Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Series Formales sobre Bimódulos

T E S I N A

Que para optar por el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Daniel López Aguayo
dlopez@matmor.unam.mx

Director: Dr. Raymundo Bautista Ramos
Centro de Ciencias Matemáticas UNAM
raymundo@matmor.unam.mx

Morelia, Michoacán - Octubre 2012.

Índice general

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se introducen los conceptos de anillo topológico y completación de un anillo con respecto a un ideal. Como un caso particular se considera el álgebra de caminos y se calcula su completación con respecto al ideal generado por las flechas. Posteriormente se consideran series formales de potencias sobre bimódulos y se justifica porque este es un anillo completado con respecto a un ideal. Se concluye el trabajo dando una caracterización de los automorfismos de las series formales de potencias sobre ciertos bimódulos.

Capítulo 1

Anillos Topológicos y Completaciones

Definición. Un ***anillo topológico*** es un anillo $(R, +, \cdot)$ con estructura de espacio topológico tal que la suma y el producto son continuas como aplicaciones $R \times R \to R$ donde $R \times R$ tiene la topología producto.

El concepto de anillo topológico fue introducido por David Van Dantzig[1] en su tesis doctoral titulada "*Studien over topologische algebra*".

Algunos ejemplos de anillos topológicos son $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con sus topologías usuales. Los anillos topológicos son objeto de estudio en el análisis, por ejemplo: $C(X)$ el anillo de todas las funciones continuas real-valuadas definidas en un espacio compacto X o $C_c(X)$ el espacio de todas las funciones continuas real-valuadas con soporte compacto definidas en un espacio localmente compacto X.

Definición. Si X es un conjunto, una ***base*** para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamados ***elementos básicos***) tales que:

(1) Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
(2) Sean B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$. Si $x \in B_1 \cap B_2$ entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si la colección $\mathcal{B}$ satisface las condiciones anteriores se define la ***topología τ generada por la base $\mathcal{B}$*** como sigue: $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Definición. Un ***anillo filtrado*** R es un anillo junto con una sucesión decreciente de ideales $R = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 ...$ tal que $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ para toda $n, m \in \mathbb{N}$ [2]. A la colección $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ se le llama una ***filtración*** de ideales.

[1]Matemático alemán (1900-1959), trabajó en el estudio de metrización de anillos, grupos y campos.
[2]En este trabajo $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los enteros positivos incluyendo al 0.

Un caso importante que se estudia es cuando $\mathfrak{m}$ es un ideal bilateral del anillo R y se considera la filtración dada por los ideales $I_n = \mathfrak{m}^n$, $n \in \mathbb{N}$. A dicha filtración se le conoce como filtración $\mathfrak{m}$-ádica.

Proposición 1.1. Sea R un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces el conjunto $\{x + I_n : x \in R, n \in \mathbb{N}\}$ forma una base para una topología en R. A la topología generada se le llama ***topología asociada a la filtración***.

Demostración:

Veamos primero que la primera condición de una base para una topología se cumple. Dado $x \in R$ se tiene que $x = x + 0 \in x + I_1$ ya que un ideal es en particular un subgrupo aditivo de R, luego contiene al elemento 0. Resta ver que la segunda condición se cumple. Supongamos que $z \in (x + I_n) \cap (y + I_m)$ donde x, y son elementos de R y $\{n, m\} \subseteq \mathbb{N}$. Definamos $k = \max\{n, m\}$ y veamos que $z + I_k \subseteq (x + I_n) \cap (y + I_m)$. Sea $z + j$ un elemento arbitrario de $z + I_k$, i.e $j \in I_k$. Dado que $z \in (x + I_n) \cap (y + I_m)$ entonces $z = x + j_1$ con $j_1 \in I_n$ y a la vez $z = y + j_2$ con $j_2 \in I_m$. Como $k = \max\{n, m\}$ entonces $I_k \subseteq I_n$ e $I_k \subseteq I_m$. Por lo tanto $z + j = x + j_1 + j \subseteq x + I_n$ ya que $j \in I_k \subseteq I_n$ y $j_1 \in I_n$. De manera similar se sigue que $z + j = y + j + j_2 \subseteq y + I_m$. En consecuencia $z + I_k \subseteq (x + I_n) \cap (y + I_m)$. Además por definición $z + I_k$ es un elemento de la base que contiene a z. Lo anterior prueba que dicha colección forma una base para una topología. □

Observación: La topología asociada a una filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es Hausdorff si y sólo si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Si un anillo tiene la filtración I-ádica entonces a la topología que genera la base definida anteriormente se le conoce como ***topología I-ádica***.

Proposición 1.2. Sea R un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces la suma y producto son operaciones continuas, es decir R tiene estructura de anillo topológico.

*Demostració*n:

Para ello recordemos que si (X, τ_1) y (Z, τ_2) son espacios con topologías τ_i generadas por bases $\mathcal{B}_i$ con $i \in \{1, 2\}$ entonces $f : X \to Z$ es continua si y sólo si para cada $x \in X$ y para cada básico $V \in \mathcal{B}_2$ que contiene a $f(x)$ existe un elemento básico $U \in \mathcal{B}_1$ que contiene a x y tal que $f(U) \subseteq V$.

Probemos primero que $+ : R \times R \to R$ es una función continua. Sea $(r, s) \in R \times R$ y sea $z + I_n$ un abierto básico que contiene a $r+s$ con $n \in \mathbb{N}$. Observe que $(r+I_n)\times(s+I_n)$ es un abierto básico para la topología producto que contiene al elemento (r, s). Del hecho que $(x + I_n) + (y + I_n) \subseteq x + y + I_n$ se sigue que la aplicación suma es continua. La continuidad del producto se deriva del hecho que $(x + I_n)(y + I_n) \subseteq xy + I_n$. □

Supongamos ahora que R es un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Definamos una función $d : R\times R \to \mathbb{N}$ como sigue: $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) = 2^{-max\{k\in\mathbb{N}:\ x-y\ \in I_k\}}$ si $x \neq y$. Note que la condición $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ implica que d está bien definida para todos los pares $(x, y) \in R\times R$.

Proposición 1.3. La aplicación d definida anteriormente es una métrica en R.

Demostración:

De la definición de d es claro que $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. También es evidente que $d(x, y) = d(y, x)$, luego basta mostrar que se cumple la desigualdad del triángulo. Para probar esto vamos a proceder por casos. Si ocurre que $x = y$ entonces $d(x, y) + d(y, z) = d(y, z)$ y claramente $d(y, z) \geq d(y, z)$, luego podemos suponer que todos los puntos x, y, z son distintos entre sí. Sea n_1 el mayor entero tal que $x - y \in I_{n_1}$, n_2 el mayor entero tal que $y - z \in I_{n_2}$ y n_3 el mayor entero tal que $x - z \in I_{n_3}$. Definamos $r = \min\{n_1, n_2\}$. La igualdad $x - z = (x - y) + (y - z)$ implica que $x - z \in I_r$ y por lo tanto $r \leq n_3$. Pero entonces $-n_3 \leq -r$ de donde se deduce que:

$$
\begin{aligned}
d(x, z) = 2^{-n_3} &\leq 2^{-r} \\
&\leq 2^{-n_1} + 2^{-n_2} \\
&= d(x, y) + d(y, z)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ como se quería mostrar. □.

Lo anterior muestra que si R es un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ entonces la filtración asociada genera una métrica en R. Cuando ocurre esto diremos que R es un espacio ***linealmente topologizado***.

De la teoría de espacios métricos se sabe que si (X, d) es un espacio métrico entonces la colección de todas las bolas abiertas $B_d(x, \epsilon)$ de radio ϵ, para $x \in X$ y $\epsilon > 0$, es una base para una topología sobre X, denominada ***topología métrica*** inducida por d.

Definición: Si (X, τ) es un espacio topológico se dice que X es ***metrizable*** si existe una distancia d en el conjunto X que induce la topología τ.

Proposición 1.4. Sea R un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ y supongamos que además R tiene la topología asociada a la filtración. Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ entonces R es un espacio metrizable.

Demostración:

Vamos a mostrar que la métrica $d : R \times R \to \mathbb{R}$ definida por: $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) = 2^{-max\{k \in \mathbb{N}:\ x-y \in I_k\}}$ si $x \neq y$ induce la topología asociada a la filtración. Primero notemos que dado $N \in \mathbb{N}$ y $x \in R$ se tiene que $B(x, \frac{1}{2^{N-1}}) = x + I_N$. Sea $x \in R$ y $\epsilon > 0$, veamos que $B(x, \epsilon)$ es un conjunto abierto en la topología asociada a la filtración. Sea N lo suficientemente grande tal que $2^{N-1}\epsilon > 1$. Por lo tanto $B(x, \frac{1}{2^{N-1}}) \subseteq B(x, \epsilon)$ pero por la observación $B(x, \frac{1}{2^{N-1}}) = x + I_N$, luego $x + I_N \subseteq B(x, \epsilon)$. Recíprocamente, sea $x + I_k$ un elemento básico para la topología asociada a la filtración y sea $z \in x + I_k$. Nuevamente por la observación $x + I_k = B(x, \frac{1}{2^{k-1}})$ en particular $z \in B(x, \frac{1}{2^{k-1}}) \subseteq x + I_k$ y por lo tanto $x + I_k$ es un conjunto abierto en la topología métrica inducida por d. Se concluye que dichas topologías coinciden. □

Definición. Sea I un conjunto parcialmente ordenado y sea $\{R_i : i \in I\}$ una familia de anillos. Supongamos que para $i, j \in I$ con $j \geq i$ existe una aplicación $\mu_{ji} : R_j \to R_i$ tal que:

(a) $\mu_{ji} \circ \mu_{kj} = \mu_{ki}$ si $i \leq j \leq k$.
(b) $\mu_{ii} = id_{R_i}$ para cada $i \in I$.

Se dice entonces que el par $((R_i)_{i \in I}, (\mu_{ji})_{i \leq j \in I})$ forma un sistema inverso de anillos y morfismos.

Se define el ***límite inverso*** del sistema inverso $((R_i)_{i \in I}, (\mu_{ji})_{i \leq j \in I})$ como:

$$\varprojlim R_i := \left\{ (r_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} R_i \middle| \, \mu_{ji}(r_j) = r_i \text{ si } i \leq j \right\}$$

Observación. Para cada $i \in I$ se tiene la restricción de la proyección natural $\pi_i : \varprojlim R_i \to R_i$.

Proposición 1.5. Si μ_{ji} son morfismos de anillos para toda $i \leq j$ entonces $\varprojlim R_i$ tiene estructura de anillo.

Demostración:

Consideremos la multiplicación en $\varprojlim R_i$ que se hereda del producto directo $\prod_{i \in I} R_i$. Primero notemos que $\varprojlim R_i \neq \emptyset$ pues contiene al elemento cuyas coordenadas es el elemento neutro aditivo del correspondiente grupo abeliano R_i. Sean $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}$ elementos de $\varprojlim R_i$ entonces si $(c_i)_{i\in I} = (a_i - b_i)_{i\in I}$ se tiene que para toda $i \leq j$:

$$\begin{aligned} \mu_{ji}(a_j - b_j) &= \mu_{ji}(a_j) - \mu_{ji}(b_j) \\ &= a_i - b_i \end{aligned}$$

Lo que prueba que $(a_i)_{i\in I} - (b_i)_{i\in I} \in \varprojlim R_i$. Por otro lado si $i \leq j$ entonces usando el hecho que μ_{ji} es morfismo de anillos se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu_{ji}(a_j b_j) &= \mu_{ji}(a_j)\mu_{ji}(b_j) \\ &= a_i b_i \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varprojlim R_i$ tiene estructura de anillo. $\square$.

Proposición 1.6. *Propiedad universal del límite inverso*. Si S es cualquier anillo con la propiedad que para cada $i \in I$ existe un morfismo de anillos $f_i : S \to R_i$ con $f_i = \mu_{ji} \circ f_j$ para $i \leq j$ entonces existe un único morfismo de anillos $f : S \to \varprojlim R_i$ tal que los triángulos laterales del siguiente diagrama conmutan:

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_j"'] \arrow[ddr, bend left, "f_i"] & \\
& \varprojlim R_i \arrow[dl, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & \\
R_j \arrow[rr, "\mu_{ji}"'] & & R_i
\end{tikzcd}$$

Demostración:

Sea $f : S \to \varprojlim R_i$ dada por $f(s) := (f_i(s))_{i\in I}$. Observe que si $i \leq j$ entonces $\mu_{ji}(f_j(s)) = f_i(s)$, pues $\mu_{ji} \circ f_j = f_i$ y por lo tanto $\mathrm{Im}(f) \subseteq \varprojlim R_i$. Sean s_1, s_2 elementos de S, entonces usando el hecho que f_i es en particular un morfismo de grupos se tiene que:

$$\begin{aligned} f(s_1 + s_2) &= (f_i(s_1 + s_2))_{i\in I} \\ &= (f_i(s_1) + f_i(s_2))_{i\in I} \\ &= (f_i(s_1))_{i\in I} + (f_i(s_2))_{i\in I} \\ &= f(s_1) + f(s_2) \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f(s_1 s_2) &= (f_i(s_1 s_2))_{i\in I} \\ &= (f_i(s_1) f_i(s_2))_{i\in I} \\ &= (f_i(s_1))_{i\in I} (f_i(s_2))_{i\in I} \\ &= f(s_1) f(s_2) \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que f es un morfismo de anillos, la unicidad de f se sigue al componer con las proyecciones π_i. $\square$.

Supongamos ahora que R es un anillo e I un ideal (bilateral) de R. Notemos que en R se tiene la *filtración I-ádica*:

$$R \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \ ...$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n \leq m$. Observe que el ideal I^m está contenido en el núcleo de la proyección natural $R \twoheadrightarrow R/I^n$, luego por el teorema de Noether se tienen morfismos naturales de anillos:

$$f_{mn} : R/I^m \longrightarrow R/I^n$$

Por construcción se sigue que el par $((I^n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_{mn})_{n\leq m\in\mathbb{N}})$ forma un sistema inverso de anillos y morfismos. Consideremos entonces el límite inverso $\varprojlim R/I^n$:

$$\varprojlim R/I^n = \left\{ (r_n + I^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} R/I^n \,|\, r_n \equiv r_m \bmod I^n \text{ para toda } m \geq n \right\}$$

Se define la ***completación*** de R con respecto a I como $\hat{R}_I := \varprojlim R/I^n$.

Definición. Sea R un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de R es una ***sucesión de Cauchy*** si y sólo si para toda $k \in \mathbb{N}$ existe $N = N(k) \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+1} - x_n \in I_k$ para toda $n \geq N$.

Definición. Sea R un anillo con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de R es **convergente** si existe $x \in R$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $N = N(k) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x \in I_k$ para toda $n \geq N$. A x se le llama el límite de la sucesión y se denota por $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Definición. Sea R un anillo filtrado entonces R es ***completo*** si toda sucesión de Cauchy en R es convergente.

Consideremos la completación de R con respecto al ideal I, $\hat{R}_I$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\hat{R}_i := \{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{R}_I : r_n = 0 \text{ para toda } n \leq i\}$$

Notemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ el conjunto $\hat{R}_i$ es un ideal de $\hat{R}_I$. De esta manera el anillo $\hat{R}_I$ tiene asociada una filtración natural: $\{\hat{R}_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Proposición 1.7. Sea R un anillo dotado de la topología I-ádica. Entonces se cumple que:

(a) La completación $\hat{R}_I = \varprojlim R/I^n$ es un espacio completo y Hausdorff.
(b) Existe un morfismo de anillos inyectivo $\varphi : R \hookrightarrow \hat{R}_I$.

Demostración:

(a) La completación $\hat{R}_I$ es Hausdorff ya que: $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} \hat{R}_i = \{0\}$. Veamos que $\hat{R}_I$ es un espacio completo. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\hat{R}_I$. Pongamos $x_n = (x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ donde $x_{n,m} \in R/I^m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en $\hat{R}_I$ entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n(m) \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+1} - x_n \in \hat{R}_m$ para toda $n \geq n(m)$. Esto implica que $x_{n+1,i} = x_{n,i}$ para toda $i \leq m$ y toda $n \geq n(m)$. Notemos que sin perder generalidad podemos suponer que $\{n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente. Veamos que $x_{n,i} = x_{n(m),i}$ para cada $i \leq m$ y toda $n \geq n(m)$. Note que si $n \geq n(m)$ entonces $n = n(m)+k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, luego hagamos inducción sobre k. Para $k = 1$ el enunciado se cumple pues $n(m) \geq n(m)$. Supongamos entonces que $x_{n(m)+k,i} = x_{n(m),i}$ y probemos que $x_{n(m)+k+1,i} = x_{n(m),i}$.

En efecto:

$$\begin{aligned} x_{(n(m)+k)+1,i} &= x_{n(m)+k,i} \\ &= x_{n(m),i} \end{aligned}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos $x'_m := x_{n(m),m}$ y pongamos $x' := (x'_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

• $x' \in \hat{R}_I$:

Hay que probar que si $r \geq s$ entonces $f_{r,s}(x'_r) = x'_s$. Dado que $\{n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente entonces $n(r) \geq n(s)$. Como $x_{n,i} = x_{n(m),i}$ para cada $i \leq m$ y toda $n \geq n(m)$ en particular poniendo $i = m$ se sigue que $x_{n,m} = x_{n(m),m}$ para cada $n \geq n(m)$. Luego como $n(r) \geq n(s)$ entonces $x_{n(r),s} = x_{n(s),s}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f_{r,s}(x'_r) &= f_{r,s}(x_{n(r),r}) \\ &= x_{n(r),s} \\ &= x_{n(s),s} \\ &= x'_s \end{aligned}$$

Lo que prueba que $x' \in \hat{R}_I$.

• $x' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

Observe que $x' - x_n = (x_{n(m),m} - x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$. Sea $r \in \mathbb{N}$ y veamos que para toda $n \geq n(r)$ se tiene que $(x_{n(m),m} - x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \in \hat{R}_r$. Supongamos que $m \leq r$ entonces por ser $\{n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente se sigue que $n(m) \leq n(r)$ y por lo tanto $x_{n(r),m} = x_{n(m),m}$. Así $n(m) \leq n(r) \leq n$ y en particular $n \geq n(m)$. Luego $x_{n,m} = x_{n(m),m}$ y por ello $x' - x_n \in \hat{R}_r$ para toda $n \geq n(r)$. En consecuencia $x' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y por lo tanto $\hat{R}_I$ es un espacio completo.

(b) Sea $\varphi : R \to \hat{R}_I$ dada por $r \mapsto (r + I^n)_{n\in\mathbb{N}}$, es claro que φ es morfismo de anillos. Note que si $\varphi(r) = \varphi(s)$ entonces $r + I^n = s + I^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ lo que implica que $r - s \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I^n = \{0\}$ y por lo tanto $r = s$. □

Capítulo 2

Completación del Álgebra de Caminos

Sea $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$ un carcaj finito y sea K un campo fijo. Asociamos al carcaj Q dos K-espacios vectoriales $R = K^{Q_0}$ y $A = K^{Q_1}$ que consisten de aplicaciones K-valuadas en Q_0 y Q_1 respectivamente. Dotamos a A de una estructura de (R, R)-bimódulo como sigue: si $e \in R$ y $f \in A$ entonces la acción izquierda está dada por $(e \cdot f)(a) = e(h(a))f(a)$ y la acción derecha está dada por $(f \cdot e)(a) = f(a)e(t(a))$ para cada flecha a. Para cada vértice x definimos una aplicación $e_x : Q_0 \to K$ mediante $e_x(y) = \delta_{x,y}$ y notemos que $R = \bigoplus_{x \in Q_0} Ke_x$. Similarmente A tiene como base las funciones $\underline{\alpha} : Q_1 \to K$ dadas por $\underline{\alpha}(\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$ y por lo tanto $A = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} K\underline{\alpha}$. Consideremos el álgebra tensorial de A:

$$T_R(A) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d}$$

Donde $A^{\otimes d}$ representa el producto tensorial iterado $\underbrace{A \otimes_R A \otimes_R ... \otimes_R A}_{\text{d veces}}$ y $A^0 = R$. Observe que esto está bien definido ya que A es un (R, R)-bimódulo.

Note que para cada $d \geq 1$ los productos $a_1 \cdots a_d$ tal que $a_k \in Q_1$ y $t(a_k) = h(a_{k+1})$ para cada $1 \leq k \leq d$ forman una K-base de $A^{\otimes d}$. De esta manera podemos identificar $A^{\otimes d}$ con KQ_d, i.e el K-espacio vectorial generado por todos los caminos de longitud d. Luego el álgebra tensorial se puede identificar con el álgebra de caminos KQ.

Por otro lado, por definición de producto cartesiano se tiene que:

$$\prod_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d} = \left\{ h : \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d} \ : (\forall d \in \mathbb{N})(h(d) \in A^{\otimes d}) \right\}$$

Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los caminos orientados del carcaj Q y consideremos el conjunto de series formales: $\left\{ \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} a_\gamma \gamma : a_\gamma \in K \right\}$.

Proposición 2.1. Existe una correspondencia biyectiva:

$$\prod_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d} \longleftrightarrow \left\{ \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} a_\gamma \gamma : a_\gamma \in K \right\}$$

Demostración:

Denotemos la longitud de un camino por l y por simplicidad denotemos por X el conjunto de series formales. Sea $x = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} a_\gamma \gamma$. Definamos $\varphi : X \longrightarrow \prod_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d}$ mediante $x \mapsto \varphi(x)$ donde:

$$\varphi(x)(d) := \sum_{l(\gamma)=d} a_\gamma \gamma$$

para cada $d \in \mathbb{N}$. Observe que φ es inyectiva, en efecto, sean $\sum_{\gamma \in \mathcal{B}} a_\gamma \gamma$ y $\sum_{\gamma \in \mathcal{B}} b_\gamma \gamma$ dos series formales con la misma imagen bajo φ. Luego para todo $d \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{l(\gamma)=d} a_\gamma \gamma = \sum_{l(\gamma)=d} b_\gamma \gamma$ y por lo tanto $a_\gamma = b_\gamma$ para todo $\gamma \in \mathcal{B}$. En consecuencia $\sum_{\gamma \in \mathcal{B}} a_\gamma \gamma = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} b_\gamma \gamma$. Para ver que φ es sobreyectiva note que si $h \in \prod_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $h(n) = \sum_{l(\gamma)=n} a_\gamma \gamma$ con $a_\gamma \in k$, luego si tomamos la serie $\sum_{\gamma \in \mathcal{B}} a_\gamma \gamma$:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sum_{\gamma \in \mathcal{B}} a_\gamma \gamma\right)(n) &= \sum_{l(\gamma)=n} a_\gamma \gamma \\ &= h(n) \end{aligned}$$

Y por lo tanto $\varphi\left(\sum_{\gamma \in \mathcal{B}} a_\gamma \gamma\right) = h$. $\square$.

Por lo anterior podemos identificar al conjunto de series formales con el producto $\prod_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d}$. Notemos que podemos dotar al conjunto de series formales de una estructura de anillo como sigue:

- La suma:

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}} a_\gamma \gamma + \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} b_\gamma \gamma := \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} (a_\gamma + b_\gamma) \gamma$$

• El producto:

$$\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma\right)\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{B}} b_\alpha\alpha\right) := \sum_{\rho\in\mathcal{B}}\left(\sum_{\gamma\alpha=\rho} a_\gamma b_\alpha\right)\rho$$

Proposición 2.2. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal generado por las flechas y sea $\widehat{KQ}$ la completación del álgebra de caminos KQ con respecto a $\mathfrak{m}$, entonces existe un isomorfismo de anillos:

$$\widehat{KQ} \cong \left\{\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma : a_\gamma \in K\right\}$$

Demostración:

Sea X el conjunto de series formales. Para establecer dicho isomorfismo vamos a utilizar la propiedad universal del límite inverso (ver proposición 1.6). Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la aplicación $\varphi_n : X \longrightarrow KQ/\mathfrak{m}^n$ dada por:

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma \mapsto \sum_{l(\gamma)<n} a_\gamma\gamma + \mathfrak{m}^n$$

Lo que realiza esta aplicación es la reducción de la serie formal módulo los caminos de longitud mayor o igual que n. Note que φ_n es morfismo de anillos, en efecto es claro que preserva sumas, resta ver que preserva productos. Sean $\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma$, $\sum_{\alpha\in\mathcal{B}} b_\alpha\alpha$ dos series formales. Por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\varphi_n\left(\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma\right)\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{B}} b_\alpha\alpha\right)\right)\\
&= \varphi_n\left(\sum_{\rho\in\mathcal{B}}\left(\sum_{\rho=\gamma\alpha} a_\gamma b_\alpha\right)\rho\right)\\
&= \sum_{l(\rho)<n}\left(\sum_{\rho=\gamma\alpha} a_\gamma b_\alpha\right)\rho + \mathfrak{m}^n
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
&\varphi_n\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma\right)\varphi_n\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{B}} b_\alpha\alpha\right)\\
&=\left(\sum_{l(\gamma)<n} a_\gamma\gamma+\mathfrak{m}^n\right)\left(\sum_{l(\alpha)<n} b_\alpha\alpha+\mathfrak{m}^n\right)\\
&=\sum_{\rho\in\mathcal{B}}\left(\sum_{\rho=\gamma\alpha,l(\gamma)<n,l(\alpha)<n} a_\gamma b_\alpha\right)\rho+\mathfrak{m}^n
\end{aligned}$$

Teniendo presente que los caminos de longitud mayor o igual a n son cero en el cociente $KQ/\mathfrak{m}^n$ se sigue que dichas expresiones son iguales por la distributividad de la suma, luego por la propiedad universal del límite inverso se sigue que existe un único morfismo de anillos $f : X \longrightarrow \varprojlim KQ/\mathfrak{m}^n$ dado por:

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma \mapsto \left(\sum_{l(\gamma)<n} a_\gamma\gamma+\mathfrak{m}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

• f es inyectiva. Podemos identificar a $KQ/\mathfrak{m}^n$ con el K-espacio vectorial generado por todos los caminos de longitud a lo más $n-1$. Sea $\sum a_\gamma\gamma$ un elemento $KQ/\mathfrak{m}^n$ y supongamos que $\sum a_\gamma\gamma = 0$ para todo camino orientado γ tal que $l(\gamma) \leq n-1$. Luego por la independencia lineal de los caminos orientados se sigue que $a_\gamma = 0$ para todo γ tal que $l(\gamma) \leq n-1$. Pero además esto es cierto para toda $n \in \mathbb{N}$, luego $\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma = 0$.

• f es sobreyectiva. Supongamos que $(f_n + \mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de $\varprojlim KQ/\mathfrak{m}^n$. Observe primero que podemos suponer que f_n es una combinación lineal de caminos de longitud a lo más $n-1$ ya que en el cociente $KQ/\mathfrak{m}^n$ todos los caminos de longitud mayor o igual a n se anulan. Por otro lado, por definición de límite inverso se tiene que para toda $m \geq n$: $f_m - f_n \in \mathfrak{m}^n$. Esto implica que el elemento $(f_n + \mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se puede escribir como:

$$(f_1+\mathfrak{m}, f_1+g_1+\mathfrak{m}^2, f_1+g_1+g_2+\mathfrak{m}^3, ...)$$

Donde cada g_i es una combinación lineal de caminos de longitud i, es decir $g_i \in KQ_i$ para cada $i \geq 1$. Por ejemplo $f_2 - f_1 \in \mathfrak{m}$, luego $f_2 = f_1 + g_1$ donde $g_1 \in \mathfrak{m}$, es decir $g_1 = f_2 - f_1$. Por lo tanto el elemento $f_1 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + ...$ es una serie formal cuya imagen bajo el morfismo f es exactamente $(f_n + \mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esto establece la sobreyectividad del morfismo f. □.

Capítulo 3

Series Formales sobre Bimódulos

Sean $D_1, D_2, .., D_n$ anillos con división, $S = \prod_{i=1}^{n} D_i$ y M un (S,S)-bimódulo. Definamos:

$$\mathcal{F}_S(M) := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a(i) \ : \ a(i) \in M^{\otimes i} \right\}$$

Donde declaramos que $M^0 = S$. Dotamos a $\mathcal{F}_S(M)$ de estructura de anillo como sigue:

• La suma:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a(i) + \sum_{i=0}^{\infty} b(i) := \sum_{i=0}^{\infty} (a(i) + b(i))$$

• El producto:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a(i) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b(j) \right) := \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i+j=s} a(i)b(j)$$

donde $a(i)b(j)$ es la imagen de $a(i) \otimes b(j)$ en $M^{\otimes(i+j)}$ bajo el isomorfismo canónico:

$$M^{\otimes i} \otimes_S M^{\otimes j} \xrightarrow{\cong} M^{\otimes(i+j)}$$

Notemos que $\mathcal{F}_S(M)$ es un anillo con 1. En efecto, el elemento 1 está dado por:

$$1(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 0 \\ 0 \text{ si } i \neq 0 \end{cases}$$

ya que si $a \in \mathcal{F}_S(M)$ entonces:

$$(a1)(i) = \sum_{s+t=i} a(s)1(t)$$

Luego si $t \neq 0$ entonces $1(t) = 0$ y por ello $(a1)(i) = a(i)$.

Note además que como $M^0 = S$ entonces S se encaja como subanillo en $T_S(M)$ y $\mathcal{F}_S(M)$ luego podemos considerar tanto a $T_S(M)$ y $\mathcal{F}_S(M)$ como S-álgebras vía el morfismo inclusión de S en cualquiera de estos dos anillos.

Similarmente el álgebra tensorial $T_S(M)$ se encaja como subanillo de $\mathcal{F}_S(M)$, i.e $T_S(M) \hookrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ al identificar $T_S(M)$ con el conjunto de sumas finitas de los productos tensoriales iterados. Sea $\mathfrak{m}(M)$ el ideal de $T_S(M)$ generado por M. Observe que se tiene una filtración:

$$T_S(M) \supseteq \mathfrak{m}(M) \supseteq \mathfrak{m}(M)^2 \supseteq ...$$

Luego se tiene la topología $\mathfrak{m}(M)$-ádica en $T_S(M)$. Note también que para todo entero $j \geq 1$:

$$\mathfrak{m}(M)^j = M^{\otimes j} \oplus M^{\otimes j+1} \oplus ...$$

Definamos ahora una aplicación $\nu : \mathcal{F}_S(M) \to \mathbb{N}$ como sigue. Para cada $a \in \mathcal{F}_S(M)$ se define:

$$\nu(a) := \min\{i : a(i) \neq 0\}$$

Proposición 3.1. La aplicación ν induce una métrica en $\mathcal{F}_S(M)$.

Demostración:

Veamos que la aplicación $d : \mathcal{F}_S(M) \times \mathcal{F}_S(M) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d(a,b) := \begin{cases} 2^{-\nu(a-b)} \text{ si } a \neq b \\ \qquad 0 \text{ si } a = b \end{cases}$$

es una métrica en $\mathcal{F}_S(M)$. Observe que solo la desigualdad del triángulo no es evidente. Sean a, b, c elementos de $\mathcal{F}_S(M)$ y sin pérdida de generalidad supongamos que todos son distintos entre sí. Sea i_1 el menor entero tal que $(a-c)(i_1) \neq 0$, i_2 el menor entero tal que $(a-b)(i_2) \neq 0$ e i_3 el menor entero tal que $(b-c)(i_3) \neq 0$. Definamos $k = \min\{i_2, i_3\}$ y note que $a - c = (a-b) + (b-c)$, luego si $i < k$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(a-c)(i) &= ((a-b)+(b-c))(i) \\ &= (a-b)(i) + (b-c)(i) \\ &= 0\end{aligned}$$

ya que $i < k$ y como $k = \min\{i_2, i_3\}$ entonces $i < i_2$ y a la vez $i < i_3$. Por construcción i_1 es el menor entero tal que $(a-c)(i_1) \neq 0$, luego $i_1 \geq k$. Por lo tanto $-i_1 \leq -k$ y así $2^{-i_1} \leq 2^{-k} \leq 2^{-i_2} + 2^{-i_3}$. En consecuencia $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ y por ende d satisface la desigualdad del triángulo. $\square$

Observación. Note que la prueba anterior muestra que d satisface la desigualdad $d(a,c) \leq \max\{d(a,b), d(b,c)\}$ para todo a, b, c en $\mathcal{F}_S(M)$ así que de hecho $(\mathcal{F}_S(M), d)$ es un espacio *ultramétrico*.

Proposición 3.2. Sea $\overline{\langle M \rangle}$ la cerradura topológica en el espacio $\mathcal{F}_S(M)$ del ideal $\langle M \rangle$ generado por M en el anillo $\mathcal{F}_S(M)$. Entonces $a \in \overline{\langle M \rangle} \Leftrightarrow a(0) = 0$.

Demostración:

$\Leftarrow$) Supongamos que $a(0) = 0$. Definamos una sucesión $\{a^{\leq n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$ como sigue:

$$a^{\leqslant n}(j) := \begin{cases} a(j) \text{ si } j \leq n \\ \quad 0 \text{ si } j > n \end{cases}$$

Veamos que $a = \lim\limits_{n \to \infty} a^{\leqslant n}$, es decir que para toda $\epsilon > 0$ existe un natural N tal que $d(a, a^{\leqslant n}) < \epsilon$ para toda $n > N$. Observe que $\nu(a - a^{\leqslant n}) = n + k$ para algún entero positivo k. Luego dado $\epsilon > 0$ elija un natural N tal que $2^N \epsilon > 1$. Por lo tanto si $n > N$ entonces $n + k > N + k > N$ y así $n + k > N$. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} 2^{-(n+k)} &\leq 2^{-(N+K)} \\ &\leq 2^{-N} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Como $a(0) = 0$ entonces $\{a^{\leqslant n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\langle M \rangle$ y es tal que $a = \lim\limits_{n \to \infty} a^{\leqslant n} \in \overline{\langle M \rangle}$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $a \in \overline{\langle M \rangle}$, entonces cualquier abierto que contiene a a intersecta a $\langle M \rangle$. En particular considerando $B(a, \frac{1}{2})$, la bola abierta con centro en a y radio $\frac{1}{2}$, se sigue que existe $b \in \langle M \rangle$ tal que $d(a,b) < \frac{1}{2}$. Necesariamente $a(0) = b(0)$ pues en otro caso $d(a,b) = 1 \nless \frac{1}{2}$. Como $b \in \langle M \rangle$ entonces $b(0) = 0$ y luego $a(0) = 0$. □

Para cada $j \geq 1$ definamos:

$$\mathcal{F}_S(M)^{\geq j} := \{a \in \mathcal{F}_S(M) : a(i) = 0 \text{ para toda } i < j\}$$

Note en particular que $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} = \overline{\langle M \rangle}$.

Proposición 3.3. Para cada entero $j \geq 1$ se tiene que $\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ es un ideal de $\mathcal{F}_S(M)$.

Demostración:

Sea j un entero tal que $j \geq 1$. Supongamos que $a = \sum_{i=0}^{\infty} a(i)$ es un elemento de $\mathcal{F}_S(M)$ y sea $b = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)$ un elemento de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$. Entonces por definición de producto en $\mathcal{F}_S(M)$:

$$ab = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i+k=t} a(i)b(k)$$

Supongamos que $t < j$, luego $i + k < j$. Lo anterior implica que $k < j$ pues si $k \geq j$ entonces $i + k \geq i + j \geq j$ luego $i + k \geq j$, una contradicción. Por lo tanto si $t < j$ entonces $k < j$ y como $b = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)$ es un elemento de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ entonces $b(k) = 0$ para todo $k < j$. En consecuencia $\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ es un ideal de $\mathcal{F}_S(M)$. □

Proposición 3.4. Sea $\mathfrak{m}(M)$ el ideal generado por M en el álgebra tensorial $T_S(M)$. Para cada entero positivo j existe un isomorfismo de anillos:

$$\frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}} \cong \frac{T_S(M)}{\mathfrak{m}(M)^j}$$

Demostración:

Notemos que se tiene una inclusión natural $T_S(M) \hookrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ y un morfismo sobreyectivo $\mathcal{F}_S(M) \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}}$, luego la composición determina un morfismo $\phi : T_S(M) \to \frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}}$. Veamos que $\mathfrak{m}(M)^j \subseteq \ker(\phi)$. En efecto si $a \in \mathfrak{m}(M)^j$ entonces $a(s) = 0$ para toda $s \leq j - 1$, luego $\phi(a) = 0$. Por lo tanto por el teorema de Noether existe un morfismo de anillos $\Psi : \frac{T_S(M)}{\mathfrak{m}(M)^j} \longrightarrow \frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
T_S(M) \arrow[r, hook] \arrow[d] & F_S(M) \arrow[d, two heads] \\
\frac{T_S(M)}{\mathfrak{m}(M)^j} \arrow[r, dashed, "\Psi"] & \frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}}
\end{tikzcd}
$$

Resta ver que Ψ es un isomorfismo.

• Ψ es morfismo inyectivo:

Sea $a = \sum_{i=0}^{j-1} a(i) \in \frac{T_S(M)}{\mathfrak{m}(M)^j}$ y supongamos que $a \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ luego para toda $t \leq j-1$ se tiene que $a(t) = 0$ y por lo tanto $a = 0$.

• Ψ es morfismo sobreyectivo:

Sea $a = \sum_{i=0}^{\infty} a(i) + \mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ un elemento de $\frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}}$. Observe que en dicho cociente se tiene la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a(i) + \mathcal{F}_S(M)^{\geq j} = \sum_{i=0}^{j-1} a(i) + \mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$$

Pero entonces $b = \sum_{i=0}^{j-1} a(i) + \mathfrak{m}(M)^j$ satisface $\Psi(b) = a$. En consecuencia Ψ es un isomorfismo de anillos. □

Observación. Un razonamiento análogo al que se da en la demostración de la proposición 2.2 muestra que si $\mathfrak{m}(M)$ es el ideal generado por M en el álgebra tensorial $T_S(M)$ entonces existe un isomorfismo de anillos: $\widehat{T_S(M)}_{\mathfrak{m}(M)} \cong \mathcal{F}_S(M)$.

Introduzcamos ahora el concepto de sumabilidad para una sucesión de series formales.

Definición. Sea $\tau := \{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Se dice que τ es *sumable* si para cada $u \in \mathbb{N}$ el conjunto:

$$\mathcal{F}(\tau, u) = \{i \in \mathbb{N} : T_i(u) \neq 0\}$$

es finito. En tal caso se define la serie $\sum T_i$ como:

$$\left(\sum T_i\right)(u) := \sum_{i \in \mathcal{F}(\tau,u)} T_i(u)$$

Proposición 3.5. Sea $\tau = \{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $J_n := \sum_{i \leq n} T_i$. Entonces si τ es sumable se tiene que $\lim_{n\to\infty} J_n = \sum T_i$ con respecto a la métrica en $\mathcal{F}_S(M)$ descrita en la proposición 3.1.

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^N\epsilon > 1$. Como τ es sumable entonces para cada $u \in \{0, 1, 2, ...N\}$ se tiene que $|\mathcal{F}(\tau, u)| < \infty$. Sea $T = \bigcup_{u=0}^{N} \mathcal{F}(\tau, u)$ y pongamos $k = \max T$. Supongamos que $n \geq k$ y que $u \in \{0, 1, ...N\}$ entonces:

$$\begin{aligned} J_n(u) - \left(\sum T_i\right)(u) &= \sum_{i=0}^{n} T_i(u) - \sum_{i\in\mathcal{F}(\tau,u)} T_i(u) \\ &= \sum_{i\in\{0,1,\ldots n\}\setminus\mathcal{F}(\tau,u)} T_i(u) \end{aligned}$$

Note ahora que si $i \in \{0, 1, ..n\} \setminus \mathcal{F}(\tau, u)$ y $u \in \{0, 1, ...N\}$ entonces $T_i(u) = 0$. En efecto, si no es el caso entonces $T_i(u) \neq 0$, luego $i \in \mathcal{F}(\tau, u)$ una contradicción. Por lo tanto si $n \geq k$ se sigue que:

$$\begin{aligned} \nu\left(J_n - \sum T_i\right) &= \text{mín}\left\{u \in \mathbb{N} : J_n(u) - \left(\sum T_i\right)(u) \neq 0\right\} \\ &> N \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} d\left(J_n, \sum T_i\right) &= 2^{-\nu\left(J_n - \sum T_i\right)} \\ &< 2^{-N} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Se concluye que $\lim_{n\to\infty} J_n = \sum T_i$. □

Sean $\tau = \{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\tau' = \{T'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesiones de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Se construye una nueva serie $\sum T''_s$ definiendo primero una sucesión de series formales $\tau'' = \{T''_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ como sigue:

$$T''_s := \sum_{i+j=s} T_i T'_j$$

Proposición 3.6. Sean $\tau = \{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\tau' = \{T'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesiones de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Si ambas sucesiones son sumables entonces:

(i) $\tau'' = \{T''_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ es sumable.
(ii) $\sum T''_s = \left(\sum T_i\right)\left(\sum T'_j\right)$

Demostración:

(i) Sea $u \in \mathbb{N}$ y para cada entero $l \in [0, u]$ definamos:

$$J_l = \mathcal{F}(\tau, l) \times \mathcal{F}(\tau', u - l)$$
$$J = \bigcup_{l=0}^{u} J_l$$

Por hipótesis τ y τ' son sucesiones sumables, luego J_l es finito por ser el producto cartesiano de dos conjuntos finitos y por ende J es finito. Tomemos $s_0 = \max\{i + j : (i, j) \in J\}$, luego:

$$\mathcal{F}(\tau'', u) \subseteq [0, s_0] \cap \mathbb{N}$$

Por lo tanto $\mathcal{F}(\tau'', u)$ es un conjunto finito lo que prueba que τ'' es sumable.

(ii) Sea $u \in \mathbb{N}$. Por un lado:

$$\begin{aligned}\left(\sum T''_s\right)(u) &= \sum_{s\in\mathcal{F}(\tau'',u)} T''_s(u)\\ &= \sum_{s=0}^{s_0} T''_s(u)\\ &= \sum_{l=0}^{u} \sum_{(i,j)\in J_l} T_i(l)T'_j(u-l)\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\left(\sum T_i\right)\left(\sum T'_j\right)(u) = \sum_{l=0}^{u}\left(\sum_{i\in\mathcal{F}(\tau,l)} T_i(l)\right)\left(\sum_{j\in\mathcal{F}(\tau',u-l)} T'_j(u-l)\right)$$
$$= \sum_{l=0}^{u}\sum_{(i,j)\in J_l} T_i(l)T'_j(u-l)$$

Se sigue que ambas expresiones son iguales. □

Recordemos ahora un resultado de topología general.

Lema. Sea Y un espacio de Hausdorff, X un espacio topológico y $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Supongamos que $D \subseteq X$ es un subconjunto denso de X tal que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in D$ entonces $f = g$.

Demostración:

Como Y es Hausdorff entonces la diagonal $\triangle = \{(y, y) : y \in Y\}$ es un subconjunto cerrado de $Y \times Y$. Definamos $\varphi : X \to Y \times Y$ mediante $\varphi(x) = (f(x), g(x))$. Dado que f y g son aplicaciones continuas entonces φ también es continua y por ello $\varphi^{-1}(\triangle)$ es un subconjunto cerrado de X. Por hipótesis $\varphi^{-1}(\triangle) = D$, luego como $\overline{D} = X$ y $\varphi^{-1}(\triangle)$ es cerrado en X entonces $\varphi^{-1}(\triangle) = X$. En consecuencia $f(x) = g(x)$ para toda $x \in X$, es decir $f = g$. □

Proposición 3.7. Sea $\varphi : M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ un morfismo de (S, S)-bimódulos tal que $\varphi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Entonces existe un único morfismo de S-álgebras $\overline{\varphi} : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}_S(M) \arrow[d, dotted, "\overline{\varphi}"] \\ & \mathcal{F}_S(M) \end{tikzcd}$$

Demostración:

Por la propiedad universal del álgebra tensorial existe un único morfismo de S-álgebras: $\psi : T_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & T_S(M) \arrow[d, dotted, "\psi"] \\ & \mathcal{F}_S(M) \end{tikzcd}$$

Sea $a = \sum_{u=0}^{\infty} a(u)$ un elemento de $\mathcal{F}_S(M)$ luego $a(u) \in M^{\otimes u}$ para cada $u \geq 0$. Note que como $a(u) \in M^{\otimes u}$ entonces usando la hipótesis que $\varphi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$ se tiene que $\psi(a(u)) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u}$. En consecuencia la sucesión de series formales $\{\psi(a(u))\}_{u\in\mathbb{N}}$ es sumable. Se define entonces $\overline{\varphi} : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ mediante:

$$a \mapsto \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi(a(u))$$

• $\overline{\varphi}$ preserva la unidad. En efecto $\overline{\varphi}(1) = \psi(1) = 1$ ya que $\psi|_S = \mathrm{id}_S$ pues ψ es morfismo de S-álgebras.

• $\overline{\varphi}$ preserva sumas. Sean a_1, a_2 elementos de $\mathcal{F}_S(M)$ entonces usando la definición de suma en $\mathcal{F}_S(M)$ y el hecho que ψ preserva sumas se tiene que:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(a_1 + a_2) &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi((a_1 + a_2)(u)) \\ &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi(a_1(u) + a_2(u)) \\ &= \sum_{u\in\mathbb{N}} (\psi(a_1(u)) + \psi(a_2(u))) \\ &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi(a_1(u)) + \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi(a_2(u)) \\ &= \overline{\varphi}(a_1) + \overline{\varphi}(a_2) \end{aligned}$$

• $\overline{\varphi}$ preserva productos. Sean a_1, a_2 elementos de $\mathcal{F}_S(M)$ entonces usando la proposición 3.6 y el hecho que ψ preserva sumas y productos se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(a_1a_2) &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi((a_1a_2)(u)) \\
&= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi\left(\sum_{i+j=u} a_1(i)a_2(j)\right) \\
&= \sum_{u\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=u} \psi(a_1(i)a_2(j)) \\
&= \sum_{u\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=u} \psi(a_1(i))\psi(a_2(j)) \\
&= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \psi(a_1(i))\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \psi(a_2(j))\right) \\
&= \overline{\varphi}(a_1)\overline{\varphi}(a_2)
\end{aligned}$$

• $\overline{\varphi}$ es una extensión de φ. Sea $m \in M$ entonces $\overline{\varphi}(m) = \psi(m)$. Como $\psi|_M = \varphi$ entonces $\psi(m) = \varphi(m)$ y por lo tanto $\overline{\varphi}|_M = \varphi$.

• $\overline{\varphi}$ es único. Supongamos que existe otro morfismo $\phi : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ de S-álgebras tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}_S(M) \arrow[d, "\phi"] \\
& \mathcal{F}_S(M)
\end{tikzcd}$$

Al considerar la restricción de ϕ a $T_S(M)$ se obtiene un morfismo $T_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ que fija S y cuya restricción a M coincide con φ. Como ψ es único entonces $\phi = \psi$ en $T_S(M)$, es decir ϕ y ψ coinciden en el álgebra tensorial $T_S(M)$. Sea $a \in \mathcal{F}_S(M)$ entonces $a = \sum_{u\in\mathbb{N}} a(u)$ donde $a(u) \in M^{\otimes u}$. Observe que para cada $u \in \mathbb{N}$ se tiene que $M^{\otimes u} \subseteq T_S(M)$ y así $\phi(a(u)) = \psi(a(u))$. Usando la proposición 3.5 y el lema de la página 20 se sigue que:

$$\begin{aligned}\phi(a) &= \phi\left(\sum_{u\in\mathbb{N}} a(u)\right)\\ &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \phi(a(u))\\ &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi(a(u))\\ &= \overline{\varphi}(a)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi = \overline{\varphi}$ lo que establece la unicidad del morfismo $\overline{\varphi}$. □

Sea $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ un morfismo de S-álgebras con la propiedad que $\varphi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Observe que $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} = M \bigoplus \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ luego al considerar la restricción de φ a M se obtiene un morfismo $\varphi_0 : M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ de S-bimódulos que está completamente determinado por el par de morfismos de S-bimódulos: $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ donde:

$$\begin{aligned}&\varphi^{(1)} : M \longrightarrow M\\ &\varphi^{(2)} : M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}\end{aligned}$$

Proposición 3.8. Supongamos que $\varphi^{(1)} = id_M$ entonces φ es un isomorfismo.

Demostración:

Definamos $\psi = id_{\mathcal{F}_S(M)} - \varphi$ entonces ψ es un endomorfismo de (S-S)-bimódulos. Veamos que $\psi(M^{\otimes u}) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$.

• Para $u = 0$ hay que verificar que $\psi(S) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Sea $s \in S$, entonces como $\varphi|_S = id_S$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\psi(s) &= s - \varphi(s)\\ &= s - s\\ &= 0\end{aligned}$$

el cual es un elemento de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Observe que si $u = 1$ entonces la hipótesis $\varphi^{(1)} = id_M$ implica que:

$$\begin{aligned}
\psi(m) &= m - \varphi(m) \\
&= m - \varphi_0(m) \\
&= m - (\varphi^{(1)}(m) + \varphi^{(2)}(m)) \\
&= m - m - \varphi^{(2)}(m) \\
&= -\varphi^{(2)}(m)
\end{aligned}$$

Por construcción $\varphi^{(2)} : M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$, luego $\psi(m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$.

• Para obtener el caso general procedamos por inducción. Supongamos que la afirmación se cumple para u y probemos que se cumple para $u + 1$. Sea $n \otimes m \in M^{\otimes(u+1)} = M^{\otimes u} \otimes M$, entonces:

$$\begin{aligned}
\psi(n \otimes m) &= n \otimes m - \varphi(n \otimes m) \\
&= nm - \varphi(n)\varphi(m) \\
&= nm - \varphi(n)m + \varphi(n)m - \varphi(n)\varphi(m) \\
&= (n - \varphi(n))m + \varphi(n)(m - \varphi(m)) \\
&= \psi(n)m + \varphi(n)\psi(m)
\end{aligned}$$

Note que $n \in M^{\otimes u}$ luego por hipótesis inductiva $\psi(n) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ y por ende $\psi(n)m \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+2}$ pues $m \in M$. Por otro lado $n \in M^{\otimes u}$ y como $\varphi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$ entonces $\varphi(n) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u}$. Además $\psi(m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ lo que implica que $\varphi(n)\psi(m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+2}$. Dado que $\mathcal{F}_S(M)^{\geq u+2}$ es un ideal de $\mathcal{F}_S(M)$ entonces en particular es un subgrupo aditivo, así $\psi(n)m + \varphi(n)\psi(m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+2}$ lo que completa el argumento inductivo.

Veamos que lo anterior implica que $\psi(\mathcal{F}_S(M)^{\geq u}) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$. En efecto sea $a \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u}$ entonces $a = \sum_{k=0}^{\infty} a(u+k)$ donde $a(u+k) \in M^{\otimes(u+k)}$. Usando la proposición 3.5 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\psi(a) &= a - \varphi(a) \\
&= a - \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} a(u+k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a(u+k) - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(a(u+k)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (a(u+k) - \varphi(a(u+k))) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \psi(a(u+k)) \\
&= \psi(a(u)) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a(u+k))
\end{aligned}$$

Como $a(u) \in M^{\otimes u}$ entonces usando el hecho que $\psi(M^{\otimes u}) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ se concluye que $\psi(a(u)) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$. Por otro lado note que $\psi(a(u+k)) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+k+1} \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$. Por ser $\mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{F}_S(M)$ y ψ continua entonces la proposición 3.5 implica que $\psi(a) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$.

Supongamos ahora que $a \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u}$ entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $\psi^i(a) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ luego la sucesión de series formales $\{\psi^i(a)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es sumable. Definamos $\rho : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ mediante:

$$a \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a)$$

Note que ρ es morfismo de (S,S)-bimódulos pues ψ^i lo es para cada $i \in \mathbb{N}$. Por construcción se tiene que $\psi = id - \varphi$, lo que implica que $\varphi = id - \psi$. Por lo tanto $\varphi\rho = (id - \psi)\rho$. Usando la continuidad de ψ y la proposición 3.5 se tienen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
(\varphi\rho)(a) &= (id-\psi)(\rho(a)) \\
&= (id-\psi)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\psi^i(a)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\psi^i(a) - \psi\left(\sum_{i=0}^{\infty}\psi^i(a)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\psi^i(a) - \sum_{i=0}^{\infty}\psi^{i+1}(a) \\
&= \psi^0(a) \\
&= id(a) \\
&= a
\end{aligned}
$$

Así $\varphi\rho = id_{\mathcal{F}_S(M)}$. Similarmente $\rho\varphi = id_{\mathcal{F}_S(M)}$ y por lo tanto φ es un isomorfismo. □

Concluimos este trabajo dando una caracterización de los automorfismos de $\mathcal{F}_S(M)$.

Proposición 3.9. Sea $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ morfismo de S-álgebras tal que $\varphi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Denotemos por φ_0 al par de morfismos $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ definido anteriormente. Entonces φ es un automorfismo de S-bimódulos si y sólo si $\varphi^{(1)}$ es un isomorfismo de (S-S)-bimódulos.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que φ es un automorfismo, luego existe $\rho : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ tal que $\rho\varphi = \varphi\rho = id_{\mathcal{F}_S(M)}$. Como $\varphi|_S = id_S$ entonces $\rho|_S = id_S$ ya que si $s \in S$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\rho(s) &= \rho(id(s)) \\
&= \rho(\varphi(s)) \\
&= (\rho \circ \varphi)(s) \\
&= id_S(s) \\
&= s
\end{aligned}
$$

Lo anterior implica que $\rho(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$, así $\rho = (\rho^{(0)}, \rho^{(1)})$ donde $\rho^{(0)} : M \longrightarrow M$ y $\rho^{(1)} : M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ son morfismos de (S,S)-bimódulos. Sea $m \in M$, entonces:

$$\begin{aligned}
\rho(m) &= \rho^{(0)}(m) + \rho^{(1)}(m) \\
\varphi(\rho(m)) &= \varphi(\rho^{(0)}(m)) + \varphi(\rho^{(1)}(m)) \\
m &= \varphi(\rho^{(0)}(m)) + \varphi(\rho^{(1)}(m)) \\
&= \varphi^{(1)}(\rho^{(0)}(m)) + \varphi^{(2)}(\rho^{(0)}(m)) + \varphi(\rho^{(1)}(m))
\end{aligned}$$

Note que los últimos dos sumandos del lado derecho son elementos de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$, luego por unicidad de la suma directa se sigue que $m = \varphi^{(1)}(\rho^{(0)}(m))$. Por otro lado $\varphi(m) = \varphi^{(0)}(m)$, luego:

$$\begin{aligned}
\varphi(m) &= \varphi^{(1)}(m) + \varphi^{(2)}(m) \\
\rho(\varphi(m)) &= \rho(\varphi^{(1)}(m)) + \rho(\varphi^{(2)}(m)) \\
m &= \rho(\varphi^{(1)}(m)) + \rho(\varphi^{(2)}(m)) \\
&= \rho^{(0)}(\varphi^{(1)}(m)) + \rho^{(1)}(\varphi^{(1)}(m)) + \rho(\varphi^{(2)}(m))
\end{aligned}$$

Como $\rho^{(1)}(\varphi^{(1)}(m))$ y $\rho(\varphi^{(2)}(m))$ son elementos de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ entonces $\rho^{(0)}(\varphi^{(1)}(m)) = m$ y por lo tanto $\varphi^{(1)}$ es un isomorfismo.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\varphi^{(1)}$ es un isomorfismo. Sea $\rho' := (\varphi^{(1)})^{-1} : M \longrightarrow M$. Por 3,7 ρ' induce un morfismo:

$$\rho : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$$

con la propiedad que $\rho|_S = id_S$. Note que:

$$\begin{aligned}
(\rho \circ \varphi)(m) &= \rho(\varphi(m)) \\
&= \rho(\varphi^{(0)}(m)) \\
&= \rho(\varphi^{(1)}(m) + \varphi^{(2)}(m)) \\
&= \rho(\varphi^{(1)}(m)) + \rho(\varphi^{(2)}(m)) \\
&= (\varphi^{(1)})^{-1}(\varphi^{(1)}(m)) + \rho(\varphi^{(2)}(m)) \\
&= m + \rho(\varphi^{(2)}(m))
\end{aligned}$$

En consecuencia $\rho \circ \varphi = (id_M, \rho \circ \varphi^{(2)})$ luego la proposición anterior es aplicable y por ello φ tiene inverso izquierdo. Un razonamiento similar muestra que φ tiene inverso derecho, es decir φ es un isomorfismo. $\square$

Bibliografía

[1] Assem I., Simson D. and Skowronski A., *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Vol. 1, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] Derksen H., Weyman J. and Zelevinsky A., *Quivers with potentials and their representations I: Mutations*, Selecta Mathematica 14 (2008), 59-119.

[3] Enochs E., Jenda O., *Relative Homological Algebra*, Vol. 1, de Gruyter, Berlin 2000.

[4] Jacobson, N., *Basic Algebra II*, Dover Publications, 2009.

[5] Munkres, J., *Topología*, Prentice Hall, Segunda Edición, 2002.

[6] Rotman, J., *Homological Algebra*, Springer, Second Edition, 2008.

[7] Warner, S., *Topological Rings*, North Holland Mathematics Studies, 1993.