



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

ESTIMACIÓN DEL GRADIENTE UTILIZANDO EL DERIVADOR  
SUPER – TWISTING CON CONVERGENCIA ROBUSTA Y UNIFORME

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
BETUEL JUÁREZ LÓPEZ

TUTOR PRINCIPAL:  
FRIDMAN, LEONID, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

MÉXICO, D. F., AGOSTO 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dra. Verde Rodarte María Cristina  
Secretario: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto  
Vocal: Dr. Fridman Leonid  
1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René  
2<sup>d o</sup>. Suplente: Dr. Castaños Luna Fernando

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, UNAM, México, D.F.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Fridman Leonid

  
-----  
**FIRMA**

*Al padre siempre omnipresente, tejiendo la vida de la manera en la que la necesitamos.*

*A mi familia, siempre siendo la base e impulso para crear, perseguir y realizar sueños.*

# AGRADECIMIENTOS

---

A mi familia por darme la oportunidad de construir un futuro, sin su apoyo no sería quien soy hoy en día.

Al Dr. Leonid Fridman por darme la oportunidad de unirme a su grupo, apoyarme en mi desarrollo profesional, por su puntual orientación y por su paciencia.

Al Dr. Fernando Castaños Luna por orientarme y auxiliarme a cada paso de la elaboración de este trabajo de tesis.

A mis compañeros del grupo de modos deslizantes por sus acertadas observaciones que me ayudaron a mejorar este trabajo de tesis.

Finalmente agradezco al CONACYT por el apoyo económico suministrado durante mis estudios.

# ÍNDICE

## **1.- INTRODUCCIÓN**

1.1.- BÚSQUEDA DE EXTREMOS .....	7
1.2.- GRADIENTE .....	8
1.3.- ESTADO DEL ARTE.....	9
1.4.- MOTIVACIÓN .....	10
1.5.- OBJETIVOS .....	11
1.6.- CONTRIBUCIONES .....	11
1.7.- ESTRUCTURA DE LA TESIS .....	12

## **2.- ESTIMACIÓN DEL GRADIENTE**

2.1.- ESTIMADOR .....	13
2.1.1.- TEORÍA CLÁSICA.....	14
2.1.1.1.- UN PARÁMETRO DESCONOCIDO .....	14
2.1.2.- ESQUEMA PROPUESTO .....	18
2.1.2.1.- EJEMPLO .....	20
2.2.- ESTIMACIÓN DEL GRADIENTE MEDIANTE DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA.....	23
2.3.- ESTIMACIÓN EN LINEA DEL GRADIENTE .....	25

## **3.- DIFERENCIADORES CON MODOS DESLIZANTES DE ORDEN SUPERIOR**

3.1.- DIFERENCIADOR DE LEVANT DE PRIMER ORDEN .....	26
3.2.- DIFERENCIADOR ROBUSTO EXACTO Y UNIFORME (URED) .....	27
3.3.- PRUEBAS EXPERIMENTALES .....	33

## **4.- SIMULACIONES**

4.1.- FUNCIÓN DE POTENCIA .....	39
4.2.- GENERADOR DE CORRIENTE DIRECTA .....	47

**5.- CONCLUSIONES.....65**

**APÉNDICE A**

A.1.- CONTROL POR MODOS DESLIZANTES ..... 66

    A.1.1.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL CONTROL POR MD ..... 67

        A.1.1.1.- MODOS DESLIZANTES DE PRIMER ORDEN (1-MD)..... 68

        A.1.1.2.- DERIVADAS DE LIE..... 70

        A.1.1.3.- CONDICIÓN DE TRANSVERSALIDAD ..... 71

        A.1.1.4.- CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE 1-MD ..... 72

    A.1.2.- REGULARIZACIÓN. MOVIMIENTO EN MODO DESLIZANTE ..... 73

        A.1.2.1.- MÉTODO DE FILIPPOV ..... 73

        A.1.2.2.- MÉTODO DEL CONTROL EQUIVALENTE Y MOVIMIENTO DESLIZANTE IDEAL ..... 75

        A.1.2.3.- CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE 1-MD..... 77

        A.1.2.4.- ROBUSTEZ DE 1-MD..... 78

        A.1.2.5.- 1-MD EN SISTEMAS MIMO..... 81

        A.1.2.6.- CHATTERING..... 83

        A.1.2.7.- MODOS DESLIZANTES DE ORDEN SUPERIOR (MDOS)..... 84

**BIBLIOGRAFÍA.....90**

# 1.- INTRODUCCIÓN

---

La optimización de un sistema permite que la tarea para la cual está diseñado se realice de manera más eficiente. La optimización se enfoca en un objetivo específico ya sea maximizar una variable, minimizar un error, etc., cualquiera que sea el caso se definen variables de control y variables a controlar, además de las señales de entrada. Una vez definida la naturaleza de cada una de las variables y señales involucradas en el proceso, se aplica la estrategia de optimización más adecuada al objetivo planteado.

## 1.1.- BÚSQUEDA DE EXTREMOS

La búsqueda de extremos es un sistema de control usado para determinar y mantener el valor extremo de una función en tiempo real.

Considere una función con una entrada  $u$  y una salida  $y_p$ , que posee una característica en estado estacionario bien definida: Para cualquier entrada constante  $u$ , dentro de la región de operación, la salida  $y_p$  se mantiene constante. Esta situación se ilustra en la figura 1.1. El mapeo en estado estacionario puede ser expresado como  $y_p = g(u, p)$ . Puede depender de algunos otros factores como se refleja en la dependencia del parámetro  $p$ . Asumiendo que la relación  $g$  exhibe una situación extremal deseada, es decir  $y^*(p) = g(u^*(p), p)$ , un control de búsqueda de extremos determina  $u = u^*(p)$  y mantiene esta condición de extremo a pesar de las variaciones (lentas) en  $p$ . Lo más importante, un algoritmo de búsqueda de extremos logra estos objetivos sin necesitar de ningún conocimiento explícito acerca del sistema, su mapeo entrada/salida en estado estacionario  $g$  o el parámetro  $p$ . En particular la condición inicial para  $u$  no está necesariamente cerca del valor deseado  $u^*$ .

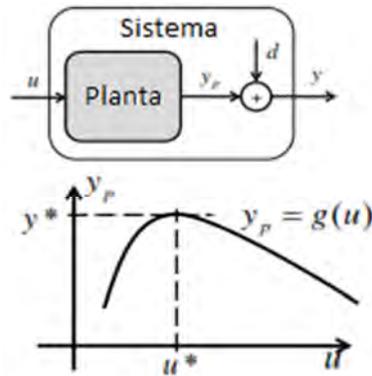


Figura 1.1.- Sistema entrada – salida con mapeo en estado estacionario, exhibiendo claramente un extremo (Tan, et al., 2010) <sup>[39]</sup>.

## 1.2.- GRADIENTE

El gradiente es una operación vectorial, que opera sobre una función escalar, para producir un vector cuya magnitud es la máxima razón de cambio de la función en el punto del gradiente y que apunta en la dirección de ese máximo. El gradiente  $\nabla f$  de un campo escalar  $f$  es un campo vectorial. El vector gradiente de  $f$  evaluado en un punto genérico  $x$  del dominio de  $f$ ,  $\nabla f(x)$ , indica la dirección en la cual el campo  $f$  varía más rápidamente y su módulo representa la velocidad de variación de  $f$  en la dirección de dicho vector gradiente.

En coordenadas rectangulares el gradiente de una función  $f(x, y, z)$  se expresa de la siguiente manera:

$$\nabla f = \left[ i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right] f$$

Teniendo en cuenta que los campos escalares se representan por superficies (tres dimensiones) o líneas (dos dimensiones). Tales superficies son denominadas “superficies equiescalares” (“isolineas”, en dos dimensiones) y son las formadas por todos los puntos del espacio para los que la función escalar  $f$  toma el valor  $f$ .

El gradiente es un vector conformado por:

- ❖ Módulo:  $|\nabla f|$ , se denomina derivada máxima y representa la máxima variación del campo escalar considerado por unidad de longitud.
- ❖ Dirección y sentido: Tiene dirección perpendicular a la superficie equiescalar en el punto considerado. Además tiene el sentido de los valores crecientes de  $f$ .

### 1.3.- ESTADO DEL ARTE

Probablemente el primer trabajo en la literatura inglesa sobre el algoritmo de búsqueda de extremos y su desempeño es el hecho por (Draper, Li, 1951) <sup>[11]</sup>. Este artículo explora como optimizar un motor de combustión interna, particularmente como seleccionar el tiempo de encendido (la entrada) para lograr la máxima potencia de salida. Desde esta publicación, los motores de combustión interna se han convertido en un dominio popular de aplicación para la búsqueda de extremos.

La mayoría de los resultados en los 1950's y los 1960's se centraron en describir los algoritmos, y explorar su desempeño en aplicaciones particulares o problemas a la mano (Ostrovskii, 1957) <sup>[33]</sup>, y hubieron muchas variantes. Los problemas de diseño eran prominentes, pero se carecía de definiciones claras, un análisis preciso y un marco de diseño sistemático. Esto fue puesto en evidencia, por ejemplo, en (Eykhoff, 1960) <sup>[14]</sup>.

En las siguientes tres décadas, 1970 – 2000, Se realizaron estudios de estabilidad (Luxat, Lees, 1971) <sup>[26]</sup>. Hasta 1990 la mayoría de los algoritmos de búsqueda de extremos usaban señales de excitación periódicas para explorar el mapeo en estado estacionario. Las señales estocásticas más que las determinísticas se volvieron de alguna manera populares (Spall, 1992) <sup>[38]</sup>.

Hay dos principales enfoques en la búsqueda de extremos:

- Usando una señal de excitación continua para explorar el mapeo en estado estacionario, del cual se puede obtener un gradiente implícito como en (Ariyur, Krstić, 2003) <sup>[11]</sup>.
- Usando una secuencia (repetida) de entradas de prueba constantes, que explota las ideas y los algoritmos de los métodos numéricos de optimización (Teel, Popović, 2000) <sup>[40]</sup>.

Cualquiera de los dos casos depende de manera importante en una adecuada separación entre las escalas de tiempo de la dinámica a optimizar y el esquema de optimización.

En cuanto al uso de modos deslizantes para la búsqueda de extremos, se mencionan algunos trabajos:

(Yu, Ozguner, 2002) <sup>[44]</sup> Realizan estudios de estabilidad para un esquema de búsqueda de extremos mediante modos deslizantes que utiliza funciones de búsqueda periódicas. Atacan el problema de oscilaciones en estado estacionario estimando una función de costo mediante un polinomio de orden limitado o una función parábola localmente.

(Pan, et al., 2008) <sup>[34]</sup> Realizan un seguimiento del punto máximo de potencia para sistemas de conversión de energía eólica de velocidad variable y frecuencia constante mediante

modos deslizantes. Para lograr la implementación del control para búsqueda de extremos basado en modos deslizantes utilizan una gran cantidad de relés e integradores.

(Fu, Ozguner, 2009) <sup>[16]</sup> Realizan la estimación del gradiente mediante un observador basado en modos deslizantes, aplicando posteriormente un control de estructura variable para obtener el valor óptimo. El esquema mostrado en este trabajo converge a una vecindad del valor real. Para sistemas con dinámicas rápidas no modeladas el tamaño de la cota de las desviaciones del punto de operación óptimo puede aumentar.

## 1.4.- MOTIVACIÓN

La optimización de un sistema permite que éste realice la tarea para la que está diseñado de una manera más eficiente. La búsqueda de extremos permite determinar la señal de entrada óptima que permite al sistema generar la salida máxima, de esta manera se aprovecha al máximo la señal de entrada aplicada. Por ejemplo, considere un aerogenerador donde el objetivo de optimización es la extracción de potencia eléctrica máxima. Un aerogenerador depende de las corrientes de aire para su funcionamiento, y dado que las condiciones climáticas varían aleatoriamente, es necesario aprovechar al máximo el torque generado por la acción de dichas corrientes de aire sobre las aspas del aerogenerador, además de generar la necesidad de realizar la optimización rápidamente.

En la práctica, la tasa de convergencia y la estabilidad de los sistemas de búsqueda de extremos basados en perturbaciones pueden ser muy sensibles a la curvatura del mapeo de la planta. Esta sensibilidad proviene del uso de un algoritmo de adaptación de gradiente descendente. Tales esquemas necesitan ser ajustados conservativamente para mantener la estabilidad sobre un rango amplio de condiciones de operación, resultando en una optimización más lenta que la lograda con una condición de operación fija. Esto puede reducir severamente la efectividad del esquema de búsqueda de extremos basado en perturbaciones en algunas aplicaciones.

En (Moase, et al., 2009) <sup>[27]</sup> se presenta un esquema de búsqueda de extremos basado en el método de Newton, utilizando un observador para la estimación del gradiente, requiriendo la utilización de los estimados de la primera y segunda derivada de la salida de la planta.

## 1.5.- OBJETIVOS

Como parte primordial de este trabajo de tesis se pretende desarrollar los siguientes puntos:

- Proponer un esquema de búsqueda de extremos que utilice un estimador del gradiente con la ayuda de derivadores basados en modos deslizantes de orden superior, siguiendo la estructura del gradiente descendente, esto sin caer en las limitaciones propias del método del gradiente descendente clásico, ya explicadas anteriormente, y además que requiera solo de la estimación de la primera derivada de la salida de la planta.
- Aplicar el esquema propuesto para la extracción de potencia eléctrica máxima a una función de potencia y un generador de corriente directa, respectivamente.

## 1.6.- CONTRIBUCIONES

Las principales contribuciones de este trabajo de tesis son las siguientes:

- Se propone un esquema de búsqueda de extremos, basado en la estructura del método del gradiente descendente, realizando una estimación del gradiente utilizando el diferenciador de Levant y el diferenciador exacto robusto y uniforme (URED), respectivamente.
- Se realiza una comparación del desempeño de ambos diferenciadores dentro del esquema de búsqueda de extremos propuesto.
- Se Aplica el esquema propuesto a la extracción de potencia eléctrica máxima para una función de potencia y para un generador de corriente directa, respectivamente.

## 1.7.- ESTRUCTURA DE LA TESIS

Los capítulos siguientes se estructuran como sigue:

- Capítulo 2: Se presenta la estructura del estimador a utilizar, así también se expone el esquema propuesto, orientado a la extracción de potencia eléctrica máxima.
- Capítulo 3: Se introducen los diferenciadores de Levant y URED, respectivamente, y se realiza una comparación de su desempeño.
- Capítulo 4: Se presentan las simulaciones correspondientes a la aplicación del esquema propuesto a la extracción de potencia máxima para una función de potencia y un generador de corriente directa, respectivamente.
- Capítulo 5: Se realizan las conclusiones pertinentes a los resultados obtenidos en este trabajo de tesis.
- Apéndice A: Se anexan algunos conceptos para la mejor comprensión y fundamentación de este trabajo de tesis.
- Bibliografía: Se presenta una lista del material de lectura utilizado para el desarrollo de este trabajo de tesis.

## 2.- ESTIMACIÓN DEL GRADIENTE

### 2.1.- ESTIMADOR

Existen varios tipos de representaciones de modelo y parametrizaciones que describen el comportamiento de una amplia clase de sistemas dinámicos. Dada la estructura del modelo, la respuesta del modelo está determinada por los valores de ciertas constantes referidas como parámetros de planta o de modelo. En algunas aplicaciones estos parámetros pueden ser medidos o calculados usando las leyes de la física, propiedades de los materiales, etc. En muchas otras aplicaciones, esto no es posible, y los parámetros tienen que ser deducidos observando la respuesta del sistema a ciertas entradas. Si los parámetros permanecen constantes para todo tiempo, su determinación es más sencilla, especialmente cuando el sistema es lineal y estable. En dado caso, simples técnicas en el dominio de la frecuencia o el tiempo pueden ser usadas para deducir los parámetros desconocidos procesando la respuesta medida fuera de línea. Por esta razón estas técnicas a menudo se conocen como técnicas de estimación de parámetros fuera de línea. En muchas aplicaciones, la estructura del modelo de la planta puede ser conocida, pero sus parámetros pueden ser desconocidos variando con el tiempo debido a las variaciones en la condiciones de operación, desgaste del equipo, etc., haciendo inefectivas las técnicas de estimación de parámetros fuera de línea. Los esquemas de estimación apropiados para usar en este caso son aquellos que proveen estimaciones frecuentes de los parámetros del modelo de la planta procesando apropiadamente los datos de entrada/salida de la planta en línea. Estos esquemas se conocen como esquemas de estimación en línea.

La idea esencial detrás de la estimación en línea es la comparación de la respuesta observada del sistema  $y(t)$ , con la salida de un modelo parametrizado  $\hat{y}(\theta, t)$  que tiene la misma estructura que el modelo de la planta. El vector de parámetros  $\theta(t)$  es ajustado continuamente de tal manera que  $\hat{y}(\theta, t)$  tienda a  $y(t)$  conforme  $t$  aumenta. Bajo ciertas condiciones de entrada, que  $\hat{y}(\theta, t)$  se encuentre cerca de  $y(t)$  implica que  $\theta(t)$  se encuentra cerca del vector de parámetros desconocido  $\theta^*$  del modelo de la planta. El procedimiento de estimación en línea, se divide en tres pasos: El primer paso es seleccionar una parametrización adecuada de la planta. El segundo paso es generar o actualizar  $\theta(t)$ . La ley de adaptación es usualmente una ecuación diferencial que tiene como estado a  $\theta(t)$  y se diseña usando consideraciones de estabilidad o simples técnicas de optimización para minimizar la diferencia entre  $y(t)$  y  $\hat{y}(\theta, t)$ , con respecto a  $\theta(t)$  para cada tiempo  $t$ . El tercer paso es el diseño de la entrada de la planta tal que las propiedades de la ley de adaptación impliquen que  $\theta(t)$  tienda al vector de parámetros desconocido de la planta  $\theta^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Los esquemas en línea son diseñados para ser usados con plantas estables o inestables. Esto es importante en control adaptable donde la estabilización de la planta desconocida es uno de los objetivos inmediatos.

## 2.1.1.- TEORÍA CLÁSICA

### 2.1.1.1.- UN PARÁMETRO DESCONOCIDO

Considere la siguiente planta descrita por la ecuación algebraica

$$y(t) = \theta^* u(t) \quad (2.2.1)$$

Donde  $u \in \mathcal{L}_\infty$ , es la entrada escalar. La norma  $\mathcal{L}_\infty$  está definida como

$$\|u\|_\infty \triangleq \sup_{t \geq 0} |u(t)|$$

y se dice que  $u \in \mathcal{L}_\infty$  cuando  $\|u\|_\infty$  existe.

$y(t)$  es la salida, y  $\theta^*$  es un escalar desconocido. Asumiendo que  $u(t)$ ,  $y(t)$  son medidas, se desea obtener un estimado de  $\theta^*$  para cada tiempo  $t$ . Si las mediciones de  $y$ ,  $u$  estuvieran libres de ruido, se podría simplemente calcular  $\theta(t)$ , el estimado de  $\theta^*$ , como

$$\theta(t) = \frac{y(t)}{u(t)} \quad (2.2.2)$$

Donde  $u(t) \neq 0$ . Esta división, podría ser no deseable dado que  $u(t)$  podría tomar valores arbitrariamente cerca de cero. Además, el efecto del ruido en las mediciones de  $u$ , y podría llevar a una estimación errónea de  $\theta^*$ . El ruido y los efectos de errores computacionales pueden ser reducidos usando otros varios métodos no recursivos o fuera de línea espacialmente cuando  $\theta^*$  es constante para todo  $t$ .

En este caso se usará un método recursivo para generar  $\theta(t)$ .

Usando  $\theta(t)$  como estimado de  $\theta^*$  en el tiempo  $t$ , se genera el estimado o valor previsto  $\hat{y}(t)$  de la salida  $y(t)$  como

$$\hat{y}(t) = \theta(t)u(t) \quad (2.3)$$

La predicción o error de estimación  $\epsilon_1$ , que refleja la incertidumbre en los parámetros dado que  $\theta(t)$  es diferente de  $\theta^*$ , se define como la diferencia entre  $\hat{y}$  y  $y$ , es decir

$$\epsilon_1 = y - \hat{y} = y - \theta u \quad (2.4.1)$$

La dependencia de  $\epsilon_1$  en el error de estimación de parámetros  $\tilde{\theta} \triangleq \theta - \theta^*$  se vuelve obvia

$$\epsilon_1 = \theta^* u - \theta u = -\tilde{\theta} u \quad (2.4.2)$$

La ecuación diferencial para generar  $\theta(t)$  se obtiene minimizando varios criterios de costo de  $\epsilon_1$  con respecto a  $\theta$  usando el método del gradiente o el método de Newton. Se emplea un criterio de costo simple

$$J(\theta) = \frac{\epsilon_1^2}{2} = \frac{(y - \theta u)^2}{2} \quad (2.5)$$

que se minimiza con respecto a  $\theta$ . Para cada tiempo  $t$ , la función  $J(\theta)$  es convexa sobre  $\mathcal{R}^1$ ; por lo tanto, cualquier mínimo local de  $J$  es también global y satisface  $\nabla J(\theta) = 0$ . Se puede resolver  $\nabla J(\theta) = -(y - \theta u)u = 0$  para  $\theta$  y obtener el esquema no recursivo o usar el método del gradiente para formar el esquema recursivo

$$\dot{\theta} = -\gamma \nabla J(\theta) = \gamma (y - \theta u) u = \gamma \epsilon_1 u, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (2.6)$$

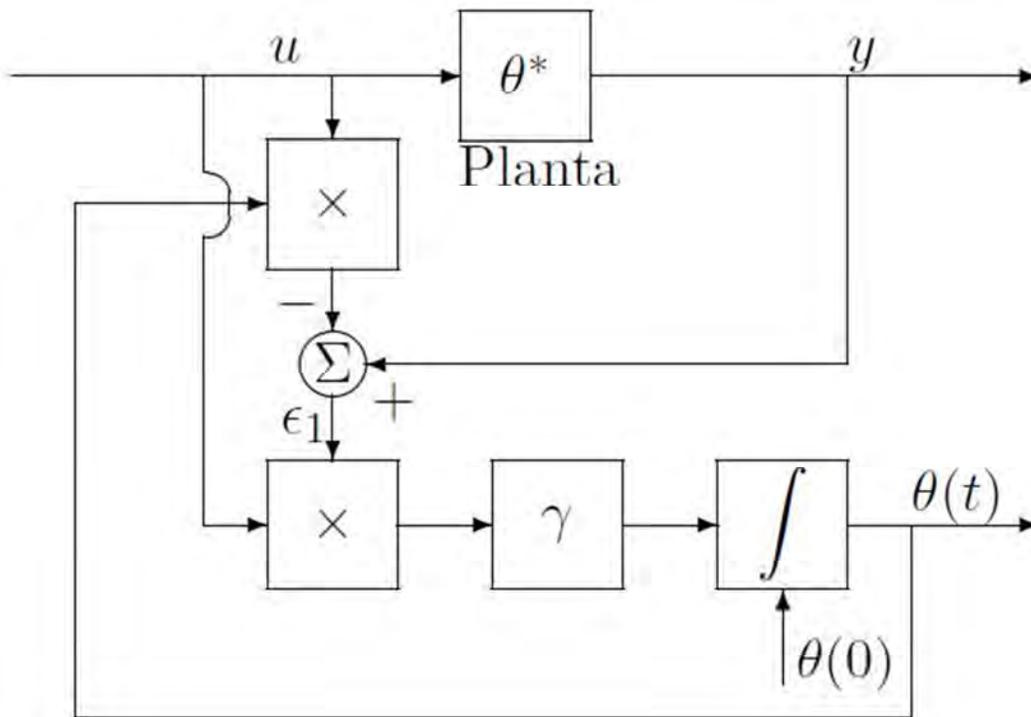


Figura 2.1. Implementación de la ley adaptable escalar (Iannou, Sun, 1996) <sup>[17]</sup>.

donde la constante de escalamiento es  $\gamma > 0$ , la cual se conoce como ganancia de adaptación.

Las propiedades de estabilidad de (2.6) se analizan reescribiendola en términos del error de parámetros  $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ , es decir,

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}^* = \gamma \epsilon_1 u - \dot{\theta}^*$$

Dado que  $\epsilon_1 = \theta^* u - \theta u = -\tilde{\theta} u$  y  $\theta^*$  es constante, es decir,  $\dot{\theta}^* = 0$ , se tiene

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma u^2 \tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta}(0) = \theta(0) - \theta^* \quad (2.7)$$

Se debe enfatizar que (2.7) se usa solo para análisis. No se puede usar para generar  $\theta(t)$  ya que dado un estimado inicial  $\theta(0)$  de  $\theta^*$ , el valor inicial  $\tilde{\theta}(0) = \theta(0) - \theta^*$ , que se requiere para implementar (2.7) es desconocido debido a que  $\theta^*$  es desconocido.

Se analiza (2.7) eligiendo la función de Lyapunov

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^2}{2\gamma}$$

La derivada con respecto al tiempo,  $\dot{V}$ , de  $V$  a lo largo de la solución de (2.7) está dada por

$$\dot{V} = \frac{\tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}}}{\gamma}$$

La cual después de sustituir  $\dot{\tilde{\theta}}$  de (2.7) se obtiene

$$\dot{V} = -u^2 \tilde{\theta}^2 = -\epsilon_1^2 \leq 0 \quad (2.8)$$

Lo que implica que el equilibrio  $\tilde{\theta}_e = 0$  de (2.6) es uniformemente estable, es decir sí para cada  $\epsilon > 0$  existe una  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que se satisface:

$$\|\tilde{\theta}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\tilde{\theta}(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

Dado que no se asume mayor información acerca de  $u(t)$  otra que  $u \in \mathcal{L}_\infty$ , no se puede garantizar que  $\dot{V} < 0$  y, por lo tanto, no se puede establecer que  $\tilde{\theta}_e = 0$  sea asintóticamente estable o exponencialmente estable, se puede sin embargo, usar las propiedades de  $V, \dot{V}$  para establecer la convergencia del error de estimación y otras señales en (2.6). Por ejemplo, dado que  $V \geq 0$  es una función del tiempo no creciente, el  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\tilde{\theta}(t)) = V_\infty$  existe. Por lo tanto, de (2.8) se tiene

$$\int_0^\infty \epsilon_1^2(\tau) d\tau = - \int_0^\infty \dot{V}(\tau) d\tau = V_0 - V_\infty$$

Donde  $V_0 = V(\tilde{\theta}(0))$ , lo cual implica que  $\epsilon_1 \in \mathcal{L}_2$ , de (2.6) y  $u \in \mathcal{L}_\infty$ , también se tiene que  $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ . Dado que una función cuadrada integrable puede no tener un límite, que tienda a cero con el tiempo, no se puede establecer que  $\epsilon_1(t), \dot{\theta}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  sin condiciones adicionales. Sí, sin embargo, se asume que  $\dot{u} \in \mathcal{L}_\infty$ , entonces resulta que  $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\theta}u - \tilde{\theta}\dot{u} \in \mathcal{L}_\infty$ ; por lo tanto, del lema

*Lema 3.1:* Si  $f, \dot{f} \in \mathcal{L}_\infty$  y  $f \in \mathcal{L}_p$  para alguna  $p \in [1, \infty)$ , entonces  $f(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$

El cual está implícito en  $\epsilon_1 \in \mathcal{L}_2, \dot{\epsilon}_1 \in \mathcal{L}_\infty$ . Esto, a su vez, lleva a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}(t) = 0 \quad (2.9)$$

La conclusión de este análisis es que para cualquier  $u, \dot{u} \in \mathcal{L}_\infty$ , la ley de adaptación (2.6) garantiza que la salida estimada  $\hat{y}(t)$  converge a la salida actual  $y(t)$  y la velocidad de adaptación (es decir, la velocidad de cambio de los parámetros  $\dot{\theta}$ ) decrece con el tiempo y converge a cero asintóticamente.

### 2.1.1.1.1.- EJEMPLO

Considere como parámetro a estimar  $\theta^* = 10$ . Usando la ley de adaptación (2.6) y la estructura de la figura 2.1 se construye el estimador de la siguiente manera, donde  $\gamma = 5$ .

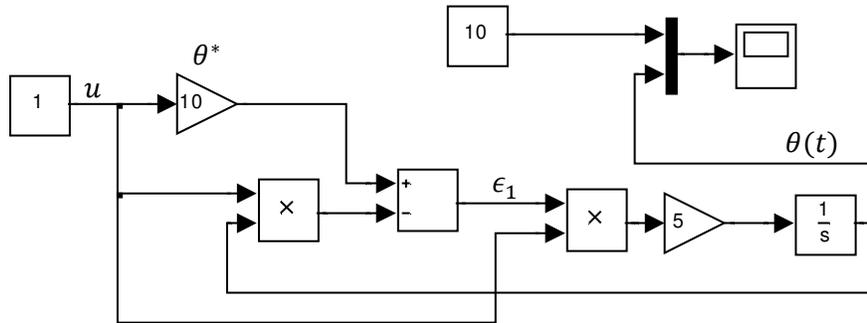


Figura 2.2. Estimador de un parámetro constante desconocido.

Los resultados obtenidos al aplicar el estimador anterior son los siguientes.

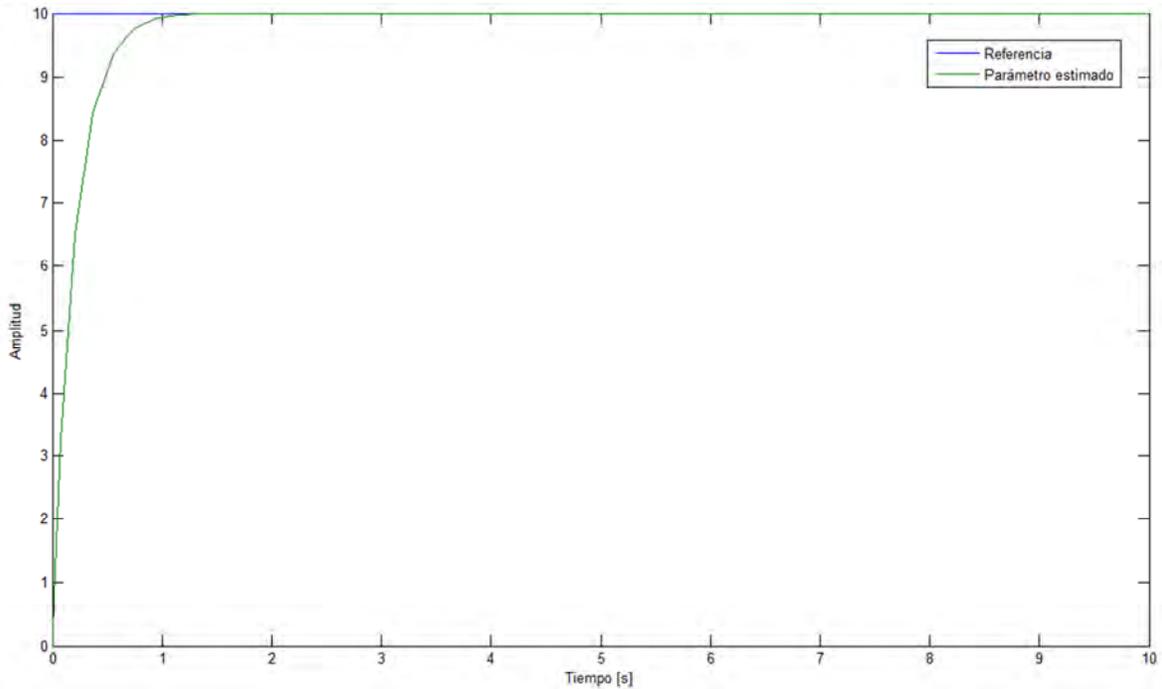


Figura 2.3. Respuesta del estimador de un parámetro constante desconocido.

Como se puede observar en la figura 2.3, el estimador no tiene ningún problema en estimar un parámetro constante, pero ¿Qué sucede cuando el parámetro a estimar varía en el tiempo?

### 2.1.2.- ESQUEMA PROPUESTO

Considere ahora que el parámetro a estimar es variante en el tiempo, esto implica que  $\dot{\theta}^* \neq 0$ . Recordando el análisis de estabilidad de (2.6) anteriormente hecho, la ecuación (2.7) queda de la siguiente manera

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma u^2 \tilde{\theta} - \dot{\theta}^*, \quad \tilde{\theta}(0) = \theta(0) - \theta^* \quad (2.10)$$

Se analiza (2.10) eligiendo la función de Lyapunov

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^2}{2\gamma}$$

La derivada con respecto al tiempo,  $\dot{V}$ , de  $V$  a lo largo de la solución de (2.10) está dada por

$$\dot{V} = \frac{\tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}}}{\gamma}$$

La cual después de sustituir  $\tilde{\theta}$  de (2.10) se obtiene

$$\dot{V} = -u^2 \tilde{\theta}^2 - \frac{\dot{\theta}^* \tilde{\theta}}{\gamma} = -\epsilon_1^2 - \frac{\dot{\theta}^* \tilde{\theta}}{\gamma} \quad (2.11)$$

En comparación con el resultado obtenido en la ecuación (2.8), el término  $-\frac{\dot{\theta}^* \tilde{\theta}}{\gamma}$  impide garantizar que el error de estimación tienda a cero y que la salida estimada  $\hat{y}$  converja al valor de la salida real  $y$ .

A partir del esquema para estimar un parámetro constante desconocido, se propone un cambio en la ley de adaptación (2.6) utilizando una función signo, dando como resultado la siguiente expresión.

$$\dot{\theta} = \gamma \text{sign}(\epsilon_1 u), \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (2.12)$$

Se elige la superficie

$$s = \epsilon_1 u \quad (2.13)$$

Se analiza (2.13) eligiendo la función de Lyapunov

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^2}{2}$$

La derivada con respecto al tiempo de  $V$  está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\theta}) &= \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \\ &\vdots \\ \dot{V} &= \tilde{\theta} (\gamma \text{sgn}(\epsilon_1 u) - \dot{\theta}^*) \\ &\vdots \\ \dot{V} &= \tilde{\theta} \gamma \text{sgn}(\epsilon_1 u) - \tilde{\theta} \dot{\theta}^* \end{aligned} \quad (2.14)$$

Anteriormente se estableció que

$$\epsilon_1 = \theta^* u - \theta u = -\tilde{\theta} u \text{ y por lo tanto } \epsilon_1 u = -\tilde{\theta} u^2$$

Sustituyendo este resultado en la función signo de la derivada con respecto al tiempo de  $V$ , se tiene la siguiente expresión:

$$\text{sgn}(-\tilde{\theta} u^2)$$

y dado que la función signo es una función impar, la expresión anterior queda de la siguiente manera:

$$-sgn(\tilde{\theta}u^2) = -sgn(\tilde{\theta})$$

Esto se cumple para  $u \neq 0$ , y dado que para lograr la convergencia con el esquema es necesaria una excitación persistente se cumple con la condición.

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.14), resulta la siguiente expresión:

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}\gamma sgn(\tilde{\theta}) - \tilde{\theta}\dot{\theta}^*$$

Quedando finalmente de la siguiente forma:

$$\dot{V} = -|\tilde{\theta}|\gamma - \tilde{\theta}\dot{\theta}^*$$

De la ecuación anterior se puede deducir que si el valor de la ganancia  $\gamma$  es lo suficientemente grande puede dominar a la deriva del parámetro a estimar, es decir, si el valor de la ganancia  $\gamma > |\dot{\theta}^*|$ , de esta manera se puede garantizar que:

$$\dot{V} \leq -|\tilde{\theta}|\gamma - \tilde{\theta}\dot{\theta}^* \leq 0$$

Este último resultado implica que el error de estimación converge a cero y que el valor de la salida estimada  $\hat{y}$  converge al valor de la salida real  $y$ .

### 2.1.2.1.- EJEMPLO

Se suma una función  $\sin t$  al parámetro constante del ejemplo anterior para tener un parámetro a estimar que varía en el tiempo  $\theta^* = 10 + \sin t$ , usando la estructura que se muestra a continuación se realiza la estimación de dicho parámetro, donde  $\gamma = 15$ .

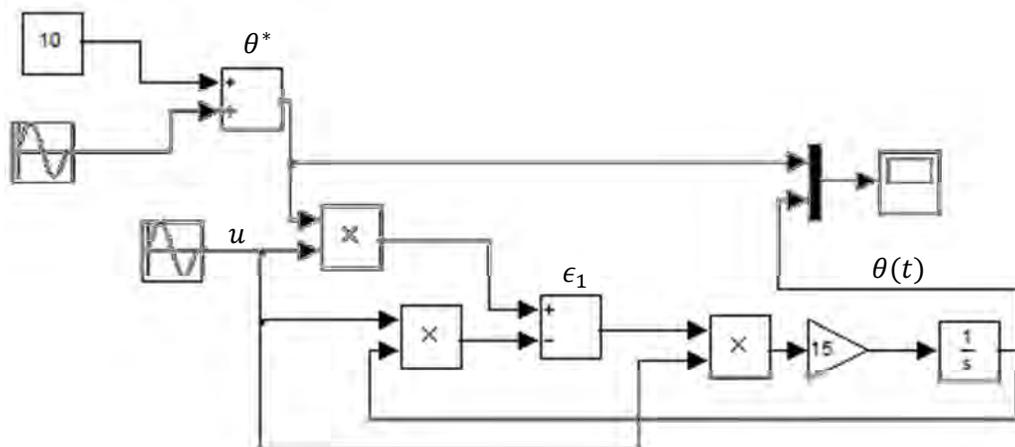


Figura 2.4. Estimador de un parámetro constante desconocido, parámetro a estimar variante en el tiempo.

La respuesta generada por el estimador de la figura 2.4 se muestra a continuación.

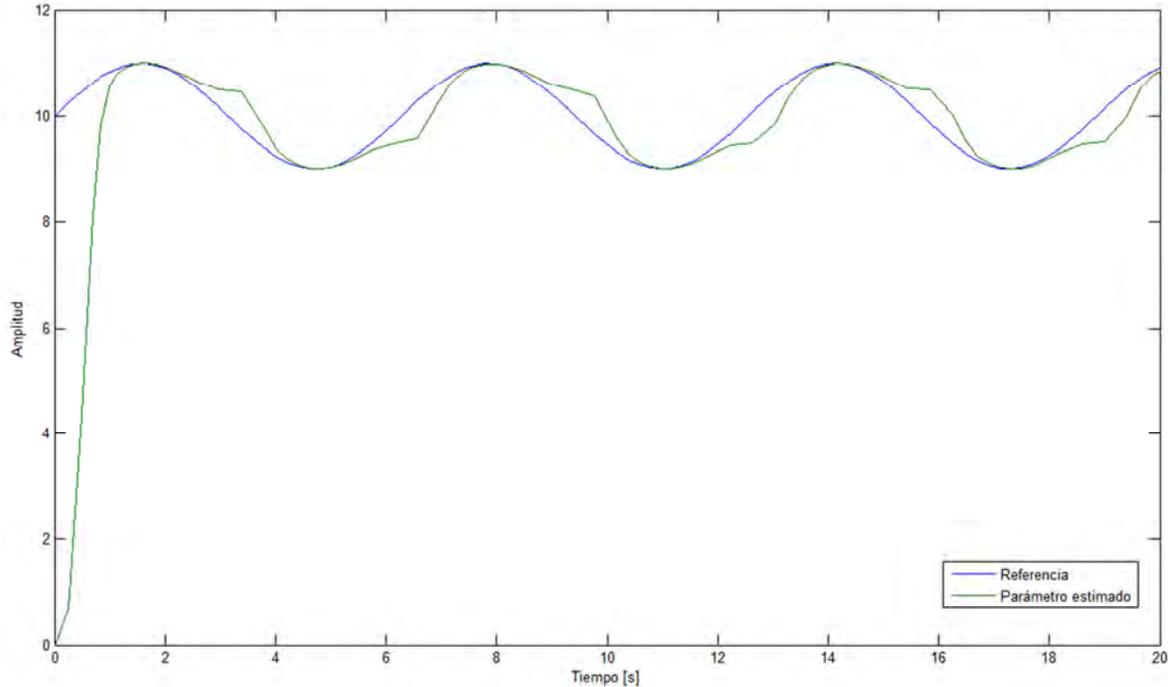


Figura 2.5. Respuesta del estimador de un parámetro constante desconocido para un parámetro variante en el tiempo.

Como se puede observar en la figura 2.5, el estimador no es capaz de realizar una estimación adecuada del parámetro  $\theta^*$  dado que éste es variable en el tiempo y la estructura del estimador está hecha para la estimación de un parámetro constante.

Para este ejemplo en particular  $\theta^* = 10 + \sin t$ , y por lo tanto  $\dot{\theta}^* = \cos t$ . De esta manera la ecuación (2.11) queda de la siguiente manera.

$$-\epsilon_1^2 - \frac{\tilde{\theta}}{\gamma} < \dot{V} < -\epsilon_1^2 + \frac{\tilde{\theta}}{\gamma}$$

Como se pudo observar en la figura 2.5, mientras la velocidad de cambio del parámetro a estimar aumenta el error de estimación aumenta, es decir este planteamiento solo es útil mientras el parámetro a estimar sea constante.

La expresión (2.12) permite realizar la estimación de un parámetro variante en el tiempo usando prácticamente la misma estructura que en la figura 2.4.

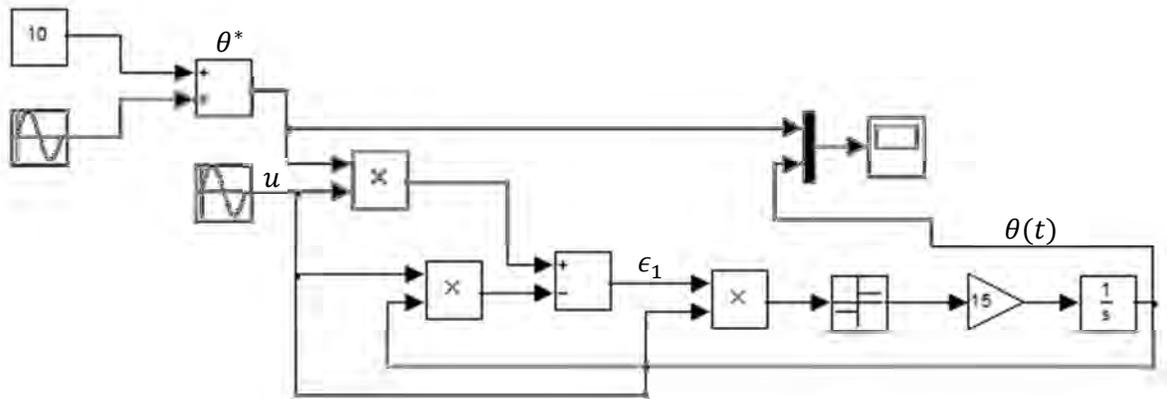


Figura 2.6. Estimador de un parámetro variante en el tiempo usando la ley de adaptación (2.12)

Los resultados de la implementación de la estructura de la figura 2.6 se muestran a continuación. El parámetro a estimar en este caso  $\theta^* = 10 + \sin t$ , con una ganancia de adaptación  $\gamma = 15$ .

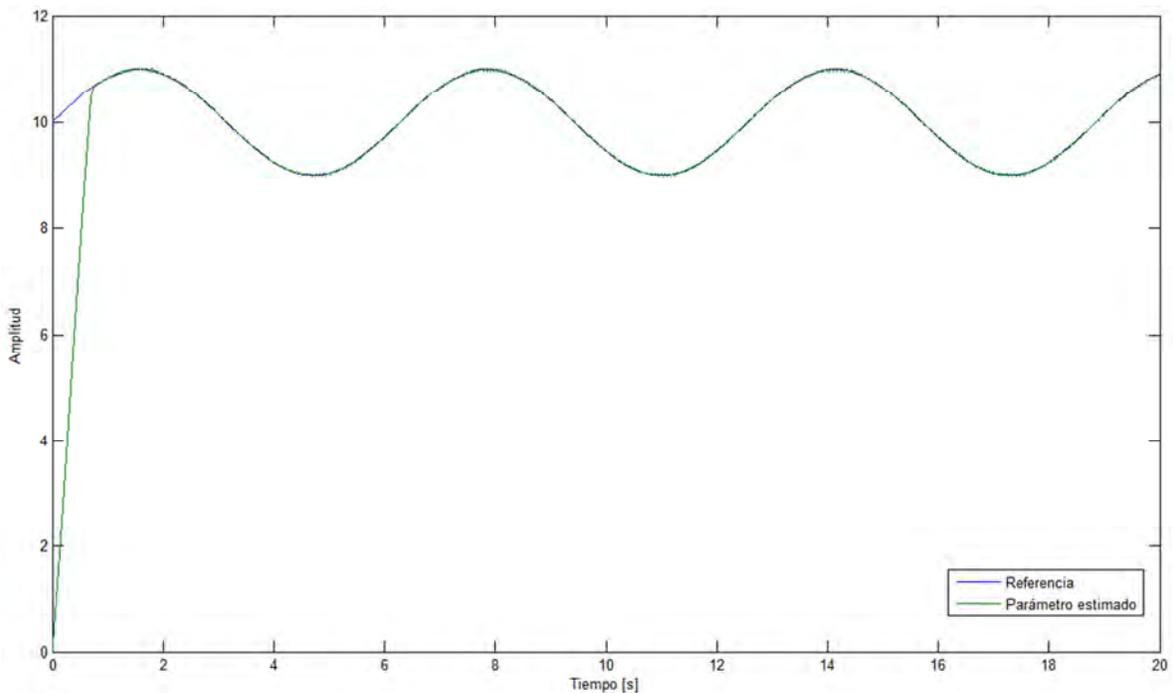


Figura 2.7. Respuesta del estimador de un parámetro variante en el tiempo

La ley de adaptación (2.12) logra realizar una buena estimación de un parámetro variante en el tiempo, como se puede observar en la figura 2.7.

## 2.2.- ESTIMACIÓN DEL GRADIENTE MEDIANTE DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

A continuación se emplea el esquema propuesto anteriormente en conjunto con una ley de adaptación de gradiente descendente orientado a la búsqueda de extremos, más concretamente a la optimización de un sistema del cual se pretende maximizar la extracción de potencia eléctrica, es decir el parámetro a estimar en este caso será el valor óptimo de corriente o voltaje, respectivamente, que genera dicha potencia eléctrica máxima.

Considere una función de potencia localmente estrictamente cóncava.

$$P(i) = V(i) \cdot i \quad (2.15)$$

Donde  $V = \text{Voltaje}$  e  $i = \text{Corriente}$

Basado en mediciones de  $V$  e  $i$ , se intenta obtener la corriente de referencia  $i_*$ , que extrae la máxima potencia, esto es, tal que:

$$P'(i_*) = 0 \quad (2.16)$$

Aplicando el método del gradiente descendente se obtiene:

$$i_{n+1} = i_n - \frac{f(i)}{f'(i)}$$

A partir de esta ecuación, usando una ley de gradiente descendente aproximada, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{di}{dt} = -\gamma \frac{1}{f'(i)} f(i) \quad (2.17)$$

Esto generará la  $i_*$  apropiada, donde  $f(i) := P'(i)$  y  $\gamma > 0$  es una ganancia a diseñar. Esto permite encontrar  $*$  tal que  $f(*) = 0$ , de esta manera, la ecuación (2.17) implica que

$$i \rightarrow i_*, \quad f(i_*) = P'(i_*) = 0.$$

Dado que el valor de  $f(i)$  es desconocido el sistema dinámico (2.17) no puede ser implementado directamente. El valor de  $f'(i)$  es por lo tanto también desconocido, pero es negativo definido, ya que se pretende obtener un máximo, de esta manera el sistema

$$\frac{di}{dt} = \gamma f(i)$$

posee las propiedades de convergencia deseadas. El problema se reduce de esta manera a estimar  $f(i)$ .

De manera análoga se presentan las ecuaciones para una función de potencia que depende del voltaje.

$$P(V) = i(V) \cdot V \quad (2.18)$$

Voltaje de referencia que extrae la máxima potencia:

$$P'(V_*) = 0 \quad (2.19)$$

Aplicando el método del gradiente descendente se obtiene:

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma \frac{1}{f'(V)} f(V) \quad (2.20)$$

Esto generará la  $V_*$  apropiada, donde  $f(V) := P'(V)$  y  $\gamma > 0$  es una ganancia a diseñar. La ecuación (2.20) implica que:

$$V \rightarrow V_*, \quad f(V_*) = P'(V_*) = 0$$

Finalmente se obtiene:

$$\frac{dV}{dt} = \gamma f(V)$$

Anteriormente se presentó el desarrollo para obtener la potencia eléctrica máxima para una función de potencia expresada primeramente en términos de la corriente y posteriormente en términos del voltaje. Se presenta a continuación el esquema para obtener la potencia eléctrica mínima para ambos casos.

De la ecuación (2.17) y dado que en este caso se pretende obtener un mínimo, la segunda derivada de la potencia  $f'(i)$  es desconocida pero es positiva definida, de tal manera que la expresión para obtener la potencia eléctrica mínima es la siguiente:

$$\frac{di}{dt} = -\gamma f(i)$$

El problema radica igualmente en estimar  $f(i)$ .

De manera análoga para una función de potencia en términos del voltaje se tiene la siguiente expresión para obtener la potencia eléctrica mínima.

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma f(V)$$

## 2.3.- ESTIMACIÓN EN LINEA DEL GRADIENTE

Nótese que:

$$\frac{dP}{dt} = P'(i) \frac{di}{dt} = f(i) \frac{di}{dt} \quad (2.21)$$

Se establece que  $y := \frac{dP}{dt}$ ,  $u := \frac{di}{dt}$  y  $\theta := \frac{dP}{di}$ . La señal  $y$  puede obtenerse diferenciando el producto  $v(t)i(t)$  y  $u$  corresponde a la derivada que se impone en  $i$ , por lo tanto  $u$  y  $y$  están disponibles. Se reescribe (2.21) en una forma más familiar:

$$y = \theta(t)u, \quad \theta(t) := f \circ i(t) := f[i(t)]$$

De manera análoga se presentan las ecuaciones para una función de potencia que depende del voltaje.

$$\frac{dP}{dt} = P'(V) \frac{dV}{dt} = f(V) \frac{dV}{dt} \quad (2.22)$$

Se establece que  $y := \frac{dP}{dt}$ ,  $u := \frac{dV}{dt}$  y  $\theta := \frac{dP}{dV}$ . La señal  $y$  puede obtenerse diferenciando el producto  $v(t)i(t)$  y  $u$  corresponde a la derivada que se impone en  $V$ , por lo tanto  $u$  como  $y$  están disponibles. Se reescribe (2.22) en una forma más familiar:

$$y = \theta(t)u, \quad \theta(t) := f \circ v(t) := f[v(t)]$$

En ambos casos es necesaria la diferenciación de la señal  $y$ , por tal motivo en este trabajo se utilizarán diferenciadores basados en la teoría de modos deslizantes de orden superior, los cuales se describen en el capítulo siguiente.

## 3.- DIFERENCIADORES CON MODOS DESLIZANTES DE ORDEN SUPERIOR

### 3.1.- DIFERENCIADOR DE LEVANT DE PRIMER ORDEN

El problema principal en el diseño de diferenciadores es combinar la exactitud con la robustez respecto a posibles errores de medición y presencia de ruido.

En (Levant, 1998) <sup>[21]</sup> se propone un diferenciador de primer orden, donde se admiten perturbaciones e incertidumbres acotadas y el análisis de la precisión, la convergencia en tiempo finito y la estabilidad en presencia de perturbaciones acotadas se lleva a cabo mediante criterios geométricos, en este caso se hace uso de una curva mayorante.

Sea la señal de entrada  $f(t)$  una función medible localmente acotada, definida en  $[0, \infty)$  que consiste en una señal base que posee una derivada con constante de Lipschitz  $C > 0$  y una señal de ruido. Para diferenciar la señal base desconocida, se considera la ecuación auxiliar.

$$\dot{x} = u \quad (3.1)$$

Aplicando un algoritmo deslizando de segundo orden modificado (Levant, 1993) <sup>[20]</sup> para mantener  $x - f(t) = 0$ , se obtiene.

$$\begin{aligned} u &= u_1 - \lambda |x - f(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x - f(t)), \\ \dot{u}_1 &= -\alpha \text{sign}(x - f(t)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde  $\alpha, \lambda > 0$ .  $u(t)$  es la salida del diferenciador. Las soluciones del sistema (3.1), (3.2) son entendidas en el sentido de Filippov (Filippov, 1988) <sup>[15]</sup>.

Las condiciones suficientes para la convergencia de  $u(t)$  a  $\dot{f}(t)$  se muestran a continuación

$$\alpha > C, \quad \lambda^2 \geq 4C \frac{\alpha + C}{\alpha - C} \quad (3.3)$$

La condición (3.1) resulta de una estimación muy cruda, por lo tanto muchos otros valores pueden ser tomados, por ejemplo  $\lambda = C^{\frac{1}{2}}$ ,  $\alpha = 1.1C$ , o  $\lambda = 0.5C^{\frac{1}{2}}$ ,  $\alpha = 4C$ .

## 3.2.- DIFERENCIADOR ROBUSTO EXACTO Y UNIFORME (URED)

La diferenciación en tiempo real es un problema clásico e importante, con diferentes aplicaciones. El problema principal en el diseño de diferenciadores en tiempo real es la compensación entre exactitud y robustez con respecto al ruido y con respecto al muestreo de la señal de entrada.

Los diferenciadores discontinuos pueden ser teóricamente exactos para una amplia clase de señales. En particular se ha demostrado que el algoritmo super-twisting es muy conveniente para la diferenciación, dado que provee la mejor precisión asintótica en presencia de ruido acotado determinístico y medible en el sentido de Lebesgue, y con un muestreo discreto de la señal de entrada, cuando su segunda derivada con respecto al tiempo está acotada. Sin embargo el tiempo de convergencia de estos diferenciadores/observadores tiende a infinito cuando la norma de las condiciones iniciales del error de diferenciación crece ilimitadamente. Para el control por realimentación de salida, de un sistema no lineal, basado en un observador de estado esto significa que no se tiene la certeza de que el observador converge antes de que la trayectoria de la planta se escape a infinito. Esto recalca la importancia de contar con observadores/diferenciadores que converjan de manera exacta y robusta en tiempo finito, con tiempo de convergencia preestablecido, independientemente de las condiciones iniciales del error del observador/diferenciador y a pesar de perturbaciones acotadas.

Sea la señal de entrada  $f(t)$  del diferenciador, medible en el sentido de Lebesgue, definida en el intervalo  $[0, \infty)$ . Se asume que  $f(t)$  se puede expresar como  $f(t) = f_0(t) + v(t)$ , donde el primer término es una señal base desconocida  $f_0(t)$  dos veces diferenciable, a ser diferenciada, y posee una derivada con constante de Lipschitz conocida  $L > 0$ , y el segundo término  $v(t)$  corresponde a una señal de ruido uniformemente acotada. Si  $\zeta_0 = f_0(t)$  y  $\zeta_1 = \dot{f}_0(t)$ , una representación en espacio de estados está dada por

$$\dot{\zeta}_0 = \zeta_1, \dot{\zeta}_1 = \ddot{f}_0 \quad (3.4)$$

El objetivo principal es construir un diferenciador, que converja a  $\dot{f}_0(t)$ , exactamente, en tiempo finito, que puede ser preestablecido como una constante independiente de las condiciones iniciales del diferenciador (uniforme), usando solo mediciones de  $f_0(t)$ , y el conocimiento de la cota  $L$  de la segunda derivada de  $f_0(t)$ ,  $|\ddot{f}_0(t)| \leq L$ .

Basado en el algoritmo super-twisting generalizado (Moreno, 2009) <sup>[31]</sup>, se propone el URED como.

$$\dot{z}_0 = -k_1\phi_1(\sigma_0) + z_1, \quad \dot{z}_1 = -k_2\phi_2(\sigma_0) \quad (3.5)$$

donde  $\sigma_0 = z_0 - \zeta_0$ ,  $k_1$  y  $k_2$  son ganancias positivas a ser diseñadas.

$$\begin{aligned}\phi_1(\sigma_0) &= |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) + \mu |\sigma_0|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\sigma_0) \\ \phi_2(\sigma_0) &= \frac{1}{2} \text{sign}(\sigma_0) + 2\mu\sigma_0 + \frac{3}{2} \mu^2 |\sigma_0|^2 \text{sign}(\sigma_0)\end{aligned}$$

(Cruz-Zavala, Moreno, 2011) <sup>[8]</sup>

Y  $\mu \geq 0$  es un escalar. Cuando  $\mu = 0$  se recupera el diferenciador estándar robusto exacto propuesto en (Levant, 1998) <sup>[21]</sup>. Los términos de alto orden,  $|\sigma_0|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\sigma_0)$  y  $|\sigma_0|^2 \text{sign}(\sigma_0)$ , proporcionan la convergencia uniforme del diferenciador, es decir, el tiempo de convergencia estará acotado por una constante independiente de las condiciones iniciales del diferenciador.  $z_0$  y  $z_1$  son las estimaciones de  $f_0(t)$  y  $\dot{f}_0(t)$ , respectivamente. Siendo  $\sigma_1 = z_1 - \zeta_1$  el error de estimación entre la salida del diferenciador  $z_1$  y la primera derivada de la señal base  $\dot{f}_0(t)$ , la dinámica del error de estimación toma la siguiente forma.

$$\dot{\sigma}_0 = -k_1 \phi_1(\sigma_0) + \sigma_1, \quad \dot{\sigma}_1 = -k_2 \phi_2(\sigma_0) - \ddot{f}_0(t) \quad (3.6)$$

Donde  $\ddot{f}_0(t)$  se supone acotada  $|\ddot{f}_0(t)| \leq L$ . Las soluciones de (3.6) son entendidas en el sentido de Filippov (Filippov, 1988) <sup>[15]</sup>.

El sistema (3.6) es uniformemente exacto convergente si cualquier trayectoria del sistema converge al origen para cualquier perturbación acotada  $|\ddot{f}_0(t)| \leq L$ , y su tiempo de convergencia tiene una cota superior igual a una constante, independiente de la condición inicial  $\sigma(0) = [\sigma_0(0) \quad \sigma_1(0)]^T$ .

*Convergencia exacta uniforme:* Suponga que  $|\ddot{f}_0(t)| \leq L$ , con una constante positiva conocida  $L > 0$ , y que  $\mu > 0$ . Entonces, el diferenciador (2.19) es exacto uniformemente convergente si las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$  se encuentran en el conjunto.

$$\mathcal{K} = \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < k_1 \leq 2\sqrt{L}, k_2 > \frac{k_1^2}{4} + \frac{4L^2}{k_1^2} \right\} \cup \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \mid k_1 > 2\sqrt{L}, k_2 > 2L \right\} \quad (2.20)$$

Esto garantiza que el diferenciador (3.5) estime la derivada de  $f(t) = f_0(t) + v(t)$  exactamente en tiempo finito, en ausencia de ruido, es decir  $v(t) = 0$ . Esto quiere decir que el error de estimación se desvanece en tiempo finito, es decir  $\sigma(t) = 0$ .

A continuación se realizan algunas simulaciones para comparar el funcionamiento de los diferenciadores descritos anteriormente.

La señal base usada es la siguiente  $f_0(t) = 5t + \sin t$  aplicando la señal de ruido  $v_1(t) = 0.01 \cos 10t$ .

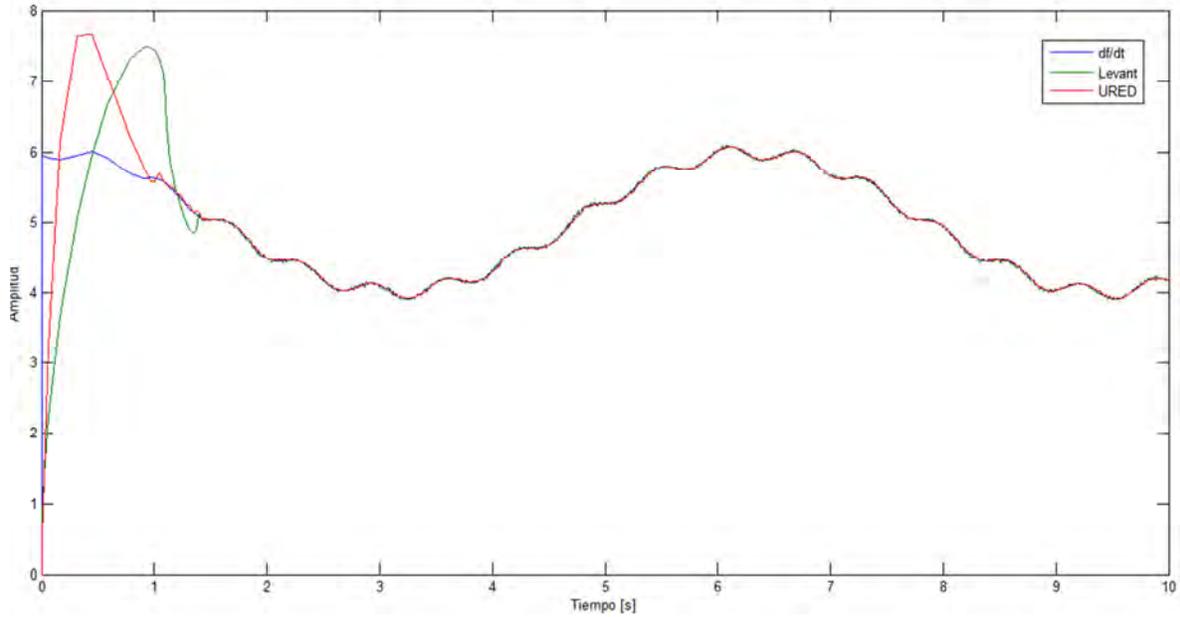


Figura 3.1. Comparación entre el diferenciador de Levant y el diferenciador URED.

En la figura 3.1 se puede observar que ambos diferenciadores realizan una buena estimación de la derivada de la señal de entrada, a continuación se analiza más a fondo la gráfica anterior para denotar las diferencias en el desempeño de cada uno de los diferenciadores.

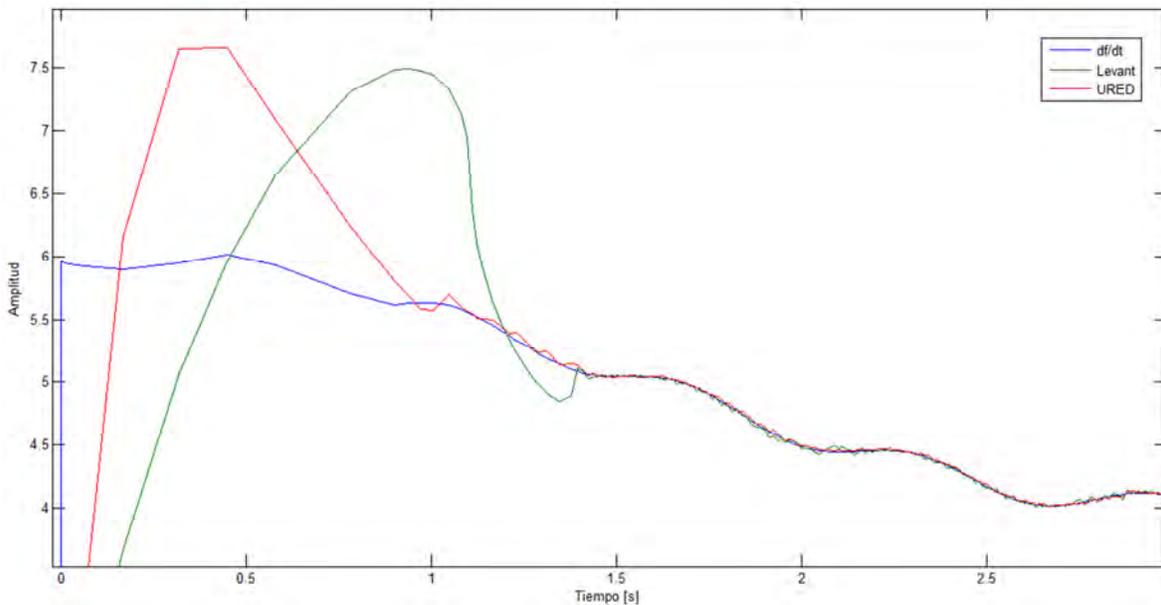


Figura 3.2. Acercamiento de la figura 3.1, comparación de desempeño entre el diferenciador de Levant y el diferenciador URED.

En la figura 3.2 se puede apreciar que el diferenciador URED converge más rápidamente que el diferenciador de Levant.

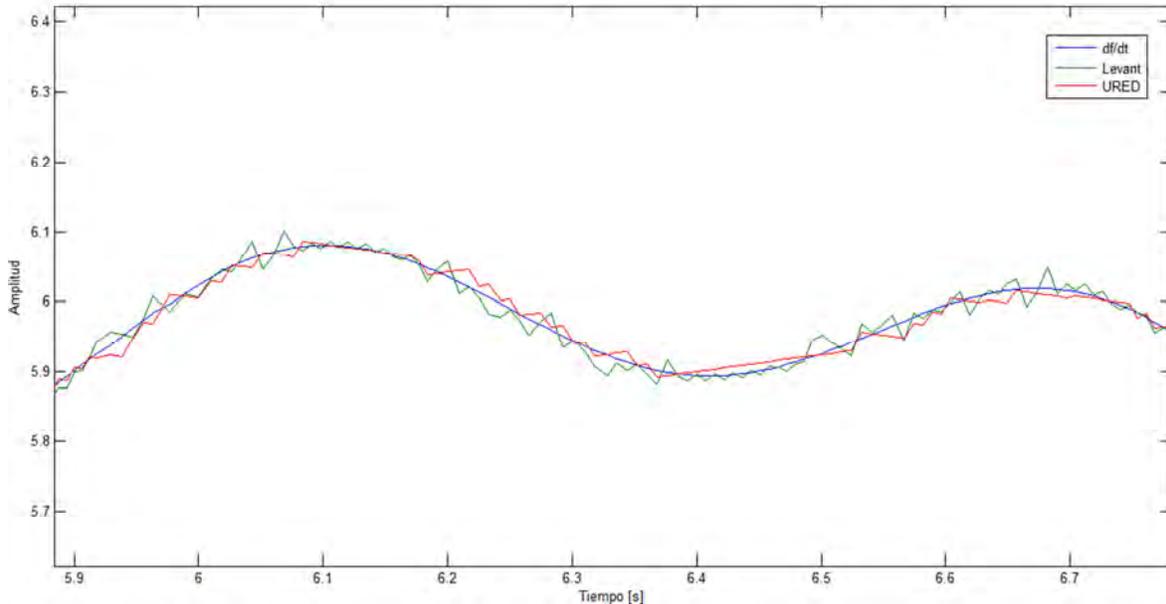


Figura 3.3. Acercamiento de la figura 3.1, comparación de desempeño entre el diferenciador de Levant y el diferenciador URED.

En la figura 3.3 se muestra el desempeño de ambos diferenciadores una vez alcanzada la convergencia en la estimación de la señal de entrada.

A continuación se realiza una comparación más entre ambos diferenciadores utilizando la misma señal base, cambiando la señal de ruido.

La señal base usada es la siguiente  $f_0(t) = 5t + \sin t$  aplicando la señal de ruido  $v_1(t) = 0.001\cos 30t$ .

La figura 3.4 muestra el desempeño de ambos diferenciadores con la nueva señal de entrada, se analiza más a fondo el desempeño de cada uno de los diferenciadores en las figuras siguientes.

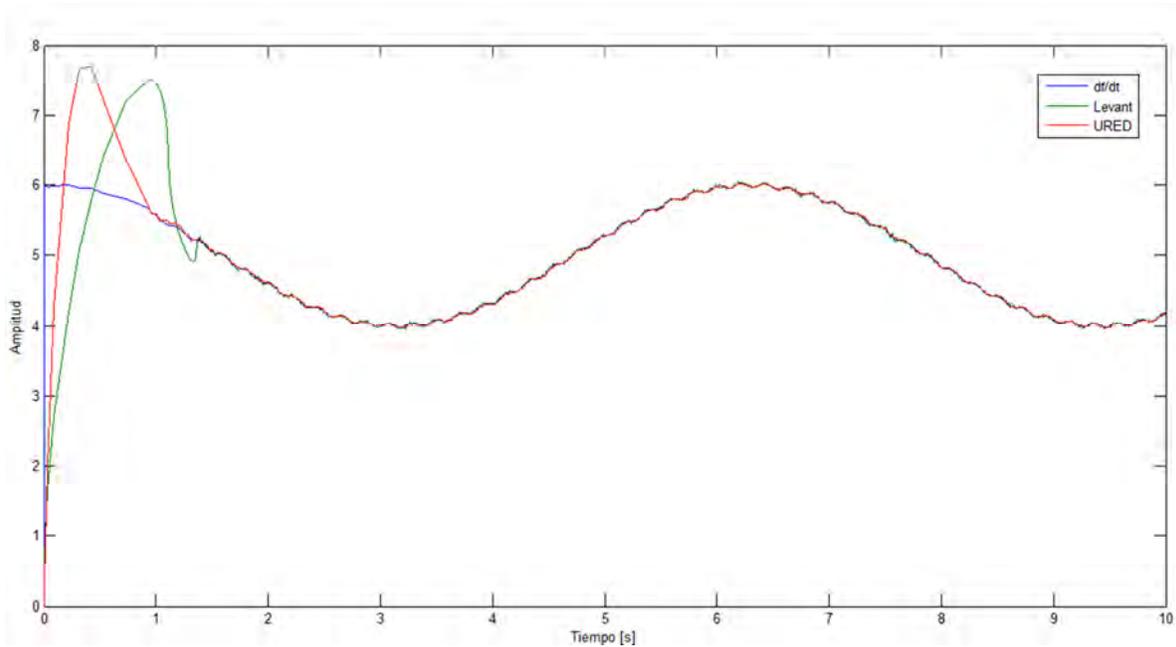


Figura 3.4. Comparación entre el diferenciador de Levant y el diferenciador URED.

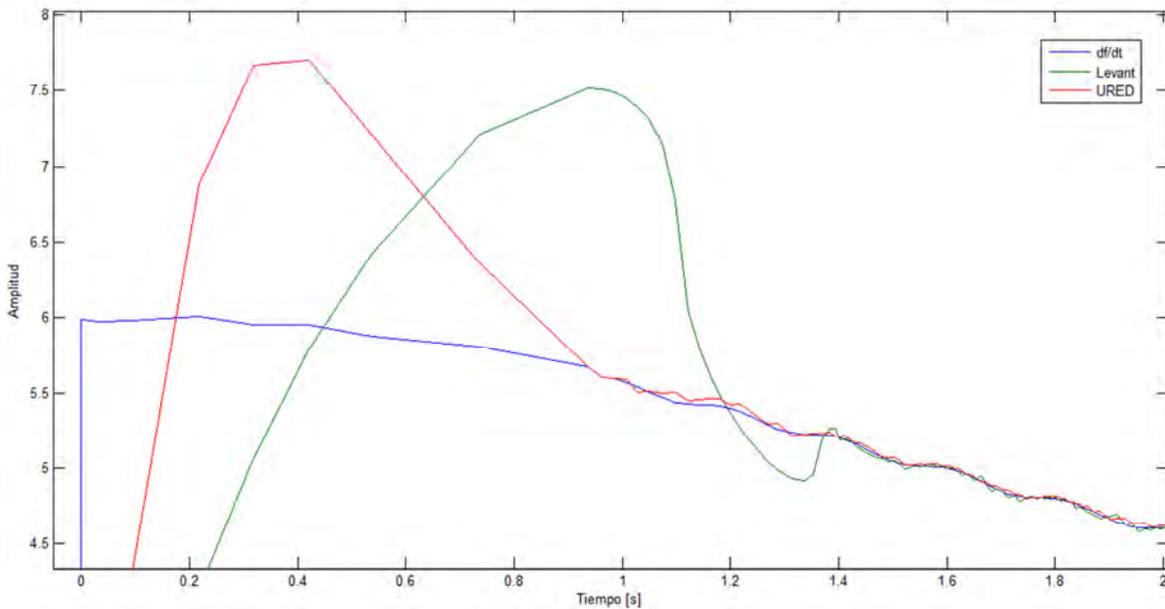


Figura 3.5. Acercamiento de la figura 3.4, comparación de desempeño entre el diferenciador de Levant y el diferenciador URED.

Como se puede ver en la figura 3.5, y como se percibió anteriormente en la figura 3.2, el diferenciador URED presenta una convergencia más rápida que el diferenciador de Levant en la estimación de la derivada de la señal de entrada.

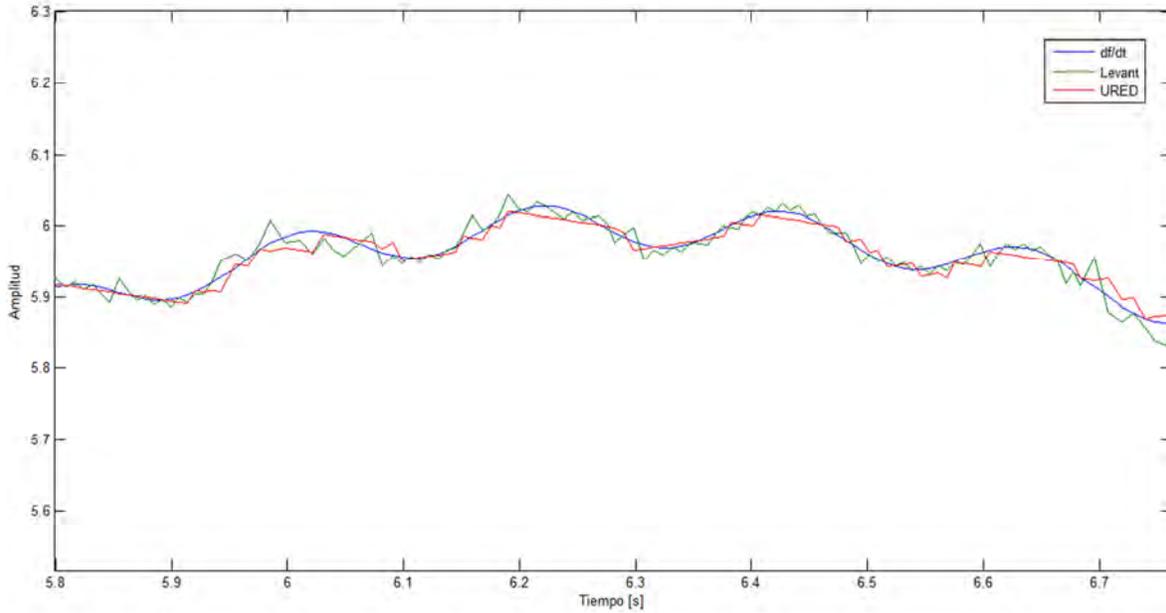


Figura 3.6. Acercamiento de la figura 3.4, comparación de desempeño entre el diferenciador de Levant y el diferenciador URED.

En la figura 3.6 se muestra el desempeño de ambos diferenciadores una vez alcanzada la convergencia a la derivada de la señal de entrada.

### 3.3.- PRUEBAS EXPERIMENTALES

A continuación se presentan los resultados de un experimento diseñado para comprobar el desempeño de los diferenciadores vistos anteriormente.

Primeramente se utiliza un generador de funciones para obtener la señal de entrada a ser diferenciada.

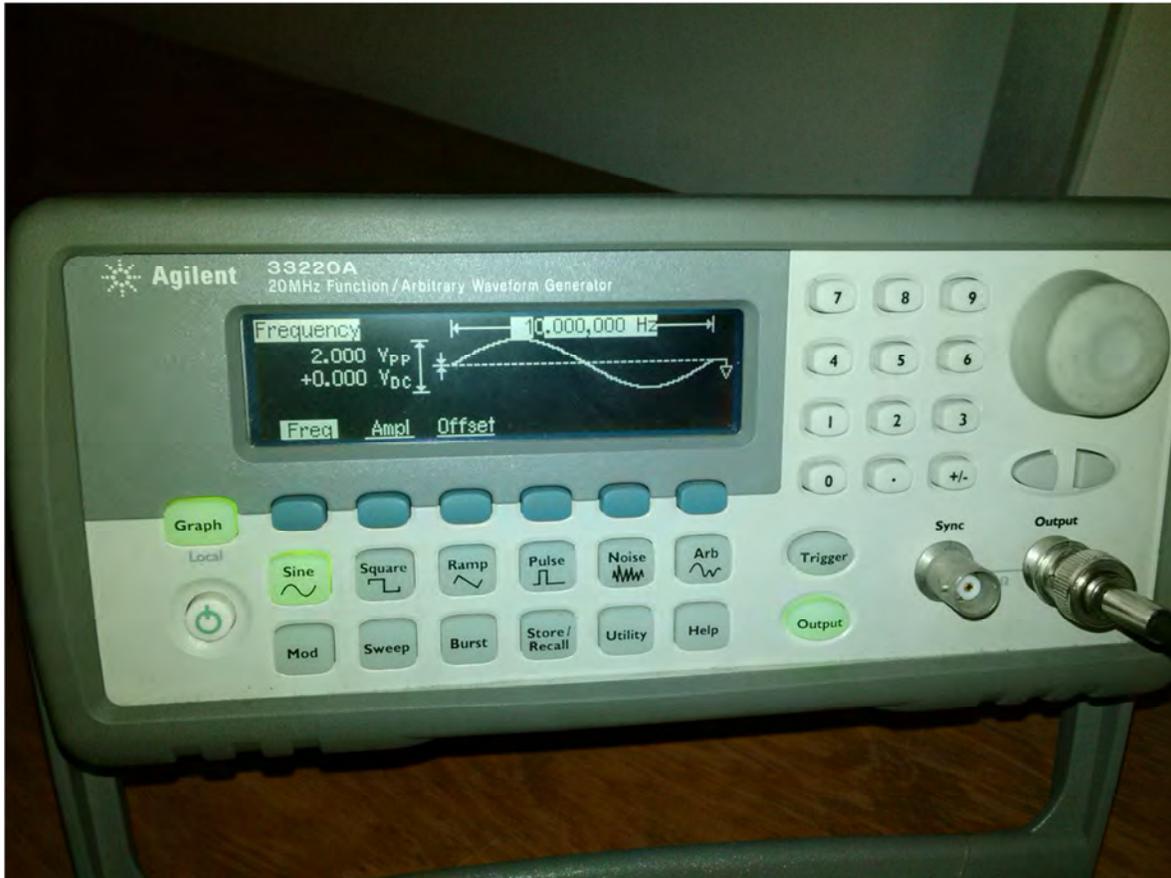


Figura 3.7. Generador de funciones

El generador de funciones se conecta a la tarjeta dSPACE 1103 para el posterior manejo de las señales en una PC.

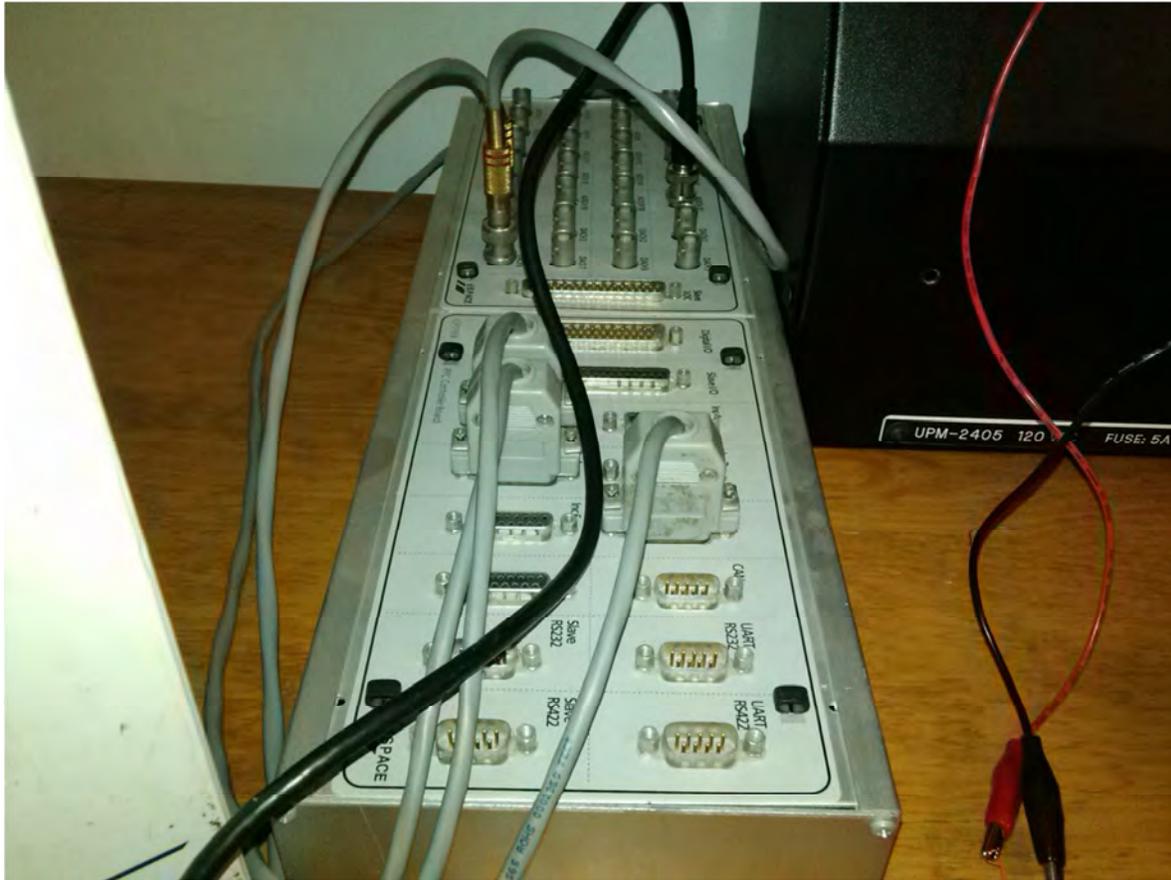


Figura 3.8. Tarjeta dSPACE 1103.

La interfaz para el control de las señales mediante la tarjeta dSPACE 1103, implica el uso del software MATLAB, más específicamente de la aplicación Simulink de dicho software, para genera un modelo que se traduce a un lenguaje manejado por el software propio de la interfaz, dSPACE control desk, dicho software nos permite ver las señales introducidas a la tarjeta y el resultado de la aplicación de los diferenciadores en tiempo real.

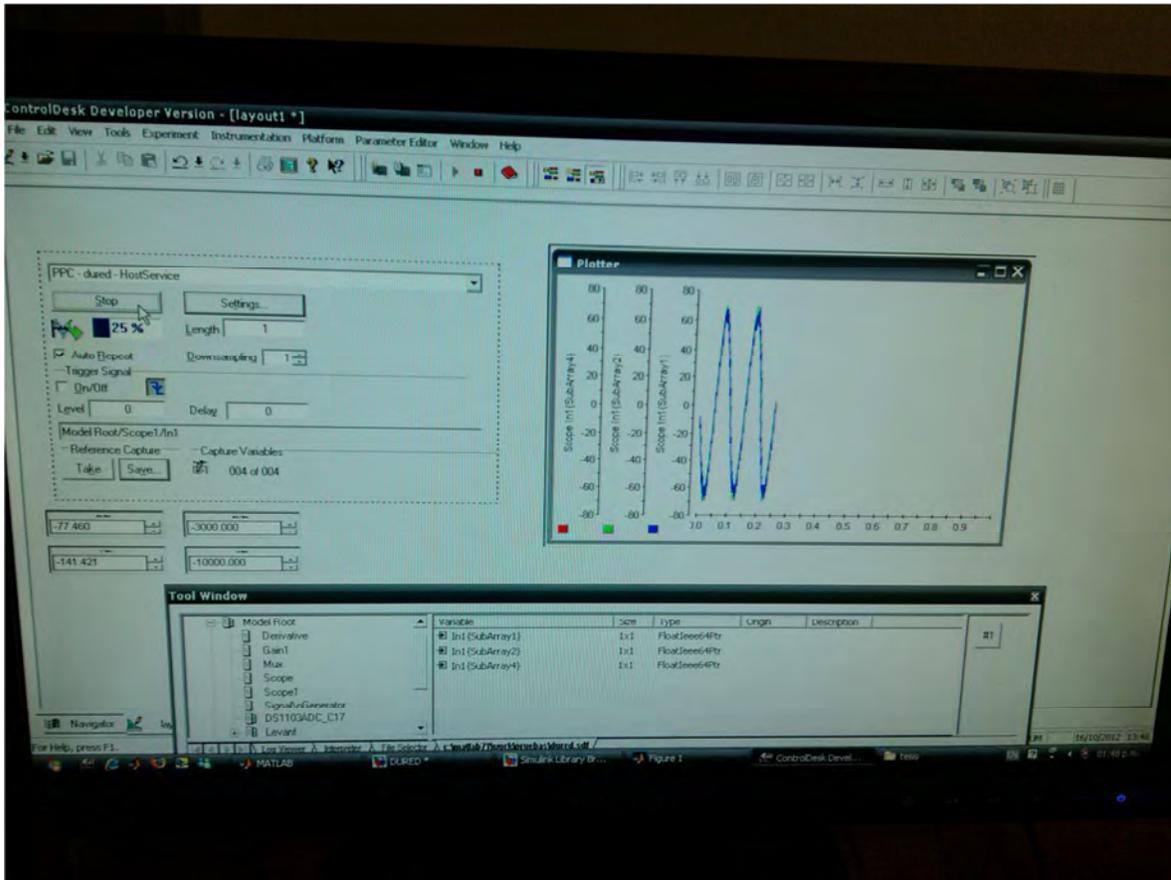


Figura 3.9. Pantalla de ejecución en tiempo real de la aplicación de los diferenciadores.

A continuación se presentan los resultados del experimento detallado anteriormente, primero se presenta la señal de entrada usada para el experimento, una señal senoidal de frecuencia igual a 10[Hz] y una amplitud de 2[Vpp], y posteriormente se presenta una comparación entre el diferenciador de Levant de primer orden y el diferenciador DREU, el diferenciador numérico propio del software MATLAB se utiliza como referencia de la derivada de la señal de entrada.

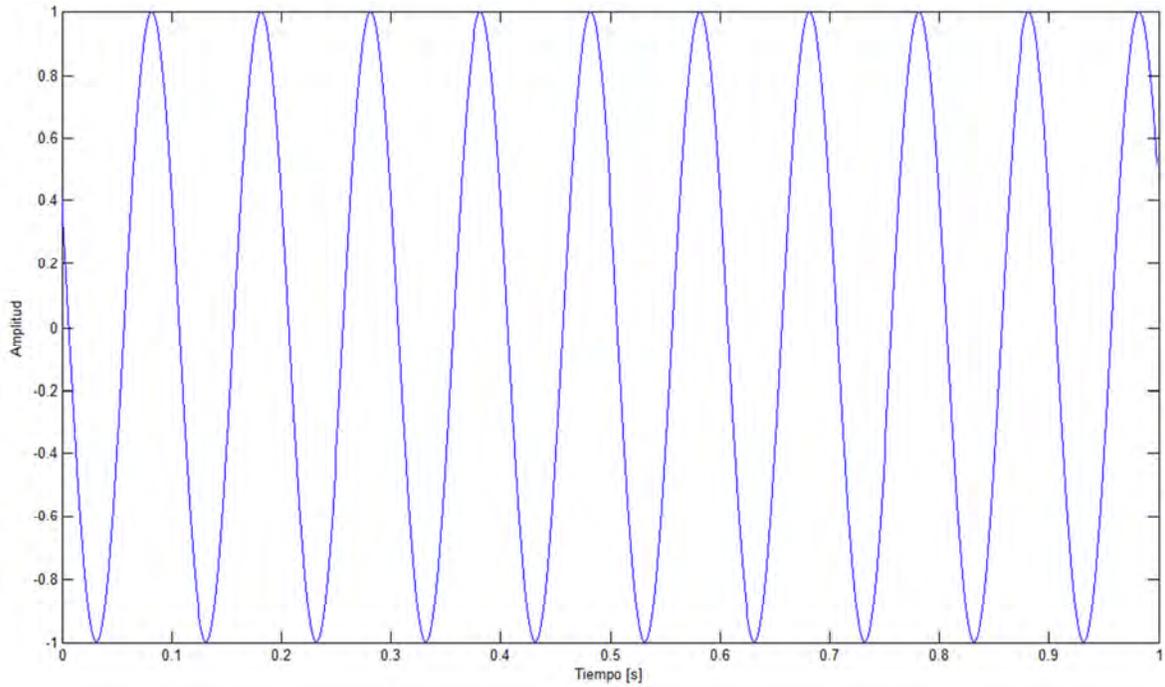


Figura 3.10. Señal de entrada obtenida del generador de funciones.

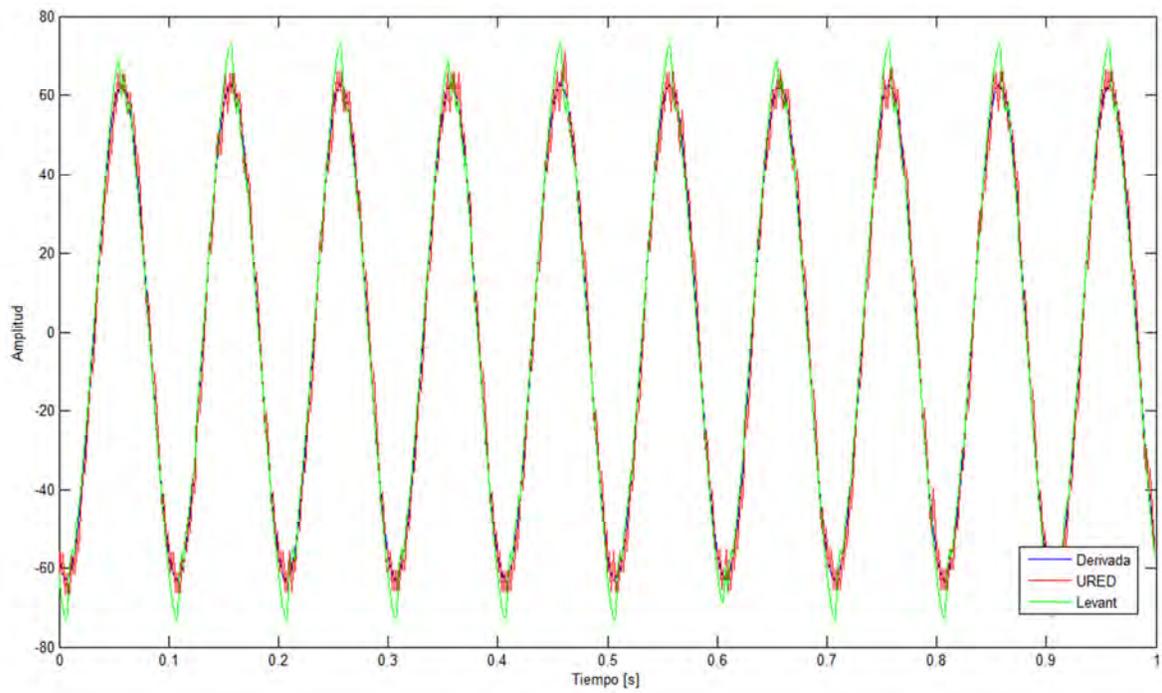


Figura 3.11. Comparación experimental entre el diferenciador de Levant y el diferenciador DREU

De los resultados vistos anteriormente y tomando en cuenta las características de cada uno de los diferenciadores, se puede elegir el más adecuado para la aplicación propuesta en este trabajo.

La velocidad de convergencia del diferenciador a utilizar es muy importante, ya que se pretende integrar en un esquema de búsqueda de extremos y por lo tanto se requiere llegar al valor extremo lo más rápido posible, además de que las condiciones iniciales del sistema por lo general son desconocidas en la mayoría de las aplicaciones de los esquemas de búsqueda de extremos, por lo que éstas deben afectar en lo mínimo posible el desempeño del diferenciador, por tal motivo la mejor elección en este caso es utilizar el diferenciador URED.

## 4.- SIMULACIONES

---

En este capítulo se realizarán las simulaciones correspondientes al desarrollo teórico mostrado en los capítulos anteriores, más específicamente, la aplicación del esquema a la búsqueda de máximos en sistemas eléctricos.

Primeramente se introduce una función de potencia con un máximo conocido para ejemplificar el desempeño de la estrategia planteada en este trabajo, haciendo uso de los dos derivadores vistos en capítulos anteriores, comparando el comportamiento de éstos. Posteriormente se agrega una dinámica a la función de potencia para simular el comportamiento de un sistema dinámico.

Por último se aplica la estrategia a un generador de corriente directa bajo diversas condiciones de torque de excitación, para ello se introduce el modelo del mismo.

## 4.1.- FUNCIÓN DE POTENCIA

Considere la siguiente función de potencia:

$$P(i) = e^{-(i-5)^2}$$

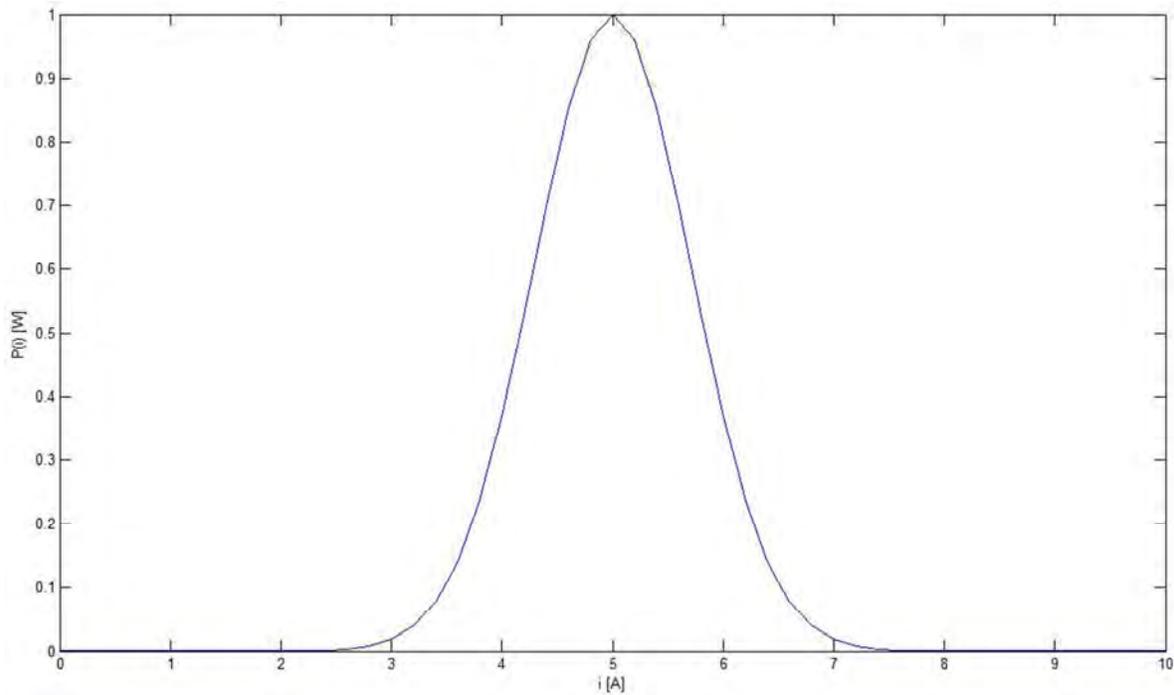


Figura 4.1. Función de potencia

La función de potencia que se muestra en la figura 4.1 presenta un máximo cuando la corriente alcanza un valor de 5 [A], generando así una potencia máxima con valor de 1 [W].

Los resultados de las simulaciones, aplicando la metodología presentada en los capítulos anteriores, se presentan a continuación.

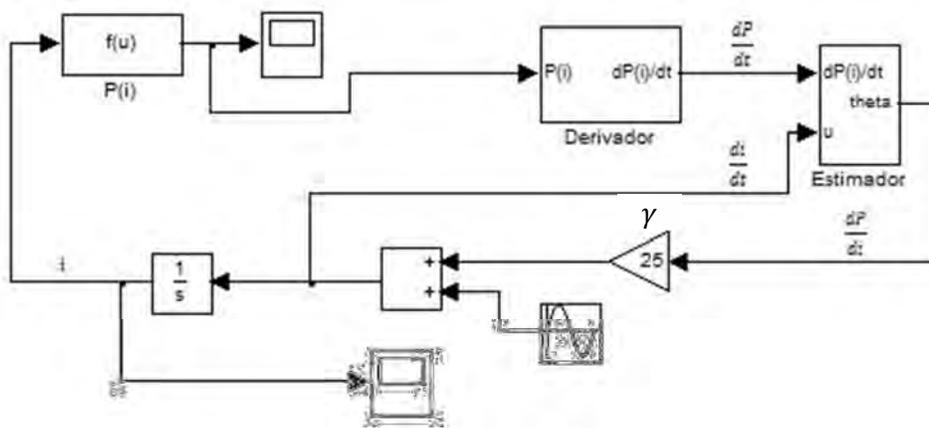


Figura 4.2. Esquema utilizado para realizar las simulaciones

El esquema mostrado en la figura 4.2 integra la metodología descrita en capítulos anteriores. La función seno que se integra al esquema,  $0.02 \sin t$ , es utilizada como excitación persistente solo para lograr la convergencia del método, de ahora en adelante se le llamará señal de excitación.

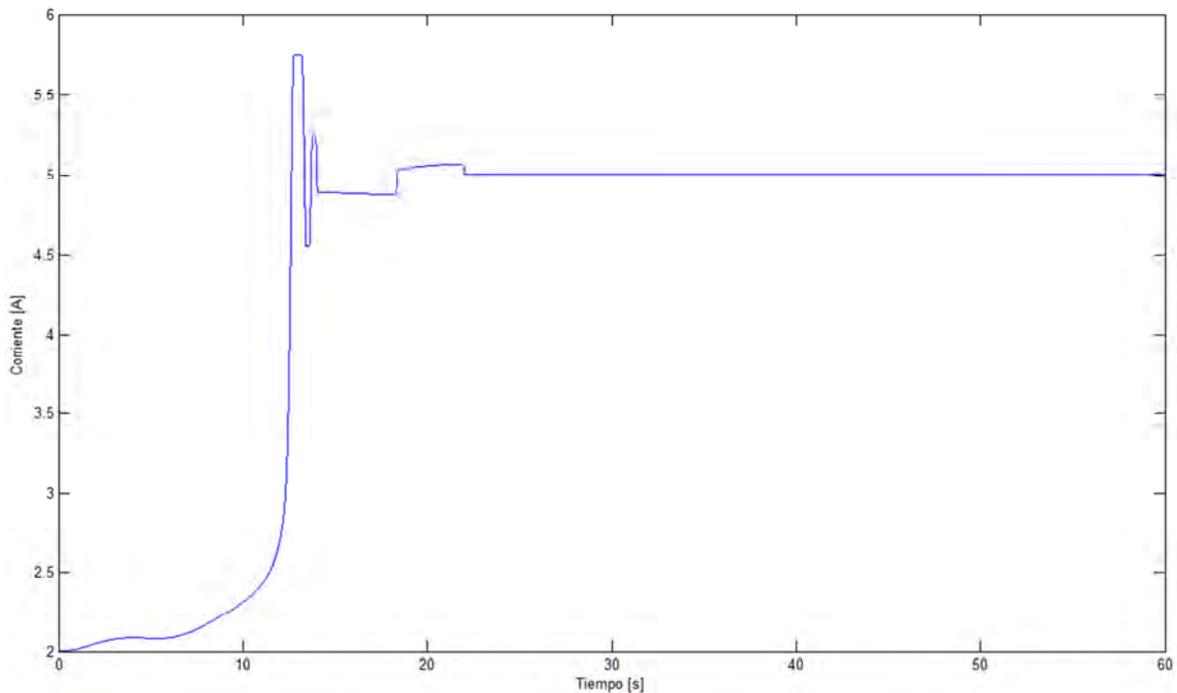


Figura 4.3. Corriente aplicada a la función de potencia, utilizando el diferenciador de Levant.

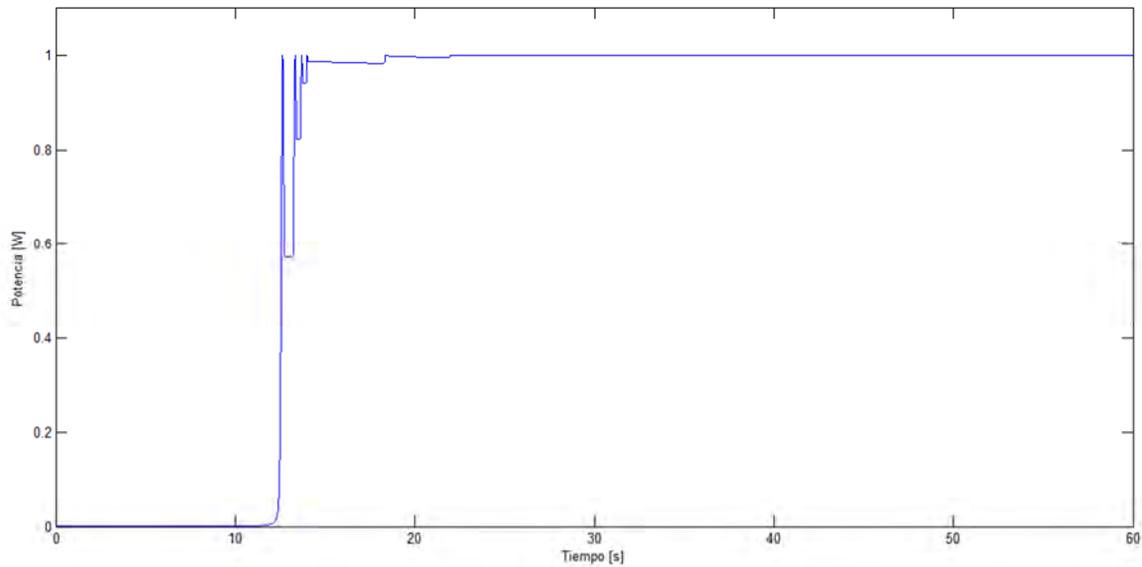


Figura 4.4. Potencia máxima obtenida, utilizando el diferenciador de Levant.

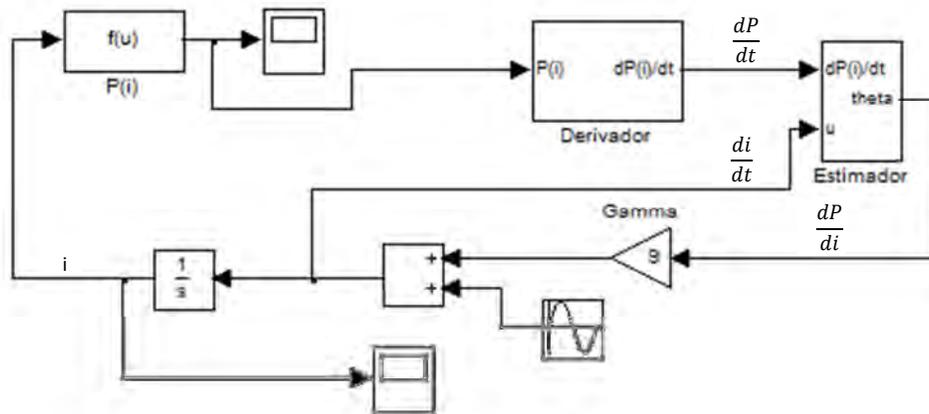


Figura 4.5. Esquema utilizado para realizar las simulaciones

El esquema mostrado en la figura 4.5 es prácticamente el mismo de la figura 4.2, la diferencia principal es el uso del diferenciador URED en lugar del diferenciador de Levant, además de que dicho diferenciador logra la convergencia con una señal de excitación de menor amplitud y una ganancia  $\gamma$  menor.

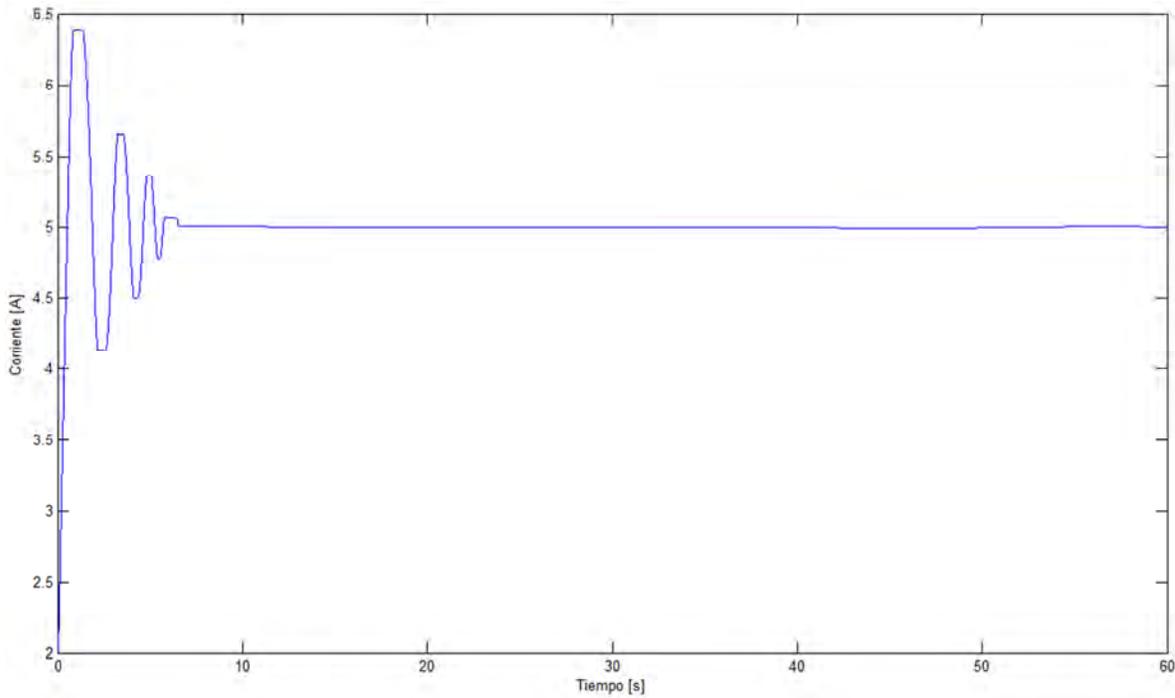


Figura 4.6. Corriente aplicada a la función de potencia, utilizando el diferenciador URED.

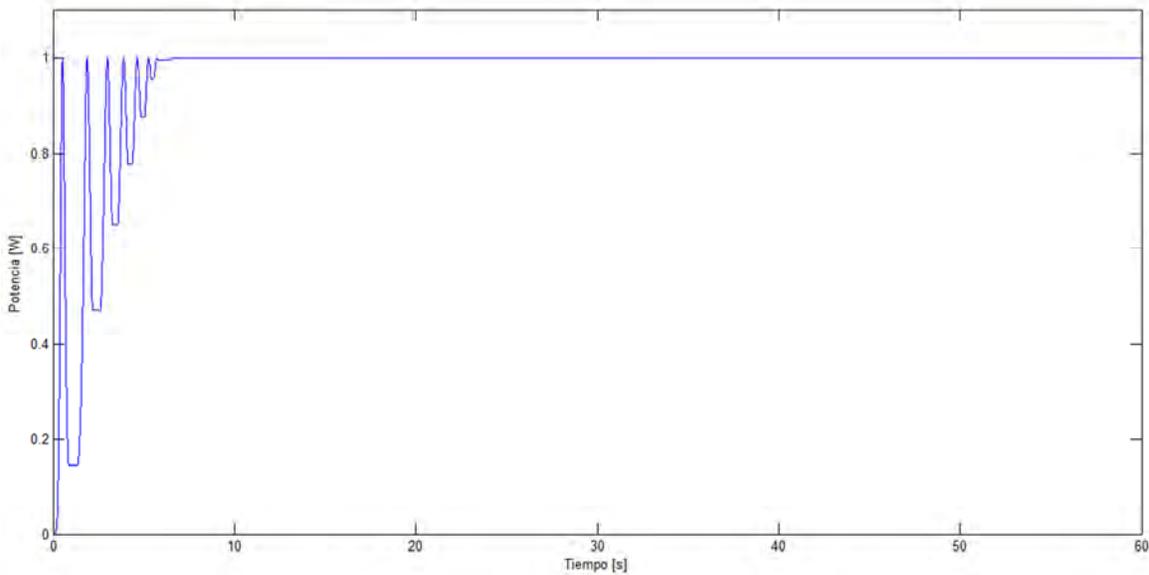


Figura 4.7. Potencia máxima obtenida, utilizando el diferenciador URED.

Se agrega una dinámica, igual a  $\frac{70}{s+70}$ , al esquema utilizado anteriormente para simular el efecto de un sistema dinámico.

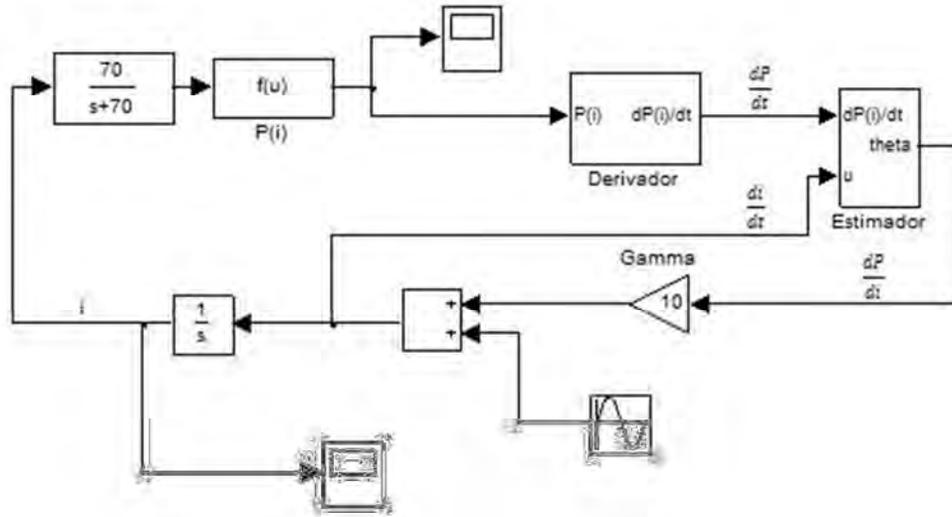


Figura 4.8. Esquema utilizado para realizar las simulaciones.

El valor de la amplitud de la función de dither usado en este esquema es de  $0.1 \sin t$ , utilizando también el diferenciador de Levant.

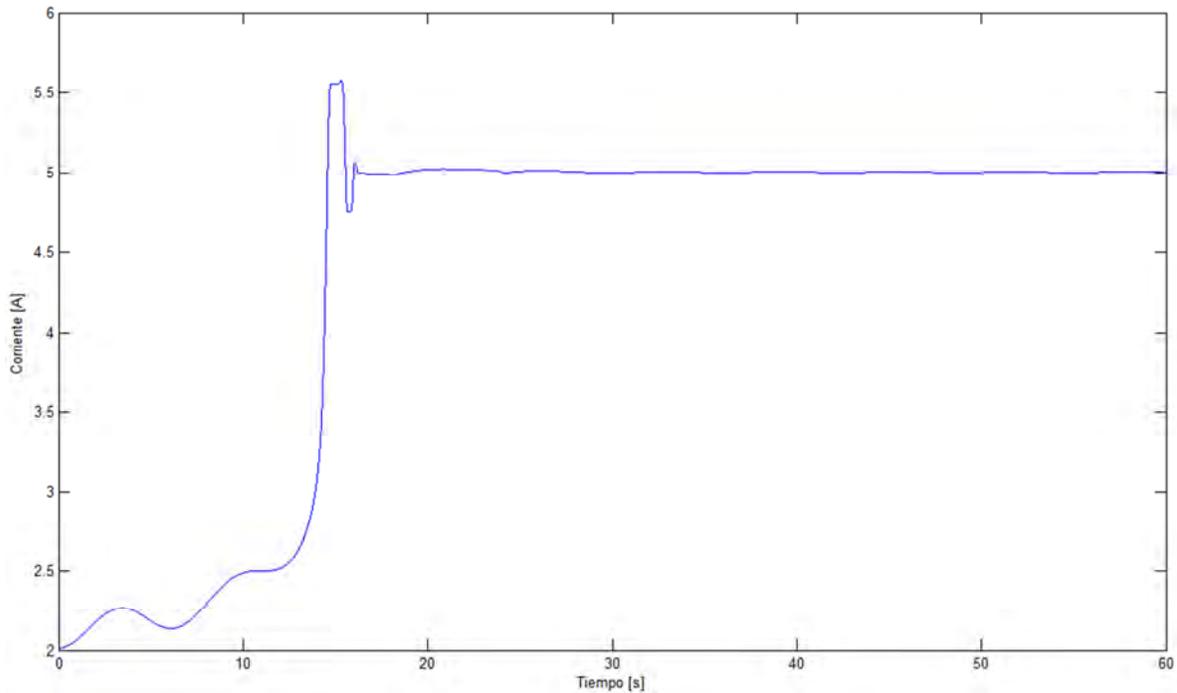


Figura 4.9. Corriente aplicada a la función de potencia con dinámica agregada, utilizando el diferenciador de Levant.

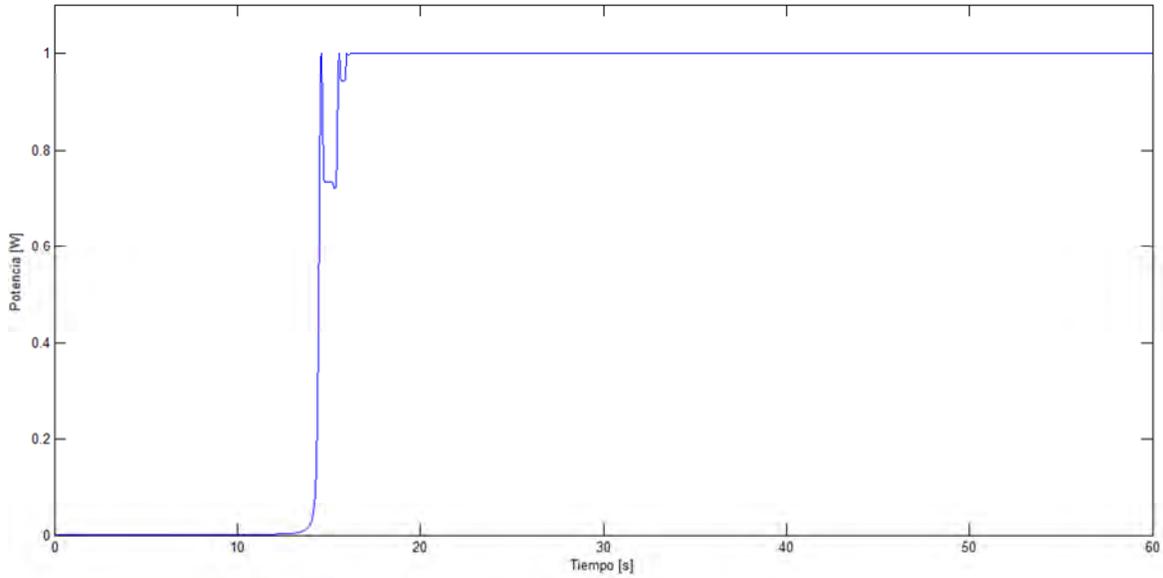


Figura 4.10. Potencia máxima obtenida, utilizando el diferenciador de Levant.

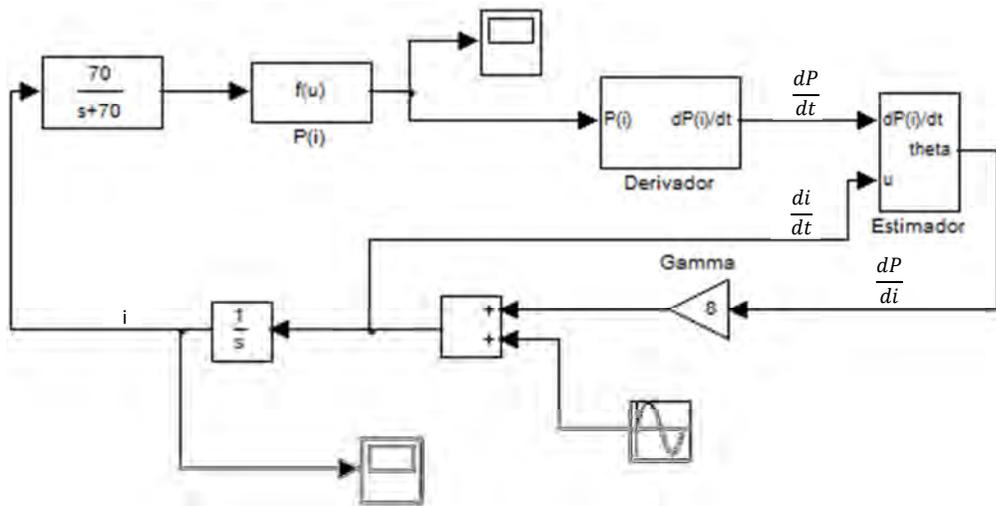


Figura 4.11. Esquema utilizado para realizar las simulaciones.

El esquema mostrado en la figura 4.11 es prácticamente el mismo de la figura 4.8, la diferencia principal es el uso del diferenciador URED en lugar del diferenciador de Levant, además de que dicho diferenciador logra la convergencia con una señal de dither de menor amplitud y una ganancia  $\gamma$  menor.

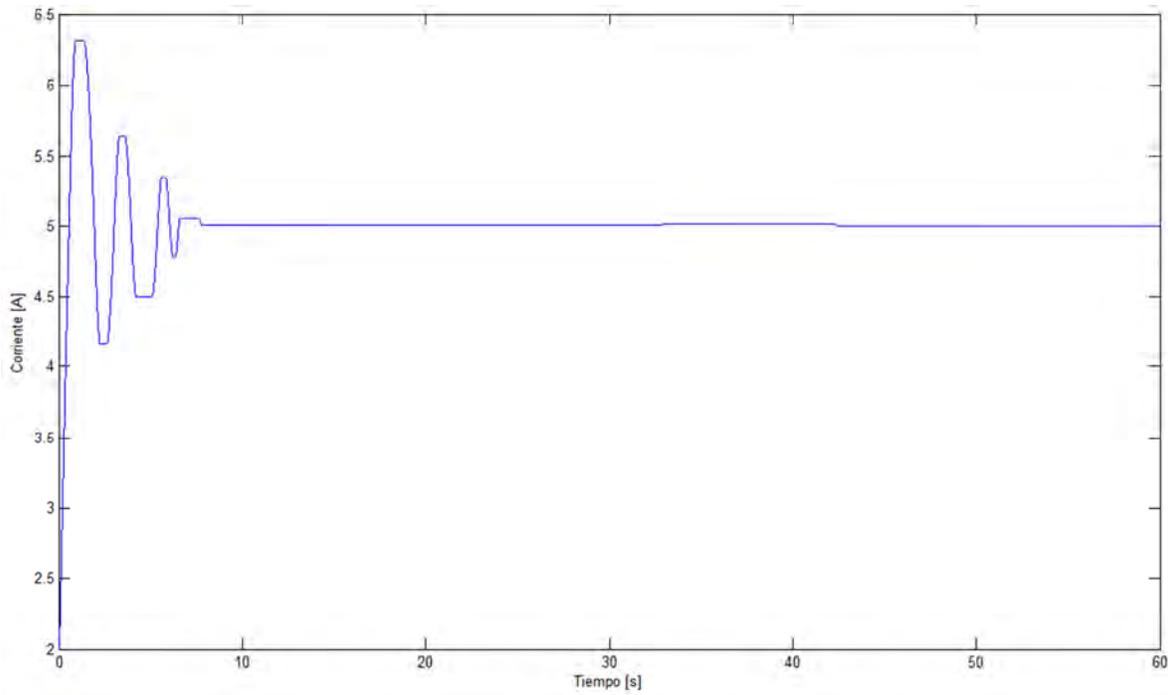


Figura 4.12. Corriente aplicada a la función de potencia con dinámica agregada, utilizando el diferenciador URED.

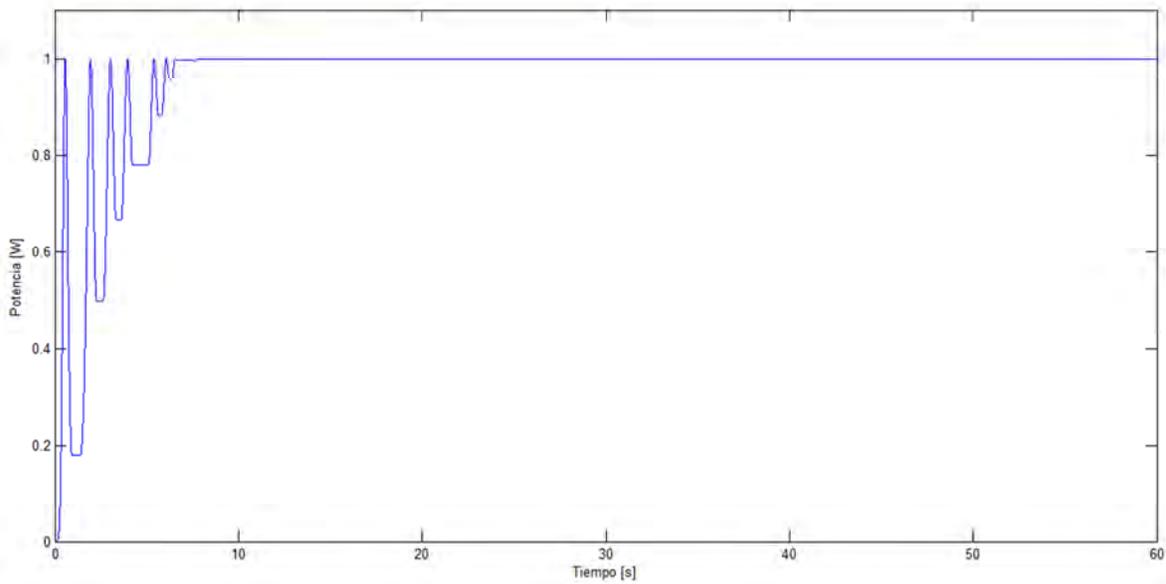


Figura 4.13. Potencia máxima obtenida, utilizando el diferenciador URED.

Como se puede observar en las figuras 4.3, 4.4, 4.6, 4.7, 4.9, 4.10, 4.12 y 4.13, el uso del diferenciador DREU da como resultado una convergencia más rápida que con el uso del diferenciador de Levant.

Como se puede comprobar en las simulaciones anteriores el derivador URED logra converger más rápidamente que el diferenciador de Levant en cada uno de los casos, incluso utilizando menores amplitudes, tanto en la señal de excitación como en la ganancia del algoritmo, de esta manera se reafirma que la elección del diferenciador URED sobre el diferenciador de Levant de primer orden para cumplir con el objetivo de este trabajo fue la más adecuada.

## 4.2.- GENERADOR DE CORRIENTE DIRECTA

En este apartado se aplicará el esquema propuesto para la obtención de la potencia eléctrica máxima de un generador de corriente directa, para ello se utilizará el modelo de un motor de corriente directa operado como generador, mostrado en la figura 4.14. Se pretende emular los efectos que tendrían las variaciones en las corrientes de viento sobre un aerogenerador variando la señal de torque de entrada aplicada al generador de corriente directa.

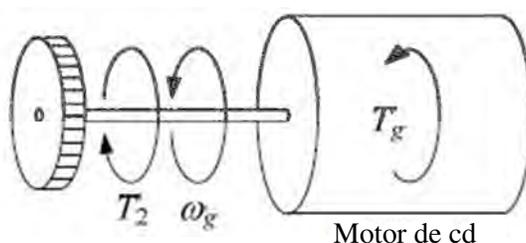


Figura 4.14. Generador de corriente directa.

El motor de corriente directa es una máquina con una dinámica relativamente sencilla. Aunque se mayor desventaja está en su propia estructura, específicamente en el colector o conmutador, este elemento se encarga de orientar el campo, logrando así la cuadratura entre la corriente del flujo y la corriente producida por el par, dando como resultado la simplicidad de su dinámica, esto a su vez trae efectos negativos como: incrementos en el tamaño, longitud axial, momento de inercia, etc.

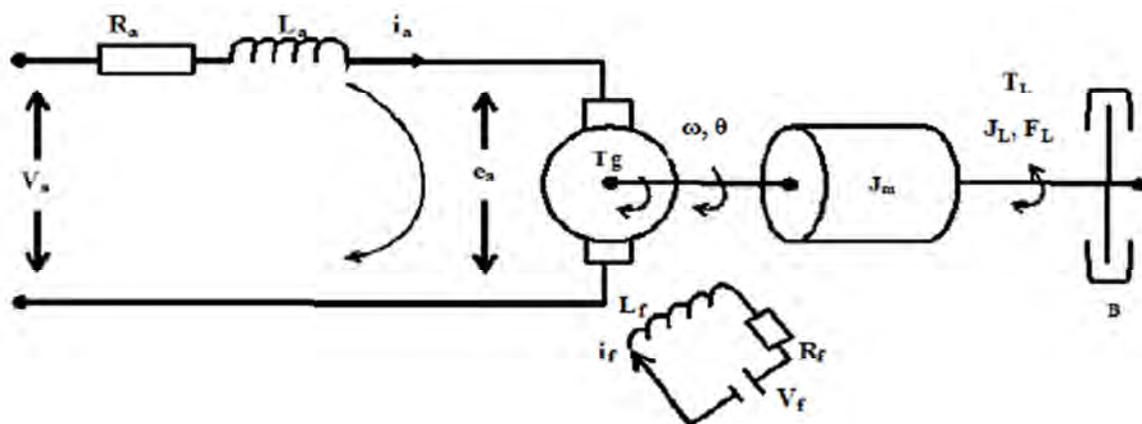


Figura 4.15. Motor de corriente directa con excitación independiente controlado por armadura (Dávila, 2008) <sup>[9]</sup>.

La figura 4.15 muestra el circuito equivalente de un motor de corriente directa con excitación independiente en conjunto con el modelo general de un sistema mecánico que incorpora los parámetros mecánicos del motor y de la carga acoplada al motor.

Donde:

$e_a =$  Fuerza electromotriz inducida

$V_a, V_f =$  Voltajes de armadura y campo, respectivamente [V]

$R_a, R_f =$  Resistencias de armadura y campo, respectivamente [ $\Omega$ ]

$L_a, L_f =$  Inductancias de armadura y campo, respectivamente [H]

$T_g =$  Par generado [Nm]

$\theta =$  Posición angular referida al eje del motor [rad]

$\omega =$  Velocidad angular referida al eje del motor [rad/s]

$J =$  Momento de inercia de la carga del motor y de la carga referida al eje del motor [Kg $m^2$ ]

$\beta =$  Coeficiente de fricción viscosa del motor y de la carga referida al eje del motor [Nms/rad]

$T_L =$  Par externo de carga [Nm/A]

Al aplicar las leyes de Kirchhoff en el circuito equivalente del motor de cd representado en la figura 4.15, resultan las siguientes ecuaciones que relacionan las magnitudes eléctricas.

$$V_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (4.1)$$

$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (4.2)$$

$$e_a = K\Phi\omega = K_e\omega_r \quad (4.3)$$

Las expresiones anteriores corresponden a la parte eléctrica, pero dado que un motor es un dispositivo electromecánico, se necesitan formular expresiones para describir la parte mecánica así como la eléctrica, buscando lograr un equilibrio entre estas dos.

El par o momento electromagnético en las máquinas eléctricas es una función de los flujos de estator y rotor. Se puede representar el par en forma mixta entre flujos y corrientes,

como es el caso del motor de corriente directa, en éste el par es producido por interacción de la corriente que produce el par  $i_a$ , y el flujo de excitación  $\Phi$ .

$$T_g = K_t i_a \quad (4.4)$$

$K_t$  es una constante constructiva de la máquina.

La ecuación mecánica relaciona las variables eléctricas del motor con la carga, de acuerdo con la segunda ley de Newton para el movimiento rotatorio. Ésta describe el comportamiento de la velocidad mecánica, o también la posición del rotor, en función del par electromagnético y los parámetros de la carga.

Para el motor y la carga formados por una masa inercial y una constante viscosa, debida a la fricción y al batimiento. Al aplicar la segunda ley de Newton se tiene:

$$T_m = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega + T_L \quad (4.5)$$

Debido a que la carga gira a la misma velocidad que el motor, se genera la siguiente expresión para el momento de inercia de la carga del motor y de la carga referida al eje del motor:

$$J = J_m + J_L \quad (4.6)$$

$$\beta = f_m + f_L \quad (4.7)$$

Donde  $\beta$ , es el coeficiente de fricción viscosa del motor y de la carga referida al eje del motor.

Se puede considerar en el caso de que un motor de corriente directa con excitación independiente, trabaja con un valor de corriente de campo constante,  $i_f = V_f R_f$  y  $\Phi = f(i_f) = cte$ , y la carga es lineal, entonces el sistema puede ser considerado como un sistema lineal.

Las ecuaciones matemáticas que describen la dinámica del sistema se determinaron a partir de las ecuaciones anteriores:

$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_e \omega$$

$$T_g = K_t i_a \quad (4.8)$$

$$T_g = T_m = J \frac{d\omega}{dt} + \beta\omega - T_L$$

Las entradas del sistema son  $V_a$  y  $T_L$ , que corresponden como se mencionó anteriormente al voltaje de armadura y el par externo, respectivamente.

Los parámetros del sistema son los siguientes:

$$\begin{aligned} K_t &= 0.37[N/A] & K_e &= 0.37[Vs/rad] & J &= 0.011[kgm^2] \\ \beta &= 0.0005[Ns] & R_a &= 69.7[\Omega] & L_a &= 4.458 \times 10^{-3}[H] \end{aligned}$$

(Dávila, 2008) <sup>[9]</sup>.

Dado que se utilizará el modelo de un motor de corriente directa operando como un generador de corriente directa, es importante introducir el concepto de reversibilidad.

### ***Principio de reversibilidad***

Los generadores de corriente continua son reversibles ya que poseen la capacidad de transformar energía en dos sentidos, es decir, si se aplica energía mecánica, se obtiene energía eléctrica. Por otro lado si se aplica energía eléctrica a sus terminales, está se transforma en energía mecánica.

Para invertir el sentido de giro de los motores, es necesario invertir el sentido de la corriente en las bobinas inducidas, aunque no en las inductoras, ya que si el sentido de la corriente se varía en éstas, el sentido de giro del motor no cambia.

En el generador, la escobilla o borne positivo corresponde a la salida de corriente del inducido, mientras que en el motor es precisamente por donde entra la corriente.

Primeramente se realizan gráficas de voltaje contra potencia eléctrica para conocer el valor de la potencia máxima, de esta manera cuando se aplique el esquema propuesto al sistema se podrá verificar si el método está logrando obtener dicha potencia eléctrica máxima.

Para realizar las simulaciones se supone un torque de entrada constante para la primera parte, posteriormente se aplica una función seno como torque de entrada para obtener variaciones en el comportamiento del sistema.

La figura 4.16 muestra las curvas de voltaje contra potencia eléctrica aplicando distintos valores en la magnitud del torque de entrada, se restringe el valor del voltaje al valor nominal especificado por la máquina de corriente directa.

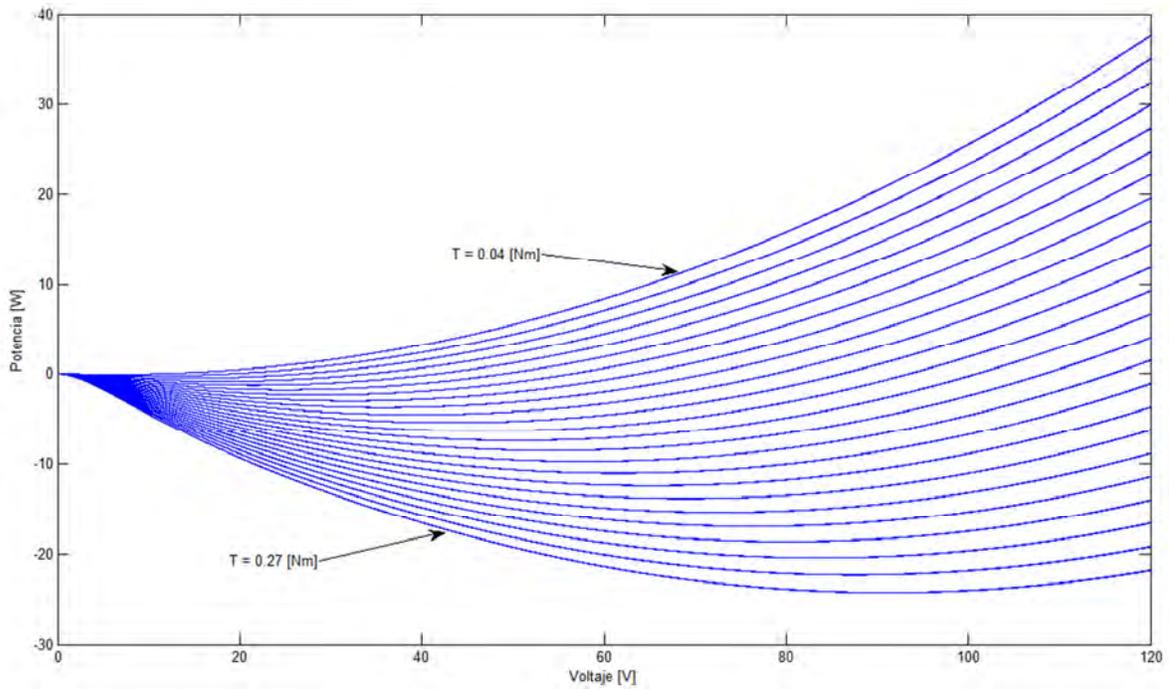


Figura 4.16. Voltaje vs Potencia.

Si se extiende el tiempo de la simulación y se seleccionan solo algunas de las curvas de la figura anterior, se puede observar más claramente los valores máximos de potencia para cada uno de los valores de torque de entrada.

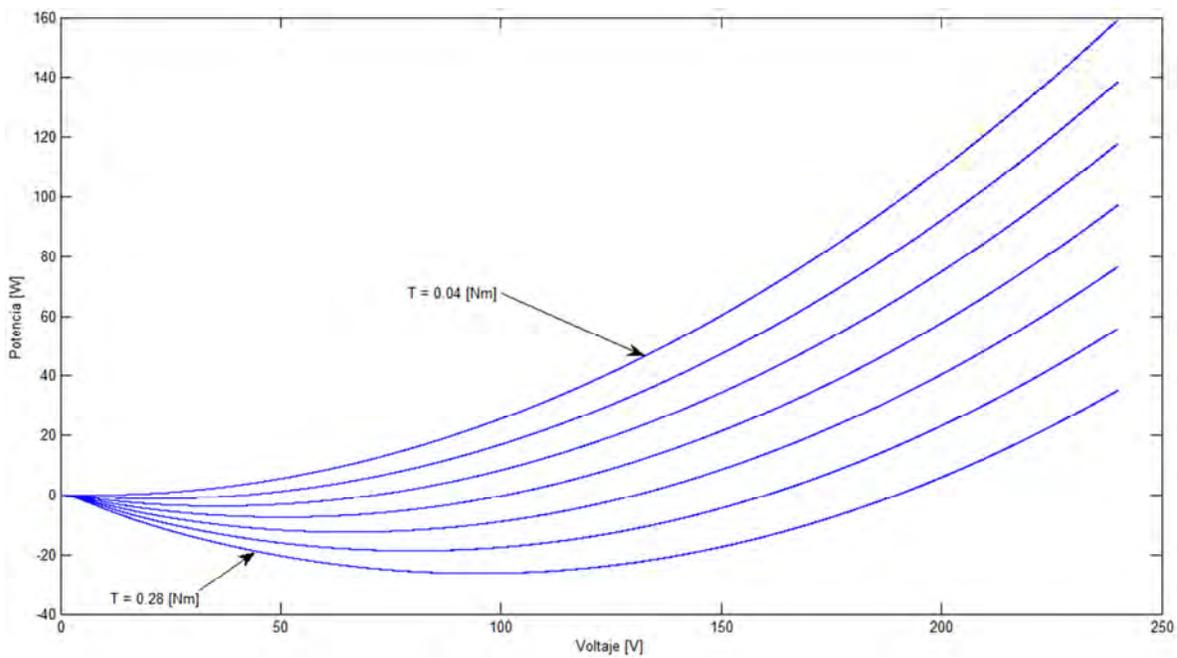


Figura 4.17. Voltaje vs Potencia.

Se puede observar en la figura 4.17 que después de llegar al valor máximo de potencia, en cada caso, el dispositivo deja de operar como generador y comienza a operar como motor, este cambio se registra en el cambio de dirección de las curvas, concretamente después del cruce con la cota cero, es decir al cambiar de signo.

Es lógico pensar que al hablar de potencia máxima el signo de ésta debería ser positivo, pues bien; recordando el principio de reversibilidad explicado anteriormente y dado que el dispositivo utilizado para realizar las simulaciones que se presentaran a continuación no es un generador propiamente dicho, es decir, el dispositivo es un motor utilizado como generador; el flujo de corriente se invierte al usarlo como generador, por tal motivo resulta el signo negativo en la potencia, es decir, mientras que el dispositivo funciona como motor se consume potencia eléctrica (potencia con signo positivo), por otro lado cuando el dispositivo funciona como generador, éste genera potencia eléctrica (potencia con signo negativo).

Para evitar confusiones posteriores, se considerará, para la presentación de resultados, la potencia generada con signo positivo, de esta manera la potencia eléctrica máxima obtenida en cada caso presentará signo positivo.

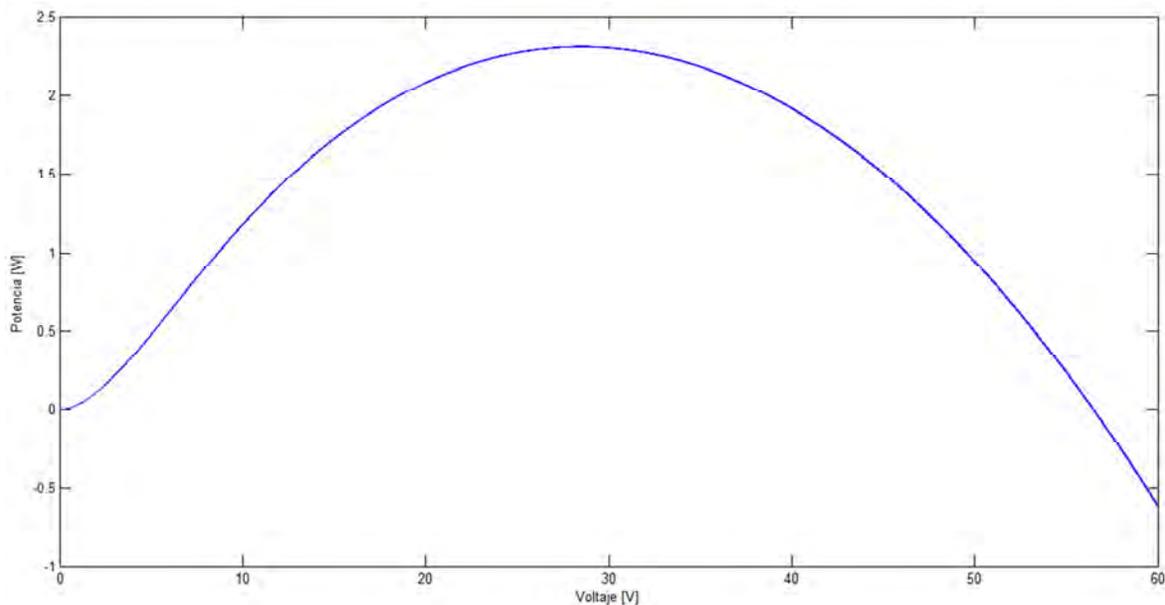


Figura 4.18. Voltaje vs Potencia eléctrica, aplicando un torque de entrada igual a 0.1 [Nm].

Como se puede ver en la figura 4.18, una vez hecho el cambio la potencia eléctrica generada presenta signo positivo.

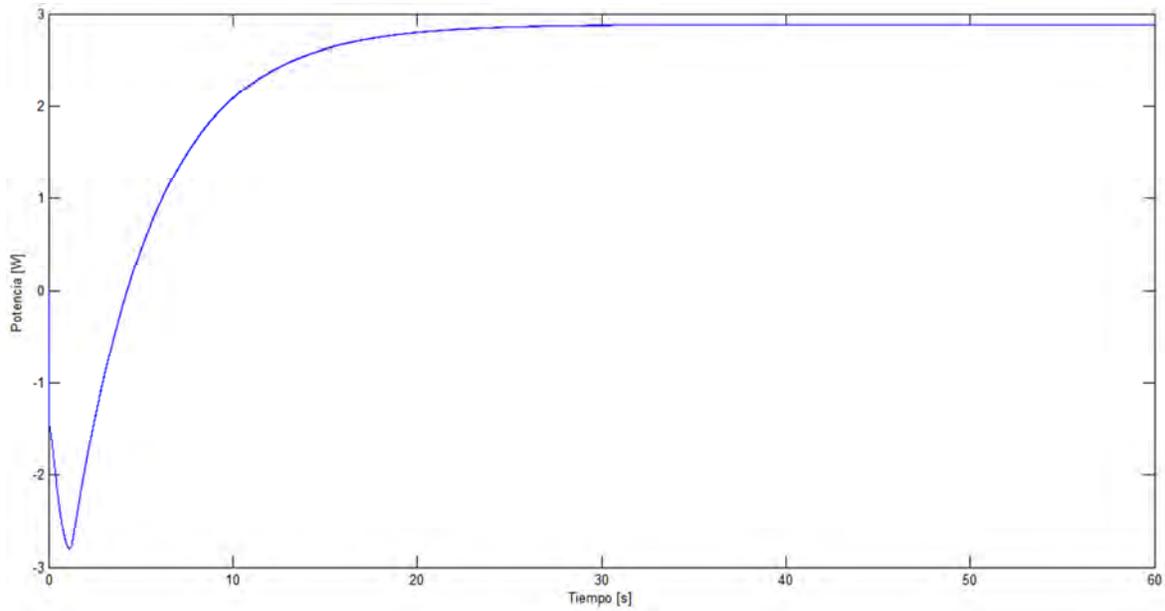


Figura 4.19. Potencia eléctrica máxima obtenida en el generador de cd, aplicando un torque de entrada igual a 0.1 [Nm].

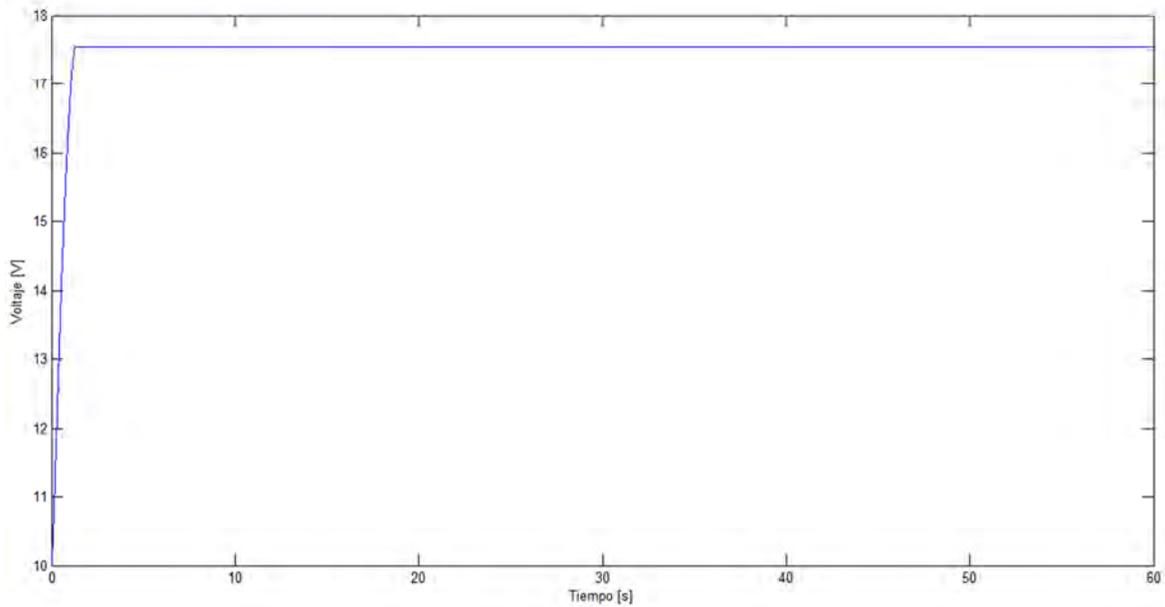


Figura 4.20. Voltaje aplicado a las terminales del generador de cd, aplicando un torque de entrada igual a 0.1 [Nm].

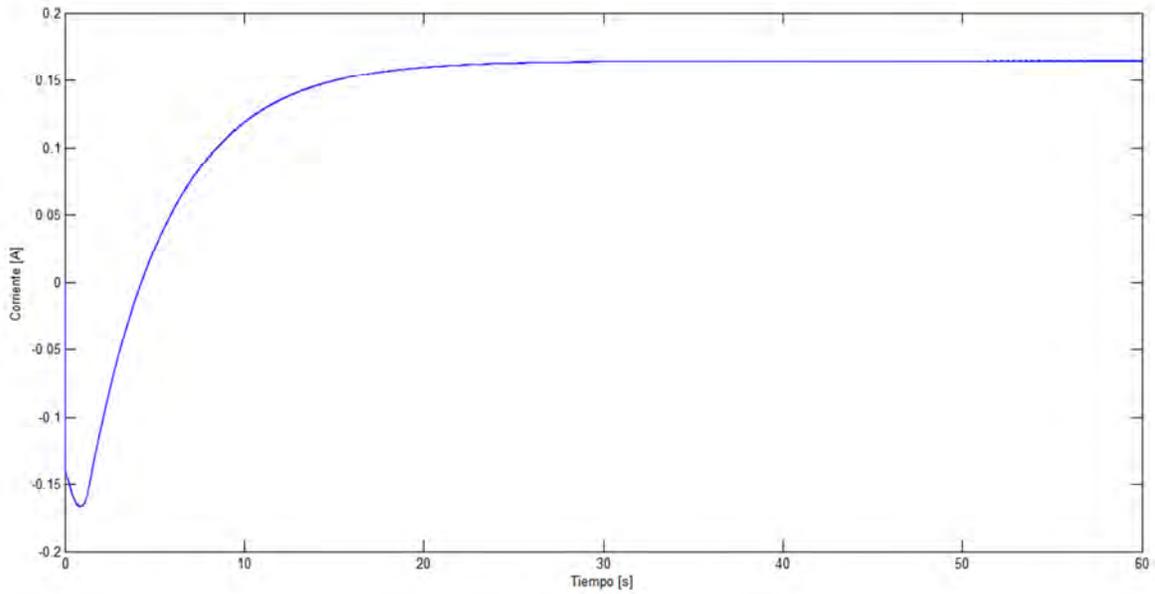


Figura 4.21. Corriente óptima obtenida en el generador de cd, aplicando un torque de entrada igual a 0.1 [Nm].

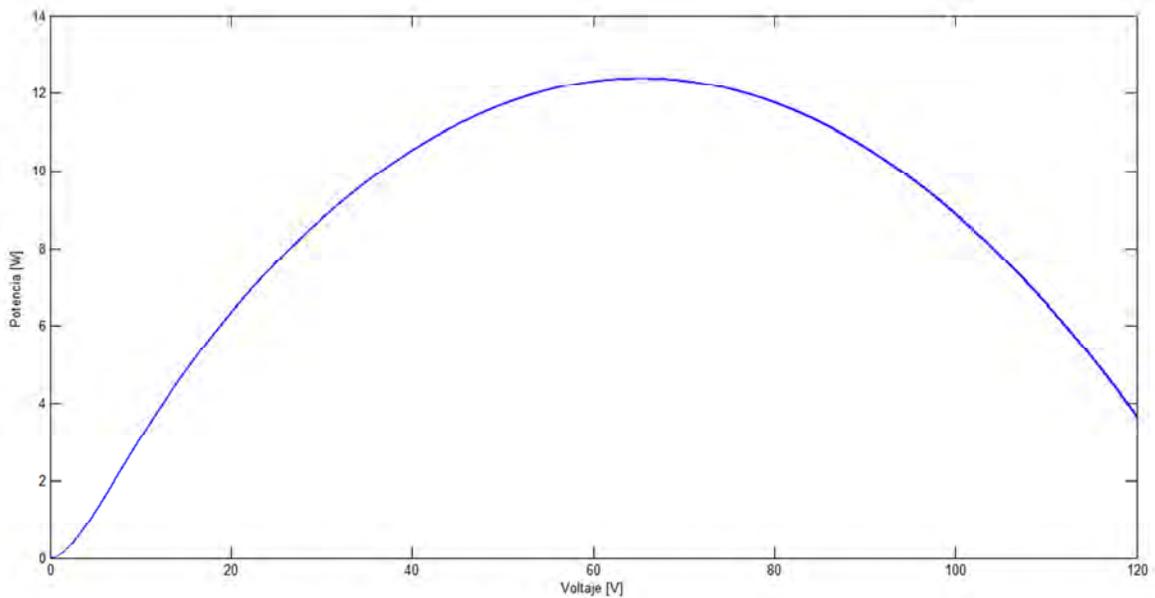


Figura 4.22. Voltaje vs Potencia eléctrica, aplicando un torque de entrada igual a 0.2 [Nm].

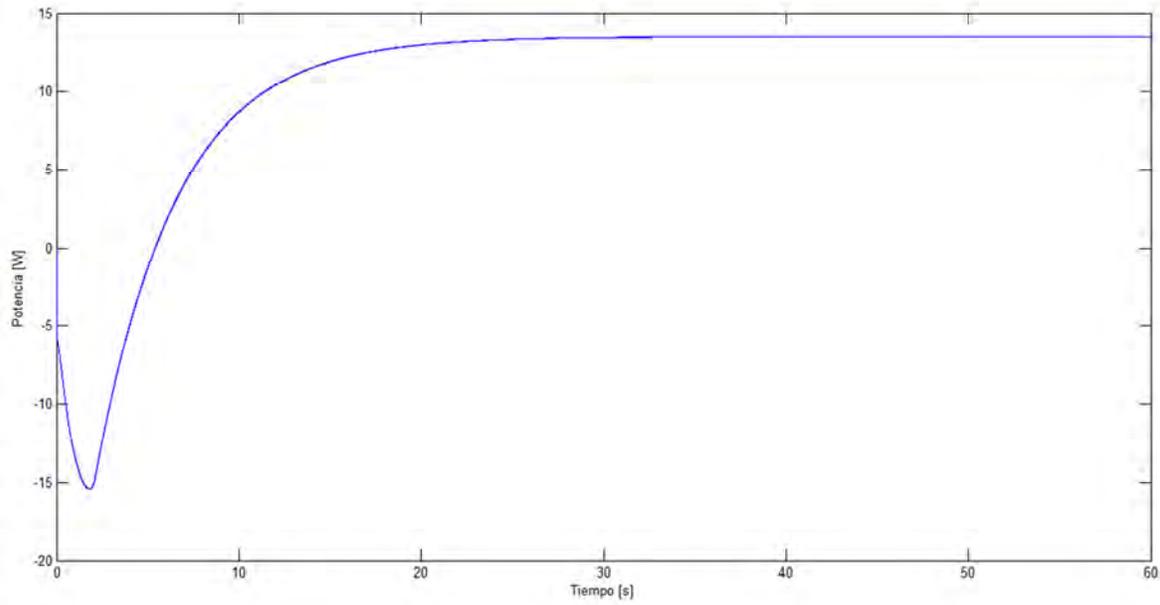


Figura 4.23. Potencia eléctrica máxima obtenida en el generador de cd, aplicando un torque de entrada igual a 0.2 [Nm].

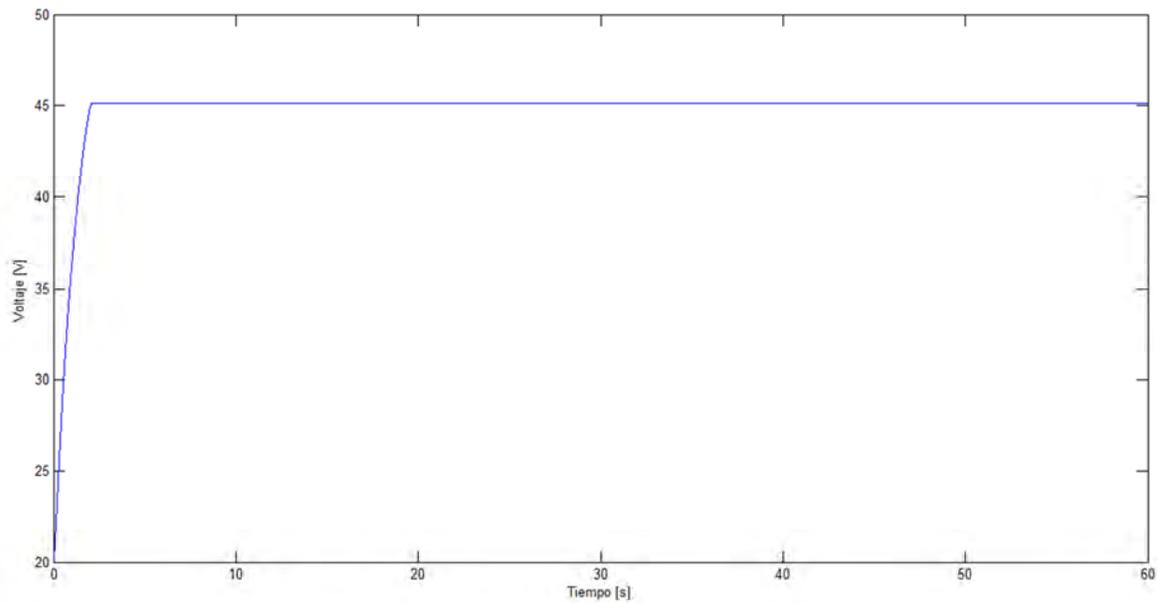


Figura 4.24. Voltaje aplicado a las terminales del generador de cd, aplicando un torque de entrada igual a 0.2 [Nm].

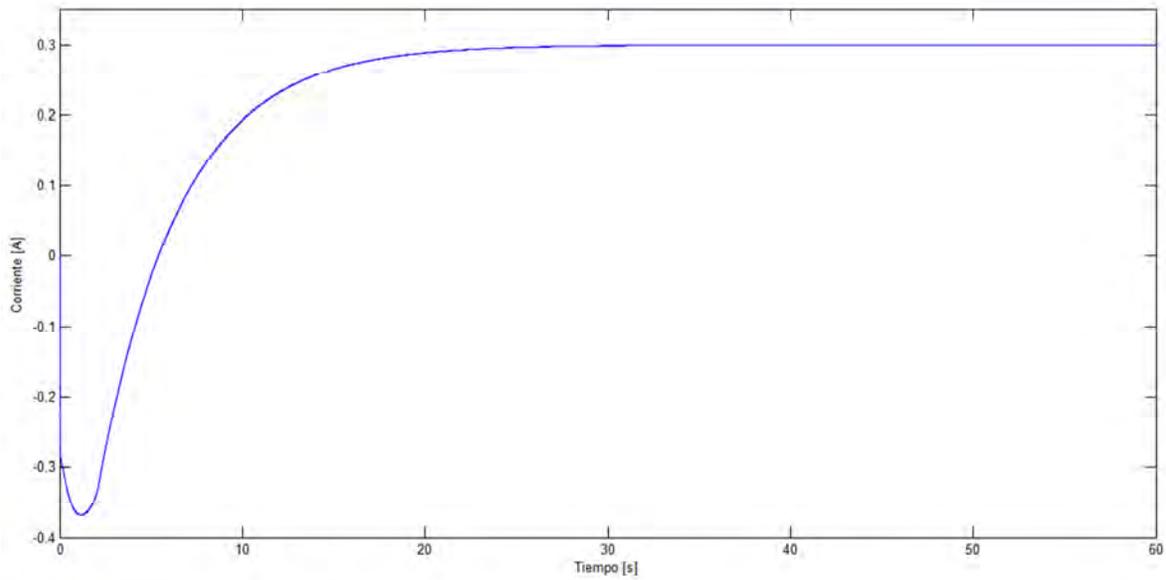


Figura 4.25. Corriente óptima obtenida en el generador de cd, aplicando un torque de entrada igual a 0.2 [Nm].

Al aplicar un torque de entrada variante con respecto al tiempo, la potencia eléctrica máxima generada varía de la misma manera, es decir, a cada valor de torque de entrada se genera un valor de potencia eléctrica máxima diferente. Esto se ejemplifica a continuación.

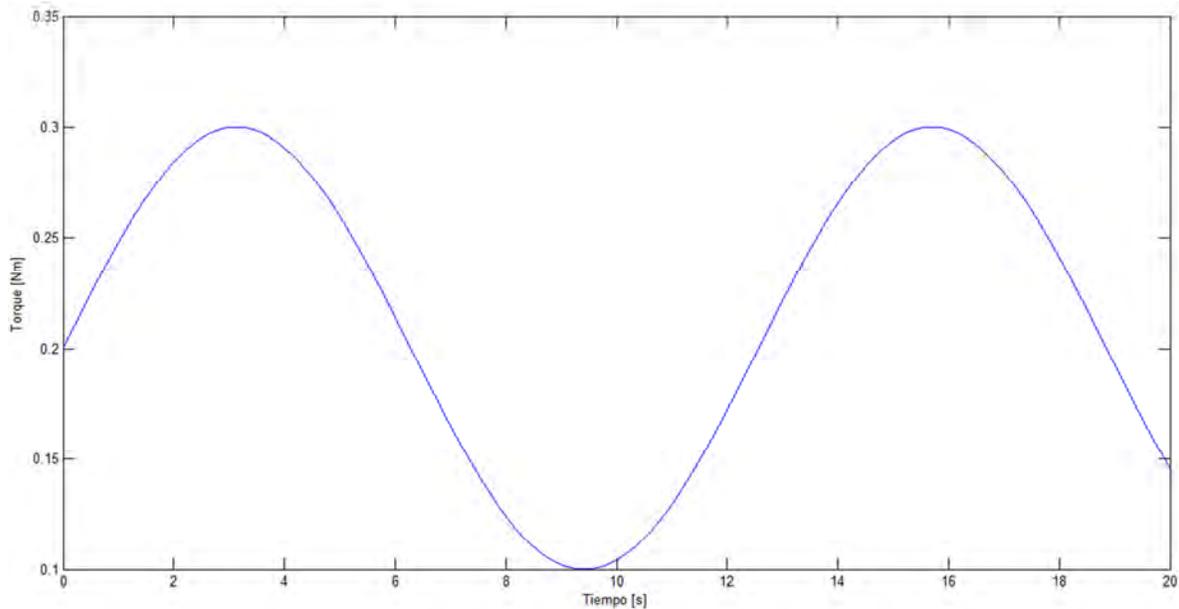


Figura 4.26. Torque de entrada variante con respecto al tiempo.

Para realizar una mejor ilustración de la variación de la potencia eléctrica máxima con respecto a la variación del torque de entrada, se realiza un acercamiento a la figura anterior como sigue.

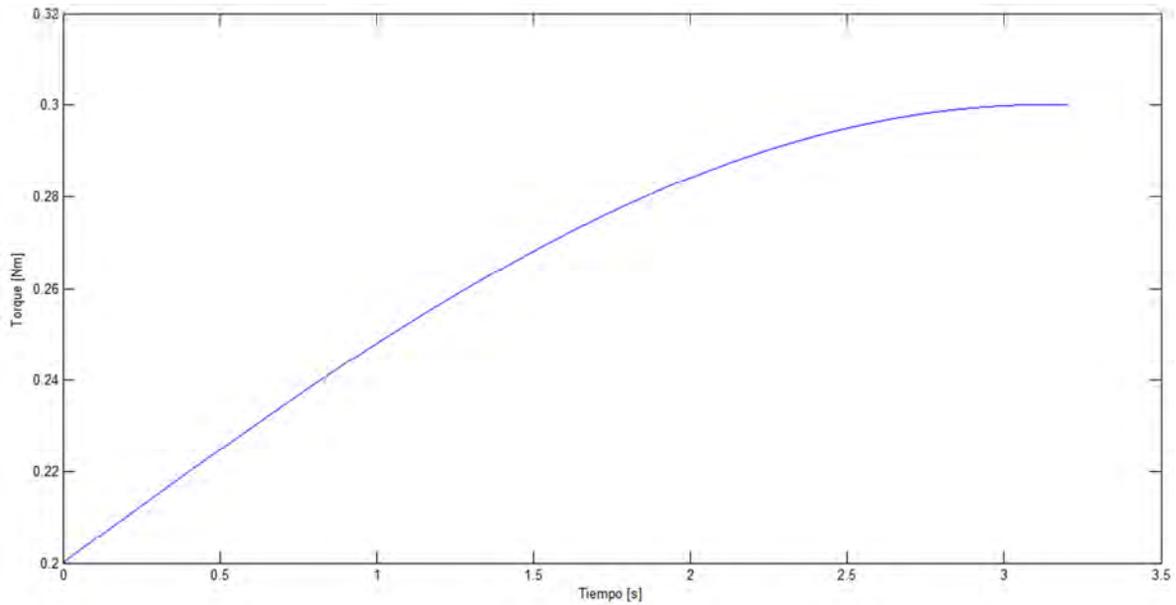


Figura 4.27. Acercamiento del torque de entrada de la figura 4.26.

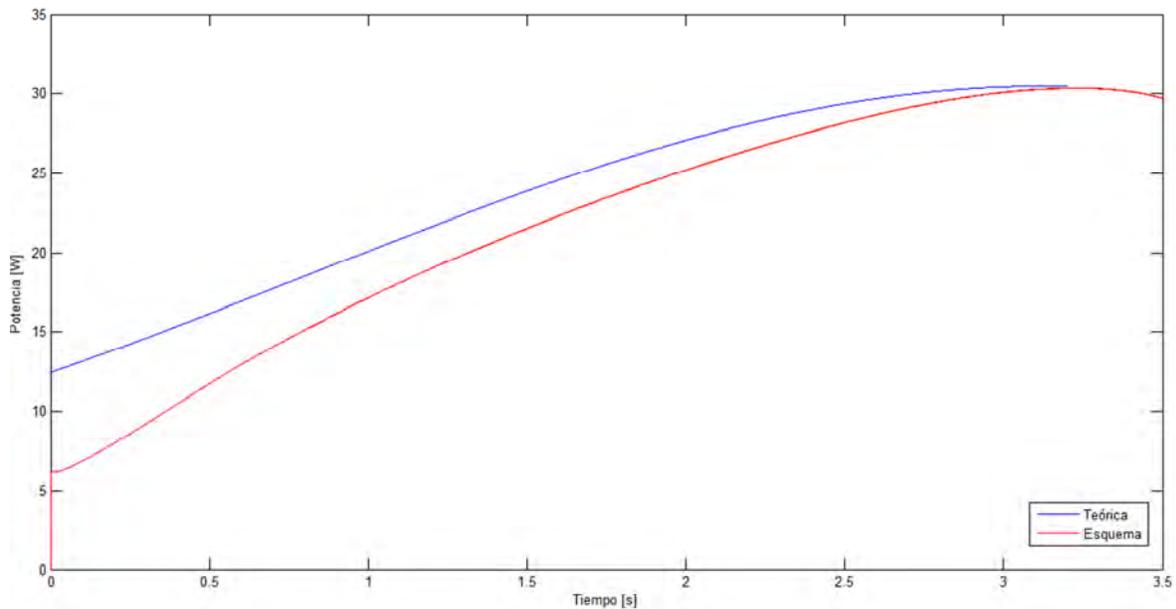


Figura 4.28. Potencia eléctrica máxima para el torque de la figura 4.27.

La figura 4.28 muestra la potencia eléctrica máxima obtenida punto a punto (curva en color azul), es decir a cada punto de la curva mostrada en la figura 4.27 corresponde un punto de potencia eléctrica máxima en esta figura. La potencia eléctrica máxima obtenida mediante la aplicación del esquema propuesto se muestra en color rojo.

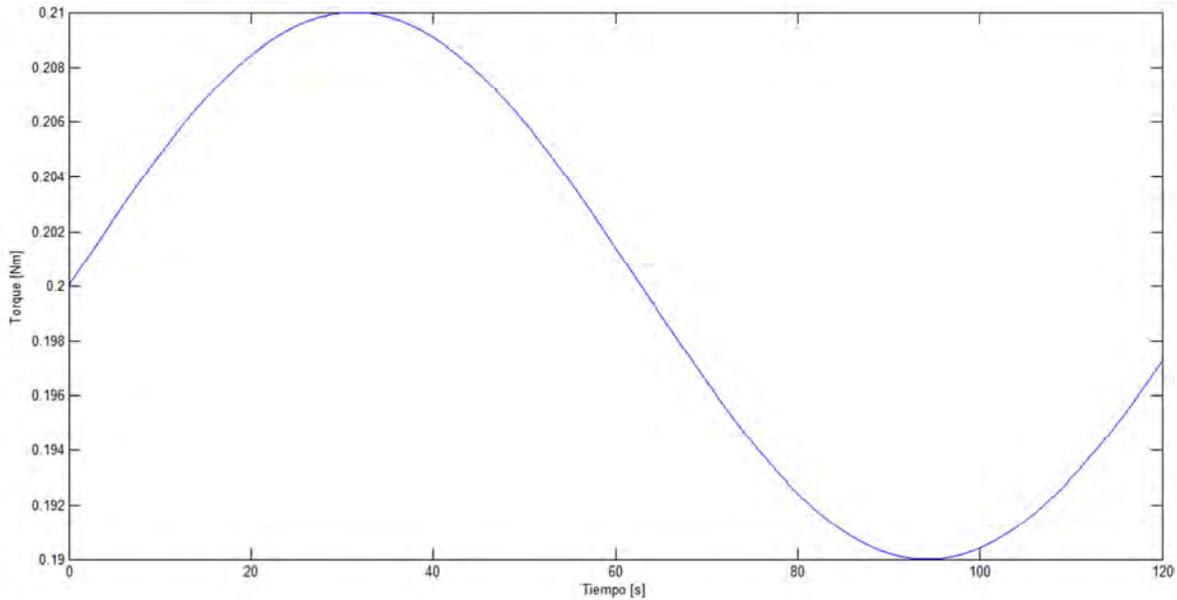


Figura 4.29. Torque de entrada aplicado al generador de cd.

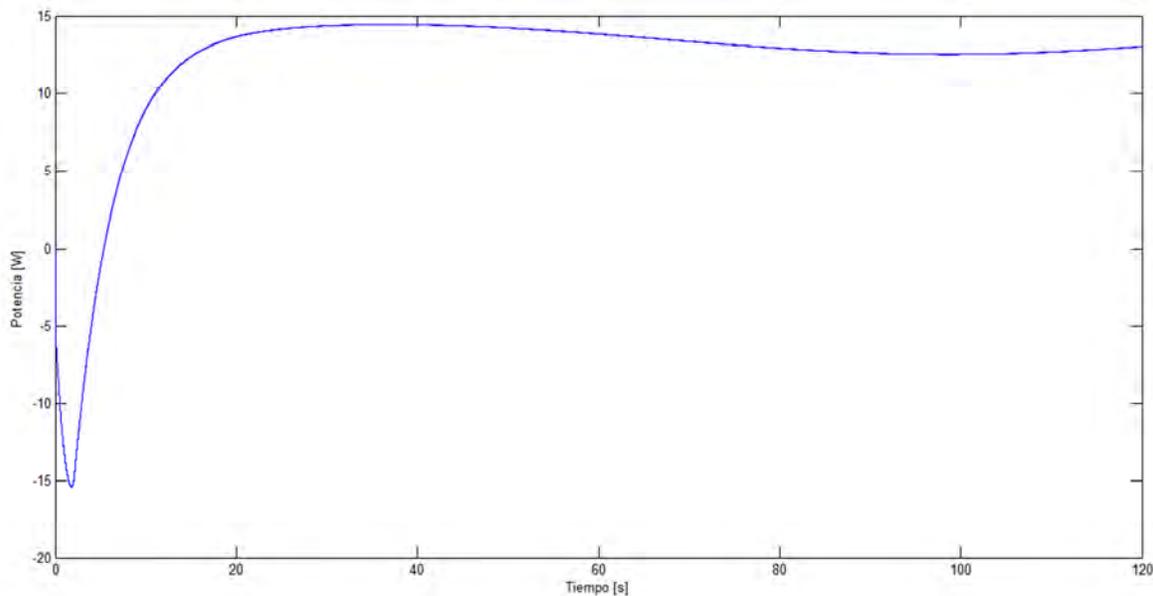


Figura 4.30. Potencia eléctrica máxima obtenida en el generador de cd, aplicando el torque de entrada de la figura 4.29.

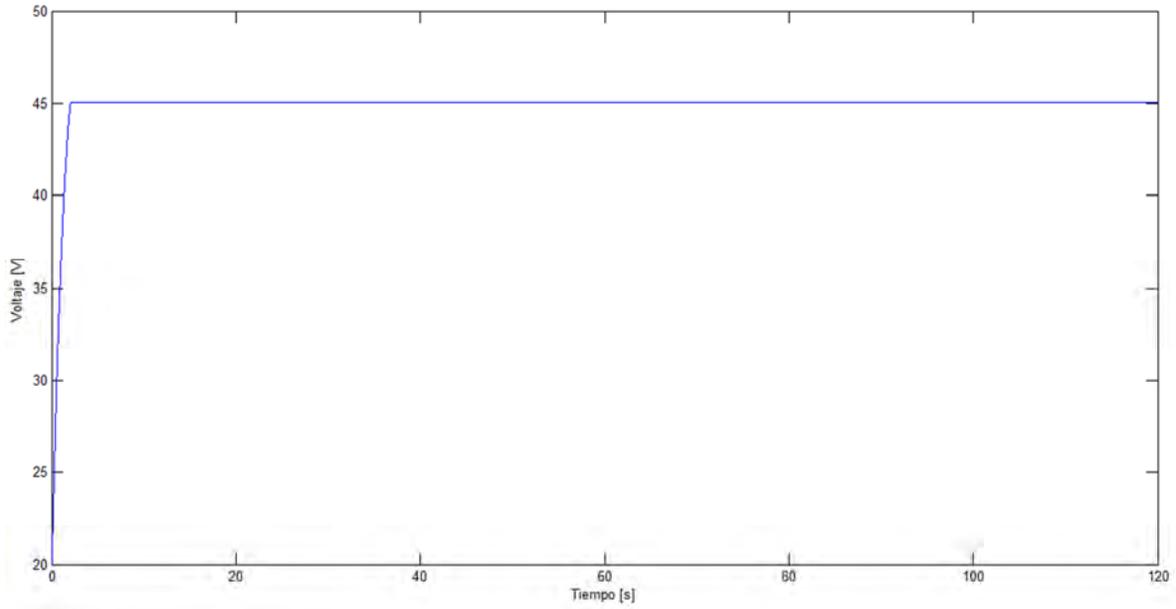


Figura 4.31. Voltaje aplicado al generador de cd, aplicando el torque de entrada de la figura 4.29.

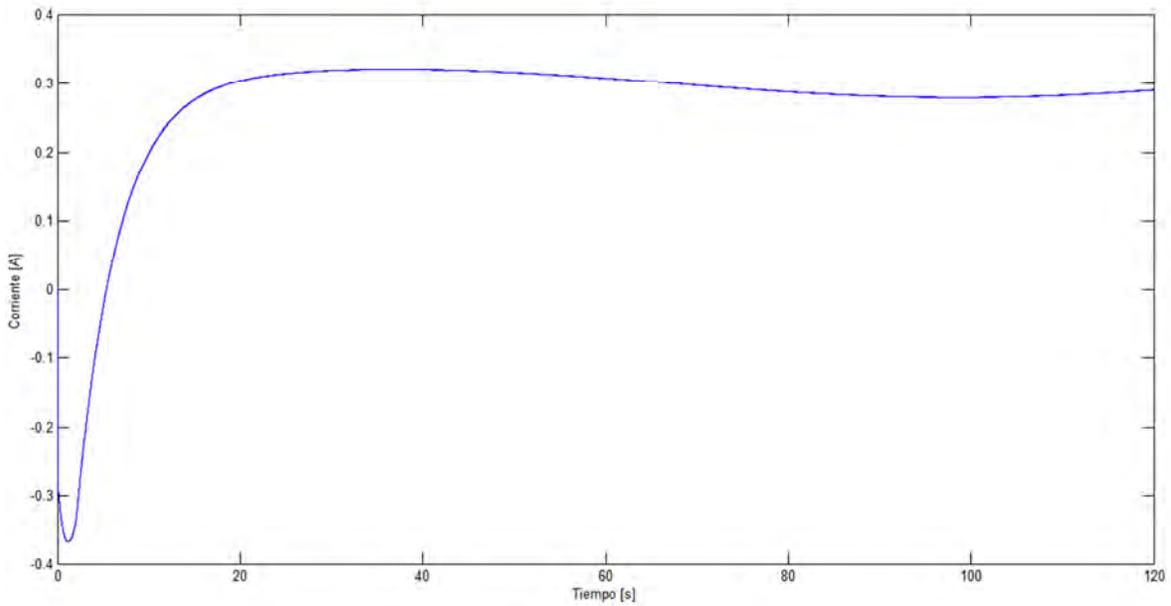


Figura 4.32. Corriente óptima obtenida en el generador de cd, aplicando el torque de entrada de la figura 4.29.

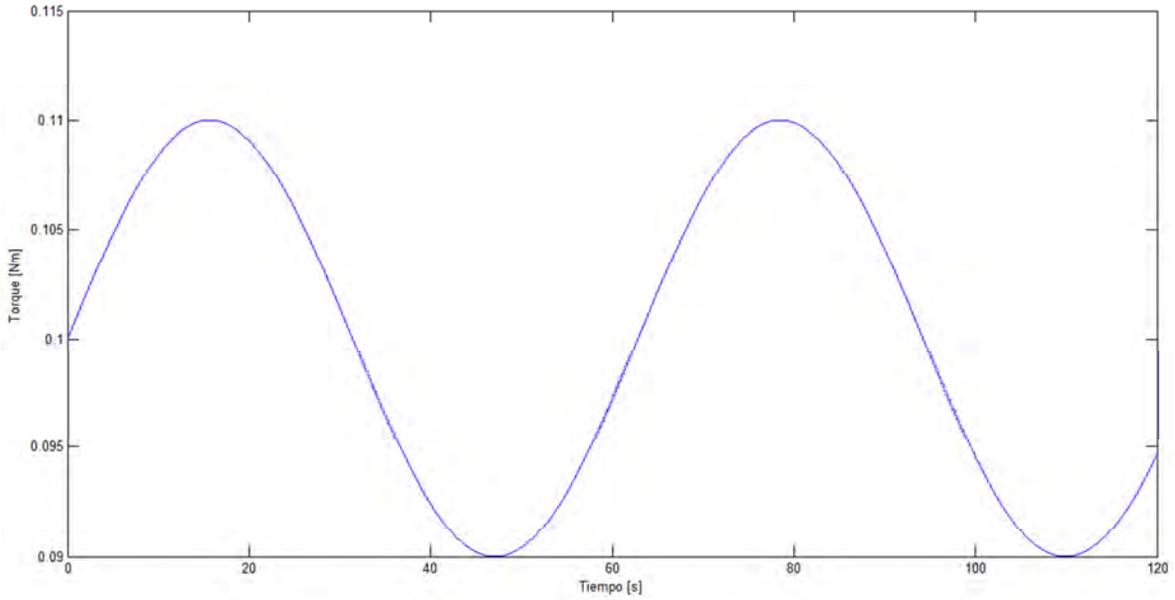


Figura 4.33. Torque de entrada aplicado al generador de cd.

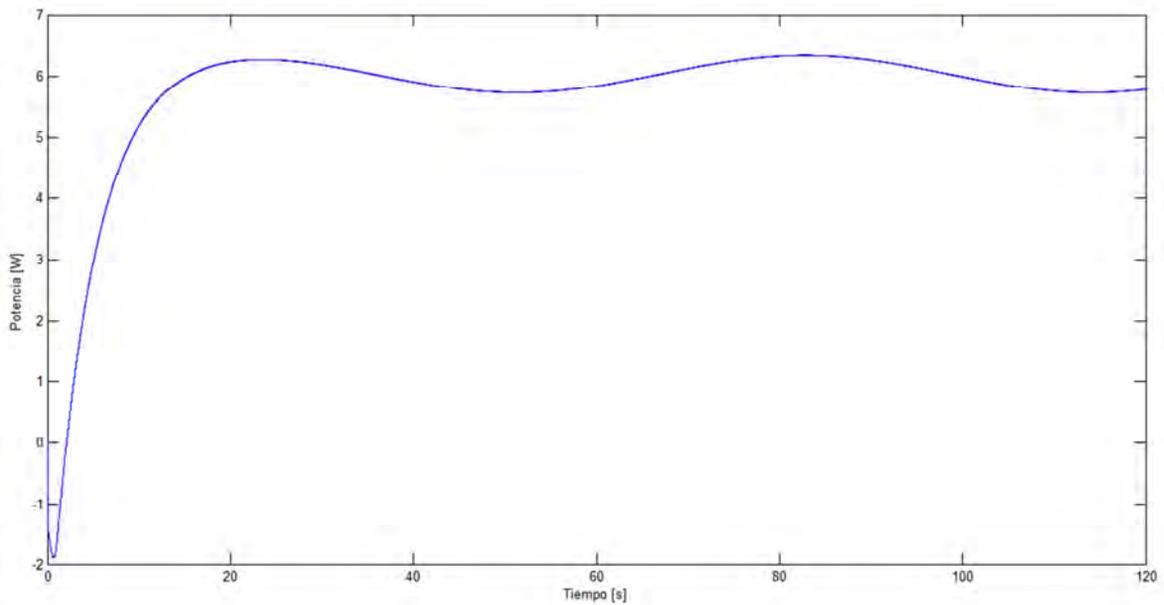


Figura 4.34. Potencia eléctrica máxima obtenida en el generador de cd, aplicando el torque de entrada de la figura 4.33.

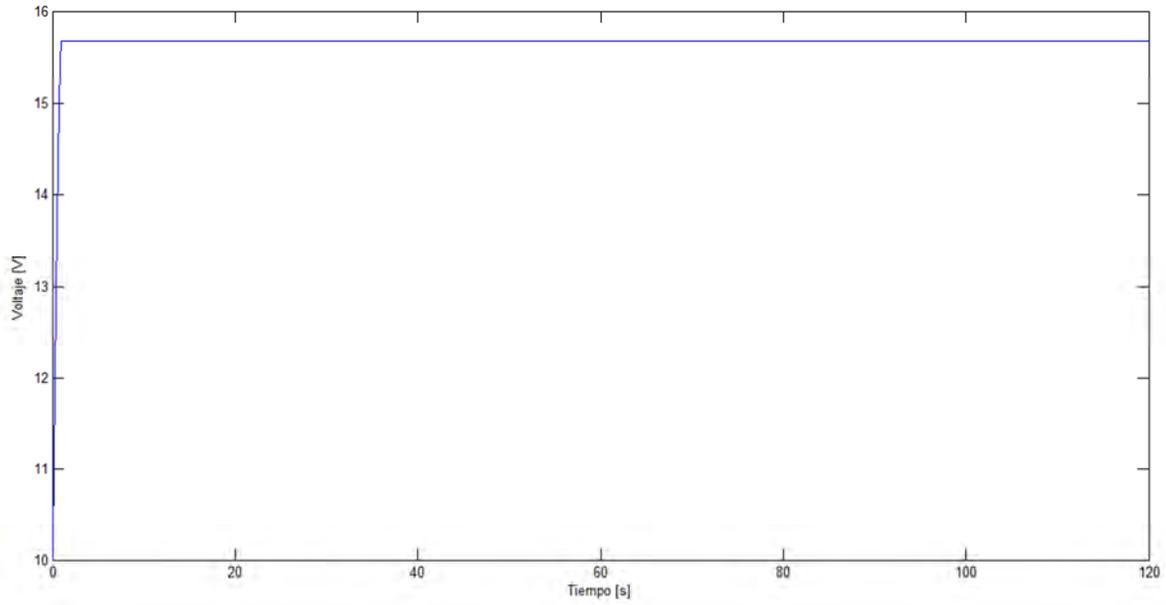


Figura 4.35. Voltaje aplicado al generador de cd, aplicando el torque de entrada de la figura 4.33.

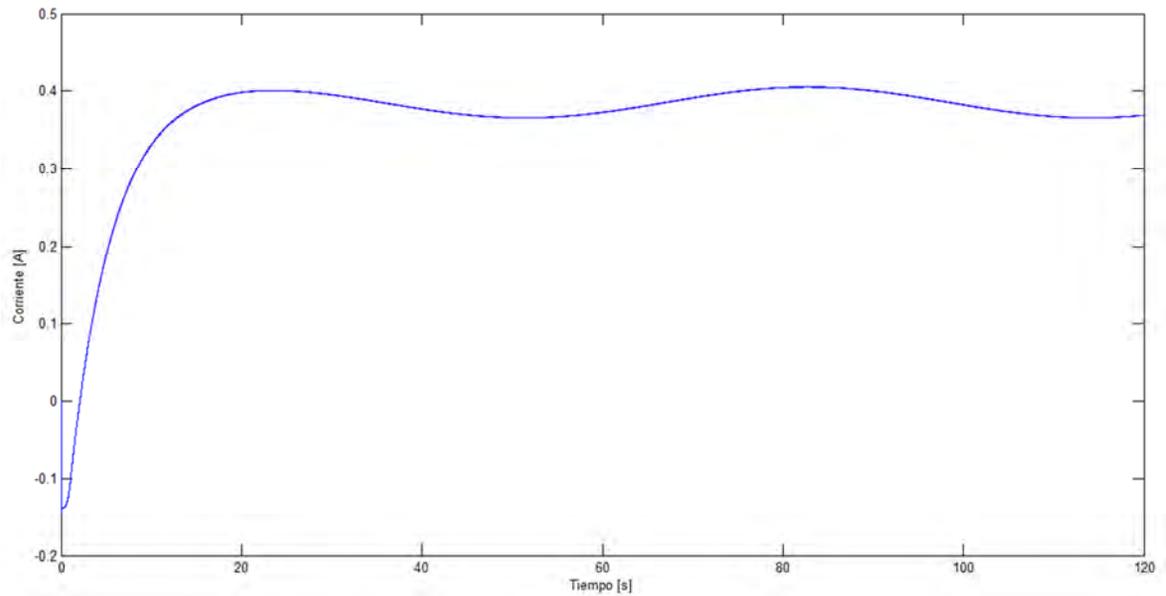


Figura 4.36. Corriente óptima obtenida en el generador de cd, aplicando el torque de entrada de la figura 4.33.

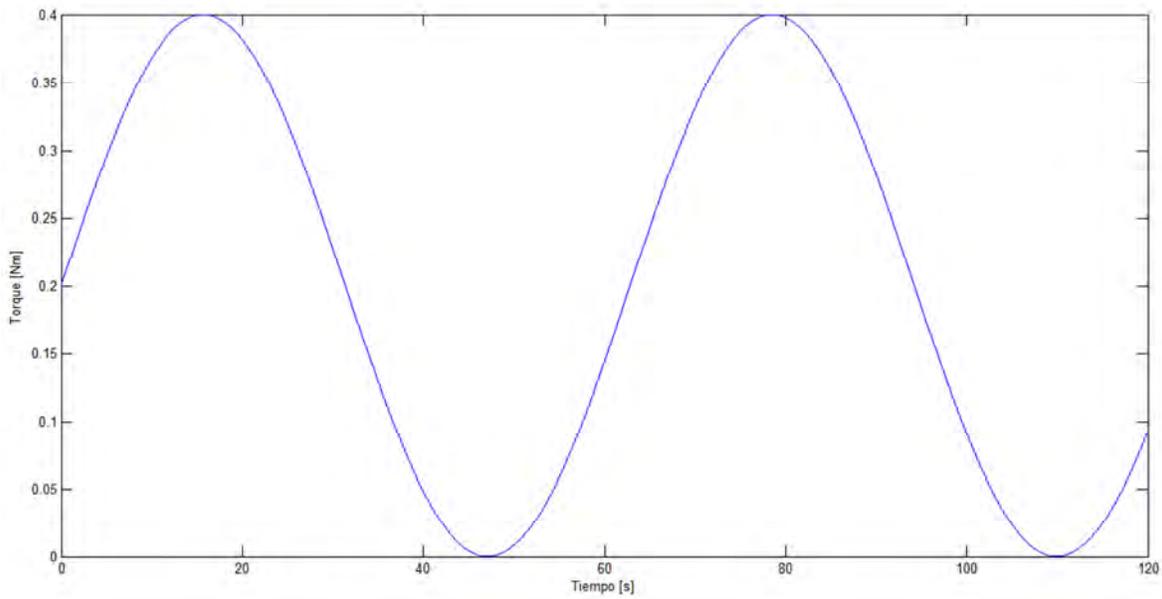


Figura 4.37. Torque de entrada aplicado al generador de cd.

El torque de entrada de la figura anterior mantiene la misma frecuencia que el presentado en la figura 4.33, la diferencia radica en la magnitud de la señal. El motivo de este cambio es mostrar el comportamiento del esquema bajo mayores variaciones en magnitud.

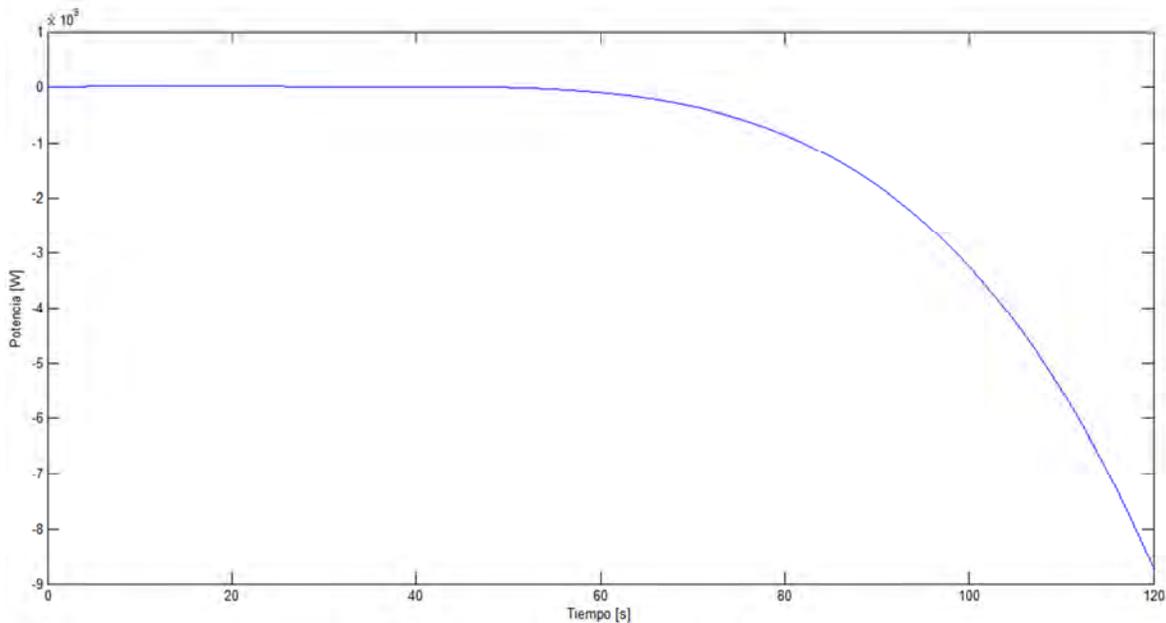


Figura 4.38. Potencia eléctrica máxima obtenida en el generador de cd, aplicando el torque de entrada de la figura 4.37.

Como se puede deducir de la figura anterior, el esquema no soporta variaciones muy grandes en la magnitud de la señal de torque de entrada si esta presenta una frecuencia considerable. Ahora bien si se mantiene la magnitud de la señal de torque de entrada de la figura 4.37 y en cambio se reduce la frecuencia de la siguiente manera.

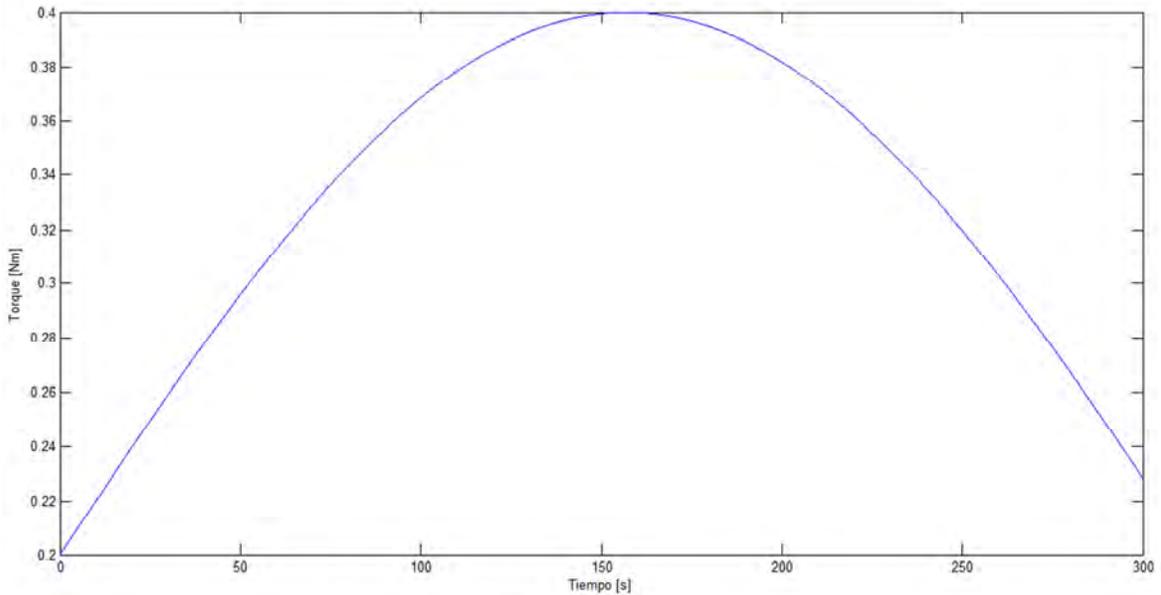


Figura 4.39. Torque de entrada aplicado al generador de cd.

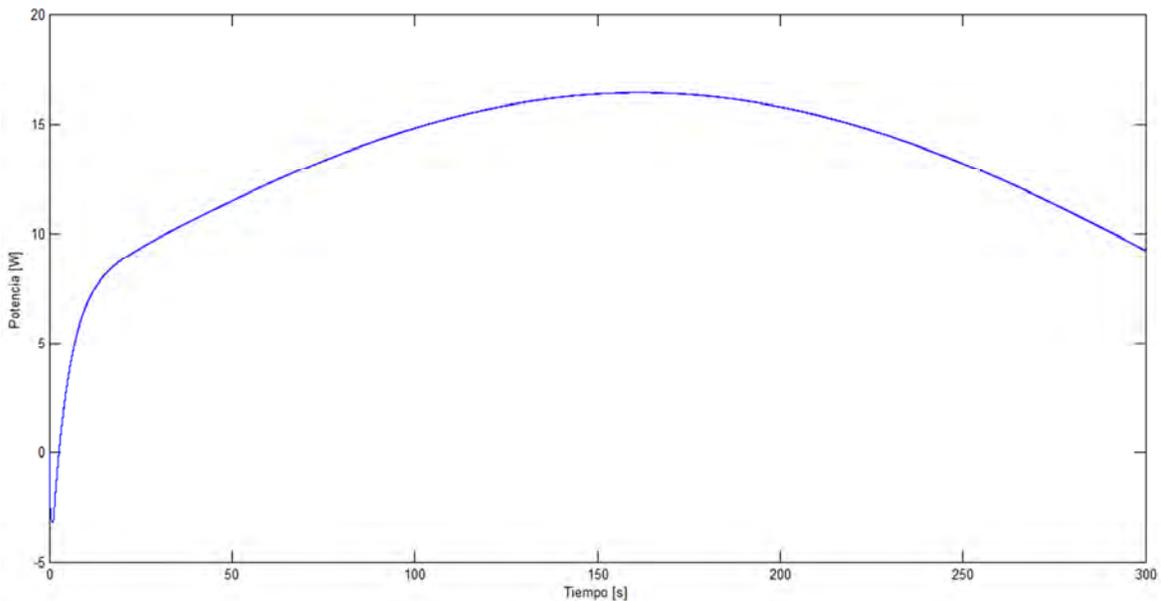


Figura 4.40. Potencia eléctrica máxima obtenida en el generador de cd, aplicando el torque de entrada de la figura 4.39.

De la figura 4.40 se puede destacar que es posible para el esquema soportar variaciones mayores en la magnitud del torque de entrada siempre que la frecuencia de las mismas no sea considerable.

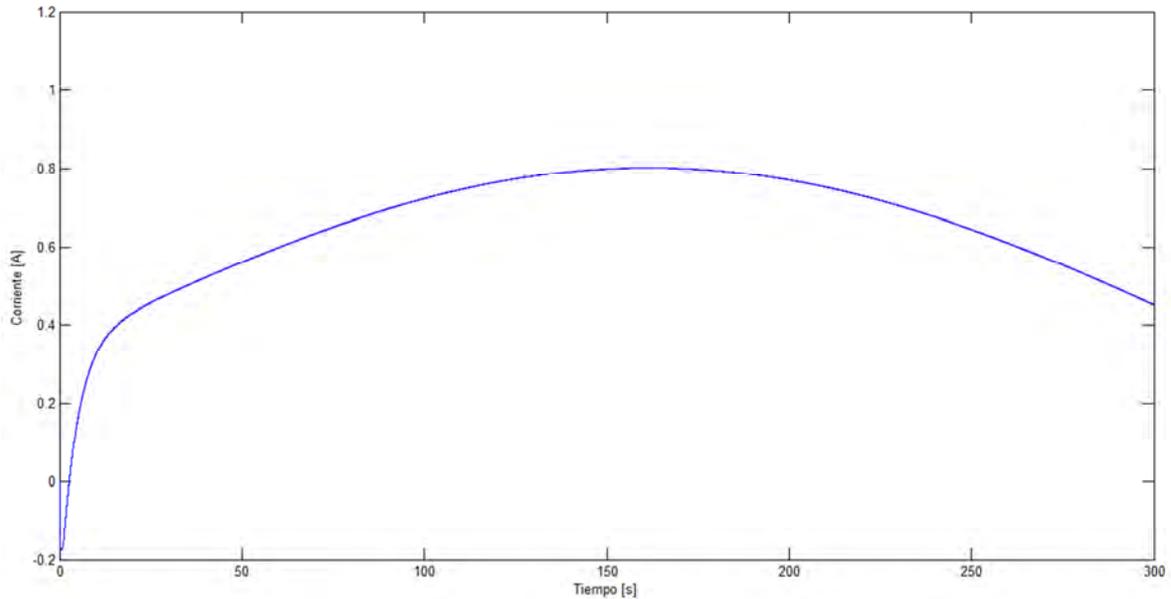


Figura 4.41. Corriente óptima obtenida en el generador de cd, aplicando el torque de entrada de la figura 4.39.

Como se puede observar en las figuras 4.19, 4.23, 4.28, 4.30, 4.34 y 4.40, el valor de la potencia eléctrica máxima varía de acuerdo a las variaciones del valor del torque de entrada, es decir, el método utilizado en este trabajo genera la mayor cantidad posible de potencia eléctrica para cada valor de torque de entrada.

Es importante recalcar que este método tiene limitaciones en cuanto a su aplicación, es decir, la eficacia del método depende de las condiciones en la variación del torque de entrada, esto es, puede soportar frecuencias mayores si la variación en amplitud no es considerable, por otro lado, puede soportar mayor variación en amplitud si la frecuencia de las mismas no es elevada.

## 5.- CONCLUSIONES

---

A lo largo de este trabajo de tesis se ha propuesto un esquema para la estimación del gradiente, además de un esquema conjunto para la búsqueda de extremos.

Como primer punto se obtuvo un esquema para la estimación del gradiente, a continuación se introdujo el uso de derivadores basados en la teoría de modos deslizantes, más adelante se realizaron simulaciones con una función de potencia para comprobar el funcionamiento del esquema para búsqueda de extremos, logrando en cada caso la obtención de la potencia eléctrica máxima. Posteriormente se realizaron simulaciones con el modelo de un generador de corriente directa, al principio con valores de torque constante, generando para cada uno de ellos la correspondiente potencia eléctrica máxima, por último se utilizó una señal senoidal como torque de entrada para obtener variaciones en el comportamiento del sistema y los resultados obtenidos fueron satisfactorios, se pudieron observar las variaciones en el valor de la potencia eléctrica máxima que corresponden a las variaciones en magnitud del torque de entrada debido a la señal senoidal utilizada.

Los resultados obtenidos de la aplicación del método cumplen con el objetivo planteado al principio de este trabajo, es decir, se logra estimar eficientemente el gradiente, además de lograr la obtención del valor extremo para los sistemas presentados, en este caso, la potencia eléctrica máxima tanto para la función de potencia como para el generador de corriente directa.

Por otra parte se detectaron algunas limitaciones en la aplicación del método, esto es, la convergencia que presenta el método con respecto a la frecuencia y magnitud de las variaciones en el torque de entrada usado en el generador de corriente directa. Al analizar las simulaciones se concluyó que el método es capaz de soportar mayores frecuencias en las variaciones del torque de entrada siempre que la magnitud de las mismas no sea considerable, a su vez es posible para el método soportar mayor variación en magnitud si éstas presentan frecuencias menores.

Sería de interés para trabajos futuros considerar el comportamiento del método bajo condiciones extremas, es decir variaciones abruptas tanto en magnitud como en frecuencia para formular una estrategia que permita la obtención del valor extremo bajo estas condiciones.

# APENDICE A

---

## A.1.- CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

En la actualidad existe gran variedad de sistemas físicos descritos por ecuaciones diferenciales que dependen de manera discontinua del estado del sistema (Sistemas de estructura variable, SEV).

Un SEV se puede ver como un conjunto de dos o más subsistemas continuos y alguna lógica asociada que realiza la conmutación entre éstos. Cada subsistema posee sus propias características, al conmutar entre ellas, el SEV puede combinar las características de ambos subsistemas o de alguna manera poseer características propias ajenas a los subsistemas.

El control asociado a los SEV o a algunos sistemas continuos puede cambiar su estructura. Es así que existe el control por estructura variable (CEV), dicho control consiste en diseñar los parámetros de cada uno de los subsistemas o estructuras, además de su lógica de conmutación. Generalmente las leyes de CEV son funciones discontinuas de los estados del sistema.

Una de las maneras más efectivas de realizar el CEV es diseñar el objetivo de control tal que se pueda expresar en términos de los estados del sistema, posteriormente, mediante el uso de conmutaciones a frecuencias muy elevadas, se obliga a las trayectorias del sistema a seguir una superficie determinada por la restricción planteada en el espacio de estados. A este comportamiento se le denomina modos deslizantes (MD). Los MD se caracterizan por ser altamente robustos y de orden reducido.

En el caso de que la frecuencia de conmutación no sea infinita, como sucede en cualquier implementación práctica o en el caso de que existan dinámicas no modeladas, se generan oscilaciones de amplitud finita y de alta frecuencia en las trayectorias del sistema al evolucionar sobre la superficie de deslizamiento, a este fenómeno se le conoce como chattering que constituye el principal defecto de los modos deslizantes.

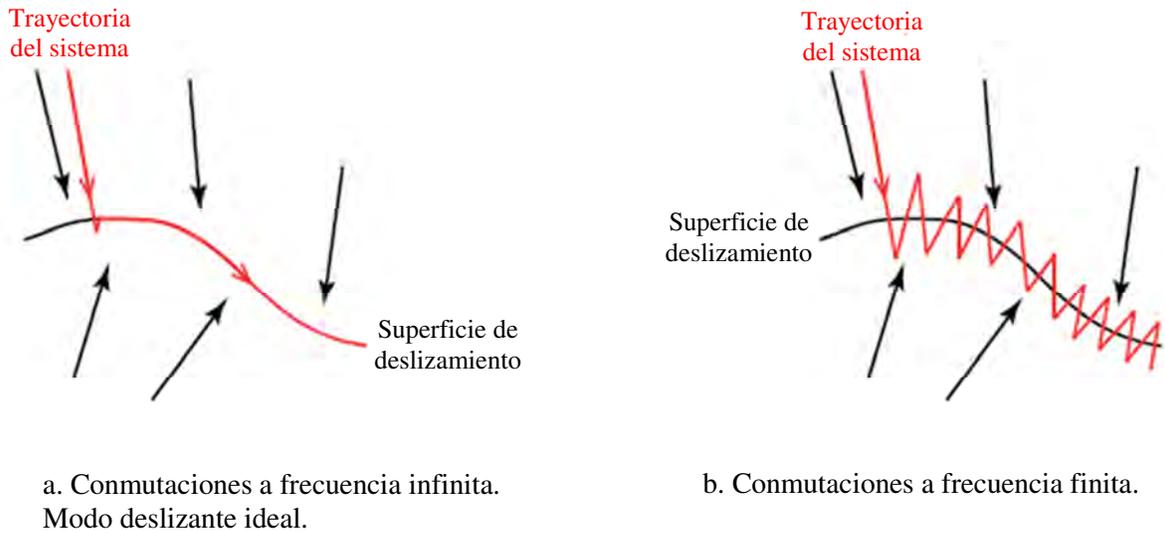


Figura A.2. Trayectorias de un SEV, idea básica del deslizamiento (Evangelista, 2012) <sup>[13]</sup>.

El problema del chattering ha sido motivo de análisis y se han desarrollado estrategias que restringen aún más el movimiento de las trayectorias del sistema sobre la superficie de deslizamiento, estableciendo así condiciones de mayor suavidad en la evolución de las trayectorias. Los modos deslizantes de orden superior (MDOS) logran este objetivo con buenas características de robustez.

El CEV y los modos deslizantes constituyen una de las alternativas más atractivas para controlar sistemas con incertidumbres en los parámetros y perturbaciones, además de que el diseño de controladores por MD suele ser relativamente sencillo, aunado a su versatilidad para combinarse con otras estrategias de control y su posibilidad para aplicarse tanto a sistemas lineales como no lineales.

### A.1.1.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL CONTROL POR MD

La idea fundamental del control por modos deslizantes (CMD) es llevar las trayectorias del sistema sobre una superficie de deslizamiento y obligarlas a evolucionar sobre ésta última. De esta manera, la dinámica del sistema queda determinada por las ecuaciones que definen la superficie en el espacio de estados. Ahora bien, definiendo los objetivos de control en términos de las ecuaciones de la superficie mediante un diseño adecuado de las mismas, es posible estabilizar al sistema, realizar seguimiento de trayectorias y regulación de variables.

### A.1.1.1.- MODOS DESLIZANTES DE PRIMER ORDEN (1-MD)

Considere un sistema de control no lineal SISO, tal que la dinámica de los estados puede escribirse a través del siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, en la forma más general:

$$\dot{x} = F(x, u) \quad (\text{A.7})$$

donde  $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la entrada de control, posiblemente discontinua, por lo que el campo vectorial  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tendrá discontinuidades en algún conjunto del espacio  $\mathbb{X}$ .

Puede notarse que se ha considerado un sistema autónomo, es decir, uno que no incluye una dependencia explícita del tiempo. Esto no representa pérdida de generalidad, ya que, en el caso de estudiar un sistema no autónomo, el mismo puede verse como autónomo, tomando al tiempo  $t$  como una variable independiente e incluyéndola como un estado más del sistema, cuya evolución temporal, trivial, queda determinada por la ecuación  $\dot{t} = 1$ . Esta dinámica ficticia implica, obviamente, el incremento de la dimensión del sistema en 1, pero permite estudiar los sistemas no autónomos de la misma manera que los que se presentan en este trabajo.

Posteriormente, se define además, una función suave de los estados compatible con algún objetivo de control deseado,  $\sigma: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , a partir de la cual queda determinado el conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n: \sigma(x) = 0\} \quad (\text{A.8})$$

que representa la superficie o variedad de conmutación en el espacio de estados n-dimensional. La misma es de dimensión n-1 en el caso SISO.

La ley de control por estructura variable más sencilla que puede plantearse, para lograr que el sistema opere sobre la superficie de conmutación, consiste en alternar los valores de  $u(x)$ , entre dos valores posibles según el signo de  $\sigma(x)$ :

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

donde los dos niveles de  $u$ , son funciones suave de los estados que no se cruzan (para ningún  $x \in \mathbb{X}$ ). Para estas condiciones el sistema (A.7) controlado puede expresarse como dos subsistemas continuos, dependiendo del signo de  $\sigma(x)$ :

$$\dot{x} = F(x, u) = \begin{cases} F(x, u^+) = F^+(x) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ F(x, u^-) = F^-(x) & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Se dice que existe un régimen deslizante sobre la superficie  $S$ , si al aplicar la ley de conmutación (A.9) las trayectorias del sistema llegan a la superficie y permanecen localmente en su entorno. Para que esto sea posible, los campos vectoriales de los dos subsistemas continuos,  $F^+(x)$  y  $F^-(x)$ , deben apuntar localmente a  $S$ , como se muestra en la figura A.3. Para lograr esto es necesario satisfacer las siguientes desigualdades para el sistema controlado en las proximidades de  $S$ :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(x) < 0 & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ \dot{\sigma}(x) > 0 & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

es decir, si  $\sigma(x) > 0$ , debe decrecer ( $\dot{\sigma}(x) < 0$ ) y viceversa.

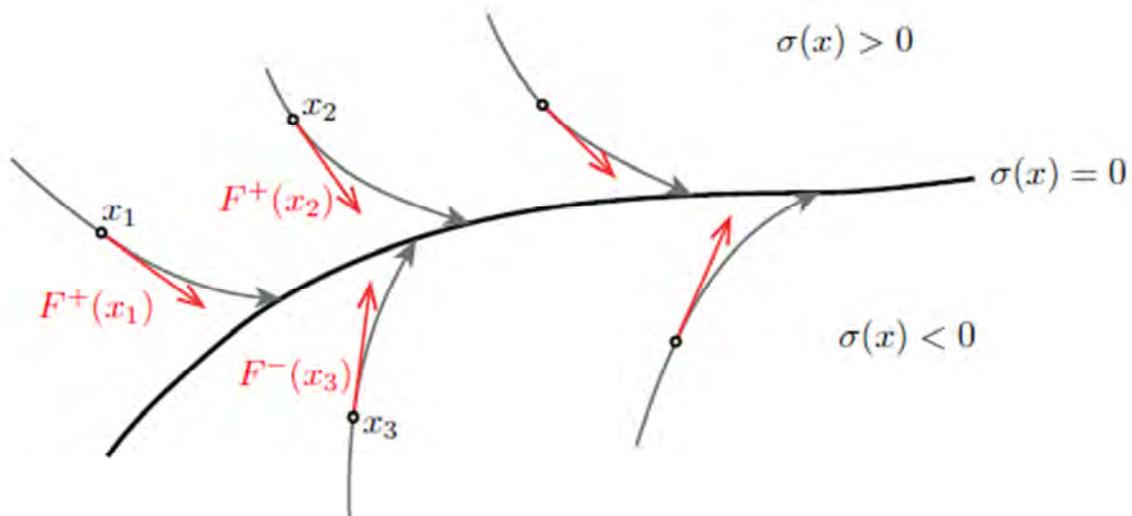


Figura A.3. Condición para la existencia de régimen deslizante sobre  $S$ .  
 (Evangelista, 2012)<sup>[13]</sup>.

Estas condiciones son necesarias para garantizar la convergencia de las trayectorias del sistema a la superficie de deslizamiento y la permanencia en una vecindad de la misma, es decir, para la existencia de un régimen deslizante. Las desigualdades anteriores pueden condensarse en una única desigualdad:

$$\dot{\sigma}(x)\sigma(x) < 0 \quad (\text{A.12})$$

que debe de cumplirse al menos en la vecindad de  $S$ .

### A.1.1.2.- DERIVADAS DE LIE

Muchos de los conceptos relacionados con los modos deslizantes pueden explicarse a través de sus interpretaciones geométricas. En las mismas es común el uso de la derivada direccional o derivada de Lie, que aparece además en forma natural al estudiar sistemas dinámicos en general. La misma es una notación compacta para las derivadas de funciones escalares en dirección de uno o más campos vectoriales.

Dados un campo escalar  $h(x)$  y un campo vectorial  $f(x)$  en el espacio de estados, con  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La derivada de Lie se define como la función escalar  $L_f h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (\text{A.13})$$

Que indica la derivada de  $h(x)$  en la dirección de  $f(x)$ . La expresión  $\frac{\partial h}{\partial x}$  representa el gradiente de  $h(x)$ ,  $\nabla h(x)$ :

$$\nabla h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} = \left[ \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right] \quad (\text{A.14})$$

vector que indica para cada punto  $x$ , la dirección de máxima variación de  $h(x)$  y la velocidad de cambio de  $h(x)$  en dicha dirección.

Nótese que  $L_f h(x)$  es una función escalar, por lo que se puede aplicar recursivamente, en la dirección de un mismo campo vectorial o de varios diferentes.

Para el primer caso se tiene

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( L_f^{k-1} h(x) \right) f(x) \quad (\text{A.15})$$

y para el caso de, por ejemplo, dos campos vectoriales distintos  $f(x)$  y  $g(x)$ , se tiene:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( L_f h(x) \right) g(x) \quad (\text{A.16})$$

La derivada de la función de conmutación puede expresarse, usando la derivada de Lie, como:

$$\dot{\sigma}(x) = L_F \sigma(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (\text{A.17})$$

a partir de ésta, la condición de existencia del régimen deslizante, dada por (A.11), queda expresada como:

$$\begin{cases} L_{F^+}\sigma(x) < 0 & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ L_{F^-}\sigma(x) > 0 & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

en la vecindad de  $S$ , de otra manera:

$$\begin{cases} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} L_F + \sigma(x) < 0 \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} L_F - \sigma(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Esto implica que la variación de la función de restricción  $\sigma(x)$  en la dirección del campo controlado siempre se opone a el signo de  $\sigma(x)$ , de esta manera queda garantizado el cruce de la superficie  $S$ , desde ambos lados de la misma.

### A.1.1.3.- CONDICIÓN DE TRANSVERSALIDAD

El sistema (A.7) se conoce como sistema afín al control o sistema lineal analítico en el caso particular en que la dinámica de los estados pueda escribirse como:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{A.20})$$

donde  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , son campos vectoriales en el espacio de estados. A  $f$  se le denomina vector de campo de deriva y a  $g$ , vector de campo de control.

Para un sistema de estas características, considerando la misma función de conmutación  $\sigma$  y, por ende, la superficie de conmutación dada en (A.10), la derivada de  $\sigma$  puede expresarse como una derivada de Lie, haciendo uso de la linealidad del operador, de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma} = L_{f+gu}\sigma = L_f\sigma + L_g\sigma u \quad (\text{A.21})$$

Al aplicar la ley de control definida en (A.9), la condición de existencia de régimen deslizante puede expresarse como:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} L_f\sigma + L_g\sigma u^+ < 0 & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ L_f\sigma + L_g\sigma u^- & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

De la ecuación anterior, se puede observar que para lograr el control por MD es necesario que se cumpla:

$$L_g \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \neq 0 \quad (\text{A.23})$$

A la ecuación anterior se le denomina condición de transversalidad, y es necesaria para la existencia del régimen de deslizamiento sobre  $S$ . La misma permite influenciar  $\dot{\sigma}$  y, en particular, el signo de la misma, a través de la acción de control  $u$ .

Geoméricamente, esta condición garantiza que el campo vectorial  $g(x)$  no sea tangencial a la superficie de deslizamiento  $S$ . De ser tangencial a la superficie deslizante, no se podría forzar a las trayectorias a cruzar la superficie, y por tanto no se podría establecer el régimen deslizante.

En términos de sistemas de control, que se cumpla la condición de transversalidad es equivalente a que la función de conmutación  $\sigma(x)$  sea de grado relativo uno con respecto a la entrada de control  $u$ . El grado relativo de una función de los estados del sistema o de una salida del sistema, puede definirse como el número de veces que se debe derivar ésta con respecto al tiempo para obtener la entrada de control en forma explícita. En el caso de  $\sigma(x)$  cuando el sistema es afín, la condición (A.23) garantiza la presencia de  $u$  en la expresión de  $\dot{\sigma}$ .

#### A.1.1.4.- CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE 1-MD

Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que  $u^+ > u^-$ , la condición de existencia del régimen deslizante queda definida de la siguiente manera:

$$L_g \sigma < 0 \quad \forall \sigma(x) \text{ en la vecindad de } S, \sigma(x) \neq 0 \quad (\text{A.24})$$

Esta expresión surge de reescribir la expresión (A.22) cuando  $\sigma(x) < 0$  como  $-L_f \sigma - L_g \sigma u^- < 0$ , y restando ambas condiciones se obtiene:

$$L_g \sigma (u^+ - u^-) < 0 \quad (\text{A.25})$$

de la suposición  $u^+ > u^-$ , la condición se reduce a  $L_g \sigma < 0$ .

Se debe garantizar que  $L_g \sigma$  no se anule, es decir que no cambie de signo. Nótese que si  $L_g \sigma > 0$ , la elección de  $u^+ < u^-$  garantiza la existencia del régimen deslizante. Otra posibilidad es redefinir la ley de conmutación, eligiéndola como  $\tilde{\sigma}(x) = -\sigma(x)$ , para lo cual se verificará (A.24).

## A.1.2.- REGULARIZACIÓN. MOVIMIENTO EN MODO DESLIZANTE

En el CMD el comportamiento dinámico del sistema controlado es descrito mediante ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo. Por esta razón, las mismas no satisfacen las condiciones de existencia y unicidad de la solución de la teoría convencional de ecuaciones diferenciales. En consecuencia, el problema de describir el movimiento del sistema durante el régimen deslizante no es sencillo.

Las propuestas respecto a este problema consisten en realizar alguna concesión, llevando al sistema a alguna forma que permita encontrar una solución cercana en algún sentido a la del sistema original, y que permita el uso de técnicas de control clásicas. A esta metodología de sustituir el problema se le conoce como regularización.

En algunos casos, el uso de distintas técnicas de regularización resulta en soluciones diferentes para describir el movimiento en régimen deslizante, con diferente sentido para cada sistema, y lo más razonable parecería ser encontrar el rango de problemas para los cuales es útil cada una de las técnicas.

Entre las más utilizadas se encuentran el método de Filippov y el método del control equivalente.

### A.1.2.1.- MÉTODO DE FILIPPOV

El método de Filippov (Filippov, 1988) <sup>[15]</sup>, propone que el control discontinuo implementado toma en cuenta distintas clases de imperfecciones o errores (retardos, histéresis, diferencias entre el sistema a controlar y el sistema real, etc.) y por lo tanto, el movimiento no ocurrirá estrictamente sobre el límite de discontinuidad, la variedad de deslizamiento  $\sigma(x) = 0$ , sino en una franja límite alrededor de la misma. Es decir, cuando el control conmuta entre los dos valores  $u^+$  y  $u^-$ , y por lo tanto el campo de velocidades de los estados lo hace entre  $F^-$  y  $F^+$  (recordar (A.10)), las trayectorias del sistema oscilan en un intervalo  $|\sigma(x)| < \Delta$ , donde  $\Delta$  depende de las imperfecciones consideradas.

La idea consiste en suponer que  $\Delta$  es lo suficientemente pequeño para aceptar que en un intervalo de tiempo corto  $[t, t + \Delta t]$  los campos de velocidad  $F^- = F^-(x, u^-)$  y  $F^+ = F^+(x, u^+)$  permanecen constantes para algún punto  $x$  sobre la variedad  $s(x) = 0$ . Si dentro de este intervalo de tiempo se denomina  $\Delta t_1$  al subintervalo durante el cual  $u = u^+$  y  $\Delta t_2$  a aquel durante el cual  $u = u^-$ , con  $\Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t$ , entonces el incremento del vector de estados durante  $\Delta t$  resulta  $\Delta x = F^+ \Delta t_1 + F^- \Delta t_2$ , y el campo promedio de velocidad de los estados puede escribirse como el promedio convexo:

$$\bar{\dot{x}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu F^+ + (1 - \mu)F^- \quad (\text{A.26})$$

donde  $\mu = \frac{\Delta t_1}{\Delta t} \in [0,1]$  es la fracción de tiempo durante el cual el control toma el valor  $u^+$  y  $(1 - \mu)$  la fracción correspondiente al valor  $u^-$ . Haciendo tender  $\Delta t$  a cero puede obtenerse la expresión del campo de velocidad  $\dot{x}$ .

De esta manera, el campo de velocidades de los estados en régimen deslizante estándar puede expresarse de acuerdo al método de Filippov como:

$$\dot{x} = F^{MD} = \mu F^+ + (1 - \mu)F^- \quad (\text{A.27})$$

Donde el valor de  $\mu$  se obtiene de despejar

$$\dot{\sigma} = \nabla\sigma(x)\dot{x} = \nabla\sigma(x)[\mu F^+ + (1 - \mu)F^-] = 0 \quad (\text{A.28})$$

La condición anterior define que durante el régimen deslizante, las trayectorias permanecen sobre  $\sigma(x) = 0$ , es decir, que la derivada con respecto al tiempo de  $\sigma$  es nula, de esta manera se obtiene la siguiente expresión:

$$\mu = -\frac{\nabla\sigma(x)F^-}{\nabla\sigma(x)[F^+ - F^-]} \quad (\text{A.29})$$

Es este valor de  $\mu$  el necesario para que el campo de velocidad de los estados para cualquier punto sobre la superficie de deslizamiento pertenezca al plano tangente a la misma en ese punto.

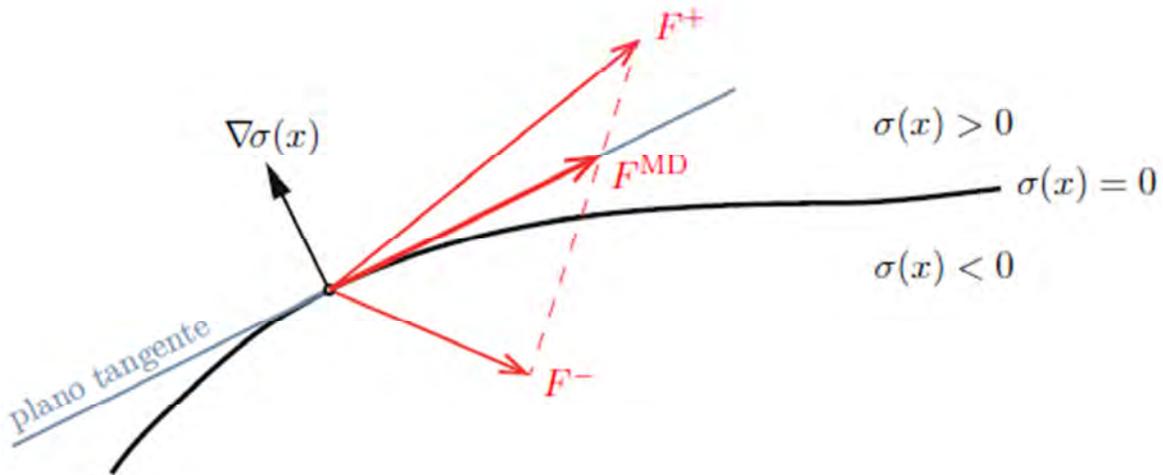


Figura A.4. Movimiento en régimen deslizante, de acuerdo al método de regularización de Filippov (Evangelista, 2012) <sup>[13]</sup>.

En sistema SISO con una única superficie de discontinuidad, el campo de velocidad en régimen deslizante  $F^{MD}$  puede obtenerse para cada punto  $x$  a partir de la intersección entre la línea que une los extremos de  $F^+(x, u^+)$  y  $F^-(x, u^+)$  y el plano tangente a la superficie en  $x$ .

#### A.1.2.2.- MÉTODO DEL CONTROL EQUIVALENTE Y MOVIMIENTO DESLIZANTE IDEAL

El método propone hallar la dinámica ideal del modo deslizante sustituyendo la ley de control discontinua por una ley suave denominada control equivalente  $u_{eq}$ , que permita verificar las siguientes condiciones de invariancia:

$$\sigma(x) = 0 \quad (A.30)$$

$$\dot{\sigma}(x) = L_{F(x, u_{eq})}\sigma(x) = 0 \quad (A.31)$$

como en el método anterior, es necesario que el campo de velocidad de los estados para cualquier punto sobre  $S$  pertenezca al plano tangente a la misma en cada punto. Si la condición inicial del sistema corresponde a un punto sobre la superficie de conmutación, el control equivalente es la acción de control que garantiza la permanencia sobre ésta. Para el caso de un sistema afín al control como (A.20), la condición de invariancia tiene la siguiente forma:

$$\dot{\sigma}(x) = L_f\sigma(x) + L_g\sigma(x)u_{eq}(x) = 0 \quad (A.32)$$

de donde se obtiene la expresión de control equivalente

$$u_{eq} = -\frac{L_f\sigma(x)}{L_g\sigma(x)} \quad (A.33)$$

$$= -(\nabla\sigma g)^{-1}\nabla\sigma f(x) \quad (A.34)$$

Una vez sobre la superficie y aplicando el control  $u_{eq}(x)$ , la dinámica ideal del MD queda determinada de la siguiente manera:

$$\sigma(x) = 0 \quad (A.35)$$

$$\dot{\sigma}(x, u_{eq}) = f(x) + g(x)u_{eq}(x) = f(x) - g(x)\frac{L_f\sigma(x)}{L_g\sigma(x)} \quad (A.36)$$

Nótese que la restricción algebraica que impone (A.35) sobre los estados, genera una reducción en el orden del sistema controlado en régimen deslizante, de  $n$  a  $n - 1$ .

La ecuación dinámica de los estados del sistema controlado, sobre la superficie de deslizamiento, puede escribirse a partir de (A.36) como:

$$\dot{x} = [I - g(\nabla\sigma g)^{-1}\nabla\sigma]f(x) = \Psi(x)f(x) \quad (\text{A.37})$$

La ecuación anterior, evaluada en  $\sigma = 0$ , describe el movimiento ideal sobre  $S$ . El control equivalente, es aquella acción de control que, en régimen deslizante, mantiene las trayectorias del sistema sobre la superficie, y  $\Psi(x)$  es un operador de proyección (verifica  $\Psi^2(x) = \Psi(x)$ ). Éste, aplicado al vector de campo  $f(x)$ , lo proyecta sobre el plano tangente a la superficie para cada punto  $x$ , ilustrado en la figura 1.4. En ésta se muestran, además del vector de campo de velocidad en régimen deslizante  $\Psi(x)f(x) = f + gu_{eq}$ , los campos  $g$  y  $f$ , el gradiente de  $\sigma$  y el plano tangente a la superficie. Las líneas a segmentadas muestran el  $\text{span}\{g(x)\}$ , es decir el conjunto de vectores en el espacio de estados generado por  $g$ . El vector  $gu_{eq}$  pertenece al  $\text{span}\{g(x)\}$ , ya que la acción de control actúa en la dirección de  $g$ , escalándolo y dándole sentido.

El control equivalente tiene un significado físico bastante intuitivo, ya que corresponde al valor promedio de la implementación de la conmutación a muy alta frecuencia entre los dos valores de la acción de control discontinua.

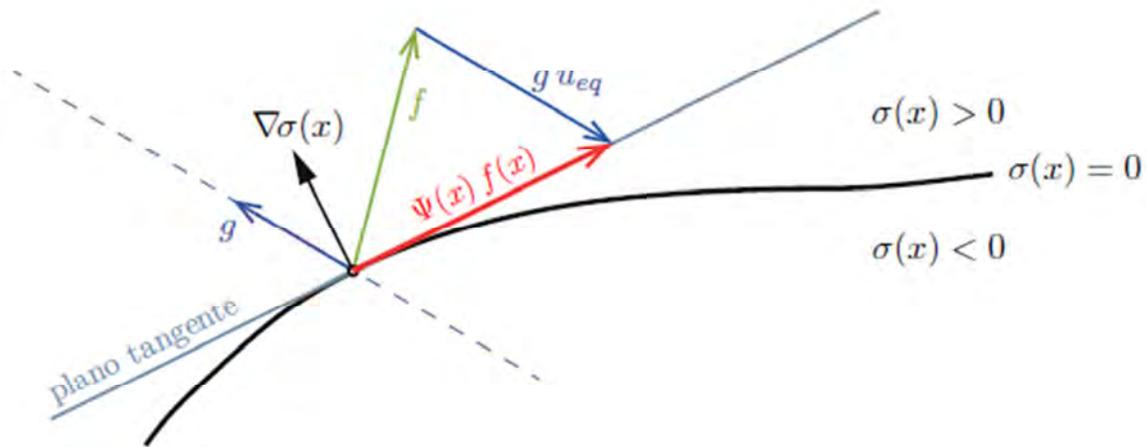


Figura A.5. Movimiento en régimen deslizante de acuerdo al método de regularización del control equivalente (Evangalista, 2012) <sup>[13]</sup>.

### Condición de existencia

El control equivalente está bien definido cuando existe y queda determinado en forma única a partir de las condiciones de invariancia, (A.30) – (A.31).

Una condición necesaria y suficiente para que el control equivalente esté bien definido es que se verifique la condición de transversalidad, (A.23).

Geoméricamente, el cumplimiento de esta condición garantiza que  $\nabla\sigma(x)$  y  $g$  no sean ortogonales, y además que el campo  $f$  pueda proyectarse sobre el plano tangente a la superficie de deslizamiento.

### A.1.2.3.- CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE 1-MD

Para el caso de los sistemas afines al control, las expresiones de movimiento en régimen deslizante que se obtienen por el método de regularización de Filippov y las obtenidas por el método del control equivalente son las mismas.

En la figura siguiente se muestran los vectores correspondientes al campo de velocidad en el caso de ambos valores del control discontinuo,  $(f + gu^+)$  y  $(f + gu^-)$ , a partir de los cuales, de la intersección de sus extremos con el plano tangente, se obtiene el campo de velocidad en régimen deslizante correspondiente al método de Filippov,  $F^{MD}$ . Además, se muestra que el valor  $u = u_{eq}$ , es el necesario para que  $(f + gu_{eq}) = F^{MD}$ .

De la figura siguiente se puede deducir que es necesario que los valores del control discontinuo  $u^+$  y  $u^-$ , sean tales que:

$$u^- \leq u_{eq} \leq u^+ \tag{A.38}$$

De lo contrario, el control no sería suficiente para mantener las trayectorias del sistema sobre  $\sigma(x) = 0$ .

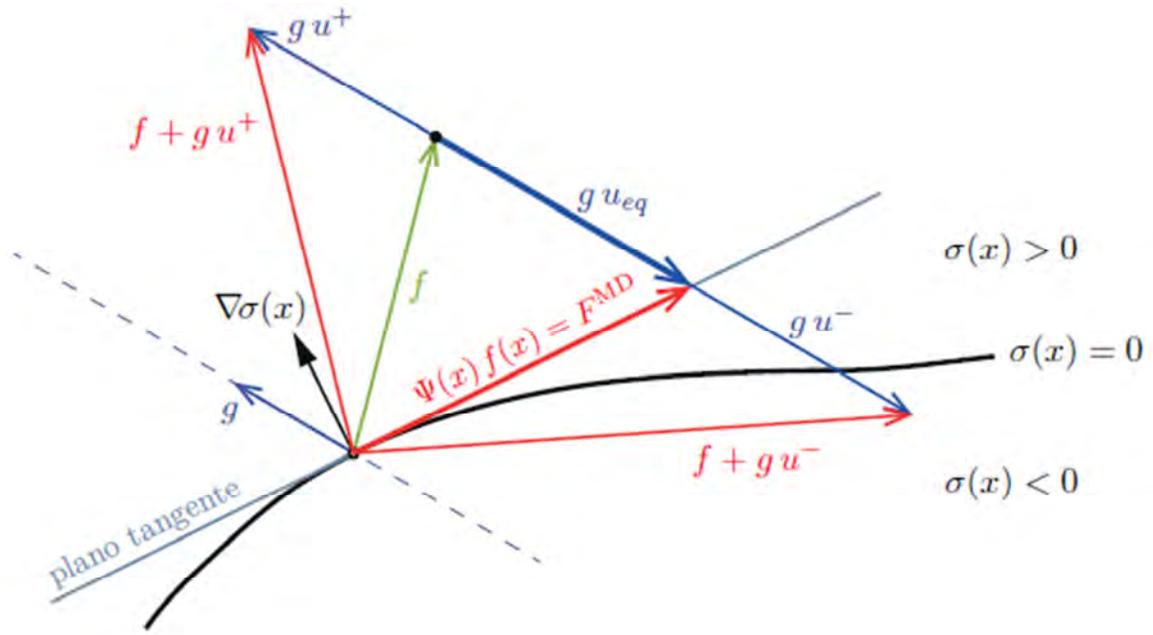


Figura A.6. Movimiento en régimen deslizante para un sistema afín. Comparación entre los resultados de los métodos de regularización de Filippov y control equivalente. (Evangelista, 2012) <sup>[13]</sup>.

#### A.1.2.4.- ROBUSTEZ DE 1-MD

Con el objetivo de analizar la robustez del algoritmo de control por MD, se analiza el comportamiento del sistema controlado en régimen deslizante ante la presencia de perturbaciones. Las variaciones en los parámetros, así como las perturbaciones externas pueden influir en el desempeño de un algoritmo de control por lo que es de suma importancia analizar en qué medida modifican éstas su comportamiento, ya que esto determinará la robustez del mismo.

Se considera el sistema afín (A.20), ahora en presencia de perturbaciones:

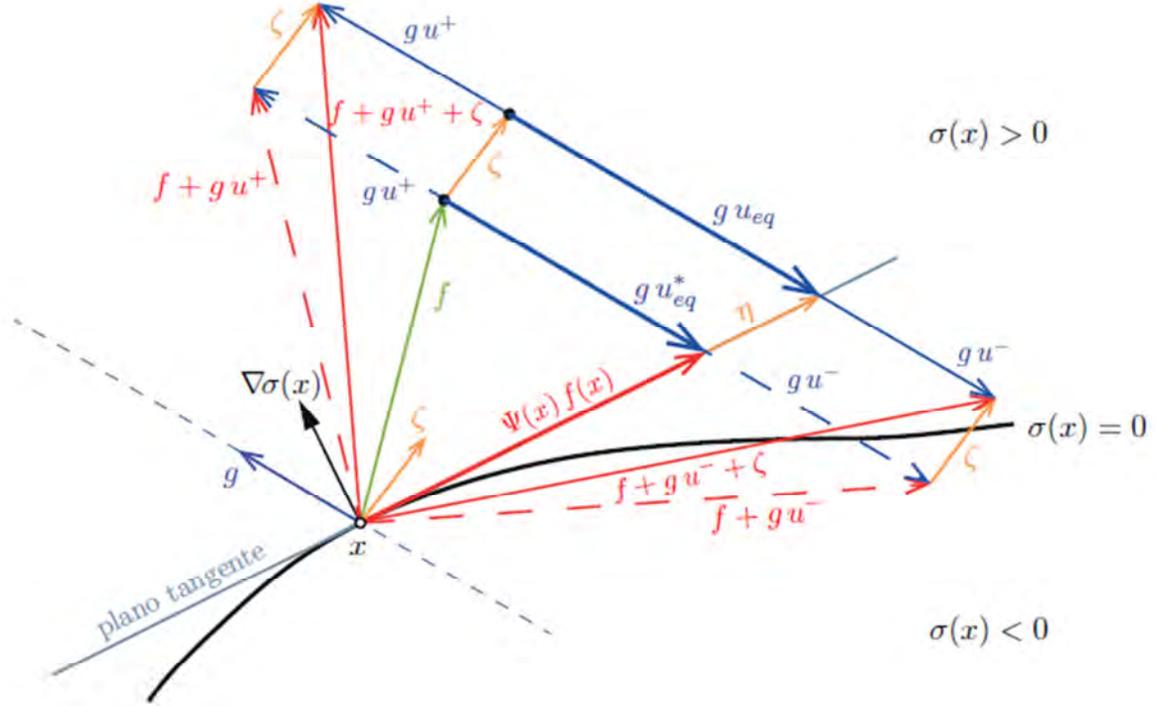
$$\dot{x} = (f(x) + \Delta f(x)) + g(x)u + P_e = f(x) + g(x)u + \zeta(x) \quad (\text{A.39})$$

donde  $\zeta(x)$ , el vector de perturbaciones, incluye tanto las incertidumbres paramétricas  $\Delta f(x)$ , como las perturbaciones externas  $P_e$ .

En general,  $\zeta$  puede descomponerse en forma única como la suma de dos vectores, uno perteneciente al  $\text{span}\{g(x)\}$ , y otro que se ubica sobre el plano tangente a  $\sigma(x)$ , es decir, en el núcleo de su gradiente,  $\text{ker}\{\nabla\sigma(x)\}$ :

$$\zeta(x) = g(x)u^*(x) + \eta(x) \quad (\text{A.40})$$

donde  $g(x)u^*(x) \in \text{span}\{g(x)\}$  y  $\eta(x) \in \text{ker}\{\nabla\sigma(x)\}$ .



Descomposición de la perturbación:



Figura A.7. Sistema afín perturbado, control por MD (Evangelista, 2012) <sup>[13]</sup>.

### Efecto sobre el dominio de existencia

Para analizar el efecto de las perturbaciones sobre el dominio de existencia del régimen deslizante, se parte de las condiciones de invariancia. Con respecto a  $\sigma$ , las perturbaciones aparecen en su derivada con respecto al tiempo.

$$\dot{\sigma} = L_f\sigma(x) + L_g\sigma(x)u_{eq}(x) + L_\zeta\sigma(x) \quad (\text{A.41})$$

$$= L_f\sigma(x) + L_g\sigma(x)u_{eq}(x) + L_g\sigma(x)u^*(x) + L_\eta\sigma(x) = 0 \quad (\text{A.42})$$

Dado que  $\eta(x)$  es la componente tangente a la superficie, se verifica que  $L_\eta\sigma(x) = 0$ . Despejando, de la ecuación anterior, se obtiene la expresión para el control equivalente ante la presencia de perturbaciones:

$$\begin{aligned} u_{eq}(x) &= -\frac{L_f\sigma(x) + L_g\sigma(x)u^*(x) + L_\eta\sigma(x)}{L_g\sigma(x)} \\ &= -\underbrace{\frac{L_f\sigma(x)}{L_g\sigma(x)}}_{u_{eq}^*(x)} - \frac{L_g\sigma(x)}{L_g\sigma(x)}u^*(x) + \underbrace{\frac{L_\eta\sigma(x)L_g\sigma(x)}{0}}_0 \end{aligned} \quad (A.43)$$

$$= u_{eq}^*(x) - u^*(x) \quad (A.44)$$

donde el control equivalente para el caso no perturbado es  $u_{eq}^*$ .

La condición necesaria y suficiente para la existencia del régimen deslizando sobre  $S$ , dada en (A.38), al sustituir (A.44) queda de la siguiente manera:

$$u^- \leq u_{eq}^*(x) - u^*(x) \leq u^+ \quad (A.45)$$

de donde puede determinarse que el régimen deslizando existirá sobre  $\sigma(x) = 0$  cuando la expresión no perturbada del control equivalente se encuentre en el rango:

$$u^- + u^*(x) \leq u_{eq}^*(x) \leq u^+ + u^*(x) \quad (A.46)$$

Se puede concluir que el dominio de existencia del régimen de existencia es afectado solo por la componente de perturbación que es colineal con  $g(x)$ , por otro lado, la componente tangencial a la superficie  $\eta(x)$  no presenta ningún efecto.

### ***Efecto sobre la dinámica de MD***

Para realizar un análisis sobre los efectos de las perturbaciones en la dinámica del sistema sobre la superficie de deslizamiento en régimen deslizando, se sustituye la expresión del control equivalente en las ecuaciones dinámicas del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u_{eq} + \zeta(x) \\ &= f(x) + g(x)\left(u_{eq}^*(x) - u^*(x)\right) + g(x)u^*(x) + \eta(x) \\ &= \underbrace{f(x) + g(x)u_{eq}^*(x)}_{\text{dinámica no perturbada}} + \eta(x) \\ &= \Psi(x)f(x) + \eta(x) \end{aligned} \quad (A.47)$$

Nótese que  $\eta(x)$ , la componente de la perturbación tangencial a la superficie, modifica el movimiento de MD. Por otro lado, la dinámica de régimen deslizando es insensible a la componente que es lineal con  $g$ .

### ***Invariancia fuerte***

Se dice que el régimen deslizando posee una propiedad de invariancia fuerte con respecto a una perturbación, cuando la dinámica de MD ideal es independiente de ésta (Sira-Ramírez, 1988) <sup>[37]</sup>.

El régimen deslizando posee dicha propiedad cuando la perturbación cumple con la *matching condition*, que establece que la perturbación es colineal con el vector de campo de control  $g$ . Es decir, cuando la perturbación presenta la forma:

$$\zeta(x) = g(x)u^*(x) \quad (\text{A.48})$$

Por otro lado, cuando la perturbación no verifica la *matching condition*, se dice que el régimen deslizando posee una propiedad de invariancia débil.

### **A.1.2.5.- 1-MD EN SISTEMAS MIMO**

Se considera un sistema dinámico MIMO afín al control de  $m$  entradas  $u_i$

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i = f(x) + G(x)u \quad (\text{A.49})$$

donde  $f$  y  $g_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ , son campos vectoriales suaves en el espacio de estados.

La superficie de deslizamiento se forma a partir de la intersección de  $m$  variedades suaves  $\sigma_i: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , a cada una de ellas se le llama superficie de deslizamiento individual, determinándose el conjunto:

$$S = \bigcap_{i=1}^m S_i = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{X} : \sigma_i(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{X} : \sigma(x) = 0\} \quad (\text{A.50})$$

Este conjunto corresponde a la superficie de conmutación en el espacio de estados  $n$ -dimensional, que resulta de dimensión  $n - m$ .

La ley de control para 1-MD se define análogamente al caso SISO para cada componente, según el signo de la correspondiente  $\sigma_i(x)$ :

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x) & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(x) & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

#### *A.1.2.5.1.- MOVIMIENTO EN RÉGIMEN DESLIZANTE MIMO*

El movimiento del sistema en 1-MD MIMO puede definirse en más de una manera.

Por un lado, puede considerarse que existe régimen deslizante sobre cada una de las superficies de deslizamiento  $S_i$ , generado por la acción de la entrada de control correspondiente  $u_i(x)$ . Si el movimiento deslizante se hace converger hacia la superficie de intersección  $S$  y cada uno de los controladores actúa de acuerdo a su superficie individual, el comportamiento puede estudiarse como una combinación de movimientos deslizantes individuales.

De forma análoga al caso SISO, se define la existencia del régimen deslizante sobre cada superficie individual.

$$\begin{cases} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} L_f \sigma_i + L_G \sigma_i u < 0 \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} L_f \sigma_i + L_G \sigma_i u > 0 \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

La condición anterior es suficiente, aunque no necesaria como en el caso SISO, es decir, existe la posibilidad de que se presente movimiento deslizante colectivo sobre  $S$  y aún sobre  $S_i$ , sin que se cumpla (A.52).

El principal problema que contrae el uso de este esquema es que para entrada  $u_i$ , las entradas restantes  $u_j, j \neq i$ , son tomadas como perturbaciones. De esta manera se necesita una buena coordinación entre las entradas de control, de otra manera el esfuerzo de cada una de estas para alcanzar el régimen deslizante sobre la superficie correspondiente, podría arrojar resultados extraños.

Más generalmente, se acepta que puede existir movimiento deslizante sobre la superficie  $S$ , sin que éste ocurra de manera individual sobre cada una de las superficies de conmutación  $\sigma_i(x) = 0$ .

### ***Control equivalente***

Siguiendo un procedimiento similar al seguido en el caso SISO, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento ideal en modo deslizante. De esta manera, el control equivalente  $u_{eq}$  se define como el vector de control suave que mantiene al control sobre la superficie de deslizamiento  $S$ , es decir, mantiene las condiciones de invariancia sobre  $S$ .

$$\sigma(x) = 0 \quad (A.53)$$

$$L_f + Gu_{eq}\sigma(x) = \nabla\sigma(x)(f + Gu_{eq}) \quad (A.54)$$

Se tiene, entonces:

$$u_{eq} = -[\nabla\sigma(x)G(x)]^{-1}[\nabla\sigma(x)f(x)] \quad (A.55)$$

de esta manera, el sistema  $\dot{x} = f(x) + G(x)u_{eq}$ , describe la dinámica de 1-MD ideal MIMO sobre  $\sigma(x) = 0$ .

El control equivalente se encuentra bien definido siempre que exista y se determine de forma unívoca por (A.54).

Una condición necesaria y suficiente para que el control equivalente esté bien definido es que se cumpla la condición de transversalidad de forma local sobre  $S$ .

$$\det[\nabla\sigma(x)G(x)] \neq 0 \quad (A.56)$$

De la misma manera que en el caso SISO, la dinámica deslizante ideal MIMO puede reescribirse, sustituyendo la expresión del control equivalente, de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u_{eq} = [I - G(\nabla\sigma G)^{-1}\nabla\sigma]f = \Psi(x)f(x) \quad (A.57)$$

donde  $\Psi(x)$  es un operador de proyección que proyecta al campo de deriva  $f(x)$  sobre el plano tangente a la superficie de deslizamiento.

#### **A.1.2.6.- CHATTERING**

Al usar el control por modos deslizantes, lo que se pretende es que el sistema opere sobre la superficie de deslizamiento con una dinámica de deslizamiento ideal. Sin embargo esto requeriría una entrada de control que conmutara entre dos valores determinados a frecuencia infinita, además de la ausencia de perturbaciones e incertidumbres que pudieran modificar la operación de la conmutación. En un caso real, la entrada de control opera a una frecuencia finita y la restricción  $\sigma = 0$  se mantiene sólo de manera aproximada.

En cualquier aplicación real no es posible contar con las condiciones de operación en modo deslizando ideal, por lo que no se cuenta con una frecuencia de conmutación infinita, además de la adición de la naturaleza discontinua de la entrada de control, dinámicas no modeladas y las incertidumbres en los parámetros, pueden provocar oscilaciones de alta frecuencia en las salidas del sistema. A este fenómeno se le denomina *chattering*.

Con la idea de reducir o eliminar el *chattering* se han desarrollado distintas propuestas que, generalmente, pretenden atacar los efectos del control discontinuo, ya sea reduciendo la amplitud del mismo, sustituyéndolo por aproximaciones o estimándolo mediante observadores, claro está que esto presenta algunas desventajas, algunas de estas son de carácter restrictivo, ya que solo se garantiza la permanencia en una vecindad alrededor de la superficie y algunas más reducen la robustez del control.

Sin duda, uno de los mejores enfoques para atacar este problema es el uso de los modos deslizantes de orden superior que restringen el movimiento a la superficie de conmutación, permitiendo la atenuación del *chattering* y también permite disponer de controles con fuertes características de robustez.

#### A.1.2.7.- MODOS DESLIZANTES DE ORDEN SUPERIOR (MDOS)

Al utilizar actuadores que conmutan a altas frecuencias en aplicaciones de estructura variable, la dinámica rápida de éstos aparece entre la acción de conmutación y el sistema que se está controlando, por lo que se genera un efecto de retardo. La acción de conmutación ya no corresponde a la entrada de control, sino a alguna derivada de ésta. Por lo anterior, la función de los estados que define la superficie de conmutación ya no puede considerarse de grado relativo uno y por lo tanto es necesario el uso de modos deslizantes de mayor orden para satisfacer la restricción buscada.

Los MDOS son modos de operación de un sistema, que al igual que los modos deslizantes de primer orden, en los cuales las trayectorias de los estados se mueven sobre una superficie de discontinuidad, presentando además algunas restricciones adicionales. Dichas restricciones condicionan el grado de suavidad de las trayectorias en la vecindad de la superficie de conmutación, dependiendo del orden del MD. En todos los casos el movimiento es entendido en el sentido de Filippov.

Análogamente al problema de 1-MD, se define el problema de control MDOS.

Considere un sistema no lineal SISO afín al control.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ \sigma = \sigma(x) \in \mathbb{R} \\ u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

donde  $f, g$  y  $\sigma$  son funciones vectoriales suficientemente suaves,  $\sigma$  puede ser de grado relativo menor a uno y el objetivo primordial es mantener  $\sigma(x) = 0$ , controlando los valores de la entrada de control  $u$ . Generalmente en MDOS la entrada de control es discontinua, pero, al igual que en el caso de 1-MD, existen distintos algoritmos que permiten que ésta sea continua.

La diferencia entre 1-MD y los MDOS, radica en que la entrada de control discontinua actúa sobre alguna derivada temporal de  $\sigma(x)$  de orden mayor a uno, por lo que el efecto que provoca sobre  $\sigma$  se suaviza. Este comportamiento es lo que causa la reducción del chattering sobre la salida  $\sigma(t)$ , aunque esto provoca una reducción en el grado de robustez, frente a variaciones muy abruptas (Bartolini, 2003) <sup>[28]</sup>.

#### **A.1.2.7.1.- ORDEN DEL MODO DESLIZANTE**

El orden del modo deslizante indica el grado de suavidad de la dinámica del sistema en la vecindad de la superficie de deslizamiento. De manera más concreta corresponde al número de derivadas continuas de  $\sigma$  en la vecindad de la superficie (incluyendo la derivada cero, es decir  $\sigma$  misma).

Matemáticamente,  $r - MD$  está caracterizado porque las primeras  $r$  derivadas de  $\sigma$ ,  $r = 0, 1, \dots, (r - 1)$  son continuas, la  $r$  -ésima es discontinua, y se verifica:

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0 \quad (\text{A.59})$$

que es una condición de dimensión  $r$  en el estado del sistema dinámico. De tal manera que el modo deslizante original es 1-MD, ya que su primera derivada resulta discontinua.

#### **A.1.2.7.2.- MOVIMIENTO EN RÉGIMEN DESLIZANTE DE ORDEN SUPERIOR**

Se considera una ecuación diferencial con lado derecho discontinuo.

$$\dot{y} = v(y) \quad (\text{A.60})$$

donde  $y \in \mathbb{R}^n$ , y  $v(y)$  es una función continua a tramos, que toma un único valor para cada punto de un dominio  $D$ , localmente acotada y medible (en el sentido de Lebesgue), existiendo algunos puntos de discontinuidad en un conjunto  $M$  de medida nula.

Para cada punto  $(y, t) \in D$ , se considera una función  $\mathfrak{B}(y)$  que asigna a cada punto de  $D$  un conjunto de valores. En el caso de los puntos donde  $v(y)$  es continua, el conjunto  $\mathfrak{B}(y)$  es trivial y coincide con  $v(y)$ , indicando una única dirección posible del vector derivada. En los puntos de discontinuidad de  $v(y)$ , en cambio, el conjunto  $\mathfrak{B}(y)$  contiene varios valores, de manera que incluye todas las posibles direcciones del vector de velocidades de los estados.

De esta manera, una solución de (A.60) en el sentido de Filippov, es una función absolutamente continua  $y(t)$  que satisface en casi todo punto la inclusión diferencial:

$$\dot{y} \in \mathfrak{B}(y) \tag{A.61}$$

En el caso en que  $v(y)$  es continua en casi todo punto,  $\mathfrak{B}(y)$  es la clausura convexa del conjunto de todos los puntos límite de  $\lim_{y_{cont} \rightarrow y} v(y_{cont})$ , donde  $y_{cont}$  son los puntos donde  $v(y)$  es continua. En el caso den un punto  $y$  donde  $v$  es continua, el límite tiene un valor único,  $v(y_{cont})$ . En cambio, cuando  $y$  es un punto de discontinuidad de  $v$ , los límites desde distintas direcciones difieren, resultando un conjunto de direcciones posibles para el vector de velocidad,  $\mathfrak{B}(y)$ .

En el problema de MDOS,  $y$  podría ser el vector de estados del sistema y  $M$  la superficie de deslizamiento  $S$ . O también, a través de un difeomorfismo,  $y$  podría ser un conjunto formado por  $\sigma, \dot{\sigma}$  y tal vez algunas derivadas de mayor orden de  $\sigma$  y/u otras variables internas del sistema (o combinaciones de las mismas).

*Un difeomorfismo es una transformación de coordenadas  $y' = \varphi(y)$ , donde  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo escalar con inversa definida  $\varphi^{-1}$ .*

*Si  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  son  $C^n$ , es decir, tienen  $n$  derivadas continuas, de tal manera que el sistema transformado mantiene la estructura y propiedades del sistema original.*

### ***Régimen deslizante de orden $r$ sobre superficies***

Sea  $S$  la superficie de deslizamiento de 1-MD dada por (A.50) a partir de la función suave  $\sigma(x)$ . Al conjunto de puntos  $x \in S$  cuyo conjunto de velocidades posible (de acuerdo con Filippov) pertenece en su totalidad al espacio tangente a  $S$ , se le denomina conjunto de deslizamiento de segundo orden con respecto a  $S$ ,  $S_2$ . Recordando la condición de transversalidad, para que exista 1-MD es necesario que el conjunto de velocidades posibles no sea tangente a  $S$ , ya que tiene que garantizarse la capacidad de cruce de la superficie desde ambos lados de la misma.

Suponiendo que  $S_2$  es una superficie lo suficientemente suave, puede construirse el conjunto  $S_3$  como el conjunto de deslizamiento de segundo orden con respecto a  $S_2$ . De esta manera, al conjunto  $S_3$  se le denomina conjunto de deslizamiento de orden tres o de tercer orden con respecto a  $S$  y está constituido por los puntos  $x \in S$  cuyo conjunto de posibles velocidades pertenece en su totalidad al subespacio tangente a  $S$ .

Continuando de esta manera se pueden obtener los conjuntos de deslizamiento de cualquier orden. El caso trivial es  $S_1 = S$ .

Se dice que existe modo deslizante de orden  $r$  o  $r - MD$  sobre una superficie  $S$  en un punto  $x \in S_r$ , si en una vecindad de tal punto el conjunto  $S_r$  es un conjunto integrable en el sentido de Filippov, es decir, consiste de trayectorias en el sentido de Filippov.

### ***Régimen deslizante de orden $r$ con respecto a funciones de restricción***

Supóngase una restricción dada por  $\sigma(x) = 0$ , donde  $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es suficientemente suave y sus derivadas temporales  $\dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$  existen y son funciones que toman un único valor para cada  $x$  y continuas. Es decir, la discontinuidad no aparece en  $\sigma$  ni en sus primeras  $(n - 1)$  derivadas.

De acuerdo a estas condiciones, el conjunto de igualdades dado por (A.59) define unívocamente el conjunto de deslizamiento de orden  $r$ . Si este conjunto es no vacío y localmente integrable en el sentido de Filippov, resulta que el movimiento restringido a este conjunto se denomina  $r - MD$  o modo deslizante de orden  $r$  con respecto a la función de restricción  $\sigma$ .

### ***Condiciones de regularidad***

Dada la superficie de deslizamiento  $S$ , definida por la ecuación  $\sigma(x) = 0$ , suponga que  $\dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-2)}$  son funciones diferenciables de  $x$  y que localmente se cumple:

$$\text{rank}\{\nabla\sigma, \nabla\dot{\sigma}, \dots, \nabla\sigma^{(r-2)}\} = r - 1 \quad (\text{A.62})$$

que implica que dicho conjunto de vectores es de dimensión  $(r - 1)$ .

La ecuación (A.62) se denomina condición de regularidad de deslizamiento débil y su verificación hace equivalentes las definiciones de régimen deslizante de orden  $r$  sobre la superficie  $S$  y con respecto a la función de restricción  $\sigma(x) = 0$  (Levant, 2002)<sup>[29]</sup>.

Si además  $S_r$  es una superficie diferenciable, la ecuación (A.62) puede extenderse como:

$$\text{rank}\{\nabla\sigma, \nabla\dot{\sigma}, \dots, \nabla\sigma^{(r-1)}\} = r \quad (\text{A.63})$$

Al conjunto de condiciones formado por (A.63) y al requerimiento de que las derivadas  $\dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$  sean funciones diferenciables de  $x$  se le denomina condición de regularidad de deslizamiento.

Si la anterior condición se satisface, es posible realizar un cambio de variables en el sistema (A.58), tomando como primeras  $r$  variables las primeras derivadas de  $\sigma$ ,  $x'_1 = \sigma, x'_2 = \dot{\sigma}, \dots, x'_r = \sigma^{(r-1)}$ , de esta manera el sistema en términos de las nuevas variables resulta como:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \sigma \\ x''_1 = x'_2 \\ x''_2 = x'_3 \\ \vdots \\ x''_r = \sigma^{(r)} = \Phi(x', \xi) \\ \xi' = \Psi(x', \xi) \end{array} \right. \quad (\text{A.64})$$

donde  $\xi \in \mathbb{R}^{n-r}$ .

Mientras ocurra el movimiento en  $r - MD$ , las primeras  $r$  variables del sistema en estas coordenadas se anulan, quedando solamente la dinámica de los estados  $\xi$ , de dimensión  $(n - r)$ .

### ***Vinculación con el grado relativo y la estabilidad***

Considere el sistema dado por (A.58) y suponga que  $\sigma(x)$  es de grado relativo  $r$  con respecto a  $u$ . Haciendo uso de las derivadas de Lie, la condición se traduce, para una vecindad de cada punto:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} (f + gu) = L_f \sigma + L_g \sigma u \quad (\text{A.65})$$

Si  $r > 1$ , se tiene:

$$\begin{cases} L_g \sigma = 0 \\ \dot{\sigma} = L_f \sigma \end{cases}$$

$$\ddot{\sigma} = \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial L_f \sigma}{\partial x} (f + gu) = L_f^2 \sigma + L_g L_f \sigma u \quad (\text{A.66})$$

Si  $r > 2$ , se tiene:

$$\begin{cases} L_g L_f \sigma = 0 \\ \ddot{\sigma} = L_f^2 \sigma \end{cases}$$

⋮

$$\sigma^{(r)} = L_f^r \sigma + L_g L_f^{r-1} \sigma u \quad (\text{A.67})$$

Al cumplirse la condición en la que  $\sigma$  es de grado relativo  $r$  permite afirmar:

$$L_g \sigma = L_g L_f \sigma = \dots = L_g L_f^{r-2} \sigma = 0 \quad (\text{A.68})$$

$$L_g L_f^{r-1} \sigma \neq 0 \quad (\text{A.69})$$

$$\sigma^{(i)} = L_f^i \sigma \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r - 1 \quad (\text{A.70})$$

dichas condiciones establecen la verificación de la condición de regularidad de deslizamiento.

Generalmente, se puede decir que la condición de regularidad de deslizamiento (A.63) establece que el grado relativo de  $\sigma$  con respecto a la discontinuidad es la menos  $r$ .

La dinámica de  $r$ -MD, de dimensión  $(n - r)$ , es análoga a la definición de dinámica cero del sistema controlado (Isidori, 1995) <sup>[18]</sup>. El modo deslizante se dice estable, si la dinámica de  $r$ -MD, es decir  $\dot{\xi} = \Psi(x', \xi)$  en (A.64) es estable.

#### *A.1.2.7.3.- TIEMPO DE CONVERGENCIA*

El modo deslizante de cualquier orden, se denomina atractivo en tiempo finito si (Emelyanov, 1996) <sup>[12]</sup>:

- ❖ Para cualquier condición inicial, toda trayectoria de (A.60) alcanza en tiempo finito el conjunto de deslizamiento del orden correspondiente y permanece en él posteriormente.
- ❖ En alguna vecindad del conjunto de deslizamiento, el tiempo para alcanzar tal conjunto está uniformemente acotado.

El 1-MD converge en tiempo finito, los MDOS en general pueden converger en tiempo finito o ser asintóticamente estables, dependiendo del algoritmo.

Existen algoritmos  $r$ -MD asintóticamente estables, con  $r$  arbitrario, pero no muchos casos de convergencia en tiempo finito, salvo en el caso de  $r = 1$  (trivial), 2 y 3.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ariyur K. B., Krstić M., Real-Time Optimization by Extremum Seeking Control, Hoboken, NJ: Wiley-Interscience, 2003.
- [2] Bartolini G., Pisano A., Punta E., Usai E., A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems, International Journal of Control, 2003b.
- [3] Bertona Luis F., Entrenamiento de redes neuronales basado en algoritmos evolutivos, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, 2005.
- [4] Brunton S. L., Rowley C. W., Kulkarni S. R., Clarkson C., Maximum power point tracking for photovoltaic optimization using extremum seeking, IEEE Photovoltaic Specialists Conference (PVSC), 2009.
- [5] Cauwenberghs G., A fast stochastic Error-Descent Algorithm for supervised learning and optimization, Advances in Neural Information Processing Systems, Morgan Kaufmann, 1993.
- [6] Chapra Steven C., Canale Raymond P., Métodos numéricos para ingenieros (con aplicaciones en computadoras personales), McGraw-Hill, 1989.
- [7] Cruz E., Algoritmo super-twisting con convergencia exacta y uniforme, Tesis de Maestría, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, UNAM, 2010.
- [8] Cruz-Zavala E., Moreno J., Fridman L., Uniform Robust Exact Differentiator, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 56, 2011.
- [9] Dávila A., Control en cascada para el amplificador de potencia de un motor de corriente directa empleando modos deslizantes de segundo orden, Tesis de Maestría, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, UNAM, 2008.
- [10] De Falco I., Della Cioppa A., Natale Tarantino P., Artificial Neural Networks Optimization by means of Evolutionary Algorithms, Soft Computing in Engineering Design and Manufacturing, Springer Verlag, 1997.
- [11] Draper C. S., Li Y. T., Principles of Optimizing Control Systems and an Application to the Internal Combustion Engine, In R. Oldenburger, Ed., Optimal and selfoptimizing control, Boston, MA: The M.I.T. Press, 1951.
- [12] Emelyanov S., Korovin S., Levant A., High-order sliding modes in control systems. Computational Mathematics and Modeling, 7(3), 1996.

- [13] Evangelista Carolina A., Control de sistemas no lineales por modos deslizantes de segundo orden (Aplicación a la conversión de energía eólica), Tesis de Doctorado, Departamento de Electrotecnia, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 2012.
- [14] Eykhoff P., Adaptive and Optimilazing Systems, IRE Transactions on Automatic Control, 1960.
- [15] Filippov A., Differential equations with discontinuous righthand side, Kluwer, Dordretch, The Netherlands, 1988.
- [16] Fu L., Ozguner U., Variable Structure Extremum Seeking Control Based on Sliding Mode Gradient Estimation for a Class of Nonlinear Systems, American Control Conference, 2009.
- [17] Ioannou P., Sun J., Robust Adaptive Control, Prentice Hall, 1996.
- [18] Isidori A., Nonlinear Control Systems, Springer, Berlin, 3rd edition, 1995.
- [19] Krause P., Analysis of Electric Machinery and Drive Systems, IEEE, Wiley Inter-Science.
- [20] Levant A., Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control, Int. J. Control 58(6), 1993.
- [21] Levant A., Robust Exact Differentiation Via Sliding Mode Technique, Automatica, Vol. 34, 1998.
- [22] Levant A., Introduction to high-order sliding modes, School of Mathematical Sciences, Israel, 2002.
- [23] Levant A., Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, Int. J. Control, Vol. 76, 2003.
- [24] Leyva R., Alonso C., Queinnec I., Cid-Pastor A., Lagrange D., Martinez-Salamero L., MPPT of photovoltaic systems using extremum seeking control, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2006.
- [25] Luthe R., Olivera A., Schutz F., Métodos Numéricos, Editorial Limusa, México, 1978.
- [26] Luxat J., Lees L., Stability of peek-holding control systems, IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation, 1971.
- [27] Moase William H., Manzie Chris, Brear Michael J., Newton-Like Extremum-Seeking Part I: Theory, Chinese Control Conference, Shangai, P.R. China, 2009.

- [28] Moase W., Manzie C., Brear M., Newton-Like Extremum-Seeking for the Control of Thermoacoustic Instability, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 55, No. 9, 2010.
- [29] Monroy A., Modelado y control de un aerogenerador, Tesis de Maestría, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, UNAM, 2005.
- [30] Monroy A., Alvarez-Icaza L., Passivity based control of a DFIG wind turbine, Proceedings of the American Control Conference, 2006.
- [31] Moreno J., A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm, in Proc. 6<sup>th</sup> int. Conf. Elect. Eng. Comp. Sci. Autom. Control (CCE 2009), Nov. 2009, pp. 12-17.
- [32] Ohyama K., Nakashima T., Wind Turbine Emulator Using Wind Turbine Model Based on Blade Element Momentum Theory, International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, 2010.
- [33] Ostrovskii I. I., Extremum regulation, Automatic and Remote Control, 1957.
- [34] Pan T., Ji Z., Jiang Z., Maximum Power Point Tracking for Wind Energy Conversion Systems Based on Sliding Mode Extremum Seeking Control, IEEE Energy2030, 2008.
- [35] Pisano A., Davila A., Fridman L., Usai E., Cascade Control of PM DC Drivers Via Second-Order Sliding-Mode Technique, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 55, No. 11, 2008.
- [36] Robles del Peso Arturo, García Benedito Julio, Métodos numéricos en Ingeniería. Prácticas con Matlab, Universidad de Oviedo, 2<sup>a</sup> edición, 2006.
- [37] Sira-Ramírez H., Differential geometric methods in variable structure control, International Journal of Control 41(10), 1988
- [38] Spall J. C., Multivariable stochastic approximation using simultaneous perturbation gradient approximation, IEEE Transactions on Automatic Control, 1992.
- [39] Tan Y., Moase W.H., Manzie C., Nešić D., Mareels I.M.Y., Extremum seeking from 1922 to 2010, Chinese Control Conference, Beijing, China, 2010.
- [40] Teel A. R., Popović D., Solving smooth and nonsmooth multivariable extremum seeking problems by the methods of nonlinear programming, Proc. American Control Conference, Arlington VA, 2000.
- [41] Tjalling J. Ypma, Historical development of the Newton-Raphson method, SIAM review 37 (4), 1995.

[42] Valenciaga F., Puleston P., Supervisor Control for a Stand-Alone Hybrid Generation System Using Wind and Photovoltaic Energy, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 20, No. 2, 2005.

[43] Weisstein Eric W., Newton's method and convergence, MathWorld Wolfram Research.

[44] Yu H., Ozguner U., Extremum-Seeking Control via Sliding Mode with Periodic Search Signals, IEEE Proceedings of Conference on Decision and Control, 2002.