



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

REFLEXIÓN DE LA LUZ POR UN SEMIESPACIO DE ESFERAS  
DESORDENADAS

T E S I S  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
EDAHÍ ANTONIO GUTIÉRREZ REYES

TUTOR PRINCIPAL  
DR. RUBÉN G. BARRERA PÉREZ  
INSTITUTO DE FÍSICA (UNAM)

MÉXICO D.F. AGOSTO 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

Agradezco a todas las personas involucradas en este trabajo directa é indirectamente. Perdonen si no hago una mención exhaustiva y explícita, pero siéntanse incluidos todos aquellos a quienes pudiera omitir.

A mi tutor el Dr. Rubén G. Barrera Pérez, por haber dirigido esta tesis y haber provisto los medios para su culminación.

Al Dr. Augusto García Valenzuela, por sus valiosas aportaciones a este trabajo.

A cada uno de los sinodales, por sus valiosas correcciones y amabilidad al leer este trabajo.

A mis familiares. A mi madre. A mis amigos.

Al CONACYT, por el apoyo económico que me otorgó a través de una beca de doctorado.

Y por último y al más importante, a mi Señor y Salvador, Jesús el Cristo.

## Resumen

En esta tesis se resuelve el problema de la reflexión, transmisión y refracción del haz coherente cuando una onda electromagnética plana incide sobre un semiespacio de esferas localizadas al azar para el caso en que el tamaño de las esferas es comparable a la longitud de onda de la radiación incidente (coloide turbio). El cálculo se realiza en la aproximación de campo efectivo, la cual es válida para sistemas diluidos.

Se considera el caso de partículas suspendidas en el vacío y el de partículas inmersas en una matriz semi-infinita.

Primeramente se determinan las inducidas en cada una de las esferas, en términos del tensor generalizado de conductividad no local de la esfera aislada el cual se calcula de manera exacta.

Posteriormente, utilizando la técnica de la función de Green, se plantea la ecuación integral para el campo eléctrico promedio en la aproximación de campo efectivo.

Para el caso de las esferas suspendidas en una matriz semi-infinita, se calcula la función de Green del semiespacio para tomar en cuenta de manera formal la presencia de las “imágenes” de las corrientes inducidas.

La ecuación integral se resuelve proponiendo una solución de prueba ó Ansatz tipo onda plana con los siguientes parámetros efectivos: vector de propagación, vector de polarización y amplitud. Utilizando las ecuaciones de consistencia resultantes para estos parámetros efectivos se encuentran, en el caso de esferas suspendidas en el vacío, fórmulas explícitas y exactas para las amplitudes de reflexión y transmisión para coloides turbios, en términos de las distintas componentes del tensor generalizado de conductividad no local y la fracción de llenado volumétrica. En el caso de esferas inmersas en una matriz, se demuestra que la amplitud de reflexión está dada por una fórmula que es equivalente a la fórmula de la reflectancia de tres medios.

Con el fin de facilitar el uso de estas fórmulas, se proponen distintas aproximaciones y se exploran sus condiciones de validez.

## Abstract

In this thesis I deal with the problem of reflection, transmission and refraction of the coherent beam when an electromagnetic plane wave is incident upon a half-space, where spherical particles are localized at random positions. I treat the case in which the size of the spheres is comparable to the wavelength of the incident radiation (turbid colloid). The calculation is performed within the effective-field approximation, that is valid for dilute colloidal systems.

I considered the case when the particles are suspended in vacuum, and also the case when the particles are immersed within a semi-infinite matrix. Firstly, the induced currents within each sphere are calculated exactly, in terms of the generalized non-local conductivity tensor of an isolated sphere. Secondly, using the Green function technique, the integral equation for the average electric field, in the effective field approximation, is stated. For the case of the spheres suspended in a semi-infinite matrix, the half-space Green function is calculated in order to take into account, formally, the presence of the “images” of the induced currents. Then, the integral equation is solved by proposing a test solution or Ansatz of plane-wave type, with the following effective parameters: wave vector, polarization vector and amplitude. Using the resultant consistency equations for these effective parameters, for the case of free standing spheres in vacuum, explicit and exact formulas for the reflection and transmission amplitudes of dilute turbid colloids are found. These formulas are given in terms of the different components of the generalized non-local conductivity tensor. For the case in which the spheres are immersed within a matrix, it is proved that the reflection amplitudes are given by a formula which is equivalent to the classical three-media-reflection formula. In order to facilitate the proper use of these formulas, different approximations are proposed, and their validity conditions are numerically explored.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Conceptos básicos</b>	<b>15</b>
2.1. Electrodinámica en medios materiales . . . . .	15
2.2. Soluciones de onda plana . . . . .	19
2.3. Ondas evanescentes en el vacío . . . . .	21
2.4. Medios absorbentes y ondas inhomogeneas . . . . .	23
2.5. Refracción en medios absorbentes . . . . .	26
2.6. Coeficientes de Fresnel . . . . .	27
<b>3. Ecuación integral para la reflexión de la Luz</b>	<b>31</b>
3.1. Reflexión de Fresnel, caso local, homogéneo é isotrópico . . . . .	31
3.2. Relaciones de dispersión . . . . .	42
3.3. Amplitud de transmisión . . . . .	43
3.4. Amplitud de reflexión caso local . . . . .	45
3.5. Comentario . . . . .	48
<b>4. Conductividad no local de la esfera</b>	<b>49</b>
4.1. Ondas planas y armónicos esféricos vectoriales . . . . .	52
4.2. El campo electromagnético total . . . . .	66
4.3. Condiciones de frontera . . . . .	71
4.4. Corriente interna inducida . . . . .	74
4.5. Transformada de Fourier . . . . .	78
4.6. Corrientes superficiales de magnetización . . . . .	87
4.7. Conductividad no local cuando $\vec{p}'_{  } = \vec{p}_{  } = \vec{k}_{  }$ . . . . .	90
4.8. Conductividad no local cuando no hay magnetización y $\vec{p}'_{  } =$ $\vec{p}_{  }$ . . . . .	93
4.9. Conductividad no local cuando $ \vec{p}'  =  \vec{p}  = k_0$ . . . . .	94

4.10. Tensor de conductividad no local cuando $\vec{p}' = \vec{p}$ . . . . .	104
4.11. Aproximación de Rayleigh . . . . .	106
4.12. Algunos resultados numéricos . . . . .	109
4.13. Polinomios de Legendre para argumento complejo . . . . .	112
<b>5. Semiespacio de esferas en el vacío</b> . . . . .	<b>115</b>
5.1. Campo eléctrico total inducido . . . . .	115
5.2. Solución a la ecuación integral . . . . .	125
5.3. Amplitud de reflexión . . . . .	128
5.4. Relaciones de dispersión . . . . .	128
5.4.1. Aproximación sin modos longitudinales . . . . .	133
5.4.2. Aproximación heurística . . . . .	133
5.5. Otra forma de integrar . . . . .	135
5.6. Relación de dispersión . . . . .	137
5.7. Coeficiente de transmisión . . . . .	139
5.8. Coeficiente de reflexión . . . . .	139
<b>6. Aproximación del cono de luz</b> . . . . .	<b>141</b>
6.1. Amplitud de reflexión (cono de luz) . . . . .	147
6.2. Límite de partícula pequeña . . . . .	148
6.3. Esferas en vacío, cálculos, polarización P . . . . .	150
6.4. Comentario . . . . .	156
6.5. Comparación de modelos, esferas en vacío, polarización S . . . . .	156
6.6. Comentario . . . . .	161
<b>7. Aproximación cono de luz mejorada</b> . . . . .	<b>163</b>
7.1. Serie de Taylor a orden cero . . . . .	163
7.2. Fórmula de van de Hulst . . . . .	164
7.3. Iteración del determinante . . . . .	164
<b>8. Semiespacio de esferas en una matriz</b> . . . . .	<b>169</b>
8.1. Solución de la ecuación integral del semiespacio . . . . .	174
8.2. Reflexión y transmisión con matriz (promedio de corrientes) . . . . .	179
8.3. Reflexión y transmisión con matriz (Cono de luz) . . . . .	181
8.4. Comparación de modelos (esferas en matriz) . . . . .	186
8.5. Comentario . . . . .	198
<b>9. Conclusiones</b> . . . . .	<b>201</b>

<b>A. Función de Green para el semiespacio</b>	<b>205</b>
A.1. Definición de la función de Green en el semiespacio . . . . .	205
A.2. Condiciones de frontera . . . . .	208
A.3. Fórmula final . . . . .	213
A.4. Cálculo de la matriz R . . . . .	216
<b>B. Modos longitudinales en un plasma</b>	<b>221</b>
<b>C. Relaciones vectoriales útiles</b>	<b>225</b>



# Capítulo 1

## Introducción

El propósito de esta tesis es el de resolver el problema de la reflexión de la luz por  $N$  esferas colocadas al azar, ya sea que estas se encuentren suspendidas libremente en el vacío, ó bien, estas se encuentren inmersas en una matriz con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ , tal que las esferas y la matriz se encuentran en el semiespacio  $z > 0$ . Además supondremos que todas las esferas tienen el mismo tamaño.

Las ecuaciones que plantearemos serán las ecuaciones para el campo eléctrico promedio, ya que el hecho que las esferas se encuentren distribuidas al azar implica que el campo eléctrico será a su vez un campo estocástico o que depende de las posiciones aleatorias de las esferas, que implica la existencia tanto de un campo eléctrico promedio o coherente y la existencia de un campo eléctrico fluctuante o difuso. En esta tesis no consideraremos el campo difuso o campo fluctuante y nos concentraremos en el campo eléctrico promedio.

Históricamente, existen las fórmulas de Clausius-Mossotti ó equivalentemente, Lorentz-Lorenz, que dan una fórmula explícita para calcular el índice de refracción de un material macroscópico en términos de las propiedades de dispersión de la luz de los componentes moleculares, y esta teoría aplicada a partículas metálicas puede consultarse en [Maxwell]. Una vez conocido este índice de refracción efectivo es posible conocer los parámetros efectivos de la radiación esparcida, donde para el campo promedio, resulta ser una onda plana, con parámetros efectivos tales como longitud de onda, polarización y amplitud. Estas fórmulas tienen validez cuando el tamaño de las partículas o inclusiones es pequeño comparado con la longitud de onda del campo incidente y densidades de número de partículas moderadas, una extensión

de esta teoría de medio efectivo al caso dinámico puede ser consultada en [Stroud],[Wachniewski].

A su vez, van de Hulst en su libro [Hulst], resuelve el problema de la transmisión de una onda plana, cuando esta incide normalmente sobre una capa de esferas de espesor finito, para ello considera que el campo lejano esparcido por cada esfera cuya superposición y promedio espacial, da lugar a una onda que llamaremos el campo coherente que se propaga con un vector de onda efectivo .

Diremos que un campo es coherente para diferenciarlo del campo difuso, aquel cuya superposición con otro campo coherente presenta interferencia, de tal forma que el campo calculado por van de Hulst, es un campo coherente, y es el campo eléctrico promedio. De esta forma, cuando el campo eléctrico incidente es una onda plana, entonces también el campo eléctrico transmitido será una onda plana, con parámetros efectivos.

Este método de van de Hulst y el resultado de Clausius-Mosotti no son equivalentes. Esta diferencia surge en primer lugar por el hecho que Clausius-Mosotti es el equivalente de la aproximación cuasicristalina para partículas pequeñas, y van de Hulst es una aproximación de campo efectivo, pero además existe una diferencia debida a que no es equivalente promediar las corrientes inducidas (Clausius-Mosotti) o bien promediar los campos esparcidos (van de Hulst).

En esta tesis estudiaremos el caso en que el sistema coloidal pueda considerarse diluido, para medios densos puede consultarse por ejemplo [Lax,2], [Tsang,1], [Tsang,4], [Dick], [Siqueira], [Hespel], [Alexander].

El método que seguiremos es análogo al propuesto por van de Hulst, pero generalizado, en el sentido de considerar un semiespacio en lugar de una capa de esferas, e incluir la presencia de un sustrato o matriz, esto junto con el hecho de no ser necesario suponer que los campos esparcidos están en la zona de campo lejano, sino que introducimos el concepto de conductividad no local generalizado de la esfera, que de manera general es una expresión para calcular las corrientes inducidas dentro de una esfera, debidas a la presencia de un campo eléctrico externo calculadas las corrientes inducidas, este enfoque, permite calcular el campo eléctrico en cualquier región del espacio tanto dentro como fuera de la esfera esto se hace utilizando la función de Green para el campo electromagnético la cual multiplicada por la corriente inducida, e integrada sobre todo el espacio, nos da el campo eléctrico radiado ó esparcido .

Ha sido mostrado recientemente, que siguiendo este enfoque, es posible

de hecho construir una teoría de campo efectivo [Barrera,1] para el campo eléctrico promedio ó campo coherente en coloides turbios, este medio efectivo, resulta ser espacialmente dispersivo. Esto quiere decir que la respuesta electromagnética depende no solamente de la frecuencia del campo eléctrico externo, sino también de su vector de onda.

También ha sido mostrado recientemente [Barrera,1], como de las relaciones de dispersión para los modos transversales, fué posible derivar un índice de refracción efectivo dependiente solo de la frecuencia, el cual puede ser utilizado para predecir el problema inverso, dado el índice de refracción efectivo, cuales son las propiedades del coloide, radio de partícula, permitividad eléctrica principalmente [Augusto,1],[Sanchez]. En trabajos previos, se ha estudiado la reflexión y la refracción de la luz de un coloide turbio de un semiespacio utilizando un enfoque de esparcimiento múltiple [Augusto,3], [Barrera,2] y se ha estudiado su conexión con las propiedades del medio efectivo.

En estos últimos trabajos se discuten las precauciones que se tienen que tomar en cuenta al usar un índice de refracción efectivo de un coloide turbio en la electrodinámica de medios continuos.

Por ejemplo, el uso de este índice de refracción efectivo en las relaciones de Fresnel para calcular las amplitudes de reflexión del campo coherente por una interfaz plana, ya no son válidas [Bohren,2],[Meeten]. Esto se verificó experimentalmente en [Augusto,2],[Alejandro,2], y esto no es un hecho aislado sino que se han reportado diversas inconsistencias en el uso del índice de refracción efectivo como se comenta en [Meeten].

Aquí nosotros construimos el marco teórico para incorporar la presencia de una interfaz plana, en el medio efectivo con dispersión espacial del sistema coloidal, y mostramos como calcular correctamente la amplitud de transmisión y la amplitud de reflexión para el campo coherente.

Nuestro enfoque esta basado en una ecuación integral para el campo eléctrico promedio, y la construcción de una respuesta electromagnética efectiva del coloide, que debido a la presencia de la interfaz plana, no es mas una respuesta con invariancia translacional, lo que tendrá consecuencias al escribir la respuesta no local del semiespacio.

Un problema que se presentó en esta tesis fué el hecho que la respuesta electrodinámica de estos sistemas coloidales es no local [Barrera,1], es decir que las propiedades eléctricas y magnéticas de la materia, dependen tanto de la frecuencia  $\omega$ , como del vector de propagación  $\vec{k}$ . En [Barrera,3], se estudió el concepto de energía y vector de Pointing, desde el punto de vista no-local.

Debido a la no-localidad, no era claro la forma en que debían resolverse los problemas de reflexión y transmisión de la luz para dichos sistemas coloidales. Existen varias técnicas para resolver los problemas no locales como puede verse por ejemplo en [Fuchs,2], [Halevi], [Reuter], [Pippard], [Mochan].

En particular no era claro que el método de las condiciones de Frontera de Fresnel permaneciera válido en el caso no local, la forma en que se evitó utilizar el método de las condiciones de frontera, fué trabajar directamente con la ecuación integral, y resolver la ecuación integral al proponer una solución de onda plana con parámetros libres tales como la amplitud de la onda, un vector de propagación efectivos  $\vec{k}^f$  y una polarización efectiva  $\hat{e}^f$ , este método implicó imponer y resolver ciertas ecuaciones de consistencia, una de las cuales es la relación de dispersión, y la otra da la amplitud de la onda transmitida, y es equivalente a lo que en óptica se llama el teorema de extinción Ewald Oseen [Born, pg. 106].

El propósito de esta tesis es el de presentar una teoría que unifique los distintos enfoques para tratar el problema de reflexión en sistemas coloidales, por un lado está la teoría de esparcimiento múltiple iniciadas en [Foldy], [Lax,2], y continuadas [Tsang,1],[Tsang,3] basadas en el formalismo de la matriz  $T$ , y por otro lado, la teoría de medio efectivo iniciada en [Barrera,1] y la tesis [Alejandro,1] y continuada en esta tesis y esbozada en el artículo [Edahí] .

Esto se logra al introducir el tensor generalizado de conductividad no local, mediante el cual es posible encontrar las corrientes internas dentro de las esferas inducidas por un campo eléctrico externo, e incluye a la teoría de Mie, que es el esparcimiento de una onda plana con vector de onda del vacío por una esfera, como un caso particular.

A continuación mencionamos brevemente el contenido de cada capítulo de la tesis.

En el capítulo (2) se hace un repaso de los antecedentes de la electrodinámica clásica y algunos temas que se estudiaron someramente durante la elaboración de la tesis para poner claridad a distintos conceptos e ideas, por ejemplo la interpretación física de los campos  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$  y el problema de reflexión de Fresnel en el caso de medios absorbentes.

En el capítulo (3) se explora la posibilidad de resolver el problema de Fresnel vía la ecuación integral y se demuestra que es posible reemplazar el problema de las condiciones de frontera de Fresnel, por el de resolver una ecuación integral.

El capítulo (4) tiene el propósito de encontrar una expresión explícita

del tensor generalizado de conductividad no local de la esfera, con el cual podemos encontrar la corriente interna inducida dentro de una esfera provocado por un campo eléctrico de excitación. Esto se hace tanto en una representación mixta, espacio real y espacio de Fourier, como en el espacio de Fourier en dos variables.

En el capítulo (5) se plantea la ecuación integral para el campo eléctrico en un sistema de esferas colocadas al azar y en el caso que están suspendidas en el vacío.

El método para resolver todas las ecuaciones integrales es el siguiente: para la ecuación para  $z > 0$ , se propone una solución de onda plana con parámetros libres, un vector de propagación efectivo  $\vec{k}^f$ , un vector de polarización efectivo  $\hat{e}^f$ , y una amplitud de transmisión  $t$ .

La sustitución de este ansatz, conduce a ciertas relaciones de consistencia, una de las cuales será la relación de dispersión y la otra una condición para la amplitud de transmisión o bien lo que se conoce como el teorema de extinción de Ewald-Oseen.

El campo reflejado está dado solamente en términos de valores del campo en la interfaz  $z = 0$ , por lo que se calcula inmediatamente después de haber encontrado el campo transmitido.

En el capítulo (7) se introduce una aproximación en la teoría con el fin de obtener algunos resultados numéricos, tal aproximación consiste en sustituir un valor de  $k_z^f$  para el vector de propagación efectivo de la onda transmitida, dada por la expresión de Foldy-Lax [Lax,1], en el tensor generalizado de conductividad no local, y evaluar los coeficientes de reflexión en este caso. También se da un método iterativo para resolver la relación de dispersión para la componente  $z$  del vector de onda efectivo.

En el capítulo (6) se toma la aproximación que hemos llamado del cono de luz, que consiste reemplazar el vector de onda efectivo en el tensor generalizado de conductividad no local, por el vector de onda del campo incidente, esta suposición es equivalente a decir que el campo que induce las corrientes dentro de las esferas es el campo incidente. Esta teoría desprecia la refracción, pero es el resultado que predicen algunas teorías de esparcimiento múltiple [Augusto,3],[Barrera,2].

Finalmente en el capítulo (8) se utiliza la función de Green del semiespacio, para calcular el campo promedio reflejado por un sistema de esferas que están inmersas en una matriz con módulo de propagación  $k_1$ , que consiste en tomar en cuenta la reflexión interna de la radiación dispersada debida a la presencia de la superficie.

En el apéndice (A) se calcula la función de Green del semiespacio para el campo electromagnético en una representación apropiada, de tal manera que podamos tomar en cuenta la reflexión interna de la radiación dispersada debida a la matriz con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$  donde se encuentran las esferas, esta sección se basa en los artículos [Ismo,1],[Ismo,2],[Ismo,3] .

El resultado es que la relación de dispersión que da los modos de propagación efectivos, no cambia en estructura si no por el hecho de reemplazar el vector onda en el vacío  $k_0$  por el vector de onda de la matriz  $k_1$ . La reflexión si se ve alterada y las expresiones correspondientes son obtenidas y el resultado importante es que se demuestra que la amplitud de reflexión está dada por la fórmula de reflexión para 3 medios, vacío, matriz, y medio efectivo.

# Capítulo 2

## Conceptos básicos

### 2.1. Electrodinámica en medios materiales

En esta sección definimos y discutimos el significado físico de los campos de polarización  $\vec{P}$  y magnetización  $\vec{M}$ , introducidos en el tratamiento usual de la electrodinámica de medios materiales, también llamada electrodinámica continua, por ejemplo como aparece en los libros de texto [Landau], [Bredov].

A continuación presentamos las ecuaciones de Maxwell en medios materiales, y damos un significado físico de los campos de polarización y magnetización  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$  como el momento dipolar eléctrico y momento dipolar magnético por unidad de volumen. Una demostración alternativa de esta interpretación puede ser consultada en [Born, pg. 80-84].

Partimos de las ecuaciones de Maxwell en el sistema internacional de unidades en presencia de un medio material. Supondremos que existen densidades de carga y de corrientes externas, externas al material, que producen campos electromagnéticos que inducen a su vez, en el material, densidades de carga y de corriente. Por lo tanto, la presencia del material aparece con la presencia de estas densidades de carga y corriente inducidas, por lo que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e + \rho_i}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_e + \vec{J}_i) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

donde  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  es el campo eléctrico,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  es el campo magnético,  $\vec{J}_e(\vec{r}, t)$  es la densidad de corriente eléctrica externa,  $\vec{J}_i(\vec{r}, t)$  es la densidad de corriente eléctrica inducida en el material,  $\rho_e(\vec{r}, t)$  es la densidad de carga eléctrica externa,  $\rho_i(\vec{r}, t)$  es la densidad de carga eléctrica inducida,  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica del vacío,  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del vacío.

Supondremos que no hay procesos de ionización, en tal caso parte de la corriente inducida podría pasar a ser corriente externa, y parte de la corriente externa podría pasar a ser corrientes inducidas, es decir suponemos que la densidad de corriente externa e inducida son independientes. Por lo que a cada densidad de carga podemos asociar una densidad de corriente relacionadas por la ecuacion de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_i = -\frac{\partial \rho_i}{\partial t} \quad (2.6)$$

donde  $\vec{J}$  es la corriente total

$$\vec{J} = \vec{J}_e + \vec{J}_i. \quad (2.7)$$

Supondremos que el medio no está cargado eléctricamente, por lo tanto la carga total inducida en el medio material es cero, es decir,  $\int_V \rho_i dv = 0$  y que fuera de la región donde está definida la densidad de carga, la carga inducida es cero, entonces esta suposición junto con el resultado de la divergencia de Gauss implica que  $\rho_i$  se puede expresar como la divergencia de un campo, que por definición será el campo de polarización  $\vec{P}(\vec{r})$ ,

$$\rho_i = -\nabla \cdot \vec{P}, \quad (2.8)$$

donde  $\vec{P}(\vec{r})$  vale cero fuera del material. Esta es la definición de campo de polarización eléctrica  $\vec{P}$  un campo tal que al tomar su divergencia se recupera

la densidad de carga inducida en el material. La ecuación (2.1) se puede escribir como

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (2.9)$$

donde hemos definimos el vector de desplazamiento eléctrico como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.10)$$

La ecuación de continuidad para la densidad de corriente inducida se puede expresar en términos del vector de polarización eléctrica,

$$\nabla \cdot \left( \vec{J}_i - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.11)$$

y usando el hecho que la divergencia del rotacional de un campo arbitrario siempre es cero, se tiene que podemos escribir

$$\vec{J}_i = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}. \quad (2.12)$$

Esta es es la definición del campo de magnetización  $\vec{M}(\vec{r})$ . Por consiguiente, con estas definiciones, la densidad de corriente inducida  $\vec{J}_i$  se puede escribir como  $\vec{J}_i = \vec{J}_p + \vec{J}_m$ , en donde  $\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  es llamada densidad de corriente de polarización y  $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$  es llamada densidad de corriente de magnetización. Por lo que la tercera ecuación de Maxwell se puede escribir como

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.13)$$

donde se definió el campo  $H$  como

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_o} \vec{B} - \vec{M}. \quad (2.14)$$

Hasta ahora, la definición de  $\vec{P}, \vec{M}$  no es completa, por el hecho que un campo está definido unívocamente dentro de un volumen  $V$  sólo cuando se conoce su divergencia, rotacional y condiciones de frontera. Para ver porque, supongamos que si  $\vec{A}$  es un campo vectorial arbitrario,  $\vec{f}$  un campo vectorial arbitrario,  $g$  un campo escalar arbitrario, y además,  $\nabla \times \vec{A} = \vec{f}$ ,  $\nabla \cdot \vec{A} = g$ , entonces  $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \nabla \times \vec{f}$ , por lo que  $\nabla^2 \vec{A} = \nabla g - \nabla \times \vec{f}$ ,

que es una ecuación de Poisson, que bajo ciertas condiciones de regularidad en la frontera y continuidad de las funciones tiene solución única.

Por lo tanto, los campos  $\vec{P}$  y  $\vec{M}$  todavía no están definidos de manera unívoca, pero pueden ser insertados en las ecuaciones de Maxwell, esto es, en lugar de escribir las ecuaciones de Maxwell en términos de la densidades de corriente y cargas, utilizar los campos de polarización y magnetización como las fuentes del campo electromagnético, este hecho implica que los campos de polarización y magnetización son fuentes de un campo electromagnético que pueden ser identificados con el campo electromagnético que produciría una distribución continua de dipolos eléctricos y magnéticos puntuales.

Es esta interpretación la que permite que  $\vec{P}$  y  $\vec{M}$  queden unívocamente definidos hasta un volumen muy pequeño de materia, y poder, posteriormente, hacer un modelo de la materia, y decir como es que el campo de polarización depende localmente (con la interpretación que ahora serán densidad de momento dipolar eléctrico y magnético por unidad de volumen) del campo electromagnético, y notamos que al introducir este modelo físico en las ecuaciones de Maxwell, este sistema de ecuaciones se vuelven un sistema cerrado.

La interpretación física de  $\vec{P}$  y  $\vec{M}$  es un resultado exacto, en el sentido que el campo electromagnético que producen las densidades de carga y corriente inducidas en el material, es exactamente el mismo que producirían una densidad de dipolos eléctricos y magnéticos puntuales. En el caso del campo de magnetización  $M$ , algunos libros de texto afirman que esta interpretación, solo es válida en el caso cuasiestático y que pierde su significado en el caso dinámico [Landau, pg. 251-253], [Bredov]. Sin embargo otros libros presentan la demostración para el caso dinámico [Born, pg. 80-84] y concluyen que la interpretación del campo de magnetización como una densidad volumétrica de dipolos magnéticos puntuales, conserva su validez en el caso dinámico.

Como parte final de esta sección, definiremos la respuesta electromagnética de muchos materiales que comunmente se llaman lineales, es decir, supondremos que el campo eléctrico induce una densidad de dipolos eléctricos en la materia de una manera lineal y que el campo magnético induce una densidad de dipolos magnéticos de una manera lineal, es decir

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi_E(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \quad (2.15)$$

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_B(\vec{r})\vec{B}(\vec{r}) \quad (2.16)$$

donde el coeficiente de proporcionalidad  $\chi_E$  se le llama susceptibilidad eléctrica y al coeficiente de proporcionalidad  $\chi_B$  se le llama susceptibilidad magnética.

Recordando como se definió el campo  $H$  y el campo de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$ ,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.17)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (2.18)$$

y definiendo la permitividad eléctrica del material  $\epsilon_1$  tal que  $\vec{D} = \epsilon_1 \vec{E}$  y la permeabilidad magnética  $\mu_1$  del material tal que  $\vec{B} = \mu_1 \vec{H}$ , entonces se tiene que

$$\chi_E = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \quad (2.19)$$

$$\chi_B = \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \right). \quad (2.20)$$

## 2.2. Soluciones de onda plana

Las ecuaciones de Maxwell en medios materiales lineales y sin fronteras, y sin cargas y corrientes externas, para campos con dependencia armónica en el tiempo, es decir,  $\vec{E}(r, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ,  $\vec{H}(r, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ , se pueden escribir como

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu(\omega)\vec{H}(\vec{r}) \quad (2.21)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r}) \quad (2.22)$$

y por las definiciones del campo de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  y del campo  $\vec{H}$  (2.17),(2.18), implica que los campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  satisfacen la ecuación de onda libre

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (2.23)$$

$$\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) + \omega^2 \epsilon \mu \vec{H}(\vec{r}) = 0. \quad (2.24)$$

En general, los materiales reales presentan absorción, esto es disipación de energía en forma de calor, y es posible demostrar [Landau, pg.302], que en este caso tanto la permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  como la permeabilidad magnética  $\mu_1$  serán números complejos, siendo la parte imaginaria de estas cantidades la relacionada con esta energía disipada.

Para la ecuación de onda en el espacio libre (2.23), existen soluciones de la forma  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ , que representan ondas viajeras donde  $\vec{k}$  es el vector de onda y nos indica la dirección de propagación de la onda y su magnitud es tal que cuando se sustituye esta solución en la ecuación de onda (2.23) se debe cumplir que la amplitud del vector de onda debe satisfacer la ecuación

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu. \quad (2.25)$$

A esta condición se le llama la relación de dispersión de los modos electromagnéticos en un medio homogéneo. Y la relación de dispersión para el vacío

$$k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \quad (2.26)$$

la tomaremos como una definición del número de onda en el vacío. Además definimos el índice de refracción de un medio con permitividad eléctrica  $\epsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$  como

$$n = \sqrt{\epsilon \mu / \epsilon_0 \mu_0}, \quad (2.27)$$

y entonces (2.25) se puede escribir como  $k^2 = k_0^2 n^2$ .

Si  $\epsilon_1$  ó  $\mu_1$  son números complejos, entonces en general  $\vec{k}$  será un vector complejo y su parte real nos da las propiedades de propagación de la onda mientras que la parte imaginaria nos dice que se trata de una onda evanescente, es decir que se atenúa exponencialmente.

En esta tesis nos interesa resolver el problema de reflexión, transmisión y refracción de ondas planas en medios inhomogéneos en presencia de una interfaz plana. Para introducir la notación, primero revisamos el problema en el caso que el medio es homogéneo.

La solución al problema de la reflexión y refracción de una onda electromagnética monocromática en una interfaz plana de un material lineal con cierta permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, esta contenida en la ley de Snell, las ecuaciones de Fresnel, y la ley de reflexión de las cuales hablaremos más adelante .

Puede demostrarse [Landau, pg.323] que los vectores de propagación  $\vec{k}^i, \vec{k}^r, \vec{k}^t$  de la onda incidente, reflejada y transmitida respectivamente, se encuentran en un mismo plano (plano de incidencia). La polarización de la onda incidente se puede descomponer en una parte paralela al plano de incidencia  $E_{\parallel}$  y otra perpendicular a este  $E_{\perp}$ , y por el principio de superposición, podemos tratar los dos casos por separado, llamaremos al primer caso polarización  $p$ , y al segundo polarización  $s$ . Tomaremos un sistema de referencia, tal que el vector normal de la interfaz plana coincida con el eje  $z$  de nuestro sistema de referencia, y el eje  $x$  tal que coincida con la polarización  $s$  de la onda incidente

En la frontera las fases de la onda incidente reflejada y transmitida ser iguales (esta condición se conoce como acoplamiento de fases) por lo que la componente tangencial de  $\vec{k}$  es continua,  $k_{\parallel}^i = k_{\parallel}^r = k_{\parallel}^t$ , de donde se obtiene la ley de Snell

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \quad (2.28)$$

donde  $k_i$  es el número de onda de la onda incidente en el vacío y  $k_t$  el número de la onda transmitida en el medio.

### 2.3. Ondas evanecentes en el vacío

Aquí analizamos el fenómeno de la reflexión total interna cuando la luz pasa de un medio con  $n > 1$  al vacío  $n = 1$ , ya que este es un caso sencillo donde aunque la permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y a permeabilidad magnética  $\mu_1$  del material sean cantidades reales, la relación de dispersión para la componente  $z$  del vector de onda de la onda transmitida  $k_z^0$  será un número complejo y está dada por la relación de dispersión  $k_{\parallel}^i{}^2 + k_z^0{}^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ , dando lugar a una onda evanecente. Para verlo más claro hacemos lo siguiente:

Descomponemos el vector de onda en su componente paralela a la interfaz plana y otra componente normal, es decir,

$$\vec{k}^i = \vec{k}_{\parallel}^i + k_z^1 \hat{e}_z \quad (2.29)$$

$$\vec{k}^r = \vec{k}_{\parallel}^i - k_z^1 \hat{e}_z \quad (2.30)$$

$$\vec{k}^t = \vec{k}_{\parallel}^i + k_z^0 \hat{e}_z \quad (2.31)$$

para la onda incidente, reflejada y transmitida respectivamente y donde se uso la condición de acoplamiento de fases, y además

$$k_z^i = k_1 \cos \theta_i \quad (2.32)$$

$$k_{\parallel}^i = k_1 \sin \theta_i \quad (2.33)$$

donde  $k_1$  es la magnitud del vector de propagación de en el medio dado por  $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1$  y  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia.

De la relacion de dispersión para la onda transmitida al vacío se tiene que

$$k_z^{02} = k_0^2 - k_{\parallel}^{i2} \quad (2.34)$$

donde por definición  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ , utilizando el hecho que  $n = k_1/k_0$  y (2.33) encontramos que la componente  $z$  del vector de propagación se puede escribir como

$$k_z^0 = k_0(1 - n^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2} \quad (2.35)$$

donde vemos que para ángulos mayores que el ángulo crítico definido como  $n \sin \theta_i = 1$ ,  $k_z^0$  es imaginario puro por lo que la onda se atenúa de la forma  $e^{-k_z^0 z} e^{i\vec{k}_{\parallel}^i \cdot \vec{r}_{\parallel} - i\omega t}$  en la dirección  $z$ .

Otra forma de ver el problema, es considerar que  $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$  es un vector complejo con una parte real y una imaginaria respectivamente, de tal forma que  $e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r} + i\vec{k}' \cdot \vec{r}}$  también es solución a la ecuación de onda en el vacío siempre y cuando  $\vec{k}$  cumpla la relación de dispersión  $\vec{k} \cdot \vec{k} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$  para los modos evanescentes en el vacío, donde separando la parte real e imaginaria se tiene que

$$|\vec{k}'|^2 - |\vec{k}''|^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \quad (2.36)$$

$$\vec{k}' \cdot \vec{k}'' = 0 \quad (2.37)$$

la segunda condición nos dice que si existen modos evanescentes en al vacío entonces la dirección de atenuación para dichos modos evanescentes en el vacío, debe ser perpendicular a la dirección de propagación de la onda transmitida.

## 2.4. Medios absorbentes y ondas inhomogéneas

En esta sección trataremos el problema de la reflexión transmisión y refracción de una onda incidente en una interfaz plana que separa al vacío de un medio homogéneo absorbente, ver figura (2.4)

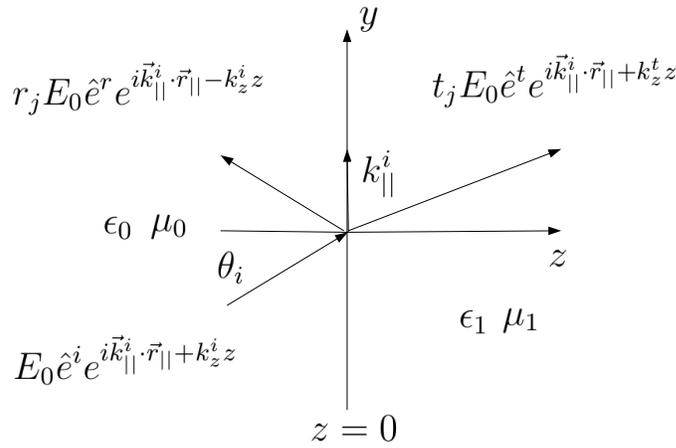


Figura 2.1: En esta gráfica se muestran las ondas incidente, transmitida y reflejada donde,  $E_0$  es la amplitud de la onda incidente,  $\hat{e}^i, \hat{e}^r, \hat{e}^t$  es la polarización de la onda incidente, reflejada y transmitida respectivamente,  $\vec{k}_{\parallel}^i$  es la parte paralela a la interfaz del vector de onda incidente,  $k_z^i, k_z^t$  es la componente  $z$  del vector de onda incidente y transmitido respectivamente,  $r_j, t_j$  son la amplitud de reflexión y la amplitud de transmisión para la onda reflejada y transmitida respectivamente y cierta polarización  $j = s$  para polarización  $s$  y  $j = p$  para polarización  $p$ .

Cuando el medio es absorbente, entonces las ondas (o modos electromagnéticos) que se pueden propagar por tal material, son aquellas que se conocen con el nombre de ondas inhomogéneas, que es una onda tal que su vector de propagación sea un vector complejo y la dirección de la parte real y la parte imaginaria no coincidan.

Para ver porque aparecen las onda inhomogéneas, resolvemos las ecuaciones de Maxwell en el caso de tener medios absorbentes, en los cuales

$\epsilon(\omega)$ ,  $\mu(\omega)$  son complejos, y como se demuestra en [Landau, pg.302] la parte imaginaria tanto de la permitividad eléctrica como de la susceptibilidad magnética están asociadas a la disipación de energía. El formalismo es idéntico al utilizado en las ecuaciones de Maxwell para medios homogéneos sin absorción. Para medios homogéneos sin cargas externas, las ecuaciones de Maxwell se reducen a solo dos

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu(\omega)\vec{H}(\vec{r}) \quad (2.38)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r}) \quad (2.39)$$

donde  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ,  $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ , es decir, son las ecuaciones para la parte espacial de  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , en un desarrollo armónico en el tiempo. En lo sucesivo se omitirá la dependencia explícita de  $\vec{r}$ . Al tomar la divergencia de estas ecuaciones, se obtienen las otras dos ecuaciones de Maxwell una para el campo eléctrico sin fuentes, y otra el magnético, es decir  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ .

Si tomamos el rotacional en (2.38) y sustituimos (2.39) encontramos que

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon\mu \vec{E} = 0 \quad (2.40)$$

y buscando soluciones de la forma  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  donde  $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$  es complejo, encontramos que (2.40) se reduce a la condición

$$\vec{k}' \cdot \vec{k}'' = \omega^2 \epsilon\mu \quad (2.41)$$

donde separando la parte real de la parte imaginaria se tiene que

$$|\vec{k}'|^2 - |\vec{k}''|^2 = \omega^2 \text{Re}(\epsilon\mu) \quad (2.42)$$

$$\vec{k}' \cdot \vec{k}'' = \frac{1}{2}\omega^2 \text{Im}(\epsilon\mu). \quad (2.43)$$

donde llamaremos  $k' = |\vec{k}'|$  y  $k'' = |\vec{k}''|$ . El caso que vamos a considerar es cuando en el vector de propagación complejo  $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$ , la dirección de propagación  $\vec{k}'$  y la dirección de atenuación  $\vec{k}''$  no son las mismas.

Por el hecho que las ecuaciones son invariantes ante rotaciones, siempre podemos escoger una base de vectores tal que la dirección de  $\vec{k}''$  coincida con la dirección del eje  $z$  de tal forma que  $\vec{k}'' = (0, 0, k'')$ , luego podemos dar una representación esférica del vector de propagación real de tal forma

$$\vec{k}' = k' \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \cos \phi \\ \text{sen } \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = k' \hat{e}_r \quad (2.44)$$

donde  $\hat{e}_r$  es el vector radial en coordenadas esféricas,  $\theta$  es el ángulo que forma la parte real del vector de propagación con el eje  $z$  (ó con la parte imaginaria del vector de propagación),  $\phi$  definirá el plano donde están tanto la parte real como la parte imaginaria del vector de propagación, que podemos tomar sin perder generalidad como cero, y por construcción  $k' > 0, k'' > 0$ , ya que son las normas de la parte real del vector de propagación complejo y su parte imaginaria respectivamente,  $0 < \theta < \pi$ , porque estamos usando coordenadas esféricas.

Vemos que los valores  $k', k''$  dependen ahora no solo de las propiedades del medio sino también del ángulo que forman la dirección de propagación y de atenuación, cuya solución toma la forma

$$k'^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left[ \text{Re}(\epsilon\mu) + \left( \text{Re}(\epsilon\mu)^2 + \left( \frac{\text{Im}(\epsilon\mu)}{\cos \theta} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \quad (2.45)$$

$$k''^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left[ -\text{Re}(\epsilon\mu) + \left( \text{Re}(\epsilon\mu)^2 + \left( \frac{\text{Im}(\epsilon\mu)}{\cos \theta} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \quad (2.46)$$

Los signos se escogen por el hecho que  $k', k''$  son las normas de la parte real y la parte imaginaria del vector de propagación complejo, siempre son positivos. Los campos están dados de la forma  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$ , y una expresión análoga para  $\vec{H}$ , tenemos que las ecuaciones (2.39),(2.38) se escriben de la forma

$$\vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \epsilon \vec{E}_0 \quad (2.47)$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu \vec{H}_0 \quad (2.48)$$

Estas ecuaciones relacionan las amplitudes del campo eléctrico con las amplitudes del campo magnético.

Este desarrollo con ondas planas permite construir cualquier otra solución por superposición con la única condición de que se respeten las condiciones de frontera, de hecho son las condiciones a la frontera las que determinan la única solución que existe.

Lo que hasta aquí se ha expuesto es válido para cualquier medio homogéneo con absorción, ahora introduciremos una interfaz plana en  $z = 0$  tal que para  $z < 0$  se tiene vacío y para  $z > 0$  un medio homogéneo y absorbente.

## 2.5. Refracción en medios absorbentes

En esta sección trataremos el análogo de la refracción de una onda incidente en una interfaz plana que separa al vacío con propiedades electromagnéticas  $\epsilon_0, \mu_0$ , de un medio homogéneo absorbente con propiedades electromagnéticas  $\epsilon_1, \mu_1$ , ver figura (2.4).

Por simplicidad supondremos que el medio donde viaja la onda incidente es el vacío. Primero demostraremos que en el caso de tener un medio absorbente y una interfaz plana en  $z = 0$  separando el vacío del medio absorbente, la dirección de atenuación es siempre perpendicular al plano que separa al medio del vacío, que tomaremos en  $z = 0$ .

Supondremos que tenemos una onda incidente una reflejada y una transmitida de la forma

$$\vec{E}_i = E_0 \hat{e}^i e^{i\vec{k}^i \cdot \vec{r}} \quad (2.49)$$

$$\vec{E}^r = r E_0 \hat{e}^r e^{i\vec{k}^r \cdot \vec{r}} \quad (2.50)$$

para  $z < 0$

$$\vec{E}^t = t E_0 \hat{e}^t e^{i\vec{k}^t \cdot \vec{r}} \quad (2.51)$$

definida para  $z > 0$ , donde  $E_0$  es la amplitud de la onda incidente,  $r, t$  las amplitudes de reflexión y transmisión, las cuales dependen de la polarización de la onda incidente donde  $\hat{e}^i, \hat{e}^r, \hat{e}^t$  son sus respectivas polarizaciones, donde utilizando la condición de acoplamiento de fases implica que sus vectores de onda dados están dados por

$$\vec{k}^i = \vec{k}_{\parallel}^i + k_z^i \hat{e}_z \quad (2.52)$$

$$\vec{k}^r = \vec{k}_{\parallel}^i - k_z^i \hat{e}_z \quad (2.53)$$

$$\vec{k}^t = \vec{k}_{\parallel}^i + k_z^t \hat{e}_z \quad (2.54)$$

donde  $k_{\parallel}^i = k_0 \sin \theta_i$  y cada vector debe satisfacer sus respectivas relaciones de dispersión, para el vacío y el medio absorbente respectivamente

$$k_z^{i2} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_{\parallel}^{i2} \quad (2.55)$$

$$k_z^{t2} = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 - k_{\parallel}^{i2}. \quad (2.56)$$

Implica además que los tres vectores de propagación están en un mismo plano, que por conveniencia haremos coincidir en nuestro sistema de referencia con el plano  $zy$ , y por las ecuaciones (2.47),(2.48) también fija las polarizaciones.

Cuando  $\epsilon_1$  y  $\mu_1$  son números complejos entonces las soluciones serán

$$Re(k_z^t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a + (a^2 + b^2)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (2.57)$$

$$Im(k_z^t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -a + (a^2 + b^2)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (2.58)$$

con

$$a = \omega^2 Re(\epsilon_1 \mu_1) - k_{\parallel}^{i2} \quad (2.59)$$

$$b = \omega^2 Im(\epsilon_1 \mu_1) \quad (2.60)$$

donde se tomó la parte positiva de la raíz, por la interpretación que una onda viajando a la derecha tiene en su vector de propagación, una componente  $z$  positiva.

Por el hecho que la componente paralela a la interfaz del vector de propagación de la onda incidente debe ser continua en la interfaz y por lo tanto un número real, vemos que en el caso que  $k_z^t$  sea un número complejo, la parte imaginaria del vector de propagación complejo tiene que tener forzosamente dirección  $z$ .

## 2.6. Coeficientes de Fresnel

El primer caso que resolveremos es cuando el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia, que llamaremos polarización *s* del alemán *Senkrecht*, que quiere decir perpendicular.

Usamos para el campo eléctrico incidente reflejado y transmitido lo siguiente:

$$\vec{E}_i = E_0 \hat{e}_x e^{i\vec{k}^i \cdot \vec{r}} \quad (2.61)$$

$$\vec{E}^r = r_s E_0 \hat{e}_x e^{i\vec{k}^r \cdot \vec{r}} \quad (2.62)$$

definidas para  $z < 0$  y

$$\vec{E}^t = t_s E_0 \hat{e}_x e^{i\vec{k}^t \cdot \vec{r}}. \quad (2.63)$$

para  $z > 0$ . Denotaremos como  $E_x^i$  la componente  $x$  del campo  $\vec{E}_i$ , y similar para el campo eléctrico transmitido y el reflejado. En este caso la ecuación (2.38) implica

$$\vec{H}^i = \frac{1}{\omega \mu_0} E_0 (0, k_z^i, -k_{||}^i) e^{i\vec{k}^i \cdot \vec{r}} \quad (2.64)$$

$$\vec{H}^r = \frac{1}{\omega \mu_0} r_s E_0 (0, -k_z^i, -k_{||}^i) e^{i\vec{k}^r \cdot \vec{r}} \quad (2.65)$$

$$\vec{H}^t = \frac{1}{\omega \mu_1} t_s E_0 (0, k_z^t, -k_{||}^t) e^{i\vec{k}^t \cdot \vec{r}}, \quad (2.66)$$

con sus dominios como los del campo eléctrico. Por lo que la componente paralela del campo  $\vec{H}$  a la interfaz para el campo  $\vec{H}$  incidente, reflejado y transmitido, serán

$$H_y^i = \frac{1}{\omega \mu_0} k_z^i E_0 \quad (2.67)$$

$$H_y^r = -\frac{1}{\omega \mu_0} k_z^i E_0 r_s \quad (2.68)$$

$$H_y^t = \frac{1}{\omega \mu_1} k_z^t E_0 t_s \quad (2.69)$$

donde el subíndice nos indica que es la componente  $x$  del campo  $\vec{H}$ . La continuidad de las componentes paralelas a la interfaz plana  $z = 0$  de  $\vec{E}, \vec{H}$  implica el siguiente par de ecuaciones

$$E_x^i + E_x^r = E_x^t \quad (2.70)$$

$$H_y^i + H_y^r = H_y^t \quad (2.71)$$

que después de escribir todo en términos de  $E_0$  y tomar  $k_z^r = -k_z^i$ , se encuentran las amplitudes de reflexión y transmisión

$$r_s \equiv \frac{E_y^r}{E_0} = \frac{k_z^i - \frac{\mu_0}{\mu_1} k_z^t}{k_z^i + \frac{\mu_0}{\mu_1} k_z^t} \quad (2.72)$$

$$t_s \equiv \frac{E_y^t}{E_0} = \frac{2k_z^i}{k_z^i + \frac{\mu_0}{\mu_1}k_z^t} \quad (2.73)$$

donde  $k_z^t$  está dada por la relación de dispersión (2.56).

En el caso que  $\vec{E}$  sea paralelo al plano de incidencia,  $\vec{H}$  es perpendicular al plano de incidencia y le llamaremos polarización  $p$ , de la palabra en alemán *Parallel* paralela.

Si tomamos  $\vec{H}_i = H_0 \hat{e}_x e^{i\vec{k}^i \cdot \vec{r}}$ , por (2.39) se tiene que  $\vec{E}_i = \frac{1}{\omega \epsilon_0} H_0 (0, -k_z^i, k_{||}^i)$  por lo que  $E_y^i = -\frac{1}{\omega \epsilon_0} H_0 k_z^i$  y de manera similar para el campo transmitido y reflejado. Utilizando la condición de frontera que expresa que los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  deben ser continuos en la interfaz  $z = 0$ , se tiene que las amplitudes de reflexión y transmisión para esta polarización son:

$$r_p \equiv \frac{|\vec{E}_r|}{|\vec{E}_i|} = \frac{H_x^r}{H_0} = \frac{k_z^i - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} k_z^t}{k_z^i + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} k_z^t} \quad (2.74)$$

$$t_p \equiv \frac{|\vec{E}_t|}{|\vec{E}_i|} = \frac{\mu_1 k_0}{\mu_0 k_1} \frac{H_x^t}{H_0} = \frac{\mu_1 k_0}{\mu_0 k_1} \frac{2k_z^i}{k_z^i + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} k_z^t} \quad (2.75)$$

donde el subíndice  $p$  nos recuerda que se trata del caso de polarización  $p$ . Estas son las fórmulas de Fresnel, que expresan la amplitud de reflexión y la amplitud de transmisión de la onda reflejada y transmitida .

Aquí hemos terminado el problema de la refracción, reflexión y transmisión de una onda plana en una interfaz del vacío con un medio homogéneo, utilizando el método de las condiciones de frontera, deduciendo las leyes de la refracción, la relación de dispersión, y las fórmulas de Fresnel.



## Capítulo 3

# Ecuación integral para la reflexión de la Luz

En esta sección se pretende demostrar que es posible resolver el problema de reflexión de Fresnel, resolviendo una ecuación integral para el campo eléctrico. Esto surge por la siguiente pregunta, ¿Es posible resolver el problema de Fresnel sin utilizar condiciones de frontera ?, la respuesta es afirmativa, por lo que podremos concluir que el método de la ecuación integral es equivalente al problema de las condiciones de frontera de Fresnel, y esto provee una vía para atacar los problemas no locales, simplemente planteando la ecuación integral del problema no local, e intentar resolverla.

### 3.1. Reflexión de Fresnel, caso local, homogéneo é isotrópico

En esta sección se introducen las técnicas que más tarde se emplearán en resolver el problema de la reflexión de la luz en una superficie plana, en el caso no local, al plantear primeramente el problema del así llamado caso local del cálculo de la reflexión y transmisión de la luz sobre un semiespacio con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ . El caso local tiene por solución la bien conocida ley de Snell y las fórmulas de Fresnel de la sección anterior (2.72),(2.73),(2.74),(2.75).

El procedimiento es plantear el problema de reflexión local en forma de una ecuación integral para el campo eléctrico, utilizando el formalismo de la función de Green. Posteriormente resolver la ecuación integral por el método

### 32CAPÍTULO 3. ECUACIÓN INTEGRAL PARA LA REFLEXIÓN DE LA LUZ

de proponer una solución de prueba (ansatz) con parámetros libres, como vector de onda y polarización, y ajustar estos parámetros. La solución debe estar dada por las amplitudes de reflexión de Fresnel. La ley de Snell surge al suponer que la componente paralela a la interfaz  $z = 0$  del vector de onda, es continua.

La ecuación integral básica para el campo eléctrico está dada en términos del tensor de Green <sup>1</sup>

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_i + i\omega\mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{ind}(\vec{r}') d^3r' \quad (3.1)$$

donde  $\vec{E}_i$  es una onda externa incidente,  $\overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}')$  es la función de Green para el espacio libre,  $\vec{J}_{ind}(\vec{r})$  las corrientes inducidas. El objetivo es resolver esta ecuación integral. Tomaremos la siguiente representación de la función de Green [Tsang,2, pg. 56]

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_{\pm} \hat{k}_{\pm}) e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot (\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'_{\parallel}) + ik_z |z - z'|} d^2k_{\parallel} \\ - \frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde

$$\vec{k}_{\parallel} = k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y \quad (3.3)$$

$$\hat{k}_+ = \frac{1}{k_0} (k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y + k_z \hat{e}_z) \quad (3.4)$$

si

$$\hat{k}_- = \frac{1}{k_0} (k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y - k_z \hat{e}_z) \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>Denotaremos un tensor como  $\overleftrightarrow{A}$ , que en algebra lineal es el equivalente a una matriz cuadrada  $A$  de  $3 \times 3$ . Utilizaremos la notación de diádicas de tal forma que si  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son dos vectores  $a, b$ , entonces podemos formar la diádica  $\vec{b}\vec{a}$  que es equivalente al producto tensorial  $b^T a$ , que es una matriz de  $3 \times 3$  y donde  $T$  significa transpuesta. El producto punto se define como el producto escalar para vectores, i.e si  $\overleftrightarrow{A} \cdot \vec{x}$  es equivalente  $Ax$  en notación de matrices y de hecho  $\vec{x} \cdot \overleftrightarrow{A}$  es equivalente a  $x^T A$ , además si  $\overleftrightarrow{B}$  es otro tensor equivalente a la matriz  $B$  entonces  $\overleftrightarrow{B} \cdot \overleftrightarrow{A}$  es equivalente a  $BA$

### 3.1. REFLEXIÓN DE FRESNEL, CASO LOCAL, HOMOGENEO É ISOTRÓPICO 33

si  $z - z' < 0$ , y además

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}. \quad (3.6)$$

y donde este tensor de Green satisface la ecuación

$$\nabla \times \nabla \times \overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') - k_0^2 \overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \overleftrightarrow{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.7)$$

donde  $\overleftrightarrow{I}$  es el tensor identidad. La corriente inducida es tal que

$$\vec{J}_{ind}(\vec{r}) = -i\omega \vec{P}(\vec{r}) + \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) \quad (3.8)$$

donde

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi_E(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (3.9)$$

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_B(\vec{r}) \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.10)$$

y además

$$\chi_E = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \theta(z) \quad (3.11)$$

$$\chi_B = \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \right) \theta(z), \quad (3.12)$$

donde  $\epsilon_0$ , es la función dieléctrica de vacío,  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del vacío y  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$  corresponden a la función dieléctrica y permeabilidad magnética del semiespacio  $z > 0$ .  $\theta(z)$  es una función escalón tal que vale 1 para  $z > 0$  y cero en otro caso. Es en el uso de esta función donde se introduce el semiespacio. Sustituyendo estas expresiones y haciendo uso de la ley de Faraday en (3.8) se encuentra la corriente inducida en términos del campo eléctrico como

$$\vec{J}_{ind}(\vec{r}) = -i\omega \chi_E(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\chi_B(\vec{r})}{i\omega} \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{i\omega} \nabla \chi_B(\vec{r}) \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}). \quad (3.13)$$

Hay que hacer notar que ésta es una relación no local (en el espacio de Fourier dependerá tanto de la frecuencia temporal  $\omega$ , como del vector onda  $\vec{k}$ .) debido a que el campo magnético se expresa como derivadas del campo eléctrico.

Introduciendo la transformada inversa de Fourier para el campo eléctrico y sustituyendo en la ecuación anterior

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} \vec{E}(\vec{k}_{||}, p_z) e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} e^{ip_z z} d^2 k_{||} dp_z \quad (3.14)$$

se puede escribir

$$\vec{J}_{ind}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \int_{\mathbb{R}} dp_z e^{ip_z z} \left( \theta(z) \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) + \delta(z) \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z) \right) \cdot \vec{E}(\vec{k}_{||}, p_z) \quad (3.15)$$

donde  $\theta(z)$  es la función escalón que vale 1 para  $z < 0$  y cero en otro caso,  $\delta(z)$  es la función delta de Dirac. Se puede ver que hay una contribución volumétrica y una superficial, en donde

$$\overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) = \left( -i\omega\chi_E + \frac{\chi_B}{i\omega} k^2 \right) \overleftrightarrow{I} - \frac{\chi_B}{i\omega} \vec{k} \vec{k} \quad (3.16)$$

$$\overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z) = \frac{\chi_B}{\omega} ((\vec{k}_{||} + p_z \hat{e}_z) \hat{e}_z - p_z \overleftrightarrow{I}) \quad (3.17)$$

juegan el papel de conductividades no locales, y en donde

$$\vec{k} = \vec{k}_{||} + p_z \hat{e}_z \quad (3.18)$$

$$k^2 = k_{||}^2 + p_z^2. \quad (3.19)$$

Sustituyendo el resultado anterior y (3.2) en (3.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_i - \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2} \hat{e}_z \hat{e}_z \cdot \vec{J}_{ind}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \int_{\mathbb{R}^2} d^2 r_{||}' \int_{\mathbb{R}} dz' \\ &\quad \frac{i}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||}^s \frac{1}{k_z^s} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_{\pm}^s \hat{k}_{\pm}^s) e^{i\vec{k}_{||}^s \cdot (\vec{r}_{||} - \vec{r}_{||}') + ik_z^s |z - z'|} \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} \int_{\mathbb{R}} dp_z e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}'} e^{ip_z z'} \left( \theta(z') \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) + \delta(z') \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z) \right) \cdot \vec{E}(\vec{k}_{||}, p_z). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Haciendo las integrales en  $d^2 r_{||}$ ,  $d^2 k_{||}^s$  se simplifica como

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_i(\vec{r}) - \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2} \hat{e}_z \hat{e}_z \cdot \vec{J}_{ind}(\vec{r}) \\ &+ \frac{i\omega\mu_0}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \int_{\mathbb{R}} dz' \frac{i}{2k_z} (1 - \hat{k}_{\pm} \hat{k}_{\pm}) e^{ik_z |z - z'|} e^{ip_z z'} \\ &\quad \cdot \left( \theta(z') \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) + \delta(z') \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z) \right) \cdot \vec{E}(\vec{k}_{||}, p_z). \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.1. REFLEXIÓN DE FRESNEL, CASO LOCAL, HOMOGENEO É ISOTRÓPICO 35

Podemos evaluar la integral

$$I_1(z \geq 0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{i}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_{\pm} \hat{k}_{\pm}) \theta(z') e^{ik_z|z-z'|} e^{ip_z z'} dz', \quad (3.22)$$

donde se toma  $\hat{k}_+$  cuando  $z - z' > 0$  y  $\hat{k}_-$  en otro caso, así que para  $z \geq 0$  vale

$$I_1(z \geq 0) = \frac{1}{2k_z} \left( (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) \frac{e^{ip_z z} - e^{ik_z z}}{p_z - k_z} - (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \frac{e^{ip_z z}}{p_z + k_z} \right) \quad (3.23)$$

y para  $z < 0$  vale

$$I_1(z < 0) = -\frac{1}{2k_z} \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_- \right) \frac{e^{-ik_z z}}{p_z + k_z}. \quad (3.24)$$

La integral que va con el término de superficie debido la delta de Dirac en (3.21) es:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{i}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_{\pm} \hat{k}_{\pm}) \delta(z') e^{ik_z|z-z'|} e^{ip_z z'} dz' \quad (3.25)$$

que para  $z > 0$  vale

$$= \frac{i}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) e^{ik_z z} \quad (3.26)$$

y para  $z < 0$  vale

$$= \frac{i}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) e^{-ik_z z}. \quad (3.27)$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{e}_z \cdot \vec{J}_{ind}(\vec{r}_{||}, z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} \int_{\mathbb{R}} dp_z e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} e^{ip_z z} \\ &\left( \theta(z) \hat{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) + \delta(z) \hat{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z) \right) \cdot \vec{E}(\vec{k}_{||}, p_z) \end{aligned} \quad (3.28)$$

y por (3.17) se tiene que  $\hat{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z) = 0$ , por lo que este término de la corriente no contribuye en la integral, y por lo tanto

$$\hat{e}_z \cdot \vec{J}_{ind}(\vec{r}_{||}, z) = \quad (3.29)$$

36CAPÍTULO 3. ECUACIÓN INTEGRAL PARA LA REFLEXIÓN DE LA LUZ

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2k_{\parallel} \int_{\mathbb{R}} dp_z e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} e^{ip_z z} \theta(z) \hat{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}, p_z) \cdot \vec{E}(\vec{k}_{\parallel}, p_z).$$

Por lo que la ecuación para el campo eléctrico para  $z > 0$  toma la forma

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_i(\vec{r}) + \frac{i\omega\mu_0}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2k_{\parallel} \int_{\mathbb{R}} dp_z e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \\ &\quad \left( -\frac{e^{ip_z z}}{k_0^2} \theta(z) \hat{e}_z \hat{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}, p_z) \right. \\ &+ \frac{1}{2k_z} \left( (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) \frac{e^{ip_z z} - e^{ik_z z}}{p_z - k_z} - (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \frac{e^{ip_z z}}{p_z + k_z} \right) \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}, p_z) \\ &\quad \left. + \frac{i}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) e^{ik_z z} \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}, p_z) \right) \cdot \vec{E}(\vec{k}_{\parallel}, p_z). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para  $z < 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_i(\vec{r}) + \frac{i\omega\mu_0}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2k_{\parallel} \int_{\mathbb{R}} dp_z e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \\ &\quad \left( -\frac{1}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \frac{e^{-ik_z z}}{p_z + k_z} \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}, p_z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}, p_z) e^{-ik_z z} \right) \cdot \vec{E}(\vec{k}_{\parallel}, p_z). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Aquí se podría pensar que se tienen dos ecuaciones independientes, una para  $z > 0$  y otra para  $z < 0$ , pero puesto que en esta expresión el integrando no depende del factor  $e^{ip_z z}$ , se puede identificar como una transformada inversa de Fourier evaluada cuando  $z = 0$ , por lo que en realidad es un término que se evalúa en  $z = 0$ , o bien lo que llamaremos un término de superficie, y por lo tanto no es otra ecuación sino una condición de frontera para el campo eléctrico  $z < 0$  que se puede calcular una vez que se encuentra la solución de (3.30).

Para la representación mixta de Fourier del campo incidente, que consideraremos solo en el caso particular que el campo incidente sea una onda plana, se tendría que

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel} + ik_z z} \hat{e}_i \quad (3.32)$$

### 3.1. REFLEXIÓN DE FRESNEL, CASO LOCAL, HOMOGENEO É ISOTRÓPICO 37

donde  $\hat{e}^i$  es la polarización de la onda incidente y puede ser  $\hat{e}_x$  para polarización  $s$ , ó  $\hat{e}_y$  para polarización  $p$ . En una representación mixta se tendría que

$$\vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\vec{r}_{||} \cdot (\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i)} d^2 k_{||} e^{ik_z^i z} \hat{e}^i = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) e^{ik_z^i z} \hat{e}^i. \quad (3.33)$$

Si consideramos que en una representación mixta de Fourier el campo eléctrico se puede escribir como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \vec{E}(\vec{k}_{||}, z), \quad (3.34)$$

en tal caso las ecuaciones en esa representación toma la forma para  $z > 0$

$$\begin{aligned} \vec{E}^+(\vec{k}_{||}, z) &= \vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) + \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_z \left( -\hat{e}_z \hat{e}_z \frac{e^{ip_z z}}{k_0^2} \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) \right. \\ &+ \frac{1}{2k_z} \left( (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) \frac{e^{ip_z z} - e^{ik_z z}}{p_z - k_z} - (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \frac{e^{ip_z z}}{p_z + k_z} \right) \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) \\ &\left. + \frac{i}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) e^{ik_z z} \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z) \right) \cdot \vec{E}(\vec{k}_{||}, p_z). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Como se mencionó anteriormente una vez conocido el campo para  $z > 0$ , el campo para  $z < 0$  está dado en términos (3.31) que se reduce a

$$\begin{aligned} \vec{E}^-(\vec{k}_{||}, z) &= \vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) + \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \frac{1}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) e^{-ik_z z} \\ &\int_{\mathbb{R}} dp_z \left( -\frac{1}{p_z + k_z} \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) + i \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z) \right) \cdot \vec{E}(\vec{k}_{||}, p_z). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para calcular esta integral, supondremos que tanto  $k_z$  como  $k_z^f$  tienen una pequeña parte imaginaria positiva, y al evaluar la integral por los métodos usuales de variable compleja, tomando como contorno un semicírculo de radio tendiendo a infinito, se tendría que el polo  $p_z = -k_z$  quedaría fuera de la región de integración, por lo que no contribuye a la integral.

Ahora, para resolver estas ecuaciones integrales, lo que se hará es proponer una solución de prueba, o *ansatz*, con parámetros libres  $t, \hat{e}^f, k_z^f$  amplitud,

### 38CAPÍTULO 3. ECUACIÓN INTEGRAL PARA LA REFLEXIÓN DE LA LUZ

polarización efectivas y componente  $z$  del vector de onda efectivo respectivamente.  $k_z^f$  es tal que  $\vec{k}^f = \vec{k}_{\parallel}^i + k_z^f \hat{e}_z$ , donde se hace uso de la ley de Snell que expresa el hecho que la componente paralela a la interfaz del vector de onda sea continua.

Esté método será el que se utilizará más adelante para resolver el problema no local de la reflexión y transmisión de la luz en un sistema coloidal de partículas esféricas.

Como la ecuación (3.35) está definida para  $z > 0$ , entonces podemos proponer una solución de la forma

$$\vec{E}(\vec{k}_{\parallel}, z) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel}^i) t \theta(z) e^{ik_z^f z} \hat{e}^f \quad (3.37)$$

$$\vec{E}(\vec{k}_{\parallel}, p_z) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel}^i) t \int_0^{\infty} e^{-iz(p_z - k_z^f)} dz \hat{e}^f \quad (3.38)$$

$$\vec{E}(\vec{k}_{\parallel}, p_z) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel}^i) t \frac{1}{i(p_z - k_z^f)} \hat{e}^f, \quad (3.39)$$

donde  $\theta(z)$  es la función escalón, y donde al evaluar la integral en  $d^2 k_{\parallel}$  en la ecuación integral (3.21), el término  $\delta(\vec{k}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel}^i)$  implica la continuidad de la componente tangencial del vector de onda, esto es la ley de Snell, es decir se puede evaluar libremente  $\vec{k}_{\parallel} = \vec{k}_{\parallel}^i$ , por otro lado  $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_{\parallel}^2} = k_z^i$  donde se evaluó  $k_{\parallel} = k_{\parallel}^i$ ,  $k_z^f$  es la componente  $z$  del vector de onda efectivo,  $\hat{e}^f$  es la polarización efectiva del campo transmitido,  $t$  la amplitud de transmisión.

Sustituyendo esta propuesta del campo transmitido en (3.35) se tiene que

$$\begin{aligned} t e^{ik_z^f z} \hat{e}^f &= e^{ik_z^i z} \hat{e}^i + \frac{i\omega\mu_0}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} dp_z \left( -\hat{e}_z \hat{e}_z \frac{e^{ip_z z}}{k_0^2} \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, p_z) \right. \\ &+ \frac{1}{2k_z^i} \left( (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \frac{e^{ip_z z}}{p_z - k_z^i} - (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \frac{e^{ip_z z}}{p_z + k_z^i} \right) \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, p_z) \\ &\left. + \frac{i}{2k_z^i} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) e^{ik_z^i z} \cdot \left( \frac{i}{p_z - k_z^i} \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, p_z) + \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}^i, p_z) \right) \right) \cdot t \frac{1}{(p_z - k_z^f)} \hat{e}^f \end{aligned} \quad (3.40)$$

y hemos definido

$$\hat{k}^i = \frac{1}{k_0} (\vec{k}_{\parallel}^i + k_z^i \hat{e}_z) \quad (3.41)$$

### 3.1. REFLEXIÓN DE FRESNEL, CASO LOCAL, HOMOGENEO É ISOTRÓPICO 39

$$\hat{k}^r = \frac{1}{k_0}(\vec{k}_{\parallel}^i - k_z^i \hat{e}_z) \quad (3.42)$$

ahora evaluando las integrales (3.40) por el teorema del residuo en variable compleja, se encuentran dos ecuaciones de consistencia, la primera corresponde al factor  $e^{ik_z^f z}$  y la segunda al factor  $e^{ik_z^i z}$ , la primera es:

$$\hat{e}^f = i\omega\mu_0 \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} + \frac{(\overleftarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \frac{(\overleftarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \cdot \overleftarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) \cdot t\hat{e}^f \quad (3.43)$$

y si utilizamos la ley de Snell, es decir,  $\vec{k}_{\parallel}^i = \vec{k}_{\parallel}^r = \vec{k}_{\parallel}^f$  tenemos que

$$\frac{(\overleftarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \frac{(\overleftarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} = \frac{1}{k_z^{f2} - k_z^{i2}} \left( \overleftarrow{I} - \frac{1}{k_0^2} \vec{k}^f \vec{k}^f \right) + \frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2}, \quad (3.44)$$

por lo tanto tenemos el siguiente resultado

**Resultado 1** Las relaciones de consistencia para al ansatz  $t\hat{e}^f e^{i\vec{k}^f \cdot \vec{r}}$  en el caso local y cuando  $\vec{k}_{\parallel}^f = \vec{k}_{\parallel}^i$  para la dependencia en  $e^{ik_z^f z}$  es:

$$\hat{e}^f = i\omega\mu_0 \frac{1}{k_z^{f2} - k_z^{i2}} \left( \overleftarrow{I} - \frac{1}{k_0^2} \vec{k}^f \vec{k}^f \right) \cdot \overleftarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) \cdot t\hat{e}^f. \quad (3.45)$$

Esta expresión se puede ver como un sistema lineal de ecuaciones homogéneo para cada componente de la polarización, para que exista solución distinta de cero, debe pedirse que el determinante sea cero, este hecho implica que la relación de dispersión esté dada por

$$\det \left[ \overleftarrow{I} - \frac{i\omega\mu_0}{k_z^{f2} - k_z^{i2}} \left( \overleftarrow{I} - \frac{1}{k_0^2} \vec{k}^f \vec{k}^f \right) \cdot \overleftarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) \right] = 0 \quad (3.46)$$

donde

$$\vec{k}^f = \vec{k}_{\parallel}^i + k_z^f \hat{e}_z \quad (3.47)$$

y la ecuación de consistencia para la dependencia  $e^{ik_z z}$  que equivale al teorema de extinción Edwald Oseen :

$$\hat{e}^i = \frac{\omega\mu_0}{2k_z^i} (\overleftarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \left( \overleftarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) + \frac{i}{k_z^f - k_z^i} \overleftarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) \right) \cdot t\hat{e}^f. \quad (3.48)$$

40CAPÍTULO 3. ECUACIÓN INTEGRAL PARA LA REFLEXIÓN DE LA LUZ

donde tomando el producto escalar de  $\hat{e}^i$  por la izquierda en (3.48) se simplifica y se puede encontrar la amplitud  $t$  como

$$t = \frac{2k_z^i}{i\omega\mu_0} \frac{k_z^f - k_z^i}{\hat{e}^i \cdot \left( \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}^i, k_z^f) - i(k_z^f - k_z^i) \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}^i, k_z^f) \right) \cdot \hat{e}^f} \quad (3.49)$$

donde

$$\overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) = \left( -i\omega\chi_E + \frac{\chi_B}{i\omega} k^2 \right) \overleftrightarrow{I} - \frac{\chi_B}{i\omega} \vec{k} \vec{k} \quad (3.50)$$

$$\overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z) = \frac{\chi_B}{\omega} \left( (\vec{k}_{||} + p_z \hat{e}_z) \hat{e}_z - p_z \overleftrightarrow{I} \right) \quad (3.51)$$

$$\vec{k} = \vec{k}_{||} + p_z \hat{e}_z \quad (3.52)$$

$$k^2 = k_{||}^2 + p_z^2 \quad (3.53)$$

En este caso, el campo eléctrico en realidad solo depende del valor del campo  $\vec{E}$  en  $z = 0$ , por lo que solo es necesario conocer el campo  $\vec{E}$  en ( $z = 0$ ), (como se puede ver del último término de la ecuación (3.40) en la dependencia  $e^{ik_z^i z}$ ) para determinar el campo  $\vec{E}$  para  $z < 0$ , este es el conocido resultado que el campo reflejado está dado en términos de la impedancia superficial del campo electromagnético definida como el cociente de la amplitud del campo eléctrico dividida por la amplitud del campo magnético evaluadas en la superficie  $z = 0$ .

Para calcular el campo reflejado, sustituimos (3.39) en (3.36), que es la expresión para el campo reflejado dada por términos que solo dependen del valor de los campos en la superficie. y evaluando la integral por el teorema del residuo de variable compleja encontramos que

$$\vec{E}^-(\vec{k}_{||}, z) = \vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) + (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) \frac{i\omega\mu_0}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) e^{-ik_z z}. \quad (3.54)$$

$$\left( -\frac{\overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, k_z^f)}{k_z^f + k_z} + i \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, k_z^f) \right) \cdot t \hat{e}^f \quad (3.55)$$

### 3.1. REFLEXIÓN DE FRESNEL, CASO LOCAL, HOMOGENEO É ISOTRÓPICO 41

o bien si  $\vec{E}(\vec{k}_{||}, z) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) \vec{E}(z)$  se tiene que para  $z < 0$

$$\vec{E}^-(z) = e^{ik_z^i z} \hat{e}^i - \frac{\omega\mu_0}{2k_z^i} (\overleftarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \left( \overleftarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}^i, k_z^f) + i \frac{\overleftarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}^i, k_z^f)}{k_z^f + k_z^i} \right) \cdot t \hat{e}^f e^{-ik_z^i z} \quad (3.56)$$

Como este cálculo representa un resultado importante de la tesis, lo enunciaremos como resultado

**Resultado 2** *Si la corriente inducida, en una representación mixta  $\vec{J}_{ind}(\vec{k}_{||}, z)$  se puede expresar como*

$$\vec{J}_{ind}(\vec{k}_{||}, z) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{\mathbb{R}} dp_z e^{ip_z z} \left( \theta(z) \overleftarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) + \delta(z) \Sigma_s(\vec{k}_{||}, p_z) \right) \cdot \vec{E}(\vec{k}_{||}, p_z) \quad (3.57)$$

entonces cuando el campo transmitido es de la forma

$$\vec{E}_e(\vec{k}_{||}, z) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) t \theta(z) e^{ik_z^f z} \hat{e}^f \quad (3.58)$$

el campo eléctrico producido por las corrientes inducidas, y diferente del campo externo, está dado por la expresión

$$\vec{E}_I(\vec{k}_{||}, z) = i\omega\mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \overleftarrow{G}_0(\vec{k}_{||}, z, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{ind}(\vec{r}') d^3 r' \quad (3.59)$$

para  $z > 0$  es

$$\begin{aligned} \vec{E}_I(\vec{k}_{||}, z) &= i\omega\mu_0 \frac{1}{k_z^{f2} - k_z^i2} \left( \overleftarrow{I} - \frac{1}{k_0^2} \vec{k}^f \vec{k}^f \right) \cdot \overleftarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}^i, k_z^f) \cdot t \hat{e}^f e^{ik_z^f z} \\ &\quad - \frac{\omega\mu_0}{2k_z^i} (\overleftarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \left( \overleftarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}^i, k_z^f) + i \frac{\overleftarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}^i, k_z^f)}{k_z^f - k_z^i} \right) \cdot t \hat{e}^f e^{ik_z^i z}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

y para  $z < 0$

$$\vec{E}_I(\vec{k}_{||}, z) = -\frac{\omega\mu_0}{2k_z^i} (\overleftarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \left( \overleftarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}^i, k_z^f) + i \frac{\overleftarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}^i, k_z^f)}{k_z^f + k_z^i} \right) \cdot t \hat{e}^f e^{-ik_z^i z} \quad (3.61)$$

## 3.2. Relaciones de dispersión

Lo que prosigue del cálculo es resolver las ecuaciones de consistencia (3.46),(3.48), lo cual a su vez implica la solución de (3.1). Para la primera (3.46), recordando (3.16), (3.17), se pueden escribir como una ecuación matricial de la forma  $A(k_z^i)\hat{e}^f = 0$ , para que existan soluciones se debe pedir que el determinante sea cero, esta condición es la relación de dispersión. Por cada solución de la relación de dispersión se tendrá una polarización efectiva.

La conductividad no local para el bulto y la superficie están dadas por

$$\overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}, p_z) = \left( -i\omega\chi_E + \frac{\chi_B}{i\omega}(k_{||}^2 + p_z^2) \right) \overleftrightarrow{I} - \frac{\chi_B}{i\omega}(\vec{k}_{||} + p_z\hat{e}_z)(\vec{k}_{||} + p_z\hat{e}_z) \quad (3.62)$$

$$\overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z) = \frac{\chi_B}{\omega}(\vec{k}_{||}\hat{e}_z + p_z\hat{e}_z\hat{e}_z - p_z\overleftrightarrow{I}). \quad (3.63)$$

La primera ecuación de consistencia es (3.45)

$$\hat{e}_f = i\omega\mu_0 \left( -\frac{1}{k_0^2}\hat{e}_z\hat{e}_z + \frac{(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i\hat{k}^i)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \frac{(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r\hat{k}^r)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}^i, k_z^f) \cdot \hat{e}_f \quad (3.64)$$

ó su equivalente (3.46) , que después de un poco de álgebra se escribe como

$$\hat{e}_f = \frac{i\omega\mu_0}{k_z^{f2} - k_z^{i2}} \left( \overleftrightarrow{I} - \frac{1}{k_0^2}\vec{k}^f\vec{k}^f \right) \cdot \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{||}^i, k_z^f) \cdot \hat{e}_f. \quad (3.65)$$

Utilizaremos la base  $\{\hat{e}_x, \hat{k}_\perp^f, \hat{k}^f\}$ . En esta base tenemos que

$$\overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}^f) = \sigma_1(\hat{e}_x\hat{e}_x + \hat{k}_\perp^f\hat{k}_\perp^f) \quad (3.66)$$

donde

$$\sigma_1 = -i\omega\chi_E + \frac{\chi_B}{i\omega}k_1^2 \quad (3.67)$$

$$k_1^2 = (k_{||}^i)^2 + k_z^{f2} \quad (3.68)$$

$$k_0^2 = (k_{||}^i)^2 + k_z^{i2} \quad (3.69)$$

y por lo tanto la relación de dispersión en esta base queda como

$$\det \left[ \overleftrightarrow{T} - \frac{i\omega\mu_0\sigma_1}{k_z^f{}^2 - k_z^i{}^2} (\hat{e}_x\hat{e}_x + \hat{k}_\perp^f\hat{k}_\perp^f) \right] = 0 \quad (3.70)$$

y por lo tanto la ecuación tanto para los modos  $\hat{e}_x$  como para los modos  $\hat{k}_\perp^f$  es

$$\frac{i\omega\mu_0\sigma_1}{k_z^f{}^2 - k_z^i{}^2} = 1. \quad (3.71)$$

Sustituyendo (3.67), (3.11), (3.12) e igualando a uno, se obtiene la relación de dispersión

$$k_\parallel^i{}^2 + k_z^f{}^2 = \omega^2\mu_1\epsilon_1. \quad (3.72)$$

Que es la relación de dispersión que se hubiera encontrado para el bulto de un material con funciones dieléctricas  $\epsilon_1, \mu_1$ .

### 3.3. Amplitud de transmisión

La amplitud de transmisión está dado por la expresión (3.49) que resulta de proyectar la ecuación de consistencia (3.48) por  $\hat{e}^i$

$$t = \frac{2k_z^i}{i\omega\mu_0} \frac{k_z^f - k_z^i}{\hat{e}^i \cdot \left( \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_\parallel^i, k_z^f) - i(k_z^f - k_z^i) \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_\parallel^i, k_z^f) \right) \cdot \hat{e}^f} \quad (3.73)$$

para escribir de manera más compacta, podemos definir el tensor  $\overleftrightarrow{\sigma}_l(\vec{k}_\parallel^i; k_z^i, k_z^f)$  como

$$\overleftrightarrow{\sigma}_l(\vec{k}_\parallel^i; k_z^i, k_z^f) = \left( \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_\parallel^i, k_z^f) - i(k_z^f - k_z^i) \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_\parallel^i, k_z^f) \right) \quad (3.74)$$

entonces el coeficiente de transmisión puede escribirse como

$$t = \frac{2k_z^i}{i\omega\mu_0} \frac{k_z^f - k_z^i}{\hat{e}^i \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_l(\vec{k}_\parallel^i; k_z^i, k_z^f) \cdot \hat{e}^f} \quad (3.75)$$

que es un número complejo, y es posible calcularlo al reemplazar el valor de las conductividades de bulto y de superficie (3.51),(3.50) en esta expresión.

44CAPÍTULO 3. ECUACIÓN INTEGRAL PARA LA REFLEXIÓN DE LA LUZ

De manera equivalente utilizaremos la relación de consistencia en forma matricial, para el cálculo del coeficiente de transmisión en cada polarización, a manera de ilustración.

Para calcular la amplitud de transmisión usamos (3.48), y por (3.17) se tiene que

$$\overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) = \frac{\chi_B}{\omega} \left[ \hat{k}^f \hat{e}_z - k_z^f (\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_{\perp}^f \hat{k}_{\perp}^f + \hat{k}^f \hat{k}^f) \right] \quad (3.76)$$

se encuentra que la matriz para (3.48) es

$$\begin{aligned} \frac{\omega \mu_0}{2k_z^i} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \left( \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) + i \frac{\overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f)}{(k_z^f - k_z^i)} \right) = \\ \left( -\frac{\omega \mu_0 \chi_B}{2k_z^i \omega} k_z^f + \frac{i \omega \mu_0 \sigma_1}{2k_z^i (k_z^f - k_z^i)} \right) \hat{e}_x \hat{e}_x + \\ \left( -\frac{\omega \mu_0 \chi_B}{2k_z^i \omega} \frac{k_z^i (k_{\parallel}^{i2} + k_z^{f2})}{k_0 k_1} + \frac{i \omega \mu_0 \sigma_1}{2k_z^i (k_z^f - k_z^i)} \frac{(k_{\parallel}^{i2} + k_z^f k_z^i)}{k_0 k_1} \right) \hat{k}_{\perp}^i \hat{k}_{\perp}^f \end{aligned} \quad (3.77)$$

que se simplifica como

$$\begin{aligned} \frac{\omega \mu_0}{2k_z^i} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \left( \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) + i \frac{\overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f)}{(k_z^f - k_z^i)} \right) = \\ \frac{1}{2k_z^i} \left( \frac{\mu_0}{\mu_1} k_z^f + k_z^i \right) \hat{e}_x \hat{e}_x + \\ \frac{1}{2k_z^i} \left( \frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{k_1}{k_0} k_z^i + \frac{k_0}{k_1} k_z^f \right) \hat{k}_{\perp}^i \hat{k}_{\perp}^f \end{aligned} \quad (3.78)$$

y de esta manera

$$\begin{aligned} \hat{e}^i \cdot \left( \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) - i (k_z^f - k_z^i) \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) \right) \\ = \frac{(k_z^f - k_z^i)}{i \omega \mu_0} \left( \left( \frac{\mu_0}{\mu_1} k_z^f + k_z^i \right) (\hat{e}^i \cdot \hat{e}_x) \hat{e}_x + \left( \frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{k_1}{k_0} k_z^i + \frac{k_0}{k_1} k_z^f \right) (\hat{e}^i \cdot \hat{k}_{\perp}^i) \hat{k}_{\perp}^f \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Primero haremos el cálculo cuando el campo está en polarización  $s$ , es decir,  $\hat{e}^i = \hat{e}_x$ . La relación de dispersión (3.71) implica al sustituirse en (3.65)

que  $\hat{e}^f = \hat{e}_x$ , en este caso la segunda ecuación de consistencia (3.65) y utilizando la fórmula (3.78) implica

$$\hat{e}_x = \frac{1}{2k_z^i} \left( \frac{\mu_0}{\mu_1} k_z^f + k_z^i \right) \hat{e}_x t_s \quad (3.80)$$

que es una ecuación para  $t_s$  que es la amplitud de transmisión para el campo en polarización  $s$ . Sustituyendo (3.12),(3.71) encontramos que

$$t_s = \frac{2k_z^i}{k_z^i + \frac{\mu_0}{\mu_1} k_z^f}. \quad (3.81)$$

que corresponde a la ecuación (2.73) si uno identifica  $k_z^f$  con  $k_z^1$ .

Para la otra polarización, la relación de dispersión (3.71) al sustituirse en (3.45), implica que  $\hat{e}^f = \hat{k}_\perp^f$ . El campo incidente se escribe como  $\hat{e}^i = \hat{k}_\perp^i$ . En este caso la segunda ecuación de consistencia (3.48) se escribe como

$$\hat{k}_\perp^i = \frac{1}{2k_z^i} \left( \frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{k_1}{k_0} k_z^i + \frac{k_0}{k_1} k_z^f \right) t_p \hat{k}_\perp^i \quad (3.82)$$

y por lo tanto

$$t_p = \frac{2k_z^i}{\frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{k_1}{k_0} k_z^i + \frac{k_0}{k_1} k_z^f} \quad (3.83)$$

que se puede escribir como

$$t_p = \frac{\mu_1 k_0}{\mu_0 k_1} \frac{2k_z^i}{k_z^i + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} k_z^f} \quad (3.84)$$

esta fórmula corresponde a la ecuación (2.75) con  $k_z^f = k_z^1$ .

### 3.4. Amplitud de reflexión caso local

Para encontrar el campo reflejado utilizamos (3.56)

$$\vec{E}(z) = e^{ik_z^i z} \hat{e}^i - \frac{\omega \mu_0}{2k_z^i} (\overleftarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \left( \overleftarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_\parallel^i, k_z^f) + i \frac{\overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_\parallel^i, k_z^f)}{k_z^f + k_z^i} \right) \cdot \hat{e}^f t e^{-ik_z^i z} \quad (3.85)$$

donde utilizando la definición de la conductividad no local del semiespacio

$$\overleftrightarrow{\sigma}_l(\vec{k}_{\parallel}^i; k_z^i, k_z^f) = \left( \overleftrightarrow{\Sigma}_v(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) - i(k_z^f - k_z^i) \overleftrightarrow{\Sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}^i, k_z^f) \right) \quad (3.86)$$

el campo eléctrico de reflexión se puede escribir de manera compacta como:

$$\vec{E}(z) = e^{ik_z^i z} \hat{e}^i + \frac{(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_l(\vec{k}_{\parallel}^i; -k_z^i, k_z^f) \cdot \hat{e}^f \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^f + k_z^i} e^{-ik_z^i z}}{\hat{e}^i \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_l(\vec{k}_{\parallel}^i; k_z^i, k_z^f) \cdot \hat{e}^f} \quad (3.87)$$

si consideramos el caso en que no tenemos respuesta magnética, se tiene que la conductividad no local del semiespacio se escribe como

$$\overleftrightarrow{\sigma}_l(\vec{k}_{\parallel}^i; k_z^i, k_z^f) = -i\omega\chi_E(\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_{\perp}^i \hat{k}_{\perp}^f) \quad (3.88)$$

tenemos que la amplitud de reflexión para polarización  $s$ ,  $\hat{e}^i = \hat{e}_x$

$$r_s = \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^i + k_z^f} \quad (3.89)$$

cuando el semiespacio no tiene respuesta magnética corresponde a la ecuación (2.72). En el caso de polarización  $p$ ,  $\hat{e}^i = \hat{k}_{\perp}^i$  se tiene que

$$r_p = \frac{\hat{k}_{\perp}^r \cdot \hat{k}_{\perp}^f \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^i + k_z^f}}{\hat{k}_{\perp}^i \cdot \hat{k}_{\perp}^f} \quad (3.90)$$

es equivalente a la ecuación (2.74) cuando no hay magnetización.

Que es una expresión que posteriormente será de utilidad y es equivalente a la fórmula usual de Fresnel sin magnetización, por lo pronto aquí la dejaremos, y procederemos con el cálculo de la reflectancia.

En la expresión (3.85) para el campo reflejado, aparece toda la información necesaria, el primer término corresponde a la onda incidente, en el segundo se tienen una matriz que proyecta un vector transversalmente en la dirección de la onda reflejada  $\vec{k}^r = \vec{k}_{\parallel}^i - k_z^i \hat{e}_z$  y una matriz que posteriormente se puede identificar como el tensor generalizado de conductividad no local del semiespacio que multiplica a la polarización efectiva del campo eléctrico transmitido y a la amplitud de transmisión multiplicada por el factor  $e^{-ik_z^i z}$ .

Es el segundo término del lado derecho de la ecuación (3.85) el que determina el campo reflejado, tanto su amplitud como polarización, y se puede

ver que es el calculado en (3.78) si reemplazamos  $k_z^i \rightarrow -k_z^i$  y por lo tanto  $\vec{k}^i \rightarrow \vec{k}^r$ ,  $\vec{k}_\perp^i \rightarrow \vec{k}_\perp^r$ , y por lo tanto el segundo término de (3.85) se puede evaluar dando el resultado

$$\vec{E}(z; \hat{e}^i) = e^{ik_z^i z} \hat{e}^i - \quad (3.91)$$

$$\left( \frac{1}{2k_z^i} \left( \frac{\mu_0}{\mu_1} k_z^f - k_z^i \right) \hat{e}_x \hat{e}_x + \frac{1}{2k_z^i} \left( -\frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{k_1}{k_0} k_z^i + \frac{k_0}{k_1} k_z^f \right) \hat{k}_\perp^r \hat{k}_\perp^f \right) \cdot \hat{e}^f t e^{-ik_z^i z}.$$

donde hemos agregado la dependencia con la polarización de la onda incidente en la notación del campo eléctrico como una segunda variable. Cuando  $\hat{e}^i = \hat{e}_x$  entonces la relación de consistencia (3.48) implica que  $\hat{e}^f = \hat{e}_x$

$$\vec{E}(z; \hat{e}_x) = e^{ik_z^i z} \hat{e}_x - \frac{t_s}{2k_z^i} \left( \frac{\mu_0}{\mu_1} k_z^f - k_z^i \right) \hat{e}_x e^{-ik_z^i z}. \quad (3.92)$$

donde el segundo parametro de  $\vec{E}(z; \hat{e}_x)$  indica la dependencia respecto de la polarización de la onda incidente. Sustituyendo (3.81) para  $t_s$  encontramos que

$$r_s = \frac{k_z^i - \frac{\mu_0}{\mu_1} k_z^f}{k_z^i + \frac{\mu_0}{\mu_1} k_z^f} \quad (3.93)$$

esta fórmula coincide con (2.72) donde el subíndice  $s$  indica que son las amplitudes para el problema de reflexión y transmisión en polarización  $s$ . Para polarización  $p$ , cuando  $\hat{e}^i = \hat{k}_\perp^i$  entonces la relación de consistencia (3.48) junto con la relación de dispersión (3.72) implica  $\hat{e}^f = \hat{k}_\perp^f$

$$\vec{E}(z; \hat{k}_\perp^i) = e^{ik_z^i z} \hat{k}_\perp^i - \frac{t_p}{2k_z^i} \left( -\frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{k_1}{k_0} k_z^i + \frac{k_0}{k_1} k_z^f \right) \hat{k}_\perp^i e^{-ik_z^i z} \quad (3.94)$$

donde la segunda variable del campo eléctrico nos indica la dependencia respecto a la polarización de la onda incidente.

Sustituyendo (3.83) para  $t_p$  encontramos la amplitud de reflexión como

$$r_p = \frac{\frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{k_1}{k_0} k_z^i - \frac{k_0}{k_1} k_z^f}{\frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{k_1}{k_0} k_z^i + \frac{k_0}{k_1} k_z^f} \quad (3.95)$$

esta fórmula coincide con la ecuación (2.74).

### 3.5. Comentario

En este cálculo utilizando las funciones de Green, estas funciones de Green no amortiguan en infinito, es decir no decaen a cero exponencialmente en infinito, sino que oscilan. Para el problema de reflexión de Fresnel, es decir el problema de reflexión de la luz por un semiespacio de un material homogéneo e isotrópico, por hecho de tratarse de ondas planas, la energía total asociada a una onda plana es infinita, y por lo tanto también la energía total asociada a la solución será infinita, sin embargo la densidad de energía es finita.

# Capítulo 4

## Conductividad no local de la esfera

El propósito de este capítulo es el de introducir el concepto del tensor generalizado de conductividad no local de una esfera aislada, con el fin de construir una teoría de medio efectivo para un sistema coloidal de esferas colocadas al azar en un semiespacio, y luego calcular las amplitudes de reflexión y transmisión cuando tuviésemos una onda plana incidente sobre tal semiespacio.

La idea del tensor generalizado de conductividad no local, tal y como lo vamos a definir, es la de conocer las corrientes inducidas dentro de la esfera producidas por un campo eléctrico externo suponiendo que la respuesta de estas corrientes es lineal al campo eléctrico externo.

El procedimiento de cálculo de las componentes del tensor generalizado de conductividad no local es un resultado nuevo y aportación de esta tesis, por el enfoque utilizado, que es el de calcular las corrientes internas inducidas, y relacionar su transformada de Fourier con las componentes del tensor de conductividad no local. Supondremos una dependencia armónica en el tiempo, es decir todos los campos van multiplicados por la fase  $e^{-i\omega t}$ , y por lo tanto tendremos una dependencia en la frecuencia temporal. La respuesta lineal más general se puede escribir como

$$\vec{J}_I(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) \cdot \vec{E}_e(\vec{r}') d^3r' \quad (4.1)$$

en donde  $J_I(\vec{r})$  representa la corriente inducida,  $\vec{E}_e(\vec{r}')$  es el campo eléctrico de excitación ó externo, y  $\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}, \vec{r}'; \omega)$  es un tensor que llamaremos el

tensor de conductividad generalizado no local de la esfera, es no local porque depende tanto de la frecuencia temporal como del vector de propagación del campo eléctrico externo, para ver más acerca de la no localidad ver por ejemplo [Fuchs,1]. En lo sucesivo omitiremos la dependencia explícita de la frecuencia para tener una notación compacta. Es generalizado porque incluye todas las posibles corrientes inducidas dentro de la esfera, ya sean corrientes de polarización eléctrica ó corrientes de magnetización dadas por la ecuación (2.12). Basándonos en esta definición, podríamos identificar a las corrientes de polarización como corrientes abiertas (tales que su divergencia no es cero), mientras que a las corrientes de magnetización como corrientes cerradas (tales que su divergencia es cero).

El subíndice  $I$  nos indica que se trata de las corrientes inducidas dentro de la esfera. Este método puede extenderse a otro tipo de inclusiones con otras geometrías, lo que no modifica la definición del tensor generalizado de conductividad no local, pero si el valor de sus componentes.

A continuación procedemos a calcular el tensor de conductividad no local. Dicho tensor de conductividad satisface la siguiente ecuación integral [Alejandro,1], que es una relación implícita ó ecuación de Lippmann-Schwinger

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) &= \sigma_s(\vec{r}) \left( \delta(\vec{r} - \vec{r}') \overleftrightarrow{I} \right. \\ &\left. + i\omega\mu_0 \int_{V_s} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Es posible resolver esta ecuación integral, como está hecho en [Tsang,1] y ésta sería la manera canónica de encontrar el tensor generalizado de conductividad no local. Aquí se propone un método alternativo, para encontrar las componentes de dicho tensor .

Consideramos que el campo eléctrico externo sobre una esfera en el origen tiene la forma

$$\vec{E}_e(\vec{r}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \hat{e}_p \quad (4.3)$$

donde se considera que el campo eléctrico externo tiene amplitud uno, y por lo tanto la corriente inducida dentro de la esfera será:

$$\vec{J}_I(\vec{r}; \hat{e}_p) = \int_{\mathbb{R}^3} \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{e}_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}'} d^3r' \quad (4.4)$$

donde hemos expresado en la segunda variable de  $\vec{J}_I(\vec{r}; \hat{e}_p)$  la dependencia con la polarización del campo eléctrico externo.

Definiremos el par de transformadas de Fourier <sup>1</sup> para cada coordenada del tensor generalizado de conductividad no local como

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}) e^{i\vec{p}' \cdot \vec{r}'} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}} d^3p d^3p'. \quad (4.5)$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}', \vec{r}) e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{r}'} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} d^3r d^3r'. \quad (4.6)$$

Si tomamos la transformada de Fourier en (4.4) encontramos que

$$\vec{J}_I(\vec{p}'; \hat{e}_p) = \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_p. \quad (4.7)$$

Aquí por cada vector de la polarización  $\hat{e}_p$  obtenemos tres componentes del tensor de conductividad no local, puesto cualquier tensor en el espacio tiene 9 componentes. Es posible recuperar las componentes del tensor de la conductividad no local, si se conocen las corrientes internas inducidas por una onda plana  $\hat{e}_p e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}$  en tres distintas polarizaciones, es decir como

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}) = \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_x \hat{e}_x + \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_y \hat{e}_y + \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_z \hat{e}_z$$

en algún sistema de referencia apropiado <sup>2</sup>, basta excitar la esfera con tres polarizaciones distintas linealmente independientes.

Si el medio donde se propaga el campo eléctrico externo es el vacío, entonces debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E}_e = i\omega\mu_0 \vec{H}_e \quad (4.8)$$

$$\nabla \times \vec{H}_e = \vec{J}_e - i\omega\epsilon_0 \vec{E}_e. \quad (4.9)$$

Es necesario incluir un término de corrientes externas porque el campo eléctrico externo en general no es solución a las ecuaciones de Maxwell en el vacío (o un modo natural de propagación) ya que el vacío solo puede propagar modos con vector de onda  $k_0$  y no uno arbitrario  $p$ , pero es posible que este

<sup>1</sup>La definición, pudiera haber sido cualquiera de las posibles combinaciones de signos, solo se debe ser consistente con la transformada inversa de Fourier.

<sup>2</sup>Por ejemplo, la equivalencia con las matrices, la componente de  $\hat{e}_x \hat{e}_x$  equivale al elemento  $A_{1,1}$ , el de  $\hat{e}_x \hat{e}_y$  a  $A_{1,2}$ , el de  $\hat{e}_x \hat{e}_z$  a  $A_{1,3}$  y así sucesivamente, donde el primer índice es el renglón y el segundo la columna de la matriz  $A$ .

modo con vector de onda arbitrario  $p$  cumpla con las ecuaciones de Maxwell con fuentes externas, siempre y cuando estas fuentes externas se escogan de manera apropiada, estas corrientes externas serán denotas como  $\vec{J}_e$ .

Por lo que el campo eléctrico externo satisface la ecuación

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_e - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}_e = i\omega \mu_0 \vec{J}_e \quad (4.10)$$

En realidad lo que nos interesa es calcular las corrientes internas inducidas por el campo eléctrico externo, lo cual se consigue una vez calculados los campos internos utilizando la relación local (3.8) ó su equivalente (3.13).

Resolver este problema de encontrar los campos internos que cumplan la ecuación de onda (4.10), en presencia de un campo eléctrico externo, es posible si utilizamos una expansión en una base de armónicos esféricos vectoriales para las ondas planas. Esto es lo que se pretende en la siguiente sección.

## 4.1. Ondas planas y armónicos esféricos vectoriales

En esta sección, con el propósito de resolver la ecuación de onda con fuentes externas y un campo eléctrico externo, hacemos el desarrollo de ondas planas en términos de los armónicos esféricos vectoriales tal y como se definen en el libro [Bohren,1]. Es posible desarrollar ondas planas en términos de armónicos esféricos vectoriales, buscaremos el desarrollo de las ondas

$$e^{ikz} \hat{e}_x, e^{ikz} \hat{e}_y, e^{ikz} \hat{e}_z \quad (4.11)$$

donde  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$  es una base de vectores cartesianas y se ha escogido de tal manera que la dirección del vector de propagación  $\vec{k}$  de una onda plana, coincida con el eje  $z$  de tal sistema de referencia.<sup>3</sup>

Los armónicos vectoriales pares é impares donde los subíndices  $e, o$  se toman del ingles *even, odd*, son [Bohren,1, pg. 95]:

$$\vec{M}_{enm} = \nabla \times (\vec{r} \psi_{enm}) \quad (4.12)$$

---

<sup>3</sup>En la ecuación (4.3) se utiliza  $p$  en lugar de  $k$ , de tal manera que utilizaremos las letras  $p$ , ó  $k$  cuando nos refiramos a la amplitud del vector de onda. Como el procedimiento que prosigue es totalmente general para cualquier onda plana independientemente del cálculo del tensor generalizado de conductividad no local, utilizaremos la letra  $k$ .

$$\vec{M}_{onm} = \nabla \times (\vec{r}\psi_{onm}) \quad (4.13)$$

$$\vec{N}_{enm} = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{M}_{enm} \quad (4.14)$$

$$\vec{N}_{onm} = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{M}_{onm} \quad (4.15)$$

$$\vec{L}_{enm} = \frac{1}{k} \nabla \psi_{enm} \quad (4.16)$$

$$\vec{L}_{onm} = \frac{1}{k} \nabla \psi_{onm} \quad (4.17)$$

$$\psi_{enm} = \cos m\phi P_n^m(\cos \theta) z_n(kr) \quad (4.18)$$

$$\psi_{onm} = \sin m\phi P_n^m(\cos \theta) z_n(kr) \quad (4.19)$$

siendo  $k$  el número de onda, dado que los armónicos esféricos vectoriales, satisfacen la ecuación para el campo electromagnético, la cual es una ecuación de onda.

Además,  $z_n$  es alguna de las funciones de Bessel o Hankel esféricas, que se definen en términos de las funciones de Bessel y Hankel, respectivamente, como:

$$j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+1/2}(\rho) \quad (4.20)$$

$$h_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{n+1/2}(\rho) \quad (4.21)$$

ver por ejemplo [Abramowitz, pg.437], y los polinomios asociados de Legendre  $P_n^m$ , se definen como

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{dP_n(x)}{dx^m}. \quad (4.22)$$

siendo  $P_n(x)$  los polinomios de Legendre <sup>4</sup>.

Los armónicos vectoriales satisfacen las ecuaciones

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} - k^2 \vec{F} = 0 \quad (4.23)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{L}) + k^2 \vec{L} = 0. \quad (4.24)$$

---

<sup>4</sup>Esta definición difiere de la utilizada en [Bohren,1] por el factor  $(-1)^m$

donde  $\vec{F}, \vec{L}$  son campos vectoriales arbitrarios. La primera ecuación para los campos  $\vec{M}_{nm}, \vec{N}_{nm}$  y la segunda para los campos  $\vec{L}_{nm}$ . El campo eléctrico incidente será una onda plana con vector de onda arbitrario  $k$ , y para dicho campo eléctrico incidente proponemos una expansión de la forma

$$\vec{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{enm} \vec{M}_{enm}(k, \vec{r}) + b_{enm} \vec{N}_{enm}(k, \vec{r}) + a_{onm} \vec{M}_{onm}(k, \vec{r}) + b_{onm} \vec{N}_{onm}(k, \vec{r}). \quad (4.25)$$

Para encontrar las amplitudes requerimos de las propiedades de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales. Para deducirlas hacemos el siguiente análisis. Utilizaremos la base esférica dada por

$$\hat{e}_r = \text{sen } \theta \cos \phi \hat{e}_x + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z \quad (4.26)$$

$$\hat{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \hat{e}_x + \cos \theta \text{sen } \phi \hat{e}_y - \text{sen } \theta \hat{e}_z \quad (4.27)$$

$$\hat{e}_\phi = -\text{sen } \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y. \quad (4.28)$$

En el problema de esparcimiento de una onda plana incidente por una esfera, siempre podemos escoger la base  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\} = \{\hat{e}_x, \hat{k}_\perp^i, \hat{k}^i\}$ , referida al vector de propagación de la onda incidente  $\hat{k}^i$  y un vector perpendicular al vector de onda incidente, ver figura (4.1)

En dicha base y sistema de referencia se tiene lo siguiente, que los armónicos esféricos vectoriales se escriben como

$$\vec{M}_{enm}(\rho, \theta, \phi) = z_n(\rho) \left( -m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \text{sen } m\phi \hat{e}_\theta - \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \hat{e}_\phi \right) \quad (4.29)$$

$$\vec{M}_{onm}(\rho, \theta, \phi) = z_n(\rho) \left( m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \cos m\phi \hat{e}_\theta - \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \text{sen } m\phi \hat{e}_\phi \right) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_{enm}(\rho, \theta, \phi) &= n(n+1) \frac{z_n(\rho)}{\rho} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \hat{e}_r \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \left( \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \hat{e}_\theta - m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \text{sen } m\phi \hat{e}_\phi \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

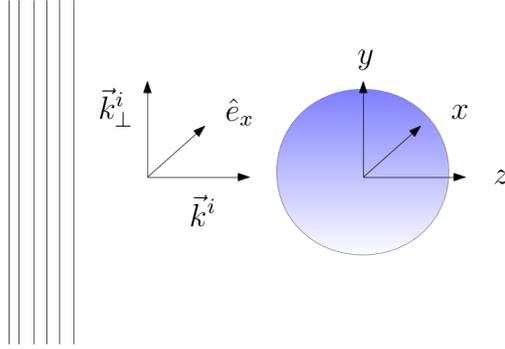


Figura 4.1: En esta figura se muestra el vector de onda incidente  $\vec{k}^i$  su vector perpendicular  $\vec{k}_\perp^i$  y el vector unitario  $\hat{e}_x$  y el sistema de referencia  $x, y, z$  utilizado para expresar los armónicos esféricos vectoriales.

$$\begin{aligned} \vec{N}_{onm}(\rho, \theta, \phi) &= n(n+1) \frac{z_n(\rho)}{\rho} P_n^m(\cos \theta) \text{sen } m\phi \hat{e}_r \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho z_n(\rho)) \left( \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \text{sen } m\phi \hat{e}_\theta + m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \cos m\phi \hat{e}_\phi \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_{emn}(\rho, \theta, \phi) &= z_n'(\rho) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \hat{e}_r \\ &+ \frac{z_n(\rho)}{\rho} \left( \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \hat{e}_\theta - m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \text{sen } m\phi \hat{e}_\phi \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_{omn}(\rho, \theta, \phi) &= z_n'(\rho) P_n^m(\cos \theta) \text{sen } m\phi \hat{e}_r \\ &+ \frac{z_n(\rho)}{\rho} \left( \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \text{sen } m\phi \hat{e}_\theta + m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \cos m\phi \hat{e}_\phi \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde la prima indica derivada respecto al argumento  $z'(\rho) = \frac{d}{d\rho}z(\rho)$  y donde se considero que  $\rho = kr$  en términos del número de onda y la coordenada radial  $r$ . Este tratamiento es válido para cualquier onda plana, simplemente hay que dar la amplitud de su vector de onda y tomar el sistema de referencia tal que el eje  $z$  esté orientado con la dirección de propagación de dicha onda.

A continuación se mencionan algunos resultados de ortogonalidad de dichos armónicos esféricos vectoriales, bajo el producto definido como:

$$(\vec{F}_{\alpha mn}, \vec{F}_{\beta m'n'}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{F}_{\alpha mn} \cdot \vec{F}_{\beta m'n'} \sin \theta d\theta d\phi = C_{mn} \delta_{\alpha\beta} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (4.35)$$

donde  $\vec{F}_{\alpha mn}, \vec{F}_{\beta m'n'}$  representa a alguno de los armónicos esféricos vectoriales arriba definidos, es decir (4.29)-(4.34).

El único caso donde no se tiene la propiedad de ortogonalidad es:

$$(\vec{L}_{enm}, \vec{N}_{enm}) = (\vec{L}_{onm}, \vec{N}_{onm}). \quad (4.36)$$

A continuación presentamos los resultados de ortogonalidad que nos serán de utilidad:

$$(\vec{M}_{enm}, \vec{M}_{on'm'}) = 0, (\vec{M}_{enm}, \vec{N}_{en'm'}) = 0 \quad (4.37)$$

por la ortogonalidad de  $\{\sin m\phi, \cos m\phi\}$ ,  $(\vec{M}_{enm}, \vec{N}_{on'm'}) = 0$  cuando  $m \neq m'$  y cuando  $m = m'$ , las integrales en (4.37) en este caso son proporcionales a  $\int_{-1}^1 \frac{d}{dz}(P_n^m P_{n'}^m) dz$  que es cero para toda  $n, n'$ . Y por los mismos argumentos todos los productos internos entre armónicos esféricos vectoriales diferentes son cero excepto las normas.

A continuación calcularemos las normas de los armónicos esféricos vectoriales con el producto definido por (4.35), con el propósito de calcular los coeficientes dados en (4.25) del lado derecho de la ecuación, cuando del lado izquierdo se sustituye por una onda plana.

La norma para  $\vec{M}_{emn}$  es:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{M}_{emn} \cdot \vec{M}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.38) \\ &= z_n^2(\rho) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( m^2 \sin^2 m\phi \left( \frac{P_n^m}{\sin^2 \theta} \right)^2 + \cos^2 m\phi \left( \frac{d}{d\theta} P_n^m \right)^2 \right) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

donde la dependencia de las funciones de Legendre es en  $\cos \theta$ . Haciendo el cambio de variable  $\mu = \cos \theta$  y utilizando las siguientes relaciones

4.1. ONDAS PLANAS Y ARMÓNICOS ESFÉRICOS VECTORIALES 57

[Abramowitz, ec. 7.14.14, ec. 7.14.15]

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_n^m(\mu)^2 d\mu = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \quad (4.39)$$

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu)^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \quad (4.40)$$

la integral (4.38) se puede escribir como

$$\pi z_n(\rho)^2 \left( m^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_n^m(\mu)^2 d\mu + \int_{-1}^1 (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m \frac{d}{d\mu} P_n^m d\mu \right) \quad (4.41)$$

en la segunda integral se integra por partes y se usa el hecho que [Abramowitz, ec. 8.1.1]

$$(1-\mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} P_n^m - 2\mu \frac{d}{d\mu} P_n^m = - \left( n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right) P_n^m \quad (4.42)$$

y usando la relación de ortogonalidad de las funciones de Legendre (4.40) y (4.39) se tiene que

$$\int_{-1}^1 (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m \frac{d}{d\mu} P_n^m d\mu \quad (4.43)$$

$$= n(n+1) \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} - m^2 \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \quad (4.44)$$

por lo tanto la integral (4.38) se escribe como

$$(\vec{M}_{enm}, \vec{M}_{enm}) = (\vec{M}_{onm}, \vec{M}_{onm}) = \pi z_n(\rho)^2 n(n+1) \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (4.45)$$

si  $m \neq 0$ , para  $m = 0$

$$(\vec{M}_{en0}, \vec{M}_{en0}) = (\vec{M}_{on0}, \vec{M}_{on0}) = 2\pi z_n(\rho)^2 n(n+1) \frac{2}{2n+1}. \quad (4.46)$$

Repitiendo el procedimiento calcularemos la norma de  $\vec{N}_{enm}$ . Tenemos que

$$(\vec{N}_{enm}, \vec{N}_{enm}) = \quad (4.47)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi \left( \frac{z_n(\rho)}{\rho} \right)^2 n^2 (n+1)^2 \cos^2 m\phi P_n^m(\cos \theta)^2$$

$$+ \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \right)^2 \left( \cos^2 m\phi \left( \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right)^2 + m^2 \operatorname{sen}^2 m\phi \left( \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2 \right).$$

Evaluando las integrales en  $\phi$  y haciendo el cambio de variable  $\mu = \cos \theta$  encontramos que

$$(\vec{N}_{enm}, \vec{N}_{enm}) = \pi \int_{-1}^1 \left( \frac{z_n(\rho)}{\rho} \right)^2 n^2 (n+1)^2 P_n^m(\mu)^2 \quad (4.48)$$

$$+ \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \right)^2 \left( (1-\mu^2) \left( \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \right)^2 + m^2 \frac{P_n^m(\mu)^2}{1-\mu^2} \right) d\mu,$$

cuyo resultado es

$$(\vec{N}_{enm}, \vec{N}_{enm}) = (\vec{N}_{onm}, \vec{N}_{onm}) = \quad (4.49)$$

$$\pi \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} n(n+1) \left( n(n+1) \left( \frac{z_n(\rho)}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \right)^2 \right)$$

si  $m \neq 0$ , si  $m = 0$

$$(\vec{N}_{en0}, \vec{N}_{en0}) = (\vec{N}_{on0}, \vec{N}_{on0}) = \quad (4.50)$$

$$2\pi \frac{2}{2n+1} n(n+1) \left( n(n+1) \left( \frac{z_n(\rho)}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \right)^2 \right).$$

Y la norma de  $\vec{L}_{emn}$

$$(\vec{L}_{enm}, \vec{L}_{enm}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi z'_n(\rho)^2 \cos^2 m\phi P_n^m(\cos \theta)^2 \quad (4.51)$$

$$+ \left( \frac{z_n(\rho)}{\rho} \right)^2 \left( \cos^2 m\phi \left( \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right)^2 + m^2 \operatorname{sen}^2 m\phi \frac{P_n^m(\cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi$$

en donde la prima en  $z_n$  indica derivada con respecto al argumento. Evaluando las integrales en  $\phi$  y haciendo el cambio de variable  $\mu = \cos \theta$

$$(\vec{L}_{enm}, \vec{L}_{enm}) = \pi \int_{-1}^1 z'_n(\rho)^2 P_n^m(\mu)^2 \quad (4.52)$$

$$+ \left( \frac{z_n(\rho)}{\rho} \right)^2 \left( (1 - \mu^2) \left( \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \right)^2 + m^2 \frac{P_n^m(\mu)^2}{1 - \mu^2} \right) d\mu$$

usando (4.39),(4.40) se encuentra que la integral vale

$$\begin{aligned} (\vec{L}_{enm}, \vec{L}_{enm}) &= (\vec{L}_{onm}, \vec{L}_{onm}) = \\ &\pi \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left( z_n'(\rho)^2 + n(n+1) \left( \frac{z_n(\rho)}{\rho} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

si  $m \neq 0$ , si  $m = 0$  entonces

$$\begin{aligned} (\vec{L}_{en0}, \vec{L}_{en0}) &= (\vec{L}_{on0}, \vec{L}_{on0}) = \\ &2\pi \frac{2}{2n+1} \left( z_n'(\rho)^2 + n(n+1) \left( \frac{z_n(\rho)}{\rho} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Otros resultados útiles para calcular los coeficientes del lado derecho de la ecuación (4.25) de son:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \hat{e}_x \cdot \vec{M}_{enm} d\phi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \hat{e}_y \cdot \vec{M}_{enm} d\phi &= -\pi \delta_{m,1} z_n(\rho) \left( \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} P_n^1 + \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right) \\ \int_0^{2\pi} \hat{e}_z \cdot \vec{M}_{enm} d\phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \hat{e}_x \cdot \vec{M}_{onm} d\phi &= \pi \delta_{m,1} z_n(\rho) \left( \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} P_n^1 + \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right) \\ \int_0^{2\pi} \hat{e}_y \cdot \vec{M}_{onm} d\phi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \hat{e}_z \cdot \vec{M}_{onm} d\phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \hat{e}_x \cdot \vec{N}_{enm} d\phi &= \pi \delta_{m,1} \left( n(n+1) \text{sen } \theta P_n^1(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} \right. \\ &\quad \left. + \left( \cos \theta \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \right) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \right) \\ \int_0^{2\pi} \hat{e}_y \cdot \vec{N}_{enm} d\phi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \hat{e}_z \cdot \vec{N}_{enm} d\phi &= \\ 2\pi \delta_{m,0} \left( n(n+1) \cos \theta P_n(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} - \text{sen } \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \hat{e}_x \cdot \vec{N}_{onm} d\phi = 0 \\
& \int_0^{2\pi} \hat{e}_y \cdot \vec{N}_{onm} d\phi = \pi \delta_{m,1} \left( n(n+1) \operatorname{sen} \theta P_n^1(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} \right. \\
& \quad \left. + \left( \cos \theta \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta} \right) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \right) \\
& \int_0^{2\pi} \hat{e}_z \cdot \vec{N}_{onm} d\phi = \\
& 2\pi \delta_{m,0} \left( n(n+1) \cos \theta P_n(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} - \operatorname{sen} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \right)
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \hat{e}_x \cdot \vec{L}_{enm} d\phi = \\
& \pi \delta_{m,1} \left( z_n(\rho) \operatorname{sen} \theta P_n^1(\cos \theta) + \frac{z_n(\rho)}{\rho} \left( \cos \theta \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} P_n^1 \right) \right) \\
& \int_0^{2\pi} \hat{e}_y \cdot \vec{L}_{enm} d\phi = 0 \\
& \int_0^{2\pi} \hat{e}_z \cdot \vec{L}_{enm} d\phi = \\
& 2\pi \delta_{m,0} \left( \cos \theta z_n'(\rho) P_n(\cos \theta) - \operatorname{sen} \theta \frac{z_n(\rho)}{\rho} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \right)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \hat{e}_x \cdot \vec{L}_{onm} d\phi = 0 \\
& \int_0^{2\pi} \hat{e}_y \cdot \vec{L}_{onm} d\phi = \\
& \pi \delta_{m,1} \left( z_n(\rho) \operatorname{sen} \theta P_n^1(\cos \theta) + \frac{z_n(\rho)}{\rho} \left( \cos \theta \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} P_n^1 \right) \right) \\
& \int_0^{2\pi} \hat{e}_z \cdot \vec{L}_{onm} d\phi = \\
& 2\pi \delta_{m,0} \left( \cos \theta z_n'(\rho) P_n(\cos \theta) - \operatorname{sen} \theta \frac{z_n(\rho)}{\rho} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \right).
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Con estos resultados de ortogonalidad y del valor de distintas integrales podemos encontrar los desarrollos para las ondas planas en esta base. La representación de  $\hat{e}_x e^{ikz}$  por ser regular en el origen se utilizará  $z_n(\rho) = j_n(\rho)$  y por ser transversal se propone como

$$\hat{e}_x e^{ikz} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{onm} \vec{M}_{onm}(k, \vec{r}) + B_{enm} \vec{N}_{enm}(k, \vec{r}) \tag{4.61}$$

donde utilizando las propiedades de ortogonalidad encontramos que

$$A_{on1} = \frac{(\vec{M}_{on1}, \hat{e}_x e^{ikz})}{(\vec{M}_{on1}, \vec{M}_{on1})} \tag{4.62}$$

utilizando (4.56) se tiene que

$$(\vec{M}_{on1}, \hat{e}_x e^{ikz}) = \pi j_n(\rho) \int_0^\pi \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_n^1 + \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right) e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad (4.63)$$

que se simplifica como

$$(\vec{M}_{on1}, \hat{e}_x e^{ikz}) = \pi j_n(\rho) \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P_n^1(\cos \theta)) e^{ikr \cos \theta} d\theta \quad (4.64)$$

utilizando el hecho que

$$P_n^1(\cos \theta) = -(1 - \mu^2)^{1/2} \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) \Big|_{\mu=\cos \theta} = \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \quad (4.65)$$

por lo que

$$(\vec{M}_{on1}, \hat{e}_x e^{ikz}) = \pi j_n(\rho) \int_{-1}^1 \frac{d}{d\mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) \right) e^{ikr \cos \theta} d\mu \quad (4.66)$$

además, si utilizamos el hecho que

$$\frac{d}{d\mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) \right) = (1 - \mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} P_n(\mu) - 2\mu \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) = -n(n+1) P_n(\mu) \quad (4.67)$$

y que la representación para las funciones de Bessel esféricas es

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) e^{i\rho\mu} d\mu = 2i^n j_n(\rho) \quad (4.68)$$

encontramos que

$$(\vec{M}_{on1}, \hat{e}_x e^{ikz}) = -\pi j_n(\rho) n(n+1) 2i^n j_n(\rho) \quad (4.69)$$

y usando (4.46) con  $m = 1$  encontramos que

$$A_{on1} = -i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)}. \quad (4.70)$$

De igual manera la otro amplitud  $B_{en1}$

$$B_{en1} = \frac{(\vec{N}_{en1}, \hat{e}_x e^{ikz})}{(\vec{N}_{en1}, \vec{N}_{en1})}. \quad (4.71)$$

Ahora utilizando (4.57) se tiene que

$$\begin{aligned} (\vec{N}_{en1}, \hat{e}_x e^{ikz}) &= \pi \frac{j_n(\rho)}{\rho} n(n+1) \int_0^\pi \text{sen } \theta P_n^1(\cos \theta) \text{sen } \theta e^{i\rho \cos \theta} d\theta \\ &+ \pi \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \int_0^\pi \left( \cos \theta \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen } \theta e^{i\rho \cos \theta} d\theta \end{aligned} \quad (4.72)$$

donde la primera integral del lado derecho de (4.72) se puede escribir después de hacer el cambio de variable  $\cos \theta = \mu$  como

$$\int_{-1}^1 (1 - \mu^2)^{1/2} P_n^1(\mu) e^{i\rho \mu} d\mu = - \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} e^{i\rho \mu} d\mu, \quad (4.73)$$

integrando por partes y utilizando (4.65) y (4.67) se encuentra que (4.73) se escribe como

$$= \int_{-1}^1 \frac{d}{d\mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \right) \frac{e^{i\rho \mu}}{i\rho} d\mu = - \frac{n(n+1)}{i\rho} 2j_n(\rho) i^n. \quad (4.74)$$

La segunda integral del lado derecho de (4.72) se escribe como

$$\int_{-1}^1 \left( -\mu(1 - \mu^2)^{1/2} \frac{d}{d\mu} P_n^1 + \frac{P_n^1(\mu)}{(1 - \mu^2)^{1/2}} \right) e^{i\rho \mu} d\mu \quad (4.75)$$

donde usando (4.65) se escribe como

$$= \int_{-1}^1 \left( \mu(1 - \mu^2)^{1/2} \frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2)^{1/2} \frac{d}{d\mu} P_n^1 - \frac{dP_n^1(\mu)}{d\mu} \right) e^{i\rho \mu} d\mu \quad (4.76)$$

donde desarrollando las derivadas y simplificando y usando (4.67) se encuentra que la segunda integral del lado derecho de (4.72) se escribe como

$$= - \int_{-1}^1 \left( (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} + n(n+1)\mu P_n(\mu) \right) e^{i\rho \mu} d\mu \quad (4.77)$$

4.1. ONDAS PLANAS Y ARMÓNICOS ESFÉRICOS VECTORIALES 63

donde integrando por partes el primer término y utilizando (4.67) se encuentra que (4.77) se escribe como

$$= -n(n+1) \frac{1}{i\rho} \int_{-1}^1 (1+i\rho\mu) P_n(\mu) e^{i\rho\mu} d\mu = -n(n+1) \frac{1}{i\rho} 2i^n \frac{d(\rho j_n(\rho))}{d\rho} \quad (4.78)$$

y por lo tanto

$$(\vec{N}_{en1}, \hat{e}_x e^{ikz}) = -n(n+1)\pi \left( \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \right)^2 + n(n+1) \left( \frac{j_n(\rho)}{\rho} \right)^2 \right) 2i^{n-1} \quad (4.79)$$

y utilizando (4.49) cuando  $m = 1$  encontramos que

$$B_{en1} = \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n i \quad (4.80)$$

y por lo tanto

$$e^{ikz} \hat{e}_x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (\vec{M}_{on1}(k, \vec{r}) - i\vec{N}_{en1}(k, \vec{r})). \quad (4.81)$$

El cálculo para la onda  $\hat{e}_y e^{ikz}$  es idéntico solo que se usa  $\vec{M}_{en1}, \vec{N}_{on1}$ , y el resultado es

$$e^{ikz} \hat{e}_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} i^n (\vec{M}_{en1}(k, \vec{r}) + i\vec{N}_{on1}(k, \vec{r})). \quad (4.82)$$

Ahora encontramos el desarrollo de  $\hat{e}_z e^{ikz}$  en la base esférica, por ser un campo longitudinal, usaremos la base  $\vec{L}_{enm}$ , las integrales en  $\phi$  dadas por el producto definido en (4.35), de una onda plana con el armónico vectorial  $\vec{L}_{enm}$ , implican que  $m = 0$ , por lo que esta onda debe ser de la forma

$$\hat{e}_z e^{ikz} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{en0}^L \vec{L}_{en0}(k, \vec{r}) \quad (4.83)$$

por la ortogonalidad de los armónicos vectoriales tenemos que

$$A_{en0}^L = \frac{(\vec{L}_{en0}, \hat{e}_z e^{ikz})}{(\vec{L}_{en0}, \vec{L}_{en0})} \quad (4.84)$$

por (4.59) se tiene que

$$(\vec{L}_{en0}, \hat{e}_z e^{ikz}) = \tag{4.85}$$

$$2\pi \int_0^\pi \left( \cos \theta z'_n(\rho) P_n(\cos \theta) - \operatorname{sen} \theta \frac{z_n(\rho)}{\rho} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \right) e^{ikr \cos \theta} \operatorname{sen} \theta d\theta$$

donde haciendo el cambio de variable  $\mu = \cos \theta$  y llamando  $\rho = kr$  encontramos que

$$(\vec{L}_{en0}, \hat{e}_z e^{ikz}) = \tag{4.86}$$

$$2\pi \left( \frac{d}{d\rho} j_n(\rho) \int_{-1}^1 \mu P_n(\mu) e^{i\rho\mu} d\mu + \frac{j_n(\rho)}{\rho} \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} e^{i\rho\mu} d\mu \right)$$

donde usando (4.68) la primera integral del lado derecho de (4.86) se puede escribir como

$$\int_{-1}^1 \mu P_n(\mu) e^{i\rho\mu} d\mu = \frac{1}{i} \frac{d}{d\rho} \int_{-1}^1 P_n(\mu) e^{i\rho\mu} d\mu = \frac{1}{i} \frac{d}{d\rho} (2i^n j_n(\rho)). \tag{4.87}$$

la segunda integral del lado derecho de (4.86) se puede integrar por partes y después usando (4.67), y luego usando (4.68), se encuentra que

$$\int_{-1}^1 (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} e^{i\rho\mu} d\mu = \frac{1}{i\rho} n(n+1) 2i^n \frac{j_n(\rho)}{\rho} \tag{4.88}$$

y por lo tanto

$$(\vec{L}_{en0}, \hat{e}_z e^{ikz}) = 2\pi 2i^{n-1} \left( \left( \frac{d}{d\rho} j_n(\rho) \right)^2 + n(n+1) \left( \frac{j_n(\rho)}{\rho} \right)^2 \right) \tag{4.89}$$

y utilizando (4.54) implica que

$$A_{en0}^L = \frac{1}{i} (2n+1) i^n \tag{4.90}$$

y finalmente

$$e^{ikz} \hat{e}_z = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^{n-1} \vec{L}_{en0}(k, \vec{r}). \tag{4.91}$$

Este es el cálculo final de esta sección, por lo que lo podemos enunciar como resultado

#### 4.1. ONDAS PLANAS Y ARMÓNICOS ESFÉRICOS VECTORIALES 65

**Resultado 3** *El desarrollo de una onda plana para las distintas polarizaciones  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$  en una base de armónicos esféricos vectoriales, es:*

$$\vec{E}_e(\vec{r}; \hat{e}_x) = e^{ipz} \hat{e}_x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (\vec{M}_{on1}(p, \vec{r}) - i\vec{N}_{en1}(p, \vec{r})) \quad (4.92)$$

$$\vec{E}_e(\vec{r}; \hat{e}_y) = e^{ipz} \hat{e}_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} i^n (\vec{M}_{en1}(p, \vec{r}) + i\vec{N}_{on1}(p, \vec{r})) \quad (4.93)$$

$$\vec{E}_e(\vec{r}; \hat{e}_z) = e^{ipz} \hat{e}_z = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^{n-1} \vec{L}_{en0}(p, \vec{r}) \quad (4.94)$$

donde hemos denotado la dependencia de la polarización en la segunda variable de  $\vec{E}_e(\vec{r}; \hat{e}_p)$ . Los campos magnéticos se calculan con la ecuación de Faraday

$$\vec{H}_e = \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \vec{E}_e \quad (4.95)$$

y utilizando la definición de los armónicos vectoriales, se encuentra que

$$\vec{H}_e(\vec{r}; \hat{e}_x) = \frac{p}{i\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (\vec{N}_{on1}(p, \vec{r}) - i\vec{M}_{en1}(p, \vec{r})) \quad (4.96)$$

$$\vec{H}_e(\vec{r}; \hat{e}_y) = \frac{p}{i\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (\vec{N}_{en1}(p, \vec{r}) + i\vec{M}_{on1}(p, \vec{r})) \quad (4.97)$$

$$\vec{H}_e(\vec{r}; \hat{e}_z) = 0. \quad (4.98)$$

Este resultado se puede encontrar en [Julius][pg. 420, Ec.(36)-(38)] con diferencia de un signo menos debido a la definición de los polinomios asociados de Legendre que en este trabajo se usa como en [Lebedev] y un factor de  $1/k$  que surge de la definición de  $\vec{L}_{nm}$ .

## 4.2. El campo electromagnético total

A continuación recordamos el problema, se tiene un campo eléctrico externo de la forma  $\hat{e}_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$ , con vector de onda arbitrario, y polarización arbitraria y por conveniencia de amplitud unitaria, de otra forma aparecería una amplitud constante  $E_0$  multiplicando al campo eléctrico inducido dentro de la esfera y el campo eléctrico esparcido.

Tomaremos como eje  $z$  del sistema de coordenadas tal que coincida con la dirección del vector de onda  $\vec{p}$ , por ser  $\vec{p}$  arbitraria. El campo eléctrico externo, por estar en el vacío debe satisfacer la ecuación del campo electromagnético con fuentes, es decir

$$\nabla \times \nabla \times (\hat{e}_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}) - k_0^2 \hat{e}_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} = i\omega\mu_0 \vec{J}_e(\vec{r}; \hat{e}_p). \quad (4.99)$$

donde la segunda variable de  $\vec{J}_e(\vec{r}; \hat{e}_p)$  nos expresa el hecho que la corriente inducida depende de la polarización del campo eléctrico externo. Permitiremos que el campo eléctrico externo tome cualquiera de las tres polarizaciones  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  y escogeremos esta base de tal forma que la dirección del vector de propagación  $\vec{p}$  coincida con el vector unitario  $\hat{e}_z$ , por lo tanto de la ecuación (4.99) resolviendo para  $\vec{J}_e$  encontramos que la corriente externa debe ser

$$\vec{J}_e(\vec{r}; \hat{e}_x) = \frac{1}{i\omega\mu_0} (p^2 - k_0^2) e^{ipz} \hat{e}_x \quad (4.100)$$

$$\vec{J}_e(\vec{r}; \hat{e}_y) = \frac{1}{i\omega\mu_0} (p^2 - k_0^2) e^{ipz} \hat{e}_y \quad (4.101)$$

$$\vec{J}_e(\vec{r}; \hat{e}_z) = -\frac{1}{i\omega\mu_0} k_0^2 e^{ipz} \hat{e}_z \quad (4.102)$$

para un campo eléctrico externo de la forma  $e^{ipz} \hat{e}_x, e^{ipz} \hat{e}_y, e^{ipz} \hat{e}_z$  respectivamente. Nótese que para  $p = k_0$  las corrientes a lo largo de  $x$  y  $y$  desaparecen. Esto es debido a que para  $p = k_0$  las ondas electromagnéticas son modos normales (los que se propagan con número de onda  $k_0$ ) y no requieren la presencia corrientes externas. Para una polarización a lo largo de  $z$ , la corriente externa no es cero, ya que en el vacío no se pueden propagar ondas longitudinales.

Ahora utilizaremos los resultados de la sección anterior, para expresar el campo eléctrico externo como una suma de armónicos esféricos vectoriales.

De los resultados de la sección anterior, el campo eléctrico externo y su campo magnético están dados por las ecuaciones (4.92)-(4.98).

A continuación procedemos a calcular el campo eléctrico inducido dentro de la esfera y sus respectivos campos magnéticos. El campo inducido dentro de la esfera debe satisfacer la ecuación

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_I - k_s^2 \vec{E}_I = i\omega\mu_s \vec{J}_e \quad (4.103)$$

donde  $k_s^2 = \omega^2 \mu_s \epsilon_s$  está dada en términos de la permitividad eléctrica  $\epsilon_s$ ,  $\mu_s$  y permeabilidad magnética de la esfera, y  $\vec{J}_e$  es alguna de las corrientes externas dadas por (4.100)-(4.102).

Esta ecuación tiene una solución general que será la combinación lineal de la solución a la ecuación de campo eléctrico homogénea y una solución particular de la ecuación del campo eléctrico con fuentes (4.103), es decir

$$\vec{E}_I = \vec{E}_h + \vec{E}_p \quad (4.104)$$

donde el campo eléctrico  $\vec{E}_h$  satisface la ecuación homogénea

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_h - k_s^2 \vec{E}_h = 0 \quad (4.105)$$

y la solución particular  $\vec{E}_p$  debe ser alguna solución de

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_p - k_s^2 \vec{E}_p = i\omega\mu_s \vec{J}_e. \quad (4.106)$$

Para la solución particular se propone una onda plana  $A_x \hat{e}_x e^{ipz}$ ,  $A_y \hat{e}_y e^{ipz}$ ,  $A_z \hat{e}_z e^{ipz}$  se sustituye en la ecuación (4.103) para el campo eléctrico con fuentes y se halla que la solución particular para cada caso de polarización del campo eléctrico externo es:

$$\vec{E}_p(\vec{r}; \hat{e}_x) = \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} e^{ipz} \hat{e}_x = \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} \vec{E}_e(\vec{r}; \hat{e}_x) \quad (4.107)$$

$$\vec{E}_p(\vec{r}; \hat{e}_y) = \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} e^{ipz} \hat{e}_y = \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} \vec{E}_e(\vec{r}; \hat{e}_y) \quad (4.108)$$

$$\vec{E}_p(\vec{r}; \hat{e}_z) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s} e^{ipz} \hat{e}_z = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s} \vec{E}_e(\vec{r}; \hat{e}_z) \quad (4.109)$$

donde se han escrito en términos del campo eléctrico externo.

Sus campos magnéticos asociados son calculados por la ley de Faraday, y el resultado es

$$\vec{H}_p(\vec{r}; \hat{e}_x) = \frac{p^2 - k_0^2}{p^2 - k_s^2} \vec{H}_e(\vec{r}; \hat{e}_x) \quad (4.110)$$

$$\vec{H}_p(\vec{r}; \hat{e}_y) = \frac{p^2 - k_0^2}{p^2 - k_s^2} \vec{H}_e(\vec{r}; \hat{e}_y) \quad (4.111)$$

$$\vec{H}_p(\vec{r}; \hat{e}_z) = 0 \quad (4.112)$$

por lo que el campo inducido dentro de la esfera  $r < a$  será, por lo tanto, de la forma

$$\vec{E}_I(\vec{r}; \hat{e}_x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (c_n \vec{M}_{on1}(k_s, \vec{r}) - id_n \vec{N}_{en1}(k_s, \vec{r})) + \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} \vec{E}_e(\vec{r}; \hat{e}_x) \quad (4.113)$$

$$\vec{E}_I(\vec{r}; \hat{e}_y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} i^n (c_n \vec{M}_{en1}(k_s, \vec{r}) + id_n \vec{N}_{on1}(k_s, \vec{r})) + \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} \vec{E}_e(\vec{r}; \hat{e}_y) \quad (4.114)$$

$$\vec{E}_I(\vec{r}; \hat{e}_z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^{n-1} d_n^L \vec{N}_{en0}(k_s, \vec{r}) + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s} \vec{E}_e(\vec{r}; \hat{e}_z). \quad (4.115)$$

Se puede observar que del lado derecho de estas ecuaciones, la expansión en armónicos esféricos vectoriales, por el hecho que los armónicos esféricos vectoriales es cada uno solución de la ecuación homogénea para el campo eléctrico (4.105), entonces el primer término del lado derecho de las ecuaciones (4.113)-(4.115) corresponden a la solución de la ecuación homogénea para el campo eléctrico (4.105), y el segundo término a la solución particular de la ecuación no homogénea (4.106).

Los campos magnéticos se calculan con la ley de Faraday, y utilizando la definición de los armónicos vectoriales, se encuentra que

$$\begin{aligned} \vec{H}_I(\vec{r}; \hat{e}_x) &= \frac{k_s}{i\omega\mu_s} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (c_n \vec{N}_{on1}(k_s, \vec{r}) - id_n \vec{M}_{en1}(k_s, \vec{r})) \\ &\quad + \frac{p^2 - k_0^2}{p^2 - k_s^2} \vec{H}_e(\vec{r}; \hat{e}_x) \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_I(\vec{r}; \hat{e}_y) &= \frac{k_s}{i\omega\mu_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} i^n (c_n \vec{N}_{en1}(k_s, \vec{r}) + id_n \vec{M}_{on1}(k_s, \vec{r})) \\ &\quad + \frac{p^2 - k_0^2}{p^2 - k_s^2} \vec{H}_e(\vec{r}; \hat{e}_y) \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\vec{H}_I(\vec{r}; \hat{e}_z) = \frac{k_s}{i\omega\mu_s} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^{n-1} d_n^L \vec{M}_{en0}(k_s, \vec{r}) \quad (4.118)$$

donde el campo magnético  $\vec{H}_e$  está dado por (4.96)-(4.97) cuando el campo eléctrico externo  $\vec{E}_e$  toma las polarizaciones  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  respectivamente.

Definiremos el campo eléctrico esparcido por la esfera  $\vec{E}_s$ , al campo fuera de la esfera  $r > a$ , y que no sea el campo eléctrico externo, lo supondremos de la forma <sup>5</sup>

$$\vec{E}_s(\vec{r}; \hat{e}_x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (ia_n \vec{N}_{en1}^{(3)}(k_0, \vec{r}) - b_n \vec{M}_{on1}^{(3)}(k_0, \vec{r})) \quad (4.119)$$

$$\vec{E}_s(\vec{r}; \hat{e}_y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(2n+1)}{n(n+1)} i^n (ia_n \vec{N}_{on1}^{(3)}(k_0, \vec{r}) + b_n \vec{M}_{en1}^{(3)}(k_0, \vec{r})) \quad (4.120)$$

$$\vec{E}_s(\vec{r}; \hat{e}_z) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) i^{n-1} a_n^L \vec{N}_{en0}^{(3)}(k_0, \vec{r}). \quad (4.121)$$

donde el índice (3) indica que la dependencia funcional de los armónicos esféricos está dada por las funciones esféricas de Hankel  $h_n(k_0 r)$ .

El término  $\vec{N}_{en0}^{(3)}(k_0, \vec{r})$  es tal que su rotacional es cero, y es el campo eléctrico producido al excitar la esfera con un campo eléctrico longitudinal. Este caso no es posible en la teoría de Mie (que es esparcimiento de una onda plana con vector de onda  $k_0$  por una esfera), porque el vacío no puede propagar modos longitudinales del campo electromagnético en ausencia de corrientes externas.

<sup>5</sup>Esta notación es la utilizada en [Bohren,1] salvo un signo en los polinomios asociados de Legendre.

Los campos magnéticos se calculan con la ecuación de Faraday y utilizando la definición de los armónicos vectoriales, se encuentra que

$$\vec{H}_s(\vec{r}; \hat{e}_x) = \frac{k_0}{i\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (b_n \vec{N}_{on1}^{(3)}(k_0, \vec{r}) - ia_n \vec{M}_{en1}^{(3)}(k_0, \vec{r})) \quad (4.122)$$

$$\vec{H}_s(\vec{r}; \hat{e}_y) = \frac{k_0}{i\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(2n+1)}{n(n+1)} i^n (b_n \vec{N}_{en1}^{(3)}(k_0, \vec{r}) + ia_n \vec{M}_{on1}^{(3)}(k_0, \vec{r})) \quad (4.123)$$

$$\vec{H}_s(\vec{r}; \hat{e}_z) = 0, \quad (4.124)$$

Ahora aplicamos condiciones de frontera para los campos eléctricos y magnéticos en la frontera de una esfera en el origen y de radio  $r = a$ , que consiste en pedir que las componentes tangenciales de los campos eléctricos y magnéticos  $\vec{E}, \vec{H}$  a la esfera sean continuas, es decir

$$[\vec{E}_e]_{\theta} + [\vec{E}_s]_{\theta} = [\vec{E}_I]_{\theta} \quad (4.125)$$

$$[\vec{H}_e]_{\theta} + [\vec{H}_s]_{\theta} = [\vec{H}_I]_{\theta}. \quad (4.126)$$

Igualmente válido es pedir la continuidad de las componentes en  $\phi$  para el campo eléctrico y el campo  $H$ , y nos sentiremos en libertad de utilizar una u otra cuando sea necesario, es decir

$$[\vec{E}_e]_{\phi} + [\vec{E}_s]_{\phi} = [\vec{E}_I]_{\phi} \quad (4.127)$$

$$[\vec{H}_e]_{\phi} + [\vec{H}_s]_{\phi} = [\vec{H}_I]_{\phi} \quad (4.128)$$

donde el corchete cuadrado nos indica que es la componente escalar de un vector, y el subíndice a que vector unitario de base esférica  $\{\hat{e}_{\theta}, \hat{e}_{\phi}\}$  corresponde.

Por (4.29)-(4.34) tenemos que las componentes son

$$[\vec{M}_{enm}]_{\theta} = -z_n(\rho) \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi \quad (4.129)$$

$$[\vec{M}_{enm}]_{\phi} = -z_n(\rho) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \quad (4.130)$$

$$[\vec{M}_{onm}]_{\theta} = z_n(\rho) \frac{m}{\text{sen } \theta} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \quad (4.131)$$

$$[\vec{M}_{onm}]_{\phi} = -z_n(\rho) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \text{sen } m\phi \hat{e}_{\phi} \quad (4.132)$$

$$[\vec{N}_{enm}]_{\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \quad (4.133)$$

$$[\vec{N}_{enm}]_{\phi} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \text{sen } m\phi \quad (4.134)$$

$$[\vec{N}_{onm}]_{\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \text{sen } m\phi \quad (4.135)$$

$$[\vec{N}_{onm}]_{\phi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho z_n(\rho)) m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \cos m\phi \quad (4.136)$$

$$[\vec{L}_{emn}]_{\theta} = \frac{z_n(\rho)}{\rho} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \quad (4.137)$$

$$[\vec{L}_{emn}]_{\phi} = -\frac{z_n(\rho)}{\rho} \frac{m}{\text{sen } \theta} \text{sen } m\phi P_n^m(\cos \theta) \quad (4.138)$$

$$[\vec{L}_{omn}]_{\theta} = \frac{z_n(\rho)}{\rho} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \text{sen } m\phi \quad (4.139)$$

$$[\vec{L}_{omn}]_{\phi} = \frac{z_n(\rho)}{\rho} \frac{m}{\text{sen } \theta} \cos m\phi P_n^m(\cos \theta). \quad (4.140)$$

### 4.3. Condiciones de frontera

Con las condiciones de frontera podemos obtener las amplitudes para el campo eléctrico inducido. Cuando el campo eléctrico externo es  $e^{ipz} \hat{e}_x$  (de amplitud unitaria), junto con la condición de frontera para el campo eléctrico (4.125) para cada posible valor de  $n$ , evaluada cuando  $r = a$ , siendo  $a$  el radio de la esfera y utilizando (4.92), (4.113), (4.119), todo esto implica que

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha) \left( j_n(pa) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} - i J_n^*(pa) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right) \\ & + \left( -b_n h_n(k_0 a) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} + i a_n H_n^*(k_0 a) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right) \end{aligned}$$

$$= \left( c_n j_n(k_s a) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} - i d_n J_n^*(k_s a) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right) \quad (4.141)$$

donde

$$J_n^*(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \quad (4.142)$$

$$H_n^*(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho h_n(\rho)) \quad (4.143)$$

$$\alpha = \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} \quad (4.144)$$

$$\alpha^* = \frac{p^2 - k_0^2}{p^2 - k_s^2}. \quad (4.145)$$

Esta condición implica el siguiente par de ecuaciones

$$h_n(k_0 a) b_n + j_n(k_s a) c_n = (1 - \alpha) j_n(pa) \quad (4.146)$$

$$H_n^*(k_0 a) a_n + J_n^*(k_s a) d_n = (1 - \alpha) J_n^*(pa). \quad (4.147)$$

De igual manera la condición de frontera (4.126) para el campo magnético (4.96), (4.116), (4.122), implican

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha^*) \frac{p}{\mu_0} \left( \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) J_n^*(pa) + i \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} j_n(pa) \right) \\ & + \frac{k_0}{\mu_0} \left( b_n \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) H_n^*(k_0 a) + i a_n \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} h_n(k_0 a) \right) \\ & = - \frac{k_s}{\mu_s} \left( c_n \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} J_n^*(k_s a) + i d_n \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} j_n(k_s a) \right). \end{aligned} \quad (4.148)$$

En estas ecuaciones se observa que aparecen las funciones  $\frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta)$ ,  $\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}$  multiplicadas por cierto factor, separando por la dependencia funcional y factorizando se encuentra el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{k_0}{\mu_0} h_n(k_0 a) a_n + \frac{k_s}{\mu_s} j_n(k_s a) d_n = (1 - \alpha^*) \frac{p}{\mu_0} j_n(pa) \quad (4.149)$$

$$\frac{k_0}{\mu_0} H_n^*(k_0 a) b_n + \frac{k_s}{\mu_s} J_n^*(k_s a) c_n = (1 - \alpha^*) \frac{p}{\mu_0} J_n^*(p a). \quad (4.150)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.146), (4.147), (4.149), (4.150) encontramos el valor de los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$ , y este cálculo lo enunciaremos como un resultado.

**Resultado 4** *Las amplitudes en el desarrollo en armónicos esféricos vectoriales, para el campo eléctrico inducido dentro de la esfera y el campo eléctrico esparcido por la presencia de una onda externa de la forma  $\hat{e}_x e^{ipz}$  son:*

$$a_n(p a, k_0 a, k_s a) = \frac{(1 - \alpha) J_n^*(p a) \frac{k_s}{\mu_s} j_n(k_s a) - (1 - \alpha^*) \frac{p}{\mu_0} j_n(p a) J_n^*(k_s a)}{H_n^*(k_0 a) \frac{k_s}{\mu_s} j_n(k_s a) - \frac{k_0}{\mu_0} h_n(k_0 a) J_n^*(k_s a)} \quad (4.151)$$

$$b_n(p a, k_0 a, k_s a) = \frac{(1 - \alpha) j_n(p a) \frac{k_s}{\mu_s} J_n^*(k_s a) - (1 - \alpha^*) \frac{p}{\mu_0} J_n^*(p a) j_n(k_s a)}{h_n(k_0 a) \frac{k_s}{\mu_s} J_n^*(k_s a) - \frac{k_0}{\mu_0} H_n^*(k_0 a) j_n(k_s a)} \quad (4.152)$$

$$c_n(p a, k_0 a, k_s a) = \frac{h_n(k_0 a) (1 - \alpha^*) \frac{p}{\mu_0} J_n^*(p a) - \frac{k_0}{\mu_0} H_n^*(k_0 a) (1 - \alpha) j_n(p a)}{h_n(k_0 a) \frac{k_s}{\mu_s} J_n^*(k_s a) - \frac{k_0}{\mu_0} H_n^*(k_0 a) j_n(k_s a)} \quad (4.153)$$

$$d_n(p a, k_0 a, k_s a) = \frac{H_n^*(k_0 a) (1 - \alpha^*) \frac{p}{\mu_0} j_n(p a) - \frac{k_0}{\mu_0} h_n(k_0 a) (1 - \alpha) J_n^*(p a)}{H_n^*(k_0 a) \frac{k_s}{\mu_s} j_n(k_s a) - \frac{k_0}{\mu_0} h_n(k_0 a) J_n^*(k_s a)}. \quad (4.154)$$

Para tratar la polarización  $\hat{e}_y$  del campo eléctrico externo, seguimos un procedimiento totalmente equivalente, utilizando el desarrollo apropiado para un campo eléctrico de la forma  $e^{ipz} \hat{e}_y$ , y utilizando las condiciones de frontera para el campo eléctrico y magnético, y lo que se encuentra es que las amplitudes para el campo eléctrico inducido dentro de la esfera y el campo eléctrico esparcido son los mismos al caso donde el campo eléctrico externo se encuentra en polarización  $\hat{e}_x$ .

Tenemos la relación de este resultado con la teoría de Mie, que es el problema de esparcimiento de una sola esfera cuando incide una onda plana

electromagnética autopropagante en el vacío con número de onda  $k_0$ , el cual se encuentra resuelto en la literatura, por ejemplo [Born, pg. 759]

**Resultado 5** Si en el resultado (4) tomamos  $p = k_0$  entonces las amplitudes (4.154) y la solución de los campos eléctricos incidente, inducido y esparcido corresponden a los de la teoría de Mie <sup>6</sup>.

Para la polarización  $e^{ipz}\hat{e}_z$  del campo eléctrico externo, se sustituyen (4.94), (4.115), (4.121) para  $r = a$  en la condición de frontera para el campo eléctrico (4.126) ( $\hat{e}_\theta$ ) se obtiene que

$$\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s}\right) \frac{j_n(pa)}{pa} + a_n^L H_n^*(k_0a) = d_n^L J_n^*(k_sa) \quad (4.155)$$

En este caso no se puede utilizar la condición de frontera para el campo magnético ya que este es idénticamente cero. Se sustituyen (4.94), (4.115), (4.121) cuando  $r = a$  en la condición de frontera para el campo eléctrico (4.127) ( $\hat{e}_\phi$ ) y se obtiene el siguiente resultado

**Resultado 6** Los coeficientes para el campo eléctrico esparcido (4.121) y el campo eléctrico interno inducido dentro de la esfera (4.115), cuando el campo eléctrico externo es de la forma <sup>7</sup>  $\hat{e}_z e^{ipz}$  son:

$$a_n^L(pa, k_0a, k_sa) = \frac{\mu_0 k_s j_n(k_sa)}{\mu_s k_0 h_n(k_0a)} d_n^L(pa) \quad (4.156)$$

y

$$d_n^L(pa, k_0a, k_sa) = \frac{\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s}\right) \frac{j_n(pa)}{pa} h_n(k_0a)}{J_n^*(k_sa) h_n(k_0a) - \frac{\mu_0 k_s}{\mu_s k_0} j_n(k_sa) H_n^*(k_0a)}. \quad (4.157)$$

## 4.4. Corriente interna inducida

Una vez conocidos los campos internos, es posible recuperar la corriente interna inducida por dichos campos, ya que la corriente interna inducida se

<sup>6</sup>El esparcimiento de una onda plana con vector de onda  $k_0$  por una esfera

<sup>7</sup>Este caso no es posible en la teoría de Mie, ya que en el vacío no pueden propagarse modos electromagnéticos longitudinales, en esta teoría es posible tener modos electromagnéticos longitudinales, debido a la presencia de corrientes externas.

relaciona con el campo de polarización  $\vec{P}_I$  y el campo de magnetización  $\vec{M}_I$  a través de una respuesta dada por

$$\vec{J}_I(\vec{r}) = -i\omega\vec{P}_I(\vec{r}) + \nabla \times \vec{M}_I(\vec{r}), \quad (4.158)$$

donde hemos denotado con el subíndice  $I$  que se trata de los campos internos inducidos, ó en términos de la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética

$$\begin{aligned} \vec{J}_I(\vec{r}) = & -i\omega(\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}_I(\vec{r}) + \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_s}\right)\nabla \times \vec{B}_I(\vec{r}) \\ & - \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_s}\right)\delta(r - a)\hat{e}_r \times \vec{B}_I. \end{aligned} \quad (4.159)$$

donde se ha supuesto que la magnetización  $\vec{M}_I$  y polarización eléctrica  $\vec{P}_I$  de la esfera son cero fuera de la esfera de radio  $a$ , es decir

$$\vec{M}(\vec{r}) = (1 - \theta(r - a))\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_s}\right)\vec{B} \quad (4.160)$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = (\epsilon_1 - \epsilon_0)(1 - \theta(r - a))\vec{E}(\vec{r}) \quad (4.161)$$

y  $\theta(r - a)$  es una función escalón. Podemos definir el término de corriente de superficie como

$$\vec{J}_\Sigma(\vec{r}) = \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right)\delta(r - a)\hat{e}_r \times \vec{H}_I(\vec{r}). \quad (4.162)$$

donde  $\vec{H}_I$  está dado por (4.116)-(4.118) para cada caso de polarización del campo eléctrico externo. Los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación (4.159) son corrientes de bulto y el tercer término es corriente de superficie.

Primero trabajaremos las corrientes de bulto y dejaremos el tratamiento de la corriente de superficie hasta el final. Como se dijo en (4.104), el campo total inducido se puede escribir como un término que es solución de la ecuación homogénea (4.105) y un término que es solución particular de la ecuación (4.106), es decir  $\vec{E}_I = \vec{E}_h + \vec{E}_p$ , y el campo magnético se calcula por la ley de Faraday.

Entonces, si  $\vec{E}_h, \vec{B}_h$  son los campos inducidos dentro de la esfera tales que son solución a la ecuación homogénea

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_h(\vec{r}) = k_s^2 \vec{E}_h(\vec{r}) \quad (4.163)$$

y por la ley de Faraday

$$\nabla \times \vec{E}_h(\vec{r}) = i\omega \vec{B}_h(\vec{r}). \quad (4.164)$$

Si consideramos los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación (4.159) y expresamos el campo magnético  $\vec{B}_I$  en términos del campo eléctrico  $\vec{E}_I$  haciendo uso de la ley de Faraday, se tendría que la corriente inducida asociada a la solución homogénea del campo eléctrico toma el valor

$$i\omega\mu_0\vec{J}_h(\vec{r}) = \omega^2\mu_0(\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}_h(\vec{r}) + \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_s}\right)\nabla \times \nabla \times \vec{E}_h(\vec{r}) \quad (4.165)$$

y como  $k_0^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0$ ,  $k_s^2 = \omega^2\mu_s\epsilon_s$ , haciendo uso de (4.163) y simplificando, se tiene la relación entre la corriente y el campo para las ondas transversales

$$i\omega\mu_0\vec{J}_h(\vec{r}) = (k_s^2 - k_0^2)\vec{E}_h(\vec{r}) \quad (4.166)$$

para las tres distintas polarizaciones del campo eléctrico externo.

Por otra parte, las corrientes inducidas asociadas a la solución particular del campo eléctrico inducido dentro de la esfera está dado por las ecuaciones (4.107)-(4.109), y se encuentra que la corriente asociada a esta parte del campo eléctrico inducido es

$$i\omega\mu_0\vec{J}_p(\vec{r}; \hat{e}_x) = \left(\omega^2\mu_0(\epsilon - \epsilon_0) + \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_s}\right)p^2\right)\hat{e}_x e^{ipz} \quad (4.167)$$

$$i\omega\mu_0\vec{J}_p(\vec{r}; \hat{e}_y) = \left(\omega^2\mu_0(\epsilon - \epsilon_0) + \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_s}\right)p^2\right)\hat{e}_y e^{ipz} \quad (4.168)$$

$$i\omega\mu_0\vec{J}_p(\vec{r}; \hat{e}_z) = \omega^2\mu_0(\epsilon - \epsilon_0)\hat{e}_z e^{ipz} \quad (4.169)$$

para cada polarización del campo externo, y donde en esta expresión no aparece la amplitud del campo eléctrico porque se tomó su amplitud unitaria. De las expresiones anteriores podemos definir

$$\sigma_s = \frac{1}{i\omega\mu_0}(k_s^2 - k_0^2) \quad (4.170)$$

$$\sigma_p = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left( \omega^2\mu_0(\epsilon - \epsilon_0) + \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_s}\right) p^2 \right) \quad (4.171)$$

$$\sigma_{pz} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \omega^2\mu_0(\epsilon - \epsilon_0). \quad (4.172)$$

La corriente total inducida dentro de la esfera será

$$\vec{J}_I = \vec{J}_h + \vec{J}_p + \vec{J}_\Sigma \quad (4.173)$$

por lo que sustituyendo el valor del campo eléctrico interno inducido (4.113)-(4.115), y sus correspondientes campos magnéticos (4.116)-(4.118) en la ecuación (4.159), finalmente podemos escribir la corriente interna inducida para cada polarización del campo eléctrico externo, y recordando que el eje  $z$  del sistema de coordenadas coincide con la dirección de  $\vec{p}$ , podemos enunciarlo como resultado.

**Resultado 7** *Las corrientes inducidas dentro de una esfera localizada en el origen, debida a un campo eléctrico externo de la forma  $\hat{e}^i e^{ipz}$  para cada vector de polarización  $\hat{e}^i = \{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$  respectivamente son:*

$$\begin{aligned} \vec{J}_I(\vec{r}; \hat{e}_x) &= \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (c_n(pa) \vec{M}_{on1}(k_s, \vec{r}) - id_n(pa) \vec{N}_{en1}(k_s, \vec{r})) \\ &+ \sigma_p \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} e^{ipz} \hat{e}_x + \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right) \delta(r-a) \hat{e}_r \times \vec{H}_I(\vec{r}; \hat{e}_x) \end{aligned} \quad (4.174)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_I(\vec{r}; \hat{e}_y) &= \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} i^n (c_n(pa) \vec{M}_{en1}(k_s, \vec{r}) + id_n(pa) \vec{N}_{on1}(k_s, \vec{r})) \\ &+ \sigma_p \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} e^{ipz} \hat{e}_y + \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right) \delta(r-a) \hat{e}_r \times \vec{H}_I(\vec{r}; \hat{e}_y) \end{aligned} \quad (4.175)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_I(\vec{r}; \hat{e}_z) &= \sigma_s \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^{n-1} d_n^L(pa) \vec{N}_{en0}(k_s, \vec{r}) \\ &+ \sigma_{pz} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s} e^{ipz} \hat{e}_z + \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right) \delta(r-a) \hat{e}_r \times \vec{H}_I(\vec{r}; \hat{e}_z). \end{aligned} \quad (4.176)$$

donde  $\vec{H}_I$  está dado por (4.116)-(4.118) correspondientes a cada polarización de la onda incidente y contribuyen a la corriente de superficie sobre la esfera.

De estas expresiones se obtiene una representación mixta para el tensor de conductividad no local de la forma

$$\langle \vec{\sigma}_s(\vec{r}, \vec{p}) \cdot \hat{e}_x = \vec{J}_I(\vec{r}; \hat{e}_x) \quad (4.177)$$

$$\langle \vec{\sigma}_s(\vec{r}, \vec{p}) \cdot \hat{e}_y = \vec{J}_I(\vec{r}; \hat{e}_y) \quad (4.178)$$

$$\langle \vec{\sigma}_s(\vec{r}, \vec{p}) \cdot \hat{e}_z = \vec{J}_I(\vec{r}; \hat{e}_z) \quad (4.179)$$

donde  $\vec{J}_I$  se calcula para cada caso de polarización de la onda incidente y debe tomarse la amplitud del campo eléctrico externo como unitaria, razón por la cual aparentemente las unidades no coinciden.

## 4.5. Transformada de Fourier

En la sección anterior, se encontró una expresión para la corriente interna inducida dentro de la esfera en términos de los armónicos esféricos vectoriales, en una representación espacial, en particular, en un sistema de coordenadas esféricas. Como el propósito del cálculo es encontrar el tensor generalizado de conductividad no local, y éste se encuentra dado por la expresión (4.7), la cual involucra la transformada de Fourier de la corriente inducida dentro de la esfera, debemos, por lo tanto, tomar la transformada de Fourier de la corriente inducida dentro de la esfera (4.174)-(4.176), para después poder recuperar el tensor generalizado de conductividad no local en el espacio de Fourier.

Como la corriente inducida está dada en términos de una serie de armónicos esféricos vectoriales, entonces para calcular su transformada de Fourier, debemos calcular la transformada de Fourier de cada armónico esférico vectorial, y esto es lo que se hace a continuación.

Primero siguiendo a [Tsang,2, pg. 27], definimos

$$\vec{P}_{nm}(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \hat{e}_r, \quad (4.180)$$

$$\vec{B}_{nm}(\theta, \phi) = \left( \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \hat{e}_\theta + im \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{e}_\phi \right) e^{im\phi}, \quad (4.181)$$

$$\vec{C}_{nm}(\theta, \phi) = \left( im \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{e}_\theta - \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \hat{e}_\phi \right) e^{im\phi} \quad (4.182)$$

entonces los armónicos vectoriales se escriben como

$$\vec{M}_{nm}(\rho, \theta, \phi) = j_n(\rho) \vec{C}_{nm}(\theta, \phi) \quad (4.183)$$

$$\vec{N}_{nm}(\rho, \theta, \phi) = n(n+1) \frac{j_n(\rho)}{\rho} \vec{P}_{nm}(\theta, \phi) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (4.184)$$

$$\vec{L}_{nm}(\rho, \theta, \phi) = \frac{d}{d\rho} j_n(\rho) \vec{P}_{nm}(\theta, \phi) + \frac{j_n(\rho)}{\rho} \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (4.185)$$

y la relación con nuestra notación es:

$$\vec{M}_{nm}(\rho, \theta, \phi) = \vec{M}_{enm}(\rho, \theta, \phi) + i \vec{M}_{onm}(\rho, \theta, \phi) \quad (4.186)$$

$$\vec{N}_{nm}(\rho, \theta, \phi) = \vec{N}_{enm}(\rho, \theta, \phi) + i \vec{N}_{onm}(\rho, \theta, \phi) \quad (4.187)$$

$$\vec{L}_{nm}(\rho, \theta, \phi) = \vec{L}_{enm}(\rho, \theta, \phi) + i \vec{L}_{onm}(\rho, \theta, \phi). \quad (4.188)$$

El siguiente resultado es clave para poder evaluar las integrales angulares en la transformada de Fourier de estos armónicos esféricos vectoriales [Tsang,2, pg. 28]. Siguiendo a Kong, y con las definiciones dadas en (4.180),(4.181),(4.182), (4.183),(4.184),(4.185) se tiene que la siguiente representación integral es válida

$$\vec{L}_{nm}(kr, \theta, \phi) = \frac{i^{n-1}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikr\hat{r}\cdot\hat{r}'} \vec{P}_{nm}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (4.189)$$

$$\vec{M}_{nm}(kr, \theta, \phi) = \frac{i^n}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikr\hat{r}\cdot\hat{r}'} \vec{C}_{nm}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (4.190)$$

$$\vec{N}_{nm}(kr, \theta, \phi) = \frac{i^{n-1}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikr\hat{r}\cdot\hat{r}'} \vec{B}_{nm}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (4.191)$$

donde

$$\hat{r} \cdot \hat{r}' = \text{sen } \theta \text{ sen } \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta'. \quad (4.192)$$

En el lado derecho, vemos que se trata de la transformada de Fourier de las funciones  $\vec{P}_{nm}(\theta', \phi')$ ,  $\vec{C}_{nm}(\theta', \phi')$ ,  $\vec{B}_{nm}(\theta', \phi')$ , funciones con las cuales es posible expresar los armónicos esféricos vectoriales, el resultado es expresado también en un sistema de coordenadas esféricas, pero en variables angulares  $\theta, \phi$  y omitiendo la parte radial de la transformada de Fourier, la cual también está expresada en un sistema de coordenadas esféricas, pero en el espacio de Fourier.

Las integrales radiales de la transformada de Fourier, incluyen la integración de funciones de Bessel esféricas y son de la forma

$$I_{n,n'}(x_1, x_2, N) := \int_0^1 j_n(x_1 u) j_{n'}(x_2 u) u^N du \quad (4.193)$$

y usando el hecho que

$$j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+1/2}(\rho) \quad (4.194)$$

la integral anterior se puede escribir en términos de funciones de Bessel ordinarias como

$$\frac{\pi}{2\sqrt{x_1 x_2}} \int_0^1 J_{n+1/2}(x_1 u) J_{n'+1/2}(x_2 u) u^{N-1} du \quad (4.195)$$

y utilizando la representación en serie de potencias de las funciones de Bessel [Lebedev, pg.99]

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \quad (4.196)$$

dada en términos de la función gama. Integrando la serie término a término se encuentra que

$$I_{n,n'}(x_1, x_2, N) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+k'} x_1^{n+2k} x_2^{n'+2k'}}{(n+n'+2(k+k')+N+1)} \cdot \frac{1}{2^{n+n'+2(k+k')+1} \Gamma(k+1)\Gamma(k'+1)\Gamma(k+n+\frac{3}{2})\Gamma(k'+n'+\frac{3}{2})}. \quad (4.197)$$

Ahora calcularemos las integrales en la transformada de Fourier de la parte angular de los armónicos esféricos vectoriales. Utilizando (4.183) y tomando la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} & \int_{V_a} \vec{M}_{nm}(k_s r) e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{r}} d^3 r = \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a j_n(k_s r) \vec{C}_{nm}(\theta, \phi) e^{-ip' r \hat{p}' \cdot \hat{r}} \text{sen } \theta r^2 dr d\theta d\phi = \\ & \int_0^a j_n(k_s r) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{C}_{nm}(\theta, \phi) e^{-ip' r \hat{p}' \cdot \hat{r}} \text{sen } \theta d\theta d\phi r^2 dr \end{aligned} \quad (4.198)$$

donde  $V_a$  indica que la integral debe hacerse sobre una esfera de radio  $a$  y hemos utilizado una base esférica  $\{p', \phi'_p, \theta'_p\}$  para expresar la transformada de Fourier, es decir  $\vec{p}' = p' \sin \theta'_p \cos \phi'_p \hat{e}_x + p' \sin \theta'_p \sin \phi'_p \hat{e}_y + p' \cos \theta'_p \hat{e}_z$ , respecto a la base en que se definieron los armónicos esféricos vectoriales, y debemos recordar que las coordenadas de los armónicos esféricos vectoriales se escogen tales que si hay un vector de onda incidente  $\vec{k}$  el eje  $z$  coincide con esta dirección y el eje  $x$  con la dirección de una onda con polarización  $s$ .

Utilizando (4.190) y (4.183) se tiene que

$$\int_{V_a} \vec{M}_{nm}(k_s r) e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{r}} d^3 r = \int_0^a j_n(k_s r) \vec{M}_{nm}(p' r, \theta'_p, \phi'_p) r^2 dr \quad (4.199)$$

$$= \frac{4\pi}{i^n} \int_0^a j_n(k_s r) j_n(p' r) r^2 dr \vec{C}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \quad (4.200)$$

que es la transformada de Fourier tridimensional en una base esférica  $\{p', \phi'_p, \theta'_p\}$  y haciendo uso de la notación (4.193) podemos escribir como

$$\hat{F} \vec{M}_{nm}(p', \theta'_p, \phi'_p) = \frac{4\pi a^3}{i^n} I_{n,n}(k_s a, p' a, 2) \vec{C}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \quad (4.201)$$

donde hemos denotado la transformada de Fourier tridimensional como  $\hat{F}$  y donde [Barrera,1]

$$I_{n,n}(x_1, x_2, 2) = \frac{1}{x_1^2 - x_2^2} (x_2 j_n(x_1) j_{n-1}(x_2) - x_1 j_{n-1}(x_1) j_n(x_2)) \quad (4.202)$$

por lo que la transformada de Fourier de  $\vec{M}_{enm}$ , en la notación que se definió anteriormante, se escribe como

$$\hat{F}\vec{M}_{enm}(p', \theta'_p, \phi'_p) = \frac{4\pi a^3}{i^n} I_{n,n}(k_s a, p' a, 2) \text{Re} \vec{C}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \quad (4.203)$$

$$\hat{F}\vec{M}_{onm}(p', \theta'_p, \phi'_p) = \frac{4\pi a^3}{i^n} I_{n,n}(k_s a, p' a, 2) \text{Im} \vec{C}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p). \quad (4.204)$$

Ahora calculamos la transformada de Fourier de  $\vec{N}_{nm}$  utilizando (4.184), es decir

$$\begin{aligned} \hat{F}\vec{N}_{nm}(p', \theta'_p, \phi'_p) &= \int_{V_a} \vec{N}_{nm}(k_s r) e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{r}} d^3 r = \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( n(n+1) \frac{j_n(\rho)}{\rho} \vec{P}_{nm}(\theta, \phi) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \right) \Big|_{\rho=k_s r} \\ &\quad e^{-ip'r\hat{p}' \cdot \hat{r}} \text{sen } \theta d\theta d\phi r^2 dr \end{aligned} \quad (4.205)$$

y utilizando (4.190), (4.191) encontramos que

$$\begin{aligned} \hat{F}\vec{N}_{nm} &= \frac{4\pi}{i^{n-1}} \int_0^a \left( n(n+1) \frac{j_n(k_s r)}{k_s r} \vec{L}_{nm}(p'r, \theta'_p, \phi'_p) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \Big|_{\rho=k_s r} \vec{N}_{nm}(p'r, \theta'_p, \phi'_p) \right) r^2 dr \end{aligned} \quad (4.206)$$

sustituyendo (4.185), (4.184) en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{F}\vec{N}_{nm} &= \frac{4\pi}{i^{n-1}} \int_0^a n(n+1) \frac{j_n(k_s r)}{k_s r} \\ &\quad \left( \frac{d}{d\rho} j_n(\rho) \vec{P}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) + \frac{j_n(\rho)}{\rho} \vec{B}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \right) \Big|_{\rho=p'r} r^2 dr \\ &+ \frac{4\pi}{i^{n-1}} \int_0^a \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \Big|_{\rho=k_s r} \left( n(n+1) \frac{j_n(\rho)}{\rho} \vec{P}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \vec{B}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \right) \Big|_{\rho=p'r} r^2 dr \end{aligned} \quad (4.207)$$

que se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\hat{F}\vec{N}_{nm} &= \frac{4\pi a^3}{i^{n-1}} n(n+1) \frac{1}{a^3} \int_0^a \left( \frac{j_n(k_s r)}{k_s r} \frac{d}{d\rho} j_n(\rho) \Big|_{\rho=p'r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \Big|_{\rho=k_s r} \frac{j_n(\rho)}{\rho} \Big|_{\rho=p'r} \right) r^2 dr \vec{P}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \\
&\quad + \frac{4\pi a^3}{i^{n-1}} \frac{1}{a^3} \int_0^a \left( n(n+1) \frac{j_n(k_s r)}{k_s r} \frac{j_n(\rho)}{\rho} \Big|_{\rho=p'r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \Big|_{\rho=k_s r} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \Big|_{\rho=p'r} \right) r^2 dr \vec{B}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \quad (4.208)
\end{aligned}$$

y si definimos

$$\begin{aligned}
J_1(n, k_s a, p' a) &\equiv \frac{1}{a^3} \int_0^a \left( \frac{j_n(k_s r)}{k_s r} \frac{d}{d\rho} j_n(\rho) \Big|_{\rho=p'r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \Big|_{\rho=k_s r} \frac{j_n(\rho)}{\rho} \Big|_{\rho=p'r} \right) r^2 dr = \frac{j_n(ak_s)}{ak_s} \frac{j_n(ap')}{ap'} \quad (4.209)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2(n, k_s a, p' a) &\equiv \frac{1}{a^3} \int_0^a \left( n(n+1) \frac{j_n(k_s r)}{k_s r} \frac{j_n(p'r)}{p'r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \Big|_{\rho=k_s r} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \Big|_{\rho=p'r} \right) r^2 dr. \quad (4.210)
\end{aligned}$$

Para calcular  $J_2$ , las integrales del lado derecho de (4.210) se pueden evaluar en términos de (4.193) como sigue

$$n(n+1) \frac{1}{a^3} \int_0^a \frac{j_n(k_s r)}{k_s r} \frac{j_n(p'r)}{p'r} r^2 dr = n(n+1) \frac{1}{k_s a p' a} I_{n,n}(k_s a, p' a, 0) \quad (4.211)$$

y el término del lado derecho de (4.210)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^3} \int_0^a \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \Big|_{\rho=k_s r} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho)) \Big|_{\rho=p'r} r^2 dr = \\
&\frac{1}{a^3 k_s p' a} \int_0^a ((n+1)j_n(k_s r) - k_s r j_{n+1}(k_s r)) ((n+1)j_n(p'r) - p'r j_{n+1}(p'r)) dr \\
&= \frac{1}{k_s a p' a} ((n+1)^2 I_{n,n}(k_s a, p' a, 0) - p' a (n+1) I_{n,n+1}(k_s a, p' a, 1))
\end{aligned}$$

$$-k_s a(n+1)I_{n+1,n}(k_s a, p'a, 1) + k_s a p'a I_{n+1,n+1}(k_s a, p'a, 2) \quad (4.212)$$

donde se usó

$$\frac{d}{dr}(r j_n(k_s r)) = (n+1)j_n(k_s r) - k_s r j_{n+1}(k_s r), \quad (4.213)$$

que puede deducirse fácilmente de [Abramowitz, Ec. 10.1.22]. Y por lo tanto

$$J_2(n, k_s a, p'a) = \quad (4.214)$$

$$\frac{1}{k_s a p'a} ((n+1)(2n+1)I_{n,n}(k_s a, p'a, 0) - p'a(n+1)I_{n,n+1}(k_s a, p'a, 1) - k_s a(n+1)I_{n+1,n}(k_s a, p'a, 1) + k_s a p'a I_{n+1,n+1}(k_s a, p'a, 2))$$

y de hecho aquí hay un resultado interesante, que estas integrales están relacionadas con los coeficientes del campo eléctrico esparcido e inducido dentro de la esfera, en el caso que la esfera no presente magnetización, el resultado fué encontrado al hacer una expansión del campo eléctrico lejos de la esfera dado en forma integral en términos de la función de Green del vacío, que en este límite se convierte en una transformada de Fourier. Los detalles de este cálculo se muestran más adelante en el resultado (12). Por lo tanto  $J_2$  tiene el valor exacto de

$$J_2(n, k_s a, p'a) = \frac{i}{p'a((k_s a)^2 - (p'a)^2)} \frac{\tilde{a}_n(p'a, k_s a)}{\tilde{d}_n(p'a, k_s a)} \quad (4.215)$$

donde  $\tilde{b}_n(p'a, k_s a)$ ,  $\tilde{d}_n(p'a, k_s a)$  son las amplitudes del resultado (4) calculados sin magnetización. Entonces la transformada de Fourier para  $\vec{N}_{nm}$  será

$$\hat{F} \vec{N}_{nm} = \quad (4.216)$$

$$\frac{4\pi a^3}{i^{n-1}} \left( n(n+1)J_1(n, k_s a, p'a) \vec{P}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) + J_2(n, k_s a, p'a) \vec{B}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \right)$$

y en la notación donde se separan los terminos pares e impares

$$\hat{F} \vec{N}_{enm} = \quad (4.217)$$

$$\frac{4\pi a^3}{i^{n-1}} \left( n(n+1)J_1(n, k_s a, p'a) Re \vec{P}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) + J_2(n, k_s a, p'a) Re \vec{B}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \right)$$

$$\hat{F} \vec{N}_{onm} = \quad (4.218)$$

$$\frac{4\pi a^3}{i^{n-1}} \left( n(n+1)J_1(n, k_s a, p' a) \text{Im} \vec{P}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) + J_2(n, k_s a, p' a) \text{Im} \vec{B}_{nm}(\theta'_p, \phi'_p) \right).$$

Y por último la transformada de Fourier de  $e^{ipz}$ , que podemos escribirlo de una forma que no dependa del sistema de referencia que estemos usando como  $e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$  y su transformada de Fourier se calcula como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{i\vec{r}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} &= 2\pi \int_0^a r^2 dr \int_{-1}^1 d\mu e^{ir|\vec{p}-\vec{p}'|\mu} \\ &= 4\pi a^3 \frac{1}{a|\vec{p}-\vec{p}'|} \left( \frac{\sin a|\vec{p}-\vec{p}'|}{a^2|\vec{p}-\vec{p}'|^2} - \frac{\cos a|\vec{p}-\vec{p}'|}{a|\vec{p}-\vec{p}'|} \right) \\ &= 4\pi a^3 \frac{j_1(a|\vec{p}-\vec{p}'|)}{a|\vec{p}-\vec{p}'|} \end{aligned} \quad (4.219)$$

donde  $\mu = \cos\theta$  y como un caso particular si  $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = k_0$  y  $\theta$  el ángulo que forman implica que  $|\vec{p}-\vec{p}'| = 2k_0 \sin\frac{\theta}{2}$ , la expresión anterior se escribe como

$$\frac{j_1(a|\vec{p}-\vec{p}'|)}{a|\vec{p}-\vec{p}'|} = \frac{j_1(2ak_0 \sin\frac{\theta}{2})}{2ak_0 \sin\frac{\theta}{2}}. \quad (4.220)$$

Con todo esto hecho, podemos calcular de manera exacta la transformada de Fourier de cada armónico esférico vectorial y cualquier onda plana, en términos de las coordenadas de  $\vec{p}'$  la variable de la transformada de Fourier, respecto de  $\vec{r}$ , y en el sistema de referencia tal que  $\vec{p}$  el vector de onda del campo eléctrico externo coincide con el eje  $z$ , ver figura (4.2), por lo que tenemos que la transformada de Fourier de la corriente interna inducida dada por las expresiones (4.174),(4.175),(4.176) se puede expresar como sigue.

**Resultado 8** *La transformada de Fourier de las componentes del tensor generalizado de conductividad no local en el caso que no son tomadas en cuenta las corrientes de superficie debidas a la magnetización de la esfera son:*

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}_V(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_x &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} (c_n(pa) I_{n,n}(k_s a, p' a, 2) \text{Im} \vec{C}_{n1}(\theta'_p, \phi'_p) \\ &+ d_n(pa) \left( n(n+1)J_1(n, k_s a, p' a) \text{Re} \vec{P}_{n1}(\theta'_p, \phi'_p) + J_2(n, k_s a, p' a) \text{Re} \vec{B}_{n1}(\theta'_p, \phi'_p) \right)) \end{aligned}$$

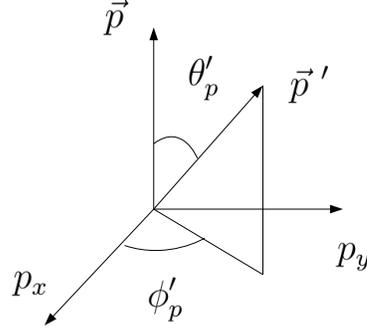


Figura 4.2: En esta figura se muestran las coordenadas esféricas del vector  $\vec{p}'$  respecto del vector  $\vec{p}$

$$+4\pi a^3 \sigma_p \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} \frac{j_1(a|\vec{p} - \vec{p}'|)}{a|\vec{p} - \vec{p}'|} \hat{e}_x \quad (4.221)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}_V(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_y &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left( c_n(pa) I_{n,n}(k_s a, p'a, 2) \text{Re} \vec{C}_{n1}(\theta'_p, \phi'_p) \right. \\ &\quad \left. - d_n(pa) \left( n(n+1) J_1(n, k_s a, p'a) \text{Im} \vec{P}_{n1}(\theta'_p, \phi'_p) + J_2(n, k_s a, p'a) \text{Im} \vec{B}_{n1}(\theta'_p, \phi'_p) \right) \right) \\ &\quad + 4\pi a^3 \sigma_p \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} \frac{j_1(a|\vec{p} - \vec{p}'|)}{a|\vec{p} - \vec{p}'|} \hat{e}_y \end{aligned} \quad (4.222)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}_V(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_z &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) d_n^L(pa) \left( n(n+1) J_1(n, k_s a, p'a) \text{Re} \vec{P}_{n0}(\theta'_p, \phi'_p) + \right. \\ &\quad \left. J_2(n, k_s a, p'a) \text{Re} \vec{B}_{n0}(\theta'_p, \phi'_p) \right) + 4\pi a^3 \sigma_{pz} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s} \frac{j_1(a|\vec{p} - \vec{p}'|)}{a|\vec{p} - \vec{p}'|} \hat{e}_z \end{aligned} \quad (4.223)$$

donde  $\sigma_s, \sigma_p, \sigma_{pz}$  están dadas por

$$\sigma_s = \frac{1}{i\omega\mu_0}(k_s^2 - k_0^2) \quad (4.224)$$

$$\sigma_p = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left( \omega^2\mu_0(\epsilon_s - \epsilon_0) + \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_s}\right) p^2 \right) \quad (4.225)$$

$$\sigma_{pz} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \omega^2\mu_0(\epsilon_s - \epsilon_0) \quad (4.226)$$

Y donde debemos recordar que la base  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$  (en el espacio real) es tal que  $\hat{e}_z$  coincide con la dirección de  $\vec{p}$  para las distintas polarizaciones del campo eléctrico externo. Los ángulos  $\theta'_p, \phi'_p$ , son las coordenadas esféricas de  $\vec{p}'$  respecto de  $\vec{p}$  (en el espacio de Fourier), es decir, una vez que fijamos el sistema de referencia tomando el eje  $z$  con la dirección de  $\vec{p}$ , podemos dar las coordenadas del vector  $\vec{p}'$  en este sistema de referencia, ver figura (4.2), también los armónicos esféricos vectoriales son medidos respecto a esta base.

## 4.6. Corrientes superficiales de magnetización

Si quisieramos incluir las corrientes de magnetización inducidas en la superficie de la esfera, entonces debemos incluir el término de corriente superficial (4.162) y tomar su transformada de Fourier, esto se hace a continuación.

Puesto que el término de superficie (4.162) incluye una delta de Dirac para  $r = a$ , entonces la transformada de Fourier  $\vec{p}'$  del término de superficie es

$$\vec{J}_\Sigma(\vec{p}', \vec{p}) = a^2 \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \hat{e}_r \times \vec{H}_I e^{-ip'a\hat{p}' \cdot \hat{r}} \sin\theta d\theta d\phi. \quad (4.227)$$

El campo  $\vec{H}_I$  dado por (4.116)-(4.117), y puesto que los armónicos vectoriales pueden expresarse en términos de las funciones  $\vec{P}_{nm}, \vec{B}_{nm}, \vec{C}_{nm}$  de la forma

$$\vec{M}_{nm}(\rho, \theta, \phi) = j_n(\rho)\vec{C}_{nm}(\theta, \phi) \quad (4.228)$$

$$\vec{N}_{nm}(\rho, \theta, \phi) = n(n+1)\frac{j_n(\rho)}{\rho}\vec{P}_{nm}(\theta, \phi) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho j_n(\rho))\vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (4.229)$$

y además como

$$\hat{e}_r \times \vec{P}_{mn}(\theta, \phi) = 0 \quad (4.230)$$

$$\hat{e}_r \times \vec{B}_{mn}(\theta, \phi) = -\vec{C}_{mn}(\theta, \phi) \quad (4.231)$$

$$\hat{e}_r \times \vec{C}_{mn}(\theta, \phi) = \vec{B}_{mn}(\theta, \phi) \quad (4.232)$$

por (4.190),(4.191) se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \hat{e}_r \times \vec{B}_{nm} e^{ip'a\hat{p}' \cdot \hat{r}} \text{sen } \theta d\theta d\phi = -\frac{4\pi}{i^n} \vec{M}_{nm}(p'a, \theta'_p, \phi'_p) \quad (4.233)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \hat{e}_r \times \vec{C}_{nm} e^{ip'a\hat{p}' \cdot \hat{r}} \text{sen } \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi}{i^{n-1}} \vec{N}_{nm}(p'a, \theta'_p, \phi'_p). \quad (4.234)$$

Con estos resultados podemos enunciar el siguiente resultado

**Resultado 9** *El término de corriente de superficie está dado por (4.162) que da la corriente de superficie, y aplicando las mismas fórmulas de integración (4.190)-(4.191) encontramos que la transformada de Fourier del término de corriente de superficie cuando consideramos que el campo eléctrico externo tiene amplitud unitaria da una parte del tensor de conductividad no local debida a las corrientes de superficie, es decir*

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}_\Sigma(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_x &= 4\pi a^2 \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ \right. \\ &\left. \left( \frac{k_s}{i\omega\mu_s} c_n(pa) J_n^*(k_s a) + \alpha^* \frac{p}{i\omega\mu_0} J_n^*(pa) \right) \vec{M}_{on1}(p'a, \theta'_p, \phi'_p) \right. \\ &\left. - \left( \frac{k_s}{i\omega\mu_s} d_n(pa) j_n(k_s a) + \alpha^* \frac{p}{i\omega\mu_0} j_n(pa) \right) \vec{N}_{en1}(p'a, \theta'_p, \phi'_p) \right] \quad (4.235) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}_\Sigma(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_y &= -4\pi a^2 \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ \right. \\ &\left. \left( \frac{k_s}{i\omega\mu_s} c_n(pa) J_n^*(k_s a) + \alpha^* \frac{p}{i\omega\mu_0} J_n^*(pa) \right) \vec{M}_{en1}(p'a, \theta'_p, \phi'_p) \right. \\ &\left. + \left( \frac{k_s}{i\omega\mu_s} d_n(pa) j_n(k_s a) + \alpha^* \frac{p}{i\omega\mu_0} j_n(pa) \right) \vec{N}_{on1}(p'a, \theta'_p, \phi'_p) \right] \quad (4.236) \end{aligned}$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}_{\Sigma}(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_z = 4\pi a^2 \left( \frac{\mu_0}{\mu_s} - 1 \right) \frac{k_s}{i\omega\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) d_n^L(pa) j_n(k_s a) \vec{N}_{en0}(p'a, \theta'_p, \phi'_p) \quad (4.237)$$

donde

$$\alpha^* = \frac{p^2 - k_0^2}{p^2 - k_s^2}. \quad (4.238)$$

Por lo tanto el tensor generalizado de conductividad no local es

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}) = \overleftrightarrow{\sigma}_V(\vec{p}', \vec{p}) + \overleftrightarrow{\sigma}_{\Sigma}(\vec{p}', \vec{p}). \quad (4.239)$$

Y donde debemos recordar que la base  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$  (en el espacio real) es tal que  $\hat{e}_z$  coincide con la dirección de  $\vec{p}$  y el eje  $x$  con la polarización del campo eléctrico externo. Los ángulos  $\theta'_p, \phi'_p$ , son las coordenadas esféricas de  $\vec{p}'$  respecto de  $\vec{p}$  (en el espacio de Fourier), ver figura (4.2), que aparecen en la expresión para los vectores armónicos esféricos, los cuales también son medidos respecto a esta base.

## Comentario

En [Tsang,1] se encuentran expresiones para la componentes del operador de transición o matriz  $\overleftrightarrow{T}$  en el espacio de Fourier, que está relacionado con el tensor generalizado de conductividad no local para la esfera y de hecho [Alejandro,1]

$$\overleftrightarrow{T}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{i\omega\mu_0} \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (4.240)$$

pero este es calculado con otro enfoque, obteniendo expresiones complicadas, motivo por el cual se optó por este enfoque alternativo .

Las siguientes secciones, tienen como propósito, encontrar expresiones aproximadas ó con valores especiales del tensor generalizado de conductividad no local.

### 4.7. Conductividad no local cuando $\vec{p}'_{||} = \vec{p}_{||} = \vec{k}_{||}$

Un caso especial del tensor generalizado de conductividad no local que será necesario cuando estudiemos el problema de la reflexión y transmisión de la luz de un semiespacio de esferas colocadas al azar y tales que sus centros se encuentran  $z > a$ , es que en este caso pediremos que  $\vec{p} = \vec{k}_{||} + p_z \hat{e}_z$ ,  $\vec{p}' = \vec{k}_{||} + p'_z \hat{e}_z$ , es decir, evaluamos el tensor de conductividad no local de la manera  $\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, p_z, \vec{k}_{||}, p'_z)$ .

En la notación utilizada, que es la de utilizar una base esférica, esta condición se expresa diciendo que  $\phi'_p = \pi/2$ , donde  $\phi'_p$  es la coordenada azimutal de  $\vec{p}'$  respecto de la base coordenada  $x, y, z$  y tal que el eje  $z$  coincida con la dirección de  $\vec{p}$  y además  $\theta$  es el ángulo que forman  $\vec{p}, \vec{p}'$ .

En esta evaluación del tensor de conductividad no local, se tiene que la base de vectores esféricas tiende a

$$\hat{e}_r \rightarrow \text{sen } \theta \hat{e}_y + \text{cos } \theta \hat{e}_z \quad (4.241)$$

$$\hat{e}_\theta \rightarrow \text{cos } \theta \hat{e}_y - \text{sen } \theta \hat{e}_z \quad (4.242)$$

$$\hat{e}_\phi \rightarrow -\hat{e}_x \quad (4.243)$$

cuando  $\phi'_p \rightarrow \pi/2$  además se tiene que  $e^{im\pi/2} = i^m$ , y por lo tanto (4.180)-(4.182) se reducen a:

$$\vec{P}_{n1}(\theta, \phi = \pi/2) = iP_n^1(\text{cos } \theta) \hat{e}_r \quad (4.244)$$

$$\vec{B}_{n1}(\theta, \pi/2) = i \frac{d}{d\theta} P_n^1(\text{cos } \theta) \hat{e}_\theta + \frac{P_n^1(\text{cos } \theta)}{\text{sen } \theta} \hat{e}_x \quad (4.245)$$

$$\vec{C}_{n1}(\theta, \pi/2) = -\frac{P_n^1(\text{cos } \theta)}{\text{sen } \theta} \hat{e}_\theta + i \frac{d}{d\theta} P_n^1(\text{cos } \theta) \hat{e}_x \quad (4.246)$$

$$\vec{P}_{n0}(\theta, \pi/2) = P_n(\text{cos } \theta) \hat{e}_r \quad (4.247)$$

$$\vec{B}_{n0}(\theta, \pi/2) = \frac{d}{d\theta} P_n(\text{cos } \theta) \hat{e}_\theta \quad (4.248)$$

$$\vec{C}_{n0}(\theta, \pi/2) = \frac{d}{d\theta} P_n(\text{cos } \theta) \hat{e}_x \quad (4.249)$$

por lo que sustituyendo en (4.221)-(4.223) y cuando sea necesario las definiciones de los armónicos vectoriales  $\vec{M}, \vec{N}$  en términos de los vectores angulares  $\vec{P}, \vec{B}, \vec{C}$  (4.183),(4.184), se tiene el siguiente resultado:

**Resultado 10** *La expresión para el tensor generalizado de conductividad no local de la esfera en el caso que las componentes paralelas  $\vec{p}_{\parallel} = \vec{p}'_{\parallel} = \vec{k}_{\parallel}$  es*

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}_V(\vec{k}_{\parallel}, p'_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z) \cdot \hat{e}_x &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} \\ &\left( c_n(pa) I_{n,n}(k_s a, p' a, 2) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) + d_n(pa) J_2(n, k_s a, p' a) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \right) \hat{e}_x + \\ &4\pi a^3 \sigma_p \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} \frac{j_1(a|p_z - p'_z|)}{a|p_z - p'_z|} \hat{e}_x \end{aligned} \quad (4.250)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}_V(\vec{k}_{\parallel}, p'_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z) \cdot \hat{e}_y &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} \\ &\left( c_n(pa) I_{n,n}(k_s a, p' a, 2) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \hat{e}_\theta \right. \\ &\left. + d_n(pa) \left( n(n+1) J_1(n, k_s a, p' a) P_n^1(\cos \theta) \hat{e}_r + J_2(n, k_s a, p' a) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \hat{e}_\theta \right) \right) \\ &+ 4\pi a^3 \sigma_p \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} \frac{j_1(a|p_z - p'_z|)}{a|p_z - p'_z|} \hat{e}_y \end{aligned} \quad (4.251)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}_V(\vec{k}_{\parallel}, p'_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z) \cdot \hat{e}_z &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) d_n^L(pa) \\ &\left( n(n+1) J_1(n, k_s a, p' a) P_n(\cos \theta) \hat{e}_r + J_2(n, k_s a, p' a) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \hat{e}_\theta \right) \\ &+ 4\pi a^3 \sigma_{pz} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s} \frac{j_1(a|p_z - p'_z|)}{a|p_z - p'_z|} \hat{e}_z \end{aligned} \quad (4.252)$$

donde

$$\hat{e}_y = \text{sen } \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta \quad (4.253)$$

$$\hat{e}_z = \cos \theta \hat{e}_r - \text{sen } \theta \hat{e}_\theta \quad (4.254)$$

si  $\phi = \pi/2$  y donde  $\sigma_s, \sigma_p, \sigma_{pz}$  están dadas por (4.172). Esta expresión es válida cuando no se toma en cuenta la corriente de magnetización inducida sobre la superficie de la esfera (4.162), si la hay debemos incluir las corrientes de superficie dadas por (4.235)-(4.237) y el resultado es

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}'_{\Sigma}(\vec{k}_{\parallel}, p'_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z) \cdot \hat{e}_x &= 4\pi a^2 \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ \right. \\ &\left. \left( \frac{k_s}{i\omega\mu_s} c_n(pa) J_n^*(k_s a) + \alpha^* \frac{p}{i\omega\mu_0} J_n^*(pa) \right) j_n(p'a) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos\theta) \right. \\ &\left. - \left( \frac{k_s}{i\omega\mu_s} d_n(pa) j_n(k_s a) + \alpha^* \frac{p}{i\omega\mu_0} j_n(pa) \right) J_n^*(p'a) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right] \hat{e}_x \end{aligned} \quad (4.255)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}'_{\Sigma}(\vec{k}_{\parallel}, p'_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z) \cdot \hat{e}_y &= 4\pi a^2 \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ \right. \\ &\left( \frac{k_s}{i\omega\mu_s} c_n(pa) J_n^*(k_s a) + \alpha^* \frac{p}{i\omega\mu_0} J_n^*(pa) \right) j_n(p'a) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{e}_{\theta} \\ &- \left( \frac{k_s}{i\omega\mu_s} d_n(pa) j_n(k_s a) + \alpha^* \frac{p}{i\omega\mu_0} j_n(pa) \right) \\ &\left. \left( n(n+1) \frac{j_n(p'a)}{p'a} P_n^1(\cos\theta) \hat{e}_r + J_n^*(p'a) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos\theta) \hat{e}_{\theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.256)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}'_{\Sigma}(\vec{k}_{\parallel}, p'_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z) \cdot \hat{e}_z &= 4\pi a^2 \left( \frac{\mu_0}{\mu_s} - 1 \right) \frac{k_s}{i\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) d_n^L(pa) j_n(k_s a) \\ &\left( n(n+1) \frac{j_n(p'a)}{p'a} P_n(\cos\theta) \hat{e}_r + J_n^*(p'a) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) \hat{e}_{\theta} \right) \end{aligned} \quad (4.257)$$

y el ángulo  $\theta$  se determina por la relación

$$\cos\theta = \frac{k_{\parallel}^2 + p'_z p_z}{p' p} \quad (4.258)$$

$$p' = (k_{\parallel}^2 + p_z'^2)^{1/2} \quad (4.259)$$

$$p = (k_{\parallel}^2 + p_z^2)^{1/2} \quad (4.260)$$

y además

$$\alpha^* = \frac{p^2 - k_0^2}{p^2 - k_s^2} \quad (4.261)$$

$$\frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) = P_n^1(\cos \theta) \quad (4.262)$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad (4.263)$$

$$\sigma_s = \frac{1}{i\omega\mu_0} (k_s^2 - k_0^2) \quad (4.264)$$

$$\sigma_p = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left( \omega^2 \mu_0 (\epsilon_s - \epsilon_0) + \left( 1 - \frac{\mu_0}{\mu_s} \right) p^2 \right) \quad (4.265)$$

$$\sigma_{pz} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \omega^2 \mu_0 (\epsilon_s - \epsilon_0) \quad (4.266)$$

en caso de no tener magnetización,  $\sigma_p = \sigma_{pz} = \sigma_s = \frac{1}{i\omega\mu_0} (k_s^2 - k_0^2)$ , es decir son constantes y valen lo mismo.

Estas expresiones serán necesarias más adelante en el problema de reflexión cuando se tiene una interfaz plana.

## 4.8. Conductividad no local cuando no hay magnetización y $\vec{p}_{||} = \vec{p}'_{||}$

En este caso se tiene que los términos de corrientes de superficie (4.255), (4.256), (4.257) son cero, y cada una de las componentes del tensor generalizado de conductividad no local, donde separando las componentes en la base esférica tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\vec{k}_{||}, p'_z, \vec{k}_{||}, p_z) &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} \\ &\left( c_n(pa) I_{n,n}(k_s a, p'a, 2) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) + d_n(pa) J_2(n, k_s a, p'a) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) + \\ &4\pi a^3 \sigma_s \frac{p^2 - k_0^2}{p^2 - k_s^2} \frac{j_1(a|p_z - p'_z|)}{a|p_z - p'_z|} \end{aligned} \quad (4.267)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta y}(\vec{k}_{||}, p'_z, \vec{k}_{||}, p_z) &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n+1}{n(n+1)} \\
&\left( c_n(pa) I_{n,n}(k_s a, p' a, 2) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} + d_n(pa) J_2(n, k_s a, p' a) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right) \\
&+ 4\pi a^3 \sigma_s \frac{p^2 - k_0^2}{p^2 - k_s^2} \frac{j_1(a|p_z - p'_z|)}{a|p_z - p'_z|} \cos \theta \quad (4.268)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ry}(\vec{k}_{||}, p'_z, \vec{k}_{||}, p_z) &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} -(2n+1) d_n(pa) J_1(n, k_s a, p' a) P_n^1(\cos \theta) \\
&+ 4\pi a^3 \sigma_s \frac{p^2 - k_0^2}{p^2 - k_s^2} \frac{j_1(a|p_z - p'_z|)}{a|p_z - p'_z|} \text{sen } \theta \quad (4.269)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta z}(\vec{k}_{||}, p'_z, \vec{k}_{||}, p_z) &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) d_n^L(pa) J_2(n, k_s a, p' a) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \\
&- 4\pi a^3 \sigma_s \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s} \frac{j_1(a|p_z - p'_z|)}{a|p_z - p'_z|} \text{sen } \theta \quad (4.270)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rz}(\vec{k}_{||}, p'_z, \vec{k}_{||}, p_z) &= 4\pi a^3 \sigma_s \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) d_n^L(pa) n(n+1) J_1(n, k_s a, p' a) P_n(\cos \theta) \\
&+ 4\pi a^3 \sigma_s \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s} \frac{j_1(a|p_z - p'_z|)}{a|p_z - p'_z|} \cos \theta \quad (4.271)
\end{aligned}$$

## 4.9. Conductividad no local cuando $|\vec{p}'| = |\vec{p}| = k_0$

En esta sección exploraremos algunas ideas y aproximaciones que usaremos posteriormente para realizar cálculos numéricos del tensor generalizado de conductividad no local.

Un caso que consideraremos de especial importancia en el problema de la reflexión transmisión y refracción de la luz por un semiespacio de esferas

colocadas al azar, es cuando  $|\vec{p}'| = |\vec{p}| = k_0$ , es decir sus magnitudes son iguales a las del vector de propagación en el vacío.

Veremos, que esta situación está relacionada con el problema de aproximar el campo eléctrico en el campo lejano, con las propiedades de conductividad de la esfera, en nuestro caso con el tensor de conductividad no local. Esto se aclarará conforme avancemos en la deducción

El campo eléctrico esparcido por una esfera debido a la presencia de una onda plana incidente en el campo lejano es una onda esférica multiplicada por una función que depende de las variables angulares, y la polarización de la onda incidente [Bohren,1, pg.63]. Es decir

$$\vec{E}_s = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \overleftrightarrow{S}(\theta, \phi) \cdot \hat{e}^i E_0 \quad (4.272)$$

donde  $\overleftrightarrow{S}(\theta, \phi)$  es la matriz de esparcimiento,  $\theta$  es ángulo que forman la dirección de la onda incidente con la dirección de observación,  $E_0$  la amplitud de la onda incidente y  $\hat{e}^i$  su vector de polarización.

El campo eléctrico esparcido por una esfera aislada, en términos de la corriente inducida dentro de la esfera (4.1), por causa de una onda plana incidente, es de la forma

$$\vec{E}_s(\vec{r}) = i\omega\mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}', \vec{r}'') \cdot \hat{e}^i e^{i\vec{k}^i \cdot \vec{r}''} \quad (4.273)$$

donde la polarización de la onda incidente es  $\hat{e}^i$  y su vector de onda  $\vec{k}^i$  es tal que  $|\vec{k}^i| = k_0$  donde  $k_0$  es el vector de onda en el vacío.

La función de Green para el campo electromagnético que se define como la solución a la ecuación

$$\nabla \times \nabla \times \overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') - k_0^2 \overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \overleftrightarrow{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.274)$$

se escribe como en [Tsang,2, pg.55]

$$\overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \left( \overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right) \frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (4.275)$$

Sustituyendo esta expresión para la función de Green del campo electromagnético en el espacio libre en (4.273), y considerando el campo lejano, es decir, si  $|\vec{r}| \gg 0$  tenemos que

$$k_0|\vec{r} - \vec{r}'| = k_0r(1 - 2\hat{r} \cdot \vec{r}' + \frac{r'^2}{r^2})^{1/2} \approx k_0r - \vec{k}^s \cdot \vec{r}' \quad (4.276)$$

donde  $\vec{k}^s = k_0\hat{r}$ , y  $\hat{r}$  el vector unitario radial. Utilizando esta aproximación el campo eléctrico esparcido puede escribirse como

$$\vec{E}_s = i\omega\mu_0 \left( \overleftarrow{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right) \frac{e^{ik_0r}}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' e^{-i\vec{k}^s \cdot \vec{r}'} \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{r}', \vec{r}'') e^{i\vec{k}^i \cdot \vec{r}''} \cdot \hat{e}^i. \quad (4.277)$$

Para poder extraer los operadores diferenciales fuera de la integral fué necesario suponer que el punto de observación estaba fuera de la región de integración. Con estas consideraciones y al orden de aproximación  $O(1/r)$ , se tiene que el campo eléctrico vale

$$\vec{E}_s = i\omega\mu_0 \frac{e^{ik_0r}}{4\pi r} \left( \overleftarrow{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s \right) \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}^i + O(1/r^2) \quad (4.278)$$

Éste es un resultado general, que nos indica que el campo eléctrico evaluado lejos de la esfera lleva información acerca del tensor generalizado de conductividad no local.

La expresión para el campo lejano cuando la onda incidente es una onda plana que se propaga en el vacío, se obtiene de (4.119), haciendo  $p = k_0$ , por lo que los campos eléctricos esparcidos para cada polarización de la onda incidente  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  son:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, \hat{e}_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (b_n \vec{M}_{on1}^{(3)}(k_0r) - ia_n \vec{N}_{en1}^{(3)}(k_0r)) \quad (4.279)$$

$$\vec{E}_s(\vec{r}, \hat{e}_y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(2n+1)}{n(n+1)} i^n (b_n \vec{M}_{en1}^{(3)}(k_0r) + ia_n \vec{N}_{on1}^{(3)}(k_0r)) \quad (4.280)$$

$$\vec{E}_s(\vec{r}, \hat{e}_z) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) i^{n-1} a_n^L \vec{N}_{en0}^{(3)}(k_0r). \quad (4.281)$$

para cada polarización de la onda incidente respectivamente y donde la segunda variable de  $\vec{E}_s(\vec{r}, \hat{e}_z)$  indica la polarización de la onda incidente, y

recordamos que el número de onda de la onda incidente es  $k_0$  y hemos considerado que la amplitud de la onda incidente es unitaria.

Como no es posible propagar una onda longitudinal de la forma  $\hat{e}_z e^{ik_0 z}$  en el vacío, el último caso es posible solo si existe una corriente externa. Las amplitudes están dadas por

$$a_n(k_0 a, k_s a) = \frac{J_n^*(k_0 a) \frac{k_s}{\mu_s} j_n(k_s a) - \frac{k_0}{\mu_0} j_n(k_0 a) J_n^*(k_s a)}{H_n^*(k_0 a) \frac{k_s}{\mu_s} j_n(k_s a) - \frac{k_0}{\mu_0} h_n(k_0 a) J_n^*(k_s a)} \quad (4.282)$$

$$b_n(k_0 a, k_s a) = \frac{j_n(k_0 a) \frac{k_s}{\mu_s} J_n^*(k_s a) - \frac{k_0}{\mu_0} J_n^*(k_0 a) j_n(k_s a)}{h_n(k_0 a) \frac{k_s}{\mu_s} J_n^*(k_s a) - \frac{k_0}{\mu_0} H_n^*(k_0 a) j_n(k_s a)} \quad (4.283)$$

$$a_n^L(k_0 a, k_s a) = \frac{(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s}) \frac{\mu_0}{\epsilon_s} \frac{k_s}{\mu_s} j_n(k_s a) \frac{j_n(k_0 a)}{k_0 a}}{J_n^*(k_s a) h_n(k_0 a) - \frac{\mu_0}{\mu_s} \frac{k_s}{k_0} j_n(k_s a) H_n^*(k_0 a)}. \quad (4.284)$$

donde  $a_n, b_n$  son las amplitudes que se obtienen en la Teoría de Mie. Para el campo eléctrico esparcido, los armónicos esféricos vectoriales están dados en términos de las funciones de Hankel, para estas funciones cuando  $r \rightarrow \infty$  se tiene que

$$h_n(kr) \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{ikr} \quad (4.285)$$

$$\frac{d}{d\rho} h_n(\rho) \Big|_{\rho=kr} \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (4.286)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho h_n(\rho)) \Big|_{\rho=kr} \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (4.287)$$

donde despreciando los términos  $O(1/r^2)$ , y por las definiciones de los armónicos esféricos vectoriales (4.29)-(4.34) se encuentra que

$$\vec{M}_{en1}(kr, \theta, \phi) \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{ikr} \left( -\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin \phi \hat{e}_\theta - \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \cos \phi \hat{e}_\phi \right) \quad (4.288)$$

$$\vec{M}_{on1}(kr, \theta, \phi) \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{ikr} \left( \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos \phi \hat{e}_\theta - \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \sin \phi \hat{e}_\phi \right) \quad (4.289)$$

$$\vec{N}_{en1}(kr, \theta, \phi) \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{kr} \left( \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \cos \phi \hat{e}_\theta - \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \text{sen } \phi \hat{e}_\phi \right) \quad (4.290)$$

$$\vec{N}_{on1}(kr, \theta, \phi) \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{kr} \left( \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \text{sen } \phi \hat{e}_\theta + \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \cos \phi \hat{e}_\phi \right) \quad (4.291)$$

$$\vec{N}_{en0}(kr, \theta, \phi) \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{kr} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \hat{e}_\theta. \quad (4.292)$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.119), (4.120) se encuentra que el campo eléctrico esparcido a orden  $O(1/r)$  es

$$\vec{E}_s(\vec{r}, \hat{e}_x) = \frac{e^{ikr}}{-ikr} (S_{\theta y}(\theta) \cos \phi \hat{e}_\theta - S_{xx}(\theta) \text{sen } \phi \hat{e}_\phi) \quad (4.293)$$

$$\vec{E}_s(\vec{r}, \hat{e}_y) = \frac{e^{ikr}}{-ikr} (S_{\theta y}(\theta) \text{sen } \phi \hat{e}_\theta + S_{xx}(\theta) \cos \phi \hat{e}_\phi) \quad (4.294)$$

$$\vec{E}_s(\vec{r}, \hat{e}_z) = \frac{e^{ikr}}{-ikr} S_{\theta z}(\theta) \hat{e}_\theta. \quad (4.295)$$

donde la segunda variable de  $\vec{E}_s(\vec{r}, \hat{e}_i)$  nos indica la dependencia con la polarización de la onda incidente dada por  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  respectivamente y donde hemos definido las funciones de esparcimiento como <sup>8</sup>

$$S_{\theta y}(\theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left( b_n(k_0 a) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} + a_n(k_0 a) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right) \quad (4.296)$$

$$S_{xx}(\theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left( b_n(k_0 a) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) + a_n(k_0 a) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \right) \quad (4.297)$$

$$S_{\theta z}(\theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) a_n^L(k_0 a) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \quad (4.298)$$

---

<sup>8</sup>Por las definiciones utilizadas, estos elementos de la matriz de esparcimiento difieren de los que utiliza Bohren en su libro [Bohren,1]. Las diferencias son: un factor de  $(-1)$ , por la definición de los polinomios de Legendre.

esté último término es nuevo en la teoría y proviene de suponer que la esfera es excitada por un campo eléctrico longitudinal.

Por otro lado, utilizando el hecho que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d}{d\theta} P_n^0(\cos \theta) = 0$  se tiene que

$$S_{\theta z}(0) = 0. \quad (4.299)$$

Y el hecho que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) = -\frac{1}{2}n(n+1)$  implica que

$$S(0) = S_{\theta y}(0) = S_{xx}(0) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n(k_0 a) + b_n(k_0 a)), \quad (4.300)$$

donde comparando estos resultados con la expresión para el campo lejano (4.278), estamos en posición de enunciar el siguiente resultado:

**Resultado 11** *Las relaciones entre el tensor generalizado de conductividad no local y las funciones de esparcimiento  $S_{\theta y}(\theta)$ ,  $S_{xx}(\theta)$ ,  $S_{\theta z}(\theta)$  definidas por (4.296)-(4.298) utilizando (4.278) son:*

$$i\omega\mu_0 \frac{1}{4\pi} \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_x = \frac{1}{-ik_0} (S_{\theta y}(\theta) \cos \phi \hat{e}_\theta - S_{xx}(\theta) \sin \phi \hat{e}_\phi) \quad (4.301)$$

$$i\omega\mu_0 \frac{1}{4\pi} \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_y = \frac{1}{-ik_0} (S_{\theta y}(\theta) \sin \phi \hat{e}_\theta + S_{xx}(\theta) \cos \phi \hat{e}_\phi) \quad (4.302)$$

$$i\omega\mu_0 \frac{1}{4\pi} \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_z = \frac{1}{-ik_0} S_{\theta z}(\theta) \hat{e}_\theta \quad (4.303)$$

referidas a una base de tal que el eje  $z$  coincide con la dirección de propagación de la onda incidente  $\vec{k}^i$ .

Si escogemos  $\vec{k}^s$ , tal que su coordenada azimutal sea cero, es decir  $\phi = \pi/2$ , las relaciones anteriores se reducen a

$$i\omega\mu_0 \frac{1}{4\pi} \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_x = \frac{1}{-ik_0} S_{xx}(\theta) \hat{e}_x \quad (4.304)$$

$$i\omega\mu_0\frac{1}{4\pi}\left(\overleftrightarrow{I}-\hat{k}^s\hat{k}^s\right)\cdot\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s,\vec{k}^i)\cdot\hat{e}_y=\frac{1}{-ik_0}S_{\theta y}(\theta)\hat{e}_\theta \quad (4.305)$$

$$i\omega\mu_0\frac{1}{4\pi}\left(\overleftrightarrow{I}-\hat{k}^s\hat{k}^s\right)\cdot\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s,\vec{k}^i)\cdot\hat{e}_z=\frac{1}{-ik_0}S_{\theta z}(\theta)\hat{e}_\theta \quad (4.306)$$

## Comentario

Las primeras dos componentes coinciden con el resultado utilizado en [Augusto,3], la última expresión es nueva y se obtiene por el hecho que aunque en el vacío no pueden propagarse modos longitudinales, es posible hacer incidir una onda longitudinal sobre la esfera siempre y cuando esta sea producida por una corriente externa. Dicha corriente externa no aparece en el problema de Mie para campo lejano, pero por tratarse del cálculo de la conductividad no local, esta corriente debe ser incluida, con el fin de obtener todas las componentes del tensor generalizado de conductividad no local.

Este resultado es en si mismo un resultado interesante, ya que da solución al problema inverso de relacionar las corrientes internas inducidas dadas por el tensor generalizado de conductividad no local, con las propiedades del campo eléctrico producido por las esferas, es decir con las funciones de esparcimiento  $S_{\theta y}(\theta)$ ,  $S_{xx}(\theta)$ ,  $S_{\theta z}(\theta)$

Además por las relaciones (4.304)-(4.306) que cumplen las condiciones de esta sección podemos relacionar los elementos del tensor de conductividad no local con los elementos de la matriz de dispersión como sigue

$$S_{xx}(\theta)=-\frac{ik_0}{4\pi}i\omega\mu_0\hat{e}_x\cdot\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s,\vec{k}^i)\cdot\hat{e}_x \quad (4.307)$$

$$S_{\theta y}(\theta)=-\frac{ik_0}{4\pi}i\omega\mu_0\hat{e}_\theta\cdot\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s,\vec{k}^i)\cdot\hat{e}_y \quad (4.308)$$

$$S_{\theta z}(\theta)=-\frac{ik_0}{4\pi}i\omega\mu_0\hat{e}_\theta\cdot\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s,\vec{k}^i)\cdot\hat{e}_z \quad (4.309)$$

donde  $S_{xx}$ ,  $S_{\theta y}$ ,  $S_{\theta z}$  están dadas por (4.296)-(4.298), donde comparando la dependencia funcional y tomando  $p=p'=k_0$  en la expresión para el tensor generalizado de conductividad no local podemos dar una relación entre las amplitudes del campo eléctrico producido por las esferas y las amplitudes del campo dentro de la esfera y lo podemos enunciar como resultado

**Resultado 12** *Existe una relación entre las amplitudes para el campo eléctrico esparcido por las esferas y el campo dentro de la esfera dada por:*

$$\frac{b_n(k_0a, k_sa)}{c_n(k_0a, k_sa)} = -ik_0a^3 \left( I_{n,n}(k_sa, k_0a, 2)(k_s^2 - k_0^2) \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right) k_0k_s J_n^*(k_sa) \frac{j_n(k_0a)}{ak_0} \right) \quad (4.310)$$

$$\frac{a_n(k_0a, k_sa)}{d_n(k_0a, k_sa)} = -ik_0a^3 \left( J_2(n, k_sa, k_0a)(k_s^2 - k_0^2) \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_0}\right) k_s^2 \frac{j_n(k_sa)}{ak_s} J_n^*(k_0a) \right). \quad (4.311)$$

donde recordando la definición (4.193) para las integrales radiales de las funciones de Bessel, y evaluando  $\mu_s = \mu_0$  tenemos que

$$I_{n,n}(k_sa, k_0a, 2) = \frac{i}{k_0a^3(k_s^2 - k_0^2)} \frac{\tilde{b}_n(k_0a, k_sa)}{\tilde{c}_n(k_0a, k_sa)} \quad (4.312)$$

$$J_2(n, k_sa, k_0a) = \frac{i}{k_0a^3(k_s^2 - k_0^2)} \frac{\tilde{a}_n(k_0a, k_sa)}{\tilde{d}_n(k_0a, k_sa)} \quad (4.313)$$

donde la tilde nos indica que las amplitudes son calculadas con  $\mu_s = \mu_0$ .

De la relación (4.309) podemos obtener

$$i\omega\mu_0\hat{e}_\theta \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_z = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{\theta z}(\theta) = 4\pi a^3 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) d_n^L(k_0a) \\ \cdot \left( (k_s^2 - k_0^2) J_2(n, k_sa, k_0a) - \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_s}\right) k_s^2 \frac{j_n(k_sa)}{ak_s} J_n^*(k_0a) \right) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) \\ - 4\pi a^3 k_0^2 \left( \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - 1 \right) \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s} \frac{j_1(2ak_0 \sin \frac{\theta}{2})}{2ak_0 \sin \frac{\theta}{2}} \sin\theta, \quad (4.314)$$

que es equivalente a (4.298). Estos resultados pueden ser usados para diseñar pruebas para verificar la validez de la expresión encontrada para el tensor generalizado de conductividad no local.

Ahora daremos las expresiones para  $\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i)$  tal que  $|\vec{k}^s| = |\vec{k}^i| = k_0$ , por (4.250), (4.255) cuando  $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = k_0$  y  $\theta$  el ángulo que forma estos vectores, donde por el resultado (12) y por la definición (4.297) se simplifica como

$$i\omega\mu_0\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_x = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{xx}(\theta) \hat{e}_x. \quad (4.315)$$

De igual forma para  $i\omega\mu_0\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_y$ , donde por (4.251), (4.256) cuando  $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = k_0$  y  $\theta$  el ángulo que forma estos vectores, y utilizando (4.308) se tiene que

$$i\omega\mu_0\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_y = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{\theta y}(\theta) \hat{e}_\theta - 4\pi a^3 k_0^2 \left( \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - 1 \right) S_{ry}(\theta) \hat{e}_r \quad (4.316)$$

donde hemos definido

$$S_{ry}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) d_n(k_0 a) \frac{j_n(k_s a)}{k_s a} \frac{j_n(k_0 a)}{k_0 a} P_n^1(\cos \theta). \quad (4.317)$$

de igual forma para  $i\omega\mu_0\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_z$ , donde por (4.252), (4.257) cuando  $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = k_0$  y  $\theta$  el ángulo que forma estos vectores, y utilizando (4.309) se tiene que

$$i\omega\mu_0\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_z = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{\theta z}(\theta) \hat{e}_\theta + 4\pi a^3 k_0^2 \left( \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - 1 \right) S_{rz}(\theta) \hat{e}_r \quad (4.318)$$

donde hemos definido

$$S_{rz}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) d_n^L(k_0 a) n(n+1) \frac{j_n(k_s a)}{k_s a} \frac{j_n(k_0 a)}{k_0 a} P_n(\cos \theta) \quad (4.319)$$

$$+ \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s} \frac{j_1\left(2ak_0 \sin \frac{\theta}{2}\right)}{2ak_0 \sin \frac{\theta}{2}} \cos \theta. \quad (4.320)$$

Ahora podemos enunciar estos resultados de la siguiente manera:

**Resultado 13** *El tensor generalizado de conductividad no local  $\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i)$  tal que  $|\vec{k}^s| = |\vec{k}^i| = k_0$  cuando  $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = k_0$  y  $\theta$  el ángulo que forma estos vectores toma el valor de*

$$i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_x = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{xx}(\theta) \hat{e}_x \quad (4.321)$$

$$i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_y = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{\theta y}(\theta) \hat{e}_\theta - 4\pi a^3 k_0^2 \left( \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - 1 \right) S_{ry}(\theta) \hat{e}_r \quad (4.322)$$

$$i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_z = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{\theta z}(\theta) \hat{e}_\theta + 4\pi a^3 k_0^2 \left( \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - 1 \right) S_{rz}(\theta) \hat{e}_r \quad (4.323)$$

donde

$$S_{xx}(\theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left( b_n(k_0 a) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) + a_n(k_0 a) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \quad (4.324)$$

$$S_{\theta y}(\theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left( b_n(k_0 a) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} + a_n(k_0 a) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right) \quad (4.325)$$

$$S_{\theta z}(\theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) a_n^L(k_0 a) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \quad (4.326)$$

$$S_{ry}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) d_n(k_0 a) \frac{j_n(k_s a)}{k_s a} \frac{j_n(k_0 a)}{k_0 a} P_n^1(\cos \theta) \quad (4.327)$$

$$S_{rz}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) d_n^L(k_0 a) n(n+1) \frac{j_n(k_s a)}{k_s a} \frac{j_n(k_0 a)}{k_0 a} P_n(\cos \theta) + \frac{\epsilon_0 j_1 \left( 2ak_0 \sin \frac{\theta}{2} \right)}{\epsilon_s 2ak_0 \sin \frac{\theta}{2}} \cos \theta \quad (4.328)$$

### 4.10. Tensor de conductividad no local cuando $\vec{p}' = \vec{p}$

Este caso se desarrolló en detalle en [Barrera,1] y en la tesis de Doctorado [Alejandro,1], y en esta sección se encuentra a partir de la expresión general para la transformada de Fourier de corriente inducida (4.221)-(4.223), cuando hacemos que  $\vec{p}' = \vec{p}$ , en este caso se toma  $\theta'_p = 0$  y  $\phi'_p = 0$ , en este límite tenemos que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} = -\frac{1}{2}n(n+1) \quad (4.329)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) = -\frac{1}{2}n(n+1) \quad (4.330)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} P_n^0(\cos \theta) = 1 \quad (4.331)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d}{d\theta} P_n^0(\cos \theta) = 0 \quad (4.332)$$

y además en este límite, la base de vectores esféricas tiende a  $\hat{e}_r \rightarrow \hat{e}_z$ ,  $\hat{e}_\theta \rightarrow \hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_\phi \rightarrow \hat{e}_y$ . Y por lo tanto (4.180)-(4.182) se reducen a:

$$\vec{P}_{n1}(0, 0) = 0 \quad (4.333)$$

$$\vec{B}_{n1}(0, 0) = -\frac{1}{2}n(n+1) (\hat{e}_x + i\hat{e}_y) \quad (4.334)$$

$$\vec{C}_{n1}(0, 0) = -\frac{1}{2}n(n+1) (i\hat{e}_x - \hat{e}_y) \quad (4.335)$$

$$\vec{P}_{n0}(0, 0) = \hat{e}_z \quad (4.336)$$

$$\vec{B}_{n0}(0, 0) = 0 \quad (4.337)$$

$$\vec{C}_{n0}(0, 0) = 0 \quad (4.338)$$

por lo que sustituyendo en (4.221)-(4.223) se tiene que

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}, \vec{p}) \cdot \hat{e}_x = (\sigma_V^T(p) + \sigma_\Sigma^T(p)) \hat{e}_x \quad (4.339)$$

4.10. TENSOR DE CONDUCTIVIDAD NO LOCAL CUANDO  $\vec{P}' = \vec{P}$  105

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}, \vec{p}) \cdot \hat{e}_y = (\sigma_V^T(p) + \sigma_\Sigma^T(p))\hat{e}_y \quad (4.340)$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}, \vec{p}) \cdot \hat{e}_z = (\sigma_V^L(p) + \sigma_\Sigma^L(p))\hat{e}_z \quad (4.341)$$

donde definimos  $\sigma_V^L(p), \sigma_\Sigma^L(p)$  como las componentes escalares del tensor de conductividad no local evaluado cuando  $\vec{p} = \vec{p}'$  asociadas a la corriente de volumen y a la corriente de superficie respectivamente.

Si escogemos la base  $\{\hat{e}_x, \hat{k}_\perp^f, \hat{k}^f\}$  entonces

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^f, \vec{k}^f) = \sigma^T(k_f)\hat{e}_x\hat{e}_x + \sigma^T(k_f)\hat{k}_\perp^f\hat{k}_\perp^f + \sigma^L(k_f)\hat{k}^f\hat{k}^f, \quad (4.342)$$

donde  $\sigma^T(k_f)$  y  $\sigma^L(k_f)$ , son las conductividades transversal y longitudinal en el bulto respectivamente. Es decir, en esta base es diagonal y está determinado por las conductividades de bulto, transversal y longitudinal respectivamente. Ahora podemos enunciar el siguiente resultado

**Resultado 14** *La representación del tensor generalizado de conductividad no local en el caso que  $\vec{p} = \vec{p}'$  y en una base tal que el eje z coincida con la dirección de  $\vec{p}$  es diagonal y la componente transversal vale lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \sigma^T(p) &= \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \\ &\left( c_n(pa) \left( (k_s^2 - k_0^2) I_{n,n}(k_s a, pa, 2) - \left( \frac{\mu_0}{\mu_s} - 1 \right) k_s p J_n^*(k_s a) \frac{j_n(pa)}{pa} \right) \right. \\ &\left. + d_n(pa) \left( (k_s^2 - k_0^2) J_2(n, k_s a, pa) + \left( \frac{\mu_0}{\mu_s} - 1 \right) k_s^2 J_n^*(pa) \frac{j_n(k_s a)}{k_s a} \right) \right) \\ &\quad + \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_p \frac{\mu_s p^2 - k_0^2}{\mu_0 p^2 - k_s^2} \end{aligned} \quad (4.343)$$

y la componente longitudinal

$$\begin{aligned} \sigma^L(p) &= \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} k_0^2 \left( \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) d_n^L(pa) n(n+1) \frac{j_n(k_s a)}{k_s a} \frac{j_n(pa)}{pa} \\ &\quad + \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} k_0^2 \left( \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - 1 \right) \frac{1}{3} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s}. \end{aligned} \quad (4.344)$$

Algunas expresiones que nos serán de utilidad para comparar con los elementos de la matriz de dispersión, es en el caso que  $p = k_0$ , en este caso la componente transversal se simplifica como:

$$i\omega\mu_0\sigma^T(k_0) = \frac{4\pi}{-ik_0}S(0) \quad (4.345)$$

y la componente longitudinal

$$\begin{aligned} \sigma^L(k_0) &= \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0}k_0^2 \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)d_n^L(k_0a)n(n+1) \frac{j_n(k_s a)}{k_s a} \frac{j_n(k_0 a)}{k_0 a} \\ &\quad + \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0}k_0^2 \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - 1\right) \frac{1}{3} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s}. \end{aligned} \quad (4.346)$$

Además por conveniencia definiremos  $S_{zz}(0)$  por la expresión

$$\frac{4\pi}{-ik_0}S_{zz}(0) = i\omega\mu_0\sigma^L(k_0) = 4\pi a^3 k_0^2 \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - 1\right) S_{rz}(0). \quad (4.347)$$

## 4.11. Aproximación de Rayleigh

Esta aproximación corresponde al caso de partícula pequeña, para encontrar este límite, truncaremos las series en el primer término, y supondremos que  $k_0a, k_s a, pa, p'a$  son todos pequeños. Esta suposición implica que

$$j_1(z) = \frac{z}{3} + O(z^{3/2}) \quad (4.348)$$

$$J_1^*(z) = \frac{2}{3} + O(z^{3/2}) \quad (4.349)$$

$$h_1(z) = -\frac{i}{z^2} + O(z^0) \quad (4.350)$$

$$H_1^*(z) = \frac{i}{z^3} + O(z^{-1}) \quad (4.351)$$

por el hecho que tomaremos el límite cuando  $a \rightarrow 0$  no es importante que los desarrollos sean al mismo orden, sino que conservemos los que contribuyen en el límite. Con esto se obtienen los siguientes resultados

$$b_1(ap) = -\frac{2ia^3 k_0^2 p}{3} \frac{\mu_s - \mu_0}{\mu_s + 2\mu_0} \quad (4.352)$$

$$a_1(ap) = -\frac{2ia^3k_0^3}{3} \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \quad (4.353)$$

$$c_1(ap) = \frac{\mu_s}{\mu_0} \frac{p}{k_s} \frac{3\mu_0k_s^2 - (\mu_s + 2\mu_0)k_0^2 + (\mu_s - \mu_0)p^2}{(k_s^2 - p^2)(\mu_s + 2\mu_0)} \quad (4.354)$$

$$d_1(ap) = \frac{\mu_s}{\mu_0} \frac{\left(\epsilon_s - 3\frac{\mu_0}{\mu_s}\epsilon_0 + 2\epsilon_0\right)p^2 + 2(\epsilon_s - \epsilon_0)k_0^2}{(k_s^2 - p^2)(\epsilon_s + 2\epsilon_0)} \quad (4.355)$$

$$a_1^L(ak_0) = -\frac{1}{3}i(ak_0)^3 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \quad (4.356)$$

$$d_1^L(ap) = \frac{1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s}}{2 + \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0}} \quad (4.357)$$

donde el término  $b_1(ap)$  es el correspondiente al término dipolar eléctrico (porque el campo esparcido corresponde al de un dipolo eléctrico) en la aproximación de partícula pequeña que es la aproximación de Rayleigh.

Las integrales tienen el valor en el límite de  $a$  tendiendo a cero

$$\lim_{a \rightarrow 0} J_1(1, ak_s, ap') = \frac{1}{9} \quad (4.358)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} J_2(1, ak_s, ap') = \frac{2}{9} \quad (4.359)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} I_{1,1}(ak_s, ap', 2) = 0 \quad (4.360)$$

y son independientes de  $p'$ . El valor de la componente longitudinal y transversal del tensor generalizado de conductividad no local en el caso que  $\vec{p} = \vec{p}'$  utilizando (4.358)-(4.360) en las expresiones (4.343), (4.344) son:

$$\sigma^T(p) = \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} \frac{(\mu_s - \mu_0)(\epsilon_s + 2\epsilon_0)p^2 + (\epsilon_s - \epsilon_0)(\mu_s + 2\mu_0)k_0^2}{(\epsilon_s + 2\epsilon_0)(\mu_s + 2\mu_0)} + O(a^3) \quad (4.361)$$

$$\sigma^L(p) = \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} k_0^2 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} + O(a^3) \quad (4.362)$$

donde si tomamos el límite cuando el radio tiende a cero, estas también tenderían a cero. La explicación física de este hecho, es que un campo longitudinal, tiene que ser electrostático, por lo que no puede inducir una respuesta magnética.

También podemos excitar con un campo magnético constante, en cuyo caso analogamente no se induce una respuesta eléctrica.

## Comentario

La expresión (4.361) es un resultado nuevo, y nos indica como tomar en cuenta el hecho que la esfera tenga una respuesta magnética intrínseca, y en el límite de partícula pequeña, esta difiere de la componente longitudinal del tensor generalizado de conductividad no local.

De igual manera, utilizando las aproximaciones anteriores, podemos encontrar expresiones en límite de partícula pequeña para el tensor de conductividad no local de la esfera, es decir

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_x = \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} \left( \frac{\mu_s - \mu_0}{\mu_s + 2\mu_0} pp' \cos \theta + k_0^2 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \right) \hat{e}_x + O(a^3) \quad (4.363)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_y &= \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} \left( \left( \frac{\mu_s - \mu_0}{\mu_s + 2\mu_0} pp' + k_0^2 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \cos \theta \right) \hat{e}_\theta \right. \\ &\quad \left. + k_0^2 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \sin \theta \hat{e}_r \right) + O(a^3) \end{aligned} \quad (4.364)$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \hat{e}_z = \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} k_0^2 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} (-\sin \theta \hat{e}_\theta + \cos \theta \hat{e}_r) + O(a^3) \quad (4.365)$$

y recordando que

$$\hat{e}_y = \sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta \quad (4.366)$$

$$\hat{e}_z = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta \quad (4.367)$$

se tiene que para  $a$  pequeño y sin considerar la magnetización

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} k_0^2 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \overleftrightarrow{I} + O(a^3) \quad (4.368)$$

## 4.12. Algunos resultados numéricos

En esta sección presentamos las gráficas en un diagrama polar para las funciones de esparcimiento (4.324)-(4.328)  $S_{xx}(\theta), S_{\theta y}(\theta), S_{\theta z}(\theta), S_{ry}(\theta), S_{rz}(\theta)$ .

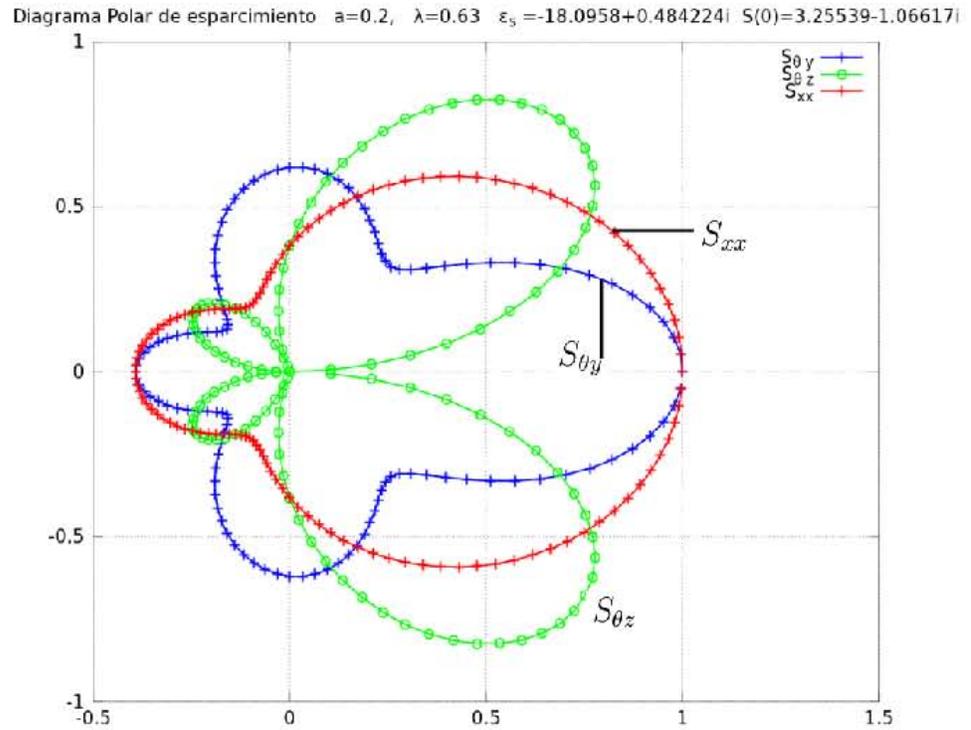


Figura 4.3: En esta figura se hace un diagrama polar de las amplitudes de las funciones de esparcimiento  $S_{xx}$ ,  $S_{\theta y}$ ,  $S_{\theta z}$ , normalizadas con la amplitud  $S(0)$ , para una esfera aislada con radio  $a = 0.2\mu m$ , una longitud de onda  $\lambda = 0.63\mu m$ , y permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224 i$  que corresponden a las propiedades de la plata a dicha longitud de onda

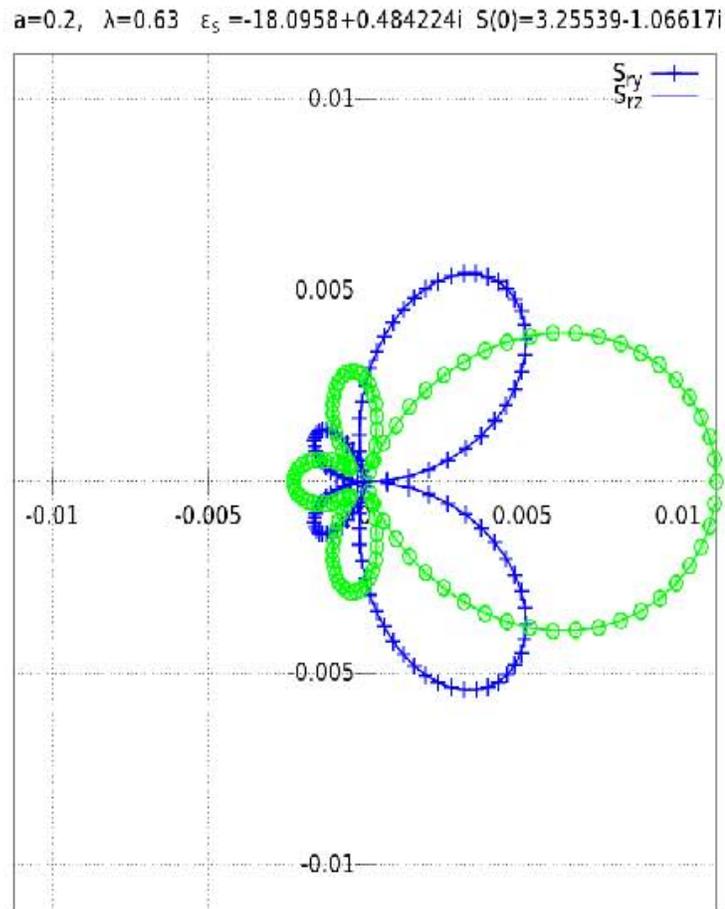


Figura 4.4: En esta figura se hace un diagrama polar de las amplitudes de las funciones de esparcimiento  $S_{ry}$ ,  $S_{rz}$ , normalizadas con la amplitud  $S(0)$ , para una esfera aislada con radio  $a = 0.2\mu m$ , una longitud de onda  $\lambda = 0.63\mu m$ , y permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224 i$  que corresponden a las propiedades de la plata a dicha longitud de onda

### 4.13. Polinomios de Legendre para argumento complejo

Para evaluar los polinomios asociados de Legendre para argumento complejo,  $P_{n_f}^{m_f}(z)$  con  $z$  un número complejo, utilizaremos ciertas relaciones de recurrencia que se pueden encontrar en [Abramowitz]. Seguimos el siguiente algoritmo:

Si tenemos que ( $Re(z) \geq 0$  y  $Im(z) \geq 0$ ) o ( $Re(z) < 0$  y  $Im(z) < 0$ ) entonces tomamos la raíz cuadrada de

$$r_z = \sqrt{z^2 - 1} \quad (4.369)$$

(la cual tiene un punto rama en  $z = 0$ ), tal que si  $r_z = Re(r_z) + Im(r_z)i = \sqrt{a + bi}$  entonces

$$Re(r_z) = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4.370)$$

$$Im(r_z) = \sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.371)$$

Si tenemos que ( $Re(z) < 0$  y  $Im(z) \geq 0$ ) o ( $Re(z) \geq 0$  y  $Im(z) < 0$ ) entonces

$$r_z = \sqrt{z^2 - 1} \quad (4.372)$$

se toma tal que si  $r_z = Re(r_z) + Im(r_z)i = \sqrt{a + bi}$  entonces

$$Re(r_z) = -\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4.373)$$

$$Im(r_z) = \sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.374)$$

Consideremos un arreglo de dos índices  $P(n, m)$  que puede guardar números complejos.

Para  $n = 1$  hasta  $n = n_f$  calculamos

$$P(n + 2, 1) = \frac{1}{n + 1}((2n + 1)zP(n + 1, 1) - nP(n, 1)) \quad (4.375)$$

#### 4.13. POLINOMIOS DE LEGENDRE PARA ARGUMENTO COMPLEJO 113

Para  $n = 1$  hasta  $n = n_f$

$$P(n+1, 2) = -\frac{n}{r_z}P(n, 1) + n\frac{z}{r_z}P(n+1, 1). \quad (4.376)$$

Para  $m = 0$  hasta  $m = m_f$

$$\begin{aligned} P(n_f+1, m+3) &= (n_f - m)(n_f + m + 1)P(n_f+1, m+1) \\ &\quad - 2(m+1)\frac{z}{r_z}P(n_f+1, m+2). \end{aligned} \quad (4.377)$$

El resultado lo multiplicamos por  $i^{m_f}$  para tener la definición del polinomio de Legendre, donde  $i$  es la unidad imaginaria, es decir

$$P_{n_f}^{m_f}(z) = P(n_f+1, m_f+1)i^{m_f} \quad (4.378)$$



# Capítulo 5

## Semiespacio de esferas en el vacío

En esta sección se plantea el problema principal de la tesis, que es de la reflexión transmisión y refracción de una onda plana incidente sobre un semiespacio de esferas de un material con propiedades electromagnéticas  $\epsilon_s(\omega), \mu_s(\omega)$  colocadas al azar, en una matriz dieléctrica que consideraremos primeramente ser el vacío  $\epsilon_0, \mu_0$ , para posteriormante considerar el caso más general, de esferas inmersas en una matriz con propiedades electricas y magnéticas  $\epsilon_1, \mu_1$ .

Sobre este sistema que llamaremos coloide, consideraremos que existen, por un lado una onda plana incidente, una transmitida, y una reflejada.

### 5.1. Campo eléctrico total inducido

El campo total producido por un conjunto de  $N$  esferas al azar (dentro o fuera de las esferas) confinadas en un semi-espacio, se puede escribir como la suma de las corriente internas inducida por el campo eléctrico externo a cada esfera, multiplicada por la función de Green e integrada sobre cada esfera, es decir, en términos de la conductividad no local de la esfera calculada en el capítulo (4) se tiene que

$$\vec{E}_I(\vec{r}) = i\omega\mu_0 \sum_{p=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (5.1)$$
$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) \cdot \vec{E}_e(\vec{r}''; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

donde  $\vec{E}_e(\vec{r})$  es el campo eléctrico de excitación que actúa sobre cada esfera,  $\vec{r}_p$  es el centro de cada esfera, el subíndice  $I$  nos recuerda que se trata del campo producido por las corrientes inducidas dentro de las esferas, donde las integrales en  $\vec{r}, \vec{r}'$  se hacen, en principio, sobre todo el espacio, porque  $\sigma_s$  está definida para todo  $\vec{r}, \vec{r}'$  sin embargo se tiene que  $\overleftarrow{\sigma}_s(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) = 0$  si  $|\vec{r}' - \vec{r}_p| > a, |\vec{r}'' - \vec{r}_p| > a$ , donde  $a$  es el radio de las esferas, por lo que esta función ya contiene la información del volumen donde se debe integrar, ya que es cero fuera de dicho volumen.

Ahora tomamos el promedio configuracional ó de ensamble de la ecuación anterior (5.1), este promedio se define como sigue. Si tenemos la función de densidad de probabilidad de  $N$  partículas como  $F_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  y alguna propiedad que dependa de la posición de las partículas, por ejemplo el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  entonces el promedio de ensamble es por definición

$$\langle \vec{E}(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \rangle = \int_{\Omega} \vec{E}(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) F_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d^3 r_1 \dots d^3 r_N$$

donde  $\Omega$  es la región en el espacio donde se encuentran las partículas.

Tomando dicho promedio en (5.1) se tiene que

$$\langle \vec{E}_I(\vec{r}) \rangle = i\omega\mu_0 \sum_{p=1}^N \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \overleftarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r'' \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) \cdot \vec{E}_e(\vec{r}''; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) F_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) d^3 r_1 \dots d^3 r_N \quad (5.2)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 r'' \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) \cdot \vec{E}_e(\vec{r}''; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) F_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) d^3 r_1 \dots d^3 r_N$$

Si utilizamos la regla de Bayes para la probabilidad condicional, podemos escribir la función de probabilidad de  $N$  partículas recursivamente como

$$F_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = f_1(\vec{r}_p) F_{N-1}(\vec{r}_1, \dots, \underline{\vec{r}}_p, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_p) \quad (5.3)$$

donde  $F_{N-1}(\vec{r}_1, \dots, \underline{\vec{r}}_p, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_p)$  es la densidad de probabilidad de hallar a la partícula 1 en  $\vec{r}_1$  y así sucesivamente, dado que la partícula  $p$  está fija en  $\vec{r}_p$ , y donde la barra debajo de la variable  $\vec{r}_p$  nos indica que esta variable está ausente.  $f_1(\vec{r}_p)$  es la probabilidad de encontrar la partícula  $p$  en  $\vec{r}_p$ . Por definición de función de densidad de probabilidad condicional se tiene que

$$\int_{\Omega} F_{N-1}(\vec{r}_1, \dots, \underline{\vec{r}}_p, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_p) d^3 r_1 \dots d^3 \underline{r}_p \dots d^3 r_N = 1. \quad (5.4)$$

Supondremos además que el campo de excitación es el campo promedio, que no depende de la posición de las partículas, es decir  $\vec{E}_e(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \langle \vec{E} \rangle(\vec{r})$ , que es una hipótesis fuerte, porque en general el campo de excitación es el campo producido por todas partículas excepto ella misma, y por lo tanto si depende de la posición de las partículas. Pero esta es la aproximación de campo medio efectivo. Con estas definiciones y suposiciones tenemos que (5.2) se reduce a

$$\langle \vec{E}_I(\vec{r}) \rangle = i\omega\mu_0 N \int_{z_p > a} d^3 r_p f_1(\vec{r}_p) \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}''). \quad (5.5)$$

Si ahora tomamos en cuenta la presencia de un campo incidente  $\vec{E}_i$ , el campo promedio satisface la ecuación integral implícita

$$\langle \vec{E} \rangle = \vec{E}_i + i\omega\mu_0 N \int_{z_p > a} d^3 r_p f_1(\vec{r}_p) \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}''). \quad (5.6)$$

Si ahora consideramos un modelo probabilístico para la función de densidad de probabilidad de una partícula  $f_1(\vec{r}_p) = 1/V$  siendo  $V$  el volumen total que ocupan las partículas, (en el caso de un semiespacio este tenderá a infinito), si  $\vec{r}_p$  cumple que  $z_p > a$  siendo  $a$  el radio de la esfera, es decir, las esferas se encuentran en el semiespacio  $z > 0$ , y cero en otro caso. Además  $f_1(\vec{r})N = n_0$  siendo  $N$  el número de partículas, será la densidad de número de partículas y esta se puede mantener constante en el caso de un semiespacio haciendo tender a infinito tanto el volumen  $V$  como el número de partículas.

Por lo tanto vemos que en la aproximación de campo medio efectivo es equivalente a reemplazar la sumatoria sobre el número de partículas, por una integral sobre la posición de una partícula multiplicada por el factor  $n_0$  que es la densidad de número de partículas. Aquí se está suponiendo, además, que la probabilidad de encontrar el centro de una esfera en el semiespacio es constante. Para una definición más precisa se puede ver por ejemplo [Tsang,3, pg.205].

En el cálculo hay una sutileza en el orden en que se hacen las integrales, uno puede calcular los campos eléctricos producidos por las esferas, y después promediar sobre la posición de las esferas, ó bien uno puede primero promediar las corrientes inducidas dentro de las esferas, y después calcular los campos producidos. Estos resultados serían equivalentes siempre y cuando sea válido el intercambio del orden de integración. Sin embargo, dado que la función de Green tiene singularidades, de acuerdo al teorema de Fubini, el intercambio en el orden de integración no es válido en nuestro caso, por lo que se obtienen dos resultados diferentes como se verá más adelante.

Lo que prosigue en esta sección será, evaluar dichas integrales. La condición de tener un semiespacio se encuentra al pedir que  $z_p > a$ .

Nótese que en este punto hemos ya supuesto un modelo probabilístico en la interfaz, que toma como constante la probabilidad de encontrar el centro de una esfera en  $z > 0$ . Por consiguiente para otro modelo de la interfaz sería necesario introducir en este punto alguna otra función de probabilidad que especifique la probabilidad de encontrar el centro de una esfera en  $z > 0$ . Si ahora continuamos con el desarrollo matemático y se sustituyen la expresión de la función de Green para el campo electromagnético (3.2), en la ecuación para el campo eléctrico total (5.1), y utilizando la representación en el espacio de Fourier del tensor generalizado de conductividad no local (4.5), se tiene que

$$\langle \vec{E} \rangle_I(\vec{r}) = A_1 + A_2 \quad (5.7)$$

donde

$$A_1 = i\omega\mu_0 n_0 \int_{z_p > a} d^3 r_p \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r'' - \frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

$$\frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}'') e^{i\vec{p}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_p)} e^{-i\vec{p}'' \cdot (\vec{r}'' - \vec{r}_p)} \cdot \vec{E}_e(\vec{r}''). \quad (5.8)$$

$$A_2 = i\omega\mu_0 n_0 \int_{z_p > a} d^3 r_p \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r''$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} \frac{i}{2k_z} e^{i\vec{k}_{||} \cdot (\vec{r}_{||} - \vec{r}'_{||}) + ik_z |z - z'|} (\overleftrightarrow{1} - \hat{k}_{\pm} \hat{k}_{\pm}).$$

$$\frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}'') e^{i\vec{p}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_p)} e^{-i\vec{p}'' \cdot (\vec{r}'' - \vec{r}_p)} \cdot \vec{E}_e(\vec{r}''). \quad (5.9)$$

Aplicando la aproximación de campo efectivo, que consiste en suponer que el campo eléctrico de excitación es el campo promedio,

$$\vec{E}_e = \langle \vec{E} \rangle \quad (5.10)$$

e introduciendo la siguiente representación de Fourier para el campo eléctrico promedio

$$\langle \vec{E} \rangle(\vec{p}'') = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}'') e^{-i\vec{p}'' \cdot \vec{r}''} d^3 r'', \quad (5.11)$$

se puede efectuar la integración en  $d^3 r''$  y  $d^3 r'$  y se tiene que el primer término de la integral (5.7), del lado derecho se escribe como

$$A_1 = -\frac{i\omega\mu_0 n_0}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p'' \int_{z_p > a} d^3 r_p e^{i\vec{r}_p \cdot (\vec{p}'' - \vec{p}')} e^{i\vec{p}' \cdot \vec{r}} \frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}'') \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{p}''). \quad (5.12)$$

Si ahora integramos las componentes paralelas en  $d^3 r_p$  y después en  $d\vec{p}'_{||}$  y renombrando  $\vec{p}'_{||}$  por  $\vec{k}_{||}$ , se encuentra que (5.12) toma el valor de

$$A_1 = -\frac{i\omega\mu_0 n_0}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \int_{\mathbb{R}} dp'_z \int_{\mathbb{R}} dp''_z \int_a^\infty dz_p e^{iz_p(p'_z - p''_z)} e^{ip'_z z} \hat{e}_z \hat{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, p'_z, \vec{k}_{||}, p''_z) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p''_z). \quad (5.13)$$

Si utilizamos la identidad

$$\int_a^\infty dz_p e^{-iz_p(p'_z - p''_z)} = \left( \pi \delta(p'_z - p''_z) - \frac{i}{p'_z - p''_z} \right) e^{-ia(p'_z - p''_z)} \quad (5.14)$$

al sustituir este resultado en (5.13) y evaluar las integrales en  $dp'_z$ , se encuentra que el primer término de la integral (5.7) vale

$$A_1 = -i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp''_z e^{ip''_z z} \theta(z - a) \frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, p''_z, \vec{k}_{||}, p''_z) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p''_z) \quad (5.15)$$

donde la función escalón  $\theta(z - a)$  aparece al considerar que para  $z < a$  el contorno de integración en el plano complejo  $p_z''$  se toma en el semiplano inferior, y por lo tanto el resultado es cero para  $z < a$ .

Después de integrar en  $d^3r''$  el segundo término de (5.7) se escribe como

$$A_2 = i\omega\mu_0 n_0 \int_{z_p > 0} d^3r_p \int_{\mathbb{R}^2} d^2r_{||}' \int_{\mathbb{R}} dz' \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2k_{||} \frac{i}{2k_z} e^{i\vec{k}_{||} \cdot (\vec{r}_{||} - \vec{r}'_{||}) + ik_z |z - z'|} (\overleftarrow{I} - \hat{k}_{\pm} \hat{k}_{\pm}). \\ \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p' \int_{\mathbb{R}^3} d^3p'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}'') e^{i\vec{p}' \cdot \vec{r}'} e^{i\vec{r}_p \cdot (\vec{p}'' - \vec{p}')} \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{p}''), \quad (5.16)$$

haciendo ahora la integral en  $d^2r_{p||}$ ,  $d^2p_{||}''$ , equivale a sustituir  $\vec{p}_{||}'' = \vec{p}'_{||}$  al evaluar las deltas de Dirac, después las integrales en  $d^2r_{||}'$ ,  $d^2p'_{||}$ , equivalen a sustituir  $\vec{p}'_{||} = \vec{k}_{||}$ , es decir

$$A_2 = i\omega\mu_0 n_0 \int_a^\infty dz_p \int_{\mathbb{R}} dz' \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2k_{||} \frac{i}{2k_z} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||} + ik_z |z - z'|} (\overleftarrow{I} - \hat{k}_{\pm} \hat{k}_{\pm}) \cdot \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} dp'_z \int_{\mathbb{R}} dp_z'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, p'_z, \vec{k}_{||}, p_z'') e^{ip'_z z'} e^{iz_p(p_z'' - p'_z)} \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p_z''). \quad (5.17)$$

Hacemos ahora la integral en  $dz'$  que es simplemente la integral de una función exponencial, considerando que

$$\lim_{z' \rightarrow -\infty} e^{iz'(p'_z - k_z)} = 0, \quad \lim_{z' \rightarrow \infty} e^{iz'(p'_z + k_z)} = 0, \quad (5.18)$$

porque podemos suponer que  $k_z$  tiene una pequeña parte imaginaria positiva, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\overleftarrow{I} - \hat{k}_{\pm} \hat{k}_{\pm}) e^{ik_z |z - z'| + ip'_z z'} dz' \\ = (\overleftarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) \frac{e^{ip'_z z}}{i(p'_z - k_z)} - (\overleftarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \frac{e^{ip'_z z}}{i(p'_z + k_z)}. \quad (5.19)$$

Si sustituimos este resultado en (5.17) se encuentra que

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i\omega\mu_0 n_0}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{\parallel} e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \int_a^{\infty} dz_p \int_{\mathbb{R}} dp_z'' \int_{\mathbb{R}} dp_z' \\
&\frac{i}{2k_z} \left( (\overleftarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) \frac{e^{ip_z'(z-z_p)}}{i(p_z' - k_z)} - (\overleftarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \frac{e^{ip_z'(z-z_p)}}{i(p_z' + k_z)} \right) \\
&\cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}, p_z', \vec{k}_{\parallel}, p_z'') e^{iz_p p_z''} \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{\parallel}, p_z''). \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Si ahora evaluamos la integral en  $dp_z'$  utilizando el teorema del residuo de variable compleja<sup>1</sup>, donde tomaremos el contorno de integración como un semicírculo de radio tendiendo a infinito, en el plano complejo  $p_z'$ , y teniendo en cuenta que cuando  $z \geq z_p$  dicho contorno se debe cerrar en el semiplano superior  $Imp_z' > 0$  (para tener convergencia en las integrales), y cuando  $z < z_p$  en el inferior, ver figuras (5.1),(5.2) respectivamente.

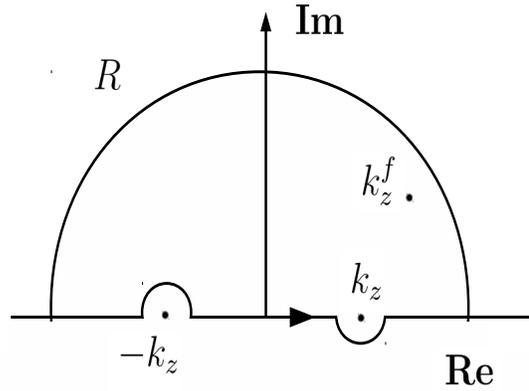


Figura 5.1: Contorno de integración en el plano complejo caso A

<sup>1</sup>Debido a la exponencial imaginaria en el integrando, este tiende a cero conforme el radio del contorno tiende a infinito

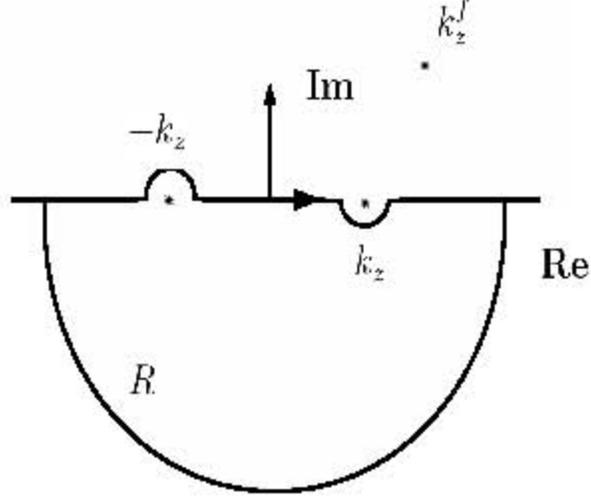


Figura 5.2: Contorno de integración en el plano complejo caso B

se encuentra que

$$A_2(z \geq a) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i\omega\mu_0 n_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \int_{\mathbb{R}} dp_z'' \quad (5.21)$$

$$\frac{i}{2k_z} \left( (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) e^{ik_z z} \int_a^z e^{iz_p(p_z'' - k_z)} dz_p \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, k_z, \vec{k}_{||}, p_z'') \right.$$

$$\left. + (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) e^{-ik_z z} \int_z^\infty e^{iz_p(p_z'' + k_z)} dz_p \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, -k_z, \vec{k}_{||}, p_z'') \right) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p_z'').$$

Para  $z < a$  se tiene que siempre  $z < z_p$  y por lo tanto la integral (5.20) debe cerrarse únicamente sobre el semiplano inferior (figura 5.2), de esta manera se encuentra que

$$A_2(z < a) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i\omega\mu_0 n_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \int_{\mathbb{R}} dp_z'' \quad (5.22)$$

$$\frac{i}{2k_z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) e^{-ik_z z} \int_z^\infty e^{iz_p(p_z'' + k_z)} dz_p \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, -k_z, \vec{k}_{||}, p_z'') \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p_z'').$$

Para  $z \geq a$  se reduce a:

$$\begin{aligned}
A_2(z \geq a) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \frac{i\omega\mu_0 n_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_z'' \frac{1}{2k_z} \\
&\left( \frac{e^{ip_z'' z} - e^{ik_z z} e^{ia(p_z'' - k_z)}}{p_z'' - k_z} (\overleftarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, k_z, \vec{k}_{||}, p_z'') \right. \\
&\left. - \frac{e^{ip_z'' z}}{p_z'' + k_z} (\overleftarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, -k_z, \vec{k}_{||}, p_z'') \right) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p_z''). \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Vemos que el polo en  $p_z'' = k_z$  no contribuyen a la integral porque es una singularidad removible <sup>2</sup>, y el segundo polo es  $p_z'' = -k_z$ , porque hemos supuesto que  $Imk_z > 0$ , y como  $z \geq a$  la integral debe cerrarse por el semicírculo superior (figura 5.1), por lo que el polo queda fuera del dominio de integración que es un semicírculo de radio tendiendo a infinito.

Separando de acuerdo con su dependencia funcional ya sea que contengan el factor  $e^{ip_z'' z}$ , o el factor  $e^{ia(p_z'' - k_z)}$ , finalmente encontramos que el segundo término del lado derecho de la ecuación (5.7) se escribe como

$$\begin{aligned}
A_2(z \geq a) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \quad (5.24) \\
&\frac{i\omega\mu_0 n_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_z'' \frac{e^{ip_z'' z}}{2k_z} \left( (\overleftarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, k_z, \vec{k}_{||}, p_z'')}{p_z'' - k_z} \right. \\
&\left. - (\overleftarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, -k_z, \vec{k}_{||}, p_z'')}{p_z'' + k_z} \right) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}, p_z'') \\
&- \frac{i\omega\mu_0 n_0}{2\pi} \frac{e^{ik_z z}}{2k_z} \int_{\mathbb{R}} (\overleftarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, k_z, \vec{k}_{||}, p_z'')}{p_z'' - k_z} \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p_z'') e^{ia(p_z'' - k_z)} dp_z''.
\end{aligned}$$

Tomando ahora una representación mixta en Fourier para el campo promedio generado por las corrientes inducidas, de la forma

$$\langle \vec{E} \rangle_I(\vec{r}_{||}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} \langle \vec{E} \rangle_I(\vec{k}_{||}, z) e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}}. \quad (5.25)$$

Entonces, para el campo en  $z < a$  siempre se cumple que  $z < z_p$  por lo tanto se tiene que (5.21) se escribe como

---


$$\lim_{p_z'' \rightarrow k_z} \frac{e^{ip_z'' z} - e^{ik_z z} e^{ia(p_z'' - k_z)}}{p_z'' - k_z} = ie^{ik_z z} (z - a)$$

$$A_2(z < a) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i\omega\mu_0 n_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{\parallel} e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \int_{\mathbb{R}} dp_z'' \frac{i}{2k_z} (\overleftarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) e^{-ik_z z} \int_a^{\infty} e^{iz_p(p_z'' + k_z)} dz_p \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}, -k_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z'') \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{\parallel}, p_z''). \quad (5.26)$$

Ahora podemos escribir la ecuación integral completa para el campo eléctrico promedio producido cuando hacemos incidir una onda plana.

**Resultado 15** *La ecuación para el campo eléctrico promedio en la aproximación de campo efectivo, es la contribución del campo eléctrico incidente  $\vec{E}_i$  más el campo eléctrico producido por las esferas dado por la ecuación (5.1), es en una representación mixta para  $z \geq a$  es el siguiente*

$$\langle \vec{E} \rangle = \vec{E}_i + \langle \vec{E} \rangle_I^+(\vec{k}_{\parallel}, z)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle \vec{E} \rangle_I^+(\vec{k}_{\parallel}, z) &= \frac{i\omega\mu_0 n_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_z'' e^{ip_z'' z} \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}, p_z'', \vec{k}_{\parallel}, p_z'') \right. \\ &\quad + (\overleftarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) \cdot \frac{\overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}, k_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z'')}{2k_z(p_z'' - k_z)} \\ &\quad \left. - (\overleftarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \cdot \frac{\overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}, -k_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z'')}{2k_z(p_z'' + k_z)} \right) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{\parallel}, p_z'') \\ &\quad - \frac{i\omega\mu_0 n_0}{2\pi} \frac{e^{ik_z z}}{2k_z} (\overleftarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+) \cdot \int_{\mathbb{R}} dp_z'' \frac{\overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{\parallel}, k_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z'')}{p_z'' - k_z} \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{\parallel}, p_z'') e^{ia(p_z'' - k_z)}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

en donde se ha tomado al vacío como matriz. El último término de esta ecuación se puede interpretar como un término de superficie en  $z = a$ , esto es porque es la transformada inversa de Fourier evaluada en  $z = a$ .

Al evaluar (5.21) y considerando que siempre  $z < z_p$  implica que el contorno debe cerrarse sobre el semicírculo inferior en el plano complejo  $dp_z'$ , encontramos el campo eléctrico producido por las esferas para  $z < a$  dado por

$$\langle \vec{E} \rangle = \vec{E}_i + \langle \vec{E} \rangle_I^-(\vec{k}_{\parallel}, z) \quad (5.28)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle \vec{E} \rangle_I^-(\vec{k}_{||}, z) = & \quad (5.29) \\ -\frac{i\omega\mu_0 n_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_z z}}{2k_z} (\hat{\vec{T}} - \hat{k}_- \hat{k}_-) \cdot \int_{\mathbb{R}} dp_z'' \frac{\hat{\vec{\sigma}}_s(\vec{k}_{||}, -k_z, \vec{k}_{||}, p_z'')}{p_z'' + k_z} \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p_z'') e^{ia(p_z'' + k_z)} \end{aligned}$$

que es un término de superficie en  $z = a$ , porque es una transformada inversa de Fourier evaluada en  $z = a$ , y por lo tanto solo depende del valor del campo en  $z = a$ , es decir es un término de superficie, donde

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_{||}^2}. \quad (5.30)$$

y solo los polos del campo  $\langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p_z'')$  contribuyen a la integral (figura 5.1).

## 5.2. Solución a la ecuación integral

Los resultados de la sección anterior, permiten escribir la ecuación integral para el campo eléctrico promedio en la aproximación de campo efectivo, y la solución de esta ecuación es el propósito de esta sección.

Resolveremos primeramente el caso donde el promedio configuracional se toma sobre los campos eléctricos producidos por las esferas y no el promedio de las corrientes inducidas dentro de las esferas. Supondremos, además que el campo incidente  $\vec{E}_i$  es una onda plana, y como hemos visto, el campo eléctrico promedio en una representación mixta de Fourier está determinado por una ecuación integral para  $z \geq a$  (5.27), y una expresión integral para  $z < a$  (5.29), esta última dada en términos de una función del campo eléctrico promedio evaluado en la superficie  $z = a$ , siendo la diferencia que una es una transformada inversa de Fourier evaluada en la coordenada arbitraria  $z$  y la otra una transformada inversa de Fourier evaluada en  $z = a$ .

Para resolver la ecuación integral implícita de  $\langle \vec{E} \rangle$  se tienen que evaluar todas las integrales al proponer que la solución para  $z \geq a$  sea una onda plana de la forma  $\theta(z)t\hat{e}^f e^{i\vec{k}^f \cdot \vec{r}}$ , donde  $\theta(z)$  es una función escalón, el resultado es resolver una ecuación algebraica para los parámetros efectivos.

Al sustituir esta solución de prueba en la ecuación integral, se obtendrán ecuaciones de consistencia para  $\vec{k}^f$  el vector de onda efectivo,  $\hat{e}^f$  el vector de polarización efectivo, y  $t$  la amplitud de transmisión.

Por el hecho que esta es una ecuación para el campo eléctrico en  $z > a$ , podemos proponer una solución de la forma

$$\langle \vec{E} \rangle (\vec{k}_{||}, z) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) t\theta(z) e^{ik_z^f z} \hat{e}^f \quad (5.31)$$

$$\langle \vec{E} \rangle (\vec{k}_{||}, p_z'') = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) \frac{1}{i(p_z'' - k_z^f)} t\hat{e}^f \quad (5.32)$$

y la onda incidente como

$$\vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) e^{ik_z^i z} \hat{e}^i. \quad (5.33)$$

sustituyendo ahora (5.32), (5.33) en (5.27) ,y evaluando la integral en  $dp_z''$  por el teorema del residuo, y cerrando el contorno por un semicírculo en el plano complejo superior y notando que solo el polo  $p_z'' = k_z^f$  contribuye a la integral (figura 5.1), encontramos que para  $z \geq a$

$$\begin{aligned} t e^{ik_z^f z} \hat{e}^f &= e^{ik_z^i z} \hat{e}^i + i\omega\mu_0 n_0 e^{ik_z^f z} \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, k_z^f, \vec{k}_{||}, k_z^f) \right. \\ &+ \left. (\overleftarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, k_z^i, \vec{k}_{||}, k_z^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - (\overleftarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \frac{\overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, -k_z^i, \vec{k}_{||}, k_z^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \cdot t\hat{e}^f \\ &- i\omega\mu_0 n_0 \frac{e^{ik_z^i z}}{2k_z^i} (\overleftarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, k_z^i, \vec{k}_{||}, k_z^f)}{k_z^f - k_z^i} \cdot t\hat{e}^f e^{ia(k_z^f - k_z^i)} \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde agrupando aquellos términos que lleven el factor  $e^{ik_z^f(z-a)}$ , y recordando que  $\vec{k}^i = \vec{k}_{||}^i + k_z^i \hat{e}_z$ ,  $\vec{k}^r = \vec{k}_{||}^i - k_z^i \hat{e}_z$ ,  $\vec{k}^f = \vec{k}_{||}^i - k_z^f \hat{e}_z$ , se encuentra una primera relación de consistencia

$$\begin{aligned} \hat{e}^f &= i\omega\mu_0 n_0 \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \right. \\ &+ \left. (\overleftarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - (\overleftarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \frac{\overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \cdot \hat{e}^f. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Agrupando los términos de la ecuación (5.34) que contengan el factor  $e^{ia(k_z^f - k_z^i)}$  e igualando a cero, se encuentra la segunda relación de consistencia ó teorema de extinción Ewald-Oseen, es decir

$$\hat{e}^i = i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{2k_z^i} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{k_z^f - k_z^i} \cdot t \hat{e}^f e^{ia(k_z^f - k_z^i)}. \quad (5.36)$$

Donde tomando el producto escalar por  $\hat{e}^i$  en (5.36) y considerando que  $\hat{e}^i \cdot \hat{k}^i = 0$  encontramos que la primera relación de consistencia (5.35), es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales para cada componente del vector de polarización efectivo, y para que exista una solución distinta de cero, debe pedirse que la matriz asociada al sistema lineal de ecuaciones, sea tal que su determinante sea cero. Por lo que encontramos la relación de dispersión y lo enunciaremos como un resultado:

**Resultado 16** *La relación de dispersión en la aproximación de **campo efectivo**, para el campo eléctrico promedio está dada por la ecuación*

$$\det \left[ \overleftrightarrow{I} - i\omega\mu_0 n_0 \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^f, \vec{k}^f) + (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \right] = 0. \quad (5.37)$$

donde

$$\vec{k}^i = \vec{k}_{\parallel}^i + k_z^i \hat{e}_z \quad (5.38)$$

$$\vec{k}^r = \vec{k}_{\parallel}^i - k_z^i \hat{e}_z \quad (5.39)$$

$$\vec{k}^f = \vec{k}_{\parallel}^i + k_z^f \hat{e}_z. \quad (5.40)$$

Una vez encontrados los modos, el vector de polarización efectivo se encuentra por (5.35), ya que es un sistema lineal homogéneo de ecuaciones, y por la segunda relación de consistencia (5.36) podemos encontrar la amplitud de transmisión, es decir tenemos el siguiente resultado

**Resultado 17** *La amplitud de transmisión para el campo eléctrico promedio en la aproximación de **campo efectivo** está dado por*

$$t = \frac{2k_z^i}{i\omega\mu_0 n_0} \frac{k_z^f - k_z^i}{\hat{e}^i \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}^f} e^{-ia(k_z^f - k_z^i)} \quad (5.41)$$

### 5.3. Amplitud de reflexión

La ecuación para el campo reflejado válida para  $z < a$  es

$$\begin{aligned} \langle \vec{E} \rangle^{(-)}(\vec{k}_{||}, z) &= \vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) \\ &- i\omega\mu_0 n_0 \frac{e^{-ik_z^i z}}{2k_z^i} \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}^f t e^{ia(k_z^f - k_z^i)} \end{aligned} \quad (5.42)$$

sustituyendo el coeficiente de trasmisión (5.41) entonces podemos dar una expresión para el campo reflejado promedio  $\langle \vec{E} \rangle$  producido por una distribución aleatoria de esferas cuando la matriz es el vacío y campo incidente.

**Resultado 18** *Si el campo eléctrico incidente de amplitud unitaria dado por*

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \hat{e}^i e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||} + k_z^i z}, \quad (5.43)$$

entonces el campo eléctrico reflejado en la aproximación de **campo efectivo** es:

$$\langle \vec{E} \rangle^r(\vec{r}_{||}, z) = \frac{(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}^f}{\hat{e}^i \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}^f} \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^i + k_z^f} e^{-ik_z^i z} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} e^{ik_z^i 2a} \quad (5.44)$$

donde  $k_z^f$  es solución de (5.37),  $\hat{e}^f$  solución de (5.35). La amplitud de reflexión se obtiene al escoger una polarización para la onda incidente y resolver la relación de consistencia (5.35) con la condición de que su determinante sea cero.

### 5.4. Relaciones de dispersión

A continuación estudiamos con más detalle la relación de dispersión para los modos electromagnéticos del campo eléctrico promedio, los cuales vienen dados por la ecuación (5.37), y que enunciamos nuevamente

$$\det \left[ \overleftrightarrow{I} - i\omega\mu_0 n_0 \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \right) \right]$$

$$+\left(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i\right) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \left(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r\right) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right] = 0. \quad (5.45)$$

y para verificar la teoría, tomamos el límite de partícula pequeña, en este caso por la ecuación (4.368)

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} k_0^2 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \overleftrightarrow{I} + O(a^3) \quad (5.46)$$

y utilizando la relación 3.44

$$\frac{(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \frac{(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} = \frac{1}{k_z^{f2} - k_z^{i2}} \left( \overleftrightarrow{I} - \frac{1}{k_0^2} \vec{k}^f \vec{k}^f \right) + \frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2}, \quad (5.47)$$

la relación de dispersión se escribe como

$$\det \left[ \overleftrightarrow{I} - \frac{i\omega\mu_0 n_0}{k_z^{f2} - k_z^{i2}} \left( \overleftrightarrow{I} - \frac{1}{k_0^2} \vec{k}^f \vec{k}^f \right) \frac{4\pi a^3}{i\omega\mu_0} k_0^2 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \right] = 0. \quad (5.48)$$

Nota: este resultado extiende la relación de dispersión del medio local, porque es una ecuación que ahora tiene además modos longitudinales en el límite de partícula pequeña.

Antes de analizar en detalle este caso límite, vamos a tratar el caso general en una base particular, expresando la matriz de la relación de dispersión (5.45) en la base  $\{\hat{e}_x, \hat{k}_\perp^f, \hat{k}_\perp^i\}$ . Consideraremos  $\hat{e}_z$  el vector normal a la superficie  $z = 0$  y utilizando (C.8), (C.10) se encuentran los siguientes productos tensoriales:

$$\hat{e}_z \hat{e}_z = \frac{1}{k_f^2} \left( k_z^f \hat{k}_\perp^f - k_{\parallel}^i \hat{k}_\perp^i \right) \left( k_z^f \hat{k}_\perp^f - k_{\parallel}^i \hat{k}_\perp^i \right) \quad (5.49)$$

$$\hat{k}_\perp^i \hat{k}_\perp^i = \frac{1}{k_0^2 k_f^2} [k_{\parallel}^i (k_z^i - k_z^f) \hat{k}_\perp^f + (k_{\parallel}^i{}^2 + k_z^f k_z^i) \hat{k}_\perp^i]^2 \quad (5.50)$$

$$\hat{k}_\perp^r \hat{k}_\perp^r = \frac{1}{k_0^2 k_f^2} [-k_{\parallel}^i (k_z^i + k_z^f) \hat{k}_\perp^f + (k_{\parallel}^i{}^2 - k_z^f k_z^i) \hat{k}_\perp^i]^2. \quad (5.51)$$

La relación de dispersión (5.37) contiene el siguiente término y factor

$$\frac{1}{k_f^2} \left( k_z^f \hat{k}^f - k_{\parallel}^i \hat{k}_{\perp}^f \right) \left( k_z^f \hat{k}^f - k_{\parallel}^i \hat{k}_{\perp}^f \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\hat{k}^f, \hat{k}^f) \quad (5.52)$$

que para expresarlo en la base que estamos considerando, utilizamos (4.342) y lo volvemos a enunciar

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^f, \vec{k}^f) = \sigma^T(k_f) \hat{e}_x \hat{e}_x + \sigma^T(k_f) \hat{k}_{\perp}^f \hat{k}_{\perp}^f + \sigma^L(k_f) \hat{k}^f \hat{k}^f, \quad (5.53)$$

y realizando los productos internos encontramos que este término se puede escribir como tensor como

$$\begin{aligned} \hat{e}_z \hat{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\hat{k}^f, \hat{k}^f) &= \frac{1}{k_f^2} \left( k_{\parallel}^i{}^2 \sigma^T(k_f) \hat{k}_{\perp}^f \hat{k}_{\perp}^f - k_{\parallel}^i k_z^f \sigma^L(k_f) \hat{k}_{\perp}^f \hat{k}^f \right. \\ &\quad \left. - k_{\parallel}^i k_z^f \sigma^T(k_f) \hat{k}^f \hat{k}_{\perp}^f + k_z^f{}^2 \sigma^L(k_f) \hat{k}^f \hat{k}^f \right). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Otros términos que serán necesarios para calcular el determinante (5.45) son:

$$(\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_{\perp}^i \hat{k}_{\perp}^i) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \quad (5.55)$$

$$(\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_{\perp}^r \hat{k}_{\perp}^r) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f). \quad (5.56)$$

Si utilizamos el tensor generalizado de conductividad no local expresado en la base  $\{\hat{e}_x, \hat{k}_{\perp}^f, \hat{k}^f\}$ , es decir

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) = \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}_x \hat{e}_x + \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}_{\perp}^f \hat{k}_{\perp}^f + \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}^f \hat{k}^f \quad (5.57)$$

junto con las definiciones

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}_x = \sigma_{xx}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \hat{e}_x \quad (5.58)$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}_{\perp}^f = \sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \hat{k}_{\perp}^i + \sigma_{ry}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \hat{k}^i \quad (5.59)$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}^f = \sigma_{\theta z}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \hat{k}_{\perp}^i + \sigma_{rz}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \hat{k}^i \quad (5.60)$$

donde  $\sigma_{xx}, \sigma_{\theta y}, \sigma_{ry}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}$  son las componentes del tensor generalizado de conductividad no local del resultado (10), en la base de vectores  $\hat{e}_x, \hat{e}_{\theta}, \hat{e}_r$  que dependen del ángulo que forman  $\vec{k}^i, \vec{k}^f$ , y de hecho en este caso  $\hat{e}_{\theta} = \vec{k}_{\perp}^i, \hat{e}_r = \vec{k}^i$ . Y lo mismo para  $\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f)$  con la siguiente representación

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) = \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}_x \hat{e}_x + \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}_\perp^f \hat{k}_\perp^f + \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}^f \hat{k}^f \quad (5.61)$$

y a su vez

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}_x = \sigma_{xx}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{e}_x \quad (5.62)$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}_\perp^f = \sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{k}_\perp^r + \sigma_{ry}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{k}^r \quad (5.63)$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}^f = \sigma_{\theta z}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{k}_\perp^r + \sigma_{rz}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{k}^r. \quad (5.64)$$

con estas definiciones se tiene que

$$\begin{aligned} & (\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_\perp^i \hat{k}_\perp^i) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \\ &= \sigma_{xx}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \hat{e}_x \hat{e}_x + \sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \hat{k}_\perp^i \hat{k}_\perp^f + \sigma_{\theta z}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \hat{k}_\perp^i \hat{k}^f \end{aligned} \quad (5.65)$$

y además

$$\begin{aligned} & (\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_\perp^r \hat{k}_\perp^r) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \\ &= \sigma_{xx}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{e}_x \hat{e}_x + \sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{k}_\perp^r \hat{k}_\perp^f + \sigma_{\theta z}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{k}_\perp^r \hat{k}^f \end{aligned} \quad (5.66)$$

donde por (C.9)- (C.12) expresadas a continuación para facilidad del lector, se tiene que

$$\hat{k}^i = \frac{1}{k_0 k_f} [k_{\parallel}^i (k_z^f - k_z^i) \hat{k}_\perp^f + (k_{\parallel}^i{}^2 + k_z^f k_z^i) \hat{k}^f] \quad (5.67)$$

$$\hat{k}_r^i = \frac{1}{k_0 k_f} [k_{\parallel}^i (k_z^f + k_z^i) \hat{k}_\perp^f + (k_{\parallel}^i{}^2 - k_z^f k_z^i) \hat{k}^f] \quad (5.68)$$

$$\hat{k}_\perp^i = \frac{1}{k_0 k_f} [(k_{\parallel}^i{}^2 + k_z^f k_z^i) \hat{k}_\perp^f + k_{\parallel}^i (k_z^i - k_z^f) \hat{k}^f] \quad (5.69)$$

$$\hat{k}_\perp^r = \frac{1}{k_0 k_f} [(k_{\parallel}^i{}^2 - k_z^f k_z^i) \hat{k}_\perp^f - k_{\parallel}^i (k_z^i + k_z^f) \hat{k}^f]. \quad (5.70)$$

Por los resultados (4.252)-(4.256) podemos enunciar el siguiente resultado

**Resultado 19** *La matriz de la relación de dispersión (5.37) en la base de vectores  $\{\hat{e}_x, \hat{k}_f^\perp, \hat{k}_f\}$ , es tal que las componentes distintas de cero son*

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{M} = \overleftrightarrow{I} - i\omega\mu_0 n_0 & \left[ \hat{e}_x \hat{e}_x \left( \frac{\sigma_{xx}(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \frac{\sigma_{xx}(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \right. \\
& + \hat{k}_\perp^f \hat{k}_\perp^f \left( -\frac{1}{k_0^2 k_f^2} k_{\parallel}^i{}^2 \sigma^T(k_f) + \beta^i \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \beta^r \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \\
& + \hat{k}_\perp^f \hat{k}^f \left( \frac{1}{k_0^2 k_f^2} k_{\parallel}^i k_z^f \sigma^L(k_f) + \beta^i \frac{\sigma_{\theta z}(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \beta^r \frac{\sigma_{\theta z}(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \\
& + \hat{k}^f \hat{k}_\perp^f \left( \frac{1}{k_0^2 k_f^2} k_{\parallel}^i k_z^f \sigma^T(k_f) - \gamma^i \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} + \gamma^r \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \\
& \left. + \hat{k}^f \hat{k}^f \left( -\frac{1}{k_0^2 k_f^2} k_z^f{}^2 \sigma^L(k_f) - \gamma^i \frac{\sigma_{\theta z}(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} + \gamma^r \frac{\sigma_{\theta z}(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \right] \quad (5.71)
\end{aligned}$$

donde

$$\beta^i = \frac{k_{\parallel}^i{}^2 + k_z^f k_z^i}{k_0 k_f} \quad (5.72)$$

$$\beta^r = \frac{k_{\parallel}^i{}^2 - k_z^f k_z^i}{k_0 k_f} \quad (5.73)$$

$$\gamma^i = \frac{k_{\parallel}^i (k_z^f - k_z^i)}{k_0 k_f} \quad (5.74)$$

$$\gamma^r = \frac{k_{\parallel}^i (k_z^f + k_z^i)}{k_0 k_f} \quad (5.75)$$

$$k_f^2 = k_{\parallel}^i{}^2 + k_z^f{}^2. \quad (5.76)$$

Una vez encontradas las raíces, entonces la polarización efectiva para polarización  $s$  es

$$\hat{e}^f = \hat{e}_x \quad (5.77)$$

y para polarización  $p$

$$\hat{e}^f = \frac{1}{(1+s^2)^{1/2}} \left( \hat{k}_\perp^f + s \hat{k}^f \right) \quad (5.78)$$

donde  $s = a/b$

$$a = i\omega\mu_0 n_0 \left( \frac{1}{k_0^2 k_f^2} k_{||}^i k_z^f \sigma^T(k_f) - \gamma^i \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i (k_z^f - k_z^i)} + \gamma^r \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i (k_z^f + k_z^i)} \right) \quad (5.79)$$

$$b = 1 - i\omega\mu_0 n_0 \left( -\frac{1}{k_0^2 k_f^2} k_z^f \sigma^L(k_f) - \gamma^i \frac{\sigma_{\theta z}(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i (k_z^f - k_z^i)} + \gamma^r \frac{\sigma_{\theta z}(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i (k_z^f + k_z^i)} \right) \quad (5.80)$$

Nótese que la onda transmitida no es una onda completamente transversal, sino que tiene una componente longitudinal (a lo largo de  $\vec{k}^f$ ) dada por  $s$ , por otro lado las fórmulas para la reflectancia (5.44) para polarización  $s$ ,  $p$  respectivamente, se encuentran utilizando (5.58)-(5.64) y se pueden escribir como

$$r_s = \frac{\sigma_{xx}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) k_z^i - k_z^f}{\sigma_{xx}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) k_z^i + k_z^f} e^{ik_z^i 2a} \quad (5.81)$$

$$r_p = \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) + s\sigma_{\theta z}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) k_z^i - k_z^f}{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) + s\sigma_{\theta z}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) k_z^i + k_z^f} e^{ik_z^i 2a}. \quad (5.82)$$

Estos resultados son los más importantes de la presente tesis.

### 5.4.1. Aproximación sin modos longitudinales

La primera aproximación que viene a la mente es despreciar el acoplamiento longitudinal, entonces la amplitud de reflexión para polarización  $p$  se reduce a

$$r_p = \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) k_z^i - k_z^f}{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) k_z^i + k_z^f} e^{ik_z^i 2a}. \quad (5.83)$$

### 5.4.2. Aproximación heurística

Una fórmula heurística para la reflexión en polarización  $p$ , que toma en cuenta la refracción, que utilizaremos para comparar con el resultado de la fórmula (5.81), (5.82) es

$$r_s = \frac{S_{xx}(\theta_F) k_z^i - k_z^f}{S_{xx}(\theta_I) k_z^i + k_z^f} e^{ik_z^i 2a} \quad (5.84)$$

$$r_p = \frac{S_{\theta y}(\theta_F) k_z^i - k_z^f}{S_{\theta y}(\theta_I) k_z^i + k_z^f} e^{ik_z^i 2a}. \quad (5.85)$$

donde

$$\theta_F = \arccos \left( \frac{k_{||}^i{}^2 - k_z^i k_z^f}{k_0 k_f} \right) \quad (5.86)$$

$$\theta_I = \arccos \left( \frac{k_{||}^i{}^2 + k_z^i k_z^f}{k_0 k_f} \right) \quad (5.87)$$

propuesta de esta manera aprovechando la mayor familiaridad que se tiene con las funciones de esparcimiento  $S_{xx}$  y  $S_{\theta y}$  que con el tensor de conductividad no local.

Las ecuaciones (5.37), (5.44) resuelven el problema de la reflexión de un semiespacio de esferas, cuando la matriz es el vacío. Si calculamos estas expresiones en límite de partícula pequeña y sin magnetización utilizando las aproximaciones (4.362), (4.361), (4.364), (4.365), es decir

$$s \approx 0$$

$$\sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \approx \alpha_E \cos \theta_r$$

$$\sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \approx \alpha_E \cos \theta_i$$

$$\sigma_{\theta z}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \approx -\alpha_E \sin \theta_r$$

$$\sigma_{\theta z}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \approx -\alpha_E \sin \theta_i$$

$$\alpha_E = 4\pi a^3 k_0^2 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0}$$

donde  $\sin \theta_r = \gamma^r$ ,  $\sin \theta_i = \gamma^i$ ,  $\cos \theta_r = \beta^r$ ,  $\cos \theta_i = \beta^i$  encontramos que la reflexión en polarización  $s$  y  $p$  respectivamente se reducen a:

$$r_s = \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^i + k_z^f} e^{ik_z^i 2a} \quad (5.88)$$

$$r_p = \frac{\beta^r k_z^i - k_z^f}{\beta^i k_z^i + k_z^f} e^{ik_z^i 2a} \quad (5.89)$$

donde  $\beta^i, \beta^r, \gamma^i, \gamma^r$  están dados por (5.72), (5.73), (5.74), (5.75), y podemos observar que la amplitud de reflexión en el caso de polarización  $p$  se reduce a la amplitud de reflexión de Fresnel (3.4).

Hasta el momento hemos considerado que el campo promedio es el que se obtiene de promediar los campos espaciados por las inclusiones, pero como veremos, también es posible considerar, que el campo promedio es el campo producido por la corriente promedio, y los resultados no son equivalentes. Es decir, calcularemos

$$\langle \vec{E} \rangle(\vec{r}) = \vec{E}_i(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \langle \vec{J}_T(\vec{r}') \rangle \quad (5.90)$$

donde  $\vec{J}_T$  es la corriente total inducida por el campo de excitación del sistema de partículas. Este cálculo es equivalente a a cambiar el orden de integración.

A continuación lo detallamos.

## 5.5. Otra forma de integrar

Ahora consideramos que el promedio se realiza en las corrientes y veremos que resultado obtenemos. Partimos de la ecuación (5.17) donde ya se han realizado varias integrales en componentes paralelas al plano de la interfaz plana, es decir, consideramos que

$$A_2 = i\omega\mu_0 n_0 \int_{\mathbb{R}} dz' \int_a^\infty dz_p \quad (5.91)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2k_{\parallel} \frac{i}{2k_z} e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel} + ik_z |z - z'|} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_{\pm} \hat{k}_{\pm}).$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} dp'_z \int_{\mathbb{R}} dp''_z \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}_{\parallel}, p'_z, \vec{k}_{\parallel}, p''_z) e^{ip'_z z'} e^{iz_p(p''_z - p'_z)} \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{\parallel}, p''_z)$$

y evaluamos la integral

$$\int_a^\infty e^{-iz_p(p'_z - p''_z)} dz_p = \left( \pi \delta(p'_z - p''_z) - \frac{i}{p'_z - p''_z} \right) e^{-ia(p'_z - p''_z)}. \quad (5.92)$$

Después evaluando en  $dp'_z$ , primero la delta de Dirac y después la segunda integral por el teorema del residuo, considerando el contorno dependiendo del factor  $e^{ip'_z(z'-a)}$ , si  $z' > a$ , entonces cerramos el contorno de integración por un semicírculo en el semiplano superior del plano complejo  $p'_z$  (figura 5.1), y esta integral toma el mismo valor que la evaluación de la delta solo que con signo positivo, si  $z' < a$ , entonces cerramos el contorno por un semicírculo en el semiplano inferior del plano complejo  $p'_z$  (figura 5.2) y el resultado es el negativo del primero, y por lo tanto cero, es decir el integrando queda multiplicado por una función escalón  $s(z' - a)$ , que reduce el intervalo de integración en  $dz'$  y por lo tanto

$$A_2 = i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} \frac{i}{2k_z} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \frac{1}{(2\pi)} \int_{\mathbb{R}} dp''_z \int_a^\infty dz' e^{ik_z|z-z'|} e^{ip''_z z'} (\overleftarrow{I} - \hat{k}_\pm \hat{k}_\pm) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}_{||}, p''_z, \vec{k}_{||}, p''_z) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p''_z). \quad (5.93)$$

Ahora evaluando la integral en  $dz'$  y considerando la ecuación para  $z > 0$  y agregando (5.15), encontramos que

$$A_1 + A_2 = i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \frac{1}{(2\pi)} \int_{\mathbb{R}} dp''_z \left[ \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} + \frac{(\overleftarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+)}{2k_z(p''_z - k_z)} - \frac{(\overleftarrow{I} - \hat{k}_- \hat{k}_-)}{2k_z(p''_z + k_z)} \right) e^{ip''_z z} - \frac{(\overleftarrow{I} - \hat{k}_+ \hat{k}_+)}{2k_z(p''_z - k_z)} e^{ik_z z} e^{ia(p''_z - k_z)} \right] \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}_{||}, p''_z, \vec{k}_{||}, p''_z) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p''_z). \quad (5.94)$$

El polo en  $p''_z = k_z$  es removible y el polo en  $p''_z = -k_z$  suponemos queda fuera del contorno cerrado de integración (figura 5.1), por lo que solo

los polos de  $\langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{\parallel}, p_z'')$  contribuirán a la integral. Si ahora sustituimos el ansatz (5.32) en la integral (5.93)

$$\langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{\parallel}, p_z'') = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel}^i) \frac{1}{i(p_z'' - k_z^f)} t \hat{e}^f \quad (5.95)$$

entonces la evaluación de la integral (5.93) se reduce a

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 = & i\omega\mu_0 n_0 \left( \frac{1}{k_z^{f2} - k_z^{i2}} \left( \overleftrightarrow{I} - \frac{1}{k_0^2} \vec{k}^f \vec{k}^f \right) e^{ik_z^f z} \right. \\ & \left. - \frac{(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i)}{2k_z^i (k_z^f - k_z^i)} e^{ik_z^i z} e^{ia(k_z^f - k_z^i)} \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \cdot t \hat{e}^f \end{aligned} \quad (5.96)$$

donde  $\vec{k}^f = \vec{k}_{\parallel}^i + k_z^f \hat{e}_z$ . Sustituyendo este resultado en la ecuación integral, encontramos las relaciones de consistencia, la primera es:

$$\hat{e}^f = i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{k_f^2 - k_0^2} \left( \overleftrightarrow{I} - \frac{1}{k_0^2} \vec{k}^f \vec{k}^f \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}^f \quad (5.97)$$

## 5.6. Relación de dispersión

De (5.97) podemos encontrar la relación para los posibles modos de propagación, y se debe satisfacer lo siguiente

**Resultado 20** *La relación de dispersión en la aproximación de **campo medio efectivo**, cuando primero se integra en  $dz_p$  y después en  $dz'$  está dada por la ecuación*

$$\det \left[ \overleftrightarrow{I} - i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{k_f^2 - k_0^2} \left( \overleftrightarrow{I} - \frac{1}{k_0^2} \vec{k}^f \vec{k}^f \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \right] = 0 \quad (5.98)$$

donde usando (4.342) y se obtienen dos ecuaciones de dispersión independientes

$$1 - i\omega\mu_0 n_0 \frac{\sigma^T(k_f)}{k_f^2 - k_0^2} = 0 \quad (5.99)$$

$$1 - i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{k_f^2 - k_0^2} \left(1 - \frac{k_f^2}{k_0^2}\right) \sigma^L(k_f) = 0 \quad (5.100)$$

que se pueden reescribir respectivamente como

$$k_f^2 = k_0^2 \left(1 + \frac{i\omega\mu_0 n_0}{k_0^2} \sigma^T(k_f)\right) \quad (5.101)$$

$$1 + \frac{i\omega\mu_0 n_0}{k_0^2} \sigma^L(k_f) = 0. \quad (5.102)$$

Estas son las relaciones de dispersión para el bulto tal y como se demostró en [Barrera,1]. Este resultado correctamente predice que dentro del medio en el límite de partícula pequeña, el modo del campo promedio que se propaga es transversal, lo cual debe ser una condición para el campo eléctrico en el límite de partícula pequeña (si queremos recuperar la fórmula de Fresnel). Vemos que también hay una ecuación que permite la existencia de modos longitudinales.

Esta expresión no toma en cuenta que debemos excluir el campo eléctrico que produce la partícula, actuando sobre ella misma. Esta consideración es necesaria en el caso medios densos. Por lo tanto esta expresión es válida para medios poco densos (no hay una forma precisa de definir esto por el momento).

La existencia de modos longitudinales es bien conocida en física de plasmas. Un ejemplo sencillo que presenta dichos modos, es un plasma en un campo magnético, donde se considera una latiz de iones positivos que pueden oscilar alrededor de sus posiciones de equilibrio y electrones libres alrededor. La solución de este problema puede consultarse en [Wallace, pg. 326-332], este es un problema ilustrativo de que los modos longitudinales son un fenómeno real en los materiales compuestos.

La relación de dispersión (5.99) se puede escribir como

$$k_f^2 = k_0^2 \left(1 + n_0 \frac{i\omega\mu_0 \sigma^T(k_f)}{k_0^2}\right) \quad (5.103)$$

donde aproximando  $k_f$  por  $k_0$  y utilizando (4.345) entonces se tiene que  $i\omega\mu_0 \sigma^T(k_f) \approx i\omega\mu_0 \sigma^T(k_0) = \frac{4\pi}{-ik_0} S(0)$ , entonces (5.103) se puede escribir como

$$k_f^2 = k_0^2 \left( 1 - n_0 \frac{4\pi}{ik_0^3} S(0) \right). \quad (5.104)$$

si pedimos que la componente paralela del vector de propagación sea continua, entonces como  $k_f^2 = k_{\parallel}^2 + k_z^2$  y  $k_0^2 = k_{\parallel}^2 + k_z^2$  se tiene que

$$k_z^f = \sqrt{k_z^i{}^2 + n_0 \frac{4\pi i}{k_0} S(0)} \quad (5.105)$$

Que coincide con el resultado clásico de van de Hulst [Hulst, pg.38], si tomamos la raíz cuadrada y hacemos un desarrollo de Taylor en  $n_0 \frac{4\pi i}{k_z^i{}^2 k_0} S(0)$  y truncamos la serie a primer orden.

Una vez encontrados los modos de propagación, entonces el vector de polarización efectiva se encuentra por (5.97) evaluada en  $k_z^f$ , como se pidió el determinante igual a cero, al menos una ecuación para las componentes de  $\hat{e}^f$  será linealmente dependiente, omitiendola por lo tanto podemos resolver para la polarización efectiva. Donde  $\sigma^T$ ,  $\sigma^L$  están dadas por (4.343), (4.344) respectivamente.

## 5.7. Coeficiente de transmisión

Tenemos además la siguiente relación de consistencia o teorema de extinción Ewald-Oseen:

$$\hat{e}^i = i\omega\mu_0 n_0 (\overleftarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftarrow{\sigma}(\vec{k}^f, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} \cdot \hat{e}^f t e^{ia(k_z^f - k_z^i)} \quad (5.106)$$

donde tomando el producto escalar por  $\hat{e}^i$  encontramos que el coeficiente de transmisión  $t$  debe valer

$$t = \frac{1}{i\omega\mu_0 n_0} \frac{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)}{\hat{e}^i \cdot \overleftarrow{\sigma}(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}^f} e^{-ia(k_z^f - k_z^i)} \quad (5.107)$$

## 5.8. Coeficiente de reflexión

Evaluando (5.93) para  $z < 0$  y el ansatz (5.32) se tiene que

$$A_2(z < 0) = -i\omega\mu_0n_0e^{i\vec{k}_{\parallel}^i \cdot \vec{r}_{\parallel}} e^{-ik_z^i z} (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_r \hat{k}_r) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}^f, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \cdot t\hat{e}_t e^{ia(k_z^f + k_z^i)} \quad (5.108)$$

y por lo tanto tenemos el siguiente resultado

**Resultado 21** *El campo reflejado promedio producido por una distribución aleatoria de esferas cuando la matriz es el vacío y campo incidente*

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \hat{e}^i e^{i\vec{k}_{\parallel}^i \cdot \vec{r}_{\parallel} + k_z^i z},$$

en la aproximación de **campo medio efectivo**, donde primero se integra sobre la posición de las partículas  $dz_p$  y después en  $dz'$  es:

$$\langle \vec{E} \rangle^{(-)}(\vec{r}) = \vec{E}_i(\vec{r}) + \frac{(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}^f}{\hat{e}^i \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}^f} \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^f + k_z^i} e^{i\vec{k}_{\parallel}^i \cdot \vec{r}_{\parallel}} e^{-ik_z^i z} e^{i2ak_z^i} \quad (5.109)$$

donde  $k_z^f$  es solución de (5.99) ó (5.100),  $\hat{e}^f$  es solución de (5.97). Y debemos notar que esta expresión junto con la relación de dispersión si se reduce a la fórmula de Fresnel en el límite de partícula pequeña.

Nótese que esta ecuación es idéntica a la solución general dada por (5.44), si en (5.44) ponemos en vez de  $\sigma(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \rightarrow \sigma(\vec{k}^f, \vec{k}^f)$  y en vez de  $\sigma(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \rightarrow \sigma(\vec{k}^f, \vec{k}^f)$ . Pero la  $\sigma(\vec{k}^f, \vec{k}^f)$  es la conductividad generalizada efectiva del bulto, por lo tanto esta manera de integrar es equivalente a aproximar la  $\sigma(\vec{k}, \vec{k}')$  por la  $\sigma(\vec{k}, \vec{k})$  del bulto, la cual no tiene información sobre la presencia de la interfaz. Si utilizamos la expresión

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^f, \vec{k}^f) = \sigma^T(k_f)\hat{e}_x\hat{e}_x + \sigma^T(k_f)\hat{k}_{\perp}^f\hat{k}_{\perp}^f + \sigma^L(k_f)\hat{k}^f\hat{k}^f, \quad (5.110)$$

podemos identificar los coeficientes de reflexión como

$$r_s = \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^f + k_z^i} e^{ik_z^i 2a} \quad (5.111)$$

$$r_p = \frac{\hat{k}_{\perp}^r \cdot \hat{k}_{\perp}^f}{\hat{k}_{\perp}^i \cdot \hat{k}_{\perp}^f} \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^f + k_z^i} e^{ik_z^i 2a} \quad (5.112)$$

que son los coeficientes de Fresnel evaluados con la relación de dispersión de van de Hulst.

# Capítulo 6

## Aproximación del cono de luz

En esta sección calcularemos la relación de dispersión, las amplitudes de transmisión, reflexión, haciendo ciertas suposiciones en las relaciones generales encontradas en la sección anterior, y le llamaremos la aproximación del cono de luz, con el fin de encontrar algunos resultados numéricos.

El problema de la reflexión transmisión y refracción de la luz por un semi espacio de esferas colocadas al azar, tiene un antecedente en [Augusto,3], allí se calculan la reflectancia del campo coherente por un semiespacio de esferas colocadas al azar en el límite diluido, es decir cuando la fracción de llenado  $n_0$  definida como el volumen total de las esferas dividido por el volumen total, sea pequeño, pero plantea el problema, como un problema de esparcimiento múltiple .

Es el propósito de esta sección el plantear este problema con un enfoque de medio efectivo y su relación con el cálculo de esparcimiento múltiple [Augusto,3], [Barrera,2], [Tsang,1].

Las expresiones que encontramos son equivalentes, pero corrigen algunas fallas que tiene el cálculo de esparcimiento múltiple, encontrando fórmulas mas precisas para el cálculo de los modos electromagnéticos, la reflectancia y la transmitancia de un semiespacio de esferas.

Para deducirlo como un caso particular de una teoría de medio efectivo, se recuerda que por las fórmulas (4.304)-(4.306) del tensor generalizado de conductividad no local, evaluado cuando  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , donde  $\phi$  es la coordenada azimutal del vector de onda esparcido, se encuentra una relación entre el tensor de conductividad no local y las funciones de esparcimiento dadas por:

$$i\omega\mu_0 \frac{1}{4\pi} \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_x = \frac{1}{-ik_0} S_{xx}(\theta) \hat{e}_x \quad (6.1)$$

$$i\omega\mu_0 \frac{1}{4\pi} \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{k}_\perp^i = \frac{1}{-ik_0} S_{\theta y}(\theta) \hat{e}_\theta \quad (6.2)$$

$$i\omega\mu_0 \frac{1}{4\pi} \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{k}^i = \frac{1}{-ik_0} S_{\theta z}(\theta) \hat{e}_\theta. \quad (6.3)$$

donde los vectores  $\hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi, \hat{e}_r$  se miden respecto al sistema coordenado tal que el eje  $z$  coincide con la dirección de  $\vec{k}^i$ , y además  $\theta$  es el ángulo que forma  $\vec{k}^s$  el vector de onda esparcido respecto de  $\vec{k}^i$  el vector de onda de la onda incidente, y se tiene la condición  $|\vec{k}^i| = |\vec{k}^s| = k_0$  en particular requerimos calcular lo siguiente

$$i\omega\mu_0 \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_x = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{xx}(0) \hat{e}_x \quad (6.4)$$

$$i\omega\mu_0 \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^i) \cdot \hat{k}_\perp^i = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{\theta y}(0) \hat{k}_\perp^i \quad (6.5)$$

$$i\omega\mu_0 \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^i) \cdot \hat{k}^i = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{\theta z}(0) \hat{k}_\perp^i \quad (6.6)$$

$$i\omega\mu_0 \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}_r \hat{k}_r \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_x = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{xx}(\pi - 2\theta_i) \hat{e}_x \quad (6.7)$$

$$i\omega\mu_0 \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}_r \hat{k}_r \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^i) \cdot \hat{k}_\perp^i = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i) \hat{e}^R \quad (6.8)$$

$$i\omega\mu_0 \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}_r \hat{k}_r \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^i) \cdot \hat{k}^i = \frac{4\pi}{-ik_0} S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i) \hat{e}^R \quad (6.9)$$

donde

$$\hat{e}^R = \cos(\pi - 2\theta_i) \hat{k}_\perp^i - \sin(\pi - 2\theta_i) \hat{k}^i, \quad (6.10)$$

y las funciones  $S_{\theta y}, S_{xx}, S_{\theta z}$  están dadas por (4.296)-(4.298). Se puede observar que  $S_{\theta z}(0) = 0$ . Considerando que podemos hacer un desarrollo de Taylor del tensor generalizado de conductividad no local alrededor de  $\vec{k}^f \approx \vec{k}^i$ , entonces

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}_{||}^i, k_z^f) \approx \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) + \frac{\partial}{\partial k_z^f} \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}_{||}^i, k_z^f) \Big|_{k_z^f=k_z^i} (k_z^f - k_z^i) + O(|k_z^f - k_z^i|^2). \quad (6.11)$$

por lo tanto la relación de dispersión toma la forma

$$\det \left[ \overleftrightarrow{I} - i\omega\mu_0 n_0 \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^i) + (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^i)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^i)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \right] = 0 \quad (6.12)$$

A continuación escribiremos los elementos distintos de cero de esta matriz en la base  $\{\hat{e}_x, \hat{k}_\perp^i, \hat{k}^i\}$ . Para ello primero notamos que el vector normal a la superficie plana, puede escribirse como una combinación lineal de los vectores  $\hat{k}^i, \hat{k}_\perp^i$  y por lo tanto

$$\hat{e}_z \hat{e}_z = \frac{1}{k_0^2} \left( k_z^i \hat{k}^i - k_{||}^i \hat{k}_\perp^i \right) \left( k_z^i \hat{k}^i - k_{||}^i \hat{k}_\perp^i \right). \quad (6.13)$$

Además recordando las definiciones (4.300), (4.347) se tiene que

$$i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^i) = \frac{4\pi}{-ik_0} \left( S(0)(\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_\perp^i \hat{k}_\perp^i) + S_{zz}(0) \hat{k}^i \hat{k}^i \right) \quad (6.14)$$

de donde se concluye fácilmente que

$$-\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^i) \quad (6.15)$$

$$= \frac{4\pi}{ik_0} \frac{1}{k_0^4} \left( S_{zz}(0) k_z^i{}^2 \hat{k}^i \hat{k}^i - S(0) k_{||}^i k_z^i \hat{k}^i \hat{k}_\perp^i \right) \quad (6.16)$$

$$- S_{zz}(0) k_{||}^i k_z^i \hat{k}_\perp^i \hat{k}^i + S(0) k_{||}^i{}^2 \hat{k}_\perp^i \hat{k}_\perp^i \right). \quad (6.17)$$

También es posible evaluar

$$i\omega\mu_0 (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i)$$

$$= \frac{4\pi}{-ik_0} \left( S_{xx}(\theta) \hat{e}_x \hat{e}_x + S_{\theta y}(\theta) \hat{k}^s \hat{k}_\perp^i + S_{\theta z}(\theta) \hat{k}^s \hat{k}^i \right). \quad (6.18)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{k}^s$  y  $\vec{k}^i$ .

Utilizando estos resultados y tomando en cuenta el hecho que  $S_{\theta z}(0) = 0$ ,  $\hat{k}_\perp^i \cdot \hat{k}^i = 0$ , el tercero y cuarto términos de la matriz (6.12) se escriben como

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{M} &= \overleftrightarrow{I} + \alpha \left[ \left( \frac{S_{xx}(0)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \frac{S_{xx}(\pi - 2\theta_i)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \hat{e}_x \hat{e}_x \right. \\ &+ \left( -\frac{k_\parallel^i{}^2}{k_0^4} S(0) + \frac{S_{\theta y}(0)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \frac{S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} (\hat{k}_\perp^i \cdot \hat{e}^R) \right) \hat{k}_\perp^i \hat{k}_\perp^i \\ &+ \left( \frac{k_\parallel^i k_z^i}{k_0^4} S_{zz}(0) - \frac{S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} (\hat{k}_\perp^i \cdot \hat{e}^R) \right) \hat{k}_\perp^i \hat{k}^i \\ &+ \left( \frac{k_\parallel^i k_z^i}{k_0^4} S(0) - \frac{S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} (\hat{k}^i \cdot \hat{e}^R) \right) \hat{k}^i \hat{k}_\perp^i \\ &\left. + \left( -\frac{k_z^i{}^2}{k_0^4} S_{zz}(0) - \frac{S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} (\hat{k}^i \cdot \hat{e}^R) \right) \hat{k}^i \hat{k}^i \right] \quad (6.19) \end{aligned}$$

donde

$$\hat{e}^R = \cos(\pi - 2\theta_i) \hat{k}_\perp^i - \sin(\pi - 2\theta_i) \hat{k}^i, \quad (6.20)$$

$$\alpha = \frac{4\pi n_0}{ik_0}. \quad (6.21)$$

Para garantizar que  $\overleftrightarrow{M} \cdot \hat{e}^f$  tenga al menos una solución diferente de cero, debemos pedir que el determinante de la matriz  $\overleftrightarrow{M}$  sea cero. En forma matricial se puede escribir como

$$\det \begin{pmatrix} 1 + \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & 1 + \sigma_{33} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.22)$$

el determinante es entonces

$$(1 + \sigma_{11})(1 + (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}\sigma_{32}) = 0 \quad (6.23)$$

cuyas raíces satisfacen las ecuaciones

$$\sigma_{11} = -1 \quad (6.24)$$

$$(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}\sigma_{32}) = -1 \quad (6.25)$$

donde se obtienen las relaciones de dispersión. La primera que corresponde a la polarización  $s$  es:

$$-\frac{\alpha}{2k_z^i} \left( \frac{S_{xx}(0)}{k_z^f - k_z^i} - \frac{S_{xx}(\pi - 2\theta_i)}{k_z^f + k_z^i} \right) = 1 \quad (6.26)$$

que podemos escribir de manera compacta si definimos

$$S_{xx}^{(+)} = S_{xx}(0) + S_{xx}(\pi - 2\theta_i) \quad (6.27)$$

$$S_{xx}^{(-)} = S_{xx}(0) - S_{xx}(\pi - 2\theta_i) \quad (6.28)$$

entonces la ecuación queda como

$$k_z^{f2} + \frac{\alpha}{2k_z^i} S_{xx}^{(-)} k_z^f - \left( k_z^{i2} - \frac{\alpha}{2} S_{xx}^{(+)} \right) = 0 \quad (6.29)$$

y cuya solución es

$$k_z^f = \frac{-\alpha}{4k_z^i} S_{xx}^{(-)} \pm \left( \left( \frac{\alpha}{4k_z^i} S_{xx}^{(-)} \right)^2 + \left( k_z^{i2} - \frac{\alpha}{2} S_{xx}^{(+)} \right) \right)^{1/2} \quad (6.30)$$

si además  $\alpha$  es pequeño, entonces se puede aproximar a orden  $O(\alpha)$  como

$$k_z^f = \frac{-\alpha}{4k_z^i} S_{xx}^{(-)} \pm k_z^i \left( 1 - \frac{\alpha}{4k_z^{i2}} S_{xx}^{(+)} \right) \quad (6.31)$$

donde debe tomarse la raíz positiva por el hecho que cuando la densidad de número de partículas tiende a cero, se debe recuperar el vector de onda incidente, y sustituyendo el valor de  $\alpha$ , se encuentra que

$$k_z^f = k_z^i + i \frac{2\pi n_0}{k_0 k_z^i} S_{xx}(0) \quad (6.32)$$

que coincide con el índice de refracción propuesto por van de Hulst [Hulst], siempre y cuando elevemos al cuadrado y sumamos  $k_{\parallel}^{i2}$  de ambos lados de la ecuación (6.32), y aproximemos la raíz por una serie de Taylor, y el resultado es válido a orden  $O(\alpha^2)$  es decir

$$n_{eff} = 1 + i \frac{2\pi}{k_0^3} n_0 S(0) + O(\alpha^2) \quad (6.33)$$

En polarización  $p$ , se puede demostrar que la relación de dispersión (6.25) también cumple una ecuación cuadrática, dada por la expresión

$$A k_z^{f2} + B k_z^f + C = 0 \quad (6.34)$$

donde

$$A = 4k_0^4 k_z^{i2} - 4k_z^{i2} \left( k_{\parallel}^{i2} S(0) + k_z^{i2} S_{zz}(0) \right) \alpha \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} B = & 2\alpha k_0^4 k_z^i \left( S(0) + S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i) \cos(2\theta_i) + S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i) \sin(2\theta_i) \right) \\ & - 2\alpha^2 k_z^i \left[ k_z^{i2} S(0) S_{zz}(0) \right. \\ & \left. + k_z^i \left( k_{\parallel}^i S(0) S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i) + k_z^i S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i) S_{zz}(0) \right) \cos(2\theta_i) \right. \\ & \left. + k_{\parallel}^i \left( k_{\parallel}^i S(0) S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i) + k_z^i S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i) S_{zz}(0) \right) \sin(2\theta_i) \right] \quad (6.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = & -4k_0^4 k_z^{i4} - 2k_z^{i2} \alpha \left( -k_0^4 S(0) - 2k_{\parallel}^{i2} k_z^{i2} S(0) - 2k_z^{i4} S_{zz}(0) + \right. \\ & \left. k_0^4 S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i) \cos(2\theta_i) + k_0^4 S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i) \sin(2\theta_i) \right) + \\ & \alpha^2 \left( -2k_z^{i4} S(0) S_{zz}(0) + 2k_z^{i3} \left( k_{\parallel}^i S(0) S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i) + k_z^i S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i) S_{zz}(0) \right) \cos(2\theta_i) \right. \\ & \left. + \left( k_0^4 S(0) S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i) + 2k_{\parallel}^i k_z^{i2} \left( k_{\parallel}^i S(0) S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i) + k_z^i S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i) S_{zz}(0) \right) \right) \sin(2\theta_i) \right) \quad (6.38) \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación cuadrática da dos posibles soluciones, de la cual debemos escoger la que cumpla la condición de que  $Im k_z^f > 0$  para tener una solución que tienda a cero cuando  $z \rightarrow \infty$ . Sustituyendo esta solución en la ecuación de consistencia, lo que implica que el determinante

sea cero, implica que una ecuación se vuelve linealmente dependiente y por lo tanto omitiendo la ecuación linealmente dependiente, se puede recuperar la polarización de estos modos, que por lo pronto llamaremos modos mixtos que están dados por

$$\hat{e}^f = \frac{1}{(1+s^2)^{1/2}} \left( \hat{k}_\perp^i + s \hat{k}^i \right)$$

donde  $s$  vale

$$s = \frac{-\alpha \left( \frac{k_\parallel^i k_z^i}{k_0^4} S(0) + \frac{S_{\theta y}(\pi-2\theta_i)}{2k_z^i (k_z^f + k_z^i)} \sin(\pi - 2\theta_i) \right)}{1 + \alpha \left( -\frac{k_z^i{}^2}{k_0^4} S_{zz}(0) + \frac{S_{\theta z}(\pi-2\theta_i)}{2k_z^i (k_z^f + k_z^i)} \sin(\pi - 2\theta_i) \right)}.$$

Nota: Esta solución siempre incluye un término que no permite recuperar la fórmula de Fresnel en el límite de partícula pequeña.

## 6.1. Amplitud de reflexión (cono de luz)

En el problema de reflexión debemos pedir que la solución tienda a cero cuando  $z \rightarrow \infty$ , por lo que se deberá tomar la solución tal que  $Imk_z^f \geq 0$  en la solución de las relaciones de dispersión dadas por el determinante de (6.19).

La amplitud de transmisión se obtiene de la segunda relación de consistencia (5.36) con la aproximación de Taylor a orden cero en el tensor generalizado de conductividad no local (6.11), es decir

$$\hat{e}^i = i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{2k_z^i} (\overleftrightarrow{T} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^i)}{k_z^f - k_z^i} \cdot t \hat{e}^i e^{ia(k_z^f + k_z^i)} \quad (6.39)$$

donde para la polarización  $s$   $\hat{e}^i = \hat{e}_x$  y polarización  $p$   $\hat{e}^i = \hat{k}_\perp^i$ , y utilizando las expresiones (6.7)-(6.9), se tienen las siguientes condiciones para el coeficiente de transmisión

$$t_s = \frac{ik_0}{4\pi} \frac{2k_z^i k_z^i - k_z^f}{n_0 S_{xx}(0)} e^{-ia(k_z^f + k_z^i)} \quad (6.40)$$

$$t_p = \frac{ik_0}{4\pi} \frac{2k_z^i k_z^i - k_z^f}{n_0 S_{\theta y}(0)} e^{-ia(k_z^f + k_z^i)}. \quad (6.41)$$

El campo reflejado se calcula por la fórmula (5.42) que bajo las aproximaciones consideradas se obtiene finalmente el siguiente resultado

**Resultado 22** *El campo reflejado promedio en la aproximación del cono de luz, despreciando el acoplamiento longitudinal y cuando la matriz es el vacío es:*

$$\langle \vec{E} \rangle^{(-)}(z) = e^{ik_z^i z} \hat{e}_x + \frac{S_{xx}(\pi - 2\theta_i)}{S_{xx}(0)} \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^f + k_z^i} e^{-ik_z^i z} e^{ik_z^i 2a} \hat{e}_x \quad (6.42)$$

$$\langle \vec{E} \rangle^{(-)}(z) = e^{ik_z^i z} \hat{k}_\perp^i + \frac{S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i)}{S_{\theta y}(0)} \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^f + k_z^i} e^{-ik_z^i z} e^{ik_z^i 2a} \hat{e}^R \quad (6.43)$$

para polarización *s* y polarización *p* respectivamente y donde

$$\hat{e}^R = \cos(\pi - 2\theta_i) \hat{k}_\perp^i - \sin(\pi - 2\theta_i) \hat{k}^i. \quad (6.44)$$

Y por lo tanto los coeficientes de reflexión son:

$$r_s = \frac{S_{xx}(\pi - 2\theta_i)}{S_{xx}(0)} \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^f + k_z^i} e^{ik_z^i 2a} \quad (6.45)$$

$$r_p = \frac{S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i)}{S_{\theta y}(0)} \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^f + k_z^i} e^{ik_z^i 2a} \quad (6.46)$$

Este es el resultado que se obtiene con las teorías de esparcimiento múltiple disponibles en los artículos [Augusto,3].

## 6.2. Límite de partícula pequeña

A continuación calculamos el límite de partícula pequeña, es decir cuando  $k_0 a \ll 1$ , en la aproximación del cono de luz, en este caso se tiene lo siguiente

$$S_{xx}(\theta) = \frac{3}{2}(b_1(ak_0) \cos(\theta) + a_1(ak_0)) \quad (6.47)$$

$$S_{\theta y}(\theta) = \frac{3}{2}(b_1(ak_0) + a_1(ak_0) \cos(\theta)) \quad (6.48)$$

$$S_{\theta z}(\theta) = -3a_1^L \sin \theta \quad (6.49)$$

$$S_{zz}(0) = -i(ak_0)^3 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \quad (6.50)$$

donde

$$a_1(ak_0) = -\frac{2}{3}i(ak_0)^3 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \quad (6.51)$$

$$b_1(ak_0) = -\frac{2}{3}i(ak_0)^3 \frac{\mu_s - \mu_0}{\mu_s + 2\mu_0} \quad (6.52)$$

$$a_1^L(ak_0) = -\frac{1}{3}i(ak_0)^3 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} \quad (6.53)$$

en este caso las relaciones de dispersión despreciando los términos mayores a  $O(ak_0)^3$ , se escriben como

$$\sigma_{11} = -1 \quad (6.54)$$

es decir

$$\frac{\alpha}{2k_z^i} \left( \frac{S_{xx}(0)}{k_z^f - k_z^i} - \frac{S_{xx}(\pi - 2\theta_i)}{k_z^f + k_z^i} \right) = -1. \quad (6.55)$$

Para una esfera sin magnetización se simplifica como

$$\frac{\alpha i(ak_0)^3}{k_z^{f^2} - k_z^{i^2}} \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} = 1. \quad (6.56)$$

que es equivalente a la relación de dispersión local (3.71). Para polarización  $p$  se tiene que la relación de dispersión

$$\det \left[ \overleftrightarrow{I} - i\omega\mu_0 n_0 \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \right. \right. \\ \left. \left. + (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) \right] = 0 \quad (6.57)$$

se simplifica utilizando las aproximaciones del cono de luz (6.11) como

$$\sigma_{22} + \sigma_{33} = -1 \quad (6.58)$$

$$\alpha \left( \frac{S_{\theta y}(0)}{2k_z^i(k_z^f - k_z^i)} - \frac{S_{\theta y}(\pi - 2\theta_i) \cos(\pi - 2\theta_i) - S_{\theta z}(\pi - 2\theta_i) \sin(\pi - 2\theta_i)}{2k_z^i(k_z^f + k_z^i)} \right) = -1 + \frac{1}{k_0^2} (S(0) + S_{zz}(0)) \quad (6.59)$$

que en el caso que la partícula no sea magnética se tendría que  $b_1 = 0$  y en el lado derecho despreciando el término  $S(0) + S_{zz}(0) \approx (ak_0)^3$ , por ser mucho menor que uno, se simplifica como

$$\frac{\alpha i (ak_0)^3}{k_z^{f2} - k_z^{i2}} \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0} = 1. \quad (6.60)$$

Que es idéntica al caso de polarización  $s$ , e idéntica al caso local (3.71), haciendo la identificación

$$\mu_0 \chi_E = \frac{4\pi n_0}{ik_0} i (ak_0)^3 \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{\epsilon_s + 2\epsilon_0}. \quad (6.61)$$

Para el cálculo de la reflectancia, utilizamos las expresiones (6.42), (6.43), en el límite de partícula pequeña, y considerando que las esferas no tienen magnetización se encuentra que

$$r_s = \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^i + k_z^f} e^{ik_z^i 2a} \quad (6.62)$$

$$r_p = \cos(\pi - 2\theta_i) \frac{k_z^i - k_z^f}{k_z^i + k_z^f} e^{ik_z^i 2a} \quad (6.63)$$

además del factor de la fase, la cual se elimina redefiniendo el origen de coordenadas, esta difiere a la fórmula del caso local (3.4), por el hecho que en el caso local se tiene el factor  $\frac{\hat{k}_\perp^i \cdot \hat{k}_\perp^f}{\hat{k}_\perp^i \cdot \hat{k}_\perp^f}$ , en lugar de  $\cos(\pi - 2\theta_i)$ , que se reduce al caso anterior solo cuando  $\hat{k}_\perp^f = \hat{k}_\perp^i$ , esta diferencia es una consecuencia de la suposición hecha en esta aproximación, que era el suponer que el campo que excita la partícula es el campo incidente.

### 6.3. Esferas en vacío, cálculos, polarización P

En esta sección mostramos las gráficas para las distintas aproximaciones para la reflexión de la luz en polarización  $p$ , por un sistema de esferas en vacío,

es decir, compararemos las fórmulas (5.82), (5.83), (5.85), (5.112), (6.46), que corresponden a la solución exacta, a la solución exacta sin acoplamiento longitudinal, la fórmula heurística, la fórmula de Fresnel y la aproximación del cono de luz, evaluadas para la constante de propagación  $k_z^f$  dada por la relación de Foldy-Lax (7.3), para distintos radios de partícula y fracciones volumétricas de llenado, donde definimos la fracción volumétrica de llenado como  $f_1 = n_0 V_s$ , siendo  $n_0$  la densidad de número de partículas,  $V_s$  el volumen de la esfera de radio  $a$ .

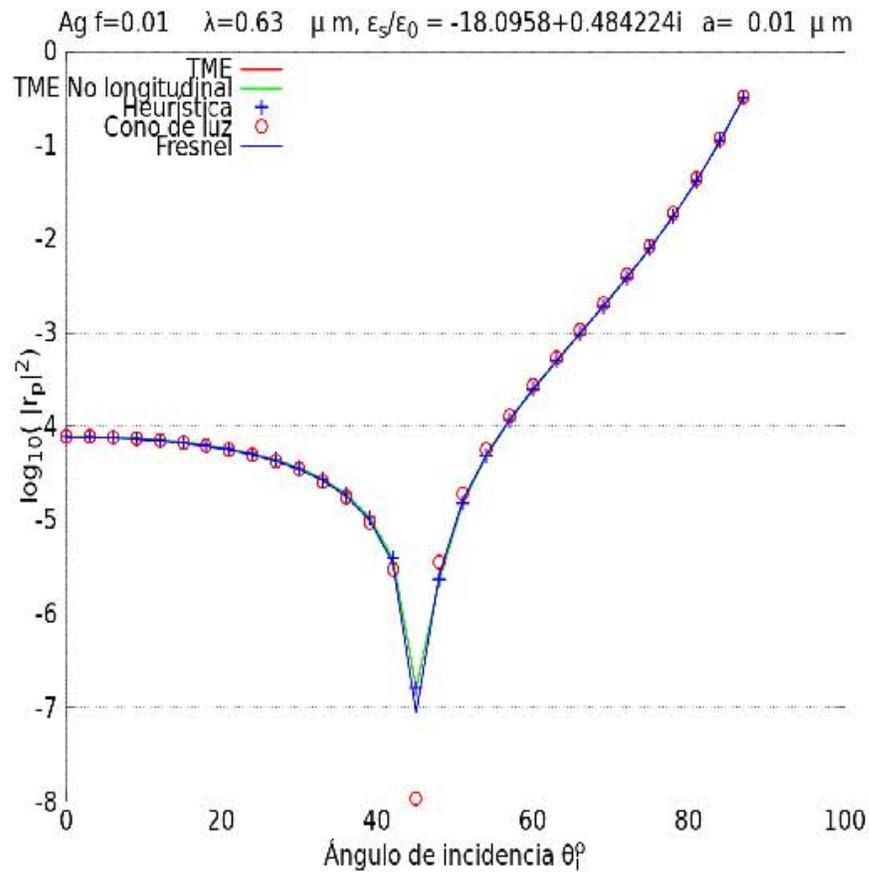


Figura 6.1: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.01 \mu m$ , permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu m$ .

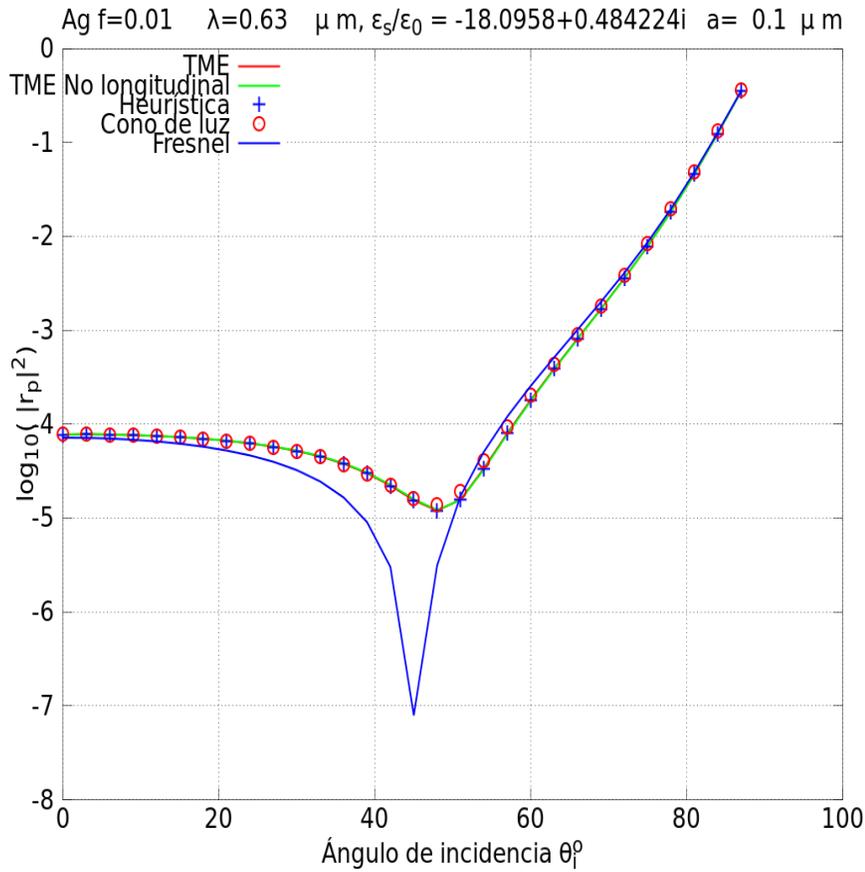


Figura 6.2: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.1 \mu m$ , permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu m$ .

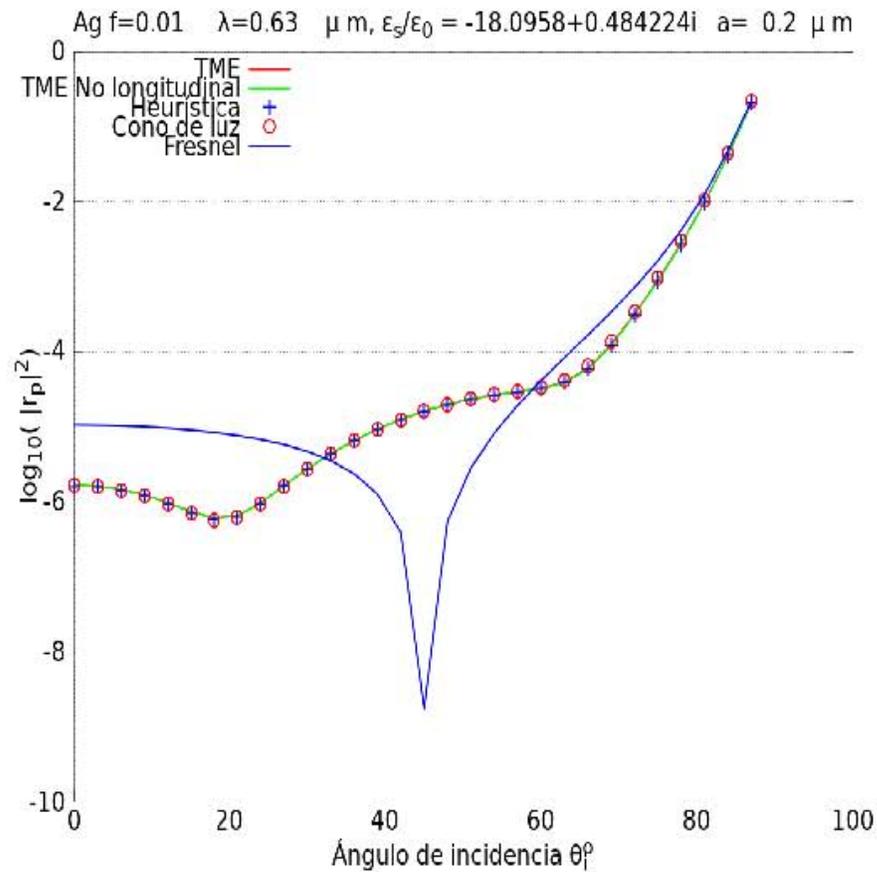


Figura 6.3: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.2 \mu\text{m}$ , permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ .

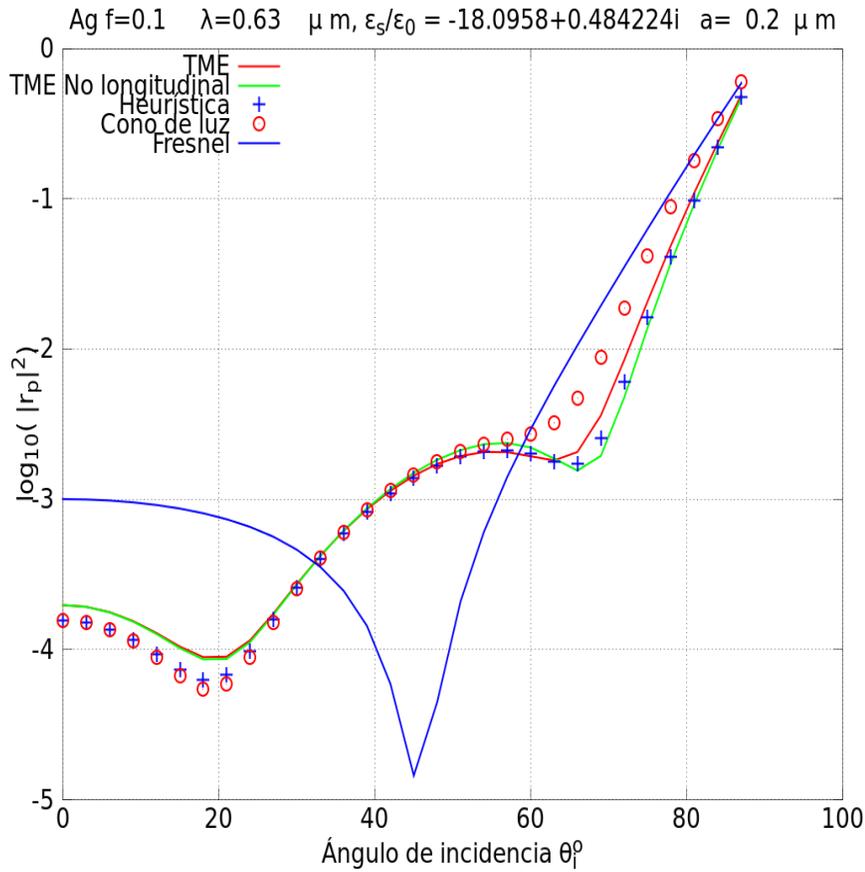


Figura 6.4: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.1$ , con radio de las esferas  $a = 0.2 \mu m$ , permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu m$ .

## 6.4. Comentario

De estas gráficas podemos observar que para fracciones volumétricas de llenado pequeñas, y radios pequeños, todos los modelos coinciden incluso con la fórmula de Fresnel (5.112).

A medida que el radio de la partícula aumenta, vemos que los modelos se separan de la fórmula de Fresnel, y el esparcimiento de la partícula se vuelve importante, pero los modelos predicen esencialmente el mismo comportamiento.

Si después incrementamos la fracción volumétrica de llenado hasta un valor crítico de la teoría  $f_1 = 0.1$ , entonces vemos que aparecen diferencias entre el modelo con modos longitudinales TME (5.82), y los otros modelos que no toman en cuenta los modos longitudinales, así mismo vemos que el modelo del cono de luz (6.46), se separa del modelo (TME) (5.83) sin modos longitudinales y la fórmula heurística (5.85). Se observa también que la fórmula heurística es muy buena aproximación de la fórmula TME sin modos longitudinales (5.83) en todos los casos.

## 6.5. Comparación de modelos, esferas en vacío, polarización S

En esta sección mostramos las gráficas para las distintas aproximaciones para la reflexión de la luz en polarización  $s$ , por un sistema de esferas en vacío, es decir, compararemos la fórmula (5.81), (5.84), (6.45), (5.111), que corresponden a la solución exacta, la fórmula heurística, la aproximación del cono de luz y la fórmula de Fresnel respectivamente y evaluadas para la constante de propagación  $k_z^f$  dada por la relación de Foldy-Lax (7.3), para distintos radios de partícula y fracciones volumétricas de llenado, donde definimos la fracción volumétrica de llenado como  $f_1 = n_0 V_s$ , siendo  $n_0$  la densidad de número de partículas,  $V_s$  el volumen de la esfera de radio  $a$ .

6.5. COMPARACIÓN DE MODELOS, ESFERAS EN VACÍO, POLARIZACIÓN S157

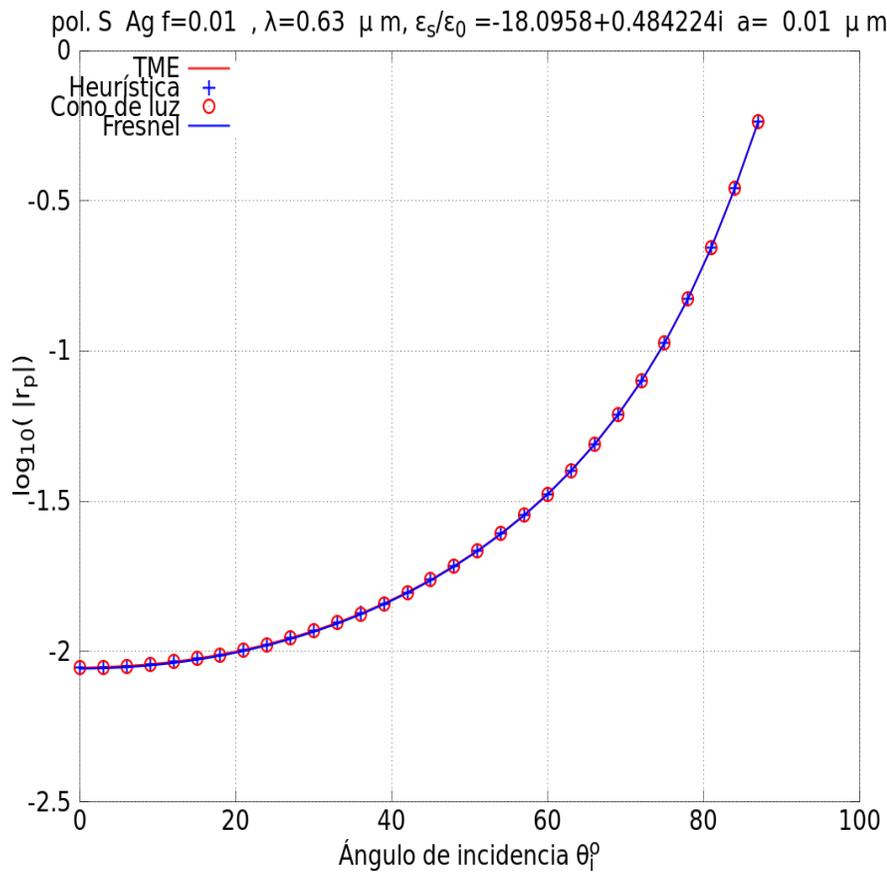


Figura 6.5: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos, TME (Teoría de medio efectivo) (5.81), heurística (5.84), cono de luz (6.45), Fresnel (5.111), como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.01 \mu\text{m}$ , permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ .

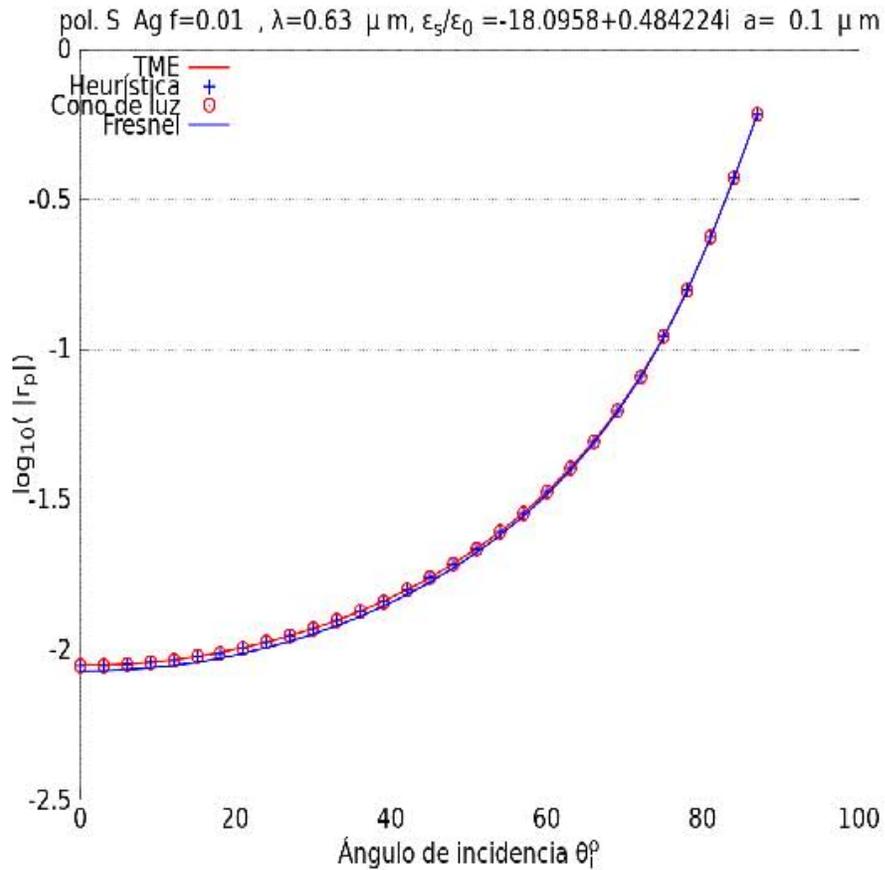


Figura 6.6: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos, TME (Teoría de medio efectivo) (5.81), heurística (5.84), cono de luz (6.45), Fresnel (5.111), como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.1 \mu m$ , permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu m$ .

6.5. COMPARACIÓN DE MODELOS, ESFERAS EN VACÍO, POLARIZACIÓN S159

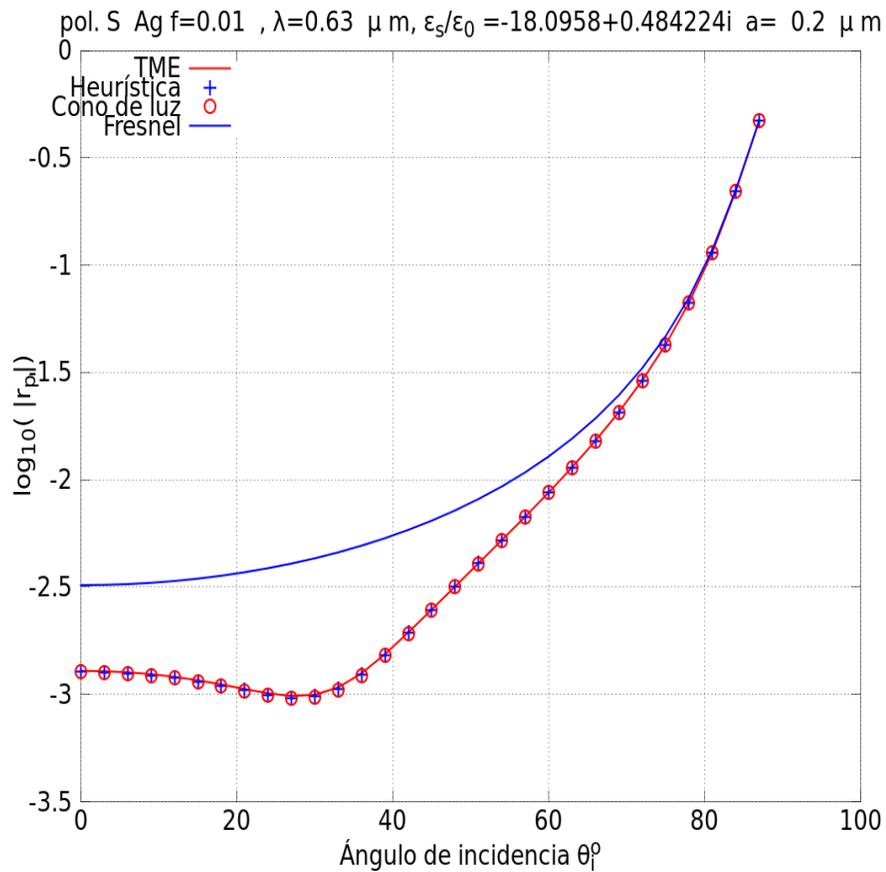


Figura 6.7: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos, TME (Teoría de medio efectivo) (5.81), heurística (5.84), cono de luz, (6.45), Fresnel (5.111), como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.2 \mu\text{m}$ , permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ .

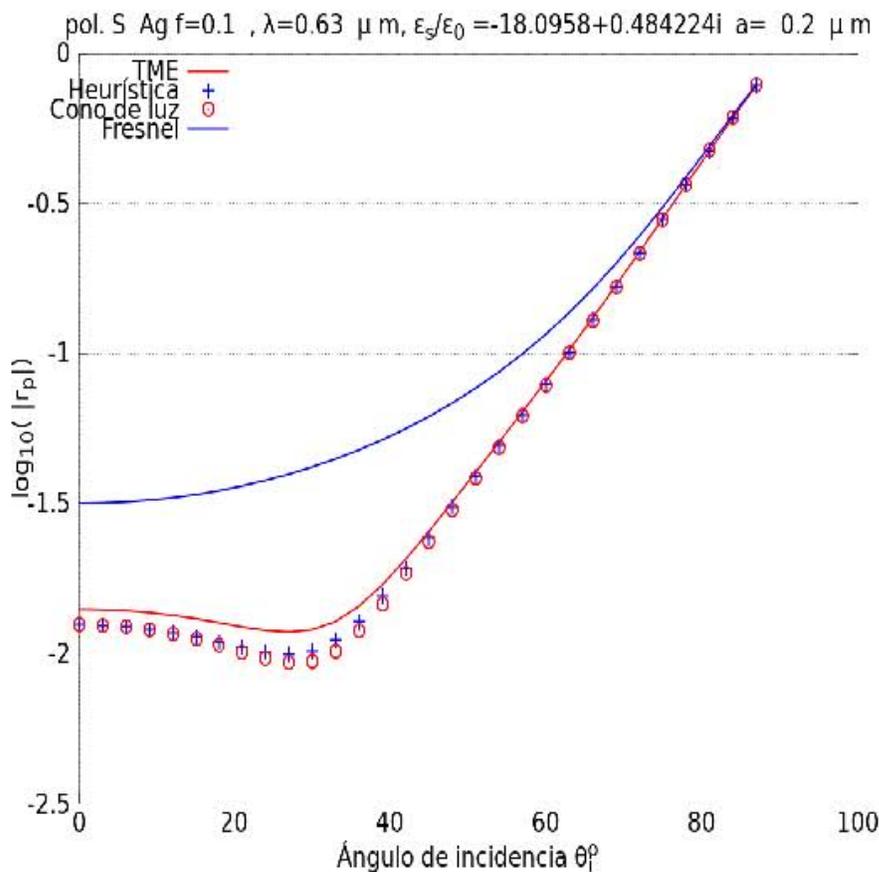


Figura 6.8: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos, TME (Teoría de medio efectivo) (5.81), heurística (5.84), cono de luz (6.45), Fresnel (5.111), como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.1$ , con radio de las esferas  $a = 0.2 \mu m$ , permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu m$ .

## 6.6. Comentario

De estas gráficas podemos observar que para fracciones volumétricas de llenado pequeñas, y radios pequeños, todos los modelos coinciden incluso con la fórmula de Fresnel (5.111).

A medida que el radio de la partícula aumenta, vemos que los modelos se separan de la fórmula de Fresnel, y el esparcimiento de la partícula se vuelve importante, pero los modelos predicen esencialmente el mismo comportamiento.

Si después incrementamos la fracción volumétrica de llenado hasta un valor crítico de la teoría  $f_1 = 0.1$ , entonces vemos que aparecen diferencias entre el modelo con modos longitudinales TME (5.81), y los otros modelos, así mismo vemos que el modelo del cono de luz (6.45), se separa de la fórmula heurística (5.84). Se observa también que la fórmula heurística es muy buena aproximación de la fórmula TME (5.81) en todos los casos.



# Capítulo 7

## Aproximación cono de luz mejorada

En esta sección se pretende dar un algoritmo para encontrar de manera numérica la solución a la relación de dispersión (5.37), lo que constituye una mejora a la fórmula de Foldy-Lax para los modos propagados utilizada en la aproximación del cono de luz.

### 7.1. Serie de Taylor a orden cero

En esta sección utilizaremos las expresiones de la sección anterior para resolver la relación de dispersión y encontrar la amplitud del campo reflejado, haciendo la suposición de que el tensor generalizado de conductividad se escribe a primer orden en su serie de Taylor en  $k_z^f$  alrededor de un  $k_{z0}^f$  inicial como

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}_{||}^i, k_z^f) \approx \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}^i, k_z^i, \vec{k}_{||}^i, k_{z0}^f) \quad (7.1)$$

con el fin de evaluar las fórmulas de reflexión (5.82). La solución del determinante de la matriz  $\overleftrightarrow{M}$  dado por (5.71), se aproximará por la constante de propagación en el bulto dada por la expresión de Foldy-Lax como en (5.104), (5.105)

$$k_f^2 = k_0^2 \left( 1 - n_0 \frac{4\pi}{ik_0^3} S(0) \right). \quad (7.2)$$

## 7.2. Fórmula de van de Hulst

Si pedimos que la componente paralela del vector de propagación sea continua, entonces

$$k_z^f = \sqrt{k_z^i{}^2 + n_0 \frac{4\pi i}{k_0} S(0)} \quad (7.3)$$

donde  $k_z^i = k_0 \cos \theta_i$ ,  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia,  $n_0$  la densidad de número de partículas,  $a$  el radio de la partícula,  $S(0)$  la función de esparcimiento evaluada en la dirección frontal.

El resultado de evaluar las fórmulas de reflexión de la teoría, en esta aproximación, es un resultado nuevo y corrige los resultados encontrados con los modelos de esparcimiento múltiple [Augusto,3], [Barrera,3] que consideraremos en detalle en la siguiente sección. La corrección consiste en considerar que el campo que excita a las partículas es el campo promedio refractado, es decir con componente paralela del vector de propagación continua en la interfaz, pero con una magnitud igual a la constante de propagación dada por la fórmula de Fofy-Lax o su equivalente para densidades bajas, de van de Hulst escrita como [Hulst],

$$k_f = k_0 \left( 1 + n_0 \frac{2\pi i}{k_0^3} S(0) \right) \quad (7.4)$$

a diferencia de las teorías de esparcimiento múltiple, que suponen que el campo de excitación es el campo incidente.

## 7.3. Iteración del determinante

Sin embargo,  $k_z^f$  se puede obtener exactamente, dentro de la aproximación de campo efectivo, y a continuación proponemos un algoritmo iterativo para encontrar la solución de la relación de dispersión dada por el determinante (5.71). La idea consiste en evaluar  $k_{z,j}^f$ , el tensor generalizado de conductividad no local y encontrar las soluciones para el determinante de (5.71) igual a cero (cuyo resultado será una ecuación de cuarto grado y se escoge la raíz apropiada, y cuyo resultado neto es el poder expresar  $k_{z,j+1}^f = H(k_{z,j}^f)$ , siendo  $H$  alguna función, e iterar esta ecuación ) para  $k_{z,j+1}^f$  dada una  $k_{z,1}^f$  inicial

$$\det \left[ \overleftrightarrow{I} - i\omega\mu_0 n_0 \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_0^2} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}^i, k_{z,j}^f, \vec{k}_{||}^i, k_{z,j}^f) \right. \right. \\ \left. \left. + (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}^i, k_z^i, \vec{k}_{||}^i, k_{z,j}^f)}{2k_z^i(k_{z,j+1}^f - k_z^i)} - (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}^i, -k_z^i, \vec{k}_{||}^i, k_{z,j}^f)}{2k_z^i(k_{z,j+1}^f + k_z^i)} \right) \right] = 0. \quad (7.5)$$

Continuando este procedimiento iterativamente, se espera que  $k_{z,j}^f$  converja a la solución del determinante de (5.71) igual a cero. Las figuras (7.1) y (7.2) muestran este proceso para un sistema en particular, en donde se aprecia claramente que para bajas densidades, la aproximación dada por la expresión de Foldy-Lax, que es la que hemos utilizado en los cálculos numéricos, es muy adecuada.

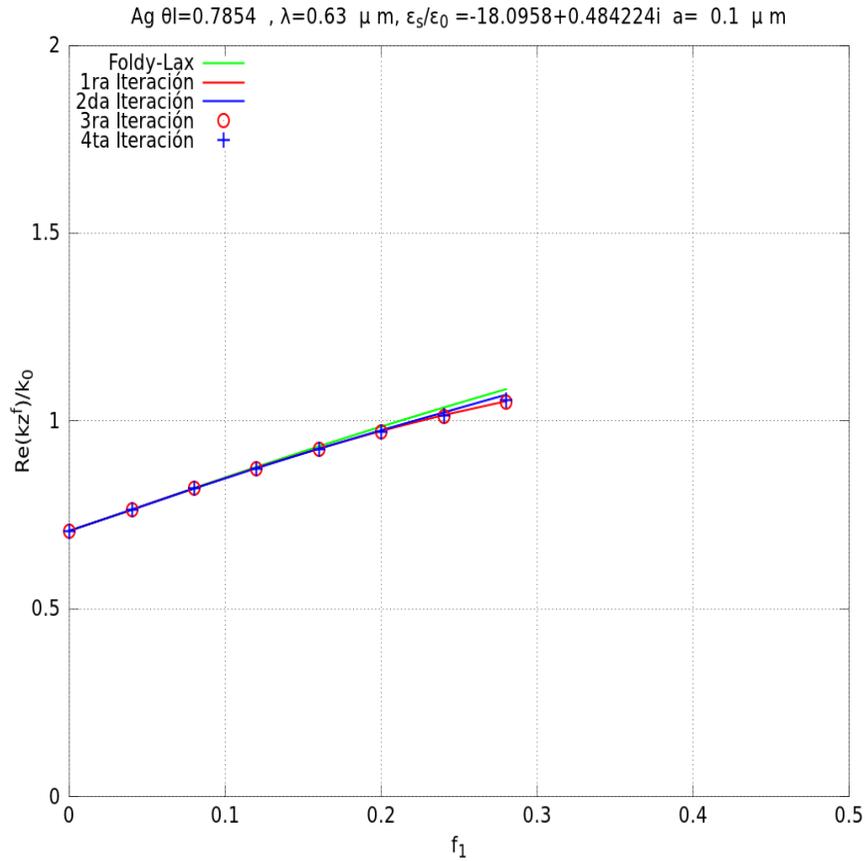


Figura 7.1: En esta figura se muestra el proceso de iterar la solución del determinante (7.5) polarización  $p$ , con  $k_z^i + 10^{-7}$  como primer aproximación, graficando la parte **real** de  $k_z^f/k_0$  como función de la fracción de llenado  $f_1$ , para un semiespacio de esferas en el vacío, con los siguientes parámetros: ángulo de incidencia  $\theta_i = 45^\circ$ , radio de las esferas  $a = 0.1 \mu\text{m}$ , permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958+0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ . También se incluye el resultado que daría la fórmula de Foldy-Lax (7.3)

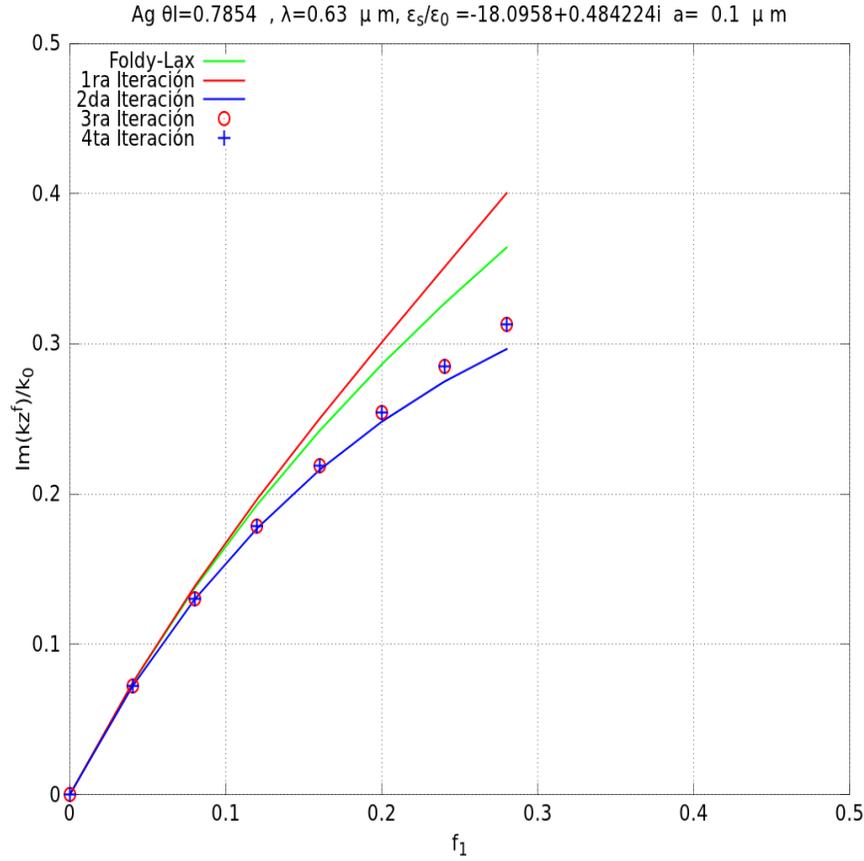


Figura 7.2: En esta figura se muestra el proceso de iterar la solución del determinante (7.5) para polarización  $p$ , con  $k_z^i + 10^{-7}$  como primer aproximación, graficando la parte **imaginaria** de  $k_z^f/k_0$  como función de la fracción de llenado  $f_1$ , para un semiespacio de esferas en el vacío, con los siguientes parámetros: ángulo de incidencia  $\theta_i = 45^\circ$ , radio de las esferas  $a = 0.1 \mu m$ , permitividad eléctrica  $\epsilon/\epsilon_0 = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu m$ . También se incluye el resultado que daría la fórmula de Foldy-Lax(7.3)



# Capítulo 8

## Semiespacio de esferas en una matriz

En el capítulo anterior se planteó la ecuación integral para el campo eléctrico promedio  $\langle \vec{E} \rangle$ , en el problema de calcular el campo eléctrico reflejado y transmitido de una onda plana incidente  $\vec{E}_i(\vec{r})$  sobre un semiespacio de esferas colocadas al azar, cuando dichas partículas se encuentran suspendidas en el vacío.

Ahora plantearemos la ecuación integral en el caso que las esferas se encuentran inmersas en una matriz con propiedades eléctricas distintas a las del vacío, es decir con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ . Un material con  $\epsilon_1$  diferente del vacío,

Para plantear y resolver este nuevo problema, la idea básica que está detrás es la de reemplazar la función de Green del espacio libre  $\overleftrightarrow{G}_0$ , por la función de Green del campo electromagnético del semiespacio  $\overleftrightarrow{G}_{HS}$ , con propiedades eléctricas  $\epsilon_1, \mu_1$ , la cual es calculada en detalle en el apéndice (A).

El campo total producido por un sistema de esferas localizadas en la posición  $\vec{r}_p$  y tales que  $z_p > a$ , se puede escribir en términos de la función de Green del semiespacio  $\overleftrightarrow{G}_{HS}$  (A.79),(A.80) como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_i + i\omega\mu_0 \sum_{p=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \overleftrightarrow{G}_{HS}(\vec{r}, \vec{r}') \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}'') \quad (8.1)$$

donde ahora debemos considerar que el tensor generalizado de conductividad no local debe ser calculado para esferas en un medio con número de onda  $k_1$ , esto es debemos considerar que las esferas están totalmente inmersas dentro de la matriz que conforma al semiespacio, esto incluye a las esferas que se encuentran cercanas a la interfaz plana.

El hecho que la esfera al acercarse a la interfaz estará eventualmente no solo rodeada de la matriz con propiedades  $\epsilon_1, \mu_1$  sino también un punto de la esfera se pondrá en contacto con el medio  $\epsilon_0, \mu_0$ , pero por tratarse de un solo punto en contacto, y el hecho que fuera de la partícula el tensor generalizado de conductividad no local en el espacio real es cero, esperamos que la consideración de que toda esfera esté rodeada del medio  $\epsilon_1, \mu_1$ , no se vea afectada.

Si ahora tomamos el promedio configuracional, que como se vió en la sección anterior, para el modelo probabilístico propuesto para la interfaz, es equivalente a integrar sobre las coordenadas  $\vec{r}_p$  y multiplicar por la densidad de número de partículas  $n_0$ , ver por ejemplo [Tsang,3, pg.205], entonces, la ecuación para el campo eléctrico promedio se escribe como

$$\begin{aligned} \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}) &= \vec{E}_i(\vec{r}) + i\omega\mu_0 n_0 \int_{\Omega} d^3 r_p \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \overleftrightarrow{G}_{HS}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ &\int_{\mathbb{R}^3} d^3 r'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}''). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Ahora, como la función de Green del semiespacio para  $z > 0$  está dada por

$$\overleftrightarrow{G}_{HS}(\vec{r}, \vec{r}') = \overleftrightarrow{G}_1(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{\parallel} \overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_{\parallel}) \frac{i}{2k_z^1} e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot (\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'_{\parallel})} e^{ik_z^1(z+z')} \quad (8.3)$$

y para  $z < 0$  como

$$\overleftrightarrow{G}_{HS}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{\parallel} \overleftrightarrow{R}_I^-(\vec{k}_{\parallel}) \frac{i}{2k_z^1} e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot (\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'_{\parallel})} e^{-ik_z^0 z + ik_z^1 z'} \quad (8.4)$$

donde  $\overleftrightarrow{G}_1(\vec{r}, \vec{r}')$  es la función de Green para el campo electromagnético en el espacio libre de la matriz y los otros términos se pueden interpretar como la contribución de las corrientes que llamaremos *corrientes imágenes*, por analogía con el caso electrostático <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>La analogía es que para una carga puntual se asocia el campo  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$  que es la

Aquí  $\overleftrightarrow{I}_{||} = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_{||}^i \hat{k}_{||}^i$

$$\vec{k}_{||} = k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y \quad (8.5)$$

$$k_z^1 = \sqrt{k_1^2 - k_{||}^2} \quad (8.6)$$

$$k_z^0 = \sqrt{k_0^2 - k_{||}^2} \quad (8.7)$$

$$\overleftrightarrow{R}_I^{\dagger} = \frac{1}{k_1^2} \left( \overleftrightarrow{I}_{||} - \frac{1}{k_z^1} \hat{e}_z \vec{k}_{||} \right) \cdot \overleftrightarrow{R} \cdot \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} + k_z^1 \vec{k}_{||} \hat{e}_z \right) \quad (8.8)$$

$$\overleftrightarrow{R}_I^{-} = \frac{1}{k_1^2} \left( \overleftrightarrow{I}_{||} + \frac{1}{k_z^0} \hat{e}_z \vec{k}_{||} \right) \cdot \left( \overleftrightarrow{I}_{||} + \overleftrightarrow{R} \right) \cdot \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} + k_z^1 \vec{k}_{||} \hat{e}_z \right). \quad (8.9)$$

$$\overleftrightarrow{R}(k_{||}) = R_{10}^{TE}(k_{||}) \overleftrightarrow{I}_{||} - (R_{10}^{TE}(k_{||}) + R_{10}^{TM}(k_{||})) \frac{1}{k_{||}^2} \vec{k}_{||} \vec{k}_{||}, \quad (8.10)$$

$$R_{10}^{TE}(k_{||}) = \frac{\mu_0 k_z^1 - \mu_1 k_z^0}{\mu_0 k_z^1 + \mu_1 k_z^0}, \quad (8.11)$$

$$R_{10}^{TM}(k_{||}) = \frac{\epsilon_0 k_z^1 - \epsilon_1 k_z^0}{\epsilon_0 k_z^1 + \epsilon_1 k_z^0}. \quad (8.12)$$

Con este resultado y sustituyendo en (8.1), se tiene que el primer término en (8.1) que contenga el término  $\overleftrightarrow{G}_1(\vec{r}, \vec{r}')$  ya se calculó en el resultado (15) en una representación mixta, y solo hay que hacer la sustitución de  $k_0$  por  $k_1$ , y curiosamente, la ecuación integral resultante (5.27) con el reemplazo de  $k_0$  por  $k_1$ , queda definida para  $z \geq a$  y el campo reflejado dado por (5.29) para  $z < a$ , pero esto no introducirá mayores dificultades. Así que tendremos cuidado al incluir las corrientes imágenes que están definidas para  $z \geq 0$  y  $z < 0$ .

Por lo tanto calcularemos el segundo término de la ecuación integral (8.1) una vez que se hubo sustituido la función de Green del semiespacio, la cual corresponde al campo eléctrico producido por corrientes que interpretamos

---

función de Green para el campo electrostático, al introducir el dieléctrico, la condición de frontera se puede cumplir si se introduce una carga imagen fuera del dominio en  $z < 0$ , con una carga  $q'$  y  $\vec{r}'$  apropiadas, de tal forma que la nueva función de Green es  $G_1 + G_{im}$  la suma de los campos de las cargas puntuales.

como corrientes *imágenes* por la analogía que existe en el caso estático, debidas a los otros términos de la función de Green del semiespacio distintos de  $\overleftrightarrow{G}_1$ .

Es decir, calcularemos la expresión

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E} \right\rangle_{Img}^+ (\vec{r}_{||}, z) &= i\omega\mu_0 n_0 \int_{z_p > a} d^3 r_p \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \\ &\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} \overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_{||}) \frac{i}{2k_z^1} e^{i\vec{k}_{||} \cdot (\vec{r}_{||} - \vec{r}'_{||})} e^{ik_z^1(z+z')} \\ &\int_{\mathbb{R}^3} d^3 r'' \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) \cdot \left\langle \vec{E} \right\rangle(\vec{r}'') \end{aligned} \quad (8.13)$$

válida para  $z > 0$ , donde usando la representación de Fourier para el tensor generalizado de conductividad no local (4.5) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E} \right\rangle_{Img}^+ (\vec{r}_{||}, z) &= i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \\ &\int_{z_p > a} d^3 r_p \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_{||}) \frac{i}{2k_z^1} e^{-i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}'_{||}} e^{ik_z^1(z+z')} \\ &\frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p' \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{p}', \vec{p}) \cdot \left\langle \vec{E} \right\rangle(\vec{p}) e^{i\vec{p}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_p)} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}_p}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Evaluando las integrales en  $d^2 r_{||}$ ,  $d^2 r_{p||}$ ,  $d^2 p_{||}$ ,  $d^2 p'_{||}$  de la ecuación anterior, y simplificando se tiene que el campo producido por las corrientes imágenes, para  $z > 0$ , se puede escribir como

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E} \right\rangle_{Img}^+ (\vec{r}_{||}, z) &= i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \\ &\int_a^\infty dz_p \int_{\mathbb{R}} dz' \overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_{||}) \frac{i}{2k_z^1} e^{ik_z^1(z+z')} \\ &\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} dp'_z \int_{\mathbb{R}} dp_z \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, p'_z, \vec{k}_{||}, p_z) \cdot \left\langle \vec{E} \right\rangle(\vec{k}_{||}, p_z) e^{ip'_z(z'-z_p) + ip_z z_p}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

También evaluamos las integrales en  $dz'$  y  $dp'_z$  y posteriormente en  $dz_p$  y el resultado es que el campo producido por las corrientes imágenes se escribe como

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E} \rangle_{Img}^+ (\vec{r}_{||}, z) &= -i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \overleftrightarrow{R}_I^+ (\vec{k}_{||}) \frac{e^{ik_z^1(z+a)}}{2k_z^1} \\
&\quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_z \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, -k_z^1, \vec{k}_{||}, p_z)}{p_z + k_z^1} \cdot \langle \vec{E} \rangle (\vec{k}_{||}, p_z) e^{iapz}. \quad (8.16)
\end{aligned}$$

Para  $z < 0$  utilizamos (A.80) y encontramos que el campo eléctrico promedio producido por las corrientes imágenes vale

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E} \rangle_{Img}^- (\vec{r}_{||}, z) &= i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \\
&\quad \int_a^\infty dz_p \int_{\mathbb{R}} dz' \overleftrightarrow{R}_I^- (\vec{k}_{||}) \frac{i}{2k_z^1} e^{-ik_z^0 z + ik_z^1 z'} \\
\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} dp'_z \int_{\mathbb{R}} dp_z \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, p'_z, \vec{k}_{||}, p_z) \cdot \langle \vec{E} \rangle (\vec{k}_{||}, p_z) &e^{ip'_z(z'-z_p) + ip_z z_p}. \quad (8.17)
\end{aligned}$$

Se pueden evaluar las integrales en  $d^3 r_{||}$ ,  $d^3 r_{p||}$ ,  $d^3 p_{||}$ ,  $d^3 p'_{||}$  y por último en  $dz_p$  y simplificando se tiene que el campo eléctrico producido por las corrientes imágenes para  $z < 0$  toma el valor de

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E} \rangle_{Img}^- (\vec{r}_{||}, z) &= -i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \\
\overleftrightarrow{R}_I^- (\vec{k}_{||}) \frac{1}{2k_z^1} e^{-ik_z^0 z} e^{iak_z^1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_z \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, -k_z^1, \vec{k}_{||}, p_z)}{p_z + k_z^1} \cdot \langle \vec{E} \rangle (\vec{k}_{||}, p_z) &e^{iapz}. \quad (8.18)
\end{aligned}$$

Estos resultados los podemos enunciar como sigue

**Resultado 23** *El campo eléctrico producido por las esferas promedio debido a las corrientes imágenes dadas en la función de Green (A.79) y (A.80) en una representación mixta de Fourier (5.25) para  $z > 0$  es*

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E} \rangle_{Img}^+ (\vec{k}_{||}, z) &= -i\omega\mu_0 n_0 \overleftrightarrow{R}_I^+ (\vec{k}_{||}) \frac{e^{ik_z^1(z+a)}}{2k_z^1} \\
&\quad \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_z \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, -k_z^1, \vec{k}_{||}, p_z)}{p_z + k_z^1} \cdot \langle \vec{E} \rangle (\vec{k}_{||}, p_z) e^{iapz} \quad (8.19)
\end{aligned}$$

y para  $z < 0$  es

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E} \right\rangle_{Img}^- (\vec{k}_{||}, z) &= -i\omega\mu_0 n_0 \overleftrightarrow{R}_I^-(\vec{k}_{||}) \frac{e^{-ik_z^0 z + iak_z^1}}{2k_z^1}. \\ \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_z \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}, -k_z^1, \vec{k}_{||}, p_z)}{p_z + k_z^1} \cdot \left\langle \vec{E} \right\rangle (\vec{k}_{||}, p_z) e^{iapz}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Como estos campos solo dependen del valor de los campos en la superficie  $z = a$ , por el hecho que son transformadas inversas de Fourier evaluadas en  $z = a$ , entonces podemos enunciar el siguiente resultado

**Resultado 24** *El hecho que las inclusiones se encuentren en una matriz con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$  tal que su número de onda sea  $k_1$ , no afecta a la relación de dispersión (5.37) en su estructura más que por el hecho de reemplazar el número de onda en el vacío  $k_0$ , por el número de onda de la matriz  $k_1$ .*

## 8.1. Solución de la ecuación integral del semiespacio

En esta sección procedemos a resolver la ecuación integral (8.2), con el método que hemos venido utilizando, que es el de proponer una solución de prueba que será una onda plana con parámetros libres, polarización efectiva  $\hat{e}_f$ , vector de onda efectivo  $\vec{k}^f$  y una amplitud de transmisión  $t$ , para  $z > 0$ , y después encontrar las ecuaciones de consistencia que satisfacen dichos parámetros, lo que constituirá la solución al problema.

En lo que sigue, consideraremos que el campo incidente  $\vec{E}_i$  en una representación mixta para  $z > 0$  es

$$\vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) = t_F (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) \hat{e}^t e^{ik_z^1 z} \theta(z) \quad (8.21)$$

y para  $z < 0$

$$\vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) \left( \hat{e}^i e^{ik_z^0 z} + r_F \hat{e}^r e^{-ik_z^0 z} \right) \theta(-z), \quad (8.22)$$

donde  $t_F, r_F$  son las amplitudes de Fresnel apropiados para la polarización de la onda incidente  $\hat{e}^i$ ,  $\hat{e}^t$  es la polarización para la onda transmitida sin inclusiones,  $\hat{e}^r$  es la polarización para la onda reflejada en un medio sin inclusiones y  $\theta(z)$  es la función escalón.

### 8.1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DEL SEMIESPACIO 175

Para resolver el problema de reflexión dado por la ecuación integral (8.2), para  $z > a$ , que se puede escribir después de usar los resultados de la sección anterior (23), que en una representación mixta se puede escribir como

$$\langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, z) = \vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) + \langle \vec{E} \rangle_I^+(\vec{k}_{||}, z) + \langle \vec{E} \rangle_{Img}^+(\vec{k}_{||}, z) \quad (8.23)$$

donde  $\langle \vec{E} \rangle_{Img}^+(\vec{k}_{||}, z)$  está dado por el resultado (23) y  $\langle \vec{E} \rangle_I^+(\vec{k}_{||}, z)$  está dado por el resultado (15). Para  $z < 0$

$$\langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, z) = \vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) + \langle \vec{E} \rangle_I^-(\vec{k}_{||}, z) + \langle \vec{E} \rangle_{Img}^-(\vec{k}_{||}, z). \quad (8.24)$$

Esta no es una ecuación integral, sino una fórmula para el campo en  $z < 0$ , si se conociera el campo en la superficie  $z = a$ , por el hecho que esta expresión está dada en términos de una transformada de Fourier inversa evaluada en  $z = a$ , como se puede observar de las fórmulas (8.20) y (5.29).

Para resolver la ecuación integral (8.24), proponemos una solución de la forma dada en (5.32) para  $z > a$

$$\langle \vec{E} \rangle(\vec{k}_{||}, p_z'') = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) \frac{1}{i(p_z'' - k_z^f)} t \hat{e}^f. \quad (8.25)$$

donde  $t$  es la amplitud de trasmisión,  $\hat{e}^f$  la polarización efectiva, y  $k_z^f$  la componente  $z$  del vector de propagación efectivo. Por el resultado (24), agrupando los términos de acuerdo si llevan el factor  $e^{ik_z^f z}$  en (8.23), se obtiene que la primera relación de consistencia es similar a (5.35), pero ahora con las propiedades eléctricas de la matriz donde se encuentran las partículas, es decir

$$\begin{aligned} \hat{e}^f = i\omega\mu_0 n_0 \left( -\frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_1^2} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \right. \\ \left. + (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{2k_z^1(k_z^f - k_z^1)} - (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{2k_z^1(k_z^f + k_z^1)} \right) \cdot \hat{e}^f. \end{aligned} \quad (8.26)$$

donde escribiendo en forma matricial  $\overleftrightarrow{M} \cdot \hat{e}^f = 0$ , es un sistema homogéneo de ecuaciones que tendrá soluciones diferentes de cero si pedimos que el

determinante  $\det \overleftrightarrow{M}$  sea igual a cero, esta es la relación de dispersión para los modos electromagnéticos, esto es, se tiene una ecuación para  $k_z^f$ , en donde

$$\begin{aligned} k_z^1 &= \sqrt{k_1^2 - k_{||}^i{}^2} \\ \vec{k}^i &= \vec{k}_{||}^i + k_z^1 \hat{e}_z \\ \vec{k}^r &= \vec{k}_{||}^i - k_z^1 \hat{e}_z \\ \vec{k}^f &= \vec{k}_{||}^i + k_z^f \hat{e}_z. \end{aligned}$$

Como se ve esta relación es idéntica a la obtenida en ausencia de la matriz solo haciendo la sustitución de  $k_1$  por  $k_0$ .

Si ahora factorizamos el término  $e^{ik_z^1 z}$  en la ecuación (8.23) obtenemos la segunda relación de consistencia, en donde se hace patente la presencia del campo producido por la corrientes imágenes, y da lo siguiente:

$$\begin{aligned} t_F \hat{e}^t e^{ik_z^1 z} &= i\omega\mu_0 n_0 \frac{e^{ik_z^1 z}}{2k_{1z}} \left( (\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}^i, k_z^1, \vec{k}_{||}^i, k_z^f)}{k_z^f - k_z^1} e^{ia(k_z^f - k_z^1)} \right. \\ &\quad \left. + \overleftrightarrow{R}_I^{\dagger}(\vec{k}_{||}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}_{||}^i, -k_z^1, \vec{k}_{||}^i, k_z^f)}{k_z^f + k_z^1} e^{ia(k_z^f + k_z^1)} \right) \cdot t \hat{e}^f. \end{aligned} \quad (8.27)$$

para  $z \geq a$ . Tomando el producto escalar por  $\hat{e}^t$  encontramos la amplitud de transmisión con inclusiones y por los resultados (15), (23) el campo para  $z < 0$ , por lo que podemos enunciar el siguiente resultado

**Resultado 25** *El campo reflejado esparcido promedio en la aproximación de campo efectivo, cuando las inclusiones se encuentran en una matriz donde el número de onda sea  $k_1$ , y se tenga una onda incidente de la forma*

$$\vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) = t_F (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) \hat{e}^t e^{ik_z^1 z} \theta(z) \quad (8.28)$$

y para  $z < 0$

$$\vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}^i) \left( \hat{e}^i e^{ik_z^0 z} + r_F \hat{e}_r e^{-ik_z^0 z} \right) \theta(-z), \quad (8.29)$$

en una representación mixta, está dado por la siguiente expresión

### 8.1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DEL SEMIESPACIO 177

$$\begin{aligned} \langle \vec{E} \rangle^{(-)}(\vec{r}_{\parallel}, z) &= \vec{E}_i(\vec{r}_{\parallel}, z) \\ -i\omega\mu_0 n_0 \frac{e^{-ik_z^0 z}}{2k_z^1} \overleftrightarrow{R}_I^-(\vec{k}_{\parallel}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{k_z^f + k_z^1} \cdot t \hat{e}^f e^{ia(k_z^1 + k_z^f)} e^{i\vec{k}_{\parallel}^i \cdot \vec{r}_{\parallel}} \end{aligned} \quad (8.30)$$

donde la amplitud de transmisión  $t$  con inclusiones es

$$t = t_F \left[ i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{2k_z^1} \hat{e}^t \right] \quad (8.31)$$

$$\left( \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i \right) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{k_z^f - k_z^1} e^{ia(k_z^f - k_z^1)} + \overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_{\parallel}^i) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{k_z^f + k_z^1} e^{ia(k_z^f + k_z^1)} \right) \cdot \hat{e}^f \Big]^{-1}$$

$\overleftrightarrow{R}_I^+$ ,  $\overleftrightarrow{R}_I^-$  están dadas por (A.76), (A.77) respectivamente

$$\overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_{\parallel}) = \frac{1}{k_1^2} \left( \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \frac{1}{k_z^1} \hat{e}_z \vec{k}_{\parallel} \right) \cdot \overleftrightarrow{R}(k_{\parallel}) \cdot \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} + k_z^1 \vec{k}_{\parallel} \hat{e}_z \right) \quad (8.32)$$

$$\overleftrightarrow{R}_I^-(\vec{k}_{\parallel}) = \frac{1}{k_1^2} \left( \overleftrightarrow{I}_{\parallel} + \frac{1}{k_z^0} \hat{e}_z \vec{k}_{\parallel} \right) \cdot \left( \overleftrightarrow{I}_{\parallel} + \overleftrightarrow{R}(k_{\parallel}) \right) \cdot \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} + k_z^1 \vec{k}_{\parallel} \hat{e}_z \right), \quad (8.33)$$

$\overleftrightarrow{R}(k_{\parallel})$  se da en el apéndice (A), ecuación (A.117)

$$\overleftrightarrow{R}(k_{\parallel}) = R_{10}^{TE}(k_{\parallel}) \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - (R_{10}^{TE}(k_{\parallel}) + R_{10}^{TM}(k_{\parallel})) \frac{1}{k_{\parallel}^2} \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} \quad (8.34)$$

$$R_{10}^{TE}(k_{\parallel}) = \frac{\mu_0 k_z^1 - \mu_1 k_z^0}{\mu_0 k_z^1 + \mu_1 k_z^0} \quad (8.35)$$

$$R_{10}^{TM}(k_{\parallel}) = \frac{\epsilon_0 k_z^1 - \epsilon_1 k_z^0}{\epsilon_0 k_z^1 + \epsilon_1 k_z^0} \quad (8.36)$$

también  $\overleftrightarrow{I}_{\parallel} = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_{\parallel}^i \hat{k}_{\parallel}^i$  y  $\overleftrightarrow{I} = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_{\parallel}^i \hat{k}_{\parallel}^i + \hat{e}_z \hat{e}_z$ , y además  $\vec{k}^i = \vec{k}_{\parallel}^i + k_z^1 \hat{e}_z$ ,  $\vec{k}^r = \vec{k}_{\parallel}^i - k_z^1 \hat{e}_z$ .

Estas expresiones se pueden simplificar si suponemos que el vector de onda efectivo se puede aproximar como  $\hat{e}^f = \hat{e}_x$ ,  $\hat{k}_{\perp}^f = \hat{k}_{\perp}^f$  para polarización

$s$  y  $p$  respectivamente, utilizando las expresiones (5.58), (5.59),(5.60),(5.62), (5.63),(5.64) se tiene que para polarización  $p$

$$\overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}_\perp^f = \sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{k}_\perp^r + \sigma_{ry}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{k}^r \quad (8.37)$$

y además se puede verificar que

$$\overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_\parallel^i) \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}_x = R_{10}^{TE} \sigma_{xx}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{e}_x \quad (8.38)$$

$$\overleftrightarrow{R}_I^-(\vec{k}_\parallel^i) \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}_x = (1 + R_{10}^{TE}) \sigma_{xx}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \hat{e}_x \quad (8.39)$$

$$\overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_\parallel^i) \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}_\perp^f = \frac{1}{k_1} (k_z^1 \hat{k}_\parallel^i - k_\parallel^i \hat{e}_z) R_{10}^{TM} \sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \quad (8.40)$$

$$\overleftrightarrow{R}_I^-(\vec{k}_\parallel^i) \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \cdot \hat{k}_\perp^f = \frac{k_z^1 k_0}{k_z^0 k_1} \frac{1}{k_0} (k_z^0 \hat{k}_\parallel^i + k_\parallel^i \hat{e}_z) (1 - R_{10}^{TM}) \sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) \quad (8.41)$$

$$(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}_x = \sigma_{xx}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \hat{e}_x \quad (8.42)$$

$$(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \overleftarrow{\sigma}_s(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}^f = \sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) \hat{k}_\perp^i \quad (8.43)$$

con estos resultados, podemos llegar al siguiente resultado

**Resultado 26** *la amplitud de transmisión y el campo dispersado por las inclusiones, son:*

$$t_s = t_{Fs} \left[ i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{2k_z^1} \left( \frac{\sigma_{xx}(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{k_z^f - k_z^1} e^{ia(k_z^f - k_z^1)} + R_{10}^{TE} \frac{\sigma_{xx}(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{k_z^f + k_z^1} e^{ia(k_z^f + k_z^1)} \right) \right]^{-1}$$

para polarización  $s$  y para polarización  $p$

$$t_p = t_{Fp} \left[ i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{2k_z^1} \left( \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f)}{k_z^f - k_z^1} e^{ia(k_z^f - k_z^1)} + R_{10}^{TM} \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f)}{k_z^f + k_z^1} e^{ia(k_z^f + k_z^1)} \right) \right]^{-1}$$

y la amplitud de reflexión como

$$r_s = R_s(\theta_r) \frac{\left(1 + R_{10}^{TE}(k_{\parallel}^i)\right) e^{i2ak_z^1}}{\left(1 - R_{10}^{TE}(k_{\parallel}^i) R_s(\theta_r) e^{i2ak_z^1}\right)} t_{Fs} \quad (8.44)$$

$$r_p = R_p(\theta_r) \frac{k_z^1 k_0}{k_z^0 k_1} \frac{\left(1 - R_{10}^{TM}(k_{\parallel}^i)\right) e^{i2ak_z^1}}{\left(1 - R_{10}^{TM}(k_{\parallel}^i) R_p(\theta_r) e^{i2ak_z^1}\right)} t_{Fp} \quad (8.45)$$

donde

$$R_s(\theta_r) = \frac{\sigma_{xx}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) k_z^1 - k_z^f}{\sigma_{xx}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) k_z^1 + k_z^f}$$

$$R_p(\theta_r) = \frac{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^r, \vec{k}^f) k_z^1 - k_z^f}{\sigma_{\theta y}(\vec{k}^i, \vec{k}^f) k_z^1 + k_z^f}.$$

Los coeficientes  $R_s(\theta_r), R_p(\theta_r)$  son los que se calcularon en la teoría de esferas suspendidas en el vacío, pero ahora debemos considerar que las esferas se encuentran en una matriz infinita con número de onda  $k_1$ .

## 8.2. Reflexión y transmisión con matriz (promedio de corrientes)

A continuación enunciamos el resultado del campo producido por las corrientes imágenes, en el caso que primero realizamos los promedios configuracionales y después calculamos los campos eléctricos producidos por la corriente inducida promedio.

**Resultado 27** *El campo dispersado promedio debido a las corrientes imágenes dadas en la función de Green (A.79) y (A.80) en una representación mixta de Fourier (5.25) para  $z > 0$  y donde primero se hace la integral en  $dz_p$  y después en  $dz'$  es*

$$\left\langle \vec{E} \right\rangle_{\text{Img}}^{S+}(\vec{k}_{\parallel}, z) = -i\omega\mu_0 n_0 \overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_{\parallel}) \frac{e^{ik_z^1 z}}{2k_z^1}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_z \frac{\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}_{\parallel}, p_z, \vec{k}_{\parallel}, p_z)}{p_z + k_z^1} \cdot \vec{E}_e(\vec{k}_{\parallel}, p_z) e^{ia(p_z + k_z^1)}$$

y para  $z < 0$  es

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E} \right\rangle_{Img}^{S^-}(\vec{k}_{||}, z) &= -i\omega\mu_0 n_0 \overleftrightarrow{R}_I^-(\vec{k}_{||}) \frac{e^{-ik_z z}}{2k_z^1} \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_z \frac{\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}_{||}, p_z, \vec{k}_{||}, p_z)}{p_z + k_z^1} \cdot \vec{E}_e(\vec{k}_{||}, p_z) e^{ia(p_z + k_z^1)} \end{aligned}$$

y consideramos que  $Imk_1 > 0$  y por lo tanto el polo  $p_z = -k_z^1$  no contribuye a la integral

Ahora consideraremos el resultado para la fórmula de transmisión y reflexión del sistema coloidal cuando la matriz tiene una permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ , cuando primero hacemos el promedio de ensamble y después calculamos los campos radiados al integrar la corriente inducida promedio, el resultado lo enunciamos como teorema.

**Resultado 28** *El campo reflejado dispersado promedio en la aproximación de campo medio efectivo, cuando las inclusiones se encuentran en una matriz donde el número de onda sea  $k_1$ , y cuando primero se integra en  $dz_p$  y después en  $dz'$  está dado por la siguiente expresión*

$$\left\langle \vec{E} \right\rangle^{(-)}(\vec{k}_{||}, z) = \vec{E}_i(\vec{k}_{||}, z) \quad (8.46)$$

$$-i\omega\mu_0 n_0 \frac{e^{-ik_z z}}{2k_z^1} \overleftrightarrow{R}_I^-(\vec{k}_{||}) \cdot \frac{\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}^f, \vec{k}^f)}{k_z^f + k_z^1} \cdot t \hat{e}^f e^{ia(k_z^1 + k_z^f)} e^{i\vec{k}_{||}^i \cdot \vec{r}_{||}}$$

donde el coeficiente de transmisión  $t$  con inclusiones es

$$\begin{aligned} t = t_F \left[ i\omega\mu_0 n_0 \frac{1}{2k_z^1} \hat{e}^t \cdot \left( \frac{\overleftrightarrow{I} - \hat{k}^i \hat{k}^i}{k_z^f - k_z^1} e^{ia(k_z^f - k_z^1)} + \frac{\overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_{||})}{k_z^f + k_z^1} e^{ia(k_z^f + k_z^1)} \right) \right. \\ \left. \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}^f, \vec{k}^f) \cdot \hat{e}^f \right]^{-1} \end{aligned}$$

donde  $\overleftrightarrow{R}_I^+$ ,  $\overleftrightarrow{R}_I^-$  están dadas por (A.76), (A.77) respectivamente,  $\overleftrightarrow{R}(\vec{k}_{||})$  se da en el apéndice (A), ecuación (A.117), también  $\overleftrightarrow{I}_{||} = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_{||}^i \hat{k}_{||}^i$  y  $\overleftrightarrow{I} = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{k}_{||}^i \hat{k}_{||}^i + \hat{e}_z \hat{e}_z$ , y además  $\vec{k}^i = \vec{k}_{||}^i + k_z^1 \hat{e}_z$ ,  $\vec{k}^r = \vec{k}_{||}^i - k_z^1 \hat{e}_z$ .

Si utilizamos los siguientes resultados

$$\overleftarrow{R}_I^+ \cdot \hat{e}_x = R_{10}^{TE} \hat{e}_x \quad (8.47)$$

$$\overleftarrow{R}_I^- \cdot \hat{e}_x = (1 + R_{10}^{TE}) \hat{e}_x \quad (8.48)$$

$$\overleftarrow{R}_I^+ \cdot \hat{k}_\perp^f = \frac{1}{k_1} \left( k_z^1 \hat{k}_\perp^i - k_\parallel^i \hat{e}_z \right) \hat{k}_\perp^r \cdot \hat{k}_\perp^f R_{10}^{TM} \quad (8.49)$$

$$\overleftarrow{R}_I^- \cdot \hat{k}_\perp^f = \frac{k_0 k_z^1}{k_1 k_z^0} \left( k_z^0 \hat{k}_\perp^i + k_\parallel^i \hat{e}_z \right) \hat{k}_\perp^r \cdot \hat{k}_\perp^f (1 - R_{10}^{TM}) \quad (8.50)$$

entonces se obtienen las amplitudes de reflexión para polarización  $s$  y  $p$  respectivamente

$$r_s = R_s(\theta_r) \frac{\left( 1 + R_{10}^{TE}(k_\parallel^i) \right) e^{i2ak_z^1}}{\left( 1 - R_{10}^{TE}(k_\parallel^i) R_s(\theta_r) e^{i2ak_z^1} \right)} t_{Fs} \quad (8.51)$$

$$r_p = R_p(\theta_r) \frac{k_z^1 k_0}{k_z^0 k_1} \frac{\left( 1 - R_{10}^{TM}(k_\parallel^i) \right) e^{i2ak_z^1}}{\left( 1 - R_{10}^{TM}(k_\parallel^i) R_p(\theta_r) e^{i2ak_z^1} \right)} t_{Fp} \quad (8.52)$$

donde hemos definido

$$R_s(\theta_r) = \frac{k_z^1 - k_z^f}{k_z^1 + k_z^f}$$

$$R_p(\theta_r) = \frac{\hat{k}_\perp^r \cdot \hat{k}_\perp^f}{\hat{k}_\perp^i \cdot \hat{k}_\perp^f} \frac{k_z^1 - k_z^f}{k_z^1 + k_z^f}$$

Se observa que las expresiones (8.51),(8.52) corresponden a las fórmulas para la reflexión de 3 medios con numero de onda,  $k_0, k_1, k_f$  [Landau, pg.330].

### 8.3. Reflexión y transmisión con matriz (Cono de luz)

Ahora, hacemos la derivación para las amplitudes de reflexión y transmisión para el sistema coloidal en el caso que las inclusiones esféricas se

encuentran inmersas en una matriz con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ , en la aproximación del cono de luz, que se basa en la suposición, de que el tensor generalizado de conductividad no local de la esfera, es evaluado cuando  $|\vec{k}^f| = k_1$ , es decir

$$i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_x = \frac{4\pi}{-ik_1} S_{xx}(\theta) \hat{e}_x \quad (8.53)$$

$$i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{k}_\perp^i = \frac{4\pi}{-ik_1} S_{\theta y}(\theta) \hat{e}_\theta - 4\pi a^3 k_1^2 \left( \frac{\epsilon_s}{\epsilon_1} - 1 \right) S_{ry}(\theta) \hat{e}_r \quad (8.54)$$

donde las funciones de espacimientto deben evaluarse para un número de onde  $k_1$ , además como se vió en el capítulo (4) son las ecuaciones (4.324)-(4.326), donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{k}^i$ ,  $\vec{k}^s$ , y además hemos definido

$$\vec{k}^i = \vec{k}_\parallel^i + k_z^1 \hat{e}_z \quad (8.55)$$

$$\vec{k}^r = \vec{k}_\parallel^i - k_z^1 \hat{e}_z \quad (8.56)$$

$$k_z^1 = \sqrt{k_1^2 - k_\parallel^i{}^2}. \quad (8.57)$$

Con esta aproximación, el nuevo término en el resultado de extinción (8.27) debido a las corrientes imágenes lleva el término

$$A(\hat{e}^f) = \frac{1}{k_1^2} \left( \overleftrightarrow{T} - \frac{1}{k_z^1} \hat{e}_z \vec{k}_\parallel^i \right) \cdot \overleftrightarrow{R}(\vec{k}_\parallel^i) \cdot \left( k_1^2 \overleftrightarrow{T}_\parallel - \vec{k}_\parallel^i \vec{k}_\parallel^i + k_z^1 \vec{k}_\parallel^i \hat{e}_z \right) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}^r, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}^f. \quad (8.58)$$

que lo evaluaremos para los distintos casos de polarización del campo incidente. El primer caso es polarización  $s$  es cuando  $\hat{e}^f = \hat{e}^t = \hat{e}_x$  en este caso el término (8.58) toma el valor de

$$A(\hat{e}_x) = \hat{e}_x R_{10}^{TE}(k_\parallel^i) \frac{4\pi}{-ik_1} S_{xx}(\theta_r), \quad (8.59)$$

donde  $\theta_r = \pi - 2\theta_t$  y  $\theta_t$  es el ángulo de refracción en el caso ideal que no haya inclusiones, o bien por la fórmula

$$\theta_r = \arccos \left( \frac{k_\parallel^i{}^2 - k_z^1{}^2}{k_1^2} \right). \quad (8.60)$$

El caso de polarización  $p$ , cuando

$$\hat{e}^f = \hat{e}_t = \frac{1}{k_1} \left( k_z^1 \hat{k}_{||}^i - k_{||}^i \hat{e}_z \right), \quad (8.61)$$

en cuyo caso se tiene además que la base de vectores en (8.54) se pueden escribir como

$$\hat{e}_r = \frac{1}{k_1} (\vec{k}_{||}^i - k_z^1 \hat{e}_z) \quad (8.62)$$

$$\hat{e}_\theta = -\frac{1}{k_1} (k_z^1 \hat{k}_{||}^i + k_{||}^i \hat{e}_z) \quad (8.63)$$

entonces el término (8.58) se reduce a

$$A(\hat{e}_t) = \hat{e}_t R_{10}^{TM} \frac{4\pi}{-ik_1} S_{\theta_y}(\theta_r). \quad (8.64)$$

De tal manera que la amplitud de transmisión en polarización  $s$  y polarización  $p$  respectivamente dados por la fórmula (8.31) son:

$$t_s = -t_{Fs} \left[ \frac{n_0}{2k_z^1} \frac{4\pi}{ik_1} e^{ia(k_z^f + k_z^1)} \left( \frac{S_{xx}(0)}{k_z^f - k_z^1} e^{-i2ak_z^1} + R_{10}^{TE}(k_{||}^i) \frac{S_{xx}(\theta_r)}{k_z^f + k_z^1} \right) \right]^{-1} \quad (8.65)$$

$$t_p = -t_{Fp} \left[ \frac{n_0}{2k_z^1} \frac{4\pi}{ik_1} e^{ia(k_z^f + k_z^1)} \left( \frac{S_{\theta_y}(0)}{k_z^f - k_z^1} e^{-i2ak_z^1} + R_{10}^{TM}(k_{||}^i) \frac{S_{\theta_y}(\theta_r)}{k_z^f + k_z^1} \right) \right]^{-1} \quad (8.66)$$

El campo reflejado está dado por el segundo término de (8.30), y si utilizamos la aproximación del cono de luz, encontramos que para polarización  $s$  la amplitud de transmisión se reduce a

$$\vec{E}_s^r = \frac{n_0}{2k_z^1} \frac{e^{ia(k_z^f + k_z^1)}}{k_z^f + k_z^1} \frac{4\pi}{ik_1} S_{xx}(\theta_r) (1 + R_{10}^{TE}(k_{||}^i)) t_s \hat{e}_x e^{i\vec{k}^r \cdot \vec{r}} \quad (8.67)$$

y para polarización  $p$  a

$$\vec{E}_p^r = \frac{n_0}{2k_z^1} \frac{e^{ia(k_z^f + k_z^1)}}{k_z^f + k_z^1} \frac{4\pi}{ik_1} S_{\theta_y}(\theta_r) (1 - R_{10}^{TM}(k_{||}^i)) t_p \frac{k_z^1 k_0}{k_z^0 k_1} \hat{e}^R e^{i\vec{k}^r \cdot \vec{r}} \quad (8.68)$$

donde

$$\hat{e}^R = -\frac{1}{k_0} \left( k_z^0 \vec{k}_{\parallel}^i + k_{\parallel}^i \hat{e}_z \right). \quad (8.69)$$

Ya que hemos encontrado las amplitudes de transmisión ahora podemos encontrar las amplitudes de reflexión para polarización  $s$  y polarización  $p$  por la fórmula (8.30) respectivamente y estas son :

$$r_s = -\frac{S_{xx}(\theta_r)}{k_z^f + k_z^1} \left( 1 + R_{10}^{TE}(k_{\parallel}^i) \right) \left( \frac{S_{xx}(0)}{k_z^f - k_z^1} e^{-i2ak_z^1} + R_{10}^{TE}(k_{\parallel}^i) \frac{S_{xx}(\theta_r)}{k_z^f + k_z^1} \right)^{-1} t_{Fs} \quad (8.70)$$

$$r_p = -\frac{S_{\theta y}(\theta_r)}{k_z^f + k_z^1} \frac{k_z^1 k_0}{k_z^0 k_1} \left( 1 - R_{10}^{TM}(k_{\parallel}^i) \right) \left( \frac{S_{\theta y}(0)}{k_z^f - k_z^1} e^{-i2ak_z^1} + R_{10}^{TM}(k_{\parallel}^i) \frac{S_{\theta y}(\theta_r)}{k_z^f + k_z^1} \right)^{-1} t_{Fp} \quad (8.71)$$

donde  $t_{Fs}$ ,  $t_{Fp}$  son las amplitudes de Fresnel para la transmisión, sin inclusiones, en un medio con número de onda  $k_1$  para polarización  $s$  y  $p$  respectivamente.

Si definimos las amplitudes de reflexión coherentes como

$$r_{coh\,s}(\theta_r) = \frac{S_{xx}(\theta_r)}{S_{xx}(0)} \frac{k_z^1 - k_z^f}{k_z^1 + k_z^f} \quad (8.72)$$

$$r_{coh\,p}(\theta_r) = \frac{S_{\theta y}(\theta_r)}{S_{\theta y}(0)} \frac{k_z^1 - k_z^f}{k_z^1 + k_z^f}, \quad (8.73)$$

entonces se pueden escribir como

$$r_s = r_{coh\,s}(\theta_r) \frac{\left( 1 + R_{10}^{TE}(k_{\parallel}^i) \right) e^{i2ak_z^1}}{\left( 1 - R_{10}^{TE}(k_{\parallel}^i) r_{coh\,s}(\theta_r) e^{i2ak_z^1} \right)} t_{Fs} \quad (8.74)$$

$$r_p = r_{coh\,p}(\theta_r) \frac{k_z^1 k_0}{k_z^0 k_1} \frac{\left( 1 - R_{10}^{TM}(k_{\parallel}^i) \right) e^{i2ak_z^1}}{\left( 1 - R_{10}^{TM}(k_{\parallel}^i) r_{coh\,p}(\theta_r) e^{i2ak_z^1} \right)} t_{Fp} \quad (8.75)$$

Con este resultado damos por terminado el problema de calcular la reflexión de la luz en un sistema coloidal de partículas esféricas inmersas en

un semi espacio de matriz con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$  en la aproximación del cono de luz .

A continuación mostramos que estas fórmulas son equivalentes a las fórmulas para la reflectancia de 3 medios. Primero definimos lo siguiente:

$$T_{01}^{TE} = \frac{2\mu_1 k_z^0}{\mu_1 k_z^0 + \mu_0 k_z^1} \quad (8.76)$$

$$T_{10}^{TE} = \frac{2\mu_0 k_z^1}{\mu_0 k_z^1 + \mu_1 k_z^0} \quad (8.77)$$

$$T_{01}^{TM} = \frac{2\epsilon_1 k_z^0}{\epsilon_1 k_z^0 + \epsilon_0 k_z^1} \quad (8.78)$$

$$T_{10}^{TM} = \frac{2\epsilon_0 k_z^1}{\epsilon_0 k_z^1 + \epsilon_1 k_z^0} \quad (8.79)$$

$$R_{01}^{TE} = \frac{\mu_1 k_z^0 - \mu_0 k_z^1}{\mu_1 k_z^0 + \mu_0 k_z^1} \quad (8.80)$$

$$R_{10}^{TE} = \frac{\mu_0 k_z^1 - \mu_1 k_z^0}{\mu_0 k_z^1 + \mu_1 k_z^0} \quad (8.81)$$

$$R_{01}^{TM} = \frac{\epsilon_1 k_z^0 - \epsilon_0 k_z^1}{\epsilon_1 k_z^0 + \epsilon_0 k_z^1} \quad (8.82)$$

$$R_{10}^{TM} = \frac{\epsilon_0 k_z^1 - \epsilon_1 k_z^0}{\epsilon_0 k_z^1 + \epsilon_1 k_z^0} \quad (8.83)$$

por lo que con estas definiciones

$$t_{Fs} = T_{01}^{TE}. \quad (8.84)$$

Ahora, para polarización  $s$ , si del lado derecho, de (8.74) sumamos el término  $R_{01}^{TE}$  y tomamos en cuenta que  $T_{01}^{TE} = 1 - R_{10}^{TE}$  se tiene que el coeficiente de reflexión total  $\tilde{r}_s$ , que incluye la onda reflejada por la matriz sin inclusiones, vale

$$\tilde{r}_s = \frac{R_{01}^{TE}(k_{\parallel}^i) + r_{coh_s}(\theta_r) e^{i2ak_z^1}}{1 - R_{10}^{TE}(k_{\parallel}^i) r_{coh_s}(\theta_r) e^{i2ak_z^1}} \quad (8.85)$$

que coincide con la fórmula de reflectancia para tres medios [Landau, pg. 330]. Para polarización  $p$ , notamos que

$$t_{Fp} = \frac{\mu_1 k_0}{\mu_0 k_1} T_{01}^{TM} \quad (8.86)$$

y además

$$\frac{k_z^1 k_0}{k_z^0 k_1} t_{Fp} = T_{10}^{TM}. \quad (8.87)$$

Si notamos que  $T_{10}^{TM} = R_{10}^{TM} + 1$ , por lo que la ecuación (8.75) se puede escribir como

$$r_p = r_{coh p}(\theta_r) \frac{\left(1 - R_{10}^{TM}(k_{||}^i)\right) \left(R_{10}^{TM}(k_{||}^i) + 1\right) e^{i2ak_z^1}}{\left(1 - R_{10}^{TM}(k_{||}^i) r_{coh p}(\theta_r) e^{i2ak_z^1}\right)} \quad (8.88)$$

y si sumamos del lado derecho el término  $R_{01}^{TM} = -R_{10}^{TM}$  que corresponde al campo eléctrico de la onda reflejada con una matriz sin partículas, se encuentra la fórmula para la reflectancia total en tres medios es

$$\tilde{r}_p = \frac{R_{01}^{TM}(k_{||}^i) + r_{coh p}(\theta_r) e^{i2ak_z^1}}{1 - R_{10}^{TM}(k_{||}^i) r_{coh p}(\theta_r) e^{i2ak_z^1}}. \quad (8.89)$$

Esta demostración de la equivalencia de la fórmula de reflexión del semiespacio de esferas en la aproximación del cono de luz, se puede adaptar a la fórmulas generales (8.44),(8.45) sin alterar el resultado, es decir la fórmula de los 3 medios es válida también en el caso general de la reflexión por el semiespacio de esferas desordenadas.

## 8.4. Comparación de modelos (esferas en matriz)

En esta sección mostramos las gráficas para las distintas aproximaciones para la reflexión de la luz en polarización  $p$ , por un sistema de esferas en matriz utilizando la fórmula de tres medios (8.88), utilizando como coeficiente de reflexión  $r_{coh p}$ , las fórmulas (5.82),(5.83), (5.85),(5.112),(6.46), que corresponden a la solución exacta, a la solución exacta sin acoplamiento longitudinal,

la fórmula heurística, la fórmula de Fresnel y la aproximación del cono de luz, evaluadas para la constante de propagación  $k_z^f$  dada por la relación de Foldy-Lax (7.3), y se compara con la fórmula de 2-medios de Fresnel, para distintos radios de partícula y fracciones volumétricas de llenado, donde definimos la fracción volumétrica de llenado como  $f_1 = n_0 V_s$ , siendo  $n_0$  la densidad de número de partículas,  $V_s$  el volumen de la esfera de radio  $a$ .

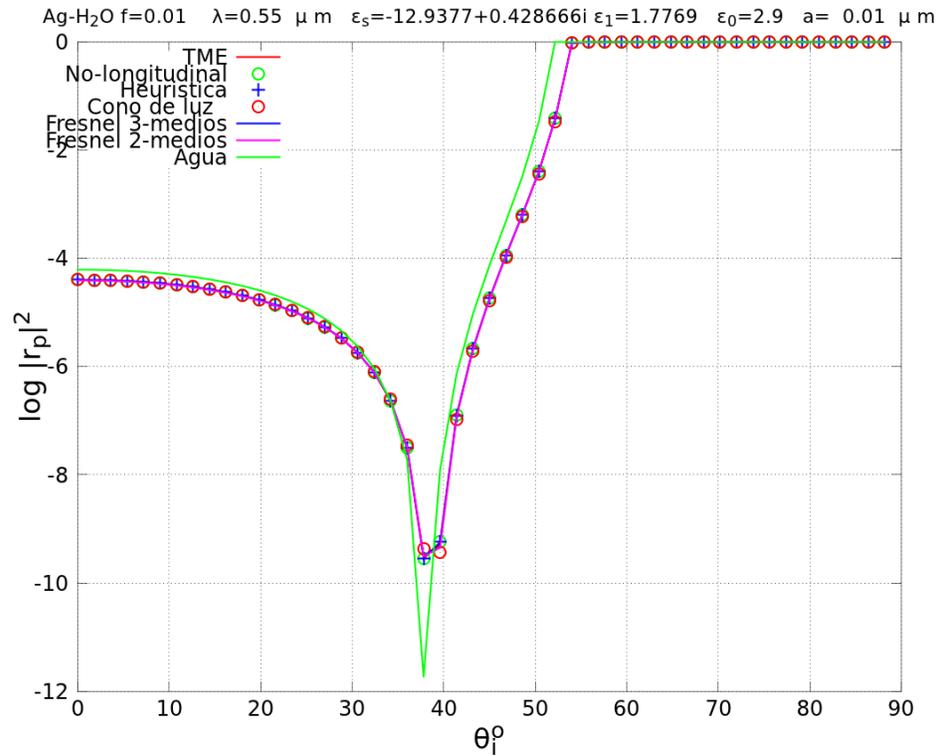


Figura 8.1: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos en la fórmula de los tres medios (8.88) con  $r_{pcoh}$  dada por alguna de las fórmulas, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), y se comparan con la fórmula de Fresnel de 2 medios, y la reflexión de agua pura, como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.01 \mu\text{m}$ , permitividad eléctrica de la matriz  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.7737$  correspondiente el agua, permitividad eléctrica del medio para  $z < 0$   $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$ , permitividad eléctrica de las esferas  $\tilde{\epsilon}_s = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ .

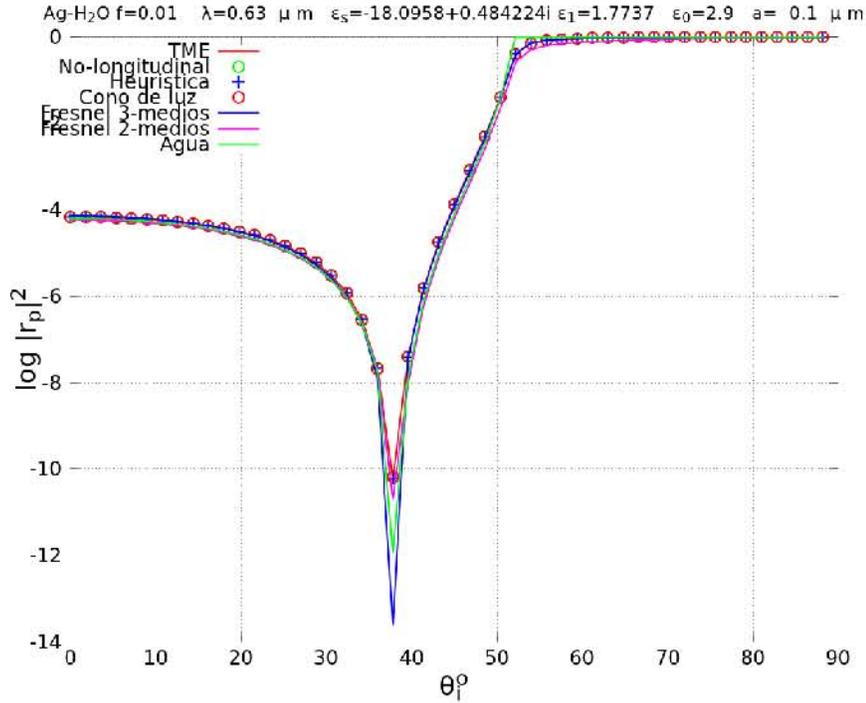


Figura 8.2: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos en la fórmula de los tres medios (8.88) con  $r_{pcoh}$  dada por alguna de las fórmulas, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), y se comparan con la fórmula de Fresnel de 2 medios, y la reflexión de agua pura, como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.1 \mu\text{m}$ , permitividad eléctrica de la matriz  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.7737$  correspondiente el agua, permitividad eléctrica del medio para  $z < 0$   $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$ , permitividad eléctrica de las esferas  $\tilde{\epsilon}_s = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ .

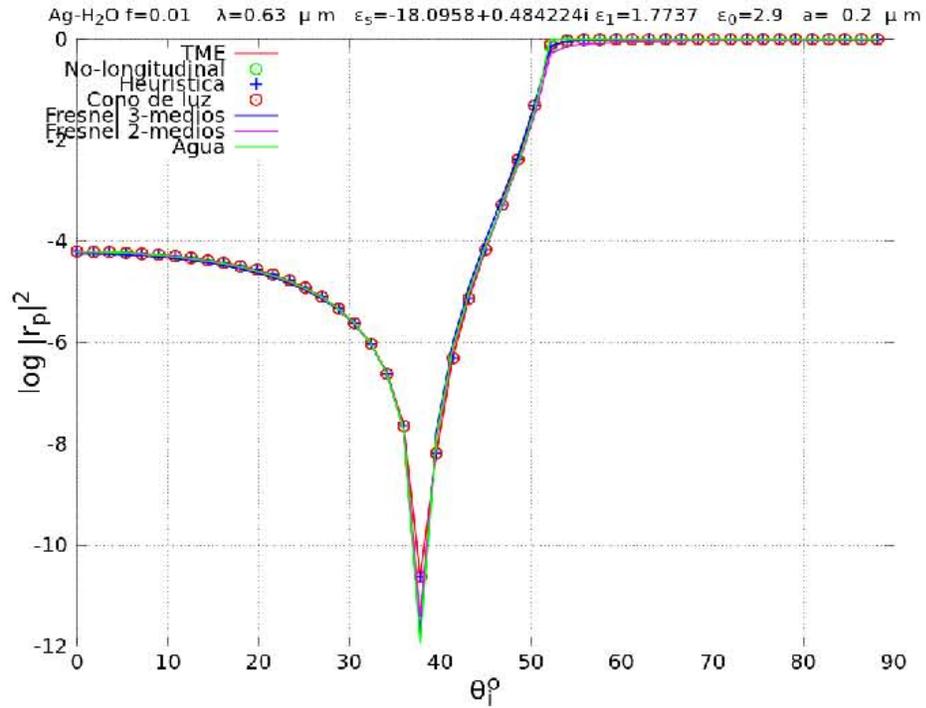


Figura 8.3: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos en la fórmula de los tres medios (8.88) con  $r_{pcoh}$  dada por alguna de las fórmulas, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), y se comparan con la fórmula de Fresnel de 2 medios, y la reflexión de agua pura, como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.2 \mu m$ , permitividad eléctrica de la matriz  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.7737$  correspondiente el agua, permitividad eléctrica del medio para  $z < 0$   $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$ , permitividad eléctrica de las esferas  $\tilde{\epsilon}_s = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu m$ .

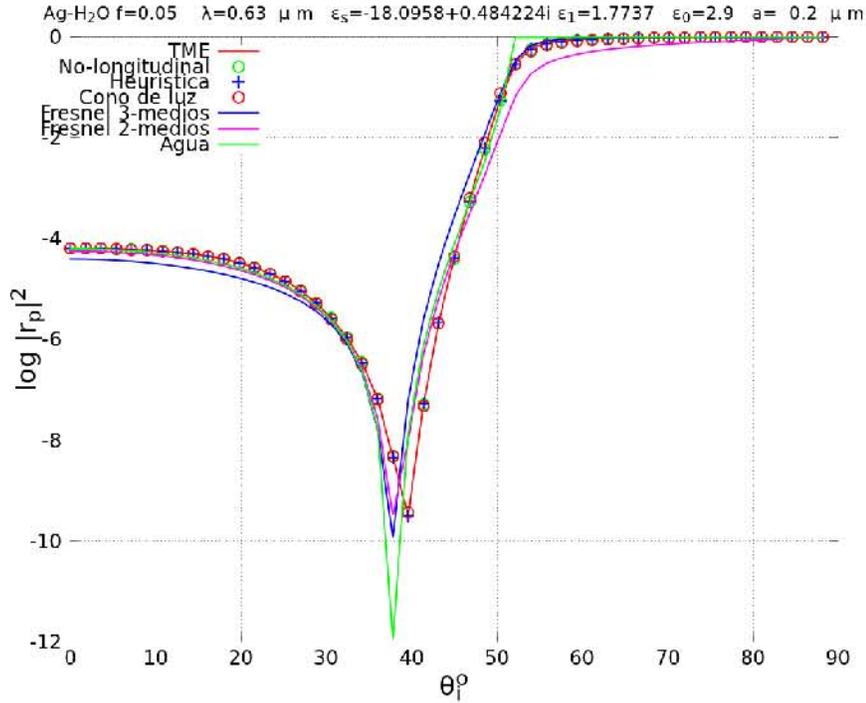


Figura 8.4: En esta figura se muestran las gráficas para el logaritmo en base 10 de la amplitud de reflexión para distintos modelos en la fórmula de los tres medios (8.88) con  $r_{pcoh}$  dada por alguna de las fórmulas, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), y se comparan con la fórmula de Fresnel de 2 medios, y la reflexión de agua pura, como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.05$ , con radio de las esferas  $a = 0.2 \mu\text{m}$ , permitividad eléctrica de la matriz  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.7737$  correspondiente el agua, permitividad eléctrica del medio para  $z < 0$   $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$ , permitividad eléctrica de las esferas  $\tilde{\epsilon}_s = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ .

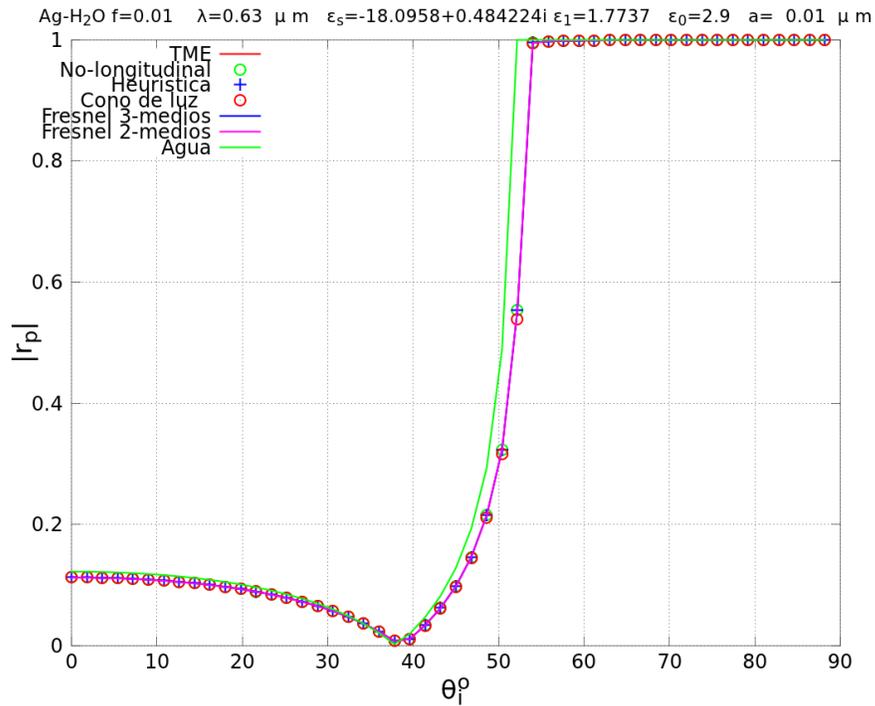


Figura 8.5: En esta figura se muestran las gráficas para el cuadrado de la amplitud de reflexión para distintos modelos en la fórmula de los tres medios (8.88) con  $r_{pcoh}$  dada por alguna de las fórmulas, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), y se comparan con la fórmula de Fresnel de 2 medios, y la reflexión de agua pura, como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.01 \mu\text{m}$ , permitividad eléctrica de la matriz  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.7737$  correspondiente el agua, permitividad eléctrica del medio para  $z < 0$   $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$ , permitividad eléctrica de las esferas  $\tilde{\epsilon}_s = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ .

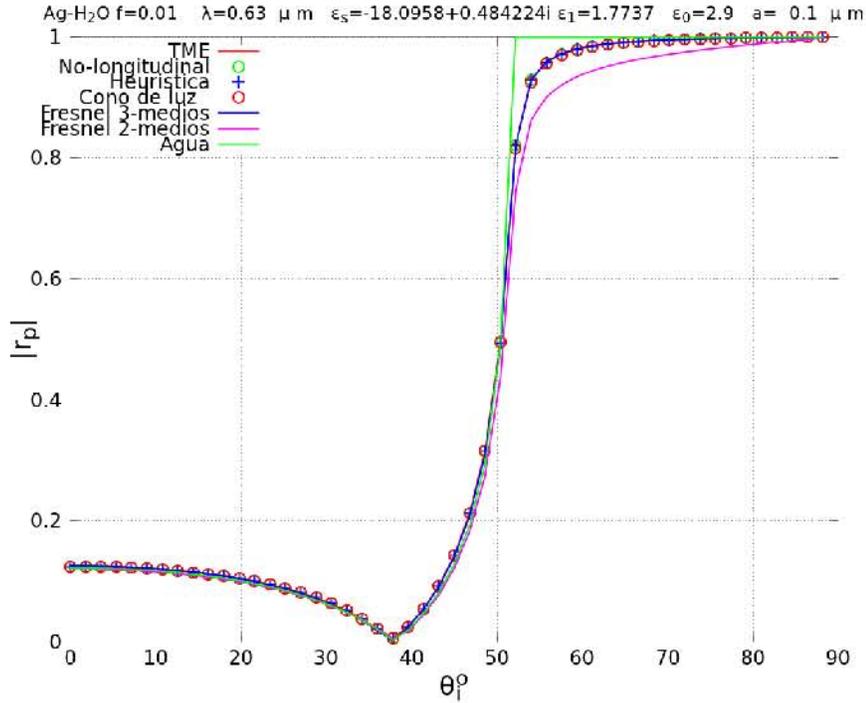


Figura 8.6: En esta figura se muestran las gráficas para el cuadrado de la amplitud de reflexión para distintos modelos en la fórmula de los tres medios (8.88) con  $r_{pcoh}$  dada por alguna de las fórmulas, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), y se comparan con la fórmula de Fresnel de 2 medios, y la reflexión de agua pura, como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.1 \mu m$ , permitividad eléctrica de la matriz  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.7737$  correspondiente el agua, permitividad eléctrica del medio para  $z < 0$   $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$ , permitividad eléctrica de las esferas  $\tilde{\epsilon}_s = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu m$ .

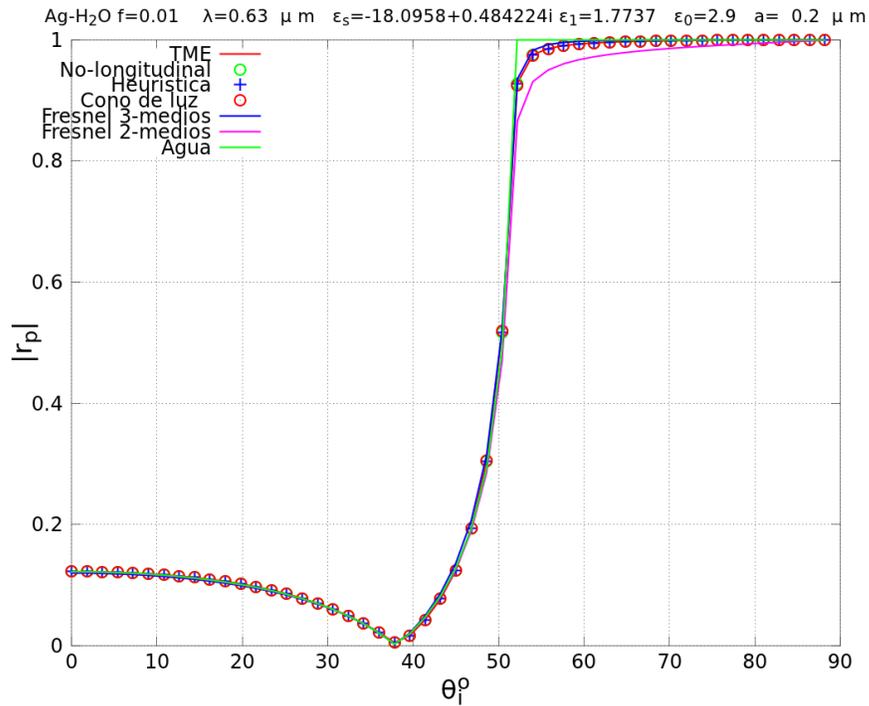


Figura 8.7: En esta figura se muestran las gráficas para el cuadrado de la amplitud de reflexión para distintos modelos en la fórmula de los tres medios (8.88) con  $r_{pcoh}$  dada por alguna de las fórmulas, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), y se comparan con la fórmula de Fresnel de 2 medios, y la reflexión de agua pura, como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.01$ , con radio de las esferas  $a = 0.2 \mu m$ , permitividad eléctrica de la matriz  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.7737$  correspondiente el agua, permitividad eléctrica del medio para  $z < 0$   $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$ , permitividad eléctrica de las esferas  $\tilde{\epsilon}_s = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu m$ .

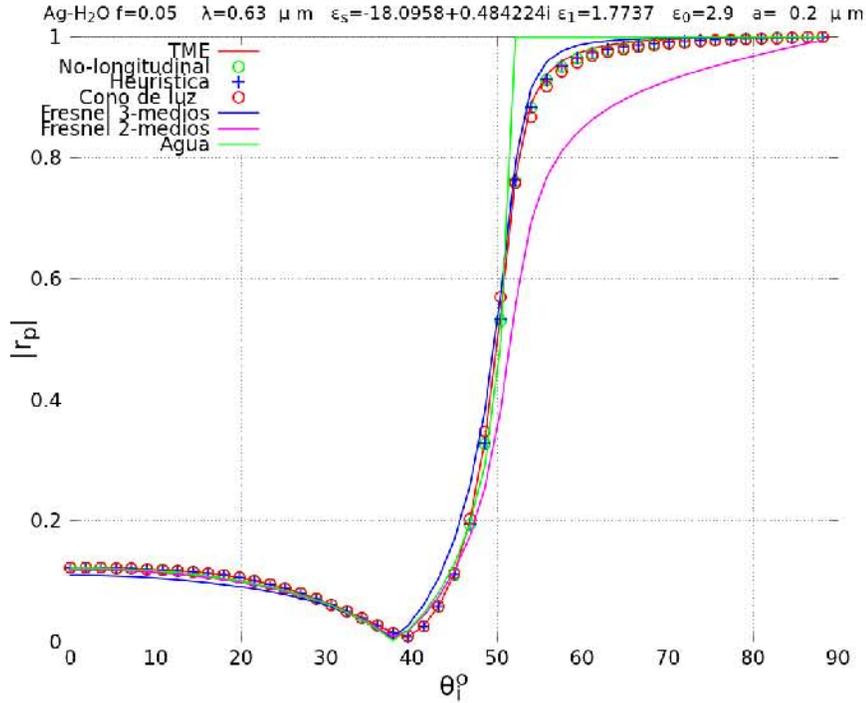


Figura 8.8: En esta figura se muestran las gráficas para el cuadrado de la amplitud de reflexión para distintos modelos en la fórmula de los tres medios (8.88) con  $r_{pcoh}$  dada por alguna de las fórmulas, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), y se comparan con la fórmula de Fresnel de 2 medios, y la reflexión de agua pura, como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.05$ , con radio de las esferas  $a = 0.2 \mu m$ , permitividad eléctrica de la matriz  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.7737$  correspondiente el agua, permitividad eléctrica del medio para  $z < 0$   $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$ , permitividad eléctrica de las esferas  $\tilde{\epsilon}_s = -18.0958 + 0.484224i$ , que corresponde a las propiedades de la plata a la frecuencia correspondiente cuando la longitud de onda es  $\lambda = 0.63 \mu m$ .

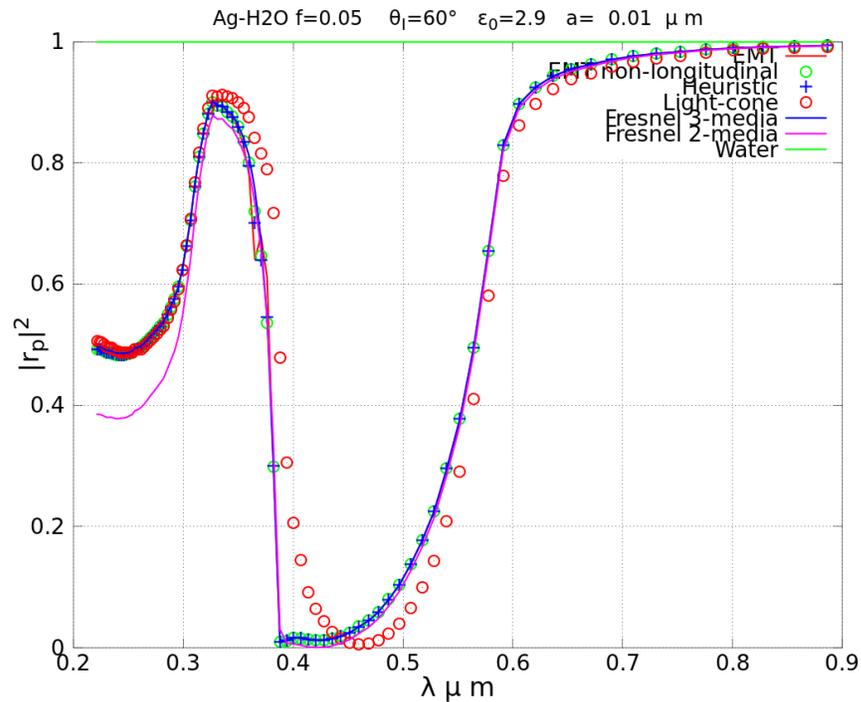


Figura 8.9: En esta figura se muestran las gráficas para el cuadrado de la amplitud de reflexión en un experimento de reflexión a  $60^\circ$  como función de  $\lambda$  para distintos modelos en la fórmula de los tres medios (8.88) con  $r_{pcoh}$  dada por alguna de las fórmulas, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), y se comparan con la fórmula de Fresnel de 2 medios, y la reflexión de agua pura, como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.05$ , con radio de las esferas  $a = 0.01 \mu m$ , permitividad eléctrica de la matriz de agua como función de longitud de onda como en [Hale], permitividad eléctrica de las partículas de plata como función de longitud de onda como en [Johnson], permitividad eléctrica del medio para  $z < 0$ ,  $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$ . La permitividad eléctrica de las esferas es función de la longitud de onda.

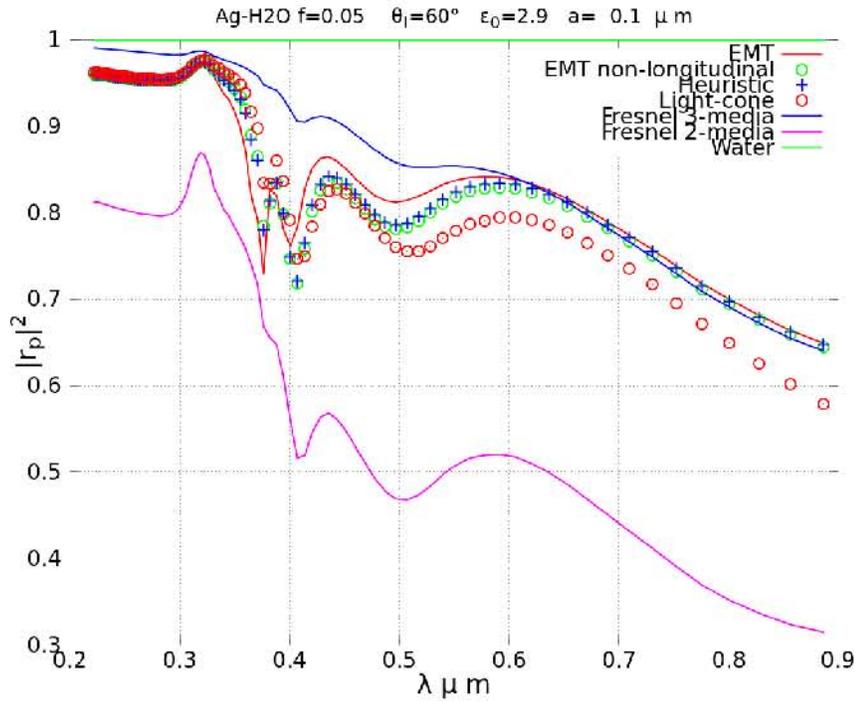


Figura 8.10: En esta figura se muestran las gráficas para el cuadrado de la amplitud de reflexión en un experimento de reflexión a  $60^\circ$  como función de  $\lambda$  para distintos modelos en la fórmula de los tres medios (8.88) con  $r_{pcoh}$  dada por alguna de las fórmulas, TME (Teoría de medio efectivo) (5.82), TME no longitudinal (5.83), heurística (5.85), van de Hulst ó cono de luz, (6.46), Fresnel (5.112), y se comparan con la fórmula de Fresnel de 2 medios, y la reflexión de agua pura, como función del ángulo de incidencia, una fracción volumétrica de llenado  $f_1 = 0.05$ , con radio de las esferas  $a = 0.1 \mu m$ , permitividad eléctrica de la matriz de agua como función de longitud de onda como en [Hale], permitividad eléctrica de las partículas de plata como función de longitud de onda como en [Johnson], permitividad eléctrica del medio para  $z < 0$ ,  $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$ . La permitividad eléctrica de las esferas es función de la longitud de onda.

## 8.5. Comentario

Estas gráficas corresponden al cálculo de la reflectancia de un medio de permitividad eléctrica  $\tilde{\epsilon}_0 = 2.9$  a un medio con agua y partículas de plata inmersas, la razón de utilizar un medio con una permitividad eléctrica mayor que la del agua fué para poder observar un ángulo crítico para la reflexión de la luz. En estas gráficas se compararon los distintos modelos para el medio efectivo aplicando la fórmula de los tres medios tal y como se discutió en el método de imagenes.

Se hicieron las gráficas tanto para el logaritmo del cuadrado de la amplitud del campo reflejado, las figuras (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), para poder observar el detalle de la reflexión para amplitudes pequeñas, así como para la amplitud al cuadrado del campo eléctrico para observar el detalle de la reflexión cerca del ángulo crítico, con los mismos parámetros que las anteriores, las figuras (8.5), (8.6), (8.7), (8.8), también se calcula la reflexión utilizando la fórmula de Fresnel para dos medios calculada con un medio efectivo dado por la expresión de Foldy-Lax. Para partículas pequeñas todos los modelos para la reflexión coinciden, incluso la fórmula de Fresnel para dos medios, vemos que el efecto de las partículas inmersas es el de suavizar la reflexión cerca del ángulo crítico. A medida que aumentamos el tamaño de las partículas, la fórmula de Fresnel 2-medios y Fresnel 3-medios se separan de la solución exacta (TME), (TME)-no longitudinal, la fórmula heurística, y el cono de luz, posteriormente se separa el cono de luz, y prácticamente no aparecen diferencias entre el resto de los modelos.

Esté cálculo sirve para descartar la fórmula de Fresnel para dos medios para un cálculo confiable para la reflectancia, y posiblemente la fórmula de Fresnel para 3 medios y el cono de luz deban ser verificados experimentalmente de que tan apropiadas pueden ser éstas fórmulas. Y ponen a la aproximación heurística como una muy buena aproximación a la fórmula exacta de medio efectivo, tanto con modos longitudinales como sin ellos.

Posteriormente se muestra un espectro de reflectancia para un ángulo de incidencia fijo y dos radios de partículas, donde la misma conclusión se puede hacer, que la fórmula de fresnel 2-medios y fresnel 3-medios se separan en el caso de partículas grandes del resto de los modelos y la buena coincidencia de la fórmula heurística a los modelos mas refinados (TME), (TME) no longitudinal.

Sobre resultados experimentales, se tienen los resultados de [Alejandro,2] para el índice de refracción efectivo, y [Augusto,2] para reflexión de partículas

de latex y titanio, y donde la fórmula de los tres medios se introduce de manera heurística. Éste trabajo confirma la necesidad de la fórmula de los tres medios para explicar la reflectancia.

Revisando la literatura, se encontró [Sung], para partículas de plata inmersas en vidrio, y reportan inconsistencias con los modelos que aplicaron, la teoría Maxwell-Garnett y un modelo de latiz desarrollado por Persson, Liebsch, y hacen mediciones de espectros a ángulo de incidencia normal, aquí existe la posibilidad de probar el modelo desarrollado en esta tesis, y extender su trabajo experimental a ángulos de incidencia mayores.

Para poder utilizar este modelo en la práctica, es necesario introducir una distribución de radios de partículas y hacer un promedio sobre esta distribución de partículas además del promedio de ensamble.

Fín.



# Capítulo 9

## Conclusiones

A lo largo de la tesis, se ha visto como es posible plantear el problema de la reflexión, transmisión y refracción de la luz en un sistema coloidal en la aproximación de campo efectivo e incluyendo el caso en que inclusiones esféricas se encuentran en una matriz con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ , y de hecho fue posible resolverlo de manera completa utilizando el método de la ecuación integral para el campo eléctrico promedio.

Parte importante de esta tesis, es el cálculo completo del tensor generalizado de conductividad no local de la esfera en una base de ondas planas y con dependencia en  $k$  y  $k'$ , incluyendo el caso en que la esfera tiene magnetización intrínseca, y se pudo comprobar que distintas aproximaciones de este tensor conducen a cada una de las distintas aproximaciones clásicas, la aproximación de van de Hulst y la aproximación de Rayleigh.

Además de dar un sustento teórico al cálculo de esta tesis, es decir en utilizarlo para plantear el problema de reflexión y transmisión de la luz por un sistema coloidal, el cálculo del tensor generalizado de conductividad no local, puede ser utilizado para resolver otra variedad de problemas que involucren esferas, ya sean sistemas de esferas, ó esferas en presencia de sustratos ú otros problemas afines, y es posible que las soluciones a estos problemas se puedan expresar de manera bastante compacta usando dicho tensor.

Por el hecho de estar en el espacio de Fourier, el operador de translación de una posición de una esfera a otra posición, es solo multiplicar por la fase  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_p}$ , en el espacio de Fourier, por lo que lo que no son necesarios los teoremas de adición [Chew] para los armónicos esféricos vectoriales, un resultado en el que se basan las teorías actuales de esparcimiento múltiple.

El problema de la no localidad ó dispersión espacial en el problema de

reflexión, se pudo superar al plantear el problema en forma integral. La solución de esta ecuación integral se consiguió al proponer una solución de onda plana con parámetros efectivos tales como su vector de onda, polarización y amplitud, que son determinados por el método autoconsistente, que sin ninguna dificultad, da solución a las ecuaciones planteadas durante la tesis que se reducen a las ecuaciones de consistencia para los parámetros efectivos, que a su vez implicaron la relación de dispersión, y el teorema de extinción Edwald-Oseen.

El hecho que las esferas se encontraran en una matriz con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$  ó sustrato no implicó mayores dificultades, por que fué posible construir una representación de la función de Green para el campo electromagnético del semiespacio, lo que demostró que la relación de dispersión para un semiespacio de esferas en una matriz con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ , es la misma en su estructura, que la relación de dispersión para un semiespacio de esferas en el vacío, solo reemplazando el número de onda en el vacío  $k_0$  por el número de onda en la matriz  $k_1$ .

El teorema de extinción Edwald-Oseen si se vio alterado por la presencia de la matriz, debido a que la función de Green del semiespacio incluye un nuevo término, el término de la corrientes imágenes, nombre que se le da por su analogía con el caso electrostático. Y como resultado para la reflectancia se encuentra que en el caso que las esferas estén inmersas en una matriz, la estructura de las fórmulas que se obtienen son idénticas a las fórmulas para la reflectancia de 3 medios.

Un hecho curioso que presentan los campos reflejados, es que solo dependen del valor de los campos en la interfaz.

Se observó que el orden en que se realizan los promedios configuracionales es un asunto importante. Por un lado están las integrales que integran sobre la posición de las partículas, y tienen su origen en el promedio configuracional, y por otro lado, están las integrales que integran sobre la posición de las corrientes inducidas que al ser multiplicadas por la función de Green, e integradas sobre la esfera, se obtienen los campos eléctricos radiados ó esparcidos. Es decir no es lo mismo promediar las corrientes inducidas, que promediar los campos radiados. Es también claro, que al promediar primero las corrientes inducidas se están despreciando correlaciones estadísticas que se incluyen cuando se promedian los campos radiados.

La validez de los resultados son hasta donde la hipótesis de medio efectivo sea apropiada, y el único parámetro relevante es la fracción de llena-

do volumétrica, esta teoría vale incluso para partículas grandes, siempre y cuando la fracción de llenado sea pequeña. Creemos que esto puede ser hasta fracciones de llenado de 0.1.

Podemos decir, que las fórmulas para la reflectancia en la aproximación de campo efectivo, que se obtuvieron en este trabajo, tienen relevancia, ya que se basan en la manera correcta de promediar la primera ecuación de Foldy-Lax [Foldy], por lo que las expresiones que se encuentran deben ser correctas para partículas grandes, con la restricción, de que valga la aproximación de campo efectivo.



# Apéndice A

## Función de Green para el semiespacio

### A.1. Definición de la función de Green en el semiespacio

La siguiente deducción de la función de Green para el semiespacio está basada en los artículos [Ismo,1],[Ismo,2],[Ismo,3]. El tensor de Green para el semiespacio puede ser encontrado directamente de las ecuaciones de Maxwell con fuentes puntuales. La definición del tensor de Green es tal que

$$\nabla \times \nabla \times \overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') - k_1^2 \overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \overleftrightarrow{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{A.1})$$

donde  $k_1$  es la magnitud del vector de onda dentro del medio, y suponemos que el dipolo puntual se encuentra dentro de este medio, es decir esta ecuación es para  $z > 0$  y  $z' > 0$ , para  $z < 0$  y  $z' > 0$  se tiene que

$$\nabla \times \nabla \times \overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') - k_0^2 \overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') = 0. \quad (\text{A.2})$$

Además hay que pedir las condiciones de frontera de continuidad de la componente paralela del campo eléctrico y magnético.

Puede demostrarse que la fuente puntual en (A.1) puede interpretarse como la densidad de corriente producida por un dipolo puntual. Comenzamos con las ecuaciones de Maxwell en presencia de un dipolo puntual en un medio con funciones dieléctricas  $\epsilon_1, \mu_1$ , tomando la transformada de Fourier en el tiempo

$$\nabla \times \vec{E} - i\omega\mu_1\vec{H} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \vec{H} + i\omega\epsilon_1\vec{E} = \frac{\vec{v}}{i\omega\mu_1}\delta(z-z')\delta(\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'_{\parallel}) \quad (\text{A.4})$$

donde  $\vec{r}'_{\parallel}, z'$  son las coordenadas de la densidad de corriente puntual y  $\vec{v}$  es un vector unitario que indica su dirección. El problema así planteado es equivalente al de encontrar la función de Green

$$\overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{e}_x = \vec{E}(\vec{r}; \hat{e}_x) \quad (\text{A.5})$$

$$\overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{e}_y = \vec{E}(\vec{r}; \hat{e}_y) \quad (\text{A.6})$$

$$\overleftrightarrow{G}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{e}_z = \vec{E}(\vec{r}; \hat{e}_z) \quad (\text{A.7})$$

donde la segunda variable de  $\vec{E}(\vec{r}; \vec{v})$  nos indica que el campo eléctrico es la solución a las ecuaciones de Maxwell cuando  $\vec{v} = \{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$  respectivamente, es decir, si  $\vec{v}$  toma el valor de tres vectores linealmente independientes, es posible recuperar todas las componentes del tensor de Green, esto es lo que se hace a continuación. Si tomamos la transformada de Fourier en las componentes  $x, y$  tenemos que

$$\left( i\vec{k}_{\parallel} + \hat{e}_z \frac{d}{dz} \right) \times \vec{E}(\vec{k}_{\parallel}, z) - i\omega\mu_1\vec{H}(\vec{k}_{\parallel}, z) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\left( i\vec{k}_{\parallel} + \hat{e}_z \frac{d}{dz} \right) \times \vec{H}(\vec{k}_{\parallel}, z) + i\omega\epsilon_1\vec{E}(\vec{k}_{\parallel}, z) = \frac{I_l}{i\omega\mu_1}\vec{v}\delta(z-z') \quad (\text{A.9})$$

donde hemos denotado

$$I_l = e^{-i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}'_{\parallel}} \quad (\text{A.10})$$

factor que resultó de haber tomado la transformada de Fourier en las coordenadas  $x, y$  y donde ahora los campos están dados en una representación mixta es decir  $\vec{E}(\vec{k}_{\parallel}, z), \vec{H}(\vec{k}_{\parallel}, z)$  y se omite la dependencia explícita para tener una notación compacta. Tomando el producto vectorial  $\hat{e}_z \times$  a la ecuación (A.8) simplificando y haciendo uso repetidamente de la identidad

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (\text{A.11})$$

se encuentra que

A.1. DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DE GREEN EN EL SEMIESPACIO 207

$$\vec{E}'_{\parallel} = iE_z \vec{k}_{\parallel} - i\omega\mu_1 \hat{e}_z \times \vec{H}_{\parallel} \quad (\text{A.12})$$

donde  $\vec{E}'_{\parallel}$  es la derivada respecto de  $z$  de la componente paralela del campo eléctrico. Ahora si tomamos el producto escalar  $\hat{e}_z \cdot$ , a la ecuación (A.9) y simplificamos encontramos que

$$iE_z = \frac{i}{\omega\epsilon_1} \vec{k}_{\parallel} \cdot (\hat{e}_z \times \vec{H}_{\parallel}) + \frac{I_l}{ik_1^2} \hat{e}_z \cdot \vec{v} \delta(z - z') \quad (\text{A.13})$$

sustituyendo este resultado en la ecuación anterior se tiene que la derivada respecto a  $z$  de la componente paralela del campo vale

$$\vec{E}'_{\parallel} = -\frac{i}{\omega\epsilon_1} \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} \right) \cdot (\hat{e}_z \times \vec{H}_{\parallel}) + \frac{I_l}{ik_1^2} \hat{e}_z \cdot \vec{v} \delta(z - z') \vec{k}_{\parallel} \quad (\text{A.14})$$

donde  $\overleftrightarrow{I}_{\parallel} = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y$ . Un procedimiento análogo solo que ahora tomando  $\hat{e}_z \times$  a la ecuación (A.9), y  $\hat{e}_z \cdot$  a la ecuación (A.8), y encontrando la componente paralela del campo  $\vec{H}$  se tiene que

$$\vec{H}'_{\parallel} = \frac{i}{\omega\mu_1} \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} \right) \cdot \hat{e}_z \times \vec{E}_{\parallel} - \frac{I_l}{i\omega\mu_1} \hat{e}_z \times \vec{v} \delta(z - z'). \quad (\text{A.15})$$

Si ahora tomamos la derivada respecto a  $z$  de la ecuación (A.14) y sustituimos la ecuación (A.15), se tiene que

$$\vec{E}_{\parallel}'' = -\frac{i}{\omega\epsilon_1} \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} \right) \cdot \hat{e}_z \times \left( \frac{i}{\omega\mu_1} \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} \right) \cdot \hat{e}_z \times \vec{E}_{\parallel} \right. \quad (\text{A.16})$$

$$\left. - \frac{I_l}{i\omega\mu_1} \hat{e}_z \times \vec{v} \delta(z - z') \right) + \frac{I_l}{ik_1^2} (\hat{e}_z \cdot \vec{v}) \delta'(z - z') \vec{k}_{\parallel} \quad (\text{A.17})$$

de esta ecuación se puede separar en dos términos, uno que contienen deltas de Dirac y otro que no, es decir

$$\vec{E}_{\parallel}'' = \vec{C}_1 + \vec{C}_2$$

donde los términos correspondientes a las fuentes se pueden escribir como

$$\vec{C}_1 = -\frac{I_l}{k_1^2} \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} \right) \cdot \vec{v} \delta(z - z') + \frac{I_l}{k_1^2} \vec{k}_{||} (\hat{e}_z \cdot \vec{v}) \delta'(z - z') \quad (\text{A.18})$$

donde se uso el hecho que  $\hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \vec{v}) = (\hat{e}_z \cdot \vec{v}) \hat{e}_z - \vec{v}$  y después que  $\vec{k}_{||} \cdot \hat{e}_z = 0$ ,  $\overleftrightarrow{I}_{||} \cdot \hat{e}_z = 0$ . Y el término  $\vec{C}_2$  como

$$\vec{C}_2 = \frac{1}{k_1^2} \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} \right) \cdot \hat{e}_z \times \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} \right) \cdot \hat{e}_z \times \vec{E}_{||} \quad (\text{A.19})$$

$$\vec{C}_2 = \frac{1}{k_1^2} \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} \right) \cdot \left( -k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} + (\vec{k}_{||} \times \hat{e}_z)(\vec{k}_{||} \times \hat{e}_z) \right) \cdot \vec{E}_{||} = -k_{1z}^2 \vec{E}_{||} \quad (\text{A.20})$$

donde  $k_{1z}^2 = k_1^2 - k_{||}^2$ ,  $k_{||}^2 = k_x^2 + k_y^2$ ,  $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1$  y además se utilizaron las identidades  $\vec{k}_{||} \times \hat{e}_z = k_y \hat{e}_x - k_x \hat{e}_y$  que a su vez implica que

$$(\vec{k}_{||} \times \hat{e}_z)(\vec{k}_{||} \times \hat{e}_z) = \begin{pmatrix} k_y^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k_x^2 \end{pmatrix} = k_{||}^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||}. \quad (\text{A.21})$$

Por lo que la ecuación para la componente paralela del campo eléctrico  $\vec{E}_{||}$  en  $z > 0$ , en un medio que tiene un dipolo eléctrico, se escribe como

$$\vec{E}_{||}'' + k_z^2 \vec{E}_{||} = \vec{a} \delta(z - z') + \vec{b} \delta'(z - z') \quad (\text{A.22})$$

donde

$$\vec{a} = -\frac{I_l}{k_1^2} \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} \right) \cdot \vec{v} \quad (\text{A.23})$$

$$\vec{b} = \frac{I_l}{i k_1^2} \vec{k}_{||} (\hat{e}_z \cdot \vec{v}) \quad (\text{A.24})$$

donde  $k_z^2 = \sqrt{k_1^2 - k_{||}^2}$ ,  $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1$  y  $k_{||}^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

## A.2. Condiciones de frontera

En esta sección se imponen condiciones de frontera, para lo cual denotaremos como  $\vec{E}_{||0}$  la componente paralela del campo eléctrico definido para  $z < 0$ .

Para  $z < 0$ , un procedimiento análogo al de la sección anterior muestra que la componente paralela del campo eléctrico para  $z < 0$ , satisface la ecuación sin fuentes

$$\vec{E}_{||0}''(z) + k_z^{02} \vec{E}_{||0}(z) = 0 \quad (\text{A.25})$$

y donde  $k_z^0 = \sqrt{k_0^2 - k_{||}^2}$  y por conveniencia definiremos las matrices de admitancia como

$$\overleftrightarrow{Y}_0 = \frac{1}{\omega \mu_0 k_z^0} \left( k_0^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} \right) \times \hat{e}_z \quad (\text{A.26})$$

$$\overleftrightarrow{Y}_1 = \frac{1}{\omega \mu_1 k_z^1} \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} \right) \times \hat{e}_z. \quad (\text{A.27})$$

La solución para la ecuación (A.25) para  $z < 0$  serán de la forma

$$\vec{E}_{||0}(z) = \hat{e}_{||0+} e^{ik_z^0 z} + \hat{e}_{||0-} e^{-ik_z^0 z} \quad (\text{A.28})$$

$$\vec{H}_{||0}(z) = \overleftrightarrow{Y}_0 \cdot \hat{e}_{||0+} e^{ik_z^0 z} - \overleftrightarrow{Y}_0 \cdot \hat{e}_{||0-} e^{-ik_z^0 z} \quad (\text{A.29})$$

donde definimos  $\overleftrightarrow{Y}_0$  una matriz cuadrada de dimensión  $2 \times 2$  que relaciona el campo eléctrico y el campo magnético para  $z < 0$  dada por la ecuación (A.26),  $\hat{e}_{||0+}$ ,  $\hat{e}_{||0-}$  son vectores constantes que se determinarán por las condiciones de frontera.

La solución de (A.22) para  $0 < z < z'$  se propone de la forma

$$\vec{E}_{||1}(z) = \hat{e}_{||1+} e^{ik_z^1 z} + \hat{e}_{||1-} e^{-ik_z^1 z} \quad (\text{A.30})$$

$$\vec{H}_{||1}(z) = \overleftrightarrow{Y}_1 \cdot \hat{e}_{||1+} e^{ik_z^1 z} - \overleftrightarrow{Y}_1 \cdot \hat{e}_{||1-} e^{-ik_z^1 z} \quad (\text{A.31})$$

donde definimos  $\overleftrightarrow{Y}_1$  una matriz cuadrada de dimensión  $2 \times 2$  que relaciona el campo magnético y el campo eléctrico en  $z > 0$  (A.27),  $\hat{e}_{||1+}$ ,  $\hat{e}_{||1-}$  son vectores constantes por determinar mediante las condiciones de frontera y  $k_z^1 = \sqrt{k_1^2 - k_{||}^2}$ . Para  $z > z'$

$$\vec{E}_{||2}(z) = \hat{e}_{||2+} e^{ik_z^1(z-z')} \quad (\text{A.32})$$

donde  $\hat{e}_{||2+}$  es un vector constante por determinar. Las condiciones de frontera se pueden escribir como

$$\vec{E}_{\parallel 1}(0^+) - \vec{E}_{\parallel 0}(0^-) = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$\vec{H}_{\parallel 1}(0^+) - \vec{H}_{\parallel 0}(0^-) = 0 \quad (\text{A.34})$$

y el hecho de tener fuentes en  $z = z'$ , la ecuación(A.22) implica que

$$\vec{E}'_{\parallel 2}(z'^+) - \vec{E}'_{\parallel 1}(z'^-) = \vec{a} \quad (\text{A.35})$$

$$\vec{E}_{\parallel 2}(z'^+) - \vec{E}_{\parallel 1}(z'^-) = \vec{b}. \quad (\text{A.36})$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver como sigue, en  $z = 0$

$$\hat{e}_{\parallel 0+} + \hat{e}_{\parallel 0-} = \hat{e}_{\parallel 1+} + \hat{e}_{\parallel 1-} \quad (\text{A.37})$$

$$\overleftrightarrow{Y}_0 \cdot (\hat{e}_{\parallel 0+} - \hat{e}_{\parallel 0-}) = \overleftrightarrow{Y}_1 \cdot (\hat{e}_{\parallel 1+} - \hat{e}_{\parallel 1-}) \quad (\text{A.38})$$

de donde despejando  $\hat{e}_{\parallel 0-}$  de la primera ecuación y sustituyendo en siguiente esta última ecuación se puede escribir como

$$\left( \overleftrightarrow{Y}_1 + \overleftrightarrow{Y}_0 \right) \cdot \hat{e}_{\parallel 1+} + \left( \overleftrightarrow{Y}_0 - \overleftrightarrow{Y}_1 \right) \cdot \hat{e}_{\parallel 1-} = 2 \overleftrightarrow{Y}_0 \cdot \hat{e}_{\parallel 0+}. \quad (\text{A.39})$$

En  $z = z'$  tenemos que

$$\hat{e}_{\parallel 2+} - (\hat{e}_{\parallel 1+} e^{ik_z^1 z'} - \hat{e}_{\parallel 1-} e^{-ik_z^1 z'}) = \frac{\vec{a}}{ik_z^1} \quad (\text{A.40})$$

$$\hat{e}_{\parallel 2+} - (\hat{e}_{\parallel 1+} e^{ik_z^1 z'} + \hat{e}_{\parallel 1-} e^{-ik_z^1 z'}) = \vec{b}. \quad (\text{A.41})$$

Si restamos (A.40) y (A.41) se encuentra que

$$\hat{e}_{\parallel 1-} = \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{ik_z^1 z'} \quad (\text{A.42})$$

y sustituyendo este resultado en (A.39) se tiene que

$$\hat{e}_{\parallel 1+} = \overleftrightarrow{T} \cdot \hat{e}_{\parallel 0+} + \overleftrightarrow{R} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{ik_z^1 z'}. \quad (\text{A.43})$$

Si sumamos (A.40) y (A.41) encontramos que

$$\hat{e}_{\parallel 2+} = \hat{e}_{\parallel 1+} e^{ik_z^1 z'} + \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} + \vec{b} \right) \quad (\text{A.44})$$

donde las matrices  $\overleftarrow{R}$ ,  $\overleftarrow{T}$  están dadas en términos de las matrices de impedancia por

$$\overleftarrow{T} = 2 \left( \overleftarrow{Y}_1 + \overleftarrow{Y}_0 \right)^{-1} \overleftarrow{Y}_0 \quad (\text{A.45})$$

$$\overleftarrow{R} = \left( \overleftarrow{Y}_1 + \overleftarrow{Y}_0 \right)^{-1} \left( \overleftarrow{Y}_1 - \overleftarrow{Y}_0 \right) \quad (\text{A.46})$$

por lo que el campo reflejado vale

$$\hat{e}_{\parallel 0-} = -(\overleftarrow{T} - \overleftarrow{I}_{\parallel}) \cdot \hat{e}_{\parallel 0+} + (\overleftarrow{T} + \overleftarrow{R}) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{ik_z^1 z'}. \quad (\text{A.47})$$

En el problema que consideramos, solo nos interesa la solución debida al dipolo puntual, por lo que tomaremos  $\hat{e}_{\parallel 0+} = 0$  (no existe una onda incidente u otra fuente externa), con esto tenemos que la solución a este problema se escribe como

$$\hat{e}_{\parallel 0-} = (\overleftarrow{T} + \overleftarrow{R}) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{ik_z^1 z'} \quad (\text{A.48})$$

$$\hat{e}_{\parallel 1-} = \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{ik_z^1 z'} \quad (\text{A.49})$$

$$\hat{e}_{\parallel 1+} = \overleftarrow{R} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{ik_z^1 z'} \quad (\text{A.50})$$

$$\hat{e}_{\parallel 2+} = \overleftarrow{R} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{i2k_z^1 z'} + \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} + \vec{b} \right) \quad (\text{A.51})$$

por lo que la solución para  $z < 0$  será

$$\vec{E}_{\parallel}(z) = (\overleftarrow{T} + \overleftarrow{R}) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{-ik_z^0 z + ik_z^1 z'}. \quad (\text{A.52})$$

Las soluciones para la componente paralela del campo eléctrico  $\vec{E}_{\parallel}$  en  $0 < z < z'$  y  $z > z'$  se pueden escribir como una sola para  $z > 0$  como

$$\vec{E}_{\parallel}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} \pm \vec{b} \right) e^{ik_z^1 |z-z'|} + \overleftarrow{R} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{ik_z^1 (z+z')} \quad (\text{A.53})$$

donde se toma el signo positivo si  $z > z'$  y negativo el otro caso. Para calcular la componente  $z$  del campo eléctrico, utilizamos la ecuación (A.13), por lo que para  $z < 0$  las fuentes se toman cero y se puede escribir como

$$E_z(z) = \frac{1}{\omega\epsilon_0} \vec{k}_{\parallel} \cdot \hat{e}_z \times \vec{H}_{\parallel 0} \quad (\text{A.54})$$

donde utilizando la definición de matriz de impedancia se puede escribir para  $z < 0$  como

$$E_z(z) = -\frac{1}{\omega\epsilon_0} \vec{k}_{\parallel} \cdot (\hat{e}_z \times \overleftrightarrow{Y}_0 \cdot \hat{e}_{\parallel 0-}) e^{-ik_z^0 z} \quad (\text{A.55})$$

y se puede demostrar que

$$\vec{k}_{\parallel} \cdot (\hat{e}_z \times \overleftrightarrow{Y}_0) = -\frac{1}{\omega\mu_0 k_z^0} k_0^2 \vec{k}_{\parallel} \quad (\text{A.56})$$

y por lo tanto para  $z < 0$  el campo vale

$$E_z(z) = \frac{1}{k_z^0} \vec{k}_{\parallel} \cdot \hat{e}_{\parallel 0-} e^{-ik_z^0 z}. \quad (\text{A.57})$$

De igual manera para  $z > 0$  en ese caso hay que incluir el término de las fuentes, pero el término sin fuente se escribe para  $0 < z < z'$  como

$$E_z(z) = -\frac{1}{k_z^1} \vec{k}_{\parallel} \cdot \hat{e}_{\parallel 1+} e^{ik_z^1 z} + \frac{1}{k_z^1} \vec{k}_{\parallel} \cdot \hat{e}_{\parallel 1-} e^{-ik_z^1 z} \quad (\text{A.58})$$

y para  $z > z'$

$$E_z(z) = -\frac{1}{k_z^1} \vec{k}_{\parallel} \cdot \hat{e}_{\parallel 2+} e^{ik_z^1(z-z')}. \quad (\text{A.59})$$

Sustituyendo los resultados encontrados en (A.51) finalmente se encuentra que para  $z < 0$

$$E_z(z) = \frac{1}{k_z^0} \vec{k}_{\parallel} \cdot (\overleftrightarrow{I}_{\parallel} + \overleftrightarrow{R}) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{ik_z^1 z' - ik_z^0 z}. \quad (\text{A.60})$$

Las soluciones para la componente  $z$  del campo eléctrico para  $0 < z < z'$  y  $z > z'$  se pueden escribir como una sola para  $z > 0$  como

$$E_z(z) = -\frac{1}{k_z^1} \vec{k}_{\parallel} \cdot \overleftrightarrow{R} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{ik_z^1(z+z')} \quad (\text{A.61})$$

$$\mp \frac{1}{k_z^1} \vec{k}_{\parallel} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} \pm \vec{b} \right) e^{ik_z^1 |z-z'|} - \frac{1}{k_1^2} I_l \hat{e}_z \cdot \vec{v} \delta(z-z') \quad (\text{A.62})$$

donde el primer signo corresponde al caso en que  $z > z'$  y el segundo al caso  $z < z'$ . El vector  $\left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} \pm \vec{b} \right)$  está dado por (A.23), (A.24) y se puede escribir en forma matricial como

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} \pm \vec{b} \right) = \frac{iI_l}{2k_z^1 k_1^2} \left[ k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} \mp k_z^1 \vec{k}_{\parallel} \hat{e}_z \right] \cdot \vec{v}. \quad (\text{A.63})$$

A partir de (A.52), (A.53), (A.60), (A.62), es posible recuperar la expresión para la función de Green definida para  $z > 0$ , que será requerida para plantear el problema de reflexión de un sistema coloidal, donde las partículas estén inmersas en una matriz.

### A.3. Fórmula final

Ahora estamos en posición de recuperar la función de Green para el semiespacio. El campo eléctrico para  $z > 0$  está dado por (A.62), (A.53) y se puede escribir como

$$\vec{E}(z) = \left( \overleftrightarrow{I}_{\parallel} \mp \frac{1}{k_z^1} \hat{e}_z \vec{k}_{\parallel} \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} \pm \vec{b} \right) e^{ik_z^1 |z-z'|} - \frac{1}{k_1^2} I_l \hat{e}_z \hat{e}_z \cdot \vec{v} \delta(z-z') \quad (\text{A.64})$$

$$+ \left( \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \frac{1}{k_z^1} \hat{e}_z \vec{k}_{\parallel} \right) \cdot \overleftrightarrow{R} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{ik_z^1 (z+z')} \quad (\text{A.65})$$

y para  $z < 0$  como

$$\vec{E}(z) = \left( \overleftrightarrow{I}_{\parallel} + \frac{1}{k_z^0} \hat{e}_z \vec{k}_{\parallel} \right) \cdot \left( \overleftrightarrow{I}_{\parallel} + \overleftrightarrow{R} \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} - \vec{b} \right) e^{-ik_z^0 z + ik_z^1 z'} \quad (\text{A.66})$$

donde

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\vec{a}}{ik_z^1} \pm \vec{b} \right) = \frac{iI_l}{2k_z^1 k_1^2} \left[ k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} \mp k_z^1 \vec{k}_{\parallel} \hat{e}_z \right] \cdot \vec{v} \quad (\text{A.67})$$

y además después de un poco de álgebra

$$\frac{iI_l}{2k_z^1 k_1^2} \left( \overleftrightarrow{I}_{||} \mp \frac{1}{k_z^1} \hat{e}_z \vec{k}_{||} \right) \cdot \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} \mp k_z^1 \vec{k}_{||} \hat{e}_z \right) \quad (\text{A.68})$$

$$= \frac{iI_l}{2k_z^1} \left( \overleftrightarrow{I} - \frac{1}{k_1^2} \vec{k}_{\pm} \vec{k}_{\pm} \right) \quad (\text{A.69})$$

donde  $\overleftrightarrow{I} = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y + \hat{e}_z \hat{e}_z$  y  $\vec{k}_{\pm} = \vec{k}_{||} \pm k_z^1 \hat{e}_z$  y  $\vec{k}_{||} = k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y$ , y la matriz  $\overleftrightarrow{R}$  está definida por (A.46) y es calculada explícitamente en el apéndice (A), ver (A.117). Con este resultado y utilizando (A.5), (A.6), (A.7) que relacionan la función de Green con el campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico en 3 distintas polarizaciones, se tiene que los primeros dos términos del campo eléctrico (A.64), dan la función de Green para  $z > 0$  y son iguales a la función de Green del espacio libre con magnitud de vector de onda  $k_1$ , el tercer término (A.65) es interpretado como el campo eléctrico debido al dipolo imagen.

Por lo tanto hemos encontrado una representación mixta de la función de Green para el semiespacio con  $z > 0$  como

$$\overleftrightarrow{G}_{HS}(\vec{k}_{||}, z, \vec{r}'_{||}, z') = \overleftrightarrow{G}_1(\vec{k}_{||}, z, \vec{r}'_{||}, z') \quad (\text{A.70})$$

$$+ \frac{ie^{-i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}'_{||}}}{2k_z^1 k_1^2} \left( \overleftrightarrow{I}_{||} - \frac{1}{k_z^1} \hat{e}_z \vec{k}_{||} \right) \cdot \overleftrightarrow{R} \cdot \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} + k_z^1 \vec{k}_{||} \hat{e}_z \right) e^{ik_z^1(z+z')} \quad (\text{A.71})$$

y para  $z < 0$  como

$$\overleftrightarrow{G}_{HS}(\vec{k}_{||}, z, \vec{r}'_{||}, z') \quad (\text{A.72})$$

$$= \frac{ie^{-i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}'_{||}}}{2k_z^1 k_1^2} \left( \overleftrightarrow{I}_{||} + \frac{1}{k_z^0} \hat{e}_z \vec{k}_{||} \right) \cdot \left( \overleftrightarrow{I}_{||} + \overleftrightarrow{R} \right) \cdot \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} + k_z^1 \vec{k}_{||} \hat{e}_z \right) e^{-ik_z^0 z + ik_z^1 z'} \quad (\text{A.73})$$

o bien utilizando una notación compacta tendremos que para  $z > 0$

$$\overleftrightarrow{G}_{HS}(\vec{k}_{||}, z, \vec{r}'_{||}, z') = \overleftrightarrow{G}_1(\vec{k}_{||}, z, \vec{r}'_{||}, z') + \overleftrightarrow{R}_I^+ \frac{i}{2k_z^1} e^{-i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}'_{||}} e^{ik_z^1(z+z')} \quad (\text{A.74})$$

y para  $z < 0$

$$\overleftrightarrow{G}_{HS}(\vec{k}_{||}, z, \vec{r}'_{||}, z') = \overleftrightarrow{R}_I^- \frac{i}{2k_z^1} e^{-i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}'_{||}} e^{-ik_z^0 z + ik_z^1 z'} \quad (\text{A.75})$$

donde hemos definido

$$\overleftrightarrow{R}_I^+ = \frac{1}{k_1^2} \left( \overleftrightarrow{I}_{||} - \frac{1}{k_z^1} \hat{e}_z \vec{k}_{||} \right) \cdot \overleftrightarrow{R} \cdot \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} + k_z^1 \vec{k}_{||} \hat{e}_z \right) \quad (\text{A.76})$$

$$\overleftrightarrow{R}_I^- = \frac{1}{k_1^2} \left( \overleftrightarrow{I}_{||} + \frac{1}{k_z^0} \hat{e}_z \vec{k}_{||} \right) \cdot \left( \overleftrightarrow{I}_{||} + \overleftrightarrow{R} \right) \cdot \left( k_1^2 \overleftrightarrow{I}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} + k_z^1 \vec{k}_{||} \hat{e}_z \right). \quad (\text{A.77})$$

donde la matriz  $\overleftrightarrow{R}$  está definida por (A.46) y calculada explícitamente en el apéndice (A) ecuación (A.117). Por lo que finalmente podemos enunciar el resultado de la función de Green del semiespacio como un resultado

**Resultado 29** *La función de Green para el semiespacio con número de onda  $k_1$ , en una representación espacial, se puede escribir para  $z > 0$  como:*

$$\overleftrightarrow{G}_{HS}(\vec{r}, \vec{r}') = \overleftrightarrow{G}_1(\vec{r}, \vec{r}') \quad (\text{A.78})$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} \overleftrightarrow{R}_I^+(\vec{k}_{||}) \frac{i}{2k_z^1} e^{i\vec{k}_{||} \cdot (\vec{r}_{||} - \vec{r}'_{||})} e^{ik_z^1(z+z')} \quad (\text{A.79})$$

y para  $z < 0$  como

$$\overleftrightarrow{G}_{HS}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} \overleftrightarrow{R}_I^-(\vec{k}_{||}) \frac{i}{2k_z^1} e^{i\vec{k}_{||} \cdot (\vec{r}_{||} - \vec{r}'_{||})} e^{-ik_z^0 z + ik_z^1 z'}, \quad (\text{A.80})$$

donde

$$\vec{k}_{||} = k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y \quad (\text{A.81})$$

$$k_z^1 = \sqrt{k_1^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (\text{A.82})$$

$$k_z^0 = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}. \quad (\text{A.83})$$

El término  $\overleftrightarrow{G}_1$  es el término de la función de Green del espacio libre cuando el medio es tal que el número de propagación en ese medio vale  $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1$  y su forma explícita es

$$\overleftrightarrow{G}_1(\vec{r}, \vec{r}') \quad (\text{A.84})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{||} \left( \overleftrightarrow{I} - \hat{k}_{\pm} \hat{k}_{\pm} \right) \frac{i}{2k_z^1} e^{i\vec{k}_{||} \cdot (\vec{r}_{||} - \vec{r}'_{||})} e^{ik_z^1 |z-z'|} - \frac{\hat{e}_z \hat{e}_z}{k_1^2} \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (\text{A.85})$$

donde

$$\hat{k}_+ = \frac{1}{k_1}(k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y + k_z \hat{e}_z) \quad (\text{A.86})$$

si  $z - z' > 0$  y además

$$\hat{k}_- = \frac{1}{k_1}(k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y - k_z \hat{e}_z) \quad (\text{A.87})$$

si  $z - z' < 0$ .

Reemplazando  $k_1$  por  $k_0$  se tiene la representación de la función de Green en el espacio libre (sin condiciones de frontera) y en el vacío.

## Comentario

La función de Green del semiespacio, es importante si uno quiere plantear problemas de dispersión de la luz por inclusiones, cuando estas inclusiones se encuentran inmersas en un semiespacio de matriz con permitividad eléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ , en este caso existen términos de radiación debidos a las así llamadas corrientes imágenes.

### A.4. Cálculo de la matriz $\mathbf{R}$

En esta sección completaremos el cálculo de la sección anterior, al dar una expresión explícita para la matriz  $\overleftrightarrow{\mathbf{R}}$ , dada en términos de las matrices de impedancia  $\overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_1, \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_0$ . Por el hecho que  $\vec{E}_{||}, \vec{H}_{||}$  son las componentes paralelas del campo eléctrico y magnético y su derivada respecto de  $z$  da un factor de  $ik_z^0$  si  $z < 0$  ó  $ik_z^1$  si  $z > 0$ , esto debido al hecho que la solución es de la forma  $e^{ik_z z}$ , y si consideramos que  $z \neq z'$ , entonces la ecuación (A.15) sin fuentes se pueden reescribir en forma matricial y es tal que

$$\vec{H}'_{||} = \frac{i}{\omega \mu_1} \left( k_1^2 \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||} \right) \cdot \hat{e}_z \times \vec{E}_{||}. \quad (\text{A.88})$$

Recordemos que las matrices de impedancia dadas por (A.26),(A.27) son

$$\overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_0 = \frac{1}{\omega \mu_0 k_z^0} (k_0^2 \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||}) \times \hat{e}_z \quad (\text{A.89})$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_1 = \frac{1}{\omega \mu_1 k_z^1} (k_1^2 \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_{||} - \vec{k}_{||} \vec{k}_{||}) \times \hat{e}_z \quad (\text{A.90})$$

si las sumamos entonces

$$(\overleftarrow{Y}_0 + \overleftarrow{Y}_1) = \frac{1}{\omega} \left[ \left( \frac{k_0^2}{\mu_0 k_z^0} + \frac{k_1^2}{\mu_1 k_z^1} \right) \overleftarrow{I}_{\parallel} \times \hat{e}_z - \left( \frac{1}{\mu_0 k_z^0} + \frac{1}{\mu_1 k_z^1} \right) \vec{k}_{\parallel} (\vec{k}_{\parallel} \times \hat{e}_z) \right] \quad (\text{A.91})$$

y si definimos

$$A_+ = \left( \frac{k_0^2}{\mu_0 k_z^0} + \frac{k_1^2}{\mu_1 k_z^1} \right) \quad (\text{A.92})$$

$$B_+ = \left( \frac{1}{\mu_0 k_z^0} + \frac{1}{\mu_1 k_z^1} \right) \quad (\text{A.93})$$

entonces

$$(\overleftarrow{Y}_0 + \overleftarrow{Y}_1) = \frac{1}{\omega} \left[ A_+ \overleftarrow{I}_{\parallel} \times \hat{e}_z - B_+ \vec{k}_{\parallel} (\vec{k}_{\parallel} \times \hat{e}_z) \right], \quad (\text{A.94})$$

donde usando el hecho que  $\vec{k}_{\parallel} \times \hat{e}_z = k_y \hat{e}_x - k_x \hat{e}_y$  implica que

$$(\vec{k}_{\parallel} \times \hat{e}_z) \vec{k}_{\parallel} = \begin{pmatrix} k_x k_y & -k_x^2 \\ k_y^2 & -k_x k_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.95})$$

y el hecho que

$$\overleftarrow{I}_{\parallel} \times \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.96})$$

encontramos que

$$(\overleftarrow{Y}_1 + \overleftarrow{Y}_0) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -B_+ k_x k_y & -A_+ + B_+ k_x^2 \\ A_+ - B_+ k_x^2 & B_+ k_x k_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.97})$$

y su inversa

$$(\overleftarrow{Y}_1 + \overleftarrow{Y}_0)^{-1} = \frac{\omega}{A_+(A_+ - B_+ k_{\parallel}^2)} \begin{pmatrix} B_+ k_x k_y & A_+ - B_+ k_x^2 \\ -A_+ + B_+ k_y^2 & -B_+ k_x k_y \end{pmatrix}. \quad (\text{A.98})$$

Ahora definimos

$$A_- = \left( \frac{k_1^2}{\mu_1 k_z^1} - \frac{k_0^2}{\mu_0 k_z^0} \right) \quad (\text{A.99})$$

$$B_- = \left( \frac{1}{\mu_1 k_z^1} - \frac{1}{\mu_0 k_z^0} \right) \quad (\text{A.100})$$

$$(\overleftrightarrow{Y}_1 - \overleftrightarrow{Y}_0) = \frac{1}{\omega} \left[ A_- \overleftrightarrow{I}_{\parallel} \times \hat{e}_z - B_- \vec{k}_{\parallel} (\vec{k}_{\parallel} \times \hat{e}_z) \right] \quad (\text{A.101})$$

$$(\overleftrightarrow{Y}_1 - \overleftrightarrow{Y}_0) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -B_- k_x k_y & -A_- + B_- k_x^2 \\ A_- - B_- k_x^2 & B_- k_x k_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.102})$$

y el producto de (A.98) por (A.102) obteniendose

$$= \frac{1}{A_+ (A_+ - B_+ k_{\parallel}^2)} \begin{pmatrix} B_+ k_x k_y & A_+ - B_+ k_x^2 \\ -A_+ + B_+ k_y^2 & -B_+ k_x k_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.103})$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -B_- k_x k_y & -A_- + B_- k_x^2 \\ A_- - B_- k_x^2 & B_- k_x k_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.104})$$

simplificando el término de la matriz se escribe como

$$\begin{pmatrix} A_+ A_- - A_+ B_- k_y^2 - B_+ A_- k_x^2 & (A_+ B_- - A_- B_+) k_x k_y \\ (A_+ B_- - A_- B_+) k_x k_y & A_+ A_- - A_+ B_- k_x^2 - B_+ A_- k_y^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.105})$$

que a su vez se puede escribir como

$$\begin{aligned} & (A_+ A_- - B_+ A_- k_{\parallel}^2) \overleftrightarrow{I}_{\parallel} \\ & - (A_+ B_- - A_- B_+) \begin{pmatrix} k_y^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k_x^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

donde utilizando (A.21) concluimos que

$$\overleftrightarrow{R} = \frac{A_-}{A_+} \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \frac{(A_+ B_- - A_- B_+)}{A_+ (A_+ - B_+ k_{\parallel}^2)} (k_{\parallel}^2 \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel}) \quad (\text{A.107})$$

$$\overleftrightarrow{R} = \frac{A_- - B_- k_{\parallel}^2}{A_+ - B_+ k_{\parallel}^2} \overleftrightarrow{I}_{\parallel} + \frac{(A_+ B_- - A_- B_+)}{A_+ (A_+ - B_+ k_{\parallel}^2)} \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel}. \quad (\text{A.108})$$

De las definiciones de  $A_+$ ,  $A_-$  y utilizando el hecho que  $k_z^{02} = k_0^2 - k_{\parallel}^2$ ,  $k_z^{12} = k_1^2 - k_{\parallel}^2$  y simplificando se tiene que

$$A_+ - B_+ k_{\parallel}^2 = \left( \frac{k_z^1}{\mu_1} + \frac{k_z^0}{\mu_0} \right) \quad (\text{A.109})$$

$$A_- - B_- k_{\parallel}^2 = \left( \frac{k_z^1}{\mu_1} - \frac{k_z^0}{\mu_0} \right) \quad (\text{A.110})$$

y además utilizando  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ ,  $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1$  se tiene que

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{\epsilon_1 k_z^0 - \epsilon_0 k_z^1}{\epsilon_1 k_z^0 + \epsilon_0 k_z^1} \quad (\text{A.111})$$

de donde el primer término será por lo tanto

$$\frac{A_- - B_- k_{\parallel}^2}{A_+ - B_+ k_{\parallel}^2} = \frac{\mu_0 k_z^1 - \mu_1 k_z^0}{\mu_0 k_z^1 + \mu_1 k_z^0} \quad (\text{A.112})$$

y el segundo

$$\frac{B_- - \frac{A_-}{A_+} B_+}{A_+ - B_+ k_{\parallel}^2} = \frac{2(\epsilon_0 \mu_0 - \mu_1 \epsilon_1)}{(\mu_1 k_z^0 + \mu_0 k_z^1)(\epsilon_1 k_z^0 + \epsilon_0 k_z^1)}. \quad (\text{A.113})$$

Si definimos las amplitudes de reflexión del medio (1) al medio (0) como

$$R_{10}^{TE}(k_{\parallel}) = \frac{\mu_0 k_z^1 - \mu_1 k_z^0}{\mu_0 k_z^1 + \mu_1 k_z^0} \quad (\text{A.114})$$

$$R_{10}^{TM}(k_{\parallel}) = \frac{\epsilon_0 k_z^1 - \epsilon_1 k_z^0}{\epsilon_0 k_z^1 + \epsilon_1 k_z^0} \quad (\text{A.115})$$

se puede verificar que

$$R_{10}^{TE} + R_{10}^{TM} = -\frac{2(\mu_0 \epsilon_0 - \mu_1 \epsilon_1)}{(\mu_1 k_z^0 + \mu_0 k_z^1)(\epsilon_1 k_z^0 + \epsilon_0 k_z^1)} k_{\parallel}^2 \quad (\text{A.116})$$

por lo que

$$\overleftrightarrow{R}(k_{\parallel}) = R_{10}^{TE}(k_{\parallel}) \overleftrightarrow{I}_{\parallel} - (R_{10}^{TE}(k_{\parallel}) + R_{10}^{TM}(k_{\parallel})) \frac{1}{k_{\parallel}^2} \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel}. \quad (\text{A.117})$$

Con esto se termina el cálculo de la matriz  $R$



# Apéndice B

## Modos longitudinales en un plasma

Esta sección tiene como propósito ilustrar la aparición de modos longitudinales en un sistema relativamente simple, que será un gas de electrones sin interacciones (plasma), tal como se expone en [Bredov, pg.390].

Definimos la función de distribución de número de partículas ( en este caso electrones )  $f(\vec{r}, \vec{p})$  talque  $f(\vec{r}, \vec{p})d^3r d^3p$  representa el número de partículas en una diferencial de volumen y momento lineal  $d^3r, d^3p$  con posición y momento lineal  $\vec{r}$  y  $\vec{p}$  respectivamente. Al aplicar la ecuación de transporte de Boltzman sin el término de colisiones, se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde hemos denotado

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z. \quad (\text{B.2})$$

Además supondremos que  $f(\vec{r}, \vec{p}) = f_0(\vec{p}) + \delta f(t, \vec{r}, \vec{p})$  donde  $f_0(\vec{p})$  es la función de distribución de número de partículas en equilibrio termodinámico (estacionaria, isotrópica y homogénea), y  $\delta f$  las fluctuaciones de dicha distribución debida a un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ .

De la expresión para fuerza de Lorentz del campo electromagnético sobre una carga eléctrica  $-e$  encontramos que

$$\dot{\vec{p}} = -e \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (\text{B.3})$$

donde supondremos que  $\vec{E}$  es proporcional a  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ . Por lo tanto las fluctuaciones satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial \delta f(t, \vec{r}, \vec{p})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \delta f(t, \vec{r}, \vec{p})}{\partial \vec{r}} = e \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}}. \quad (\text{B.4})$$

Para una función  $f_0$  tal como se supone (estacionaria, isotrópica y homogénea), se tiene que  $\frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}}$  debe ser tal que su dirección es proporcional a  $m\vec{v}$  y por lo tanto el producto escalar con  $\vec{v} \times \vec{B}$  es cero. Ahora, si suponemos que  $\delta f(t, \vec{r}, \vec{p}) = \delta f(\vec{p})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$  entonces

$$\delta f(\vec{p}) = \frac{e\vec{E}}{i(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega)} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}}. \quad (\text{B.5})$$

En un plasma en equilibrio, las cargas negativas son equilibradas exactamente por la carga de los iones positivos fijos en una red cristalina, y la corriente total es cero, puesto que el plasma es isotrópico. Por lo tanto la densidad de carga y corriente del plasma perturbado por el campo eléctrico son respectivamente

$$\rho = -e \int_{\mathbb{R}^3} \delta f(\vec{p}) d^3 p e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} \quad (\text{B.6})$$

$$\vec{J} = -e \int_{\mathbb{R}^3} \vec{v} \delta f(\vec{p}) d^3 p e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} \quad (\text{B.7})$$

y por lo tanto

$$\vec{J} = -e^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{v}}{i(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega)} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} d^3 p \cdot \vec{E} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}. \quad (\text{B.8})$$

Esta corriente se puede acoplar al campo electromagnético inducido por dichas corrientes en un medio que tomaremos con una constante de propagación efectiva  $k_s$  en lugar de una constante de propagación del vacío  $k_0$ , debida a que dichas cargas deben encontrarse en una red cristalina de iones positivos. Para buscar los modos electromagnéticos que pueden propagarse en dicho plasma, supondremos que el campo eléctrico se puede escribir de la forma  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ , siendo  $\vec{E}$  un vector constante en este caso, por lo que encontramos que se debe cumplir la siguiente relación de consistencia

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} - k_s^2 \vec{E} = -i\omega\mu_0 e^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{v}}{i(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega)} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} d^3 p \cdot \vec{E} \quad (\text{B.9})$$

donde  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Esta ecuación es de hecho la relación de dispersión para los modos electromagnéticos en dicho medio. Se puede demostrar que esta relación de dispersión presenta tanto modos longitudinales como modos transversales, por lo que hemos dado un ejemplo concreto donde aparecen modos longitudinales, de hecho resultará ser una relación de dispersión no local, en el sentido utilizado en la tesis. Para ser más específicos, aun tenemos que dar la función de distribución en equilibrio  $f_0$ .



# Apéndice C

## Relaciones vectoriales útiles

En este apéndice damos la expresión de algunos vectores con relación a la base  $\{\hat{e}_x, \hat{k}_\perp^f, \hat{k}^f\}$ .

Si usamos una base de dimensión dos en el plano de incidencia, tal que se toma el eje  $z$  normal a la interfaz plana, y el eje  $y$  paralelo a  $\vec{k}_\parallel^i$  entonces un vector arbitrario en el plano de incidencia se escribiría como  $a\hat{e}_z + b\hat{k}_\parallel^i = (a, b)$ .

En esta base se tiene que

$$\hat{k}^i = \frac{1}{k_0}(k_z^i, k_\parallel^i) \quad (\text{C.1})$$

$$\hat{k}_\perp^i = \frac{1}{k_0}(-k_\parallel^i, k_z^i) \quad (\text{C.2})$$

$$\hat{k}^r = \frac{1}{k_0}(-k_z^i, k_\parallel^i) \quad (\text{C.3})$$

$$\hat{k}_\perp^r = -\frac{1}{k_0}(k_\parallel^i, k_z^i) \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{k}^f = \frac{1}{k_f}(k_z^f, k_\parallel^i) \quad (\text{C.5})$$

$$\hat{k}_\perp^f = \frac{1}{k_f}(-k_\parallel^i, k_z^f) \quad (\text{C.6})$$

$$\hat{e}_z = (1, 0) \quad (\text{C.7})$$

Usando esta base y proyectando apropiadamente tenemos que

$$\hat{e}_z = \frac{1}{k_f} (-k_{\parallel}^i \hat{k}_{\perp}^f + k_z^f \hat{k}^f) \quad (\text{C.8})$$

$$\hat{k}^i = \frac{1}{k_0 k_f} [k_{\parallel}^i (k_z^f - k_z^i) \hat{k}_{\perp}^f + (k_{\parallel}^i{}^2 + k_z^f k_z^i) \hat{k}^f] \quad (\text{C.9})$$

$$\hat{k}_{\perp}^i = \frac{1}{k_0 k_f} [(k_{\parallel}^i{}^2 + k_z^f k_z^i) \hat{k}_{\perp}^f + k_{\parallel}^i (k_z^i - k_z^f) \hat{k}^f] \quad (\text{C.10})$$

$$\hat{k}_r = \frac{1}{k_0 k_f} [k_{\parallel}^i (k_z^i + k_z^f) \hat{k}_{\perp}^f + (k_{\parallel}^i{}^2 - k_z^f k_z^i) \hat{k}^f] \quad (\text{C.11})$$

$$\hat{k}_{\perp}^r = \frac{1}{k_0 k_f} [(k_{\parallel}^i{}^2 - k_z^f k_z^i) \hat{k}_{\perp}^f - k_{\parallel}^i (k_z^i + k_z^f) \hat{k}^f] \quad (\text{C.12})$$

# Bibliografía

- [Abramowitz] Abramowitz and Stegun, **Handbook of Mathematical Functions**, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series - 55, 1972
- [Alejandro,1] Alejandro Reyes Coronado, **Respuesta electromagnética efectiva no local de sistemas coloidales turbios: teoría y experimento**, Tesis UNAM, 2007.
- [Alejandro,2] A. Reyes-Coronado, A. García-Valenzuela, C. Sánchez-Pérez and R. G. Barrera, **Measurement of the effective refractive index of a turbid colloidal suspension using light refraction**, New Journal of Physics 7, 89 (2005).
- [Alexander] K. Alexander, A. Killey, G. H. Meeten y M. Senior, **Refractive index of concentrated colloidal dispersions**, J. Chem. Soc. Faraday Trans. 77, 361, 1981.
- [Augusto,1] A. García-Valenzuela, C. Sánchez-Pérez, R.G. Barrera and E. Gutiérrez-Reyes, **On the retrieval of particle size from the effective optical properties of colloids**, Physica B 405, 30163021 (2010).
- [Augusto,2] Augusto García-Valenzuela, Rubén G. Barrera, Celia Sánchez-Pérez, Alejandro Reyes-Coronado and Eugenio R. Méndez, **Coherent reflection of light from a turbid suspension of particles in an internal-reflection configuration: Theory versus experiment**, OPTICS EXPRESS 13, No. 18, 6723-6737, (2005).
- [Augusto,3] Augusto García Valenzuela, R.G.Barrera, **Electromagnetic response of a random half-space of Mie scattereres**

- within the effective-field approximation and the determination of the effective optical coefficients**, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 79-80 (2003) 627-647 .
- [Barrera,1] R.G.Barrera, Alejandro Reyes Coronado, Augusto García Valenzuela, **Nonlocal nature of the electrodynamic response of colloidal systems**, Phys. Rev. B. 75. 184202 (2007), 2007.
- [Barrera,2] R. G. Barrera and A. García-Valenzuela, **Coherent reflectance in a system of random Mie scatterers and its relation to the effective-medium approach**, J. Opt. Soc. Am. A 20 No. 2, 296-311 (2003).
- [Barrera,3] Ruben G. Barrera, W. Luis Mochan, Augusto García-Valenzuela, Edahí A. Gutiérrez-Reyes **On the definition of the Poynting vector: A non-local derivation**, Physica B 405 (2010) 29202924
- [Bohren,1] Craig F. Bohren, Donald R. Huffman, **Absorption and Scattering of Light by Small Particles**, John Wiley and Sons, 1983.
- [Bohren,2] C. F. Bohren, **Applicability of effective medium theories to problems of scattering and absorption by nonhomogeneous atmospheric particles**, J. Atmos. Sci. 43, 468, 1986.
- [Born] Max Born, Emil Wolf, **Principles of Optics**, 1980.
- [Bredov] M. Brédov, V. Rumiántsev, I. Toptiguin, **Electrodinámica Clásica**, Editorial Mir, 1986.
- [Chew] Weng Cho Chew, **Waves and Fields in Inhomogeneous Media**, IEEE PRESS Series on Electromagnetic waves.
- [Dick] V. P. Dick y A. P. Ivanov, Extinction of light in dispersive media with high particle concentrations: applicability limits of the interference ap- proximation, J. Opt. Soc. Am. A 16, 1034, 1999.

- [Edahí] Edahí Gutierrez-Reyes, Augusto García-Valenzuela, and Ruben G. Barrera, **Overview of an effective-medium approach to the reflection and refraction of light at a turbid colloidal half-space**, Phys. Status Solidi B, 18 (2012) / DOI 10.1002/pssb.201100735.
- [Foldy] L. L. Foldy, **The Multiple Scattering of Waves**, Phys. Rev. 67, 107, 1945.
- [Fuchs,1] R. Fuchs and Peter Halevi, Preface, **Basic concepts and formalism of spatial dispersion**, Spatial dispersion in solids and plasmas / editor, P. Halevi. Amsterdam ; New York : North-Holland-Elsevier, c1992.
- [Fuchs,2] K.L. Kliewer and Ronald Fuchs , **Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non- Normal Angles of Incidence**, Phys. Rev. 172, 607, 1968.
- [Hale] G. M. Hale and M. R. Querry. **Optical Constants of Water in the 200-nm to 200- $\mu$ m Wavelength Region**, Appl. Opt. 12, 555-563 (1973) doi:10.1364/AO.12.000555
- [Halevi] P. Halevi and R. Fuchs, **Generalised additional boundary condition for non-local dielectrics: 11. Surface polaritons**, J. Phys. C: Solid State Phys., 17 (1984) 3889-3901.
- [Hespel] L. Hespel, S. Manguy y J. J. Greffet, **Theoretical and experimental investigation of the extinction in a dense distribution of particles: nonlocal effects**, J. Opt. Soc. Am. A 18, 3072, 2001.
- [Hulst] H.C. van de Hulst, **Light Scattering by Small Particles**, Dover Publications, Inc. New York, 1981.
- [Ismo,1] Ismo V. Lindell, Esko Alanan, **Exact Image Theory for the Sommerfeld Half-Space Problem Part I: Vertical Magnetic Dipole**, IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. AP-32, NO. 2, pg. 126-133, FEBRUARY 1984

- [Ismo,2] Ismo V. Lindell, Esko Alanan, **Exact image theory for the Sommerfeld half-space problem, part II: Vertical Electric Dipole**, Antennas and Propagation, IEEE Transactions, 1984 VOL. AP - 32 , NO. 8, PAG.841-847 , AUGUST 1984
- [Ismo,3] Ismo V. Lindell, Esko Alanan, **Exact image theory for the Sommerfeld half-space problem, part II: General formulation**, Antennas and Propagation, IEEE Transactions, 1984 Vol.32, Issue 10, pag. 1027 - 1032 .
- [Johnson] P. B. Johnson and R. W. Christy. **Optical Constants of the Noble Metals**, Phys. Rev. B 6, 4370-4379 (1972) doi:10.1103/PhysRevB.6.4370
- [Julius] Julius Adams Stratton, **Electromagnetic Theory**, IEEE PRESS SERIES ON ELECTROMAGNETIC WAVE THEORY, 2007.
- [Kuga] Y. Kuga, D. Rice y R. D. West, **Propagation constant and the velocity of the coherent wave in a dense strongly scattering medium**, IEEE Trans. Antenn. Propagat. 44, (3), 326, 1996.
- [Lebedev] N.N.Lebedev, **Special Functions and Their Applicatios**, Dover publications, inc. 1972.
- [Landau] Landau-Lipshitz, **Electrodinámica de medios continuos**, vol 8.
- [Lax,1] M. Lax, **Multiple Scattering of Waves**, Rev. Mod. Phys. 23, 287, 1951.
- [Lax,2] M. Lax, **Multiple Scattering of Waves II. The Effective Field in Dense Systems**, Phys. Rev. 85, 621, 1952.
- [Maxwell] J. C. Maxwell Garnett, **Colours in metal glasses and in metallic films**, Trans. R. Soc. Lond. 203, 385, 1904.

- [Meeten] G. H. Meeten, **Refractive index errors in the critical-angle and the Brewster-angle methods applied to absorbing and heterogeneous materials**, Meas. Sci. Technol. 8, 728, 1997.
- [Mochan] W. Luis Mochan, Ronald Fuchs, Ruben G. Barrera, **Surface contribution to the optical properties of nonlocal systems** PHYSICAL REVIEW B, VOLUME 27, NUMBER 2, 15 JANUARY 1983.
- [Pippard] A.B. Pippard, **Metallic conduction at high frequencies and low temperatures** Advances in electronics and electron physics vol.6, Editor L. Marton Academic press inc. 1965.
- [Reuter] G. E. H. Reuter and E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. (London) A195, 336 (1948).
- [Stroud] D. Stroud y F. P. Pan, **Self-consistent approach to electromagnetic wave propagation in composite media: Application to model granular metals**, Phys. Rev. B 17, 1602, 1987.
- [Siqueira] P. R. Siqueira y K. Sarabandi, **T-Matrix determination of effective permittivity for three-dimensional dense random media**, IEEE Trans. Antennas Propag 48, 317, 2000.
- [Sanchez] C. Sánchez-Pérez, A. García-Valenzuela, R. Y. Sato-Berrú, J. O. Flores- Flores, R. G. Barrera, **Sizing colloidal particles from their contribution to the effective refractive index: Experimental results**, 2011 J. Phys.: Conf. Ser. 274 012064.
- [Sung] Sung-Ik Lee, Tae W. Noh, J.R. Gaines, Ying-Hsiang Ko and Eric R. Kreidler, **Optical studies of porous glass media containing silver particles** PHYSICAL REVIEW B, 15 FEBRUARY 1988-II, VOLUME 37, NUMBER 6.
- [Tsang,1] Tsang.L and J. A. Kong (1980), **Multiple scattering of electromagnetic waves by random distribution of discrete scatterers with coherent potential and quantum mechanical formalism**, J. Appl. Phys., 51, 3465-3485.

- [Tsang,2] Leung Tsang, Jin Au Kong, Kung-Hau Ding, **Scattering of Electromagnetic Waves: Theories and applications**, vol 1, John Wiley, 2000.
- [Tsang,3] Leung Tsang, Jin Au Kong, Kung-Hau Ding, **Scattering of Electromagnetic Waves: Advanced topics**, vol 3, John Wiley, 2001.
- [Tsang,4] L. Tsang, J. A. Kong **Scattering of electromagnetic waves from a half space of densely distributed dielectrics** *RadioScience*, Volume18, Number6, Pages 1260-1272, November-December 1983.
- [Wachniewski] A. Wachniewski y H. B. McClung, **New approach to effective medium for composite materials: Application to electromagnetic properties**, *Phys. Rev. B* 33, 8053, 1986.
- [Wallace] Philip R. Wallace, **Mathematical analysis of physical problems**, Dover publications 1984.