



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INSTITUTO DE ENERGÍAS RENOVABLES

**TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN BLOQUE CON SISTEMA
CONSTRUCTIVO DE VIGUETA Y BOVEDILLA**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

P R E S E N T A:

LEDÍN RODRÍGUEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RAÚL MAURICIO RECHTMAN SCHENZEL
Instituto de Energías Renovables

Temixco, Morelos. Agosto 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente Dr. Rojas Menéndez Jorge Antonio

Secretario Dr. Rechtman Schrenzel Raúl Mauricio

Vocal Dr. Juarez Valencia Lorenzo Héctor

1er. Suplente Dr. Barrios del Valle Guillermo

2o. Suplente Dr. Mandujano Sánchez Francisco J.

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Energías Renovables - UNAM

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Raul Rechtman Schrenzel

FIRMA

Contenido

1. Introducción	1
2. La ecuación de transporte de Boltzmann	5
2.1. Introducción	5
2.2. La ecuación de transporte de Boltzmann	6
2.3. La Función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann	7
2.4. Conclusiones	9
3. El MEBR	11
3.1. Introducción	11
3.2. La ecuación de transporte de Boltzmann en redes	12
3.3. Ondas de Choque	17
3.4. El MEBR para el campo de temperaturas	23
3.5. Convección de Rayleigh-Bénard	24
3.6. Conclusiones	29
4. Conducción de calor con el MEBR	31
4.1. Introducción	31
4.2. Conducción de calor en un sólido	32
4.3. Conductividad y difusividad térmica	35
4.4. Conducción de calor en dos sólidos	39
4.5. Conclusiones	43
5. Transferencia de calor conjugada	45
5.1. Introducción	45

5.2. Transferencia de calor conjugada	46
5.3. El flujo de calor en un día promedio	67
5.4. Conclusiones	75
6. Conclusiones	77
Appendices	
A. Condiciones de frontera	83
A.1. Condiciones periódicas	83
A.2. Rebote a la mitad de camino	85
A.3. Temperatura constante	85
A.4. Continuidad en el flujo de calor	88
Bibliografía	91

Capítulo 1

Introducción

El transporte de calor en edificaciones ha sido foco de interés en los años recientes debido a la preocupación por el confort térmico y el ahorro de energía. El consumo de energía en las viviendas puede ser a través de leña, gas natural, petróleo y puede ser usado en la calefacción, la iluminación, la refrigeración o en el aire acondicionado.

Una manera en la que podemos reducir el consumo de energía para mantener el confort térmico adecuado es a través del diseño bioclimático. En este campo de estudio a través de las características arquitectónicas de una edificación, se aprovechan los recursos naturales que ofrece un determinado lugar para satisfacer las necesidades de una vivienda. Dichos recursos pueden ser el solar, las corrientes de aire, la vegetación y la lluvia. En particular el recurso solar lo podemos aprovechar si escogemos una orientación de la edificación que utilice este recurso durante el período de invierno y que brinde protección del mismo en el período de verano. Otro tema importante se refiere en los materiales de construcción que son utilizados en el techo o los muros de una edificación, ya que estos deben de estar en función de las pérdidas o ganancias de calor en los distintos períodos del año. En esta área se han realizado estudios comparativos entre los distintos materiales de construcción y se han encontrado los materiales que ofrecen aislamiento térmico [1]. También se ha encontrado que las pérdidas o ganancias de calor no sólo dependen de las propiedades térmicas intrínsecas del material, dado que para los bloques que tienen cavidades, las pérdidas o ganancias de calor también pueden estar en función de la forma en que se acomodan los bloques de construcción [2, 3] o en el número de cavidades que tiene

el bloque.

En este trabajo presentamos una primera aproximación al estudio numérico usando el método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes (MEBR) para el transporte de calor en techos construidos con bloques huecos, como el sistema de vigueta y bovedilla.

El transporte de calor en un bloque de un techo horizontal depende de la hora del día. A las horas del día en donde la temperatura exterior de la edificación es mayor que la temperatura al interior, la dirección del flujo de calor en el techo es hacia el interior de la edificación y únicamente habrá transporte de calor por conducción, sin embargo cuando la dirección del flujo de calor se invierte, el transporte de calor ya no sólo es por conducción, sino habrá contribución de la transferencia de calor por convección natural en la sección de la cavidad del bloque. La magnitud del flujo de calor es importante por que el transporte de calor por convección natural no se presenta únicamente bajo la condición de la dirección del flujo de calor, sino también está en función del tamaño de la cavidad, de las propiedades intrínsecas del fluido y del gradiente de temperaturas.

En esta tesis mostramos los resultados de la simulación numérica del flujo de calor conjugado en un modelo bidimensional de un bloque de vigueta y bovedilla de un techo horizontal usando el MEBR con dos funciones de distribución [4, 5, 6, 7]. Este método consiste en que una función de distribución, que definimos en el capítulo 2, describe el comportamiento de las partículas del fluido y otra función de distribución describe el transporte de energía.

En el MEBR con transporte de energía usando dos funciones de distribución solo hay un parámetro libre que se puede escoger como la viscosidad. En el caso de transporte de calor conjugado hay que fijar las conductividades térmicas del sólido y el fluido pero estas cantidades no se pueden definir en el MEBR. Usando una definición del flujo de calor y la ley de Fourier para conducción de calor encontramos la conductividad térmica y su relación con la viscosidad, o el tiempo de relajamiento. De esa manera, tiene sentido usar como condición a la frontera entre dos medios, la continuidad del flujo de calor. Esta es una de las principales aportaciones de este trabajo.

En el capítulo 2 presentamos de manera breve la teoría cinética de Boltzmann. Presentamos la ecuación de transporte de Boltzmann que establece como cambia la función de distribución de velocidades. En el equilibrio termodinámico esa función de distribución es conocida como la función de distribución de Maxwell-Boltzmann. Presentamos la aproximación propuesta por Bhatnagar, Gross y Krook (BGK) a la ecuación de transporte de Boltzmann en la cual se cambia el término de colisión por uno de relajamiento al equilibrio local con un tiempo de relajamiento τ . En ese capítulo presentamos también la aproximación

a velocidades bajas de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann.

En el capítulo 3 presentamos el MEBR que consiste en la discretización de la función de distribución de velocidades en el espacio, en el tiempo y en espacio de velocidades. Partimos de la aproximación BGK de la ecuación de transporte de Boltzmann y de la expansión a velocidades bajas de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann. El tiempo de relajamiento está relacionado con la viscosidad. Como un ejemplo del método en el estudio numérico de un flujo sin transporte de calor, estudiamos la formación de una onda de choque y vemos que los resultados numéricos están de acuerdo con las relaciones de Rankine-Hugoniot.

Para flujos con transporte de calor presentamos brevemente el MEBR con dos funciones de distribución. En este caso es necesario validar el método y eso lo hacemos ajustando un parámetro para que el valor del número de Rayleigh crítico en el que aparece la convección esté de acuerdo con el resultado teórico.

El capítulo 4 resolvemos el problema de conducción de calor en un sólido con el MEBR y lo comparamos con el método de elemento finito (MEF). Mostramos el proceso que seguimos para llegar a la relación que encontramos entre la conductividad térmica y la viscosidad, o lo que es lo mismo, con el tiempo de relajamiento. La propuesta que presentamos para implementar en el MEBR la condición de continuidad en el flujo de calor en la interfase, la validamos con el problema de conducción de calor en un sólido compuesto por dos materiales de diferente conductividad térmica.

En el capítulo 5 presentamos los resultados de las simulaciones numéricas del flujo de calor conjugado en un modelo bidimensional de una celda de una bovedilla. Encontramos que la convección que ocurre en el interior de la celda depende de la diferencia de temperaturas entre las paredes superior e inferior, y éstas varían en la posición y en el tiempo por lo que tomamos valores promediados en el espacio y en el tiempo. De esa manera podemos definir un número Rayleigh que represente el flujo de calor en el modelo. El número de Nusselt varía en el tiempo por lo que tomamos su promedio temporal. Con el flujo de calor ocurre algo similar. Encontramos relaciones entre estas dos cantidades y el número de Rayleigh promediado en espacio y tiempo. Estas relaciones son leyes de potencia.

En el Capítulo 6 presentemos las conclusiones a las que llegamos en este trabajo de tesis.

Capítulo 2

La ecuación de transporte de Boltzmann

2.1. Introducción

En este capítulo discutimos de forma breve la ecuación de transporte de Boltzmann, presentada en 1872 por Ludwig Boltzmann para explicar la tendencia irreversible de un gas al equilibrio termodinámico [8]. De la ecuación de transporte de Boltzmann, Chapman y Enskog encontraron las ecuaciones de la mecánica de fluidos con una expansión alrededor de la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann [9, 10, 11, 12]. La idea detrás del método de la ecuación de Boltzmann en redes (MEBR) es el de simular numéricamente la ecuación de transporte de Boltzmann como una alternativa a la simulación de las ecuaciones de mecánica de fluidos [13, 14, 15], por ello presentamos la ecuación de transporte de Boltzmann. En la Sec. 2.2 definimos a la función de distribución y al término de colisión. En la Sec. 2.3 describimos la función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann y su aproximación a velocidades pequeñas. También presentamos la aproximación a la ecuación de transporte de Boltzmann que propusieron Bhatnagar, Gross y Krook, en la cual se sustituye la integral de colisión por un término de relajamiento al equilibrio local. El capítulo termina con algunas conclusiones.

2.2. La ecuación de transporte de Boltzmann

La ecuación de transporte de Boltzmann describe el comportamiento de un gas diluído de N partículas idénticas que se encuentran en una caja de volumen V . El estado del gas puede cambiar por las colisiones entre partículas en las cuales se conserva la masa, la cantidad de movimiento y la energía.

La función de distribución de velocidades f se define de manera que

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} \quad (2.1)$$

es el número promedio de partículas del gas que al tiempo t ocupan una caja de volumen $d\mathbf{r}$ alrededor de \mathbf{r} con velocidad en un elemento de volumen $d\mathbf{v}$ alrededor de \mathbf{v} . Es claro que

$$N = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

La ecuación de transporte de Boltzmann describe como cambia la función de distribución de velocidades. Supongamos que no hay colisiones entre las partículas. Una partícula que al tiempo t se encuentre en (\mathbf{r}, \mathbf{v}) estará al tiempo $t + \Delta t$, con Δt pequeño, en $(\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}/m\Delta t)$ donde \mathbf{F} es una fuerza externa y m la masa de la partícula. Durante el intervalo de tiempo Δt el elemento de volumen $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ cambia a $d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'$ y de la definición de la función de distribución

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m}\Delta t, t + \Delta t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (2.3)$$

Se puede demostrar que $d\mathbf{r} d\mathbf{v} = d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'$ [8], por lo que

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m}\Delta t, t + \Delta t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (2.4)$$

La Ec. (2.4) indica que f puede cambiar solo por colisiones, por lo que escribimos

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m}\Delta t, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col}, \quad (2.5)$$

donde $(\partial f)/(\partial t)_{col}$ se conoce como el término de colisión.

Al desarrollar en serie de Taylor a primer orden en Δt el término del lado izquierdo de la Ec. (2.5)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} \quad (2.6)$$

2.3 La Función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann

7

donde

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \nabla_{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \quad (2.7)$$

y \mathbf{r} y \mathbf{v} en coordenadas cartesianas.

Dado que en las colisiones entre dos partículas se conserva la masa, la cantidad de movimiento y la energía, y usando la hipótesis de caos molecular, de la Ec. (2.6) [8]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_1 = \int \sigma(\Omega) d\Omega \int d\mathbf{v}_1 |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| (f'_1 f' - f_1 f) \quad (2.8)$$

donde Ω es el ángulo sólido entre \mathbf{v} y \mathbf{v}_1 , $\sigma(\Omega)$ es la sección diferencial de choque y

$$f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (2.9)$$

$$f_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) \quad (2.10)$$

$$f' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \quad (2.11)$$

$$f'_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, t) \quad (2.12)$$

En estas últimas expresiones \mathbf{v}' y \mathbf{v}'_1 son las velocidades después del choque de dos partículas, una con velocidad \mathbf{v} y la otra con velocidad \mathbf{v}_1 .

2.3. La Función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann

La función de distribución de Maxwell-Boltzmann $f^{(eq)}$ es la solución de la ecuación de transporte de Boltzmann para un sistema en equilibrio térmico en el cual $f^{(eq)}$ no depende del tiempo. De la Ec. (2.8) vemos que una condición suficiente para que la derivada temporal de f sea cero es

$$f^{(eq)}(\mathbf{v}'_1) f^{(eq)}(\mathbf{v}') = f^{(eq)}(\mathbf{v}_1) f^{(eq)}(\mathbf{v}). \quad (2.13)$$

El teorema H [8] garantiza que es también una condición suficiente. De la ecuación anterior

$$\ln f^{(eq)}(\mathbf{v}'_1) + \ln f^{(eq)}(\mathbf{v}') = \ln f^{(eq)}(\mathbf{v}_1) + \ln f^{(eq)}(\mathbf{v}), \quad (2.14)$$

que tiene la forma de una ley de conservación, $\ln f^{(eq)}$ se conserva en las colisiones. Dado que las únicas cantidades conservadas durante una colisión entre

partículas son la masa, la cantidad de movimiento y la energía, $\ln f^{(eq)}$ es una combinación de éstas. Entonces, podemos escribir

$$\ln f^{(eq)}(\mathbf{v}) = -A(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 + \ln C \quad (2.15)$$

con A , C , y \mathbf{u} constantes.

Para encontrar A , C , y \mathbf{u} usamos a la densidad de partículas n

$$n = \frac{N}{V} = \int d\mathbf{v} f^{(eq)}(\mathbf{v}), \quad (2.16)$$

a la velocidad promedio del sistema \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f^{(eq)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.17)$$

y el promedio de energía de cada partícula $\langle \epsilon \rangle$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{m}{2n} \int \mathbf{v}^2 f^{(eq)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (2.18)$$

Dado que el gas es diluido y se encuentra en equilibrio térmico

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{D}{2} kT \quad (2.19)$$

con D la dimensionalidad del espacio. Entonces

$$f^{(eq)}(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{D/2} \exp \left[-m \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2kT} \right]. \quad (2.20)$$

Esta es la ecuación de la función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

De la Ec. (2.20)

$$f^{(eq)}(\mathbf{v}) = \frac{\rho}{(2\pi kT)^{D/2}} \exp \left(-\frac{\mathbf{v}^2}{2kT} \right) \exp \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{2kT} - \frac{\mathbf{u}^2}{2kT} \right). \quad (2.21)$$

Al hacer un desarrollo de Taylor alrededor de $\mathbf{u} = 0$ encontramos que

$$f^{(eq)} = 1 + \nabla f^{(eq)}(0, 0) \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathcal{H}(0, 0) \mathbf{u}^T + O(u^3) \quad (2.22)$$

con

$$\nabla f^{(eq)}(0, 0) \cdot \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{kT}, \quad (2.23)$$

$\mathcal{H}(0, 0)$ la matriz Hessiana definida por

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{v_x}{kT}\right)^2 - \frac{1}{kT} & \left(\frac{v_x}{kT}\right) \left(\frac{v_y}{kT}\right) \\ \left(\frac{v_y}{kT}\right) \left(\frac{v_x}{kT}\right) & \left(\frac{v_y}{kT}\right)^2 - \frac{1}{kT} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

\mathbf{u}^T el vector transpuesto de \mathbf{u} y $O(u^3)$ denota a términos de orden mayor o igual a 3 de u . En la expansión únicamente consideraremos hasta los términos de segundo orden ya que con esto es suficiente para llegar a las ecuaciones de mecánica de fluidos partiendo de la ecuación de transporte de Boltzmann. Al evaluar cada uno de los términos en la expansión de Taylor, Ec. (2.22), la función de distribución queda expresada de la siguiente manera

$$f^{(eq)}(\mathbf{v}) = \frac{\rho}{(2\pi kT)^{D/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{v}^2}{2kT}\right) \left[1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{kT} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2}{2(kT)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2kT}\right] + O(u^3) \quad (2.25)$$

Usando la función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, Bhatnagar, Gross y Krook (BGK) propusieron sustituir el término de colisión de la ecuación de transporte de Boltzmann por uno de relajación al equilibrio local [9, 11, 12, 16]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} = -\frac{f - f^{(eq)}(\mathbf{r}, t)}{\tau}, \quad (2.26)$$

donde $f^{(eq)}(\mathbf{r}, t)$ está dado por la Ec. (2.20) con $\rho = mn$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = m \int f^{(eq)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2.27)$$

y

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \frac{1}{n} \int f^{(eq)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2.28)$$

De lo anterior

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v\right) f = \frac{\Delta t}{\tau} [f^{(eq)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)]. \quad (2.29)$$

2.4. Conclusiones

Presentamos de manera resumida la derivación de la ecuación de transporte de Boltzmann para un gas diluido. En equilibrio termodinámico el sistema está descrito por la función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann

y mostramos su expansión de serie de Taylor a velocidad u baja. El capítulo termina con la presentación de la aproximación de BGK a la ecuación de transporte de Boltzmann. Esta aproximación, junto con la expansión de la función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann a velocidades pequeñas, son los puntos de partida para el desarrollo del método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes que presentamos en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

El método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes

3.1. Introducción

El método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes (MEBR) ha sido utilizado en la simulación numérica para flujos en problemas de convección natural [17, 18], flujo Couette y Poiseuille [19], flujos a través de obstáculos [5], combustión en geometrías complejas [20], flujos no newtonianos [21], aerodinámica y flujos turbulentos [22], entre otros.

El MEBR tiene sus antecedentes en los autómatas celulares para gases en redes [23]. En este capítulo presentamos el procedimiento que se requiere para pasar de la ecuación de transporte de Boltzmann al MEBR. En la Sec. 3.2 mostramos de una manera resumida como se discretiza la ecuación de transporte de Boltzmann en la aproximación BGK en dos dimensiones. Como una primera aplicación del método, en la Sec. 3.3 discutimos un problema de ondas de choque.

Una de las maneras de usar el MEBR en flujos con transporte de energía es el de considerar dos funciones de distribución, una para partículas y otra para la energía, o lo que es lo mismo, la temperatura. En la Sec. 3.4 presentamos una versión del método para flujos con transporte de energía, en particular

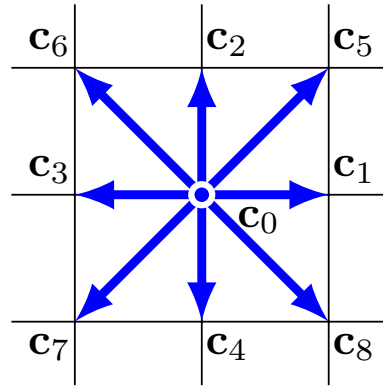


Figura 3.1: Velocidades del modelo D2Q9.

flujos convectivos y en la Sec. 3.5 validamos el método con la simulación de la convección de Rayleigh-Bénard. El capítulo termina con algunas conclusiones.

3.2. La ecuación de transporte de Boltzmann en redes

De la ecuación de transporte de Boltzmann se puede llegar a las ecuaciones de mecánica de fluidos usando la expansión de Chapman-Enskog [12, 24]. Esto sugiere que se puede usar la ecuación de transporte de Boltzmann en simulaciones numéricas para el estudio de flujos. Para ello es necesario discretizar la función de distribución de velocidades $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ en el espacio, el espacio de velocidades y en el tiempo. El tiempo t se discretiza de manera que $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ con Δt pequeño. El espacio bidimensional ocupado por el fluido se discretiza de manera que los puntos \mathbf{r} estén contenidos en ese espacio $\mathbf{r} = (i\Delta x, j\Delta y)$ con i, j enteros y $\Delta x = \Delta y$ pequeños. El espacio de velocidades puede discretizarse de varias maneras [25] y en este trabajo usamos el modelo D2Q9. En esta notación D2 se refiere a un espacio bidimensional y Q9 a nueve velocidades.

En el modelo D2Q9 el espacio de velocidades se discretiza considerando nueve velocidades \mathbf{c}_k , $k = 0, 1, \dots, 8$ dadas por

$$\mathbf{c}_k = \begin{cases} (0, 0), & k = 0 \\ c(\cos \theta_k, \sin \theta_k), & \theta_k = (k-1)\pi/2, \quad k = 1, 2, 3, 4 \\ \sqrt{2}c(\cos \theta_k, \sin \theta_k), & \theta_k = (k-5)\pi/2 + \pi/4, \quad k = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (3.1)$$

con $c = \Delta x / \Delta t$. En la Fig. 3.1 mostramos las nueve velocidades.

En lo que sigue, presentamos de manera breve, el trabajo de He et al [25] para pasar de la ecuación de transporte de Boltzmann al MEBR en el modelo D2Q9. La ecuación de transporte de Boltzmann en la aproximación BGK, Ec. (2.29) puede escribirse como

$$f_k(\mathbf{r} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = f_k(\mathbf{r}, t) + \frac{\Delta t}{\tau} \left[f_k^{(eq)}(\mathbf{r}, t) - f_k(\mathbf{r}, t) \right] \quad (3.2)$$

con $k = 0, \dots, 8$ y \mathbf{c}_k como en la Ec. (3.1). En esta ecuación $f_k(\mathbf{r}, t)$ es el número promedio de partículas que se encuentran al tiempo t en el sitio \mathbf{r} con velocidad \mathbf{c}_k y $f_k^{(eq)}(\mathbf{r}, t)$ el número promedio de partículas que se encuentran al tiempo t en el sitio \mathbf{r} con velocidad \mathbf{c}_k en un estado de equilibrio local.

En lo que sigue encontramos la forma discreta de la función de distribución. Definimos

$$I = \int d\mathbf{v} \psi_{m,n}(\mathbf{v}) f^{(eq)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (3.3)$$

con

$$\psi_{m,n}(\mathbf{v}) = v_x^m v_y^n \quad (3.4)$$

y m, n enteros positivos. Usando la expresión para $f^{(eq)}$, Ec. (2.25), válida para \mathbf{u} pequeña

$$\begin{aligned} I = \int \psi_{m,n}(\mathbf{v}) f^{(eq)} d\mathbf{v} &= \frac{\rho}{2\pi kT} \left[\int v_x^m v_y^n \exp\left(\frac{-\mathbf{v}^2}{2kT}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2kT}\right) dv_x dv_y \right] \\ &+ \frac{\rho}{2\pi kT} \left[\int v_x^m v_y^n \exp\left(\frac{-\mathbf{v}^2}{2kT}\right) \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{2kT}\right) dv_x dv_y \right] \\ &+ \frac{\rho}{2\pi kT} \left[\int v_x^m v_y^n \exp\left(\frac{-\mathbf{v}^2}{2kT}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{kT}\right)^2 dv_x dv_y \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De aquí expresamos I como $I = A + B + C$ para cada uno de los términos del lado derecho de la igualdad. Encontramos que

$$A = \frac{\rho}{\pi} (\sqrt{2kT})^{m+n} \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2kT}\right) I_m I_n, \quad (3.6)$$

$$B = \frac{\rho}{\pi} (\sqrt{2kT})^{m+n} \left(\frac{2u_x I_{m+1} I_n + 2u_y I_m I_{n+1}}{\sqrt{2kT}}\right) \quad (3.7)$$

y

$$C = \frac{\rho}{\pi} (\sqrt{2kT})^{m+n} \left(\frac{u_x^2 I_{m+2} I_n + 2u_x u_y I_{m+1} I_{n+1} + u_y^2 I_m I_{n+2}}{kT}\right). \quad (3.8)$$

En estas ecuaciones I_m es el momento de orden n con la función de peso $e^{-\zeta^2}$,

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} \zeta^m d\zeta. \quad (3.9)$$

Para poder encontrar una forma discreta de la función de distribución de velocidades en equilibrio, evaluamos I con la fórmula de Hermite de tercer orden [26]

$$I_m = \sum_{j=1}^3 \omega_j \zeta_j^m, \quad (3.10)$$

con ω_j los pesos y ζ_j las abscisas de la cuadratura. Estos se encuentran a partir del polinomio de Hermite H_n definido por

$$H_n(\zeta) = (-1)^n e^{\zeta^2} \frac{d^n}{d\zeta^n} (e^{-\zeta^2}). \quad (3.11)$$

A tercer orden

$$H_3(\zeta) = 8\zeta^3 - 12\zeta \quad (3.12)$$

por lo que las raíces son

$$\zeta_1 = -\sqrt{3/2}, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = \sqrt{3/2}. \quad (3.13)$$

Los pesos están dados por la fórmula de Hermite

$$\omega_j = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{H'_n(\zeta_j)^2}, \quad (3.14)$$

con H'_n la primera derivada de H . Para $n = 3$

$$\omega_1 = \sqrt{\pi}/6, \quad \omega_2 = 2\sqrt{\pi}/3, \quad \omega_3 = \sqrt{\pi}/6. \quad (3.15)$$

Sustituyendo la Ec. (3.10) en la Ec. (3.6)

$$\begin{aligned} A &= \frac{\rho}{\pi} \left(1 - \frac{u}{2kT}\right) \sum_{i=1}^3 \omega_i (2kT)^{m/2} \zeta_i^m \sum_{j=1}^3 \omega_j (2kT)^{n/2} \zeta_j^n \\ &= \frac{\rho}{\pi} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \psi(\mathbf{v}_{i,j}) \left(1 - \frac{u^2}{2kT}\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

con

$$\mathbf{v}_{i,j} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sqrt{2kT}(\zeta_i, \zeta_j) \quad \text{y} \quad \psi(\mathbf{v}_{i,j}) = v_i^m v_j^n. \quad (3.17)$$

De la Ecs. (3.7) y (3.8)

$$\begin{aligned} B &= \frac{\rho}{\pi kT} \left(u_x \sum_{i,j=1}^2 \omega_i \omega_j \psi(\mathbf{v}_{i,j}) v_i + u_y \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \psi(\mathbf{v}_{i,j}) v_j \right) \\ &= \frac{\rho}{\pi} \sum_{i,j}^3 \omega_i \omega_j \psi(\mathbf{v}_{i,j}) \left(\frac{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{u}}{kT} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{\rho}{\pi} \omega_i \omega_j \psi(\mathbf{v}_{i,j}) \left(\frac{u_x^2 v_i^2 + 2u_x u_y v_i v_j + u_y^2 v_j^2}{2(kT)^2} \right) \\ &= \frac{\rho}{\pi} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \psi(\mathbf{v}_{i,j}) \left(\frac{((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{u})^2}{2(kT)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

De lo anterior

$$I = \frac{\rho}{\pi} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \psi(\mathbf{v}_{i,j}) \left[\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2kT} \right) + \left(\frac{\mathbf{v}_{i,j} \cdot \mathbf{u}}{kT} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_{i,j} \cdot \mathbf{u}}{kT} \right)^2 \right]. \quad (3.20)$$

Con la Ec. (3.10) podemos escribir a la Ec. (3.20) como

$$I = \sum_{i,j} \psi(v_i, v_j) f_{i,j}^{(eq)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (3.21)$$

con

$$f_{i,j}^{(eq)} = \frac{\omega_i \omega_j \rho}{\pi} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2kT} \right) + \left(\frac{\mathbf{v}_{i,j} \cdot \mathbf{u}}{kT} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_{i,j} \cdot \mathbf{u}}{kT} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

y $\rho = \rho(\mathbf{r})$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$.

De la Ec. (3.17),

$$\mathbf{v}_{1,1} = \sqrt{2kT}(\zeta_1, \zeta_1) = \sqrt{2kT} \sqrt{3/2}(-1, -1). \quad (3.23)$$

Como se puede observar en la Fig. 3.1 $\mathbf{v}_{1,1}$ está en la dirección $k = 7$. De la Ec. (3.1) se tiene para $k = 7$ a $\mathbf{c}_7 = c(-1, -1)$, por lo que

$$\mathbf{v}_{1,1} = \sqrt{3kT}(-1, -1) = \frac{\sqrt{3kT}}{c} \mathbf{c}_7. \quad (3.24)$$

En la Tabla 3.1 mostramos los otros casos de $\mathbf{v}_{i,j}$. El peso correspondiente a la dirección $k = 7$ lo obtenemos con

$$\omega_k = \frac{\omega_j \omega_j}{\pi}. \quad (3.25)$$

i	j	$\omega_i\omega_j/\pi$	$\mathbf{v}_{i,j}/\sqrt{3kT}$	k	ω_k	\mathbf{c}_k
1	1	1/36	(-1, -1)	7	1/36	\mathbf{c}_7
1	2	1/9	(-1, 0)	3	1/9	\mathbf{c}_3
1	3	1/36	(-1, 1)	6	1/36	\mathbf{c}_6
2	1	1/9	(0, -1)	4	1/9	\mathbf{c}_4
2	2	4/9	(0, 0)	0	4/9	\mathbf{c}_0
2	3	1/9	(0, 1)	2	1/9	\mathbf{c}_2
3	1	1/36	(1, -1)	8	1/36	\mathbf{c}_8
3	2	1/9	(1, 0)	1	1/9	\mathbf{c}_1
3	3	1/36	(1, 1)	5	1/36	\mathbf{c}_5

Tabla 3.1: Valores de velocidades discretas \mathbf{c}_k y pesos ω_k , correspondientes a cada i, j .

De la Ec. (3.15)

$$\frac{\omega_1\omega_1}{\pi} = \frac{1}{36} \quad (3.26)$$

Para otros valores de k los resultados están en la Tabla 3.1. De dicha Tabla

$$\omega_k = \begin{cases} 4/9, & k = 0 \\ 1/9, & k = 1, 2, 3, 4 \\ 1/36, & k = 5, 6, 7, 8. \end{cases} \quad (3.27)$$

Al expresar a la Ec. (3.22) en términos de \mathbf{c}_k y ω_k obtenemos

$$f_k^{(eq)}(\mathbf{r}) = \omega_k \rho \left[1 + \frac{3(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2} \right]. \quad (3.28)$$

En términos generales con el MEBR podemos estudiar el transporte de masa y cantidad de movimiento de un fluido isotérmico. La idea es utilizar a la ecuación de transporte de Boltzmann en redes, Ec. (3.2), ya que con ésta describimos la evolución temporal de las funciones de distribución. En esta ecuación el término de relajación contiene a la función de distribución de velocidades en equilibrio local de Maxwell-Boltzmann, que al expresarla en forma discreta está dada por la Ec. (3.28). Con estas dos ecuaciones podemos obtener a las funciones de distribución de las partículas f_k en $t + \Delta t$. Para calcular las propiedades locales del fluido, de la Ec. (2.27) y Ec. (2.28), la densidad la podemos escribir como

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m \sum_k f_k(\mathbf{r}, t) \quad (3.29)$$

y la velocidad

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_k c_k f_k(\mathbf{r}, t). \quad (3.30)$$

A través de la expansión de Chapman-Enskog podemos llegar de la Ec. (3.2) a las ecuaciones de la mecánica de fluidos. El procedimiento que se lleva a cabo es relacionar al mundo microscópico y al macroscópico a través de la técnica multiescalas. También se tiene que hacer una expansión a segundo orden para recuperar las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento [9, 10, 11, 12]. Se puede demostrar que

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right). \quad (3.31)$$

con ν la viscosidad cinemática y $c_s = 1/\sqrt{3}$ [11, 25].

3.3. Ondas de Choque

En esta sección utilizamos el método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes (MEBR) para simular numéricamente la formación y evolución de una onda de choque debida a un gradiente de densidad en un fluido isotérmico. Los resultados muestran un acuerdo numérico con las relaciones de Rankine-Hugoniot.

Un fluido ocupa una cavidad con una división a la mitad y con densidades ρ_+ en la mitad izquierda y ρ_- en la derecha, como mostramos en la Fig. 3.2, con $\rho_+ > \rho_-$. A $t = 0$ quitamos la pared de en medio, por lo que hay una onda de compresión de la región de densidad alta a la de densidad baja y una onda de rarefacción en la región de densidad baja.

La cavidad está cerrada en las paredes verticales y horizontales, por lo que usamos la condición a la frontera de rebote a la mitad del camino, presentada en el Apéndice A.2. Dada la simetría del problema la densidad ρ y la velocidad horizontal u no dependen de la coordenada vertical y las evaluamos como el promedio en la dirección vertical en cada tiempo y posición horizontal.

Las cantidades adimensionales, que denotamos con el superíndice *, se definen como

$$x^* = \frac{x}{l_x}, \quad t^* = t \frac{\nu}{l_x^2}, \quad u_x^* = u \frac{l_x}{\nu}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_+}, \quad (3.32)$$

con l_x la longitud horizontal de la cavidad y ν dada por la Ec. (3.31).

Mostramos los resultados de la simulación para la densidad ρ^* como función del tiempo t^* en la Fig. 3.3. Para $t^* > 0$ hay una onda de compresión que viaja

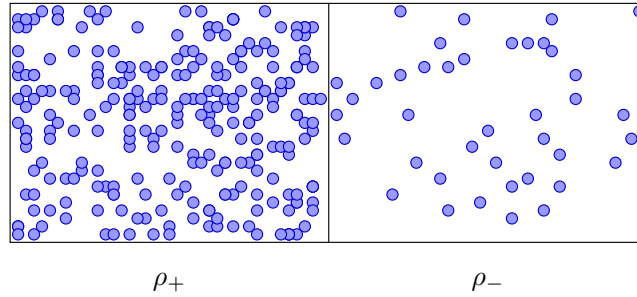


Figura 3.2: Fluido confinado a una cavidad con dos secciones a distintas densidades $\rho_+ > \rho_-$

hacia la derecha y una de rarefacción que viaja hacia la izquierda dejando una sección central a una densidad ρ_c^* . En dicha sección el fluido se mueve hacia la derecha con una velocidad u_c^* , como mostramos en la Fig. 3.4. Estos resultados coinciden con los valores que se obtienen de las relaciones de Rankine-Hugoniot dadas por [27]

$$u_{oc}^2 = r c_s^2, \quad (3.33)$$

$$u_c = \frac{r-1}{\sqrt{r}} c_s, \quad (3.34)$$

$$\rho_c = r \rho_-. \quad (3.35)$$

En estas expresiones u_{oc} es la velocidad de la onda de compresión y r es la solución de

$$\log r + \frac{r-1}{\sqrt{r}} = \log \frac{\rho_+}{\rho_-}. \quad (3.36)$$

Para encontrar la velocidad de la onda de rarefacción u_{or} usamos

$$u_{or}^2 = r c_s^2, \quad (3.37)$$

con r la solución de

$$\log r + \frac{r-1}{\sqrt{r}} = \log \frac{\rho_-}{\rho_+}. \quad (3.38)$$

Las rectas horizontales en las Figs. 3.3 y 3.4 marcan los valores de ρ_c^* y u_c^* respectivamente que se obtienen de las relaciones de Rankine-Hugoniot.

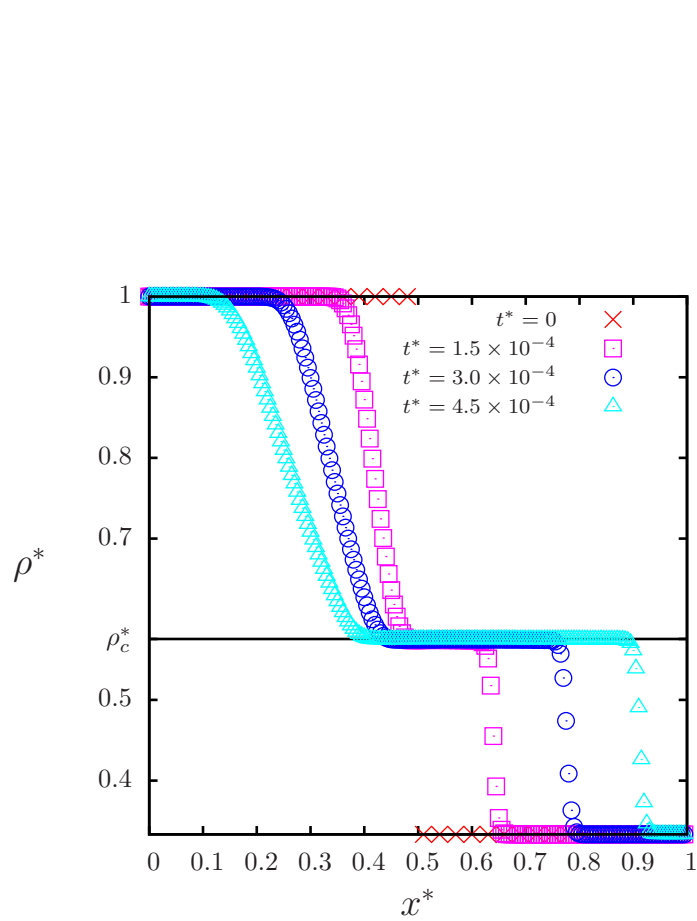


Figura 3.3: La densidad ρ^* como función de la posición x^* a diferentes tiempos. El refinamiento de malla es de $l_x = 200$ y $l_y = 100$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. El tiempo de relajamiento es $\tau = 1.0$, $\rho_+ = 0.9$ y $\rho_- = 0.3$. El valor de la densidad en la región central es $\rho_c^* = 0.5754$ con $r = 1.72606$.

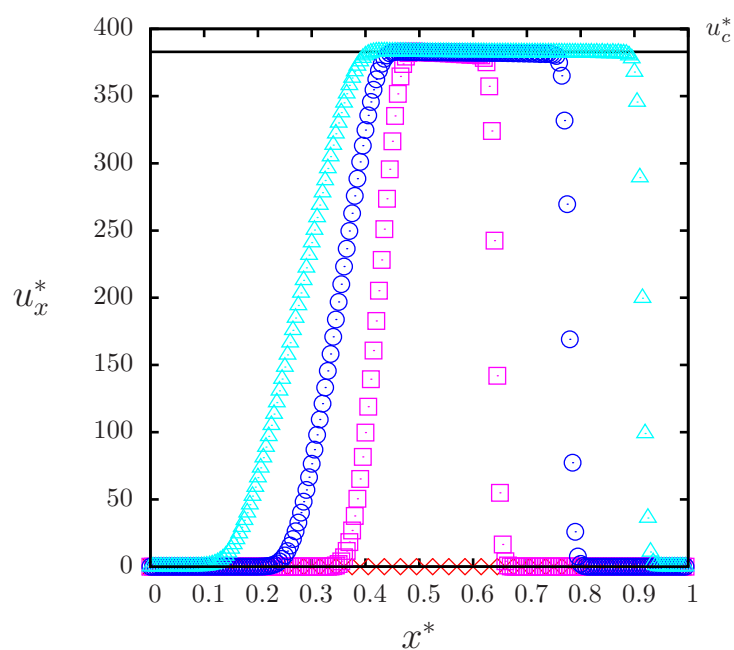


Figura 3.4: La velocidad u_x^* como función de la posición x^* para los tiempos $t^* = 0$, “x”, $t^* = 1.5 \times 10^{-4}$, “□”, $t^* = 3.0 \times 10^{-4}$, “○” y $t^* = 4.5 \times 10^{-4}$, “△”. El refinamiento de malla es de $l_x = 200$ y $l_y = 100$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. El tiempo de relajamiento es $\tau = 1.0$ con $\rho_+ = 0.9$ y $\rho_- = 0.3$. El valor de la velocidad en la región del centro es $u_c^* = 382.88$ de acuerdo con las Ecs. (3.34) y (3.36).

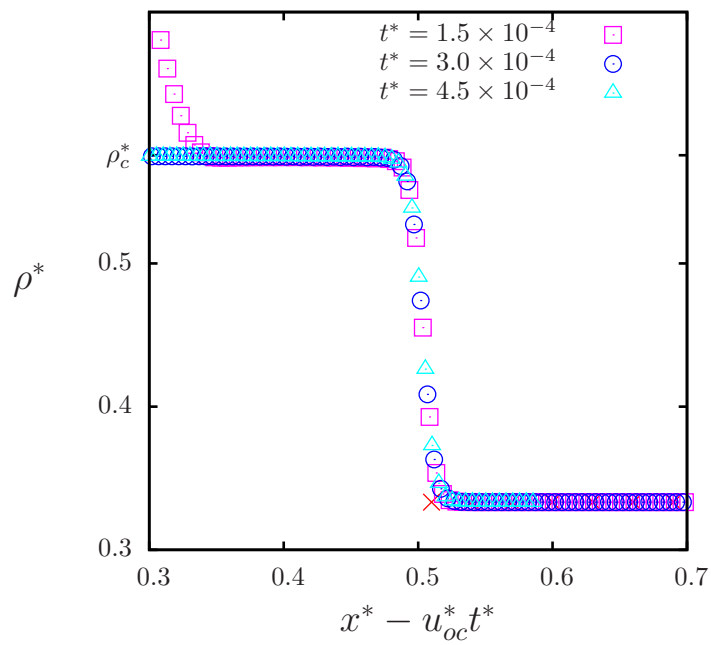


Figura 3.5: La densidad ρ^* como función de $x^* - u_{oc}^* t^*$ a diferentes tiempos. El refinamiento de malla es de $l_x = 200$ y $l_y = 100$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. El tiempo de relajamiento es $\tau = 1.0$ con $\rho_+ = 0.9$ y $\rho_- = 0.3$. El valor de la densidad en la región central es $\rho_c^* = 0.5754$.

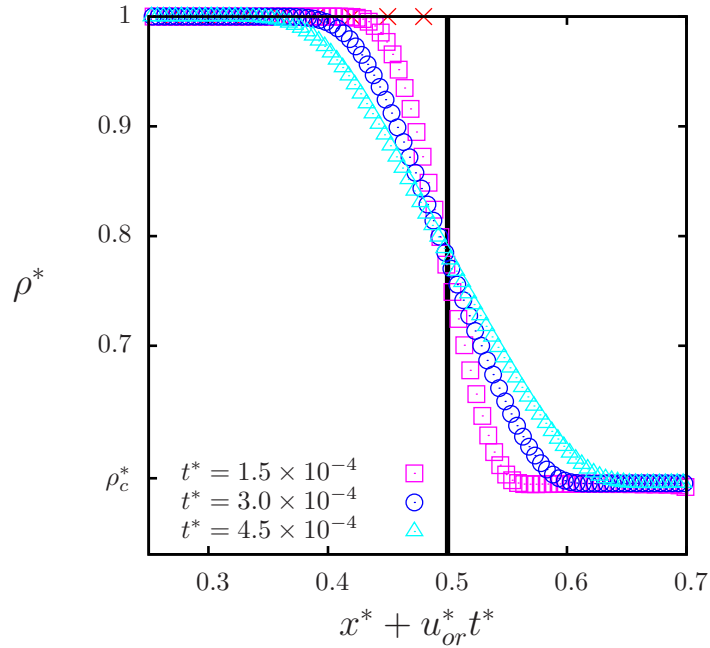


Figura 3.6: La densidad ρ^* como función de $x^* + u_{or}^* t^*$ a diferentes tiempos. El refinamiento de malla es de $l_x = 200$ y $l_y = 100$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. El tiempo de relajamiento es $\tau = 1.0$ con $\rho_+ = 0.9$ y $\rho_- = 0.3$. El valor de la densidad en la región central es $\rho_c^* = 0.5754$.

En la Fig. 3.5 presentamos la onda de compresión en diferentes tiempos. Como se puede observar en el eje horizontal se tiene a $x^* - u_{oc}^* t^*$ con la finalidad de poner a las diferentes ondas de compresión sobre el mismo valor en el eje horizontal. Como se puede observar la onda de compresión representa un cambio muy abrupto entre la región de la densidad ρ_- y la que tiene densidad ρ_c . Este resultado indica que u_{oc} es la velocidad de la onda de compresión. Dado que $r = 1.72606$ $u_{oc} > c_s$, la onda de compresión es supersónica.

Para la onda de rarefacción $r = 0.579287$ por lo que $u_{or} < c_s$. En la Fig. 3.6 mostramos la evolución de la onda de rarefacción en diferentes tiempos. En el eje horizontal se tiene $x^* + u_{or}^* t^*$ con el objetivo de mostrar todas las curvas sobre el mismo valor en el eje horizontal. Como se puede ver en la Fig. 3.6 la onda de rarefacción va disminuyendo su pendiente a medida que aumenta el tiempo, sin embargo el valor de la velocidad permanece constante en $x^* + u_{or}^* t^* = 0.5$.

3.4. La ecuación de transporte de Boltzmann en redes para el campo de temperaturas

Para el estudio de flujos con transporte de calor se han empleado variantes del MEBR que se pueden agrupar en dos, el de múltiples velocidades [14, 28] y el de dos funciones de distribución [4, 6, 29]. Este último modelo, que presenta ventajas en estabilidad, consiste utilizar la Ec. (3.2) para las funciones de distribución de partículas y a la Ec. (3.42) para las funciones de distribución de temperatura. En el MEBR con dos funciones de distribución se han formulado diferentes esquemas como el que propone He [10], donde hace una expansión a segundo orden de la función de distribución de velocidades para el equilibrio local con el fin de incorporar la disipación de calor por efectos de viscosidad y al trabajo de compresión debido a la presión. Otro esquema es el que propone Peng [24]. En este trabajo seguimos el esquema que propone Shan [4], usado en otros trabajos [5, 6, 7, 30, 31].

En lo que sigue mostramos una manera de usar el MEBR con dos funciones de distribución, una para las partículas y otra para la temperatura. Para las partículas

$$f_k(\mathbf{r} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = f_k(\mathbf{r}, t) + \frac{\Delta t}{\tau} \left[f_k^{(eq)}(\mathbf{r}, t) - f_k(\mathbf{r}, t) \right] + F_k \quad (3.39)$$

con F_k el término de Boussinesq [17, 24], dado por

$$F_k = -3\omega_k g \beta (T - T_0) c_{ky}. \quad (3.40)$$

En esta expresión T_0 es la temperatura de referencia, g la aceleración de la gravedad que está en la dirección del eje y negativo, β el coeficiente de expansión térmico y c_{ky} la proyección de \mathbf{c}_k en el eje y . Escribimos la temperatura T en un sitio \mathbf{r} al tiempo t como

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_k T_k. \quad (3.41)$$

con T_k las funciones de distribución de la temperatura, que obedecen a la ecuación de transporte

$$T_k(\mathbf{r} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = T_k(\mathbf{r}, t) + \frac{\Delta t}{\tau_T} \left[T_k^{(eq)}(\mathbf{r}, t) - T_k(\mathbf{r}, t) \right] \quad (3.42)$$

con τ_T el tiempo de relajamiento a las funciones de distribución de la temperatura en equilibrio $T_k^{(eq)}$.

Las funciones de distribución de la temperatura en equilibrio $T_k^{(eq)}$ se obtienen por un procedimiento similar al usado para las funciones de distribución en equilibrio $f_k^{(eq)}$, con la diferencia de que la expansión de Taylor se hace a primer orden y con esto es suficiente para recobrar a la ecuación de conservación de energía. La función de velocidades para el equilibrio $T_k^{(eq)}$ es

$$T_k^{(eq)} = \omega_k T (1 + 3c_k \cdot \mathbf{u}), \quad (3.43)$$

con T dada por la Ec. (3.41).

La relación entre la difusividad térmica α y el tiempo de relajamiento τ_T es [11, 17]

$$\alpha = c_s^2 \left(\tau_T - \frac{1}{2} \right). \quad (3.44)$$

3.5. Convección de Rayleigh-Bénard

En la forma más sencilla de convección de Rayleigh-Bénard (CRB) un fluido está confinado entre dos paredes horizontales, la inferior a la temperatura T_{inf} y la superior a la temperatura T_{sup} con $T_{inf} > T_{sup}$. La explicación de este fenómeno físico se debe que un gradiente de temperaturas en un fluido da lugar a un gradiente de densidad, si el gradiente de densidad es lo suficientemente fuerte para vencer a las fuerzas viscosas, éste dará lugar a un flujo de masa que definirá una celda convectiva.

Los parámetros adimensionales, que denotamos con un superíndice * del problema son

$$t^* = t \frac{\alpha}{l_y^2}, \quad v_y^* = v \frac{l_y}{\alpha}, \quad T^* = \frac{T - T_0}{T_{inf} - T_0}, \quad (3.45)$$

con l_y la altura de la cavidad y α la difusividad térmica dada por la Ec. (3.44). En lo que sigue $T_0 = T_{sup}$ con T_0 la temperatura de referencia de la Ec. (3.40).

Para simular la CRB usamos el MEBR con dos funciones de distribución, presentado en la Sec. 3.4. Consideramos un fluido confinado a una cavidad con una longitud horizontal $l_x = 100$ y una altura $l_y = 50$, el fluido tiene una densidad $\rho = 1$ y debido a que deseamos saber el comportamiento del fluido aire, tomamos el valor de Prandtl con $Pr = 0.71$. Las condiciones a la frontera son a temperatura constante T_{inf} y T_{sup} en las paredes horizontales inferior y superior respectivamente, implementadas en el MEBR con la condición de rebote a la mitad del camino para las funciones de distribución de partículas, Apéndice A.2, y con la condición de temperatura constante en las funciones

de distribución de temperatura, Apéndice A.3. En las paredes verticales de la cavidad usamos la condición periódica a la frontera, Apéndice A.1.

El número de Rayleigh Ra relaciona las propiedades intrínsecas del fluido como la difusividad térmica α , la viscosidad cinemática ν y el coeficiente de expansión térmico β con el gradiente de temperaturas $\Delta T = T_{inf} - T_{sup}$. Está definido por

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T l_y^3}{\nu\alpha}. \quad (3.46)$$

Para realizar las simulaciones numéricas del problema con el fluido aire, debemos relacionar a estas variables con las que usamos en el MEBR y posteriormente validar estos resultados a través del número de Rayleigh crítico Ra_c . Para $Ra > Ra_c$ el transporte de calor es por convección. Para $l_x = 2l_y$, $Ra_c = 1707.762$ [4]. En el MEBR con dos funciones de distribución asignamos valores fijos a todos los parámetros del método menos uno y buscamos el valor de este último. Proponemos que $g = 0.001$, $\beta = 0.1$, $\rho = 1.0$ y $Pr = 0.71$ que corresponde con el aire. Al fijar estos parámetros, tomamos como parámetro libre al tiempo de relajamiento τ , o lo que es lo mismo a la viscosidad ν .

En la Fig. 3.7 presentamos la evolución temporal de la velocidad vertical máxima v_{max}^* para diferentes números de Ra cuando fijamos el valor de $\tau = 0.7$. La función que define el comportamiento se ajustó a

$$v_{max}^*(t) = Ae^{\zeta t}, \quad (3.47)$$

donde A es una constante y ζ es la tasa de crecimiento de la velocidad vertical máxima. Cuando v_{max}^* decrece en el tiempo no hay convección, cuando crece sí y eventualmente alcanza un valor constante. El valor de Ra_c es el que corresponde a un cambio en el crecimiento de v_{max}^* , o cuando $\zeta = 0$.

En la Fig. 3.8 mostramos a la tasa de crecimiento de la velocidad vertical máxima ζ en función de Ra para diferentes tiempos de relajamiento. Como podemos observar hay una relación lineal entre ζ y Ra cuando fijamos a la variable τ . Del ajuste lineal podemos encontrar el valor $Ra_c(\tau)$ para el cual $\zeta = 0$. De la Fig. 3.8 vemos que $Ra_c(\tau = 0.7) = 1708 \simeq 1707.762$. Concluimos que con $g = 0.001$, $\beta = 0.1$, $\rho = 1.0$, $\tau = 0.7$ y dado $Pr = 0.71$, $\tau_T = 0.7817$, nos permiten simular la CRB para el aire con el MEBR.

En la Fig. 3.9 mostramos la formación de una celda convectiva de aire con $Pr = 0.71$ y $Ra = 18,000$.

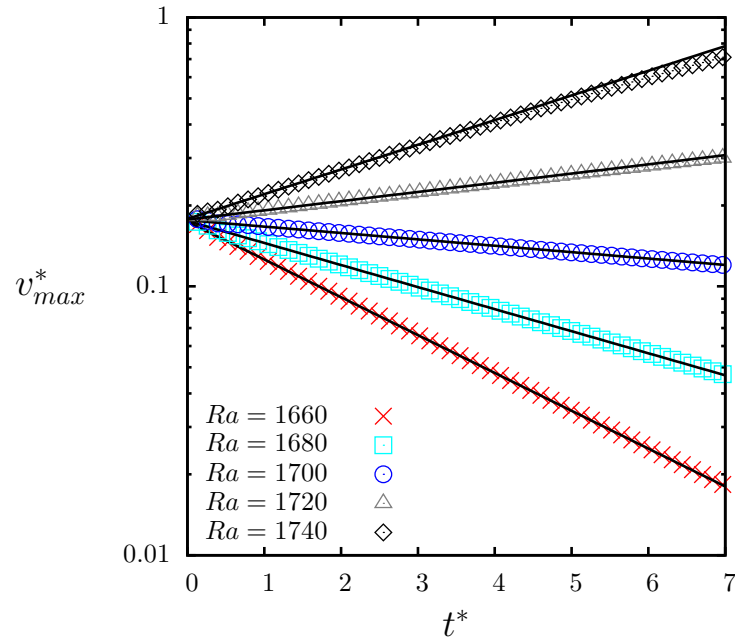


Figura 3.7: La velocidad vertical máxima como función del tiempo para diferentes números Rayleigh Ra . Las líneas continuas son el ajuste de la Ec. (3.47). Para $Ra = 1660$ con $A = 0.17403 \pm 2e - 05$ y $\zeta = -0.32331 \pm 5e - 05$, $Ra = 1680$ con $A = 0.17506 \pm 2e - 05$ y $\zeta = -0.18849 \pm 3e - 05$, $Ra = 1700$ con $A = 0.17620 \pm 1e - 05$ y $\zeta = -0.05504 \pm 2e - 05$, $Ra = 1720$ con $A = 0.17822 \pm 3e - 05$ y $\zeta = 0.07518 \pm 4e - 05$ y $Ra = 1740$ con $A = 0.1866 \pm 4e - 04$ y $\zeta = 0.1930 \pm 3e - 04$. El refinamiento de malla es de $l_x = 100$ y $l_y = 50$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. El tiempo de relajamiento es $\tau = 0.7$, $\rho = 1.0$ y $Pr = 0.71$.

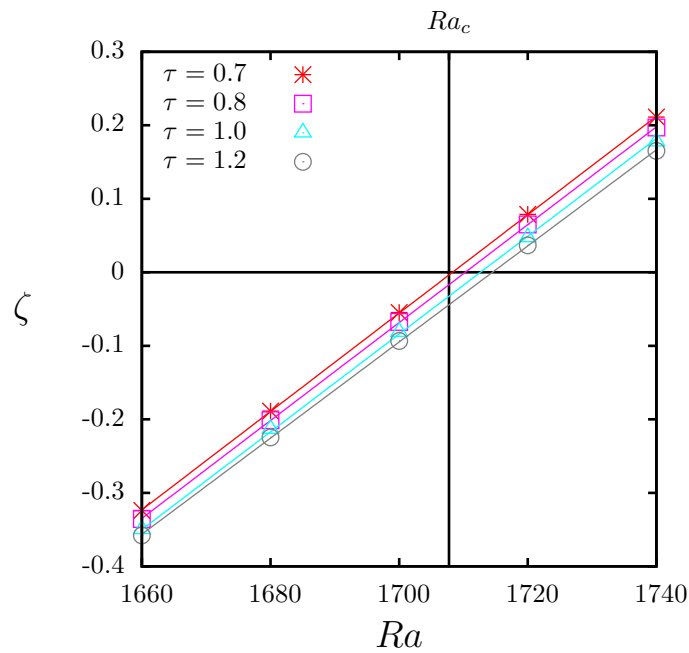


Figura 3.8: Tasa de crecimiento de la velocidad vertical máxima ζ en función del número Rayleigh Ra para diferentes tiempos de relajamiento, τ . Los resultados se pueden ajustar a la recta $\zeta = mRa + b$. Para $\tau = 0.7$ con $m = 0.006690 \pm 1e-05$ y $b = -11.43 \pm 0.02$, $\tau = 0.8$ con $m = 0.00666 \pm 1e-05$ y $b = -11.39 \pm 0.03$, $\tau = 1.0$ con $m = 0.00665 \pm 6e-05$ y $b = -11.4 \pm 0.1$ y $\tau = 1.2$ con $m = 0.00654 \pm 3e-05$ y $b = -11.21 \pm 0.04$. El refinamiento de malla es de $l_x = 100$ y $l_y = 50$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. El número de Prandtl es $Pr = 0.71$ y $\rho = 1.0$.

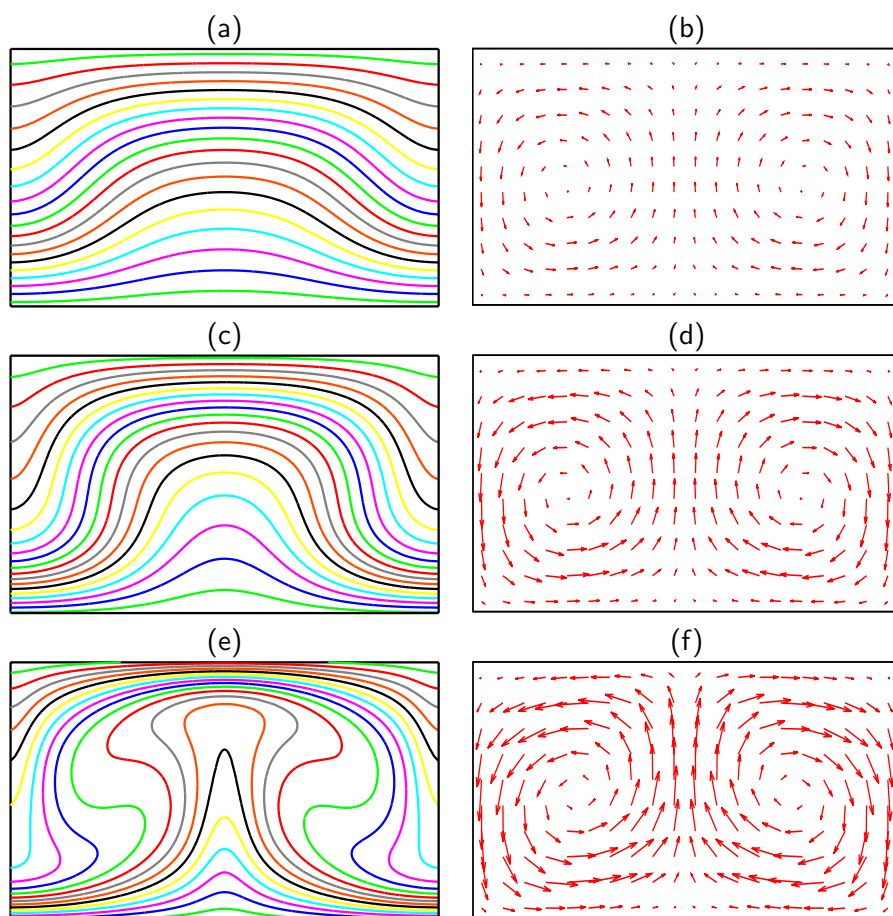


Figura 3.9: El campo de temperaturas y velocidades con el número Rayleigh de $Ra = 18,000$. El campo de temperaturas está representado por 20 isothermas igualmente espaciadas entre 0 y 1. En (a) y (b) $t^* = 0.04267$, en (c) y (d) $t^* = 0.133$ y en (e) y (f) $t^* = 0.133$ que representa al estado estacionario. El refinamiento de malla es de $l_x = 100$ y $l_y = 50$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. El número de Prandtl es $Pr = 0.71$, $Ra = 18,000$ y $\tau = 0.7$.

3.6. Conclusiones

En este capítulo presentamos el método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes (MEBR) para flujos isotérmicos y con transporte de calor en el caso de la convección natural. En el primer caso, usamos el método en el problema de la formación de ondas de choque por diferencia de densidad. Los resultados numéricos están de acuerdo con las relaciones de Rankine-Hugoniot.

Para la convección natural, validamos al MEBR al comparar los resultados con el valor registrado de $Ra_c = 1707.762$.

Capítulo 4

Conducción de calor con el método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes

4.1. Introducción

En este capítulo usamos el método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes (MEBR) para simular el transporte de calor en sólidos. La motivación de este capítulo es por que en un bloque se presenta transporte de calor tanto en un medio sólido como en un fluido.

En la Sec. 4.2 estudiamos el transporte de calor en un sólido bidimensional cuyos extremos se mantienen a diferentes temperaturas. Los resultados numéricos comparan favorablemente con los que se obtienen con el método de elemento finito (MEF).

En la Sec. 4.3 presentamos el procedimiento que seguimos para encontrar la relación entre la conductividad térmica k y el tiempo de relajamiento τ_T . Esta relación nos permite utilizar un nuevo esquema para implementar en el MEBR la condición a la frontera de continuidad en el flujo de calor. En esta sección utilizamos la condición a la frontera para una interfase entre dos sólidos, sin embargo también es válida para una interfase entre un sólido y un fluido.

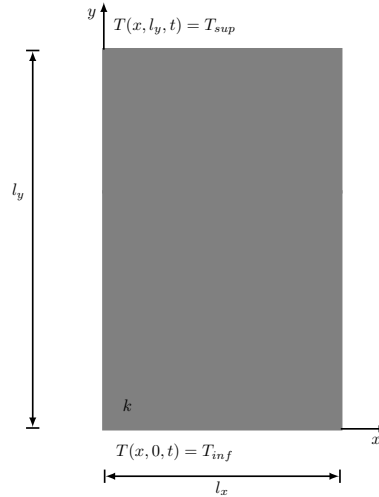


Figura 4.1: Esquema del bloque de material sólido. La pared inferior está en contacto con un baño térmico a la temperatura T_{inf} y la pared superior con un baño térmico a la temperatura T_{sup} . El ancho del bloque es l_x y la altura es l_y .

En la Sec. 4.3 validamos la condición a la frontera que proponemos con el problema de transporte de calor en un sólido compuesto por dos materiales con diferente conductividad térmica. El capítulo termina con algunas conclusiones.

4.2. Conducción de calor en un sólido

En esta sección mostramos como usar el MEBR para el flujo de energía en un sólido. Comparamos nuestros resultados con los obtenidos con el método de elemento finito (MEF).

Consideramos un sólido bidimensional como mostramos en la Fig. 4.1. Los extremos inferior y superior se mantienen en contacto con baños térmicos a las temperaturas T_{inf} y T_{sup} respectivamente con $T_{inf} > T_{sup}$. Inicialmente el sólido se encuentra a la temperatura T_{sup} .

Para resolver el problema mediante el MEBR se debe tener claro que no es necesario que incorporemos a las funciones de distribución de partículas, dado que es un sólido. Únicamente tomamos a las funciones de distribución $T_k(\mathbf{r}, t)$, como se vio en la Sección 3.4.

El punto de partida es la ecuación de transporte de energía o la temperatura, Ec. (3.43), con

$$T_k^{(eq)}(\mathbf{r}, t) = \omega_k T \quad (4.1)$$

ya que $\mathbf{u} = 0$. El valor de T está dado por la Ec. (3.41).

En las paredes horizontales utilizamos las condiciones a la frontera de temperatura constante, Apéndice A.3, y en las paredes verticales condiciones periódicas a la frontera, Apéndice A.1. Dada la simetría del problema la temperatura no depende del eje x y los resultados que presentamos los evaluamos en $x = l_x/2$.

La ecuación de calor es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (4.2)$$

con α la difusividad térmica dada por

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (4.3)$$

y k la conductividad térmica, ρ la densidad y c_p el calor específico a presión constante. Dado que la temperatura no depende de la posición horizontal, en el estado estacionario

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (4.4)$$

Con las condiciones a la frontera de la Fig. 4.1, la temperatura en el estado estacionario está dada por

$$T(y) = \frac{T_{sup} - T_{inf}}{l_y} y + T_{inf}. \quad (4.5)$$

En el MEF la ecuación de calor, Ec. (4.2) toma la forma [32]

$$T(x, y, t + \Delta t) - T(x, y, t) = Fo \{ [T(x - \Delta x, y, t) - 2T(x, y, t) + T(x + \Delta x, y, t)] + [T(x, y + \Delta y, t) - 2T(x, y, t) + T(x, y - \Delta y, t)] \}. \quad (4.6)$$

con Fo el número de Fourier dado por

$$Fo = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2}. \quad (4.7)$$

En dos dimensiones, el método es estable si $Fo < 1/4$ [32]. En la Fig. 4.2 vemos que hay un acuerdo numérico entre los dos métodos. Presentamos los resultados usando cantidades adimensionales, que denotamos con el superíndice *, definidos por

$$y^* = \frac{y}{l_y}, \quad t^* = t \frac{\alpha}{l_y^2}, \quad T^* = \frac{T - T_{sup}}{T_{inf} - T_{sup}}, \quad (4.8)$$

con l_y la longitud característica, Fig. 4.1.

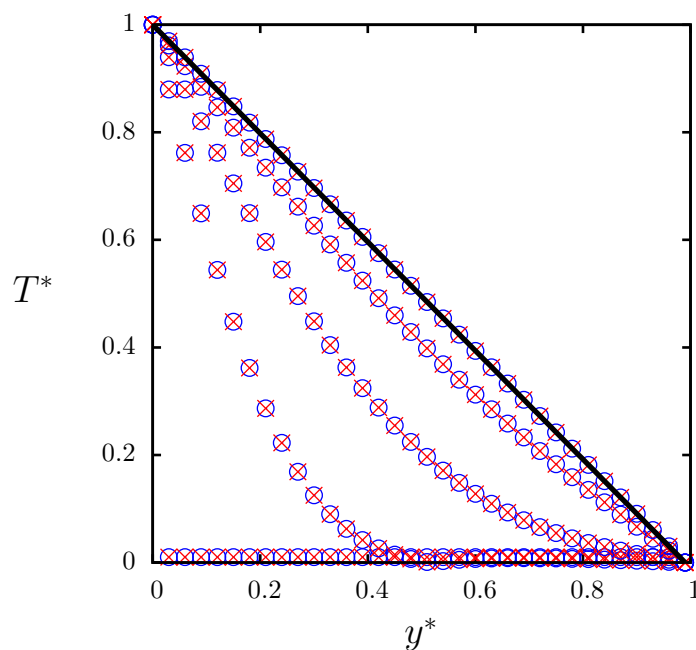


Figura 4.2: La temperatura T^* como función de la altura y^* a distintos tiempos para el MEF, "○", y para el MEBR, "×". De abajo hacia arriba $t^* = 0$, $t^* = 0.02$, $t^* = 0.08$, $t^* = 0.2$ y $t^* = 0.7$. La línea continua es la Ec. (4.5). El refinamiento de malla es $l_x = 50$ y $l_y = 100$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. También $\Delta t = 1$, $\Delta y = 1$ y $\alpha = 0.1$.

4.3. Conductividad y difusividad térmica

La Ec. (4.3) establece la relación entre la conductividad térmica k y la difusividad térmica α a través de la densidad ρ y el calor específico c_p . En el MEBR α está dada por la Ec. (3.44) que es el único parámetro libre del método en el transporte de calor en un sólido. El objetivo de esta sección es usar el MEBR para encontrar la relación entre k y τ_T , o el valor de ρc_p .

De acuerdo a la ley de Fourier para la conducción de calor,

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (4.9)$$

con \mathbf{q} el flujo de calor por unidad de área. En el MEBR se puede definir el flujo de calor \mathbf{q} como [16]

$$\mathbf{q} = \sum_k (\mathbf{c}_k - \mathbf{u}) T_k(\mathbf{r}, t). \quad (4.10)$$

En un sólido $\mathbf{u} = 0$, por lo que

$$\mathbf{q} = \sum_k \mathbf{c}_k T_k(\mathbf{r}, t). \quad (4.11)$$

Usando el MEBR encontramos \mathbf{q} y ∇T por lo que podemos conocer la conductividad térmica k como función ya sea del tiempo de relajamiento τ_T o de la difusividad térmica α . En el estado estacionario \mathbf{q} no depende de la posición ya que $\nabla T = \Delta T/l_y$ y por la simetría del problema está en la dirección vertical. En la Fig. 4.3 mostramos el flujo de calor en la dirección y , q_y como función del tiempo para diferentes valores de ΔT . En todos los casos se alcanza un valor estacionario que presentamos en la Fig. 4.4 para diferentes valores del tiempo de relajamiento τ_T . Para cada valor de τ_T hay una relación lineal entre q_y y $-\Delta T/l_y$, por lo que la pendiente es la conductividad térmica. Es decir

$$q_y = -k \frac{\Delta T}{l_y} \quad (4.12)$$

que es la ley de Fourier para conducción de calor con k una función de τ_T que corresponde con la pendiente de las rectas de la Fig. 4.4. En la Fig. 4.5 mostramos que k depende linealmente de τ_T de acuerdo a

$$k(\tau_T) = \frac{\tau_T}{3}. \quad (4.13)$$

Este resultado es fundamental para poder simular flujos con transporte de calor conjugado.

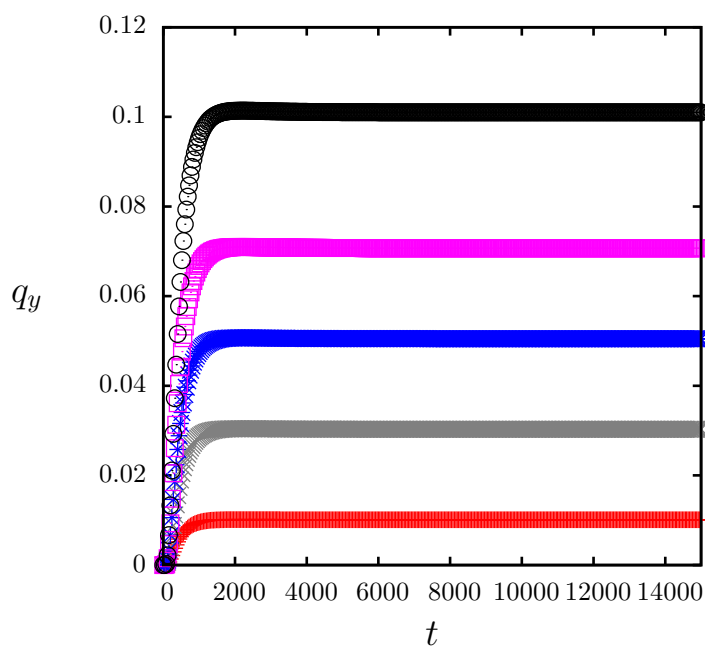


Figura 4.3: Flujo de calor en la dirección vertical q_y como función del tiempo t para diferentes gradientes de temperatura ΔT . El refinamiento de malla es de $l_x = 50$ y $l_y = 100$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. En todas las simulaciones $\tau_T = 3.0$, $T_{sup} = 0.1$ y de abajo hacia arriba $T_{inf} = 1.0, 3.0, 5.0, 7.0$ y 10.0 .

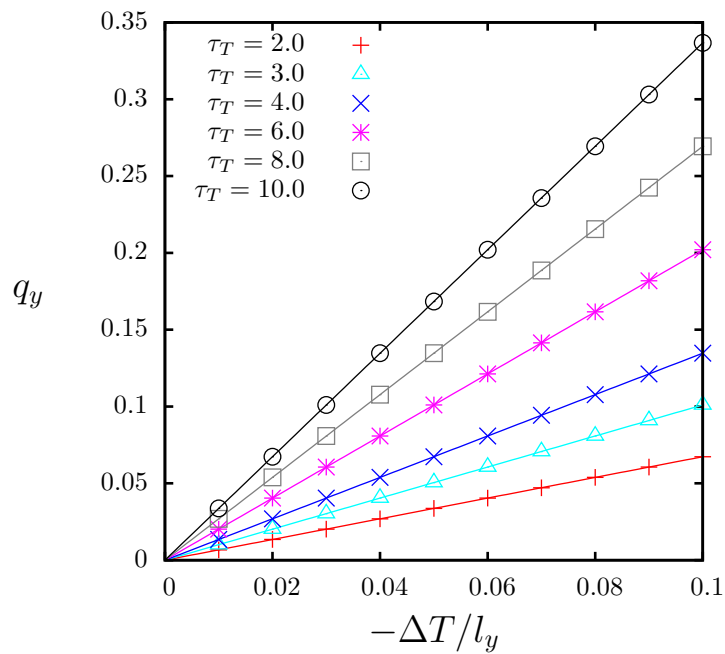


Figura 4.4: Flujo de calor en la dirección vertical y en estado estacionario como función de $-\Delta T/l_y$ para diferentes tiempos de relajamiento τ_T . El flujo de calor es el tomado de la Fig. 4.3 independiente del tiempo. El refinamiento de malla es de $l_x = 50$ y $l_y = 100$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla.

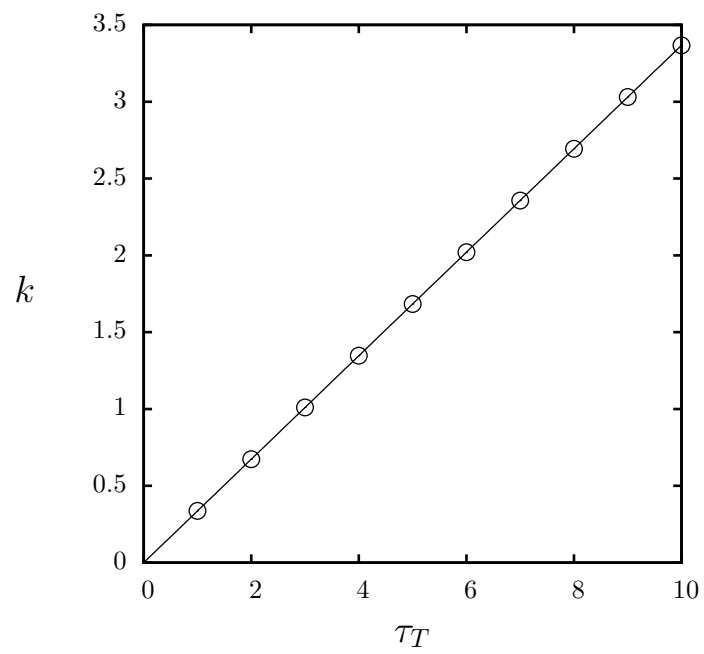


Figura 4.5: Relación entre la conductividad térmica y el tiempo de relajamiento. Los resultados pueden ajustarse a $k(\tau_T) = m\tau_T + b$ con $m = 0.336699 \pm 1e - 07$ y $b = 5.2e - 06 \pm 3e - 06$.

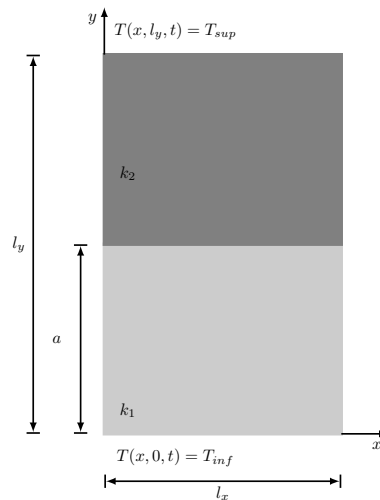


Figura 4.6: Esquema de un bloque compuesto de dos materiales sólidos con diferentes conductividad térmica. El ancho del bloque es l_x y su altura l_y . La altura del material inferior es a y la del material superior es $l_y - a$. La pared horizontal inferior está en contacto con un baño térmico a la temperatura T_{inf} y la pared superior con un baño térmico a la temperatura T_{sup} .

4.4. Conducción de calor en dos sólidos

Una vez que hemos encontrado la relación que hay entre la conductividad térmica y el tiempo de relajamiento podemos estudiar el transporte de calor en una barra compuesta de dos materiales sólidos con diferente conductividad térmica.

Consideremos una barra hecha de dos materiales sólidos que tiene una longitud l_x en el eje horizontal y una altura l_y . El material sólido con conductividad térmica k_1 tiene una altura a y el segundo con conductividad térmica k_2 tiene una altura $l_y - a$, como mostramos en la Fig. 4.6. Las paredes horizontales están en contacto con baños térmicos a T_{inf} y T_{sup} con $T_{inf} > T_{sup}$ en la pared inferior y superior respectivamente. Estas condiciones a la frontera las implementamos en el MEBR con la condición de temperatura constante, Apéndice A.3. En las paredes verticales usamos condición periódica a la frontera, Apéndice A.1. La condición en la interfase entre los dos materiales sólidos, en $y = a$ como mostramos en la Fig. 4.6, debe satisfacer la condición de continuidad del flujo

de calor que se expresa como

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=a^{(-)}} = -k_2 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=a^{(+)}} . \quad (4.14)$$

La derivada en el término del lado izquierdo de la ecuación anterior es evaluada en a por la izquierda y la del término del lado derecho es evaluada en a por la derecha.

Para satisfacer la condición de continuidad en el flujo de calor en la región de la interfase entre los dos materiales sólidos, obtenemos la conductividad térmica con la Ec. (4.13) y la evaluamos en la Ec. (4.14). La forma en la que implementamos esta condición a la frontera en el MEBR se explica en el Apéndice A.4. La solución analítica del problema en estado estacionario está dada por

$$T(y) = \begin{cases} \frac{T_a - T_{inf}}{a} y + T_{inf} & 0 \leq y \leq a \\ \frac{T_{sup} - T_a}{l_y - a} (y - l_y) + T_{sup} & a < y \leq l_y. \end{cases} \quad (4.15)$$

con T_a la temperatura en la interfase entre los dos sólidos. Para encontrar T_a usamos la Ec. (4.14) que establece la continuidad del flujo de calor. De la Ec. (4.15)

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=a^{(+)}} = \frac{T_a - T_{inf}}{a}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=a^{(-)}} = \frac{T_{sup} - T_a}{l_y - a}. \quad (4.16)$$

Encontramos que

$$T_a = \frac{k_1 T_{inf}/a + k_2 T_{sup}/(l_y - a)}{k_1/a + k_2/(l_y - a)}. \quad (4.17)$$

En las Figs. 4.7 y 4.8 presentamos los resultados que obtuvimos de las simulaciones numéricas. Para todos los casos se está suponiendo que la altura de los dos materiales es igual, a excepción de la Fig. 4.7 (a). Como se puede observar en las Figs. 4.7 y 4.8, la evolución temporal de la temperatura bajo cualquiera de las simulaciones numéricas convergen a la solución en el estado estacionario de la ecuación de calor, Ec. (4.15). Comparamos los resultados numéricos en estado estacionario con el valor T_a dado por la Ec. (4.17) y obtuvimos un error de 0.006 %.

En la Fig. 4.7 (b) las dos conductividades térmicas son iguales, por lo que el perfil de temperaturas en estado estacionario es una línea recta, de la misma

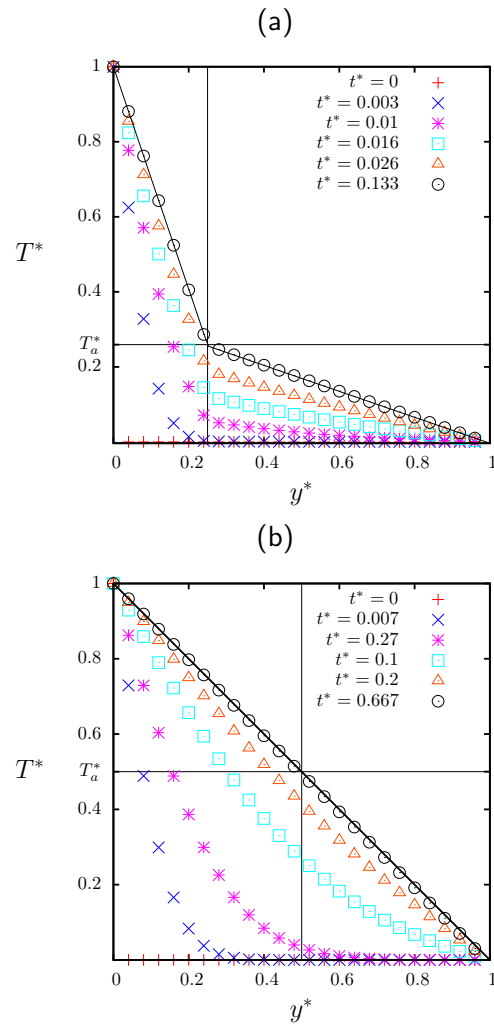


Figura 4.7: La temperatura T^* como función de la altura y^* a diferentes tiempos. El refinamiento de malla es $l_x = 50$ y $l_y = 100$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. La temperatura $T_{inf} = 7$ y $T_{sup} = 3$. (a) $a^* = 0.25$, $k_1 = 0.233$ y $k_2 = 2.0$. En (b) $a^* = 0.5$, $k_1 = k_2 = 2.0$.

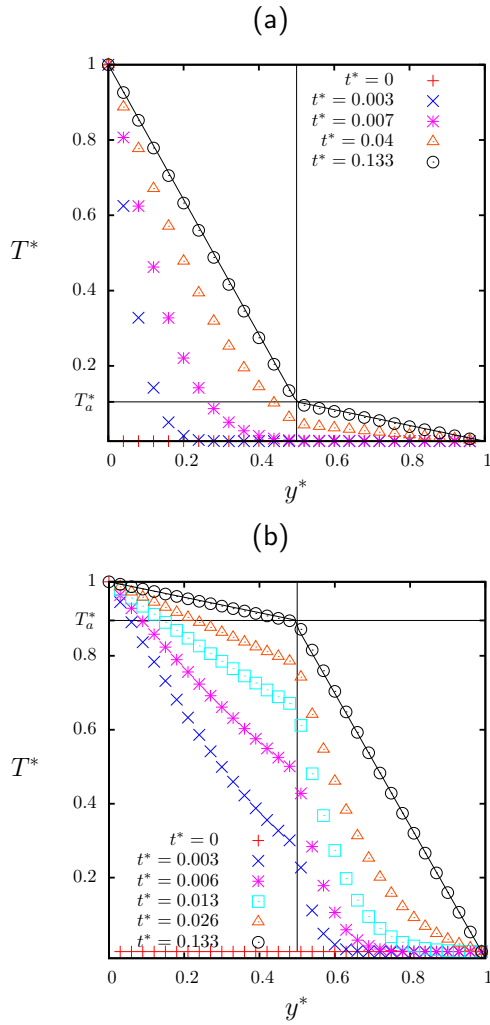


Figura 4.8: La temperatura T^* como función de la altura y^* a diferentes tiempos para un sólido compuesto de dos materiales con distintas conductividades térmicas k_1 y k_2 . El refinamiento de malla es $l_x = 50$ y $l_y = 100$ con l_x y l_y el ancho y la altura de la malla respectivamente. La temperatura $T_{inf} = 7$ y $T_{sup} = 3$. (a) $a^* = 0.5$, $k_1 = 0.233$ y $k_2 = 2.0$. (b) $a^* = 0.5$, $k_1 = 2.0$ y $k_2 = 0.233$.

forma que la Fig. 4.2. En la Fig. 4.8 (a) consideramos que el sólido inferior tiene una conductividad térmica k_1 de un orden de magnitud menor al que se encuentra en la sección de arriba k_2 . Esta diferencia se refleja en la pendiente mayor que se forma en el perfil de temperaturas del sólido inferior en comparación con la del sólido superior. En el caso de la Fig. 4.8 (b), el valor de k se intercambia en las secciones, $k_1 > k_2$, y por lo tanto el sólido superior tiene un perfil de temperaturas con una pendiente mayor.

4.5. Conclusiones

En este capítulo presentamos el problema de transporte de calor en un sólido y en un sólido compuesto de dos materiales de diferente conductividad térmica. Para el primer caso comparamos los resultados del MEBR con el MEF y encontramos un acorde numérico.

Para llegar a la condición que satisface la continuidad del flujo de calor, encontramos la relación que hay entre la conductividad k térmica y el tiempo de relajamiento τ_T . Con esta relación proponemos un nuevo esquema para implementar en el MEBR la condición de continuidad del flujo de calor en una interfase entre dos medios, dicho esquema lo mostramos en el Apéndice A.4

El problema de transporte de calor en un sólido compuesto de dos materiales lo hemos utilizado para validar la condición a la frontera de continuidad en el flujo de calor. Los resultados convergen con la solución de la ecuación de calor en estado estacionario.

Capítulo 5

Transferencia de calor conjugada

5.1. Introducción

En este capítulo usamos el método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes (MEBR) para simular el transporte de calor conjugado en un modelo de un bloque de construcción con sistema de vigueta y bovedilla.

El estudio de la transferencia de calor en un bloque usado en la construcción de vivienda ha atraído la atención en fechas recientes debido a la búsqueda de un confort térmico en las habitaciones y un ahorro de energía. Dichos estudios se han realizado en forma experimental y numérica para diferentes segmentos de la envoltura de la edificación, ya sea en el muro o en el techo [1, 2, 3, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40].

Para el estudio del transporte de calor conjugado en un modelo de un bloque, en la Sec. 5.2 estudiamos en primer lugar el transporte de calor en la cavidad, en donde sólo está el fluido, y en segundo lugar el transporte de calor evaluado en la superficie inferior y superior de las paredes horizontales externas del bloque. Para el transporte de calor en el fluido definimos el promedio espacial del número Rayleigh \overline{Ra} , el promedio espacial y temporal del número Rayleigh $\overline{\overline{Ra}}$ y el promedio temporal del número Nusselt \overline{Nu} . Con estos valores encontramos que el transporte de calor presenta cambios en valores críticos de $\overline{\overline{Ra}}$. El valor crítico en el cual se presenta la transferencia de calor por convección lo hemos

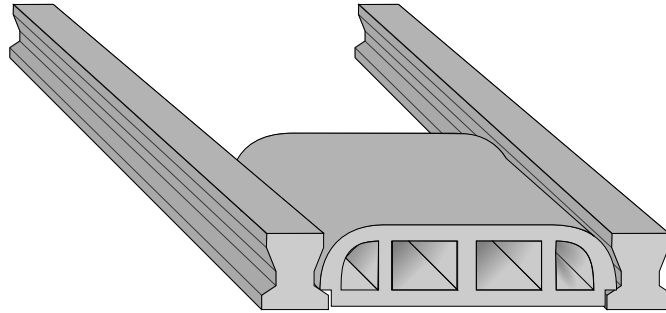


Figura 5.1: Sistema constructivo de vigueta y bovedilla. La bovedilla es el bloque que descansa sobre dos viguetas paralelas.

denotado Ra_1 . Para el transporte de calor en el sólido, comparamos el flujo de calor promedio \bar{q} evaluado en las paredes superficiales horizontales externas del bloque. Encontramos que hay una diferencia entre estas dos cantidades cuando el gradiente de temperaturas ΔT es mayor que ΔT_1 con ΔT_1 el valor del gradiente de temperaturas que corresponde con Ra_1 . Al evaluar al flujo de calor promedio en la pared horizontal inferior externa del bloque \bar{q}_{inf} encontramos que sigue un comportamiento lineal para $\Delta T < \Delta T_1$ y sigue una ley de potencia para $\Delta T > \Delta T_1$.

En la Sec. 5.3 mostramos el flujo de calor que se presenta en un día promedio para un techo con diferentes absortancias. El capítulo termina con algunas conclusiones.

5.2. Transferencia de calor conjugada

En la Fig. 5.1 mostramos el esquema bajo el cual se construye un techo de vigueta y bovedilla. La construcción consiste en apoyar las viguetas sobre los muros y sobre éstas se soportan las bovedillas, posteriormente se coloca encima una malla soldada y finalmente se cuela cemento. Consideramos un techo horizontal.

Como una primera aproximación al estudio del transporte de calor conjugado en una bovedilla consideramos solo una celda de la misma, como mostramos en la Fig. 5.2. Las paredes de la cavidad tienen un espesor l_s y una conductividad térmica k_s , el fluido ocupa la cavidad interior de lados l_f y tiene una conductividad térmica k_f . El material del bloque es hormigón y el fluido que se encuentra en la cavidad es aire. La pared inferior del bloque está a la temperatura T_{inf} y la pared superior a la temperatura T_{sup} . Estas temperaturas varían durante el

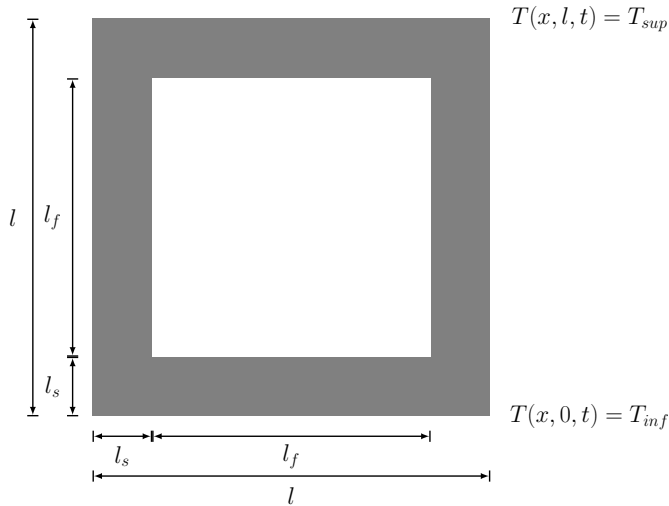


Figura 5.2: Sección transversal de una de las cavidades de la bovedilla. Las dimensiones del bloque son l el largo y ancho del bloque, l_s el espesor del material de hormigón y l_f el largo y ancho de la cavidad del bloque.

día.

Los parámetros adimensionales, que denotamos con un superíndice *, del problema son

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{l}, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} \frac{l_f}{\alpha}, \quad t^* = t \frac{\alpha}{l^2}, \quad T^* = \frac{T - T_{sup}}{T_{inf} - T_{sup}} \quad (5.1)$$

con α dada por la Ec. (3.44).

En la simulación numérica que realizamos a través del MEBR para el transporte de calor conjugado de la cavidad bidimensional de la Fig. 5.2, utilizamos las condiciones a la frontera del Apéndice A. En las paredes inferior y superior a las temperaturas T_{inf} y T_{sup} respectivamente, usamos las condiciones de frontera de temperatura constante, Apéndice A.3. Dado que podemos pensar que hay varias celdas de la bovedilla contiguas entre sí, en las paredes verticales exteriores de la celda consideramos condiciones periódicas a la frontera, Apéndice A.1. En la interfase sólido-fluido, usamos en el sólido la condición a la frontera de continuidad en el flujo de calor, Apéndice A.4. Para el fluido usamos la condición a la frontera de rebote a la mitad del camino para la función de distribución de partículas, Apéndice A.2, y condición de continuidad en el flujo de calor en la función de distribución de la temperatura, Apéndice A.4.

Para la condición inicial, consideramos el bloque dividido en tres secciones

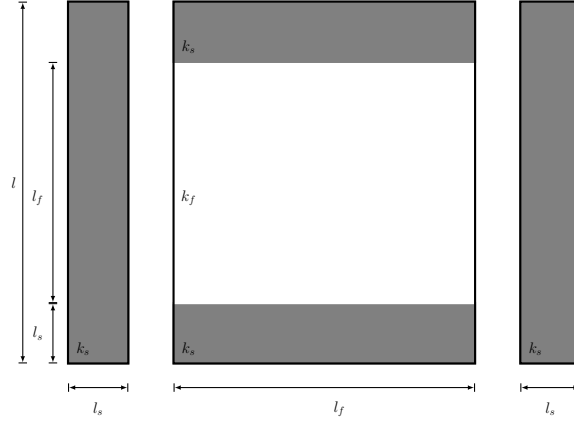


Figura 5.3: Bloque de la Fig. 5.2 dividido en tres secciones.

como mostramos en la Fig. 5.3. Para las secciones de la derecha y la izquierda, la condición inicial es la solución de la ecuación de calor en estado estacionario, es decir, la temperatura varía linealmente entre T_{inf} y T_{sup} en la dirección vertical.

En la sección central de la Fig. 5.3 la condición inicial es también el estado estacionario de la ecuación de calor. Suponiendo que la temperatura es solo función de y , las condiciones a la frontera en la sección central son

$$T(0) = T_{inf} \quad T(l) = T_{sup} \quad (5.2)$$

$$-k_s \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=l_s^{(-)}} = -k_f \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=l_s^{(+)}} \quad (5.3)$$

$$-k_f \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=(l_s+l_f)^{-}} = -k_s \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=(l_s+l_f)^{+}} \quad (5.4)$$

La solución de la ecuación de calor en estado estacionario es

$$T(y) = \begin{cases} \frac{T_{sup} - T_{inf}}{2l_s + (k_s/k_f)l_f} y + T_{inf} & 0 \leq y \leq l_s \\ \frac{T_{sup} - T_{inf}}{2l_s + (k_s/k_f)l_f} \left[\frac{k_s}{k_f} (y - l_s) + l_s \right] + T_{inf} & l_s < y \leq (l_s + l_f) \\ \frac{T_{sup} - T_{inf}}{2l_s + (k_s/k_f)l_f} (y - l) + T_{sup} & (l_s + l_f) < y \leq l. \end{cases} \quad (5.5)$$

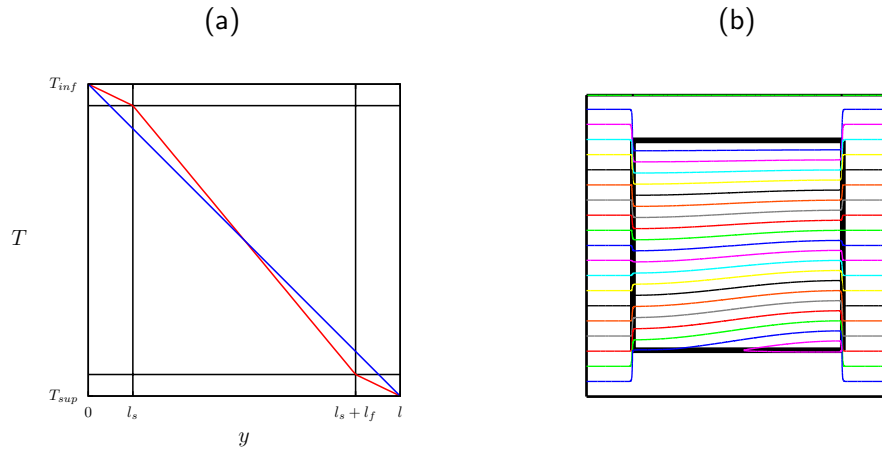


Figura 5.4: (a) La temperatura inicial T como función de la altura y . La línea recta corresponde al perfil de temperaturas en las secciones laterales de la cavidad, Fig. 5.3 y la línea quebrada al perfil de temperatura en la sección central. (b) Isotermas en la condición inicial.

En la Fig. 5.4 (a) mostramos la temperatura inicial en las tres secciones. Para que las simulaciones sean un poco más rápidas, incorporamos una perturbación a la temperatura constante inicial como mostramos en la Fig. 5.4 (b).

Para la función de distribución de las partículas en el fluido de la sección central, escogemos un estado de equilibrio a densidad constante.

Con el objetivo de que nuestras simulaciones numéricas nos describan el fenómeno físico que queremos estudiar, debemos relacionar a las propiedades térmicas y cinemáticas del aire con los tiempos de relajamiento de las funciones de distribución del fluido en el MEBR, τ y τ_T respectivamente. A su vez, las propiedades térmicas del hormigón las tenemos que relacionar con el tiempo de relajamiento correspondiente a la función de distribución de temperatura en el material sólido, $\tau_T^{(s)}$. Para el aire $Pr = 0.71$ y de la validación para la convección, Sec. 3.5, encontramos $\tau = 0.7$ y $\rho = 1.0$. De estos valores y la Ec. (4.13), que relaciona a τ_T con k , la conductividad térmica del aire es $k_f = 0.2605$. Dado que la conductividad térmica del hormigón es 53 veces la del aire, $k_s = 13.8098$ [41]. De aquí $\tau_T^{(s)} = 41.429$

Definimos T_0 y T_1 como las temperaturas en las interfases horizontales sólido-fluido inferior y superior respectivamente. En la Fig. 5.5 mostramos a T_0^* y T_1^* como función de x^* con $l_s < x < l_f$ a diferentes tiempos. En $t^* = 0$ mostramos el estado inicial y en $t^* = 0.4595$ el perfil de temperaturas en estado

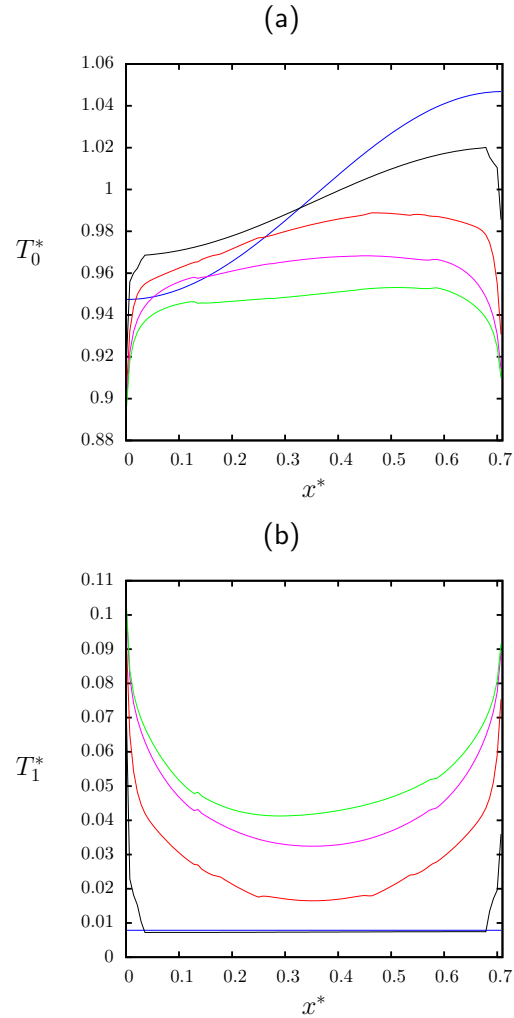


Figura 5.5: (a) Perfil de la temperatura en la pared inferior de la interfase sólido-fluido T_0^* a lo largo de x^* con $l_s < x < l_s + l_f$ para diferentes tiempos. De arriba hacia abajo $t^* = 0$, $t^* = 2.34 \times 10^{-5}$, $t^* = 3.05 \times 10^{-4}$, $t^* = 0.00234$ y $t^* = 0.45948$, (b) Perfil de la temperatura en la pared superior de la interfase sólido-fluido T_1^* a lo largo de x^* para los tiempos de abajo hacia arriba $t^* = 0$, $t^* = 2.34 \times 10^{-5}$, $t^* = 3.05 \times 10^{-4}$, $t^* = 0.00234$ y $t^* = 0.45948$. En (a) y (b) $T(x, 0, t) = T_{inf} = 0.2$ y $T(x, l, t) = T_{sup} = 0.1$, el refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$ con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$

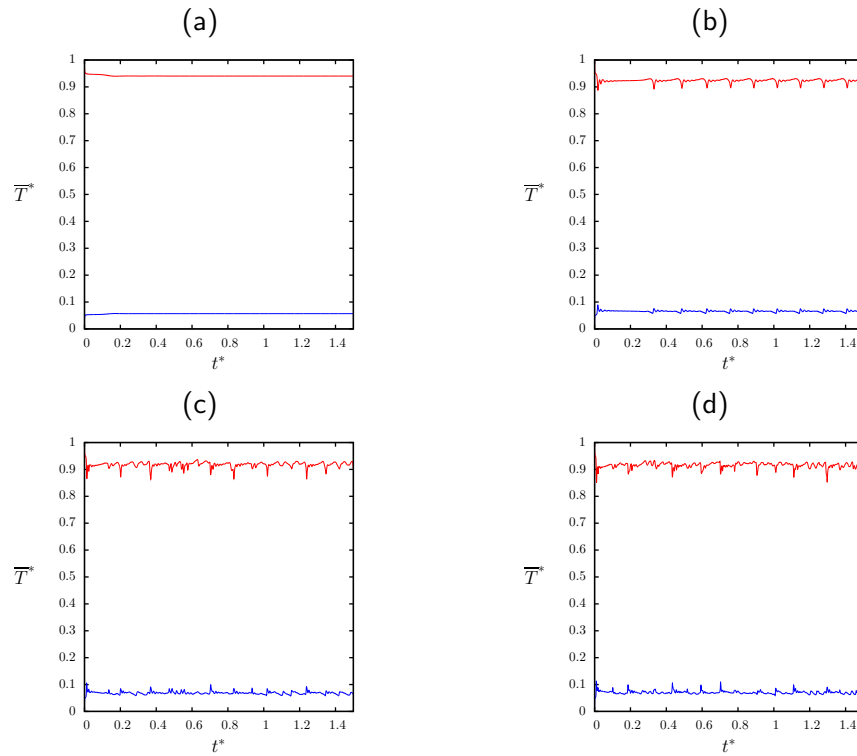


Figura 5.6: Temperaturas promedio en la interfase sólido-fluido, \bar{T}_0^* y \bar{T}_1^* , como función del tiempo t^* . La línea superior corresponde con la temperatura en la pared inferior de la interfase sólido-fluido \bar{T}_0^* y la línea inferior con la temperatura en la pared superior de la interfase sólido-fluido, \bar{T}_1^* . (a) $T_{inf} = 0.2$, (b) $T_{inf} = 2.2$, (c) $T_{inf} = 4.2$ y (d) $T_{inf} = 6.2$. En todos los casos $T_{sup} = 0.1$, el refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$ con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$

estacionario. En este caso particular en donde la donde $T_{inf} = 0.2$ y $T_{sup} = 0.1$ se llega a un estado estacionario en las temperaturas de la interfase pero no necesariamente es así para otros casos.

Para poder definir un número de Rayleigh que caracterice al fluido definimos los promedio espaciales $\overline{T_0}$ y $\overline{T_1}$ como

$$\overline{T_0} = \frac{1}{l_f} \int_{l_s}^{l_s+l_f} T(x, l_s, t) dx, \quad \overline{T_1} = \frac{1}{l_f} \int_{l_s}^{l_s+l_f} T(x, l_s + l_f, t) dx. \quad (5.6)$$

En la Fig. 5.6 presentamos la evolución temporal de $\overline{T_0}$ y $\overline{T_1}$ para diferentes valores de T_{inf} con T_{sup} constante. En la Fig. 5.6 (a) se llega a un valor de estado estacionario mientras que en las Figs. 5.6 (b), (c) y (d) $\overline{T_0}$ y $\overline{T_1}$ fluctúan en el tiempo.

Definimos el número de Rayleigh promedio \overline{Ra} como

$$\overline{Ra}(t) = \frac{g\beta(\overline{T_0}(t) - \overline{T_1}(t))l_f^3}{\nu\alpha}. \quad (5.7)$$

En la Fig. 5.7 presentamos la evolución temporal del número de Rayleigh promedio \overline{Ra} para diferentes valores de T_{inf} con T_{sup} constante. Como podemos ver \overline{Ra} llega a un valor de estado estacionario cuando $T_{inf} = 0.2$. Para los otros casos \overline{Ra} varía en el tiempo alrededor de un valor promedio que mostramos en la figura. Denotamos a ese valor promediado, primero en el espacio y luego en el tiempo como $\overline{\overline{Ra}}$ definido por

$$\overline{\overline{Ra}} = \frac{1}{t_{max} - t_0} \int_{t_0}^{t_{max}} \overline{Ra}(t) dt \quad (5.8)$$

con t_{max} el tiempo total de cómputo y t_0 es un transiente.

Una vez que hemos definido \overline{Ra} a través de la Ec. (5.8) calculamos el valor crítico para el cual se presenta el transporte de calor por convección natural en la cavidad del bloque. Para encontrar este valor crítico que hemos denotado como Ra_1 , procedemos como en la Sec. 3.5. Encontramos la velocidad vertical máxima v_{max}^* y vemos que la Ec. (3.47) ajusta bien con los resultados numéricos. En la Fig. 5.8 mostramos a la tasa de crecimiento de la velocidad vertical máxima ζ en función del \overline{Ra} y vemos que $Ra_1 = 4,759$.

En la Fig. 5.9 mostramos $\overline{\overline{Ra}}$ como función del $\Delta T = T_{inf} - T_{sup}$. Vemos que $\overline{\overline{Ra}} = m\Delta T + b$ con valores distintos de m y b para ΔT abajo de ΔT_1 y arriba de este valor, con $\overline{\overline{Ra}}(\Delta T_1) = Ra_1$ el valor crítico de \overline{Ra} en el cual se presenta la convección natural. De los valores Ra_2 y Ra_3 hablaremos más adelante.

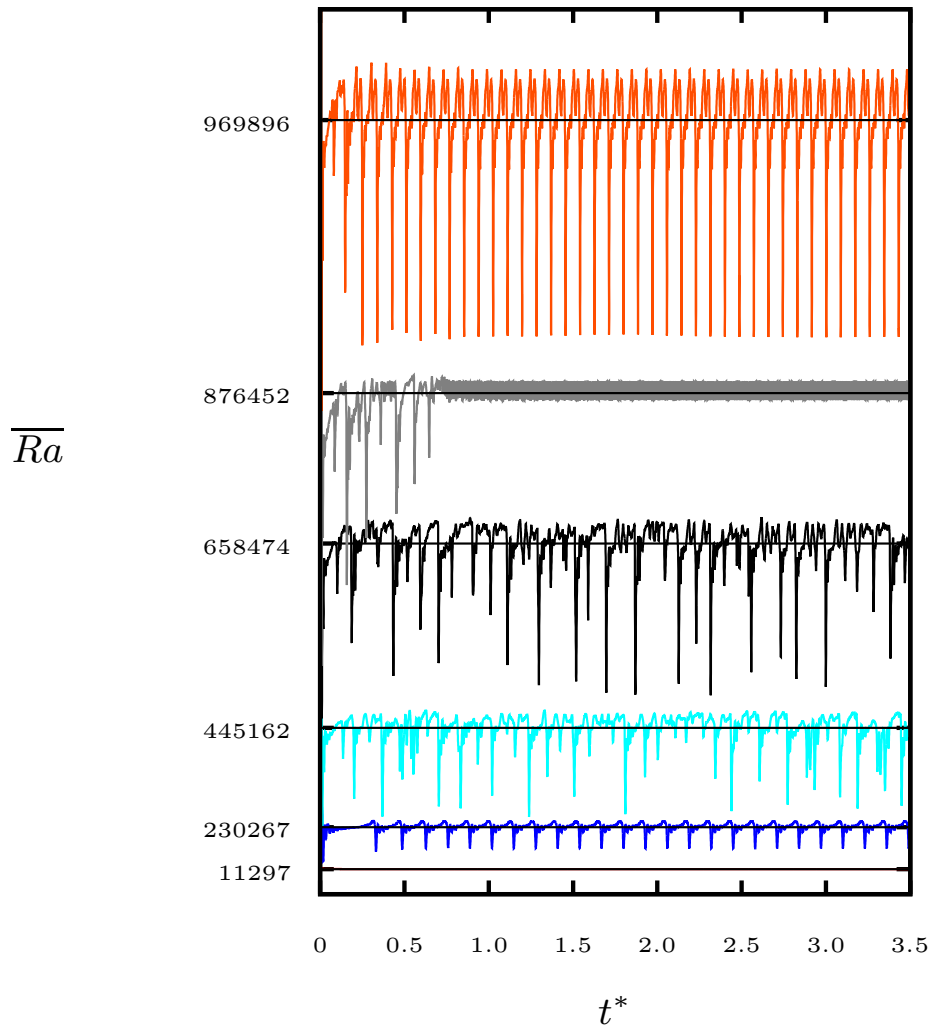


Figura 5.7: El número de Rayleigh promedio \overline{Ra} , Ec. (5.7), como función del tiempo t^* . De abajo hacia arriba la temperatura en la pared inferior horizontal externa $T(x, 0, t) = T_{inf}$ es $T_{inf} = 0.2$, $T_{inf} = 2.2$, $T_{inf} = 4.2$, $T_{inf} = 6.2$, $T_{inf} = 8.2$ y $T_{inf} = 9.2$. Los valores en el eje y que corresponden con las líneas horizontales son \overline{Ra} dado por la Ec. (5.8). El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$, con $T_{sup} = 0.1$, $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$

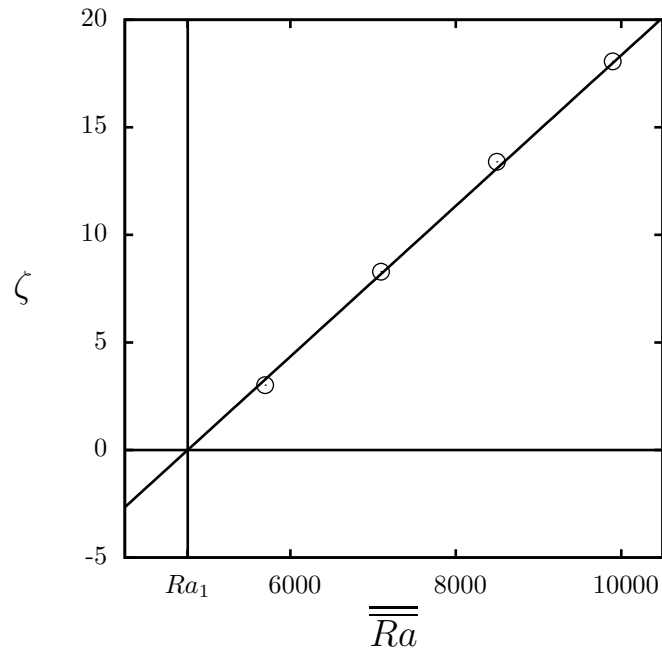


Figura 5.8: Tasa de crecimiento de la velocidad máxima sobre el eje y ζ en función del número de Rayleigh promediado en espacio y tiempo \overline{Ra} . Los resultados pueden ajustarse a la recta $\zeta = m\overline{Ra} + b$ con $m = 0.00350 \pm 6e - 05$ y $b = -16.7 \pm 0.6$. La tasa de crecimiento, al igual que la Sec. 3.5, se ajustó a la función $v_{y_{max}}^* = Ae^{\zeta t}$. La variable Ra_1 denota el número Rayleigh promedio crítico para el cual se presenta transferencia de calor por convección natural en nuestro sistema conjugado, $Ra_1 = 4,759$. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$ con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$.

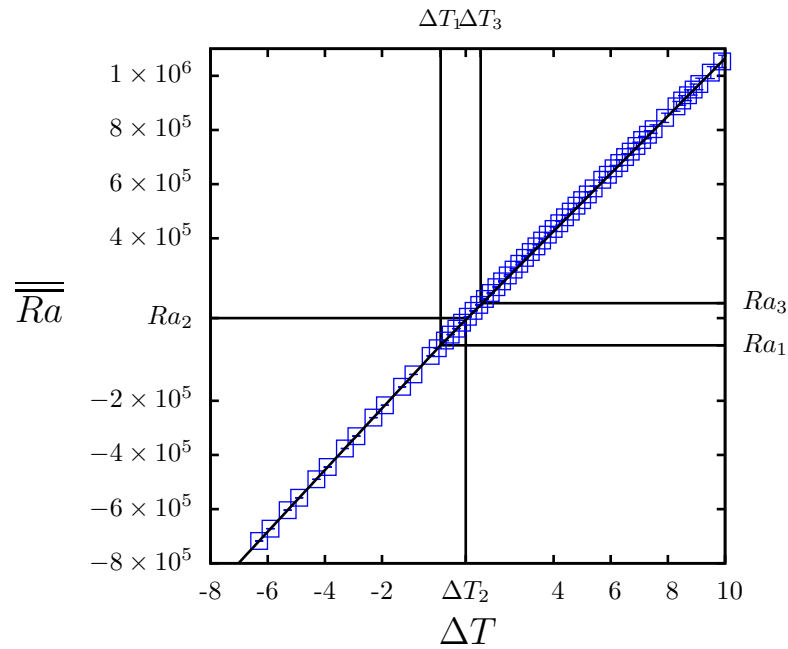


Figura 5.9: El número de Rayleigh promedio \overline{Ra} , Ec. (5.8), en función del gradiente de temperaturas con $\Delta T = T_{inf} - T_{sup}$, $Ra_1(\Delta T_1 = 0.042) = 4,759$, $Ra_2(\Delta T_2 = 0.93) = 105,470$ y $Ra_3(\Delta T_3 = 1.45) = 160,267$. Para $\Delta T < \Delta T_1$ los resultados se pueden ajustar a $\overline{Ra} = m\Delta T + b$ con $m = 113,908 \pm 8$ y $b = -107 \pm 29$ y para $\Delta T > \Delta T_1$ con $m = 106,466 \pm 125$ y $b = -6,261 \pm 590$. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$, con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$.

El flujo de calor \mathbf{q} se define como [42]

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}T - k\nabla T \quad (5.9)$$

con $k = k_s$ y $\mathbf{u} = 0$ en el sólido y $k = k_f$ en el fluido.

En la Figs. 5.10 y 5.12 mostramos las isotermas a varios tiempos y en las Figs. 5.11 y 5.13 los correspondientes flujos de calor \mathbf{q} en la cavidad bajo estudio con $T_{sup} = 0.1$ en los dos casos y $T_{inf} = 0.2$ en las Figs. 5.10 y 5.11 y $T_{inf} = 6.2$ en las Figs. 5.12 y 5.13. En Fig. 5.10 (a) mostramos el estado inicial y en las Figs. 5.10 (b), (c), (d) y (e) mostramos la formación de la celda convectiva. En la Fig. 5.10 (f) presentamos la celda convectiva en estado independiente del tiempo. En la Fig. 5.11 presentamos el campo del flujo de calor a los mismos tiempos de las isotermas de la Fig. 5.10.

En la Fig. 5.12 mostramos las isotermas de un fluido con $\overline{Ra} = 658,474$, $T_{inf} = 6.2$ y $T_{sup} = 0.1$ como mostramos en la Fig. 5.7. En la Fig. 5.12 (a) mostramos el estado inicial y en Fig. 5.12 (b) mostramos la formación de la celda convectiva que llega a definirse en la Fig. 5.12 (c). En la Fig. 5.12 (d) mostramos que la celda convectiva se comienza a deformar y llega a formar dos celdas convectivas, como podemos ver en las Figs. 5.12 (e) y (f). El fluido para este caso no llega a un estado estacionario. En la Fig. 5.13 mostramos el campo de flujo de calor a los mismos tiempos de las isotermas de la Fig. 5.12.

El número de Nusselt es una medida del transporte de calor por convección con respecto al transporte de calor por conducción [43]. En el sistema bajo estudio donde el gradiente de temperaturas ΔT está en la dirección vertical el número Nusselt Nu puede definirse como

$$Nu = 1 + \int \int v^*(x^*, y^*)T^*(x^*, y^*)dx^*dy^*. \quad (5.10)$$

Podemos definir el número Nusselt también como el flujo de calor (salvo por la conductividad térmica) a través de las paredes horizontales, al cual denotamos por Nu_γ . Está dado por

$$Nu_\gamma = - \int_\gamma \frac{\partial T^*}{\partial y^*} dx^*. \quad (5.11)$$

con $\gamma = 0, 1$. El caso $\gamma = 0$ corresponde a la interfase inferior sólido-fluido y el caso $\gamma = 1$ a la interfase superior. En estado estacionario los tres números de Nusselt, Nu , Nu_0 y Nu_1 son iguales.

En la Fig. 5.14 presentamos Nu , Nu_0 y Nu_1 . De esta figura vemos que Nu , Nu_0 y Nu_1 son similares.

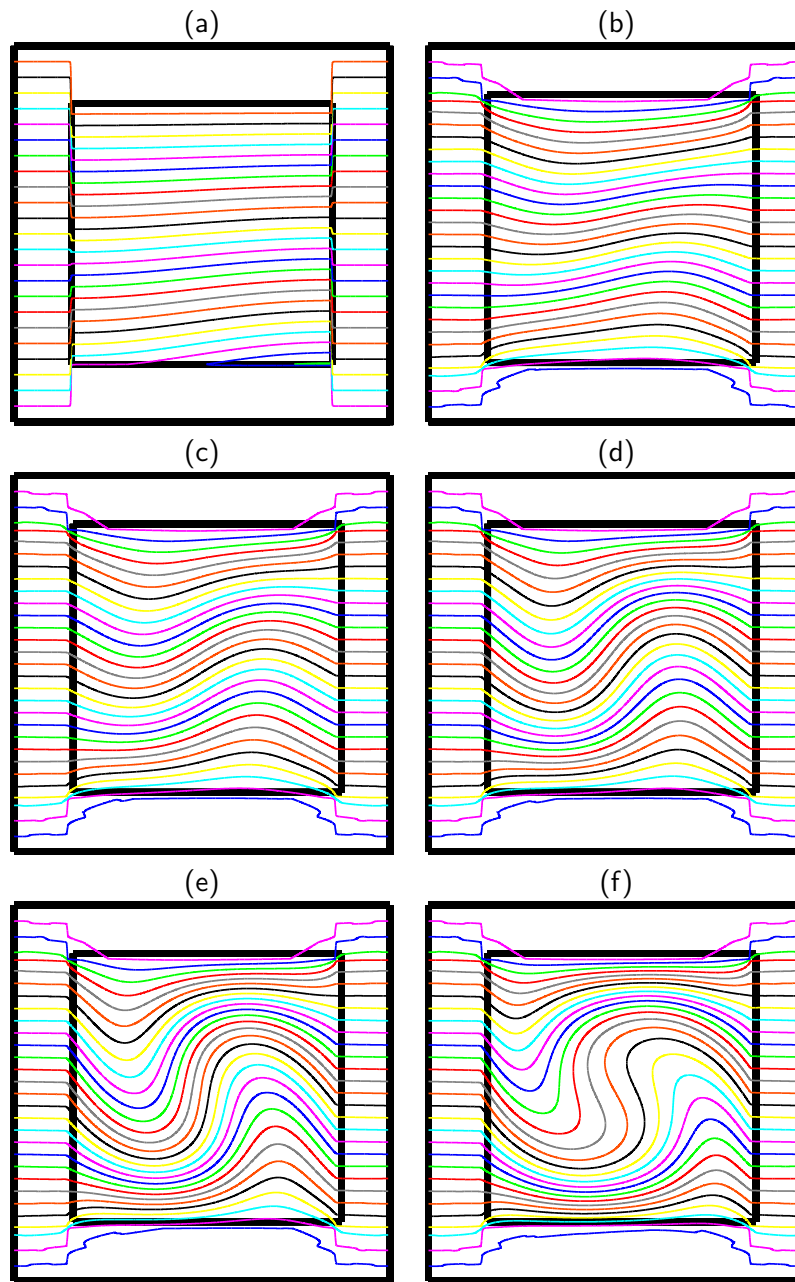


Figura 5.10: Campo de temperaturas representado por 28 isotermas igualmente espaciadas entre 0 y 1. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$, con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$. Las temperaturas en las fronteras son $T(x, 0, t) = T_{inf} = 0.2$ y $T(x, l, t) = T_{sup} = 0.1$. (a) $t^* = 0$, (b) $t^* = 0.0235$, (c) $t^* = 0.0469$, (d) $t^* = 0.0586$, (e) $t^* = 0.0704$ y (f) $t^* = 0.1878$.

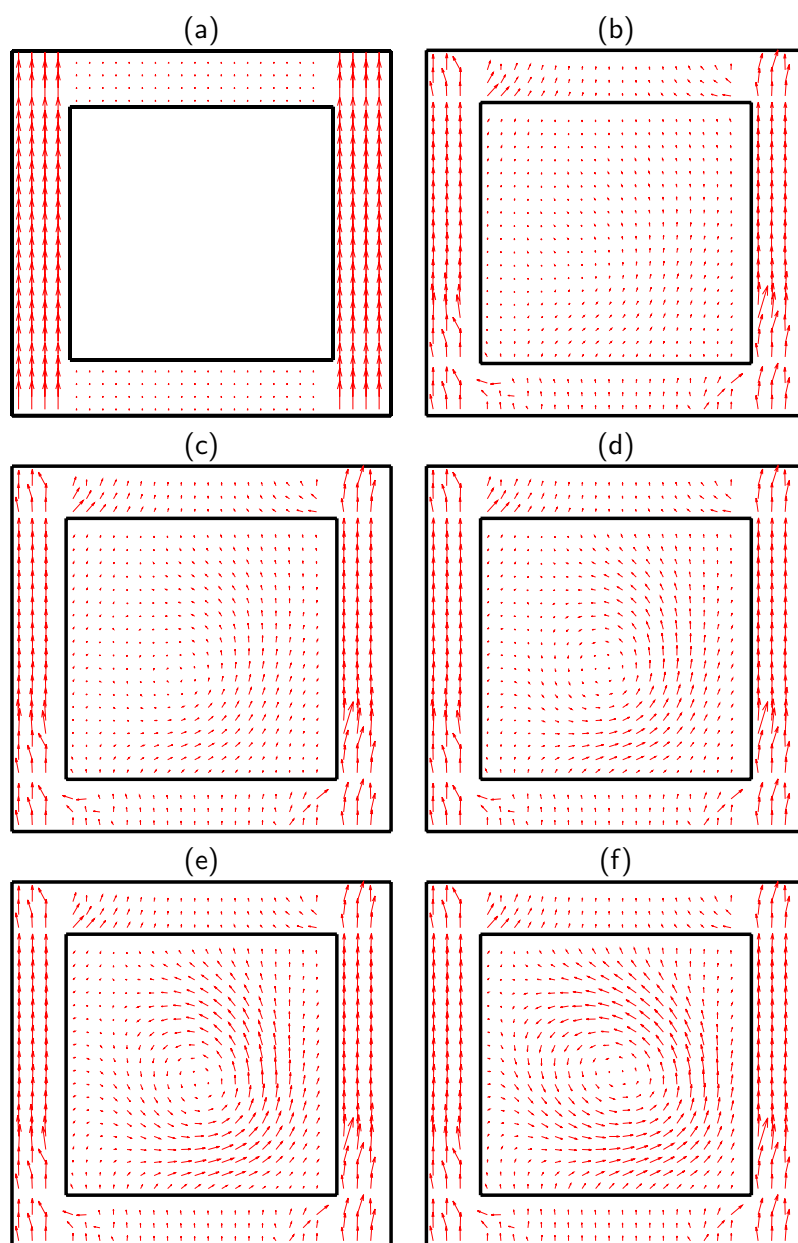


Figura 5.11: Campo de flujo de calor. Los vectores del fluido están escalados al doble de su tamaño. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$, con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$. Las temperaturas en las fronteras son $T(x, 0, t) = T_{inf} = 0.2$ y $T(x, l, t) = T_{sup} = 0.1$. En (a) $t^* = 0$, (b) $t^* = 4.69 \times 10^{-3}$, (c) $t^* = 0.028$, (d) $t^* = 0.094$, (e) $t^* = 0.108$ y (f) $t^* = 0.127$.

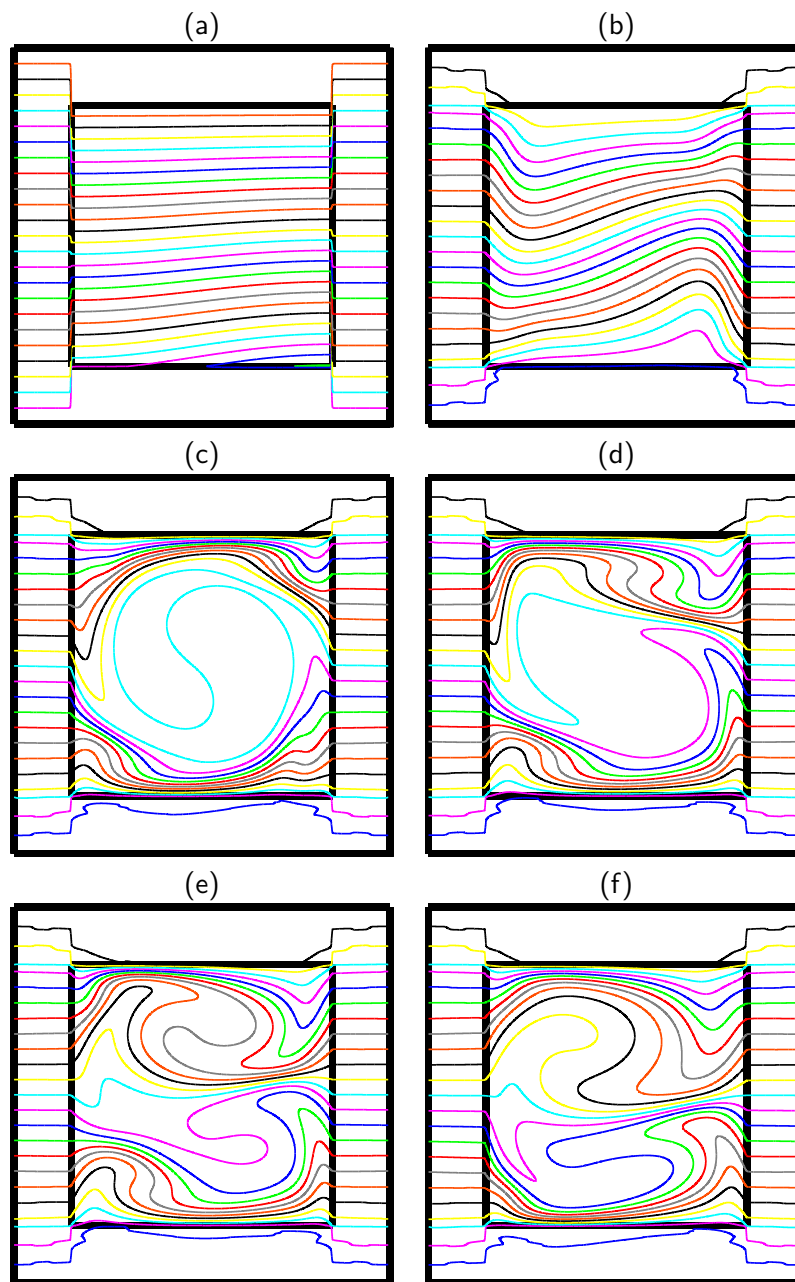


Figura 5.12: Campo de temperaturas representado por 28 isotermas igualmente espaciadas entre 0 y 1. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$, con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$. Las temperaturas en las fronteras son $T(x, 0, t) = T_{inf} = 6.2$ y $T(x, l, t) = T_{sup} = 0.1$. (a) $t^* = 0$, (b) $t^* = 0.0047$, (c) $t^* = 0.028$, (d) $t^* = 0.094$, (e) $t^* = 0.108$ y (f) $t^* = 0.127$.

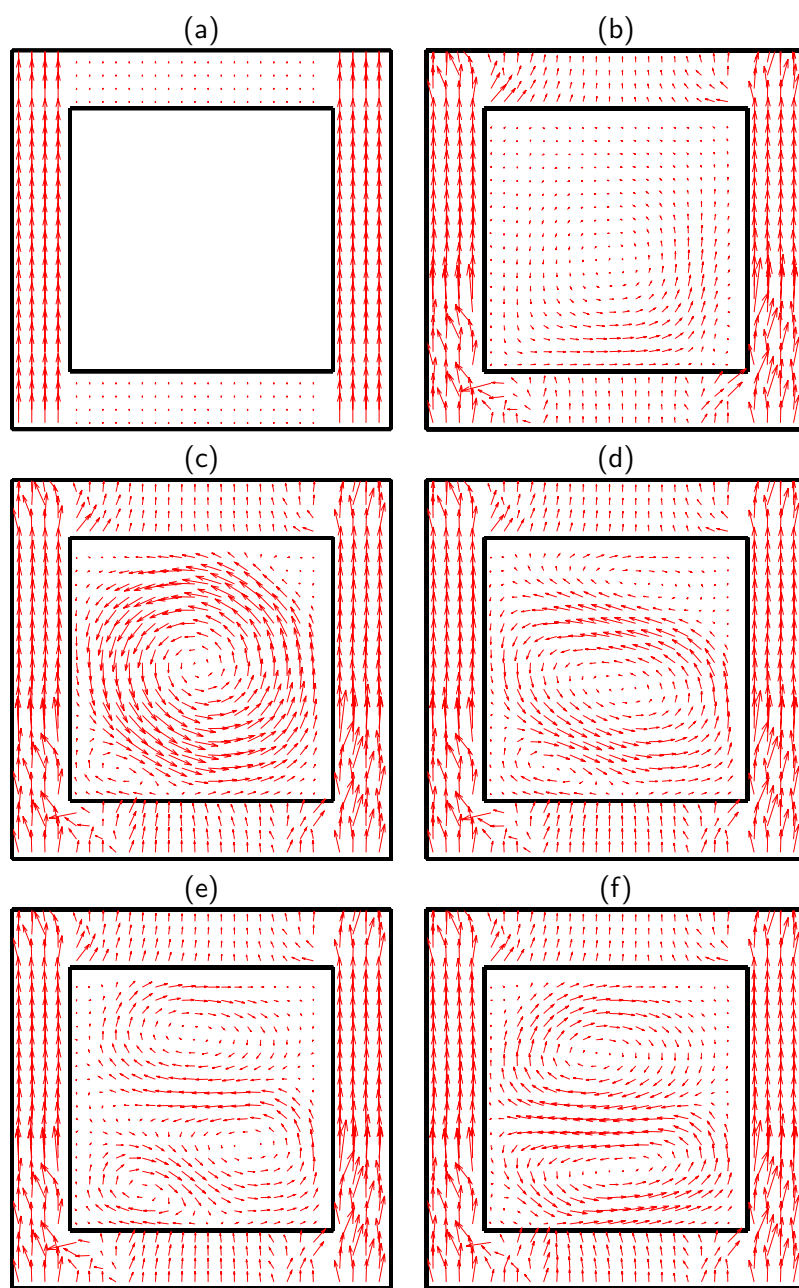


Figura 5.13: Campo de flujo de calor. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$, con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$. Las temperaturas en las fronteras son $T(x, 0, t) = T_{inf} = 6.2$ y $T(x, l, t) = T_{sup} = 0.1$. (a) $t^* = 0$, (b) $t^* = 4.69 \times 10^{-3}$, (c) $t^* = 0.028$, (d) $t^* = 0.094$, (e) $t^* = 0.108$ y (f) $t^* = 0.127$.

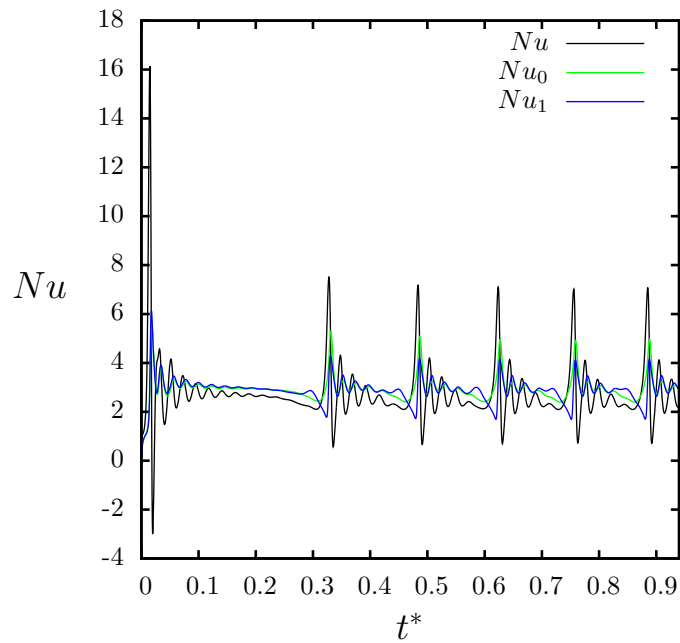


Figura 5.14: El número Nusselt Nu , el número Nusselt en la pared inferior de la interfase sólido-fluido Nu_0 y el número Nusselt en la pared superior de la interfase sólido-fluido Nu_1 como función del tiempo t^* . El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$ con $Pr = 0.71$, $\tau = 0.7$, $T_{sup} = 0.1$ y $T_{inf} = 2.2$.

En la Fig. 5.15 mostramos el número Nusselt Nu como función del tiempo para diferentes gradientes de temperatura ΔT , con $\Delta T = 0.1$ Nu alcanza un valor constante mientras que $\Delta T = 2.1, 4.1, 6.1, 8.1$ y 9.1 Nu fluctúa en el tiempo. Definimos el promedio temporal de Nu \overline{Nu} como

$$\overline{Nu} = \frac{1}{t_{max} - t_0} \int_{t_0}^{t_{max}} Nu(t) dt \quad (5.12)$$

con t_{max} el tiempo total de cómputo y t_0 un transiente.

En la Fig. 5.16 presentamos al número Nusselt promedio \overline{Nu} en función de $\overline{Ra} - Ra_1$. En esta gráfica no mostramos los datos para $\overline{Ra} < Ra_1$ ya que en estos valores únicamente hay transferencia de calor por conducción y $Nu = 1$. De esta figura podemos destacar que hay tres valores críticos que denotamos como Ra_1 , Ra_2 y Ra_3 . Como ya hemos mencionado $Ra_1 = 4,759$ es el valor crítico de \overline{Ra} en el cual se presenta la convección natural. Para $Ra_1 < \overline{Ra} < Ra_2$ con $Ra_2 = 105,470$ el comportamiento de \overline{Nu} sigue una ley de potencia de la forma $\overline{Nu} = A(\overline{Ra} - Ra_1)^b$ con $A = 0.279 \pm 0.004$ y $b = 0.189 \pm 0.001$. En $Ra_2 < \overline{Ra} < Ra_3$ se puede ver que hay una región de transición para la cual el \overline{Nu} es casi constante y en $\overline{Ra} > Ra_3$ nuevamente \overline{Nu} sigue una ley de potencia pero ahora con $A = 0.123 \pm 0.007$ y $b = 0.251 \pm 0.004$. A este valor para el cual comienza a definir una nueva ley de potencia lo hemos denotado como Ra_3 y hemos encontrado que $Ra_3 = 160,267$. En este valor las oscilaciones incrementan en amplitud como veremos a continuación.

En la Fig. 5.17 presentamos la desviación estándar σ del número de Nusselt promedio \overline{Nu} como función de $\overline{Ra} - Ra_1$. La desviación estándar es una medida de la amplitud de las oscilaciones de \overline{Nu} . Para $Ra_1 < \overline{Ra} < Ra_2$ σ crece de acuerdo a una ley de potencia $\sigma = A(\overline{Ra} - Ra_1)^b$. Para $Ra_2 < \overline{Ra} < Ra_3$ σ crece y para $\overline{Ra} > Ra_3$ sigue una nueva ley de potencia con el mismo exponente b y una amplitud A mayor.

Para terminar la sección discutimos la transferencia de calor en las paredes horizontales inferior y superior de la cavidad de la Fig. 5.2. Definimos q_{inf} y q_{sup} como

$$q_{inf} = - \int_0^l k_s \frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} dx, \quad q_{sup} = - \int_0^l k_s \frac{\partial T(x, l, t)}{\partial y} dx. \quad (5.13)$$

Mostramos en la Fig. 5.18 q_{inf} como función del t^* para diferentes valores de ΔT . Los resultados para q_{sup} son similares. Definimos \bar{q}_{inf} y \bar{q}_{sup} como los promedios temporales, después de un transiente de q_{inf} y q_{sup} respectivamente. Los números en el eje vertical de la Fig. 5.18 corresponden a los valores de \bar{q}_{inf} para los incrementos de temperatura ΔT considerados.

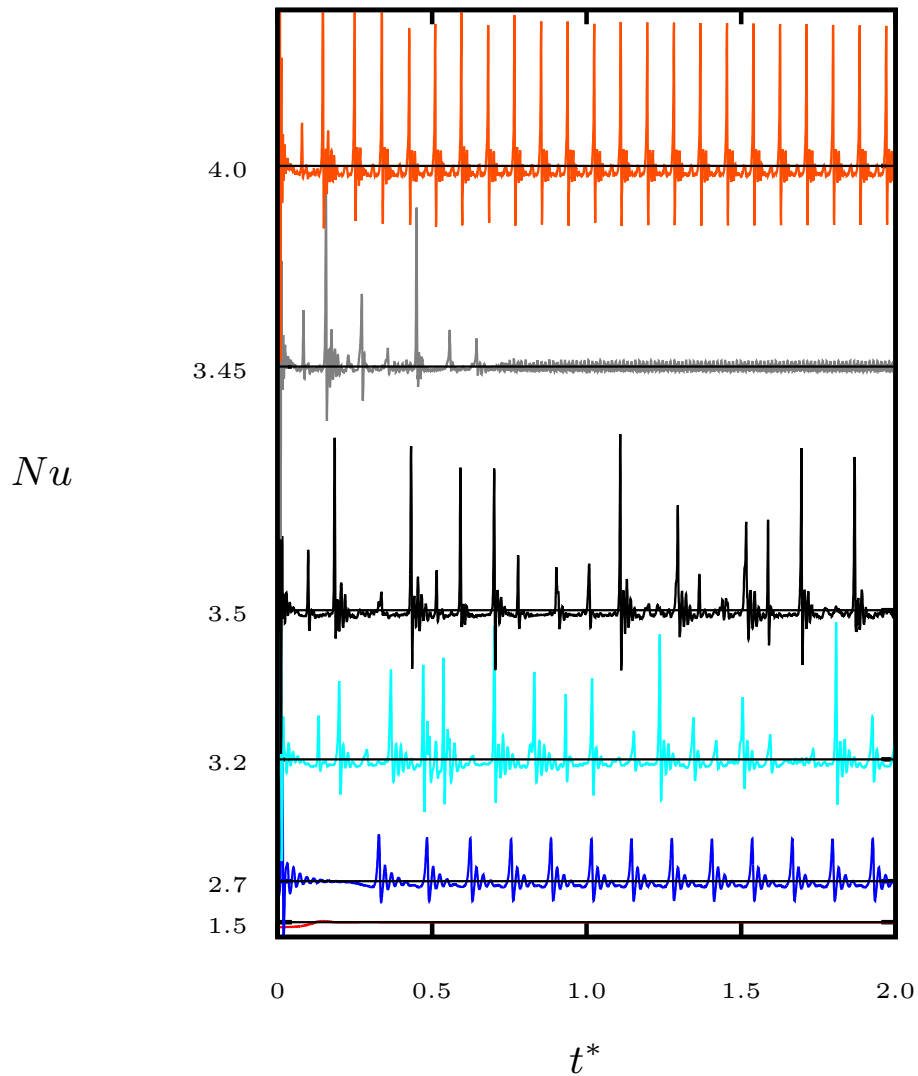


Figura 5.15: El número Nusselt Nu , Ec. (5.10), en función del tiempo t^* . De abajo hacia arriba $\Delta T = 0.1$, $\Delta T = 2.1$, $\Delta T = 4.1$, $\Delta T = 6.1$, $\Delta T = 8.1$ y $\Delta T = 9.1$. Los valores en el eje y que corresponden con las líneas horizontales son el promedio del Nu en el tiempo \overline{Nu} , Ec. (5.12). El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$ con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$.

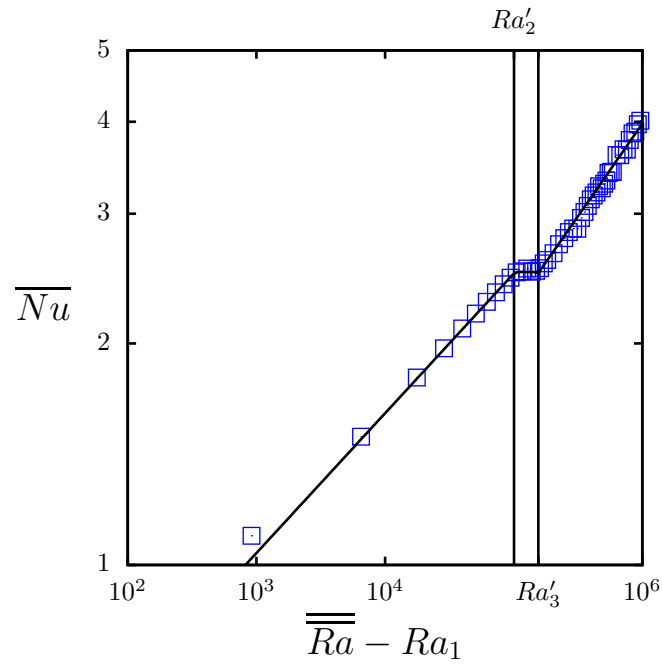


Figura 5.16: El número Nusselt promedio \overline{Nu} como función de $\overline{Ra} - Ra_1$ con $Ra'_2 = Ra_2 - Ra_1$ y $Ra'_3 = Ra_3 - Ra_1$. Para $\overline{Ra} - Ra_1 < Ra'_2$ los resultados se pueden ajustar a la ley de potencia $\overline{Nu} = A(\overline{Ra} - Ra_1)^b$ con $A = 0.279 \pm 0.004$ y $b = 0.189 \pm 0.001$ y para $\overline{Ra} - Ra_1 > Ra'_3$ con $A = 0.123 \pm 0.007$ y $b = 0.251 \pm 0.004$. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$ con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$.

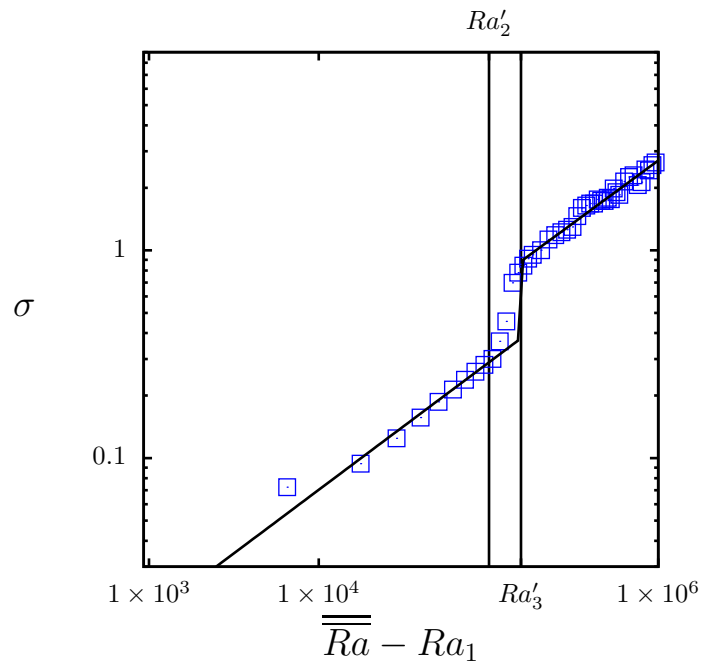


Figura 5.17: Desviación estándar del número Nusselt promedio $\overline{Nu} \sigma$ en función del $\overline{Ra} - Ra_1$ con $Ra'_2 = Ra_2 - Ra_1$ y $Ra'_3 = Ra_3 - Ra_1$. Para $\overline{Ra} - Ra_1 < Ra'_2$ los resultados se pueden ajustar a la ley de potencia $\sigma = A(\overline{Ra} - Ra_1)^b$ con $A = 0.00025 \pm 6e - 5$ y $b = 0.61 \pm 0.02$ y para $\overline{Ra} - Ra_1 > Ra'_3$ con $A = 0.00067 \pm 4e - 5$ y $b = 0.60 \pm 0.05$. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$, con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$.

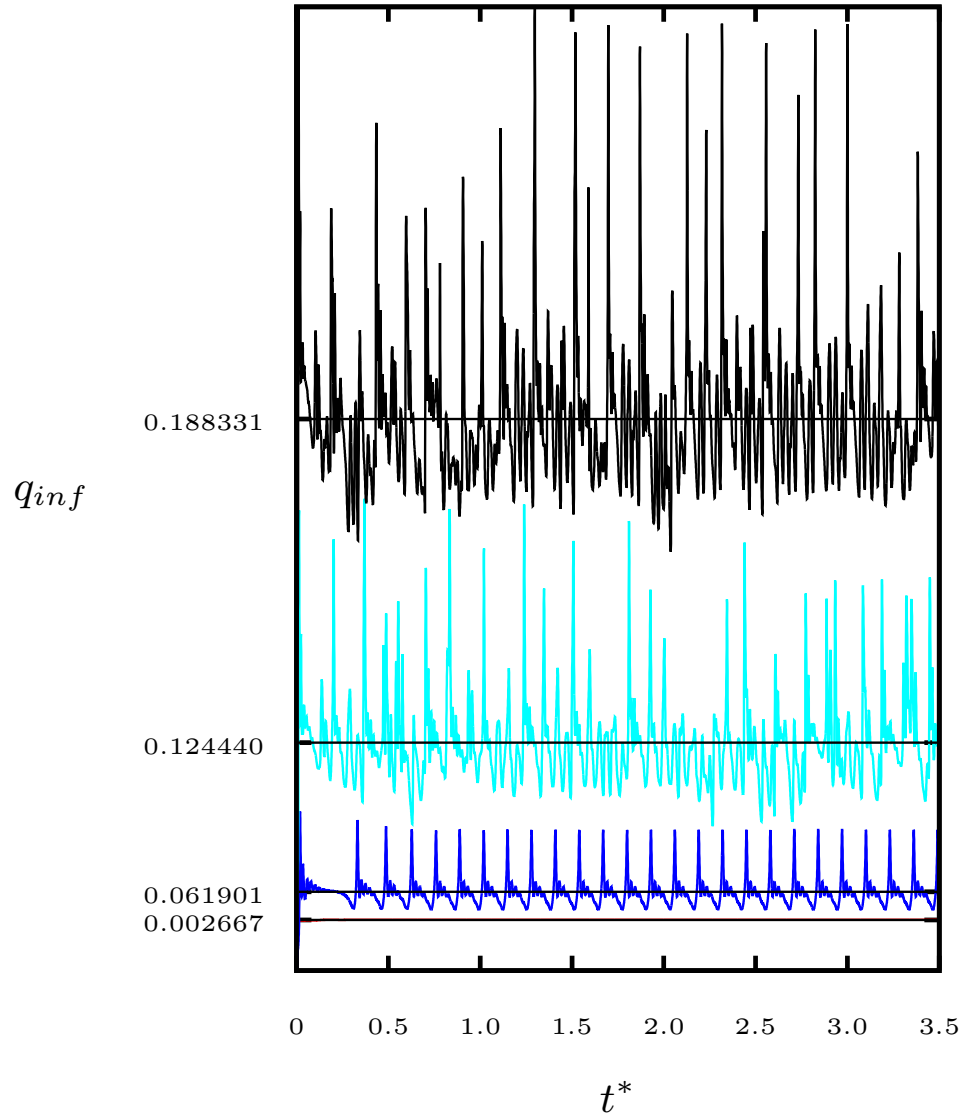


Figura 5.18: Flujo de calor q_{inf} en función del tiempo t^* . De abajo hacia arriba $\Delta T = 0.1$, $\Delta T = 2.1$, $\Delta T = 4.1$ y $\Delta T = 6.1$. Los valores en el eje y que corresponden con las líneas horizontales son el valor promedio temporal de \bar{q}_{inf} . El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección de fluido $l_f = 200$ con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$.

En la Fig. 5.19 (a) presentamos a \bar{q}_{inf} y \bar{q}_{sup} como funciones de ΔT . Para $\Delta T < \Delta T_1$ con $\Delta T_1 = 0.042$ el valor para el cual $\overline{Ra}(\Delta T_1) = Ra_1$, hay conducción en el fluido y $\bar{q}_{inf} = \bar{q}_{sup}$. Ambas cantidades crecen linealmente con ΔT . Para $\Delta T > \Delta T_1$, $\bar{q}_{inf} > \bar{q}_{sup}$. Esto lo podemos entender debido a que parte de la energía es usada por el fluido en movimiento convectivo. También mostramos la recta para el calor conductivo q_{cvo} .

En la Fig. 5.19 (b) mostramos los mismos valores de la Fig. 5.19 (a), poniendo en evidencia la diferencia entre \bar{q}_{inf} y \bar{q}_{sup} en $\Delta T > \Delta T_1$. Esta diferencia, dividida entre \bar{q}_{inf} crece como una ley de potencia para $\Delta T > \Delta T_1$.

Con la finalidad de obtener cuantitativamente el valor de la contribución de la transferencia de calor por convección natural que tiene lugar en el fluido y que influye en la transferencia de calor del sólido en la medida que aumentamos el gradiente de temperaturas ΔT , definimos η como

$$\eta = \frac{\bar{q}_{inf} - q_{cvo}}{q_{cvo}}, \quad (5.14)$$

con q_{cvo} el flujo de calor conductivo mostrado en la Fig. 5.19 (a) con la línea que se puede ajustar a $q_{cvo} = m\Delta T + b$. La cantidad η compara el flujo de calor provocado por la convección en el flujo de transporte conjugado con el flujo de calor conductivo.

Podemos comparar a η con el valor \overline{Nu} como función de $\overline{Ra} - Ra_1$ que obtuvimos en la Fig. 5.16. Para esto relacionamos ΔT con \overline{Ra} a través de la función de ajuste de la Fig. 5.9 y graficamos a η como función de $\overline{Ra} - Ra_1$. Los resultados los mostramos en la Fig. 5.20.

Como vemos en la Fig. 5.20 \overline{Nu} y η tienen cambios en su comportamiento en Ra'_2 y en Ra'_3

5.3. El flujo de calor en un día promedio

El flujo de calor en un bloque de un techo a lo largo de un día promedio cambia en función de la temperatura exterior y la temperatura interior de una edificación. Para nuestro caso en donde los datos de las temperaturas superficiales del bloque [44] son de Temixco, Morelos, durante el día el flujo de calor tiene dirección hacia el interior de la edificación y en el horario restante el flujo de calor tiene dirección opuesta. Cuando el flujo de calor tiene dirección hacia el interior de la edificación, se presenta transporte de calor por conducción y por radiación. En el horario en donde el flujo de calor tiene dirección al exterior de la edificación se presenta transferencia de calor por radiación, conducción, y por

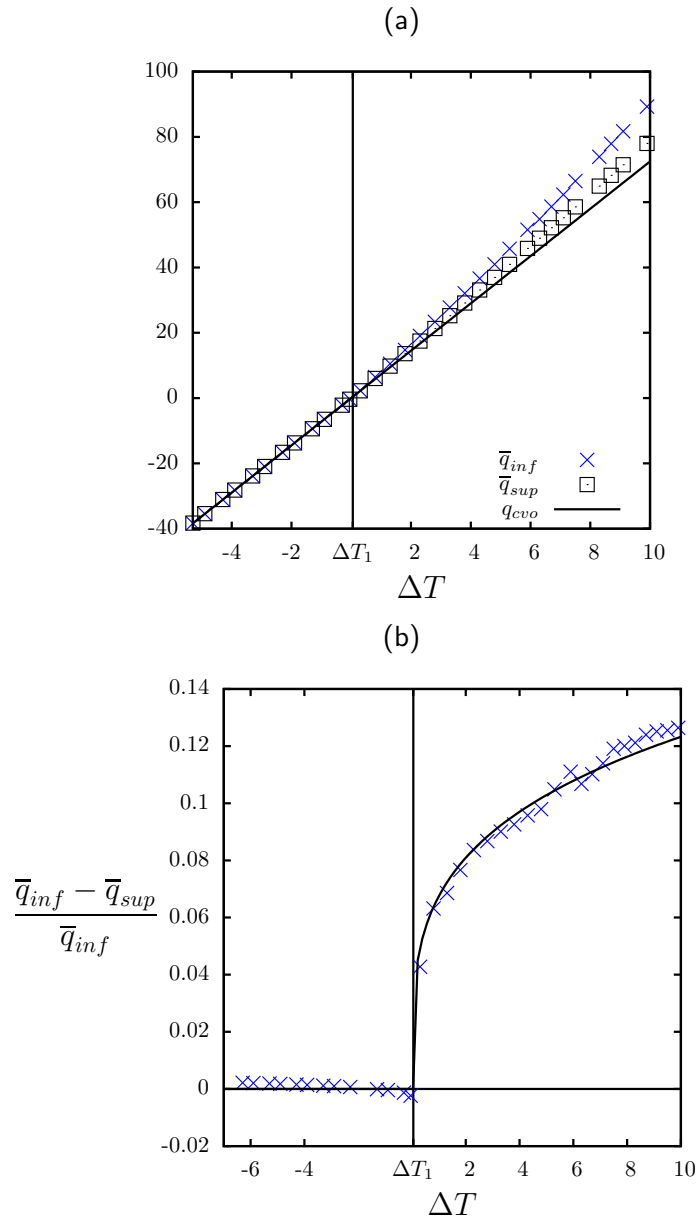


Figura 5.19: (a) Flujos de calor promedio \bar{q}_{inf} y \bar{q}_{sup} como función de $\Delta T = T_{inf} - T_{sup}$. Para $\Delta T < \Delta T_1$ el transporte de calor es conductivo, q_{cvo} y se puede ajustar la recta $q_{cvo} = m\Delta T + b$ con $m = 7.243 \pm 0.002$ y $b = 0.028 \pm 0.007$. (b) La relación $(\bar{q}_{inf} - \bar{q}_{sup})/\bar{q}_{inf}$ como función del gradiente de temperatura. La curva para $\Delta T > \Delta T_1$ es el ajuste a los valores numéricos de la ley de potencia $(q_{inf} - q_{sup})/q_{inf} = A(\Delta T - \Delta T_1)^b$ con $A = 0.068 \pm 0.002$ y $b = 0.26 \pm 0.02$. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$ con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$. El gradiente de temperatura $\Delta T_1 = 0.042$.

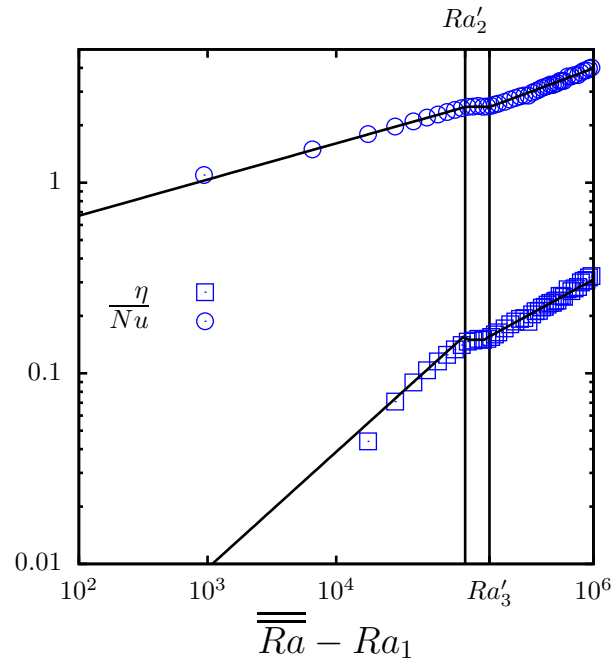


Figura 5.20: El número Nusselt promedio \overline{Nu} y η dado por la Ec. (5.14) en función de $\overline{Ra} - Ra_1$ con $Ra'_2 = Ra_2 - Ra_1$ y $Ra'_3 = Ra_3 - Ra_1$. Para \overline{Nu} los resultados pueden ajustarse a $\overline{Nu} = A(\overline{Ra} - Ra_1)^b$, para $\overline{Ra} - Ra_1 < Ra'_2$ con $A = 0.279 \pm 0.004$ y $b = 0.189 \pm 0.001$ y para $\overline{Ra} - Ra_1 > Ra'_3$ con $A = 0.123 \pm 0.007$ y $b = 0.251 \pm 0.004$. Para η los resultados pueden ajustarse a $\eta = A(\overline{Ra} - Ra_1)^b$, para $\overline{Ra} - Ra_1 < Ra'_2$ con $A = 0.00014 \pm 1e - 05$ y $b = 0.61 \pm 0.08$ y para $\overline{Ra} - Ra_1 > Ra'_3$ con $A = 0.0019 \pm 3e - 04$ y $b = 0.37 \pm 0.01$. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$ con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$.

convección si el gradiente de temperaturas en el bloque es lo suficientemente alto.

La temperatura en la superficie exterior de la edificación está en función del flujo de calor producido por la combinación de la radiación solar que incide en la superficie, el intercambio de energía por radiación entre el ambiente y el techo y el intercambio de calor por convección con el aire exterior. Dicho flujo de calor lo podemos expresar sobre unidad de área A como [41]

$$\frac{q}{A} = \lambda E_t + h_0(T_0 - T_s) - \epsilon \Delta R \quad (5.15)$$

con λ la absortancia de la superficie de la radiación solar, E_t la radiación total que incide sobre la superficie, h_0 el coeficiente de transferencia de calor de radiación y convección en el exterior, T_0 la temperatura ambiente, T_s la temperatura de la superficie, ϵ la emitancia de la superficie y ΔR la diferencia entre la radiación que incide sobre la superficie del techo y la radiación emitida como cuerpo negro hacia el ambiente.

La temperatura sol-aire T_{sa} está relacionada con q/A a través de [41]

$$\frac{q}{A} = h_0(T_{sa} - T_s) \quad (5.16)$$

y es la temperatura del aire exterior que en la ausencia de todos intercambios de calor por radiación, produce el mismo flujo de calor que el dado por la Ec. (5.15), de manera que podemos escribir

$$T_{sa} = T_0 + \frac{\lambda E_t}{h_0} - \frac{\epsilon \Delta R}{h_0}. \quad (5.17)$$

En la Fig. 5.21 mostramos a la temperatura sol-aire T_{sa} y la temperatura superficial en el interior y el exterior del techo, T_{int} y T_{ext} respectivamente, durante un día. Estos valores fueron obtenidos en página web Ener-Habitat [44] y son el resultado de un día promedio en Temixco, Morelos para un techo horizontal con una absortancia $\lambda = 0.2$ y un espesor de 0.1 m.

En la Fig. 5.22 mostramos el valor absoluto del gradiente de temperaturas entre T_{int} y T_{ext} para techos con las mismas características que el mostrado en la Fig. 5.21 pero con diferentes absortancias. Un techo con una absortancia de $\lambda = 0.2$ se asocia a un techo que está pintado de blanco en la superficie exterior, uno con $\lambda = 0.6$ con uno pintado de color rojo y uno con $\lambda = 0.8$ con uno pintado de color negro. Como se puede observar en la Fig. 5.22 el techo que presenta un menor gradiente de temperaturas en cualquier horario del día es el que está pintado de blanco.

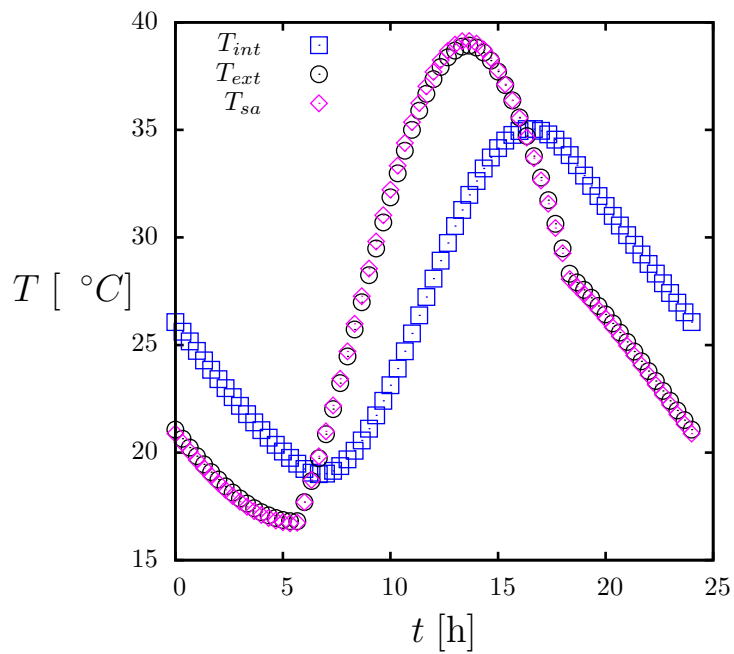


Figura 5.21: Temperatura sol-aire y las temperaturas superficiales del techo de una edificación con absorptancia $\lambda = 0.2$ como función del tiempo. La temperatura superficial exterior T_{ext} , la temperatura superficial interior T_{int} y la temperatura sol-aire T_{sa} son de un día promedio en Temixco, Morelos.

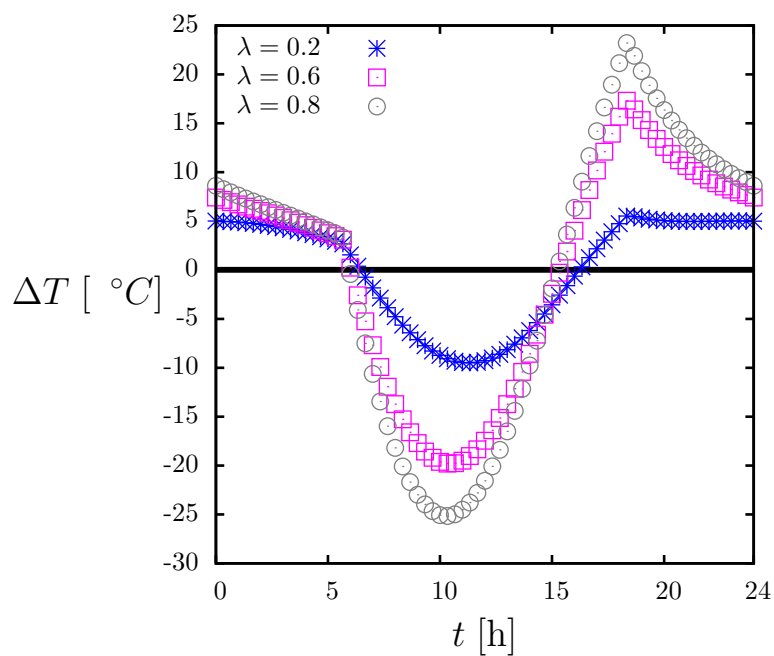


Figura 5.22: El gradiente de temperaturas ΔT entre la temperatura en superficie interior T_{int} y exterior T_{ext} de un bloque de un techo en un día promedio para tres techos con diferentes absorptancias. Las temperaturas T_{int} y T_{ext} las obtuvimos de la página web Ener-Habitat [44]

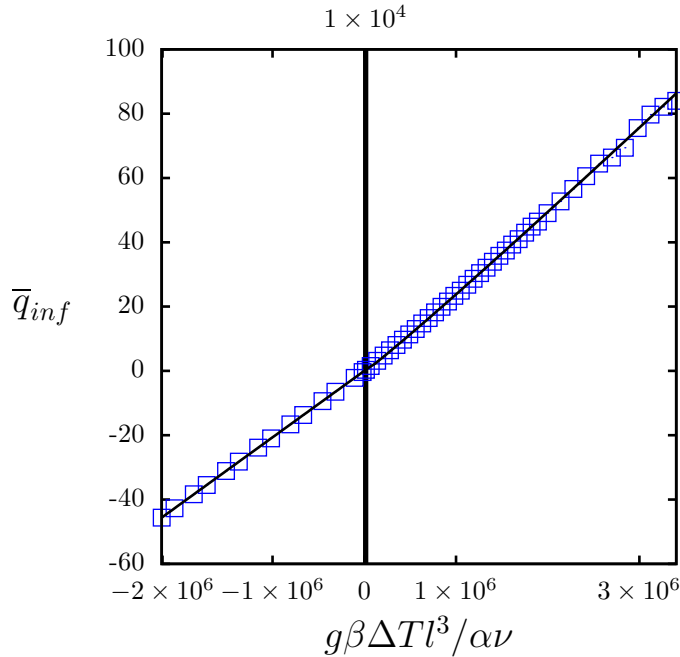


Figura 5.23: Flujo de calor \bar{q}_{inf} en función de $g\beta\Delta T l^3/\nu\alpha$. Para $g\beta\Delta T l^3/\nu\alpha < g\beta\Delta T_1 l^3/\nu\alpha$ los resultados se pueden ajustar a la recta $\bar{q}_{inf} = mg\beta\Delta T l^3/\nu\alpha + b$ con $m = 2.065e - 05 \pm 6e - 08$ y $b = 0.028 \pm 0.007$ y para $g\beta\Delta T l^3/\nu\alpha > g\beta\Delta T_1 l^3$ a la ley de potencia $\bar{q}_{inf} = A[g\beta l^3/\nu\alpha(\Delta T - \Delta T_1)]^b$ con $A = 1.32e - 05 \pm 7e - 07$ y $b = 1.043 \pm 0.003$. Los valores de las variables del eje x son $g = 0.001$, $\beta = 0.1$, $l = 280$, $\nu = 0.06667$ y $\alpha = 0.09389$. El refinamiento de malla es de $l = 280$ y para la sección del fluido $l_f = 200$ con $Pr = 0.71$ y $\tau = 0.7$.

Para relacionar al gradiente de temperaturas ΔT , que mostramos en la Fig. 5.22, con nuestros resultados numéricos, expresamos a ΔT en parámetros adimensionales a través de $g\beta\Delta T l^3/\nu\alpha$, con $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\beta = 3.43 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\nu = 15.11 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\alpha = 2.128 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ y $l = 0.1 \text{ m}$ [41]. El flujo de calor \bar{q}_{inf} que obtuvimos en la Fig. 5.19 lo graficamos como función de este número adimensional, como mostramos en la Fig. 5.23 donde los valores los ajustamos a una función lineal para $g\beta\Delta T l^3/\nu\alpha < g\beta\Delta T_1 l^3/\nu\alpha$ y a una ley de potencia para $g\beta\Delta T l^3/\nu\alpha > g\beta\Delta T_1 l^3/\nu\alpha$.

Una vez que tenemos a las temperaturas superficiales interior y superior del techo expresadas en números adimensionales, evaluamos estos valores en la función de ajuste de la Fig. 5.23 y obtenemos el flujo de calor \bar{q}_{inf} , que como

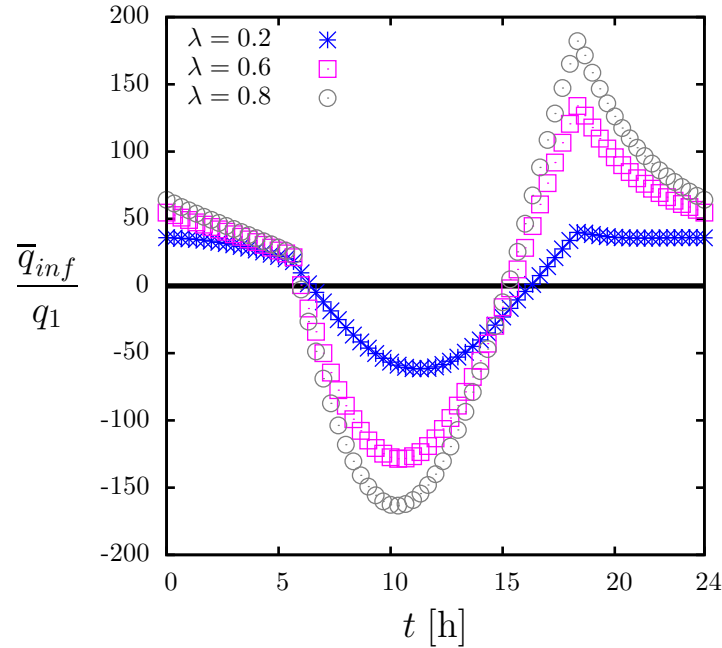


Figura 5.24: Cociente del flujo de calor promedio en la superficie inferior externa \bar{q}_{inf} y el flujo de calor crítico q_1 en un día promedio para tres techos con diferentes absorbancias.

recordamos de la Sec. 5.2, es el flujo de calor que evaluamos en la superficie inferior de nuestro modelo del bloque, Fig. 5.2.

En la Fig. 5.24 presentamos al cociente \bar{q}_{inf}/q_1 como función del tiempo. El flujo de calor \bar{q}_1 es el flujo de calor que resulta al evaluar a ΔT_1 en la función lineal del ajuste de la Fig. 5.23. Cabe recordar de la sección anterior que el gradiente de temperaturas ΔT_1 es el valor crítico en el cual comienza la contribución de la transferencia de calor por convección natural.

En la Fig. 5.24 mostramos el flujo de calor que resulta para el gradiente de temperatura en tres techos con diferente absorbancia, Fig. 5.22. Como podemos observar en la Fig. 5.24 el techo con pintura blanca o $\lambda = 0.2$ es el que tiene menor intercambio de calor durante el día y también en el que el flujo de calor durante la noche se mantiene casi constante, este comportamiento se espera dado el gradiente de temperatura que se muestra en la Fig. 5.22. De las Figs. 5.22 y 5.24 podemos concluir que el techo con mejores características en una ubicación de Temixco, Morelos, es el que tiene pintura blanca en la superficie exterior.

5.4. Conclusiones

En este capítulo utilizamos el MEBR para simular el transporte de calor conjugado en un modelo de un bloque.

El número de Rayleigh es función del tiempo por que las temperaturas en las paredes horizontales de la interfase sólido-fluido no permanecen constantes, por esta razón definimos el número de Rayleigh como un promedio en el espacio \overline{Ra} y también como un promedio en el espacio y en el tiempo $\overline{\overline{Ra}}$. Encontramos el valor crítico en el cual comienza la contribución del flujo de calor por convección natural y lo denotamos Ra_1 . También definimos un número Nusselt promediado en el tiempo \overline{Nu} .

El comportamiento del fluido a partir de Ra_1 puede llegar a formar una celda convectiva y mantenerse de ese manera en el estado permanente o bien puede estar fluctuando en el tiempo alrededor del valor $\overline{\overline{Ra}}$. Esta idea se sustenta en la comparación de las gráficas entre el comportamiento del \overline{Ra} y Nu como función del tiempo, Figs 5.7 y 5.15, y las figuras de las isotermas y campos de flujo de calor, Figs. 5.10, 5.11, 5.12 y 5.13.

El número \overline{Nu} y la amplitud de sus oscilaciones σ tienen un crecimiento en función de $\overline{\overline{Ra}} - Ra_1$ que se describe con una ley de potencia y que tiene cambios de comportamiento en los valores críticos Ra_2 y Ra_3 .

El flujo de calor del modelo del bloque evaluado en la pared horizontal inferior externa \overline{q}_{inf} y en la pared horizontal superior externa \overline{q}_{sup} son iguales cuando únicamente hay transporte de calor por conducción, esto es en $\Delta T < \Delta T_1$ con ΔT_1 el gradiente de temperaturas en el cual comienza el transporte de calor por convección natural. Hay una diferencia entre \overline{q}_{inf} y \overline{q}_{sup} con $\overline{q}_{inf} > \overline{q}_{sup}$ en $\Delta T > \Delta T_1$, esta diferencia puede representar el 12% de \overline{q}_{inf} en $\Delta T = 10$.

Como una primera aproximación del método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes (MEBR) comparamos el flujo de calor en un día promedio que se presenta en un techo horizontal con diferentes absortancias y encontramos que el techo con mejores características es el que tiene una absortancia $\lambda = 0.2$ o que esta pintado de blanco en la superficie exterior del techo.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo presentamos el método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes (MEBR) para simular el transporte de calor conjugado en un modelo de un bloque.

En el Cap. 1 presentamos la motivación de este trabajo que consiste en estudiar el transporte de calor en un techo con sistema constructivo de vigueta y bovedilla con la finalidad de que los resultados nos aporten conocimiento en la búsqueda de reducir el consumo de energía en edificaciones.

En el Cap. 2 presentamos la derivación de la ecuación de transporte de Boltzmann y la aproximación que propusieron Bhatnagar, Gross y Krook, en donde el término de colisión de la ecuación de transporte de Boltzmann es sustituido por uno de relajamiento al equilibrio local. Este término de relajamiento contiene a la función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

En el Cap. 3 mostramos como pasar de la ecuación de transporte de Boltzmann al MEBR. Utilizamos las cuadraturas de Gauss-Hermite para discretizar la aproximación de la función de distribución a velocidades pequeñas de Maxwell-Boltzmann. Validamos el método con la simulación de una onda de choque formada por diferencia de densidad en un fluido isotérmico. Los resultados numéricos están de acuerdo con los obtenidos a partir de las relaciones de Rankine-Hugoniot.

Para simular flujos con transporte de energía incorporamos en el MEBR a las funciones de distribución de la temperatura e incluimos el término de Bousinesq en la ecuación de evolución de las funciones de distribución de partículas. Sabemos que en una cavidad con aire donde el ancho es el doble de la altura,

el número de Rayleigh crítico Ra_c para el cual se pasa de un flujo conductivo a uno convectivo, está dado por $Ra_c = 1707.762$. Fijamos los valores de la aceleración de la gravedad g , el coeficiente de expansión térmico β , la difusividad térmica α y encontramos la viscosidad cinemática ν , o lo que es lo mismo, el valor del tiempo de relajamiento τ para el cual el valor del número de Rayleigh en el que se presenta la convección es igual a Ra_c .

En el Cap. 4 simulamos el transporte de calor en un sólido y comprobamos los resultados con el MEF. Mostramos las dos principales aportaciones de este trabajo. Estas aportaciones están relacionadas ya que para encontrar la condición a la frontera que satisface a la condición de continuidad en el flujo de calor, desarrollamos el procedimiento que nos condujo a encontrar la relación entre la conductividad térmica y el tiempo de relajamiento. Con este hallazgo, que nos permite relacionar propiedades intrínsecas del material con parámetros en el MEBR, podemos dar una mejor interpretación física de la condición de frontera de continuidad en el flujo de calor. La segunda aportación es en la implementación de esta condición a la frontera en el MEBR, con este nuevo esquema que proponemos se satisface la condición de continuidad en el flujo de calor. Esto lo podemos decir ya que al resolver la transferencia de calor en un material sólido compuesto por dos materiales con diferente conductividad térmica, encontramos un acuerdo numérico entre nuestros resultados y la solución analítica de la ecuación de calor en estado estacionario.

En el Cap. 5 presentamos los resultados numéricos del transporte de calor conjugado en un modelo de un bloque. Las temperaturas en los bordes inferior y superior de la cavidad interna que contiene aire varían en la posición horizontal y el tiempo. Tomamos el valor promedio de esas temperaturas, primero en la posición horizontal y definimos al número de Rayleigh promediado en el espacio \overline{Ra} , después tomamos el valor promedio en el tiempo y con esto definimos al número de Rayleigh promediado en el espacio y tiempo $\overline{\overline{Ra}}$. Encontramos un valor crítico de $\overline{\overline{Ra}}$ en el cual se presenta el transporte de calor por convección natural, denotamos a este valor Ra_1 y se presenta cuando hay un gradiente de temperaturas ΔT_1 .

El promedio temporal del número Nusselt Nu es \overline{Nu} . Encontramos dos valores críticos más de $\overline{\overline{Ra}}$, Ra_2 y Ra_3 en los que \overline{Nu} tiene cambios en su comportamiento. El número Nusselt promedio \overline{Nu} como función de $\overline{\overline{Ra}} - Ra_1$ crece de acuerdo a una ley de potencia cuando $0 < \overline{\overline{Ra}} - Ra_1 < Ra_2 - Ra_1$ y de acuerdo a otra ley de potencia cuando $\overline{\overline{Ra}} - Ra_1 > Ra_3 - Ra_1$. La desviación estándar de \overline{Nu} , σ , es una medida de la amplitud de las fluctuaciones alrededor de \overline{Nu} . Para $\overline{\overline{Ra}} - Ra_1 < 0$, $\overline{Nu} = 1$ y σ como función de $\overline{\overline{Ra}} - Ra_1$ se mantiene constante y para valores mayores sigue leyes de potencia con diferentes valores

en los intervalos $\overline{Ra} - Ra_1 < Ra_2 - Ra_1$ y $\overline{Ra} - Ra_1 > Ra_3 - Ra_1$.

En el Cap. 5 estudiamos también el flujo de calor a través de las paredes inferior q_{inf} y superior q_{sup} de la cavidad. Como antes, definimos los promedios temporales de estas cantidades \bar{q}_{inf} y \bar{q}_{sup} . La cantidad $(\bar{q}_{inf} - \bar{q}_{sup})/\bar{q}_{inf}$ es cero para $\Delta T < \Delta T_1$ y crece como una ley de potencia en valores mayores.

Por último, como una aplicación de los resultados obtenidos, calculamos el flujo de calor en n modelo de una celda de un bloque de vigueta y bovedilla horizontal en un día típico en Temixco, Morelos. Encontramos que un techo pintado de blanco es más adecuado que uno pintado de rojo o uno de negro.

Appendices

Apéndice A

Condiciones de frontera

En esta sección se abordan los temas referentes a las condiciones de frontera que se usaron para las funciones de distribución del MEBR con dos funciones de distribución.

A.1. Condiciones periódicas

Un sistema con condiciones periódicas a la frontera consiste en que los nodos que están en la frontera tienen como vecinos colindantes a los nodos de la frontera opuesta. Si hablamos de un sistema de dos dimensiones en donde las paredes verticales tienen estas condiciones, las paredes estarán unidas. En la Fig. A.1 mostramos la interpretación de una malla de dos dimensiones en donde las fronteras verticales tienen condición periódica a la frontera.

Para implementar estas condiciones en el MEBR, supongamos una malla bidimensional en donde las paredes verticales tienen condición periódica a la frontera. Las funciones de distribución que se encuentran en la frontera derecha de la malla y tienen dirección hacia el extremo de la misma en un tiempo t , como mostramos en la Fig. A.2 (a) para las f_k con las direcciones $k = 1, 5$ y 8 que tienen color rojo, se propagan en $t + \Delta t$ hacia los nodos que se encuentran en la frontera opuesta, como mostramos en la Fig. A.2 (b).

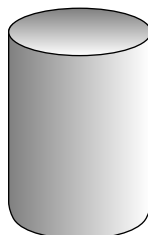


Figura A.1: Interpretación de una malla de dos dimensiones bajo condiciones de frontera periódicas en las paredes verticales.

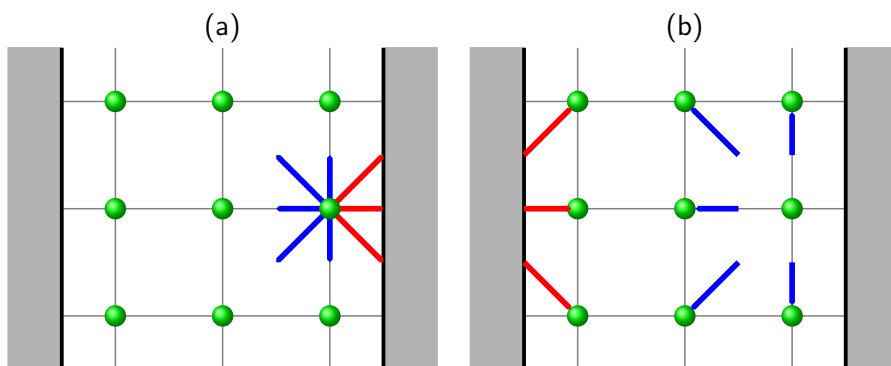


Figura A.2: (a) Las funciones de distribución de partículas f_k o de temperatura T_k que se encuentran en un nodo que colinda con una pared con condición periódica a la frontera en un tiempo t . (b) Las funciones de distribución f_k o T_k en el tiempo $t + \Delta t$. Las líneas rojas representan las direcciones de las f_k o T_k con $k = 1, 5$ y 8 y las líneas azules a las direcciones de f_k o T_k con $k = 0, 2, 3, 4, 6$ y 7 . En la Fig. 3.1 mostramos las velocidades \mathbf{c}_k en el modelo D2Q9 y las direcciones k corresponden con las direcciones de f_k o T_k .

A.2. Rebote a la mitad de camino

La condición a la frontera de rebote a la mitad del camino es un modelo de la condición de no deslizamiento. Esta última condición a la frontera tiene una implicación física asociada al concepto de capa límite. La cual nos dice que la velocidad de la película superficial en un fluido que se encuentra en contacto con una pared, tendrá la misma velocidad que la velocidad de la pared, esto es

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \quad (\text{A.1})$$

con \mathbf{u} la velocidad de la película superficial del fluido en contacto con la pared y \mathbf{U} la velocidad de la pared.

Se han propuesto varios modelos para la implementación de la condición de no deslizamiento, entre ellos la de no deslizamiento en equilibrio local [45]. En este modelo las funciones de distribución que rebotan en la pared, se asumen que se encuentran en equilibrio local con la velocidad de la pared. En este trabajo la condición a la frontera de no deslizamiento, la implementamos con el modelo de rebote a la mitad del camino [30] y la utilizamos para las funciones de distribución de partículas f_k .

En la Fig. A.3 mostramos el esquema de una malla bidimensional en donde la pared superior tiene condiciones de frontera de rebote a la mitad del camino. La frontera está a una distancia $\Delta y/2$ de la última línea horizontal superior de la malla, con Δy la distancia entre los nodos. Las funciones de distribución ubicadas en un nodo que colinda con dicha frontera y con las direcciones k hacia la frontera superior en el tiempo t , las f_k con las direcciones $k = 2, 5$ y 6 , representadas por las líneas en rojo en la Fig. A.3 (a), son asignadas al mismo nodo en $t + \Delta t$ pero con las direcciones $k = 4, 7$ y 8 respectivamente, como mostramos en la Fig. A.3 (b) a través de las líneas en color rojo.

A.3. Temperatura constante

La condición de frontera de temperatura constante tiene sus antecedentes en la condición de frontera de no deslizamiento en equilibrio local [45] y posteriormente se utilizó la condición para las funciones de distribución de temperatura T_k a través del problema de flujo Couette y Poiseuille [15, 29]. En este modelo las funciones de distribución que se encuentran en los nodos de la frontera se dividen en las funciones de distribución que son propagadas de los nodos que se encuentran en la red y por ende conocemos su valor y las funciones de distribución que son propagadas de la frontera y que no conocemos el valor, a estas últimas se les considera que están en equilibrio térmico con T' , donde T' está en

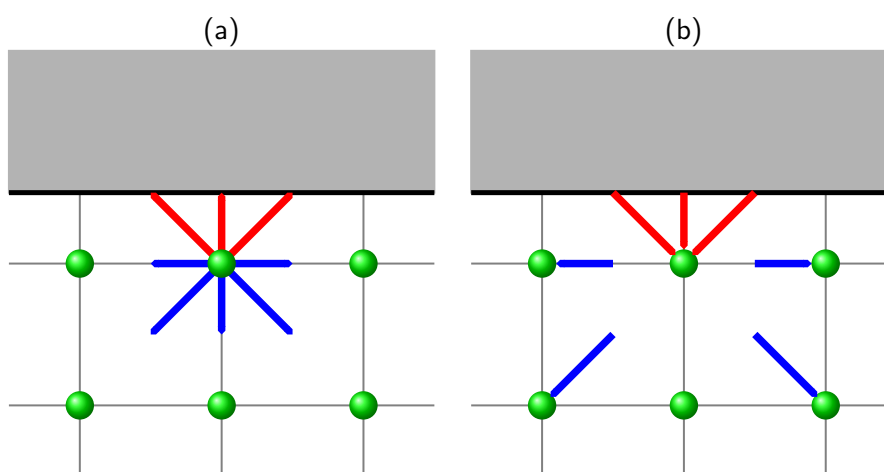


Figura A.3: (a) Las funciones de distribución de partículas f_k en un nodo que colinda con una pared con condición de frontera de rebote a la mitad del camino en un tiempo t . (b) Las f_k en un tiempo $t + \Delta t$. Las líneas rojas representan las funciones de distribución con dirección a la pared $k = 2, 5$ y 6 y las líneas azules a las f_k con $k = 0, 3, 4, 7$ y 8 . En la Fig. 3.1 mostramos las velocidades c_k en el modelo D2Q9 y las direcciones k corresponden con las direcciones de f_k . Las líneas rojas y azules representan la dirección de f_k únicamente.

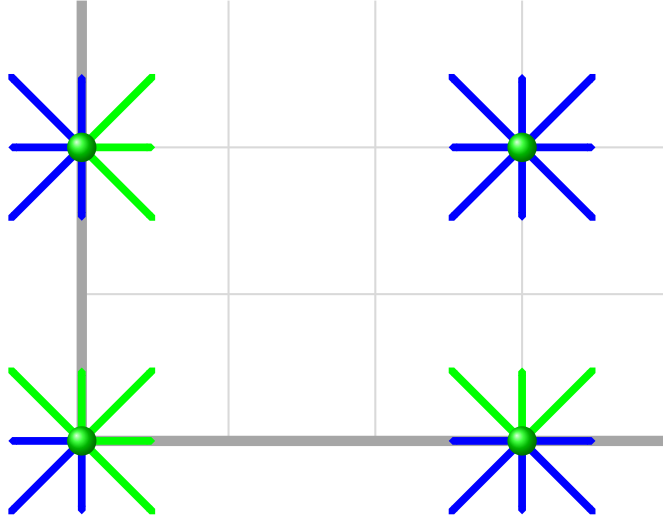


Figura A.4: Las funciones de distribución T_k con condiciones de frontera de temperatura constante en la pared inferior, la pared izquierda y en la esquina inferior izquierda. En color azul T_k y en color verde $T_{\hat{k}}$ con \hat{k} las direcciones de las funciones de distribución que se encuentran en equilibrio local con la restricción de temperatura constante. Para la pared izquierda $\hat{k} = 1, 5$ y 8 , para la pared inferior $\hat{k} = 2, 5$ y 6 y para la esquina inferior izquierda $\hat{k} = 1, 2, 5, 6$ y 8 . Las líneas azules y verdes representan la dirección de T_k únicamente.

función de una temperatura dada. Esto es

$$T_{\hat{k}} = T_{\hat{k}}^{(eq)}(T') \quad (\text{A.2})$$

con \hat{k} las direcciones de T_k que son propagadas de la frontera. Supongamos que nos encontramos en la frontera sur de nuestra red, como mostramos en la Fig. A.4, de las nueve velocidades que conforman a cada nodo, como podemos ver en la Fig. 3.1 ya que las direcciones de las velocidades c_k corresponden con las direcciones T_k , las funciones de distribución con las direcciones $k = 0, 1, 3, 4, 7$ y 8 , conocemos su valor dado que provienen de nodos aledaños, sin embargo para las funciones de distribución con direcciones con $\hat{k} = 2, 5$ y 6 no conocemos su valor. Considerando que están en equilibrio local con la temperatura de la frontera, podemos obtener su valor de la suma en la Ec. (3.41)

$$T = \sum_k T_k = T_0 + T_1 + T_3 + T_4 + T_7 + T_8 + T'(w_2 + w_5 + w_6), \quad (\text{A.3})$$

considerando que estamos en la frontera sur y deseamos incorporar una condición de frontera con temperatura constante, nombremos a ésta T_{cte} , entonces de Ec. (A.3) resulta para T'

$$T' = \frac{T_{cte} - (T_0 + T_1 + T_3 + T_4 + T_7 + T_8)}{w_2 + w_5 + w_6}$$

$$T' = 6 [T_{cte} - (T_0 + T_1 + T_3 + T_4 + T_7 + T_8)]. \quad (A.4)$$

Una vez que tenemos el valor de T' , asignamos el valor en cada dirección a través de

$$T_2 = w_2 T', \quad T_5 = w_5 T', \quad T_6 = w_6 T'. \quad (A.5)$$

A.4. Continuidad en el flujo de calor

En la literatura se ha utilizado la condición de frontera de continuidad en el flujo de calor en el método de la ecuación de transporte de Boltzmann en redes (MEBR) con dos funciones de distribución para el problema de transporte de calor conjugado [5, 6, 7, 46, 47, 48, 49, 50]. Son diversos los esquemas que se proponen para resolver la condición de continuidad en el flujo de calor pero podemos clasificarlos en dos. Los que resuelven la condición no imponiendo ninguna restricción [5, 47, 50] y los que suponen que las funciones de distribución de temperatura que se encuentran en los nodos de la interfase, se encuentran en equilibrio con la restricción de continuidad en el flujo de calor. Para el primer esquema hemos encontrado que sí se resuelve la condición a la frontera pero es una solución particular ya que para satisfacer la condición de la Ec. (4.14) se hace la suposición de que la conductividad térmica k es igual a la difusividad térmica α , sin embargo a partir de la Ec. (4.3), la única forma en la que puede ocurrir esto es si el producto entre la densidad ρ y el calor específico a presión constante c_p para cada uno de los medios que se encuentran en esta condición a la frontera es el mismo. En el esquema que supone a las funciones de distribución de temperatura en equilibrio con la restricción del flujo de calor [29, 46, 49], es una condición muy similar al que se explica en el Apéndice A.3, la diferencia radica en que en vez de que se tenga una restricción en donde la temperatura es un valor conocido, se tiene un flujo de calor dado, para este caso, la continuidad del flujo de calor. Este método es útil para una condición de frontera en donde el flujo de calor es independiente del tiempo, sin embargo para una condición a la frontera que debe satisfacer a la Ec. (4.14), no funciona ya que no se relaciona

a k con el tiempo de relajamiento τ . Otros esquemas han usado la condición de continuidad en el flujo de calor pero al igual que en el último esquema no se especifica como se relaciona a k con τ [6, 7, 48].

La condición de frontera que presentamos en esta sección es un nuevo modelo para implementar en el MEBR la condición de continuidad del flujo de calor en una interfase. Puede ser utilizada para una interfase con dos medios sólidos o bien con un sólido y un fluido.

El modelo que proponemos se satisface a partir de la Ec. (4.14), que podemos escribir en forma discreta como

$$-k_1 \frac{T(a) - T(a - \Delta y)}{\Delta y} = -k_2 \frac{T(a + \Delta y) - T(a)}{\Delta y} \quad (\text{A.6})$$

con $y = a$ la altura a la interfase entre los dos elementos, k_1 la conductividad térmica del primer elemento y k_2 la del segundo. En la Fig. A.5 mostramos el esquema de esta condición a la frontera. De la Ec. (A.6)

$$T(a) = \frac{k_1 T(a - \Delta y) + k_2 T(a + \Delta y)}{k_1 + k_2} \quad (\text{A.7})$$

La temperatura en la interfase, que satisface a la continuidad en el flujo de calor y que está dada por la Ec. (A.7), la implementamos en el MEBR de la siguiente manera. La conductividad térmica la calculamos con la Ec. (4.13) y las funciones de distribución de la temperatura T_k con las direcciones $k = 2, 4, 5, 6, 7$ y 8 que se encuentran en los nodos de la interfase $y = a$, como se puede ver en la Fig. A.5, las evaluamos en la Ec. (A.7). Por ejemplo si tomamos la T_k con dirección $k = 2$

$$T_2(a, t + \Delta t) = \frac{k_1 T_2(a - \Delta y, t) + k_2 T_2(a + \Delta y, t)}{k_1 + k_2}. \quad (\text{A.8})$$

Así para cada una de las direcciones en color rojo de la Fig. A.5. De manera que

$$T_{\hat{k}}(a, t + \Delta t) = \frac{k_1 T_{\hat{k}}(a - \Delta y, t) + k_2 T_{\hat{k}}(a + \Delta y, t)}{k_1 + k_2} \quad (\text{A.9})$$

con $\hat{k} = 2, 4, 5, 6, 7$ y 8 . Las T_k con las direcciones $k = 1$ y 3 , para el ejemplo que mostramos en dicha figura, evolucionan con la Ec. (3.42).

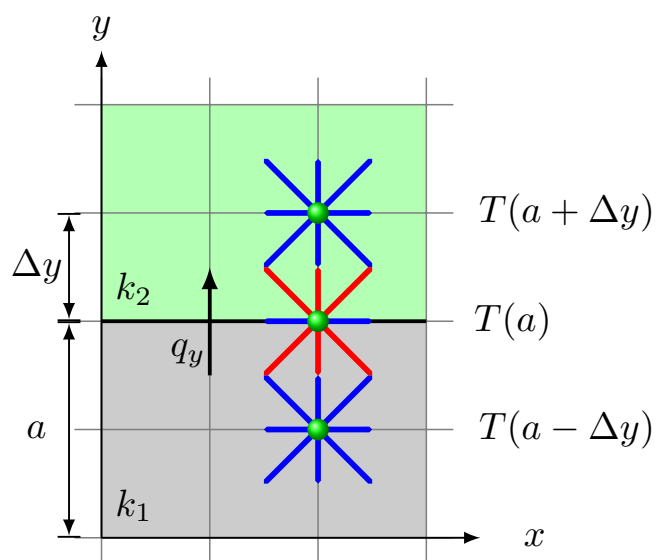


Figura A.5: Esquema de las funciones de distribución de temperatura T_k que se encuentran en los nodos de la interfase entre dos medios y en los nodos contiguos. Las líneas en rojo para el nodo de la interfase representan a las direcciones T_k que evolucionan con la condición de continuidad en el flujo de calor, Ec. (A.9) para $k = 0, 2, 4, 5, 6, 7$ y 8 . Las líneas en azul representan las direcciones de T_k que evolucionan con la Ec. (3.42). El flujo de calor en el eje vertical q_y , la conductividad térmica del primer medio k_1 y la del segundo medio k_2 , la altura de la interfase a y la distancia entre los nodos Δy .

Bibliografía

- [1] Majed M. Al-Hazmy. Analysis of coupled natural convection-conduction effects on the heat transport through hollow building blocks. *Energy and Buildings*, 38(5):515–521, 2006.
- [2] L.P. Li, Z.G. Wu, Y.L. He, G. Lauriat, and W.Q. Tao. Optimization of the configuration of $290 \times 140 \times 90$ hollow clay bricks with 3-D numerical simulation by finite volume method. *Energy and Buildings*, 40(10):1790–1798, 2008.
- [3] Mohamed a. Antar and Hasan Baig. Conjugate conduction-natural convection heat transfer in a hollow building block. *Applied Thermal Engineering*, 29(17-18):3716–3720, 2009.
- [4] Xiaowen Shan. Simulation of Rayleigh-Bénard convection using a lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 55(3):2780–2788, 1997.
- [5] M. Mohammadi Pirouz, M. Farhadi, K. Sedighi, H. Nemati, and E. Fattahi. Lattice Boltzmann simulation of conjugate heat transfer in a rectangular channel with wall-mounted obstacles. *Scientia Iranica*, 18(2):213 – 221, 2011.
- [6] Mohsen Eshraghi and Sergio D. Felicelli. An implicit lattice Boltzmann model for heat conduction with phase change. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(9-10):2420–2428, 2012.
- [7] Chun-Pao Kuo Wen-Shu Jiaung, Jeng-Rong Ho. Lattice Boltzmann method for the heat conduction problem with phase change. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 39(2):167–187, 2001.

- [8] K. Huang. *Statistical mechanics*. J. Wiley, 1987.
- [9] D. D’Humières Y. H. Qian and P. Lallemand. Lattice BGK Models for Navier-Stokes equation. *EPL (Europhysics Letters)*, 17(6):479 – 484, 1992.
- [10] Xiaoyi He, Shiyi Chen, and Gary D. Doolen. A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit. *Journal of Computational Physics*, 146(1):282 – 300, 1998.
- [11] Zhaoli Guo, Baochang Shi, and Chuguang Zheng. A coupled lattice BGK model for the Boussinesq equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39(4):325 – 342, 2002.
- [12] Zhaoli Guo, Baochang Shi, and Nengchao Wang. Lattice BGK Model for Incompressible Navier-Stokes equation. *Journal of Computational Physics*, 165(1):288 – 306, 2000.
- [13] Michael C. Sukop and Daniel T. Thorne Jr. *Lattice Boltzmann Modeling*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [14] Guy McNamara and Berni Alder. Analysis of the lattice Boltzmann treatment of hydrodynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 194(1-4):218 – 228, 1993.
- [15] S Succi, C Arrighetti, and Annunziata D Orazio. Lattice Boltzmann simulation of open flows with heat transfer. *Physics of Fluids*, 2778(2003), 2012.
- [16] Annunziata D Orazio, Massimo Corcione, and Gian Piero. Application to natural convection enclosed flows of a lattice Boltzmann BGK model coupled with a general purpose thermal boundary condition. *International Journal of Thermal Sciences*, 43:575–586, 2004.
- [17] G. Barrios, R. Rechtman, J. Rojas, and R. Tovar. The lattice Boltzmann equation for natural convection in a two-dimensional cavity with a partially heated wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 522:91–100, 2005.
- [18] JGM Eggels and JA Somers. Numerical simulation of free convective flow using the lattice-Boltzmann scheme. *International journal of heat and fluid flow*, 16(5):J. G. M. Eggels, 1995.
- [19] Annunziata Orazio and Sauro Succi. Simulating two-dimensional thermal channel flows by means of a lattice Boltzmann method with new boundary conditions. *Future Generation Computer Systems*, 20(6):935–944, 2004.

- [20] K. Yamamoto and N. Takada. Lattice Boltzmann simulation on soot combustion in porous media. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 362(1):111 – 117, 2006.
- [21] E. Aharonov and D.H. Rothman. Non-Newtonian flow (through porous media): A lattice-Boltzmann method. *Geophysical Research Letters*, 20(8):679 – 682, 1993.
- [22] G.F. Syms. Simulation of simplified-frigate airwakes using a lattice-Boltzmann method. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 96(6 - 7):1197 – 1206, 2008.
- [23] Y. Pomeau J. Hardy and O. de Pazzis. Time evolution of a two-dimensional model system. I. invariant states and time correlation functions. *Journal of Mathematical Physics*, 14(12):1746–1759, 1973.
- [24] Y. Peng, C. Shu, and Y. T. Chew. Simplified thermal lattice Boltzmann model for incompressible thermal flows. *Phys. Rev. E*, 68:026701, 2003.
- [25] Xiaoyi He and Li-Shi Luo. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 56:6811– 6817, 1997.
- [26] P.J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic, 1975.
- [27] Santosh Ansumali and Iliya V Karlin. Stabilization of the lattice Boltzmann method by the H theorem: A numerical test. *Physical Review E*, 62(6):7999–8003, 2000.
- [28] Y. Chen, H. Ohashi, and M. Akiyama. Thermal lattice Bhatnagar-Gross-Krook model without nonlinear deviations in macrodynamic equations. *Phys. Rev. E*, 50:2776–2783, 1994.
- [29] Annunziata D Orazio. Boundary conditions for thermal lattice Boltzmann simulations. 1:977–986, 2003.
- [30] G. Barrios and R. Rechtman. Dynamics of an acoustically levitated particle using the lattice Boltzmann method. *Journal of Fluid Mechanics*, 596:191–200, 2008.
- [31] F. Mandujano and R. Rechtman. Thermal levitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 606:105–114, 2008.

- [32] F.P. Incropera and D.P. DeWitt. *Fundamentals of heat transfer*. Wiley, 1981.
- [33] S. Lorente, M. Petit, and R. Javelas. Simplified analytical model for thermal transfer in vertical hollow brick. *Energy and Buildings*, 24(2):95–103, 1996.
- [34] B. Lacarrière, a. Trombe, and F. Monchoux. Experimental unsteady characterization of heat transfer in a multi-layer wall including air layers-Application to vertically perforated bricks. *Energy and Buildings*, 38(3):232–237, 2006.
- [35] T. Ait-taleb, A. Abdelbaki, and Z. Zrikem. Numerical simulation of coupled heat transfers by conduction, natural convection and radiation in hollow structures heated from below or above. *International Journal of Thermal Sciences*, 47(4):378–387, 2008.
- [36] K. Arendt, M. Krzaczek, and J. Florczuk. Numerical analysis by FEM and analytical study of the dynamic thermal behavior of hollow bricks with different cavity concentration. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(8):1543–1553, 2011.
- [37] Jiapeng Sun and Liang Fang. Numerical simulation of concrete hollow bricks by the finite volume method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(23-24):5598–5607, 2009.
- [38] Mohamed A Antar. Thermal radiation role in conjugate heat transfer across a multiple-cavity building block. *Energy*, 35(8):3508–3516, 2010.
- [39] J.J. del Coz Díaz, P.J. García Nieto, a. Martín Rodríguez, a. Lozano Martínez-Luengas, and C. Betegón Biempica. Non-linear thermal analysis of light concrete hollow brick walls by the finite element method and experimental validation. *Applied Thermal Engineering*, 26(8-9):777–786, 2006.
- [40] J.J. del Coz Díaz, P.J. García Nieto, J. Domínguez Hernández, and F.P. Álvarez Rabanal. A FEM comparative analysis of the thermal efficiency among floors made up of clay, concrete and lightweight concrete hollow blocks. *Applied Thermal Engineering*, 30(17-18):2822–2826, 2010.
- [41] Refrigerating American Society of Heating and Air-Conditioning Engineers. *ASHRAE Handbook: Fundamentals*. American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Incorporated, 1989.

- [42] A. Bejan. *Convection heat transfer*. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1984.
- [43] B. Gebhart. *Heat transfer*. McGraw-Hill, 1971.
- [44] Huelsz G. Rojas J. Salas M. Barrios, G. Ener-Habitat. <http://www.enerhabitad.unam.mx/Cie2/>, 2012. [En línea].
- [45] Takaji Inamuro, Masato Yoshino, and Fumimaru Ogino. A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations. *Physics of Fluids*, 7(12):2928–2930, 1995.
- [46] Jun Cai and Xiulan Huai. Study on fluid-solid coupling heat transfer in fractal porous medium by lattice Boltzmann method. *Applied Thermal Engineering*, 30(6-7):715–723, 2010.
- [47] C Huber, A Parmigiani, B Chopard, M Manga, and O Bachmann. Lattice Boltzmann model for melting with natural convection. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29(5):1469–1480, 2008.
- [48] A N Kalarakis, G C Bourantas, E D Skouras, and V C Loukopoulos. Lattice-Boltzmann and meshless point collocation solvers for fluid flow and conjugate heat transfer. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 70(11):1428–1442, 2012.
- [49] Fankong Meng, Moran Wang, and Zhixin Li. Lattice Boltzmann simulations of conjugate heat transfer in high-frequency oscillating flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29(4):1203 – 1210, 2008.
- [50] Jinku Wang, Moran Wang, and Zhixin Li. A lattice Boltzmann algorithm for fluid-solid conjugate heat transfer. *International Journal of Thermal Sciences*, 46(3):228 – 234, 2007.