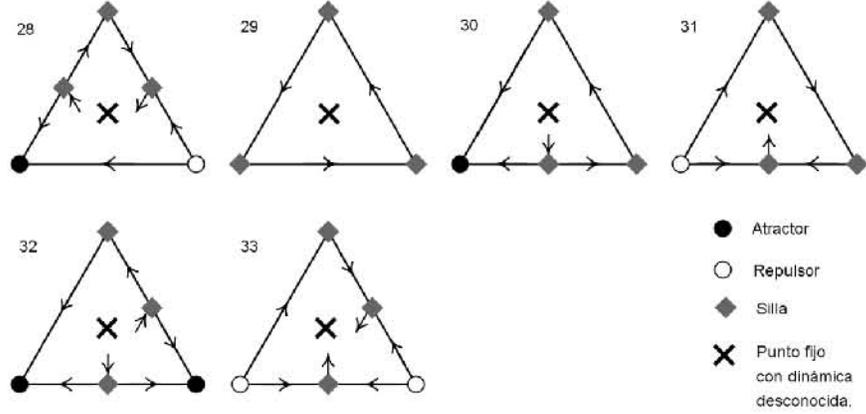


Figura 4.5: Familias 28 a 33 con dinámica desconocida entorno a \mathbf{P}

Usando el Teorema de Poincaré-Bendixson $\alpha(E) \subseteq \Sigma^{10}$. Si $\alpha(E) = \gamma$ donde γ es una órbita periódica en $\text{Int}\Sigma$ dicha órbita rodearía al punto \mathbf{P} . En ninguna vecindad de \mathbf{P} encerrada por γ existiría otra órbita cerrada, pues eso implicaría que la variedad estable la intersectaría contradiciendo la unicidad; digamos que γ sería la primera de las órbitas (en caso de que existieran otras).

Ahora podemos afirmar que γ repele hacia \mathbf{P} el conjunto que encierra. Si adecuamos estos argumentos podemos concluir que la misma órbita tendría que ser $\omega(I)$ y con ello γ atraería el entorno de \mathbf{P} generando una contradicción.

Con lo anterior también podemos concluir que $\alpha(E)$ y $\omega(I)$ tienen que ser alguno de los puntos que están sobre el Σ -esqueleto, al cuál también denotaremos por $\partial\Sigma$.

Según lo establecido en la Sección 3.4 y con referencia a las figuras 4.1 y 4.2 dividiremos nuestro estudio en tres: las familias 30 a 33, la familia 29 y la 28.

En los casos 30 a 33 resulta que el Σ -esqueleto atrae localmente o repele sobre $\partial\Sigma$. Esto se observa en el hecho de que, cuando existe un atractor sobre el Σ -esqueleto, por ejemplo, los otros puntos fijos no pueden ser α -límites de ningún punto en el interior de Σ .

Para fijar ideas analicemos los casos en los que la configuración ceroquina determina

¹⁰En esta demostración usaremos la notación del teorema 4.2.6 donde, en particular E es la variedad estable de \mathbf{P} .

que $\partial\Sigma$ es atractor. Recordemos que estamos trabajando bajo la suposición de que el punto interior fijo \mathbf{P} es una silla; así que si nos preguntamos por $\alpha(E)$ resulta ser un punto fijo planar o axial, pero éstos están atrayendo hacia $\partial\Sigma$ lo cual es contradictorio. En caso de que el Σ -esqueleto sea repulsor la contradicción surge de preguntarnos por $\omega(I)$. Por esta razón, para éstas familias \mathbf{P} no puede ser un punto silla.

Como no hay ciclos, el único conjunto que puede ser ω o α límite es $\partial\Sigma$. Pero entonces sería $\alpha(E)$ y $\omega(I)$ lo que es imposible.

Para el caso de la familia 29 los puntos fijos axiales no pueden ser $\alpha(E)$ y $\omega(I)$, pues las variedades estables e inestables de cada uno de los puntos silla axiales está justo sobre $\partial\Sigma$. La única manera sería que $\partial\Sigma$ sea, por ejemplo, $\alpha(E)$ en cuyo caso habría una espiral que convergería al ciclo homoclínico generado en el Σ -esqueleto¹¹ es decir que la espiral tendrá que repeler. Sin embargo, al preguntarnos por $\omega(I)$ resultaría ser una espiral convergente a $\partial\Sigma$ que atraería, lo cual de nuevo es contradictorio. Por esta situación resulta que en la familia 29 \mathbf{P} no es un punto silla.

Ahora en la familia 28 tenemos que un punto axial es un atractor, el otro un repulsor y el tercero un punto silla, además de dos puntos planares que son sillas, uno repeliendo hacia $\text{Int}\Sigma$ y el otro atrayendo en la misma dirección. En esta situación supongamos (SPG) que el repulsor fuera $\alpha(E)$ y que el atractor fuera $\omega(I)$ pero si esto sucede entonces parte de la variedad estable de \mathbf{P} quedaría encerrada en una región cuya frontera está siendo atraída a un punto axial situación absurda y, nuevamente, concluimos que el punto fijo interior no puede ser un punto silla. \square

4.3.1. Sistemas sin ciclos

Resulta que existen sistemas LVC(3), cuya configuración cero-clina es la de alguna de las familias entre 28 y 33, para los cuales no existen órbitas periódicas. Para demostrar lo primero, definiremos una familia paramétrica de un sistema LVC(3) luego exhibiremos un representante cuya dinámica restringida a Σ es topológicamente equivalente a un sistema Lotka Volterra de dos dimensiones lo cual equivale a demostrar que no tiene ciclos¹²; para ésto último proyectaremos adecuadamente el simplejo dentro de un espacio plano.

Es importante que recordemos que cada sistema de los estudiados en ésta sección

¹¹Haciendo referencia a los puntos fijos y sus respectivas variedades invariantes

¹²[13], pp 4

es un sistema de ecuaciones LVC(3) cuya expresión puede ser

$$F_i(\mathbf{x}) = x_i(A(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i \quad (4.5)$$

y que $\det(D\mathbf{F}(\mathbf{P})) < 0$.

Para comenzar observemos que si

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix},$$

con $t_{ii} > 0$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, el sistema

$$F_i(\mathbf{x}) = x_i(TA(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i$$

es un sistema LVC(3) con las mismas ceroclinas que 4.5. De hecho si hacemos variar a t_{ii} en los reales positivos obtendremos todos los sistemas LVC(3) de la clase ceroclina a la que pertenece el sistema 4.5.

Definición 4.3.1. *Sea el sistema de ecuaciones determinado por $\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}) = x_i(A(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ y $T = (t_{ij})$ una matriz diagonal de 3×3 con entradas positivas. Definimos el sistema de ecuaciones con campo vectorial $\mathbf{F}^T : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con componentes*

$$F_i^T = x_i(TA(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i$$

.

Definición 4.3.2. *Sea $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ y T como en la definición anterior. Definimos a la familia de \mathbf{F} , $\mathcal{F}(\mathbf{F})$, como*

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}) = \{F^T | t_{ii} > 0, i = 1, 2, 3\}$$

De hecho, con ésta definición resulta que $\mathcal{F}(\mathbf{F})$ es una familia triparamétrica de sistemas, sin embargo si hacemos variar un parámetro a la vez podemos conceptualizarla como una familia monoparamétrica.

Mostramos a continuación que siempre existe un miembro de éstas familias para el cual no existen ciclos límite en el flujo.

TEOREMA 4.3.4. *Para cualquier sistema de ecuaciones, cuyo campo vectorial es $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, existe una matriz T con la propiedad de que $\mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \in \mathcal{F}(\mathbf{F})$ tal que el flujo restringido al simplejo, $\mathbf{F}^T|_{\Sigma}$, es topológicamente equivalente a un sistema Lotka Volterra de dos dimensiones, LV(2).*

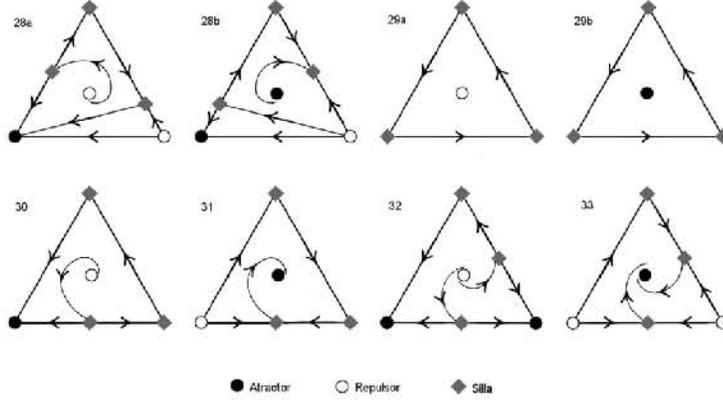


Figura 4.6: Posibles retratos fase para familias ceroquinas entre 28 y 33.

Demostración. Sea T una matriz de 3×3 con entradas estrictamente positivas definida por

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}+a_{12}+a_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{21}+a_{22}+a_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{31}+a_{32}+a_{33}} \end{pmatrix}$$

donde (a_{ij}) son las entradas de la matriz A . De ésta forma resulta que la matriz TA es una matriz tal que la suma de las entradas de cada renglón es uno. Para fines prácticos, en lo que resta de la demostración la matriz TA la llamaremos A .

Ahora mostramos que si A es una matriz tal que la suma de las entradas de sus renglones es 1, entonces, el flujo restringido al simplejo, $\mathbf{F}|_{\Sigma}$, es homeomorfo a un sistema Lotka Volterra de dos dimensiones¹³.

Consideremos la proyección de $\mathbb{R}_+^3 \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\}$ en \mathbb{R}^3 definida por

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{y} = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right) \quad (4.6)$$

es decir, cada punto es mapeado, mediante una proyección radial en un vector sobre el plano $x_3 = 1$. Como el simplejo es homeomorfo, por proyección radial, a la unidad simpleja, si restringimos 4.6 a los puntos sobre el simplejo, tendremos un homeomorfismo de Σ en el plano mencionado.

¹³La idea de la demostración así como la proyección están incluidas en [13]

En lo que sigue suponemos que x_i es la entrada i -ésima de un punto sobre Σ . Calculando la proyección del flujo $\mathbf{F}|\Sigma$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x_i}{x_3} \right) \\ &= \frac{1}{x_3^2} (x_3 \dot{x}_i - \dot{x}_3 x_i) \\ &= y_i ((A(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i - (A(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_3) \\ &= y_i (1 - (A\mathbf{x})_i - 1 + (A\mathbf{x})_3) \\ &= y_i ((A\mathbf{x})_3 - (A\mathbf{x})_i), \end{aligned}$$

donde hemos usado

$$(A\mathbf{1})_i = 1,$$

proyectando el resto de las entradas y agrupando las y_i adecuadamente tenemos la ecuación

$$\dot{y}_i = x_3 y_i (\tilde{b}_i - (\tilde{A}\mathbf{y})_i)$$

donde x_3 está en función de \mathbf{y} y que es topológicamente equivalente a

$$\dot{y}_i = y_i (\tilde{b}_i - (\tilde{A}\mathbf{y})_i)$$

con $i \in \{1, 2\}$.

Si identificamos al plano $x_3 = 1$ con \mathbb{R}^2 resulta que hemos hecho un homeomorfismo entre el simplejo y un sistema Lotka Volterra bidimensional, que sabemos no tienen ciclos límite. \square

Señalemos que las entradas de la matriz \tilde{A} y los números \tilde{b}_i no tienen por qué ser positivos, por lo cual, el sistema resultante no necesariamente es de competencia, pero igual el resultado, sobre la no existencia de órbitas se sigue dando.

Ahora bien, observemos que en la demostración no hicimos uso de las propiedades específicas de las configuraciones ceroclinas, por ésta razón, el resultado es más amplio. El Teorema 4.3.4 establece que en cualquier configuración ceroclina estable de los sistemas Lotka Volterra de Competencia, tridimensionales, existe un sistema en particular para el cual no hay órbitas periódicas.

Como caso particular de la reflexión anterior, podemos asegurar que en las familias 28 a 33 existen sistemas cuyo retrato fase, restringido al simplejo portador es como se muestra en la figura 4.6

4.3.2. Familias que admiten ciclos límite.

Mostraremos a continuación que existen sistemas LVC(3), dentro de las familias ceroquinas 28 a 33, que admiten ciclos límite. Con ellos sabremos que la configuración ceroquina no es suficiente para determinar la dinámica del flujo en éstos casos. Existen familias de sistemas, en las clases ceroquinas 28 a 33, en las que ocurren bifurcaciones de Hopf es decir que existen subfamilias con ciclos límite.

En los sistemas que estamos trabajando resulta que

$$D\mathbf{F}(\mathbf{P}) = -A$$

por lo que los valores propios de A determina la dinámica del sistema en una vecindad de \mathbf{P} . Además trabajaremos con la familia¹⁴ con matriz de parámetros

$$T = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir

$$TA = \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} & ta_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

con $t > 0$ como TA es una familia monoparamétrica de matrices en adelante

$$TA = A(t).$$

A los valores propios de $A(t)$ los denotaremos por

$$\lambda(t), \quad \mu(t), \quad \eta(t)$$

dado que al variar continuamente el parámetro t varían de manera continua las entradas de $A(t)$ y de la misma manera varían los valores propios.

Resulta relevante que

$$\det(A(t)) = t(\det(A))$$

pues $\det(A) > 0$, es decir resulta positivo el determinante de $A(t)$ y es cero sólo en el caso de que $t = 0$. Como además el determinante de una matriz es igual al producto de sus valores propios, las combinaciones de signos de éstos últimos quedan restringidas.

¹⁴Revisar la Definición 4.3.1 para aclarar el papel de la matriz TA

Para demostrar que ocurre una bifurcación de Hopf verificaremos las hipótesis del Teorema 1.3.1. Describiremos parte del comportamiento que tienen los valores propios que dependen del parámetro t . Es necesaria otra condición para que existan valores propios con parte real cero y que el cruce por el eje imaginario (conforme t varia) sea distinto de cero y con una velocidad no nula e involucra a los cofactores de la matriz A . Recordemos que

$$A^{ii} = \det \begin{pmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{pmatrix}$$

es el cofactor ii de la matriz A . Toda esta información la resumimos en el siguiente:

TEOREMA 4.3.5. *En la matriz $A(t)$ si $A^{11} > 0$ y A^{22}, A^{33} estrictamente negativos entonces*

$$\begin{aligned} \lambda(0), \mu(0) &\in \mathbb{R}^+ \\ \eta(0) &= 0 \end{aligned}$$

y si $t \rightarrow \infty$, entonces sucede que

$$\begin{aligned} \lambda_t &\rightarrow \lambda_\infty \\ \mu_t &\rightarrow \mu_\infty \\ \eta_t &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_\infty) &< 0 \\ \operatorname{Re}(\mu_\infty) &< 0 \end{aligned}$$

El teorema anterior corresponde a los lemas 4.14 y 4.15 de [13] donde se encuentran sus demostraciones¹⁵ En la fuente original basta con que los cofactores indicados no sean todos del mismo signo, la elección que hemos hecho nos permitirá usar la misma notación que en las demostraciones originales, si fuera otra bastaría con renombrar adecuadamente.

Con todos estos antecedentes podemos anunciar lo siguiente.

TEOREMA 4.3.6. *Dado el sistema*

$$\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}) = x_i(A(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i \tag{4.7}$$

¹⁵Las demostraciones de estos lemas usan resultados matemáticos muy sutiles y sus demostraciones son elegantes, sin embargo creemos que nos desvian de los propósitos de la presente tesis por lo que sólo presentamos la referencia para ser consultados.

con $i \in \{1, 2, 3\}$ y $\det(A) > 0$. Si $\det(A) > 0$ y los A^{ii} no son todos del mismo signo, entonces, la familia de sistemas $\mathcal{F}(\mathbf{F})$ admite una bifurcación de Hopf. Más aún, podemos exhibir una subfamilia de $\mathcal{F}(\mathbf{F})$ monoparamétrica particular que admite una bifurcación de Hopf¹⁶.

Demostración. Si los cofactores no son todos del mismo signo podemos suponer (SPG) que son tal y como lo indica la hipótesis del Teorema 4.3.5, por lo que $A(t)$ tiene valores propios como concluye el mismo Teorema 4.3.5.

Si elegimos $t_0 > 0$ suficientemente pequeña resulta que

$$\operatorname{Re}(\lambda(t_0)) > 0,$$

$$\operatorname{Re}(\mu(t_0)) > 0,$$

como además $\det(A(t)) > 0$ se tiene que $\eta(t_0) > 0$, con lo cual $A(t_0)$ tiene en \mathbf{P} un punto globalmente atractor.

Si escogemos una t_1 suficientemente grande se obtienen valores propios tales que

$$\operatorname{Re}(\lambda(t_1)) < 0,$$

$$\operatorname{Re}(\mu(t_1)) < 0,$$

$$\operatorname{Re}(\eta(t_1)) > 0,$$

la última desigualdad, otra vez, se debe al signo del determinante de la matriz A . Aquí resulta que \mathbf{P} es un punto que repele sobre el simplejo, mientras atrae en la tercera dirección.

Por continuidad sabemos que existe un t^* , $t_0 < t^* < t_1$, para la cual dos valores propios son complejos conjugados con parte real cero. El tercer valor propio tiene que ser distinto de cero pues sabemos que

$$\det(A(t)) = 0 \text{ sí y sólo si } t = 0$$

Además según el Lema 4.16 en [13], el cruce de la curva de valores propios, con el eje imaginario es único y se produce con velocidad distinta de cero. Con lo cual se verifican todas las hipótesis del Teorema de Hopf para la subfamilia con componentes

$$F(t)_i(\mathbf{x}) = x_i(A(t)(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i.$$

□

¹⁶En 1993 Mary Lou Zeeman publicó el artículo titulado *Hopf Bifurcations in Competitive Three-Dimensional Lotka-Volterra System* [13], en ese texto se plantea y demuestra el teorema.

Las familias que aquí nos ocupan tienen representantes que cumplen las condiciones del Teorema 4.3.6, para verificarlo resultará útil dar dos interpretaciones geométricas a los signos de A^{ii} .

Cuando un sistema LVC(3) tiene un punto fijo planar, digamos \mathbf{Q}_{kj} , la matriz cuyo determinante es A^{ii} corresponde al sistema LVC(2) con \mathbf{Q}_{kj} como punto fijo interior, sobre el plano $x_i = 0$. Bajo estas circunstancias y considerando las conclusiones del análisis en la Sección 3.2 podemos deducir que:

- \mathbf{Q}_{kj} atrae sobre $\partial\Sigma \Leftrightarrow A^{ii} > 0$
- \mathbf{Q}_{kj} repele sobre $\partial\Sigma \Leftrightarrow A^{ii} < 0$.

La segunda interpretación se desprende directamente de la expresión

$$A^{ii} = a_{jj}a_{kk} - a_{jk}a_{kj}.$$

Para fijar ideas supongamos que

$$A^{11} > 0,$$

entonces resulta que

$$-\frac{a_{32}}{a_{33}} > -\frac{a_{22}}{a_{23}},$$

lo que significa que la pendiente de la recta que resulta de restringir el plano \mathbf{N}_3 al plano $x_1 = 0$ es menor, en valor absoluto; que la pendiente de la recta que resulta de \mathbf{N}_2 en la misma restricción. Se debe insistir en el hecho de que en esta interpretación ninguna de las tres rectas que se determinan en $x_1 = 0$ tiene que tener una configuración determinada, la figura 4.7 ilustra una manera en que suceda $A^{11} > 0$.

El primer criterio nos dice cuando el signo de un cofactor está determinado y cual es; mientras que el segundo nos permite modificar la disposición de las rectas a fin de obtener el signo de nuestra conveniencia. A partir de estas interpretaciones siempre podemos modificar adecuadamente el signo de algunos de los cofactores, con el fin de hallar representantes de las familias 28-33 que admitan una bifurcación de Hopf.

Para finalizar mostraremos algunos casos donde el Teorema 4.3.6 garantiza la existencia de órbitas periódicas.

4.3.3. Familia 28.

En ésta familia tenemos un punto fijo planar \mathbf{Q}_{23} que repele sobre su arista del Σ -esqueleto, también el punto silla \mathbf{Q}_{13} que atrae en dirección de $\partial\Sigma$ con lo cual A^{22} y

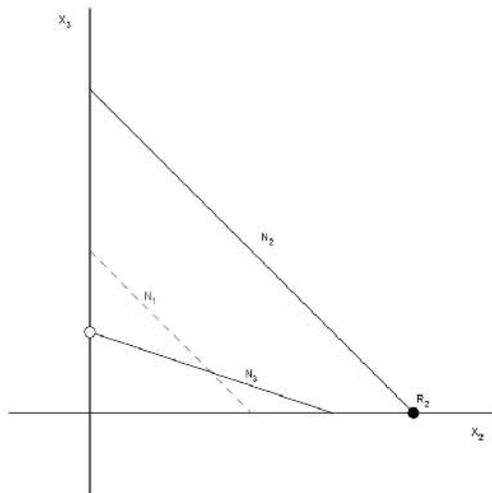


Figura 4.7: Las ceroclinas, del ejemplo, cuando $x_1 = 0$

A^{11} tienen signos contrarios. Entonces podemos afirmar que en la familia 28 no todos los A^{ii} tienen el mismo signo por lo que ésta familia admite una bifurcación de Hopf. Este resultado corresponde al Corolario 4.13 de la sección 4.3 en [13].

4.3.4. Familia 29.

La familia 29 no posee puntos fijos planares y los puntos fijos axiales son puntos silla¹⁷. No cualquier sistema con ésta configuración cumple las condiciones del Teorema 4.3.6 de manera que procedemos a construir un representante que si lo cumpla.

Primero visualicemos la configuración completa, teniendo cuidado de que las rectas N_i en la restricción $x_k = 0$ ($i \neq k$ y $k, i = 1, 2, 3$) sean paralelas, es decir cada $A^{ii} = 0$, como se muestra en la figura 4.8.

Ahora fijemos nuestra atención en cada uno de los planos coordenados. Para ilustrar observemos el plano $x_3 = 0$ donde perturbaremos una de las intersecciones con los ejes con el fin de lograr que $A^{33} > 0$, basados en la segunda observación geométrica. Véase la figura 4.9.

¹⁷De hecho existe un ciclo formado por el Σ -esqueleto lo que se vuelve un buen indicio sobre la existencia de órbitas periódicas en dicha configuración. En [14] se muestra que en caso de no coincidir la dirección de los puntos silla dicha órbita periódica no existe.

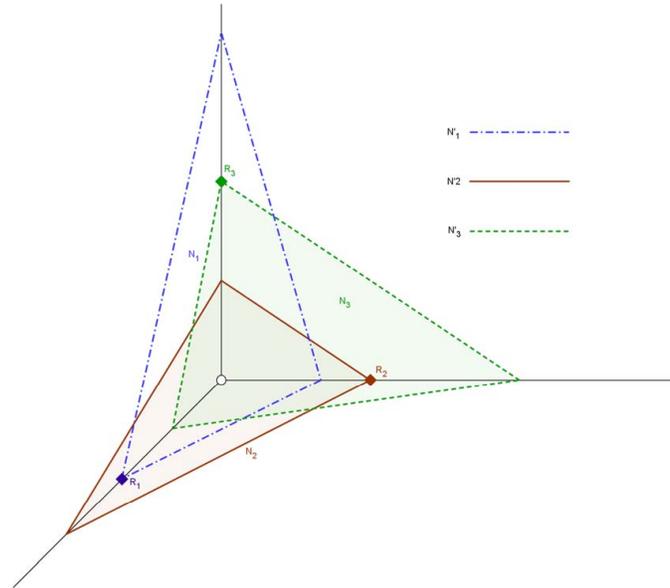


Figura 4.8: Las rectas que no se intersectan son paralelas.

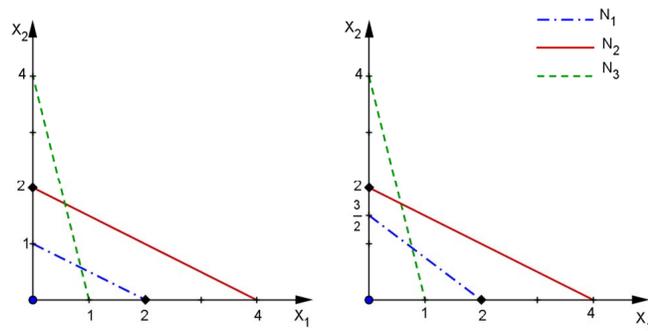


Figura 4.9: Perturbación de la configuración.

Al cambiar la intersección de 1 a $\frac{3}{2}$ hemos modificado la pendiente tal y como queríamos. Resta perturbar otras intersecciones para dar lugar a un sistema con la configuración ceroquina como se indica en la figura 4.10.

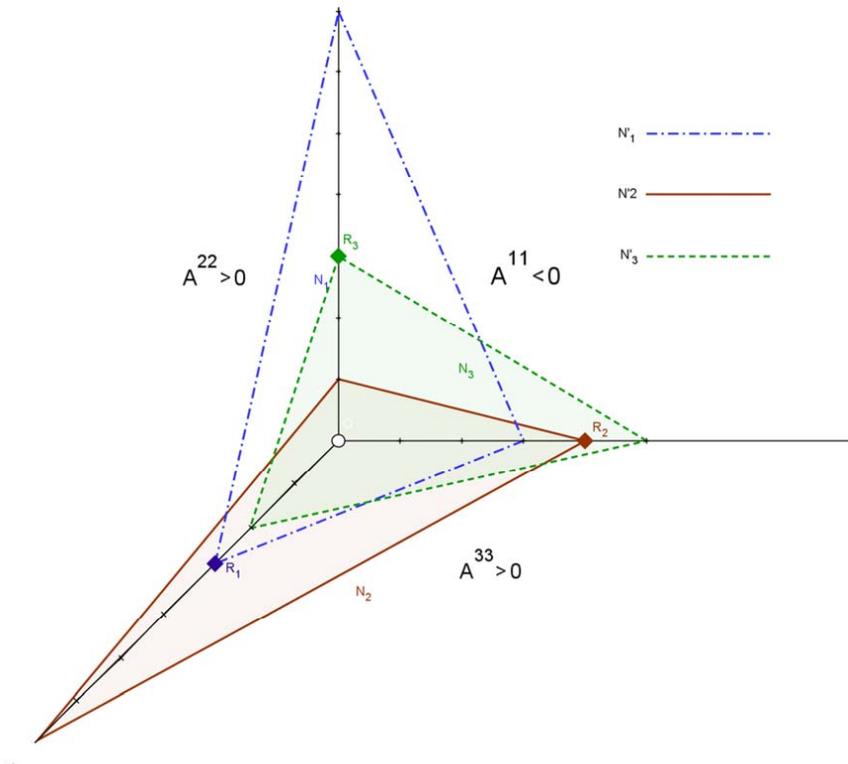


Figura 4.10: Familia 29 con desigualdades.

Como las intersecciones con los ejes de los tres planos están determinadas sus respectivas ecuaciones y con ello la matriz de población A , así el sistema LVC(3) que pertenece a la familia 29 y no todos sus cofactores tienen el mismo signo es

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_1 (12 - 6x_1 - 8x_2 - 3x_3) \\
 \dot{x}_2 &= x_2 (4 - x_1 - 2x_2 - 4x_3) \\
 \dot{x}_3 &= x_3 (6 - 4x_1 - 2x_2 - 3x_3),
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

la matriz de población es

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

y cuyo punto de equilibrio interior es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{30}{37} \\ \frac{27}{37} \\ \frac{16}{37} \end{pmatrix}.$$

El Teorema 4.3.6 hace referencencia a los sistemas de ecuaciones de la forma

$$\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}) = x_i(\tilde{A}(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i$$

por lo que debemos transformar A en \tilde{A} mediante el procedimiento indicado en el teorema 4.3.1, tras el cual

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{180}{37} & \frac{216}{37} & \frac{48}{37} \\ \frac{30}{37} & \frac{54}{37} & \frac{64}{37} \\ \frac{120}{37} & \frac{54}{37} & \frac{48}{37} \end{pmatrix},$$

para la cual

$$A^{11} < 0, \quad A^{22} > 0 \quad \text{y} \quad A^{33} > 0,$$

que es la condición buscada.

4.3.5. Familia 30.

Para la familia 30 tenemos un punto fijo planar, \mathbf{Q}_{12} , por lo que $A^{33} < 0$. Con un proceso análogo al anterior se puede construir el ejemplo para el cual $A^{11} < 0$ y $A^{22} > 0$. Al perturbar debemos tener cuidado de que el punto planar permanezca en la componente no acotada por el plano \mathbf{N}_3 , con éstas consideraciones se puede verificar que la matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{480}{71} & \frac{840}{71} & \frac{100}{71} \\ \frac{96}{71} & \frac{42}{71} & \frac{75}{71} \\ \frac{192}{71} & \frac{42}{71} & \frac{51}{71} \end{pmatrix}$$

corresponde a un sistema de ecuaciones LVC(3) de la familia ceroclina 30 que cumple las condiciones del Teorema 4.3.6.

4.3.6. Familia 33.

Para la familia 33 sólo mostraremos la configuración de los planos ceroclinos que, dentro de la familia 33, cumplen las condiciones que nos permiten asegurar la existencia de representantes que admiten una bifurcación de Hopf.

En éste caso tenemos dos puntos fijos planares, Q_{12} y Q_{23} , ambos atraen sobre $\partial\Sigma$ por lo que $A^{33} > 0$ y $A^{11} > 0$. La idea, de nuevo, es partir de una posición base de los planos que posteriormente podamos perturbar, en la restricción $x_2 = 0$, y conseguir que sea clara la desigualdad $A^{22} < 0$. En la figura 4.11 vemos los planos ceroclinos de dos posibles sistemas, en la familia 33. Cabe señalar que la existencia de los dos puntos Q_{12} y Q_{23} restringe las variaciones que se pueden hacer de las rectas sobre el plano $x_2 = 0$, es decir, el intervalo en el que se dá la desigualdad es pequeño.

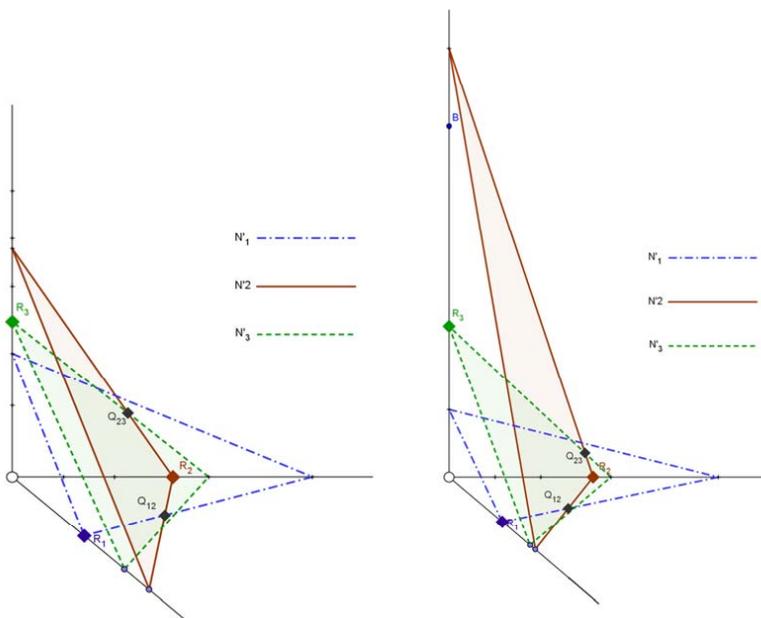


Figura 4.11: Familia ceroclina 33, dos casos.

Capítulo 5

Un sistema de Lotka Volterra con un ciclo límite

5.1. Introducción.

Finalmente en este capítulo mostraremos una familia de sistemas Lotka Volterra de competencia tridimensionales con la propiedad de que cada uno de sus miembros tiene un ciclo límite. Lo que resaltamos de este caso, es que dicha familia no cumple las hipótesis del Teorema (4.3.6) y sin embargo tiene un ciclo. Mostrando así que dicho teorema es suficiente para hallar familias que admitan ciclos límite pero no necesario.

5.2. Un sistema Lotka Volterra cíclico.

El estudio del sistema May Leonard que se hace a continuación, así como el análisis detallado y las demostraciones respectivas fueron redactadas siguiendo el manuscrito [9].

El sistema que analizaremos es el siguiente.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - \alpha x_2 - \beta x_3) \\ \dot{x}_2 &= x_1(1 - \beta x_1 - x_2 - \alpha x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_1(1 - \alpha x_1 - \beta x_2 - x_3) \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde los parámetros α y β son positivos. En particular estamos interesados cuando estos parámetros cumplan $\alpha + \beta = 2$ y $\alpha < 1$. El sistema (5.1) es llamado cíclico por que los parámetros de la matriz de población que miden la intensidad de la competencia entre las especies y la capacidad de soporte del medio se pueden intercambiar entre cada una de las variables de manera cíclica; esto es si intercambiamos x_1 por x_2 , x_2 por x_3 y x_3 por x_1 el sistema resultante queda idéntico al original. En términos ecológicos podemos decir que el mismo efecto competitivo de una especie por la siguiente (en el orden dado por la asignación de variables) es el que ejerce la siguiente por la posterior. Compiten al mismo ritmo e intensidad entre sí.

5.2.1. El análisis local.

De esta manera dispuestos los parámetros podemos verificar que los puntos de equilibrio del sistema (según la notación presentada hasta este momento) son

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ y } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\alpha+\beta} \\ \frac{1}{1+\alpha+\beta} \\ \frac{1}{1+\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

además del origen que sabemos, es un repulsor.

La matriz de signos asociada depende de los parámetros α y β , que a su vez cumplen que $\alpha < 1$, $\beta > 1$ y $\alpha + \beta = 2$ de manera tal que los puntos de equilibrio axiales aportan un signo negativo y otro positivo en cada renglón. Se puede verificar, haciendo los cálculos correspondientes, que la clase ceroclina a la que pertenece es a la que corresponde la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}$$

a la cual le hemos asignado el número 29 en la figura (3.4). De esta clase sabemos que no tiene puntos fijos planares (\mathbf{Q}_{ij}) y que tiene un punto fijo interior, lo cual ya habíamos verificado algebraicamente.

5.2.2. El análisis global

Una peculiaridad que tienen estos sistemas es que siempre que $\alpha + \beta = 2$ tenemos que \mathbf{P} está sobre la unidad simpleja Δ_3 es decir el plano que pasa por los puntos

$(1, 0, 0)^t$, $(0, 1, 0)^t$ y $(0, 0, 1)^t$, mismos que son puntos de equilibrio del sistema. Más interesante resulta que el simplejo portador, Σ , de este tipo de sistemas, con estas condiciones sobre los parámetros resulta ser Δ_3 , la unidad simpleja¹.

Además en [9] se enuncia y demuestra el siguiente teorema.

TEOREMA 5.2.1 (Lema 9.1). *Si $\alpha + \beta = 2$ el sistema 5.1 tiene un ciclo límite que está en el simplex $x_1 + x_2 + x_3 = 1^2$*

La demostración se basa en observar que cualquier trayectoria del sistema, que parta de $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)^t$ del octante positivo, a la larga (cuando $t \rightarrow \infty$), se aproxima a la terna de números (x_1, x_2, x_3) que, a su vez, cumplen las condiciones

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \text{y} \quad x_1 x_2 x_3 = K > 0, \quad \text{donde} \quad K = \frac{x_1^0 x_2^0 x_3^0}{(x_1^0 x_2^0 x_3^0)^3}$$

es decir, simultáneamente cumplen estar en Σ y en un hiperboloide³ es decir son atraídos a un ciclo límite que está sobre la unidad simpleja.

5.3. Un sistema cíclico particular.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 (1 - x_1 - 0.1x_2 - 1.9x_3) \\ \dot{x}_2 &= x_1 (1 - 1.9x_1 - x_2 - 0.1x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_1 (1 - 0.1x_1 - 1.9x_2 - x_3) \end{aligned} \tag{5.2}$$

el cual es un caso particular del sistema (5.1), para $\alpha = 0.1$ y $\beta = 1.9$ los cuales fueron así seleccionados para que la matriz de población asociada A sea tal que $\det(A) > 0$, como además todos los sistemas de la forma (5.1) son tales que

$$A^{11} = A^{22} = A^{33}$$

resulta que según la sección anterior, tiene un ciclo límite y por otro lado no cumple las condiciones del Teorema 4.3.6.

¹La demostración detallada se encuentra en [9], Proposición 9.2

²El presente teorema es una cita textual del Lema 9.1 de [9] por lo que cabe aclarar que el *simplex* es el conjunto que en el presente trabajo llamamos *simplejo portador* y que hemos denotado por Σ .

³Se tiene que analizar con detalle el hecho de que esta intersección ocurra en una curva cerrada, pero para el caso particular que presentaremos es suficiente con saber que todo lo anterior se cumple.

TEOREMA 5.3.1. *En un sistema de la forma*

$$\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}) = x_i(A(\mathbf{1} - \mathbf{x}))_i \quad (5.3)$$

con $i \in \{1, 2, 3\}$ y $\det(A) > 0$ la condición en donde no todos los A^{ii} tienen los mismos signos es suficiente más no necesaria para que la familia $\mathcal{F}(\mathbf{F})$ admita una subfamilia con ciclos límite.

Demostración. Basta con exhibir el ejemplo de la subsección anterior. \square

En la figura (5.1) ilustramos la trayectoria con condiciones iniciales (1, 0.3, 0.4) en el sistema (5.2) a través de una simulación numérica hecha con el software matlab; hemos trazado los bordes del simplejo e indicado el lugar de los puntos de equilibrio para mostrar mejor la naturaleza del ciclo.

En el resto de las imágenes sólo aparece la órbita de otras condiciones iniciales.

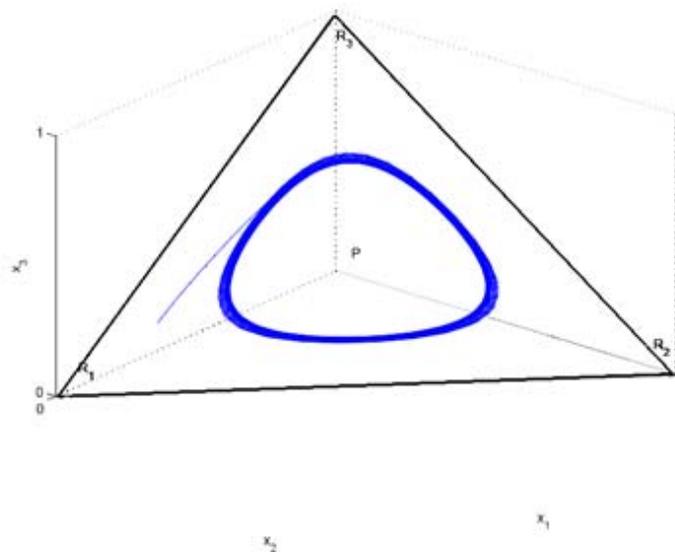


Figura 5.1: Trayectoria para el caso particular, con algunos otros elementos.

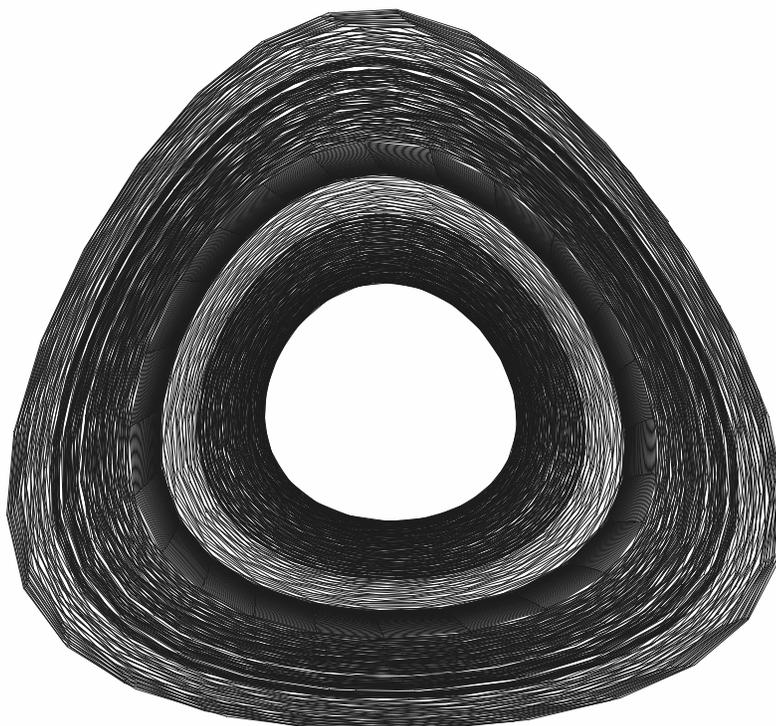


Figura 5.2: Condición inicial sobre Σ cercana a \mathbf{P}

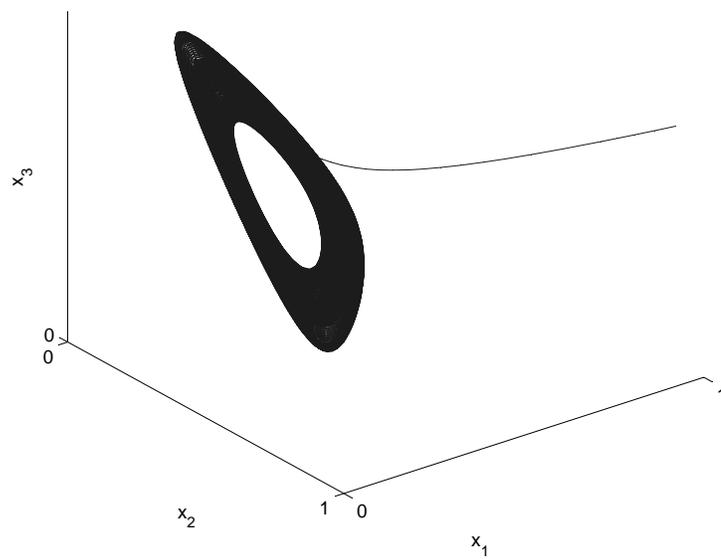


Figura 5.3: Vista lateral de una trayectoria en la componente no acotada.

Bibliografía

- [1] BERMAN, A. and PLEMMONS, R. *Nonnegative matrices in the mathematical science*. Academic Press, **1979**
- [2] BUSENBERG, S. and VAN DEN DRIESSCHE, P. Analysis of a disease transmission model in a population with varying size, *J. Math Biol* **28** (1990), 257-271
- [3] HIRSCH, M. W. Systems of differential equation which are competititve or cooperative. III: Competing species. *Nonlinearity* **1** (1988), 51-71
- [4] HIRSCH, M. W.; SMALE, S. and DEVANEY, R. *Diferential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier, Academic Press 2nd edition 2004.
- [5] HIRSCH, M. W. and H. SMITH *Monotone dynamical systems, Handbook of differential equations: ordinary differential equations, Vol 2*. 239-258 A. Cañada, Pavel Drábek and Alessandro Fonda editores. Elsevier North Holland, Boston 2005.
- [6] HIRSCH, M. W. On existence and uniqueness of the carrying simplex for competitive dynamical systems, *J. Biol Dyn*, **2**, (2008), 169-179
- [7] MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* 261, 459 - 467 (10 June 1976)
- [8] PERKO L. *Differential Equations and Dynamical Systems* Springer, 2nd edition, 1998.
- [9] SÁNCHEZ F. *Una Introducción a la Dinámica no Lineal: Teoría y Modelación Matemáticas* Manuscrito no publicado.
- [10] SMALE, S. On the differential equation of species in competition, *J. Math. Biol* **3** (1976), 5-7.

- [11] WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos* Texts in Applied Mathematics 2, Spriger 2nd edition.
- [12] VAN DEN DRIESSCHE, P. and ZEEMAN, M.L. Three dimensional competitive Lotka-Volterra systems with no periodic orbits. *SIAM J. Appl. Math.*, **58**(1998), pp. 227-234.
- [13] ZEEMAN, M.L. Hopf Bifurcations in Competitive Three-Dimensional Lotka-Volterra System, *Dynam. Stability Systems* **8**(1993), pp 189-217.
- [14] ZEEMAN, M.L. *On Directed Periodic Orbits in Three-Dimensional Competitive Lotka-Volterra Systems. Differential Equations and Applications to Biology and to Industry.* World Scientific, River Edge, NJ. 1996, pp. 563-572.