



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Conjuntos Z en Productos Simétricos**

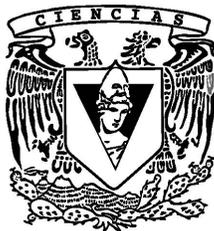
**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**Matemático**

**P R E S E N T A:**

**Rígel Apolonio Juárez Ojeda**



**DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano  
2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno  
Juárez  
Ojeda  
Rígel Apolonio  
(222)2 81 63 64  
Universidad Nacional  
Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
409007503

2. Datos del tutor  
Dr  
Jorge Marcos  
Martínez  
Montejano

3. Datos del sinodal 1  
Dr  
Alejandro  
Illanes  
Mejía

4. Datos del sinodal 2  
Dra  
Patricia  
Pellicer  
Covarrubias

5. Datos del sinodal 3  
Dra  
Verónica  
Martínez de la Vega  
y Mansilla

6. Datos del sinodal 4  
Dr  
Gerardo  
Acosta  
García

7. Datos del trabajo  
escrito  
Conjuntos  $\mathcal{Z}$  en pro-  
ductos simétricos  
66 pp.  
2013

# Agradecimientos

En los años que pasé en la carrera y en el trabajo de la tesis ha habido muchas personas que me han ayudado, apoyado, que han sido importantes o han llegado en el momento justo. Son tantas y tantos que de intentar enlistarlos a todos olvidaría muchos nombres por no tenerlos presentes en este momento o por no haberlos sabido nunca. Sin embargo, todas y todos han marcado alguna hora o algún lugar que me ha traído a terminar este trabajo.

No obstante, quiero dar un agradecimiento especial a las siguientes personas:

A Diana y Apolonio, mis papás, que siempre me han tenido muchos cuidados, mucho cariño y mucha paciencia. Ellos siempre han estado presentes en mi trabajo y decisiones apoyándome, aconsejándome, ayudándome a aprender y guiándome. Es por ellos que logré terminar este trabajo y, por eso, se los dedico con mucho cariño y con mucho amor.

A Sandra, Rosa, Rogelio, Fernando, Galileo, Reyna, Guillermo, Yolanda, mis abundantes tíos y a los aún más abundantes primos.

A Alan, Olmo, Santiago, Pablo, Jaime, Diana, Lucy, Viri, Omar, Daniel, Lucía, Román, Pablote, Alex, Karla y toda la gente que pasó por el 202. En general, a los amigos.

A Jorge y Paco, porque además de profesores y asesores, han sido amigos en momentos buenos y no tan buenos, y siempre han tenido oídos para las dudas y consejos para salir de ellas.

A la UNAM y a la gente que hace posible que año tras año brinde cursos y sea un espacio para ejercitar los aspectos que hacen humana a una persona.



# Prefacio

Un *continuo* es un espacio métrico distinto del vacío, compacto y conexo. Dados un continuo  $X$  y un entero positivo  $n$ , se pueden considerar los siguientes hiperespacios de  $X$ :

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es distinto del vacío y cerrado en } X\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ elementos}\},$$

Estos espacios se dotan de la métrica de Hausdorff  $H$ , que los hace a su vez continuos, como está demostrado en [9, Teoremas 3.4 y 3.5] y [7, Lema 2.3, Teorema 2.4].

Al hiperespacio  $F_n(X)$  se le conoce por el *producto simétrico* de  $n$  copias de  $X$ . El hiperespacio  $F_1(X)$  es una copia isométrica de  $X$  que está encajada en los hiperespacios considerados arriba.

Un subconjunto cerrado  $A$  de  $X$  es un *conjunto  $\mathcal{Z}$*  del espacio métrico  $(X, d)$  si para cada  $\epsilon > 0$  existe una función continua  $f_\epsilon : X \rightarrow X \setminus A$ , con  $X \setminus A$  considerado como subespacio métrico de  $(X, d)$ , tal que  $d(x, f_\epsilon(x)) < \epsilon$  para cada  $x$  en  $X$ . Originalmente, Anderson definió en [2, Sección 2] lo que se conoce en la literatura como “Propiedad  $\mathcal{Z}$ ” para los subconjuntos de espacios métricos, de donde surge la noción actual de conjunto  $\mathcal{Z}$ .

Algunos ejemplos de conjuntos  $\mathcal{Z}$  son las fronteras  $\partial[-1, 1]^n$  como subconjuntos de  $[-1, 1]^n$  para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ , considerando la métrica usual de  $[-1, 1]$ . Esto se ve a través de las funciones de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo con regla de correspondencia dada por  $\bar{x} \mapsto (1 - \frac{\epsilon}{2}) \cdot \bar{x}$ , ya que éstas inducen funciones continuas de  $[-1, 1]^n$  en  $[-1, 1]^n \setminus \partial[-1, 1]^n$  con  $\|\bar{x} - (1 - \frac{\epsilon}{2}) \cdot \bar{x}\| < \epsilon$  para todos los  $\bar{x}$  en  $[-1, 1]^n$ . Por otro lado, de la Proposición 1.5.5 de este trabajo se sigue que ningún elemento de  $[-1, 1]^n \setminus \partial[-1, 1]^n$  puede ser un elemento de algún conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $[-1, 1]^n$ , y por lo tanto, cualquier conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $[-1, 1]^n$  debe estar contenido en  $\partial[-1, 1]^n$ .

Otra familia de ejemplos están dados en los conos  $CX$  sobre un espacio compacto y métrico  $X$ . Considérese a  $CX$  como el espacio cociente de

$X \times [0, 1]$  que colapsa  $X \times \{0\}$  en un punto. En este caso, la continuidad de las funciones de la forma  $[x, t] \mapsto [x, (1 - \epsilon) \cdot t]$  implica que el conjunto de clases de equivalencia que están contenidas en  $X \times \{1\}$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $CX$ .

El estudio de los conjuntos  $\mathcal{Z}$  se vio alentado por la caracterización del cubo de Hilbert dada por Toruńczyk [9, Teorema 9.3], y de estos estudios han surgido preguntas como: *¿para qué continuos  $X$  se tiene que  $F_1(X)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $C(X)$ ? ¿ $Y$  en  $2^X$ ?* [9, Pregunta 83.10]. Éstas fueron consideradas en [10, Sección 4] y [11, Sección 3], donde se da un buen número de ejemplos y resultados. En el presente trabajo se considera la siguiente pregunta:

**Pregunta 1.** *¿Para qué continuos  $X$  se tiene que  $F_1(X)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(X)$ ?*

Como un primer acercamiento a este problema, se agrega la condición a  $X$  de ser una gráfica finita y conexa, aunque en el desarrollo del trabajo se muestra que los resultados mostrados para esta familia de gráficas se puede extender a la clase de las gráficas finitas e, incluso, a una clase más grande de continuos. Cabe resaltar que la definición de *Métrica Esférica*, el modelo de  $F_2(\Gamma_3)$  dado en la Sección 2.4 y las proposiciones 1.1.28, 1.5.3, 1.5.5, 2.5.1, 3.3.2, 3.4.1, 3.4.3, 4.2.3 y 4.0.2, que son conceptos y resultados centrales de esta tesis, son originales.

En el primer capítulo de este trabajo se cubren definiciones y resultados de Topología, se da una revisión a algunos conceptos básicos de continuos e hiperespacios y de conjuntos  $\mathcal{Z}$ , se dan ejemplos significativos para el desarrollo del trabajo y se demuestra la Proposición 1.5.5, que es el resultado principal de la tesis.

En los capítulos segundo y tercero se hace un estudio completo para el caso  $n = 2$ , se da una caracterización completa de las gráficas finitas y conexas  $X$  que cumplen que  $F_1(X)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(X)$ , haciendo énfasis en el segundo capítulo sobre el triodo y ocupándose en el tercer capítulo de las gráficas que tienen al triodo como subgráfica.

En el cuarto y último capítulo se da una caracterización completa de los enteros positivos  $n$  para los que  $F_1(I)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(I)$ , donde  $I$  es el arco  $[0, 1]$ . Esta caracterización permite reducir el estudio de la Pregunta 1 a las  $n$  que son pares.

Se considera que el lector tiene conocimientos equivalentes a los temas de un curso de Topología como se imparte en la Facultad de Ciencias de la UNAM, así como nociones de Análisis Matemático y Teoría de Gráficas. Estos requisitos son suficientes para entender todas las proposiciones y

definiciones expuestas, a excepción de la Proposición 1.2.18, para la que se requiere conocer algunos resultados de Homología Singular que se pueden encontrar en [12, Capítulos VII y VIII].

Esta tesis da una respuesta parcial a la Pregunta 1 cuando ésta se restringe a la clase de las gráficas finitas y conexas y a los continuos que tienen arcos o eneodos libres. Sin embargo, surgen nuevas preguntas a partir de los resultados obtenidos, por ejemplo las siguientes:

**Pregunta 2.** *¿Para qué  $n \geq 2$ , con  $n$  par, se tiene que  $F_1(\Gamma_3)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(\Gamma_3)$ ?*

**Pregunta 3.** *¿Es  $F_1(S^1)$  un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(S^1)$  si  $F_1(I)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(I)$ ?*

Las técnicas desarrolladas en esta tesis parecen proveer un camino de investigación sobre estas preguntas, en especial, si la definición de las funciones  $\mathcal{H}_n$  de la Sección 3.2 se pudiera extender a productos simétricos de dimensión mayor que 2, y si la respuesta a la Pregunta 2 fuera “para ninguna”, a través de la Proposición 3.4.1 se podría extender la Proposición 3.4.3 a  $n \geq 2$ . Sin embargo, la dificultad para construir modelos para los productos simétricos de dimensión mayor que 3 representa un obstáculo que aún debe ser resuelto.

El trabajo de Borsuk en [3] y de Bott en [5] para construir un modelo para  $F_3(S^1)$  como cociente de cilindros aún puede proveer información importante para la investigación en la Pregunta 3, aunque la historia de estos artículos es un recordatorio sobre lo delicado que es tratar con este tipo de espacios, ya que Borsuk tomó a  $F_3(S^1)$  por  $S^1 \times S^2$  y Bott lo corrigió poco después al mostrar que en realidad,  $F_3(S^1)$  es homeomorfo a  $S^3$ .



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>III</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos de Topología . . . . .	1
1.2. Homotopía . . . . .	14
1.3. La métrica de Hausdorff . . . . .	25
1.4. Hiperespacios de continuos . . . . .	26
1.5. Conjuntos $\mathcal{Z}$ . . . . .	29
<b>2. El arco, el ciclo y el triodo</b>	<b>35</b>
2.1. El segundo producto simétrico del arco . . . . .	36
2.2. El segundo producto simétrico del ciclo . . . . .	37
2.3. El segundo producto simétrico del triodo . . . . .	39
2.4. Un modelo para $F_2(\Gamma_3)$ . . . . .	41
2.5. $F_1(\Gamma_3)$ no es un conjunto $\mathcal{Z}$ en $F_2(\Gamma_3)$ . . . . .	43
<b>3. El hiperespacio <math>F_2(\Gamma_n)</math></b>	<b>47</b>
3.1. $F_2(\Gamma_n)$ como cociente . . . . .	47
3.2. Funciones $\mathcal{H}_n$ . . . . .	48
3.3. $F_1(\Gamma_n)$ no es subconjunto $\mathcal{Z}$ en $F_2(\Gamma_n)$ . . . . .	51
3.4. Gráficas con eneodos . . . . .	52
<b>4. El espacio <math>F_n(I)</math></b>	<b>55</b>
4.1. El tercer producto simétrico del arco . . . . .	55
4.2. El cono $F_n(I)$ . . . . .	58
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se desarrollan conceptos esenciales de Topología, se da una revisión superficial de Teoría de Homotopía y de Hiperespacios de Continuos, se define el concepto de *conjunto*  $Z$  y se prueban proposiciones que se utilizarán a lo largo del presente trabajo.

### 1.1. Conceptos básicos de Topología

En esta sección se tratan resultados sobre espacios métricos y topológicos que pueden no estar contenidos en un primer curso de Topología. También se profundiza en el concepto de Cono sobre un espacio topológico.

**Ejemplo 1.1.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A$  un subconjunto de  $X$  distinto del vacío. Considérese la función  $d(-, A) : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a)\}_{a \in A}.$$

Como la distancia entre cualesquiera dos puntos de  $X$  es mayor o igual a 0, el conjunto  $\{d(x, a)\}_{a \in A}$  es distinto del vacío y está acotado inferiormente por 0, lo que garantiza la existencia de  $\inf\{d(x, a)\}_{a \in A}$  y muestra que  $d(-, A)$  está bien definida.

Ahora bien, si  $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ , por la desigualdad del triángulo se cumple que para cada  $z$  en  $A$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\epsilon}{2} + d(y, z).$$

Tomando el ínfimo sobre  $A$  en ambos extremos de la desigualdad se obtiene que  $d(x, A) \leq \frac{\epsilon}{2} + d(y, A)$  y, por lo tanto,  $d(x, A) - d(y, A) < \epsilon$ . Siguiendo un proceso análogo se ve que  $d(y, A) - d(x, A) < \epsilon$  y de estas dos desigualdades se sigue  $|d(x, A) - d(y, A)| < \epsilon$ , que implica la continuidad de  $d(-, A)$ .

**Definición 1.1.2.** Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de los espacios topológicos  $X$  y  $Y$  respectivamente, y  $f : X \rightarrow Y$  una función tal, que  $f(A)$  está contenido en  $B$ . Se define la restricción en dominio y contradominio de  $f$  a  $A$  y  $B$  como la función  $\hat{f} : A \rightarrow B$  que tiene la misma regla de correspondencia que  $f$ .

Si  $f$  es continua y se considera a  $A$  y  $B$  con sus respectivas topologías del subespacio, entonces  $\hat{f}$  es continua, ya que si  $B \cap U$  es un abierto de  $B$  con  $U$  abierto en  $Y$ ,  $\hat{f}^{-1}(B \cap U) = i^{-1}(f^{-1}(U))$ , donde  $i$  es la inclusión de  $A$  en  $X$ . Este conjunto es abierto porque tanto  $i$  como  $f$  son funciones continuas.

**Proposición 1.1.3.** Sean  $C_1, \dots, C_m$  subconjuntos cerrados de  $X$  tales que  $\bigcup_{i=1}^m C_i = X$ , y  $\{f_i : C_i \rightarrow Y\}_{i=1}^m$  una familia de funciones continuas. Si  $f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}$  para cualesquiera  $i$  y  $j$  en  $\{1, \dots, m\}$ , entonces existe una función continua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f|_{C_i} = f_i$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, m\}$ .

*Demostración.* Todo  $x$  en  $X$  está en  $C_i$  para alguna  $i$ , por lo que  $f : X \rightarrow Y$  dada por

$$f(x) = f_i(x)$$

es una función bien definida ya que para cada  $x$  en  $C_i \cap C_j$  se cumple que  $f_i(x) = f_j(x)$ , por lo que  $f$  le asigna un único elemento en  $Y$ , y por la definición de  $f$  se ve que  $f|_{C_i} = f_i$ .

Por otro lado, para cada  $C$  cerrado en  $Y$  la continuidad de  $f_i$  implica que  $f_i^{-1}(C)$  es un cerrado en  $C_i$  y, por lo tanto, en  $X$ . De esto se sigue que  $f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^m f_i^{-1}(C)$  es un cerrado en  $X$  por ser unión finita de cerrados, lo que muestra que  $f$  es continua.  $\square$

**Definición 1.1.4.** Sean  $d_1$  y  $d_2$  dos métricas para un conjunto  $X$ . Se dice que  $d_1$  y  $d_2$  son equivalentes si la función  $f : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$  dada por  $f(x) = x$  es un homeomorfismo.

Es claro que las métricas  $d_1$  y  $d_2$  son equivalentes si y sólo si para cada  $\epsilon > 0$  y cada  $x$  en  $X$  existe  $\delta_1(x) > 0$  tal que  $B_{\delta_1(x)}^{d_2}(x) \subset B_\epsilon^{d_1}(x)$  y existe  $\delta_2(x) > 0$  tal que  $B_{\delta_2(x)}^{d_1}(x) \subset B_\epsilon^{d_2}(x)$ .

**Ejemplo 1.1.5.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, la función  $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$d'(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}$$

es una métrica equivalente a  $d$  en  $X$ . Esto es porque

- $d'$  es no negativa;
- $d'(x, y) = 0$  si y sólo si  $d(x, y) = 0$  y esto se cumple si y sólo si  $x = y$ ;
- $d'$  es simétrica;
- la desigualdad del triángulo para  $d'$  es consecuencia de la desigualdad del triángulo para  $d$ , ya que

$$d'(x, z) \leq \min \{d(x, z), 1\}.$$

Si alguno de  $d(x, y)$  y  $d(y, z)$  es mayor o igual que 1, entonces uno entre  $d'(x, y)$  y  $d'(y, z)$  es 1, y se preserva la desigualdad del triángulo.

Si tanto  $d(x, y)$  como  $d(y, z)$  son menores que 1,  $d(x, y) = d'(x, y)$  y  $d(y, z) = d'(y, z)$ , por lo que

$$d'(x, y) + d'(y, z) \geq d(x, z) \geq d'(x, z);$$

- para cada  $\epsilon > 0$  se tiene  $B_\epsilon^d(x) \subset B_\epsilon^{d'}(x)$  y  $B_\delta^{d'}(x) \subset B_\epsilon^d(x)$ , donde  $\delta = \min \{\frac{1}{2}, \epsilon\}$ , para cada  $x$  en  $X$ .

**Proposición 1.1.6.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico compacto,  $(Y, \rho)$  métrico y  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  una función continua, entonces  $f$  es uniformemente continua.

*Demostración.* Sean  $\epsilon > 0$  y  $\delta(x) > 0$  tal que

$$f \left( B_{\delta(x)}^d(x) \right) \subset B_{\epsilon/2}^\rho(f(x))$$

para  $x$  en  $X$ . La familia  $\left\{ B_{\delta(x)/2}^d(x) \right\}_{x \in X}$  es una cubierta abierta del espacio compacto  $X$ , por lo que existe un conjunto finito de elementos de  $X$  dado por  $\{x_1, \dots, x_k\}$  tal que  $\left\{ B_{\delta(x_i)/2}^d(x_i) \right\}_{i=1}^k$  es cubierta abierta de  $X$ .

Sea  $\delta = \min \{ \delta(x_i)/2 \}_{i=1}^k$  y tómanse puntos  $y$  y  $z$  tales que  $d(y, z) < \delta$ . Si  $y$  está en  $B_{\delta(x_j)/2}^d(x_j)$  se tiene que

$$d(z, x_j) \leq d(z, y) + d(y, x_j) < \delta + \delta(x_j)/2 \leq \delta(x_j)$$

y por la definición de  $\delta(x_j)$ , se sigue que

$$\rho(f(y), f(z)) \leq \rho(f(y), f(x_j)) + \rho(f(x_j), f(z)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

lo que demuestra que  $f$  es uniformemente continua.  $\square$

**Definición 1.1.7.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico no vacío. Se dice que  $X$  es un continuo si es métrico, compacto y conexo.

**Definición 1.1.8.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que un subconjunto  $A$  de  $X$  es acotado si para todo  $x$  en  $X$  existe  $\epsilon(x) > 0$  tal que  $A$  está contenido en  $B_{\epsilon(x)}(x)$ .

**Proposición 1.1.9.** Sea  $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^m$  una familia de espacios métricos. Entonces la topología producto en el espacio  $\prod_{i=1}^m X_i$  está generada por la métrica  $d_\infty$  dada por

$$d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{d_i(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$$

donde  $x_i$  y  $y_i$  son las coordenadas  $i$ -ésimas de  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ , respectivamente.

*Demostración.* La función  $d_\infty$  es una métrica ya que

- es una función no negativa;
- $d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  si y sólo si  $\max\{d_i(x_i, y_i)\}_{i=1}^m = 0$ , lo que es equivalente a que para cada  $i$ ,  $d_i(x_i, y_i) = 0$ ;
- es simétrica;
- cumple la desigualdad del triángulo, ya que si  $d_a(x_a, z_a) = d_\infty(\bar{x}, \bar{z})$ , como  $d_a(x_a, y_a) \leq d_\infty(\bar{x}, \bar{y})$  y  $d_a(y_a, z_a) \leq d_\infty(\bar{y}, \bar{z})$  se tiene que

$$d_\infty(\bar{x}, \bar{z}) \leq d_a(x_a, y_a) + d_a(y_a, z_a) \leq d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) + d_\infty(\bar{y}, \bar{z}).$$

Nótese que para  $\epsilon > 0$  se tiene que  $B_\epsilon^{d_\infty}(\bar{x}) = \prod_{i=1}^m B_\epsilon^{d_i}(x_i)$  porque dado  $\bar{y}$  en  $B_\epsilon^{d_\infty}(\bar{x})$ , se cumple que  $\max\{d_i(x_i, y_i)\}_{i=1}^m < \epsilon$  y por lo tanto  $y_i$  está en  $B_\epsilon^{d_i}(x_i)$ .

Ahora, si  $\bar{y}$  está en  $\prod_{i=1}^m B_\epsilon^{d_i}(x_i)$  se tiene que  $d_i(x_i, y_i) < \epsilon$  para cada  $i$ , por lo que  $\max\{d_i(x_i, y_i)\}_{i=1}^m < \epsilon$  y entonces,  $\bar{y}$  en  $B_\epsilon^{d_\infty}(\bar{x})$ . Esto quiere decir que las bolas de la métrica  $d_\infty$  son abiertos de la topología producto, por lo que la topología inducida por  $d_\infty$  está contenida en la topología producto.

Sean  $U$  un abierto en  $\prod_{i=1}^m X_i$  y  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  un elemento de  $U$ . Por la definición de la topología producto, para cada  $i$  existe un  $U_i$  que es abierto en  $X_i$  tal que  $\bar{x}$  está en  $\prod_{i=1}^m U_i$  que a su vez está contenido en  $U$ . Dado que cada  $U_i$  es abierto existe  $\epsilon_i > 0$  tal que  $B_{\epsilon_i}^{d_i}(x_i) \subset U_i$ . Si  $\epsilon = \min\{\epsilon_i\}_{i=1}^m$ , entonces  $B_\epsilon^{d_i}(x_i)$  está contenido en  $U_i$  para cada  $i$  y por lo tanto  $\bar{x} \in \prod_{i=1}^m B_\epsilon^{d_i}(x_i) = B_\epsilon^{d_\infty}(\bar{x}) \subset U$ , por lo que  $U$  es un abierto para la métrica  $d_\infty$  y se sigue la proposición.  $\square$

**Definición 1.1.10.** Sean  $\mathcal{A}$  un conjunto distinto del vacío y  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  una familia de espacios topológicos. Se define la unión disjunta de los  $X_\alpha$  como:

$$\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha \times \{\alpha\}),$$

que se denota por  $\bigsqcup X_\alpha$  cuando no haya confusión sobre el conjunto sobre el que se toma unión. Para cada  $\beta$  se define la función  $i_\beta : X_\beta \rightarrow \bigsqcup X_\alpha$  dada por  $i_\beta(x) = (x, \beta)$ . Sea  $\tau$  la topología de  $\bigsqcup X_\alpha$  generada por los conjuntos de la forma  $i_\beta(U_\beta)$  donde  $U_\beta$  es abierto en  $X_\beta$ . Se llama a esta topología la topología de la unión disjunta y se define el coproducto de los espacios  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  como el conjunto  $\bigsqcup X_\alpha$  con la topología  $\tau$ .

**Proposición 1.1.11.** Sean  $X$  un espacio topológico,  $\mathcal{A}$  un conjunto distinto del vacío,  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  una familia de espacios topológicos y  $\{f_\alpha : X_\alpha \rightarrow X\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  una familia de funciones continuas, entonces existe una única función continua  $f : \bigsqcup X_\alpha \rightarrow X$  tal que, para cada  $\beta$  en  $\mathcal{A}$ ,  $f_\beta = f \circ i_\beta$ .

*Demostración.* Sea  $f : \bigsqcup X_\alpha \rightarrow X$  la función definida por

$$f(x, \beta) = f_\beta(x).$$

Para cada  $U$  abierto en  $X$  se tiene que

$$\begin{aligned} (x, \beta) \in f^{-1}(U) &\Leftrightarrow f(x, \beta) \in U \Leftrightarrow f_\beta(x) \in U \Leftrightarrow x \in f_\beta^{-1}(U) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, \beta) \in i_\beta(f_\beta^{-1}(U)) \Leftrightarrow (x, \beta) \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} i_\alpha(f_\alpha^{-1}(U)), \end{aligned}$$

por lo que los conjuntos  $f^{-1}(U)$  y  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} i_\alpha(f_\alpha^{-1}(U))$  coinciden y entonces, como este último es un abierto por ser cada  $f_\alpha$  continua,  $f$  es continua.

Ahora bien, si  $g$  fuera otra función continua tal que  $f_\beta = g \circ i_\beta$ , se tendría que  $g(x, \beta) = f_\beta(x)$  para cada  $\beta$ , por lo que  $g(x, \beta) = f(x, \beta)$  para cada  $x$  en  $X_\beta$  y cada  $\beta$ , lo que quiere decir que  $g = f$ .  $\square$

**Proposición 1.1.12.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $\sim$  una relación de equivalencia sobre  $X$ ,  $X/\sim$  el conjunto de clases de equivalencia de  $\sim$  y

$$\tau_\sim = \left\{ U \in \mathcal{P}(X/\sim) \mid \bigcup U \text{ es abierto en } X \right\},$$

entonces  $\tau_\sim$  es una topología en  $X/\sim$ .

*Demostración.* Se tiene que

- $\bigcup \emptyset$  es el vacío y  $\bigcup X/\sim$  es  $X$  y, por lo tanto,  $\emptyset$  y  $X/\sim$  están en  $\tau_\sim$ ;
- si  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  es una familia de elementos de  $\tau_\sim$  y  $U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ , entonces  $\bigcup U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$  y, dado que  $\bigcup U_\alpha$  es abierto en  $X$  para cada  $\alpha$ ,  $\bigcup U$  es un abierto en  $X$  y  $U$  está en  $\tau_\sim$ ;
- si  $U$  y  $V$  están en  $\tau_\sim$ , entonces  $\bigcup(U \cap V) = (\bigcup U) \cap (\bigcup V)$  porque cada  $x$  en  $X$  pertenece a un único elemento de  $X/\sim$  y, como  $(\bigcup U)$  y  $(\bigcup V)$  son abiertos en  $X$ , sucede que  $\bigcup(U \cap V)$  es un abierto en  $X$  y, por lo tanto,  $U \cap V$  está en  $\tau_\sim$ .

Esto muestra que  $\tau_\sim$  es una topología para  $X/\sim$ . □

**Definición 1.1.13.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\sim$  una relación de equivalencia sobre  $X$ . Se le llama espacio cociente de  $X$  dado por  $\sim$  a espacio topológico dado por  $(X/\sim, \tau_\sim)$ .

Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función entre conjuntos, entonces  $f$  define una relación de equivalencia en  $X$ , a la que se denotará  $\sim_f$ , y que está dada por

$$a \sim_f b \text{ si y sólo si } f(a) = f(b).$$

Hay ocasiones en que se requiere “colapsar” un subconjunto  $A$  de un espacio topológico a un solo punto preservando la estructura topológica fuera de este conjunto. En ese caso se define una relación de equivalencia  $\sim_A$  dada por

$$a \sim_A b \text{ si y sólo si } a = b \text{ o } a \text{ y } b \text{ pertenecen a } A,$$

y se denota a  $X/\sim_A$  como  $X/A$ .

**Proposición 1.1.14.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\sim$  una relación de equivalencia en  $X$ . La función  $\pi : X \rightarrow X/\sim$ , que asigna a cada elemento de  $X$  la clase de equivalencia de  $\sim$  a la que pertenece, es continua.

*Demostración.* Para cada  $U$  abierto en  $X/\sim$  se tiene que  $\bigcup U$  es un abierto en  $X$  y, como  $\pi^{-1}(U)$  está formado por los  $x$  tales que su clase de equivalencia  $[x]$  está en  $U$ , se sigue que  $\pi^{-1}(U) = \bigcup U$  y, por lo tanto,  $\pi$  es continua. □

A la función  $\pi$  de la proposición anterior se le conoce como *la función cociente de  $X$  a  $X/\sim$* .

**Proposición 1.1.15.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua, entonces existe una única función continua  $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$  tal que  $f = \bar{f} \circ \pi$ , donde  $\pi$  es la función cociente de  $X$  a  $X/\sim_f$ .

*Demostración.* Defínase  $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$  por

$$\bar{f}[x] = f(x).$$

Esta función está bien definida, ya que todos los elementos de  $[x]$  tienen la misma imagen bajo  $f$ , y cumple que  $f = \bar{f} \circ \pi$ . De esta relación se sigue que  $\bar{f}$  es continua, ya que para cada abierto  $U$  de  $Y$  se tiene que  $f^{-1}(U) = \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(U))$ , y como  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$  por ser  $f$  continua, la definición de la topología cociente en  $X/\sim_f$  da que  $\bar{f}^{-1}(U)$  es un abierto.

Si  $g : X/\sim_f \rightarrow Y$  fuera una función continua tal que  $f = g \circ \pi$ , entonces se tendría que  $g[x] = f(x) = \bar{f}[x]$  para cada  $[x]$  en  $X/\sim_f$ , por lo que  $g = \bar{f}$ , mostrando la unicidad de  $\bar{f}$ .  $\square$

**Definición 1.1.16.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y suprayectiva. Se dice que  $f$  es una identificación cuando se cumple que cada subconjunto  $U$  de  $Y$  es abierto si y sólo si  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ .

**Proposición 1.1.17.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una identificación, entonces  $Y$  es homeomorfo a  $X/\sim_f$ .

*Demostración.* Sea  $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$  como en la Proposición 1.1.15, entonces  $f = \bar{f} \circ \pi$ . Como  $f$  es suprayectiva, la función  $\bar{f}$  es suprayectiva, y como es inyectiva por construcción, es biyectiva y continua. Además, si  $U$  es un abierto en  $X/\sim_f$ , se cumple que  $\bar{f}(U)$  es un abierto en  $Y$ , ya que

$$f^{-1}(\bar{f}(U)) = (\bar{f} \circ \pi)^{-1}(\bar{f}(U)) = \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(\bar{f}(U))) = \pi^{-1}(U),$$

que es abierto en  $X$ . De esto se sigue que  $\bar{f}$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Proposición 1.1.18.** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  continua y suprayectiva. Si  $X$  es compacto y  $Y$  es de Hausdorff, entonces  $f$  es una identificación.

*Demostración.* Todo  $C \subset X$  cerrado es compacto, por lo que  $f(C) \subset Y$  es compacto y, dado que  $Y$  es de Hausdorff, cerrado. Entonces,  $f$  es cerrada, suprayectiva y continua. Se sigue que  $B \subset Y$  es cerrado si y sólo si  $f^{-1}(B)$  es cerrado y, por lo tanto,  $f$  es una identificación.  $\square$

**Proposición 1.1.19.** Sean  $f_1 : X \rightarrow Y$  y  $f_2 : Y \rightarrow Z$  identificaciones. Entonces la función  $f = f_2 \circ f_1$  es una identificación de  $X$  a  $Z$ .

*Demostración.* Dado que  $f_1$  y  $f_2$  son continuas y suprayectivas,  $f$  es continua y suprayectiva. Para ver que  $f$  es una identificación se necesita ver que  $C \subset Z$  es cerrado si y sólo si  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$ . Pero  $C$  es cerrado en  $Z$  si y sólo si  $f_2^{-1}(C)$  es cerrado en  $Y$  por ser  $f_2$  una identificación, y a su vez,  $f_2^{-1}(C)$  es cerrado si y sólo si  $f_1^{-1}(f_2^{-1}(C)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(C) = f^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$ . Se sigue que  $f$  es una identificación.  $\square$

**Lema 1.1.20.** *Sean  $X_1, Y_1, X_2$  y  $Y_2$  espacios topológicos. Si  $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  y  $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  son identificaciones y  $g : X_1 \rightarrow X_2$  es una función continua tal que  $f_2(g(a)) = f_2(g(b))$  siempre que  $f_1(a) = f_1(b)$ , entonces existe una única función continua  $\bar{g} : Y_1 \rightarrow Y_2$  tal que  $\bar{g} \circ f_1 = f_2 \circ g$ .*

*Demostración.* Sea  $y$  un elemento de  $Y_1$ . Como  $f_1$  es suprayectiva existe un elemento  $x$  en  $X_1$  tal que  $f_1(x) = y$  y se define  $\bar{g} : Y_1 \rightarrow Y_2$  por

$$\bar{g}(y) = f_2(g(x)),$$

que está bien definida, ya que para cualesquiera  $x_1$  y  $x_2$  en  $X_1$  tales que  $f_1(x_1) = f_1(x_2) = z$ , la hipótesis garantiza que  $f_2(g(x_1)) = f_2(g(x_2))$  y entonces, el elemento  $\bar{g}(z)$  está bien definido.

La función  $\bar{g}$  cumple que  $\bar{g} \circ f_1 = f_2 \circ g$  y, dado  $U$  abierto en  $Y_2$ , debe suceder que  $f_1^{-1}(\bar{g}^{-1}(U)) = g^{-1}(f_2^{-1}(U))$ , y este último conjunto es un abierto por ser  $f_2$  y  $g$  continuas. Como  $f_1$  es una identificación,  $\bar{g}^{-1}(U)$  es un abierto y, por lo tanto,  $\bar{g}$  es continua.

Si  $g' : Y_1 \rightarrow Y_2$  es otra función continua tal que  $g' \circ f_1 = f_2 \circ g$ , para cada elemento  $y_0$  de  $Y_1$  debe suceder que  $g'(y_0) = f_2(g(x_0))$ , donde  $x_0$  es un elemento de  $X_1$  tal que  $f_1(x_0) = y_0$ , y entonces  $\bar{g}(y_0) = g'(y_0)$ , lo que muestra la unicidad de la función  $\bar{g}$ .  $\square$

A continuación se define el concepto de cono sobre un espacio topológico y se da un ejemplo de una métrica en el cono para el caso en que el espacio base es compacto.

**Definición 1.1.21.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Se define  $CX$ , el cono sobre  $X$ , como el espacio cociente de  $X \times [0, 1]$  que identifica a los puntos de  $X \times \{0\}$ .*

Si  $(x, t)$  es un elemento de  $X \times I$ , entonces se denota por  $[x, t]$  al elemento de  $CX$  al cual pertenece y se denota por  $[\ast, 0]$  a la clase de equivalencia cuyos elementos son las parejas que tienen a 0 en su segunda coordenada.

Nótese que la función cociente de  $X \times [0, 1]$  en  $X \times [0, 1]/X \times \{0\}$  es inyectiva en  $X \times (0, 1]$ .

En adelante se denota al conjunto  $[0, 1]$  por  $I$  y por  $S^n$  al conjunto

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\bar{x}\| = 1\},$$

que es la esfera de dimensión  $n$ .

**Ejemplo 1.1.22.** *El espacio  $B^n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x}\| \leq 1\}$  es homeomorfo al cono sobre  $S^{n-1}$ . Para ver esto, considérese la función  $f : S^{n-1} \times I \rightarrow B^n$  dada por*

$$f(s, t) = t \cdot s,$$

que es continua por ser polinomial. Para cada  $\bar{x}$  en  $B^n$  distinto de  $\bar{0}$ , el elemento  $\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$  está en  $S^{n-1}$  y  $\|\bar{x}\|$  está en  $I$ , por lo que  $(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}, \|\bar{x}\|)$  está en  $S^{n-1} \times I$  y su imagen bajo  $f$  es  $\bar{x}$ . Por otro lado,  $\bar{0}$  es la imagen de  $S^{n-1} \times \{0\}$  bajo  $f$ , lo que muestra que  $f$  es suprayectiva y, dado que  $S^{n-1} \times I$  es compacto y  $B^n$  es de Hausdorff, que es una identificación.

Por la Proposición 1.1.17,  $B^n$  es homeomorfo al cociente de  $S^{n-1} \times I$  inducido por  $f$ , que es inyectiva en  $S^{n-1} \times (0, 1]$  e identifica a  $S^{n-1} \times \{0\}$  en un punto. De aquí se sigue que  $\sim_f$  y  $\sim_{S^{n-1} \times \{0\}}$  coinciden, por lo que  $(S^{n-1} \times I)/\sim_f$  es el cono sobre  $S^{n-1}$ , lo que muestra que  $CS^{n-1}$  y  $B^n$  son homeomorfos.

**Proposición 1.1.23.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua, entonces la función  $F : CX \rightarrow CY$  definida por*

$$F[x, t] = [f(x), t]$$

es continua y se le llama la función inducida por  $f$  en  $CX$ .

*Demostración.* Considérese la función  $f \times Id_I : X \times I \rightarrow Y \times I$ , que es continua por ser el producto de funciones continuas. Sean  $(x_1, t_1)$  y  $(x_2, t_2)$  dos elementos de  $X \times I$  relacionados por  $\sim_{X \times \{0\}}$ . Si  $t_1$  es distinto de 0, se tiene que  $x_1 = x_2$  y  $t_1 = t_2$ , por lo que  $f \times Id_I(x_1, t_1) = f \times Id_I(x_2, t_2)$ .

Si  $t_1 = 0$ , entonces  $t_2 = 0$  y, por lo tanto,  $f \times Id_I(x_1, t_1) = (f(x_1), 0)$  y  $f \times Id_I(x_2, t_2) = (f(x_2), 0)$ . En ambos casos se ve que  $f \times Id_I(x_1, t_1)$  y  $f \times Id_I(x_2, t_2)$  están relacionados por  $\sim_{Y \times \{0\}}$ . Luego, el Lema 1.1.20 muestra que  $f \times Id_I$  induce una función continua  $F : CX \rightarrow CY$  dada por

$$F[x, t] = [f \times Id_I(x, t)],$$

donde  $[f \times Id_I(x, t)]$  es la clase de equivalencia de  $f \times Id_I(x, t) = (f(x), t)$ , que es justamente  $[f(x), t]$ , por lo que  $F$  es la función buscada.  $\square$

**Definición 1.1.24.** Sea  $X$  un espacio topológico. Una métrica esférica para  $CX$  es una métrica  $D : CX \times CX \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple que

- induce la topología del cono en  $CX$ ;
- $D([x_1, t], [x_2, t]) = t \cdot D([x_1, 1], [x_2, 1])$ ;
- $D([*, 0], [x, t]) = t$ .

Surge la pregunta de para qué conos es posible encontrar una métrica esférica. Se muestra a continuación un ejemplo de un cono sobre un espacio métrico para el que no es posible encontrar una métrica esférica.

**Ejemplo 1.1.25.** El cono sobre el espacio  $N = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$  con su métrica discreta no tiene métricas esféricas, ya que de tener una, a saber  $D$ , para cada abierto  $U$  en la topología del cono que tuviera a  $[*, 0]$  como elemento, existiría un  $\epsilon > 0$  tal, que

$$[* , 0] \in B_\epsilon^D[* , 0] = \{[x, t] \in CN \mid t < \epsilon\} \subset U.$$

Sin embargo, el conjunto

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{[1/n, t] \in CN \mid t < 1/n\}$$

es un abierto de  $CN$  con la topología del cono, porque la preimagen de  $U$  en  $N \times I$  bajo la función cociente es el conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1/n\} \times [0, 1/n),$$

que es un abierto en  $N \times I$  por ser  $\{1/n\}$  y  $[0, 1/n)$  abiertos en  $N$  y en  $I$  respectivamente. Como para cada  $\epsilon > 0$  existe  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $1/n < \epsilon/2$ , es claro que  $[1/n, \epsilon/2]$  no está en  $U$ , por lo que  $B_\epsilon^D[* , 0]$  no está contenido en  $U$ , lo cual es una contradicción obtenida de suponer la existencia de  $D$ .

Que  $X$  sea métrico no es suficiente para garantizar la existencia de una métrica esférica en  $CX$ , pero si  $X$  es compacto, entonces existe al menos una, que se construirá a continuación.

**Definición 1.1.26.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que  $d$  está acotada por 1 si para cualesquiera  $x$  y  $y$  en  $X$  se tiene que  $d(x, y) \leq 1$ .

**Proposición 1.1.27.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si  $d$  está acotada por 1, entonces la función  $D : CX \times CX \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$D([x, r], [y, s]) = \begin{cases} |r - s| + \min\{r, s\} \cdot d(x, y), & \text{si } r, s \neq 0; \\ |r - s|, & \text{si } r = 0 \text{ o bien } s = 0, \end{cases}$$

es una métrica en  $CX$  que cumple que  $D([x, t], [y, t]) = t \cdot d(x, y)$ .

*Demostración.* La función  $D$  está bien definida, ya que si  $[x_1, r_1] = [x_2, r_2]$ , entonces  $r_1 = r_2$ . Dado el caso en que  $r_1$  es distinto de 0, se tiene que  $x_1 = x_2$  y por lo tanto

$$D([x_1, r_1], [y, s]) = D([x_2, r_2], [y, s])$$

para todo  $[y, s]$  en  $CX$ . Si  $r_1 = 0$ , entonces

$$D([x_1, r_1], [y, s]) = s = D([x_2, r_2], [y, s]).$$

Esto se puede repetir tomando dos representantes de la clase  $[y, s]$ , lo que muestra que  $D$  está bien definida.

Ahora bien,  $D$  cumple las siguientes propiedades:

1.  $D$  es claramente no negativa;
2. directamente de la definición, se ve que  $D([x, r], [x, r]) = 0$ . Por otro lado,  $D([x, r], [y, s]) \geq |r - s|$ , por lo que  $D([x, r], [y, s]) = 0$  implica que  $r = s$ . Si  $r = s = 0$ , entonces  $[x, r] = [y, s]$ , y cuando  $r$  y  $s$  no son 0, sucede que  $D([x, r], [y, s]) = r \cdot d(x, y)$ , por lo que  $x = y$ , y entonces  $[x, r] = [y, s]$ , lo que muestra que  $D([x, r], [y, s]) = 0$  si y sólo si  $[x, r] = [y, s]$ ;
3. la función  $D$  es suma de funciones simétricas y, por lo tanto, es simétrica;
4. si  $[x, r]$ ,  $[y, s]$  y  $[z, t]$  están en  $CX$  y  $\min\{r, s, t\}$  es  $r$  o  $t$ , se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\min\{r, t\} \leq \min\{r, s\},$$

$$\min\{r, t\} \leq \min\{t, s\},$$

y dado que  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  por la desigualdad del triángulo para  $d$ , se sigue que

$$\min\{r, t\} \cdot d(x, z) \leq \min\{r, s\} \cdot d(x, y) + \min\{s, t\} \cdot d(y, z).$$

Esta desigualdad sumada a  $|r - t| \leq |r - s| + |s - t|$  muestra que

$$D([x, r], [z, t]) \leq D([x, r], [y, s]) + D([y, s], [z, t]).$$

Si  $s$  es menor que  $r$  y que  $t$ , y supóngase sin pérdida de generalidad que  $r \leq t$ , entonces

$$D([x, r], [y, s]) + D([y, s], [z, t]) = t - r + 2(r - s) + s \cdot (d(x, y) + d(y, z)).$$

Como se supuso que  $d(x, y)$  y  $d(y, z)$  son ambos menores o iguales que 1, se tiene que  $2(r - s) \geq (r - s) \cdot (d(x, y) + d(y, z))$ , de donde se sigue que

$$D([x, r], [y, s]) + D([y, s], [z, t]) \geq t - r + r \cdot (d(x, y) + d(y, z))$$

y el término de la derecha es mayor o igual que  $D([x, r], [z, t])$  por la desigualdad del triángulo para  $d$ , por lo que

$$D([x, r], [z, t]) \leq D([x, r], [y, s]) + D([y, s], [z, t]).$$

Estos dos casos muestran la desigualdad del triángulo para  $D$ ;

por lo que  $D$  es una métrica en  $CX$ , y dado que  $|t - t| = 0$  y  $\min\{t\} = t$ , se tiene que  $D([x, t], [y, t]) = t \cdot d(x, y)$ .  $\square$

**Proposición 1.1.28.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si  $X$  es compacto, entonces el cono en  $CX$  tiene una métrica esférica.*

*Demostración.* Considérese la métrica  $d'$  obtenida a partir de  $d$  siguiendo el Ejemplo 1.1.5. Esta métrica está acotada por 1 y es equivalente a  $d$ , por lo que es claro que el cono sobre  $(X, d)$  y el cono sobre  $(X, d')$  coinciden.

Sea  $D$  la métrica para  $CX$  de la Proposición 1.1.27 definida a partir de  $d'$ . Para probar que la topología inducida por  $D$  coincide con la topología de cono, se mostrará que cada bola de  $D$  contiene un abierto de la topología del cono de  $CX$  que tiene a su centro como elemento y, a su vez, que dados un punto en un abierto de la topología del cono, existe una bola de  $D$  a la que pertenece a dicho punto que está contenida en el abierto.

De la definición de  $D$  se ve que

$$B_\epsilon^D[* , 0] = \{[x, t] \in CX \mid t < \epsilon\}.$$

La preimagen de este conjunto bajo la función cociente de  $X \times I$  en  $CX$  es el abierto  $X \times [0, \epsilon)$ , por lo que  $B_\epsilon^D[* , 0]$  es un abierto en la topología del cono.

Por otro lado, si  $U$  es un abierto en la topología del cono que tiene a  $[\ast, 0]$  como elemento, la preimagen de  $U$  bajo la función cociente es un abierto de  $X \times I$  que contiene a  $X \times \{0\}$ . Entonces, para cada  $x$  en  $X$  existe un abierto de la forma  $U_x \times [0, \delta_x)$ , donde  $U_x$  es un abierto de  $X$  al que pertenece  $x$ , que está contenido en la preimagen de  $U$ . Dado que  $X$  es compacto, existen  $x_1, \dots, x_n$  en  $X$  tales que la familia  $\{U_{x_i} \times [0, \delta_{x_i})\}_{i=1}^n$  cubre a  $X \times \{0\}$ .

Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ . Como cada  $U_{x_i} \times [0, \delta_{x_i})$  está contenido en la preimagen de  $U$ , se tiene que  $X \times [0, \delta)$  está contenido en esta preimagen, pero este conjunto es justamente la preimagen de  $B_\delta^D[\ast, 0]$ , por lo que éste está contenido en  $U$ .

Ahora bien, dado que  $CX \setminus \{[\ast, 0]\}$  es homeomorfo a  $X \times (0, 1]$ , para terminar la prueba basta ver que para cada bola alrededor de  $[x, t]$  con  $t > 0$  existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que el conjunto  $B_{\epsilon_1}^{d'}(x) \times (t - \epsilon_1, t + \epsilon_1)$  está contenido en dicha bola, y a su vez, que para cada  $\epsilon$  exista un  $\epsilon_2 > 0$  tal que la bola de radio  $\epsilon_2$  centrada en  $[x, t]$  esté contenida en  $B_\epsilon^{d'}(x) \times (t - \epsilon, t + \epsilon)$ .

Sean  $\epsilon, t > 0$  y  $0 < \epsilon_1 < \min\{\frac{\epsilon}{3}, 1\}$ , entonces

$$B_{\epsilon_1}^{d'}(x) \times (t - \epsilon_1, t + \epsilon_1) \subset B_\epsilon^D[x, t],$$

ya que cualquier  $[y, s]$  en  $B_{\epsilon_1}^{d'}(x) \times (t - \epsilon_1, t + \epsilon_1)$  cumple que  $|s - t| < \epsilon_1$  y  $\min\{s, t\} \cdot d'(x, y) < t \cdot \epsilon_1 \leq \epsilon_1$ , por lo que  $D([x, t], [y, s]) < \epsilon$ .

Ahora, si  $\epsilon_2 = t \cdot \epsilon$  y  $[y, s]$  está en  $B_{\epsilon_2}^D[x, t]$ , se cumple que  $|s - t| < \epsilon_2 \leq \epsilon$  y si  $d'(x, y) \geq \epsilon$ , se tendría que  $|s - t| + \min\{s, t\} \cdot d'(x, y) < t \cdot d(x, y)$ . Si  $\min\{s, t\}$  es  $t$ , esto da lugar a una contradicción; y si es  $s$ , se tiene que  $t - s < (t - s) \cdot d'(x, y)$  y por lo tanto  $1 < d'(x, y)$ , que también es una contradicción. Esto muestra que  $[y, s]$  está en  $B_\epsilon^{d'}(x) \times (t - \epsilon, t + \epsilon)$  y de esto se sigue que  $D$  induce la topología del cono en  $CX$ .

Para terminar la demostración, se hace notar que de la definición de  $D$  se tiene que

$$D([x, t], [y, t]) = t \cdot d(x, y) = t \cdot D([x, 1], [y, 1])$$

y que

$$D([x, t], [\ast, 0]) = t,$$

por lo que  $D$  es una métrica esférica para  $CX$ .  $\square$

El concepto de métrica esférica será esencial para estudiar los Conjuntos  $\mathcal{Z}$  en conos, como se verá más adelante en este capítulo.

## 1.2. Homotopía

**Definición 1.2.1.** *Dos funciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas, y se escribe  $f \simeq g$ , si existe una función continua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ . Se dice que la función  $H$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$ , y se denota por  $H : f \simeq g$  cuando se quiere hacer explícita la homotopía entre  $f$  y  $g$ .*

**Ejemplo 1.2.2.** *Sean  $A \subset \mathbb{R}^m$  convexo y  $\sigma_1, \sigma_2 : S^n \rightarrow A$  funciones continuas. Entonces, la función  $H : (S^n \times I) \rightarrow A$  dada por*

$$H(s, t) = \sigma_1(s) + t \cdot (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))$$

*está bien definida por la convexidad de  $A$  y es una homotopía entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Esto se sigue de que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son continuas, por lo que su resta es continua y, entonces,  $t \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)$  es continua en  $S^n \times I$ . De aquí se ve que  $H$  es continua y, como además cumple que  $H|_{S^n \times \{0\}} = \sigma_1$  y  $H|_{S^n \times \{1\}} = \sigma_2$ , es una homotopía entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .*

La relación  $\simeq$  es de equivalencia en  $C(X, Y)$ , donde  $C(X, Y)$  denota al conjunto de funciones continuas con dominio  $X$  y contradominio  $Y$ . Esto se puede ver ya que

- la función  $H : X \times I \rightarrow Y$  dada por

$$H(x, t) = f(x)$$

es continua para cada  $f$  en  $C(X, Y)$ , por ser  $H^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times I$  para cada  $A$  contenido en  $Y$ . Luego,  $H$  es una homotopía de  $f$  a  $f$  y, por lo tanto,  $\simeq$  es reflexiva;

- si  $H : f \simeq g$ , entonces  $g \simeq f$ , ya que la función  $- : I \rightarrow I$  dada por  $-(t) = 1 - t$  es polinomial y por lo tanto continua. La función producto  $R = Id_X \times -$  es continua y entonces la función  $\hat{H} = H \circ R : X \times I \rightarrow Y$  es continua, por lo que  $\hat{H} : g \simeq f$ , ya que  $\hat{H}(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$  y  $\hat{H}(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$ , lo que hace a  $\simeq$  simétrica;
- si  $G : f \simeq g$  y  $H : g \simeq h$ , entonces la función  $F : X \times I \rightarrow Y$  dada por

$$F(x, t) = \begin{cases} G(x, 2t), & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ H(x, 2t - 1), & \text{si } t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

es continua por la Proposición 1.1.3, por ser continua en los conjuntos  $X \times [0, \frac{1}{2}]$  y  $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ . Como  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = h(x)$ , se tiene que  $F : f \simeq h$ , por lo que  $\simeq$  es transitiva.

**Proposición 1.2.3.** *Si  $f_1 \simeq g_1 : X \rightarrow Y$  y  $f_2 \simeq g_2 : Y \rightarrow Z$ , entonces  $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$ .*

*Demostración.* Sean  $H_1$  una homotopía entre  $f_1$  y  $g_1$ , y  $H_2$  una homotopía entre  $f_2$  y  $g_2$ . Como  $H_1$  y  $f_2$  son continuas se sigue que  $f_2 \circ H_1 : X \times I \rightarrow Z$  es continua, y dado que  $(f_2 \circ H_1)(x, 0) = f_2(f_1(x))$  y  $(f_2 \circ H_1)(x, 1) = f_2(g_1(x))$ , se tiene que  $f_2 \circ H_1$  es una homotopía entre  $f_2 \circ f_1$  y  $f_2 \circ g_1$ .

Por otro lado, se define  $H = H_2 \circ (g_1 \times Id_I) : X \times I \rightarrow Z$ , es decir

$$H(x, t) = H_2(g_1(x), t).$$

Dado que  $H_2$ ,  $g_1$  e  $Id_I$  son continuas, la función  $H$  es continua y cumple que  $H(x, 0) = f_2(g_1(x))$  y que  $H(x, 1) = g_2(g_1(x))$ , por lo que es una homotopía entre  $f_2 \circ g_1$  y  $g_2 \circ g_1$ . La transitividad de  $\simeq$  da que  $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$ .  $\square$

Se dice que una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es homotópica a una constante si se tiene que  $f \simeq c_y$ , donde  $c_y$  denota a la función constante con imagen  $\{y\}$ .

**Definición 1.2.4.** *Se dice que un espacio topológico  $X$  es contráctil si la función  $Id_X$  es homotópica a una constante.*

**Definición 1.2.5.** *Se dice que dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$  son homotópicamente equivalentes si existen funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f \simeq Id_X$  y  $f \circ g \simeq Id_Y$ . Dichas funciones se llaman equivalencias homotópicas.*

Ahora bien, surge la pregunta de si la relación  $\simeq$  es trivial en  $C(X, Y)$ . Se puede ver que en el caso de que  $Y$  sea contráctil sí lo es, sin embargo, existen parejas de espacios topológicos para los que dicha relación no es trivial.

Se verá a continuación que esta relación no es trivial en las funciones continuas de  $S^1$  en sí mismo, donde se considera a  $S^1$  como el conjunto de puntos de norma 1 en  $\mathbb{R}^2$  con su métrica inducida. Esto se hará asignando un número natural a cada una de estas funciones que no varía bajo homotopía, es decir, a cualesquiera dos funciones homotópicas se les asigna el mismo número, al que se llamará grado, y se darán dos funciones con grados distintos, lo que mostrará la existencia de al menos dos clases en las funciones antes mencionadas.

El espacio  $S^1$  es homeomorfo a  $I/\{0, 1\}$  con la función cociente

$$\pi(t) = (\cos(2\pi \cdot t), \sin(2\pi \cdot t)),$$

por lo que la Proposición 1.1.15 da una asociación biyectiva entre las funciones continuas de  $I$  en  $X$  que identifican al conjunto  $\{0, 1\}$ , y las funciones

continuas de  $S^1$  a  $X$ , para todo espacio topológico  $X$ . Se definirá primero el grado para las funciones continuas de  $I$  en  $S^1$  que identifican a  $\{0, 1\}$ , y este será también el grado de su función asociada en  $S^1$ .

**Definición 1.2.6.** *Dado un espacio topológico  $X$ , se dice que una función continua  $f : I \rightarrow X$  es un lazo en  $X$  si  $f(0) = f(1)$ . Si  $f(0) = p$  se dice que  $f$  está basado en  $p$ .*

Un lazo  $f$  en  $S^1$  se puede pensar como enrollar un hilo en una circunferencia. Este hilo empieza y termina en el mismo punto, por lo que debe dar un número entero de vueltas. Intuitivamente el grado de  $f$  es este número, pero para formalizar esta noción será necesario fijarse en la función por intervalos escogidos de tal forma que en ellos, el lazo no dé una vuelta completa a la circunferencia. De esta forma se puede definir si el lazo se mueve en sentido horario o antihorario globalmente en cada intervalo, con lo que se podrá contar en cuántos de estos intervalos y en qué dirección pasa el lazo por un punto dado, lo que se verá invariante en lazos homotópicos.

Los intervalos mencionados se obtienen a través de la siguiente definición:

**Definición 1.2.7.** *Sea  $f : I \rightarrow S^1$  continua. Una partición propia de  $I$  relativa a  $f$  es un conjunto  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  de puntos de  $I$  que cumple*

- $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ ;
- si  $x$  está en  $[a_i, a_{i+1}]$ , se tiene que  $\|f(x) - f(a_i)\| < 1$ ;
- si  $f(a_i) = f(a_j)$  con  $i \neq j$ , entonces  $i = 0$  y  $j = n$  o bien,  $j = 0$  e  $i = n$ .

La existencia de particiones propias para  $f$  está garantizada por ser uniformemente continua, lo que se sigue de la Proposición 1.1.6 y de que  $I$  es compacto.

Dados  $f : I \rightarrow S^1$  continua,  $P = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  una partición propia relativa a  $f$  y  $\theta_0$  en  $[0, 2\pi)$  tal que  $f(a_0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$ , para cada  $0 \leq i \leq n-1$  se toma  $\theta_{i+1}$  tal que  $f(a_{i+1}) = (\cos(\theta_{i+1}), \sin(\theta_{i+1}))$  y  $|\theta_{i+1} - \theta_i| < \frac{\pi}{6}$ . La desigualdad  $\|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| < 1$  implica la existencia y unicidad de dicho  $\theta_{i+1}$ .

Se define una función  $\theta_x : I \rightarrow \mathbb{R}$  por trozos para  $f$  y  $P$  del párrafo anterior. En cada intervalo  $[a_i, a_{i+1}]$  está dada por

$$\theta_x = \theta_i + \frac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i} \cdot (\theta_{i+1} - \theta_i),$$

que está bien definida porque en  $a_i$  siempre vale  $\theta_i$ . Se ve que esta función es continua por la Proposición 1.1.3, porque es polinomial en los intervalos  $[a_i, a_{i+1}]$ , que son cerrados en  $I$ .

**Definición 1.2.8.** Sean  $f$  un lazo en  $S^1$ ,  $P = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  una partición propia relativa a  $f$  y  $\theta_x : I \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida arriba. La aproximación lineal en  $P$  a  $f$  se define como la función  $f_P : I \rightarrow S^1$  dada por

$$f_P(x) = (\cos(\theta_x), \sin(\theta_x)).$$

Ahora, se denota  $A_i = (f_P)|_{[a_i, a_{i+1}]}$ , y se puede ver que la imagen de  $A_i$  es el menor de los arcos que tienen como extremos a  $f(a_i)$  y  $f(a_{i+1})$ . Se define la función  $n : \{A_0, \dots, A_{n-1}\} \rightarrow \mathbb{Z}$  por

$$n(A_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_x \text{ es creciente en } [a_i, a_{i+1}]; \\ -1, & \text{si } \theta_x \text{ es decreciente en } [a_i, a_{i+1}]. \end{cases}$$

Es decir,  $n(A_i)$  es 1 si  $A_i$  recorre el arco menor entre  $f(a_i)$  y  $f(a_{i+1})$  en sentido antihorario y -1 si lo recorre en sentido horario.

**Definición 1.2.9.** Sean  $f$  un lazo en  $S^1$  y  $f_P$  una aproximación lineal a  $f$ . Si  $s$  es un punto de  $S^1$  distinto de  $f(a_i)$  para cada  $a_i$  en  $P$ , entonces se define el grado de  $f$  con respecto a  $P$  y  $s$  por

$$G(f, P, s) = \sum_{s \in \text{Im}(A_i)} n(A_i).$$

En adelante se utiliza la siguiente notación: Si  $x, y$  y  $z$  son elementos distintos de  $S^1$  se escribirá  $x < y < z$  cuando  $y$  se encuentre en el arco formado al recorrer en sentido antihorario de  $x$  a  $z$ . Si  $a, b, c$  y  $d$  son elementos de  $S^1$  se dice que  $a$  y  $c$  separan a  $b$  y  $d$  si se tiene que  $a < b < c$  y  $c < d < a$ .

El grado de  $f$  fue definido en función de una partición propia  $P$  y de un elemento de  $S^1$ . A continuación se demuestra que el grado depende sólo de  $f$  y, además, que es un invariante homotópico, para lo que se utiliza el siguiente resultado auxiliar.

**Proposición 1.2.10.** Sean  $f$  un lazo,  $f_P$  una aproximación lineal a  $f$  con  $P = \{a_0, \dots, a_n\}$  y  $Q \subset P$ . Si  $x$  y  $y$  son dos elementos de  $S^1 \setminus P$  tales que no hay  $a_i$  en  $Q$  tal que  $x < f(a_i) < y$  o  $x < f(a_{i+1}) < y$ , entonces, para cada  $i$  con  $a_i$  en  $Q$ ,  $x$  está en  $\text{Im}(A_i)$  si y sólo si  $y$  está en  $\text{Im}(A_i)$ .

*Demostración.* Si  $a_i$  está en  $Q$  y  $x$  está en  $Im(A_i)$ , entonces  $r < x < s$ , donde  $r$  y  $s$  son los extremos de  $Im(A_i)$ , es decir, son  $f(a_i)$  y  $f(a_{i+1})$  en algún orden. Nótese que en este caso

$$Im(A_i) = \{r, s\} \cup \{z \in S^1 \mid r < z < s\}.$$

Como  $y$  es distinto de  $r$  y de  $s$ , se tiene que  $r < y < s$  o  $s < y < r$ . Si se tuviera el segundo caso, se tendría que  $x$  y  $y$  separarían a  $r$  y  $s$ , por lo que se tendría  $x < s < y$ , lo cual contradice la hipótesis de la proposición. Luego, se cumple  $r < y < s$ , por lo que  $y$  está en  $Im(A_i)$ .

Siguiendo un proceso análogo se ve que si  $a_i$  está en  $Q$  y  $y$  está en  $Im(A_i)$ , entonces  $x$  está en  $Im(A_i)$ , con lo que queda probada la proposición.  $\square$

Es importante notar que si  $Q = P$  en la proposición anterior, el resultado indica que  $x$  está en  $Im(A_i)$  si y sólo si  $y$  está en  $Im(A_i)$  para todas las  $i$ .

**Proposición 1.2.11.** *El número  $G(f, P, s)$  no depende de la elección de  $s$  y, por lo tanto, se puede definir  $G(f, P) = G(f, P, s)$ .*

*Demostración.* Sean  $x_0$  un elemento de  $S^1$  distinto de  $f(a_i)$  para cada  $a_i$  en  $P$ , y  $z_1$  el primer punto de  $S^1$  a partir de  $x_0$  en sentido antihorario que es imagen de algún  $a_i$  bajo  $f$ .

Tómese  $x$  tal que  $x_0 < x < z_1$ . Es claro que no hay  $a_i$  en  $P$  tal que  $x_0 < f(a_i) < x$ , por lo que la Proposición 1.2.10 garantiza que

$$\sum_{x_0 \in Im(A_i)} n(A_i) = \sum_{x \in Im(A_i)} n(A_i)$$

por tener los mismos sumandos, por lo que  $G(f, P, x_0) = G(f, P, x)$ .

Ahora, sean  $z_2$  el primer punto de  $S^1$  a partir de  $z_1$  en sentido antihorario que es imagen de algún  $a_i$  bajo  $f$ , y  $x$  tal que  $z_1 < x < z_2$ . Supóngase que  $z_1 = f(a_k)$  y considérese  $f(a_{k-1})$  y  $f(a_{k+1})$  —si  $z_1 = f(a_0) = f(a_n)$ , se toma  $k-1 = n-1$  y  $k+1 = 1$ —. Si estos dos puntos se encuentran separados por  $z_1$  y  $-z_1$  se tiene que  $A_{k-1}$  y  $A_k$  tienen la misma dirección, y  $x_0$  y  $x$  se encuentran en exactamente uno de  $Im(A_{k-1})$  y  $Im(A_k)$  y además no se encuentran en la misma.

De la Proposición 1.2.10 se sigue que para toda  $i$  distinta de  $k-1$  y  $k$ ,  $x_0$  está en la imagen de  $A_i$  si y sólo si  $x$  también está, por lo que

$$\sum_{x_0 \in Im(A_i)} n(A_i) = \sum_{x \in Im(A_i)} n(A_i)$$

son iguales porque coinciden en todos los sumandos excepto  $n(A_{j-1})$  y  $n(A_j)$  que son iguales y se encuentran cada uno en una de las sumas y, por lo tanto,  $G(f, P, x_0) = G(f, P, x)$ .

Si  $f(a_{j-1})$  y  $f(a_{j+1})$  no están separados por  $z_1$  y  $-z_1$  entonces  $A_{j-1}$  y  $A_j$  tienen direcciones distintas y exactamente uno de  $x_0$  y  $x$  está tanto en  $Im(A_{k-1})$  como en  $Im(A_k)$ . Análogamente a como se hizo en el párrafo anterior de esta demostración, se sigue que  $G(f, P, x_0) = G(f, P, x)$ .

De esta forma se ve que cualesquiera dos puntos  $r$  y  $s$  en  $S^1 \setminus P$  se cumple  $G(f, P, r) = G(f, P, s)$ , ya que se puede encontrar una sucesión

$$s = s_0 < z_1 < s_1 < \cdots < z_j < s_j = r$$

donde cada  $z_i$  es imagen de algún  $a_i$  bajo  $f$ , y  $z_1$  y  $z_{i+1}$  son los primeros de esta forma en sentido antihorario a partir de  $s$  y  $z_i$  respectivamente. Usando estos argumentos se ve que el grado de  $f$  no depende del punto  $s$  escogido.  $\square$

**Proposición 1.2.12.** Si  $P_1 = \{a_0, \dots, a_n\}$  y  $P_2 = \{b_0, \dots, b_m\}$  son particiones propias relativas a  $f$ , entonces  $G(f, P_1) = G(f, P_2)$ , por lo que se puede definir el grado de  $f$  por

$$G(f) = G(f, P)$$

para cualquier partición propia  $P$ .

*Demostración.* Supóngase que  $f$  está basado en  $x$ . Si  $P = \{d_0, d_1\}$  una partición propia relativa a  $f$ , de la definición de las particiones propias se sigue que  $-x$  no está en la imagen de  $f$ , por lo que  $G(f, P', -x) = 0$  para toda partición propia  $P'$ .

Si  $P = \{d_0, d_1, \dots, d_n\}$  es una partición propia relativa a  $f$  con al menos tres elementos, se define

$$P' = P \cup \{d\}$$

con  $d_i < d < d_{i+1}$ . Sean  $A'_i = (f_{P'})|_{[d_i, d]}$  y  $A'_{i+1} = (f_{P'})|_{[d, d_{i+1}]}$ , donde  $f_{P'}$  es la aproximación lineal a  $f$  en  $P'$ . Es claro que existe un  $s$  en  $S^1$  que no está en  $Im(A'_i)$  ni en  $Im(A'_{i+1})$ , y entonces, por la Proposición 1.2.11 se tiene que  $G(f, P, s) = G(f, P', s)$ .

Ahora bien, considérese  $P_1 \vee P_2 = \{c_0, \dots, c_l\}$  la partición propia relativa a  $f$  tal que  $c_0 < c_1 < \dots < c_l$  y  $\{c_0, \dots, c_l\} = \{a_0, \dots, a_n\} \cup \{b_0, \dots, b_m\}$ . Es claro que  $P_1 \vee P_2$  se puede obtener a partir de  $P_1$  y  $P_2$  agregando una cantidad finita de elementos. Esto junto a lo dicho en el párrafo anterior de esta demostración muestra que  $G(f, P_1) = G(f, P_1 \vee P_2) = G(f, P_2)$ .  $\square$

Con estos resultados en mano se puede dar la siguiente definición. La función  $\pi : I \rightarrow S^1$  es la función cociente dada antes en esta sección.

**Definición 1.2.13.** *Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  una función continua. Se define el grado de  $f$  por*

$$G(f) = G(f \circ \pi),$$

donde  $G(f \circ \pi)$  es el grado definido para los lazos en  $S^1$ .

**Proposición 1.2.14.** *Sean  $f$  y  $g$  lazos en  $S^1$ . Si existe una función continua  $H : I \times I \rightarrow S^1$  que cumple que  $H(s, 0) = f(s)$ ,  $H(s, 1) = g(s)$  y que  $f_t = H|_{I \times \{t\}}$  es un lazo para cada  $t$  en  $I$ , entonces*

$$G(f) = G(g).$$

La prueba de esta proposición se hace de la siguiente forma: para cada  $t$  en  $I$  se muestra que hay un abierto entre  $t$  e  $I$  tal, que  $G(f_s) = G(f_t)$ , para cada  $s$  en el abierto. Para ver esto se toma una partición propia  $P_t \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  relativa a  $f_t$  y se demuestra que existe un abierto  $U_t$  de  $I$  alrededor de  $t$  tal, que si  $s$  está en  $U_t$ , entonces  $P_t$  es una partición propia para  $f_s$ . Se considera la aproximación lineal  $f_{sP_t}$ , y si  $U_t$  es suficientemente pequeño, existe  $y$  en el conjunto

$$S^1 \setminus \{f_s(a_i) \mid s \in U_t, a_i \in P_t\}$$

tal, que para cada  $i$  y cada  $s$ ,  $y$  está en  $Im(A_i^s)$  si y sólo si  $y$  está en  $Im(A_i^t)$ , donde  $A_i^s = (f_{sP_t})|_{[a_i, a_{i+1}]}$ , y además,

$$n(A_i^s) = n(A_i^t),$$

para cada  $s$  en  $U_t$ , si  $y$  está en  $Im(A_i^t)$ . La existencia de dicha  $y$  implica que

$$G(f_s) = G(f_s, P_t, y) = G(f_t, P_t, y) = G(f_t)$$

para cada  $s$  en  $U_t$ , y la conexidad de  $I$  implicará que  $G(f) = G(g)$ .

Ahora, la demostración:

*Demostración.* Sean  $t$  en  $I$ ,  $P_t = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  una partición propia relativa a  $f_t$  y  $y$  un punto en  $S^1 \setminus P_t$ .

Se tiene que  $\|f_t(a_i) - f_t(x)\| < 1$  para cada  $x$  en  $[a_i, a_{i+1}]$ , y como la función  $\|f_t(a_i) - \cdot\|$  es continua por el Ejemplo 1.1.1 y  $[a_i, a_{i+1}]$  es compacto, existe  $\alpha_i > 0$  tal que  $\|f_t(a_i) - f_t(x)\| < 1 - \alpha_i$  para cada  $x$  en  $[a_i, a_{i+1}]$ . Se toma  $\alpha > 0$  tal, que  $\alpha < \min \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ .

Considérese también  $\beta_{i,j} = \|f_t(a_i) - f_t(a_j)\|$ , para  $i < j$  e  $(i, j) \neq (0, n)$ . Dado que estos puntos  $f_t(a_i)$  y  $f_t(a_j)$  son distintos, cada  $\beta_{i,j}$  es mayor estricto que 0, por lo que se puede tomar  $\beta > 0$  tal, que  $\beta < \min \{\beta_{i,j}\}_{i < j, (i,j) \neq (0,n)}$ .

Finalmente, sea  $\gamma_i = \|f_t(a_i) - y\|$ . Por la definición de  $y$  se tiene que  $\gamma_i > 0$  para cada  $i$ , por lo que es posible encontrar una  $\gamma > 0$  tal que  $\gamma < \min \{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$ .

En la Proposición 1.1.9 se muestra que la topología de  $I \times I$  está inducida por la métrica  $d_\infty$ . Además,  $I \times I$  es compacto, por lo que la Proposición 1.1.6 hace a  $H$  uniformemente continua. Luego, existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_\infty((r_1, s_1), (r_2, s_2)) < \delta$ , entonces

$$\|f_{s_1}(r_1) - f_{s_2}(r_2)\| < \min \left\{ \frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma}{4} \right\},$$

y se define  $U_t = B_\delta(t) \subset I$ .

Para cada  $s$  en  $U_t$ ,  $P_t$  es una partición propia relativa a  $f_s$ . Esto es porque

$$d_\infty((r, t), (r, s)) = \max \{|r - r|, |s - t|\} = |s - t| < \delta$$

para cada  $r$ , lo que implica que  $\|f_s(r) - f_t(r)\| < \frac{\alpha}{4}$ . Entonces, dado que para cada  $x$  en  $[a_i, a_{i+1}]$  se cumple  $\|f_t(a_i) - f_t(x)\| < 1 - \alpha$ , se tiene que

$$\|f_s(a_i) - f_t(a_i)\| + \|f_t(a_i) - f_t(x)\| + \|f_t(x) - f_s(x)\| < 1 - \frac{\alpha}{2},$$

y, por la desigualdad del triángulo,

$$\|f_s(a_i) - f_s(x)\| \leq \|f_s(a_i) - f_t(a_i)\| + \|f_t(a_i) - f_t(x)\| + \|f_t(x) - f_s(x)\|.$$

Estas dos desigualdades implican que  $\|f_s(a_i) - f_s(x)\| < 1 - \frac{\alpha}{2}$  para cada  $x$  en  $[a_i, a_{i+1}]$ .

Por otro lado,  $0 < \beta < \|f_t(a_i) - f_t(a_j)\|$  siempre que  $i < j$  e  $(i, j) \neq (0, n)$ , y de la desigualdad del triángulo se tiene que

$$\|f_t(a_j) - f_t(a_i)\| \leq \|f_t(a_j) - f_s(a_j)\| + \|f_s(a_j) - f_s(a_i)\| + \|f_s(a_i) - f_t(a_i)\|.$$

Tanto  $\|f_t(a_j) - f_s(a_j)\|$  como  $\|f_s(a_i) - f_t(a_i)\|$  son menores estrictos que  $\frac{\beta}{4}$ , por lo que se sigue

$$0 < \frac{\beta}{2} < \|f_s(a_j) - f_s(a_i)\|,$$

es decir,  $f_s(a_i)$  y  $f_s(a_j)$  son distintos siempre que  $i < j$  e  $(i, j) \neq (0, n)$ , y esto implica que  $P_t$  es una partición propia relativa a  $f_s$ .

Nótese que  $y$  está en

$$S^1 \setminus \{f_s(a_i) \mid s \in U_t, a_i \in P_t\},$$

ya que, para cada  $s$  en  $U_t$ ,  $|s - t| < \delta$ , por lo que

$$\|f_t(a_i) - f_s(a_i)\| < \frac{\gamma}{4} < \|f_t(a_i) - y\|$$

para cada  $i$  y entonces,  $y$  es distinto de  $f_s(a_i)$ .

Se ve que si  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  son tres elementos distintos de  $S^1$  y  $s_2$  está en el menor arco entre  $s_1$  y  $s_3$ , entonces  $\|s_1 - s_2\| \leq \|s_1 - s_3\|$ . Así, para cada  $i$  y cada  $s$  en  $U_t$ , se cumple  $\|f_s(a_i) - f_s(a_{i+1})\| < 1 - \frac{\alpha}{2}$ , por lo que los puntos  $x$  en el menor arco entre  $f_s(a_i)$  y  $f_s(a_{i+1})$  deben ser tales, que  $\|f_s(a_i) - f_s(x)\| < 1 - \frac{\alpha}{2}$ .

Supóngase que  $y$  está en el menor arco de  $S^1$  entre  $f_{s_0}(a_j)$  y  $f_{s_0}(a_{j+1})$  para algún  $s_0$  en  $U_t$ . Dado que  $\|y - f_{s_0}(a_j)\| < 1 - \frac{\alpha}{2}$  y  $2 = \|y - (-y)\|$ , para cada  $s$  en  $U_t$  se tiene que

$$2 \leq \|y - f_{s_0}(a_j)\| + \|f_t(a_j) - f_{s_0}(a_j)\| + \|f_t(a_j) - f_s(a_j)\| + \|f_s(a_j) - (-y)\|$$

por la desigualdad del triángulo y, como  $\|f_t(a_j) - f_s(a_j)\| < \frac{\alpha}{4}$ , se sigue que

$$2 - 1 < \|f_s(a_j) - (-y)\|,$$

por lo que  $\|f_s(a_j) - (-y)\| > 1$ , y se puede concluir que cuando  $y$  está en el menor arco de  $S^1$  entre  $f_{s_0}(a_j)$  y  $f_{s_0}(a_{j+1})$  para alguna  $s_0$  en  $U_t$ , se cumple que

- $-y$  es distinto de  $f_s(a_j)$  y de  $f_s(a_{j+1})$ , para cada  $s$  en  $U_t$ ;
- $-y$  no está en el menor arco de  $S^1$  entre  $f_s(a_j)$  y  $f_s(a_{j+1})$ , para cada  $s$  en  $U_t$ .

También sucede que  $f_{s_0}(a_j) < y < f_{s_0}(a_{j+1})$  o  $f_{s_0}(a_{j+1}) < y < f_{s_0}(a_j)$ . Supóngase, sin pérdida de generalidad, que  $f_{s_0}(a_j) < y < f_{s_0}(a_{j+1})$  y, por lo tanto,  $f_{s_0}(a_{j+1}) < -y < f_{s_0}(a_j)$ .

El conjunto  $U_t$  es un conexo en  $I$ , por lo que  $\{a_j\} \times U_t$  es, a su vez, conexo. Entonces,  $H(\{a_j\} \times U_t)$  es un subconjunto conexo de  $S^1$  que no intersecta a  $\{y, -y\}$ , de donde se sigue que  $-y < f_s(a_j) < y$  para todo  $s$  en  $U_t$ , ya que de lo contrario, se tendría una desconexión para  $H(\{a_j\} \times U_t)$ . De forma similar, se ve que  $y < f_s(a_{j+1}) < -y$ , por lo que  $f_s(a_j) < y < f_s(a_{j+1})$  y  $f_s(a_{j+1}) < -y < f_s(a_j)$ , para cada  $s$  en  $U_t$ . Esto quiere decir que  $y$  está en el

menor arco entre  $f_s(a_j)$  y  $f_s(a_{j+1})$ , y que dicho arco se recorre en la misma dirección para cada  $s$  en  $U_t$ . Se obtiene el mismo resultado con un proceso análogo cuando  $f_{s_0}(a_{j+1}) < y < f_{s_0}(a_j)$ .

Sean  $s$  en  $U_t$ ,  $f_{sP_t}$  la aproximación lineal a  $f_s$  en  $P_t$  y  $A_i^s = (f_{sP_t})|_{[a_i, a_{i+1}]}$ . De lo discutido en el párrafo anterior se sigue que, para cada  $j$ ,  $y$  está en  $Im(A_j^{s_0})$  para alguna  $s_0$  en  $U_t$  si y sólo si está en  $Im(A_j^s)$  para cada  $s$  en  $U_t$ . También se ve que  $n(A_j^s) = n(A_j^t)$  para  $s$  en  $U_t$  si  $y$  está en  $Im(A_j^t)$ , por lo que  $G(f_s, P_t, y) = G(f_t, P_t, y)$  para todo  $s$  en  $U_t$  y, por lo tanto, si  $s$  está en  $U_t$ , se cumple que  $G(f_s) = G(f_t)$ .

Considérese el conjunto

$$A = \{t \in I \mid G(f_t) = G(f_0)\}.$$

Sea  $t_0$  en  $A$ , se ve que  $U_{t_0}$  está contenido en  $A$  porque, dado  $s$  en  $U_{t_0}$ , se cumple que  $G(f_s) = G(f_{t_0}) = G(f_0)$ , por lo que  $s$  está en  $A$  y, entonces,  $A$  es abierto. Por un argumento similar, si  $t_0$  está en  $I \setminus A$ , debe suceder que  $U_{t_0}$  esté contenido en  $I \setminus A$ . Esto es porque  $G(f_{t_0})$  es distinto de  $G(f_0)$  y, para cada  $s$  en  $U_{t_0}$ , se tiene que  $G(f_s) = G(f_{t_0})$ , lo que muestra que  $A$  es cerrado. Como  $0$  está en  $A$ , éste es no vacío, y la conexidad de  $I$  implica que  $A = I$ .

Se sigue que  $1$  está en  $A$  y, por lo tanto, se tiene que

$$G(f) = G(f_0) = G(f_1) = G(g),$$

como se quería demostrar.  $\square$

**Proposición 1.2.15.** Si  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  son dos funciones homotópicas, entonces se cumple que  $G(f) = G(g)$ .

*Demostración.* Si  $f_0 = f \circ \pi$  y  $f_1 = g \circ \pi$  son los lazos asociados a  $f$  y  $g$  respectivamente, por definición  $G(f) = G(f_0)$  y  $G(g) = G(f_1)$ . Por la Proposición 1.2.14, basta demostrar que existe  $H : I \times I \rightarrow S^1$  tal, que  $H : f_0 \simeq f_1$  y  $H|_{I \times \{t\}}$  es un lazo para cada  $t$  en  $I$ .

Sea  $\bar{H} : f \simeq g$ . La función  $H = \bar{H} \circ (\pi \times Id_I) : I \times I \rightarrow S^1$  es continua por ser composición de funciones continuas y, dado que  $\pi(0) = \pi(1)$ ,  $H$  es un lazo restringido a  $I \times \{t\}$ . Ahora,  $H(r, 0) = \bar{H}(\pi(r), 0) = f \circ \pi(r) = f_0(r)$  y, análogamente,  $H(r, 1) = f_1(r)$ . De esto se sigue que  $G(f_0) = G(f_1)$ , como se quería demostrar.  $\square$

**Corolario 1.2.16.** La función constante  $c_s : S^1 \rightarrow S^1$  con  $s$  en  $S^1$  y la función  $Id_{S^1}$  no son homotópicas.

*Demostración.* Basta demostrar que ambas funciones tienen grados distintos.

Sean  $C = c_s \circ \pi$  y  $L = Id_{S^1} \circ \pi$ . De la definición de grado se tiene que  $G(c_s) = G(C, \{0, 1\}, -s) = 0$ , ya que  $-s$  no está en la imagen de  $C$ . Por otro lado,  $P = \{\frac{i}{12}\}_{i=0}^{12}$  es una partición propia relativa a  $L$ , y dado que la función  $L$  es inyectiva en  $s$  y recorre  $S^1$  en contra del sentido horario,  $G(Id_{S^1}) = G(L, P, \frac{\pi}{8}) = 1$ , de donde se sigue que  $c_s$  e  $Id_{S^1}$  no son homotópicas.  $\square$

A continuación, se extiende el Corolario 1.2.16 a la esfera  $S^n$ . Sin embargo, la prueba se hará utilizando resultados de Teoría de Homología Singular, que se encuentran desarrollados en [12, Capítulo VII, Sección 3 y Teorema 4.2; Capítulo VIII, Teorema 2.1].

En la siguiente proposición,  $H_n(S^n)$  denota al  $n$ -ésimo grupo de homología de  $S^n$ , y si  $f$  es una función continua de  $S^n$  en sí mismo,  $f_*$  denota al endomorfismo de grupos inducido por  $f$  en  $H_n(S^n)$ .

**Proposición 1.2.17.** *La función constante  $c_s : S^n \rightarrow S^n$  con  $s$  en  $S^n$  y la función  $Id_{S^n}$  no son homotópicas.*

*Demostración.* Sean  $c_{s*} : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  e  $Id_{S^n*} : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  las funciones de  $H_n(S^n)$  en  $H_n(S^n)$  inducidas por  $c_s$  e  $Id_{S^n}$  respectivamente. Dado que  $c_s$  es constante se tiene que  $c_{s*}$  es idénticamente 0, mientras que  $Id_{S^n*} = Id_{H_n(S^n)}$ . Ahora bien, dado que  $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ , estas dos funciones son distintas, por lo que se sigue que  $c_s$  e  $Id_{S^n}$  no son homotópicas.  $\square$

Este resultado se utiliza principalmente en la siguiente forma

**Corolario 1.2.18.** *Sea  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $S^n$  y que no tiene a  $\bar{0}$ . Si  $\sigma : S^n \rightarrow A$  es homotópica a la inclusión de  $S^n$  en  $A$ , entonces  $\sigma$  no es homotópica a una constante.*

*Demostración.* Por la transitividad de la relación de homotopía basta demostrar que  $i : S^n \rightarrow A$ , la inclusión de  $S^n$  en  $A$ , no es homotópica a una constante, y esto se hará por contradicción:

Supóngase que  $i$  es homotópica a una constante  $c$ . Considérese la función  $N : A \rightarrow S^n$  dada por

$$N(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$

La función  $N$  es continua por ser una función racional cuyo denominador no se hace 0 en su dominio. Entonces, por la Proposición 1.2.3,  $N \circ i$  es

homotópica a  $N \circ c$ . Pero  $N \circ i = Id_{S^n}$  y  $N \circ c$  es una función constante, lo cual es una contradicción con la Proposición 1.2.18.

De esto se sigue que  $\sigma$  no es homotópica a una constante.  $\square$

### 1.3. La métrica de Hausdorff

**Definición 1.3.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A$  un subconjunto de  $X$  y  $\epsilon > 0$ . Se llama nube de radio  $\epsilon$  alrededor de  $A$  en  $X$ , y se denota por  $N_\epsilon(A)$ , al conjunto dado por

$$N_\epsilon(A) = \{x \in X \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \epsilon\}.$$

Se denota por  $B_X$  al subconjunto de  $\mathcal{P}(X)$ , el conjunto potencia de  $X$ , cuyos elementos son los subconjuntos no vacíos de  $X$  que son cerrados y acotados. Se puede ver que si  $A$  y  $B$  son dos elementos de  $B_X$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $A \subset N_\epsilon(B)$  y  $B \subset N_\epsilon(A)$ , ya que por ser  $B$  acotado existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $B \subset B_{\epsilon_0}(a)$  donde  $a$  es un elemento de  $A$ . Análogamente existe un  $\epsilon_1 > 0$  tal que  $A \subset B_{\epsilon_1}(b)$  donde  $b$  es un elemento de  $B$ . Tomando  $\epsilon = \max\{\epsilon_0, \epsilon_1\}$  se obtiene el número buscado. La existencia de dicho  $\epsilon$  permite dar la siguiente definición:

**Definición 1.3.2.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A$  y  $B$  subconjuntos cerrados y acotados de  $X$ . Se define  $H : B_X \times B_X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset N_\epsilon(B) \text{ y } B \subset N_\epsilon(A)\}.$$

**Proposición 1.3.3.** La función  $H$  definida arriba es una métrica en  $B_X$ .

*Demostración.* Se sigue de que

1.  $H$  es claramente no negativa, pues es resultado de tomar el ínfimo de números no negativos;
2.  $H(A, B) = H(B, A)$  directamente de la definición de  $H$ ;
3.  $H(A, A) = 0$  para cualquier subconjunto  $A$  de  $X$ , y si  $H(A, B) = 0$ , entonces  $A = B$ , ya que de lo contrario, existiría un elemento en  $B$  que no estaría en  $A$  o un elemento en  $A$  que no estaría en  $B$ . Sin pérdida de generalidad supóngase que existe  $b$  en  $B$  que no está en  $A$ . Como  $A$  es cerrado, existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $B_{\epsilon_0}(b)$  no tiene elementos comunes con  $A$ .

Si  $B$  está contenido en  $N_\epsilon(A)$ , entonces  $\epsilon > \epsilon_0$ , porque debe existir  $a$  en  $A$  tal, que  $d(a, b) < \epsilon$ . Esto muestra que  $H(A, B) \geq \epsilon_0$ , lo que es una contradicción;

4.  $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$ . Esto es porque dados  $\alpha$  y  $\beta$  tales, que  $A \subset N_\alpha(B)$ ,  $B \subset N_\alpha(A)$ ,  $B \subset N_\beta(C)$  y  $C \subset N_\beta(B)$ , se tiene que para cada  $a$  en  $A$  existe  $b$  en  $B$  tal que  $d(a, b) < \alpha$  y existe  $c$  en  $C$  tal que  $d(b, c) < \beta$ . Por la desigualdad del triángulo para el espacio original sucede que  $d(a, c) < \alpha + \beta$  y, por lo tanto,  $A \subset N_{\alpha+\beta}(C)$ . Análogamente se ve que  $C \subset N_{\alpha+\beta}(A)$  y entonces,  $H(A, C) \leq \alpha + \beta$ . Esto se cumple para cada  $\alpha$  y  $\beta$  fijos, por lo que al tomar ínfimo sobre  $\alpha$  la desigualdad se mantiene como  $H(A, C) \leq H(A, B) + \beta$ , y tomando ínfimo sobre  $\beta$  se obtiene la desigualdad del triángulo para  $H$ .

□

A la métrica  $H$  se le llama *la métrica de Hausdorff*.

## 1.4. Hiperespacios de continuos

Para un espacio métrico  $X$  se definen los conjuntos  $2^X$  y  $F_n(X)$  por

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es compacto y no vacío en } X\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ elementos}\}.$$

Es claro que  $F_n(X)$  está contenido en  $2^X$  y éste, a su vez, en  $B_X$ , por lo que se les puede ver como subespacios de  $B_X$  con la métrica de Hausdorff. Si  $X$  es un continuo,  $2^X$  y  $B_X$  coinciden, y en este caso, a los espacios  $F_n(X)$  y  $2^X$  dotados de la métrica de Hausdorff se les llama *hiperespacios*.

**Proposición 1.4.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $h : X^n \rightarrow F_n(X)$  la función dada por

$$h((a_1, \dots, a_n)) = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

*Esta función es continua y suprayectiva.*

*Demostración.* Dado  $\{a_1, \dots, a_k\}$  en  $F_n(X)$  —con  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$ —, se tiene que  $1 \leq k \leq n$ . Sea  $a'_i = a_i$  si  $1 \leq i \leq k$  y  $a'_i = a_k$  si  $k \leq i \leq n$ . Como cada  $a'_i$  está en  $X$ ,  $(a'_1, \dots, a'_n)$  está en  $X^n$  y  $h((a'_1, \dots, a'_n)) = \{a_1, \dots, a_k\}$ , por lo que  $h$  es suprayectiva.

Sean  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$  y  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$  dos elementos de  $X^n$  tales, que  $\max\{d(a_i, b_i)\}_{i=1}^n < \epsilon/2$ , entonces  $h(\bar{a})$  está en  $N_{\epsilon/2}(h(\bar{b}))$ . Esto sucede porque, para todo  $\alpha$  en  $h(\bar{a})$ , se cumple que  $\alpha = a_i$  para alguna  $i$ , por lo que  $d(\alpha, b_i) < \epsilon/2$ , y  $b_i$  está en  $h(\bar{b})$ . Análogamente,  $h(\bar{b})$  está en  $N_{\epsilon/2}(h(\bar{a}))$  y, así,  $H(\bar{a}, \bar{b}) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ , donde  $H$  es la métrica de Hausdorff en  $F_n(X)$ . Se sigue que  $h : X^n \rightarrow F_n(X)$  es continua. □

**Corolario 1.4.2.** *Sea  $(X, d)$  un continuo. Entonces, el hiperespacio  $F_n(X)$  es un continuo.*

*Demostración.* Por la Proposición 1.4.1 se tiene que  $F_n(X)$  es la imagen bajo función continua de un espacio compacto y conexo bajo una función continua y, por lo tanto, es compacto y conexo. Además, como subespacio de  $2^X$ ,  $F_n(X)$  es un espacio métrico, por lo que es un continuo.  $\square$

**Corolario 1.4.3.** *Sea  $X$  un continuo, entonces  $F_n(X)$  es homeomorfo a un cociente de  $X^n$ .*

*Demostración.* Sea  $h : X^n \rightarrow F_n(X)$  como en la Proposición 1.4.1, entonces  $h$  es continua y suprayectiva. Además  $X^n$  es compacto y  $F_n(X)$  es métrico y por lo tanto de Hausdorff. De esto y la Proposición 1.1.18 se sigue que  $h$  es una identificación y que  $F_n(X)$  es homeomorfo al espacio cociente de  $X^n$  inducido por  $h$ .  $\square$

En el caso  $n = 1$ , la función  $h$  es la biyección que asigna  $x \mapsto \{x\}$ , y dado que es una identificación, es un homeomorfismo. Esto se resume en el siguiente corolario.

**Corolario 1.4.4.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces, el hiperespacio  $F_1(X)$  es isométrico a  $X$ .*

Se puede pensar al hiperespacio  $F_n(X)$  como un “producto” de  $n$  copias de  $X$  donde se ignora el orden de las coordenadas, por lo que también se le conoce como *el enésimo producto simétrico de  $X$* .

**Proposición 1.4.5.** *Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces, la función  $F : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  dada por*

$$F(\bar{a}) = f(\bar{a})$$

*es continua, y si  $f$  es inyectiva,  $F$  es también inyectiva.*

*Demostración.* La función  $F$  está bien definida, ya que  $\bar{a}$  tiene a lo más  $n$  elementos, por lo que  $f(\bar{a})$  debe tener a lo más  $n$  elementos y, por lo tanto, está en  $F_n(Y)$ .

Sea  $\bar{a} = \{a_1, \dots, a_k\}$  en  $F_n(X)$ . Dado que  $f$  es continua, para cada  $\epsilon > 0$  y cada  $i$  existe  $\delta_i > 0$  tal, que si  $x$  en  $X$  cumple que  $d_1(x, a_i) < \delta_i$ , entonces  $d_2(f(x), f(a_i)) < \epsilon/2$ , donde  $d_1$  y  $d_2$  son las métricas de  $X$  y de  $Y$  respectivamente.

Se toma  $\delta > 0$  con  $\delta \leq \min \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ . Si  $\bar{b}$  está en  $B_\delta^H(\bar{a})$ , se tiene que  $F(\bar{b})$  está en  $B_\epsilon^H(F(\bar{a}))$ . Esto es porque para cada  $\alpha$  en  $\bar{b}$  existe  $a_m$  en

$\bar{a}$  tal que  $d_1(\alpha, a_m) < \delta$ , por lo que  $d_2(f(\alpha), f(a_m)) < \epsilon/2$  y, por lo tanto,  $F(\bar{b})$  está en  $N_{\epsilon/2}(F(\bar{a}))$ . Con un razonamiento análogo se llega a que  $F(\bar{b})$  está en  $N_{\epsilon/2}(F(\bar{a}))$ , mostrando que  $H(F(\bar{a}), F(\bar{b})) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ , es decir, que  $F$  es continua en  $\bar{a}$ . Como  $\bar{a}$  era cualquier elemento de  $F_n(X)$ ,  $F$  es continua.

Si  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$  son dos elementos distintos de  $F_n(X)$ , existe un elemento en uno que no está en el otro. Sin pérdida de generalidad, existe  $a$  en  $\bar{a}$  que no está en  $\bar{b}$ . Dado que  $f(a)$  está en  $f(\bar{a})$  y que  $f$  es inyectiva,  $f(a)$  no está en  $f(\bar{b})$  y, por lo tanto,  $F(\bar{a})$  y  $F(\bar{b})$  son distintos, lo que muestra que  $F$  es inyectiva.  $\square$

**Corolario 1.4.6.** *Sean  $d_1$  y  $d_2$  dos métricas equivalentes en el conjunto  $X$ . Entonces, las métricas de Hausdorff  $H_1$  y  $H_2$  inducidas por  $d_1$  y  $d_2$  respectivamente en  $F_n(x)$  son equivalentes.*

*Demostración.* Considérese  $f : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$  y  $g : (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$  dadas por

$$f(x) = g(x) = x.$$

Estas dos funciones son inyectivas y continuas por ser  $d_1$  y  $d_2$  equivalentes. Por la Proposición 1.4.5 inducen funciones inyectivas y continuas  $F : (F_n(X), H_1) \rightarrow (F_n(X), H_2)$  y  $G : (F_n(X), H_2) \rightarrow (F_n(X), H_1)$  que cumplen

$$F(a) = G(a) = a.$$

Dado que las composiciones  $F \circ G$  y  $G \circ F$  son respectivamente la identidad en  $(F_n(X), H_1)$  y en  $(F_n(X), H_2)$ , dichas funciones inducidas son homeomorfismos y, entonces,  $H_1$  y  $H_2$  son equivalentes.  $\square$

**Proposición 1.4.7.** *Sea  $Y$  un subconjunto del espacio métrico  $(X, d)$ . Si se considera a  $F_n(Y)$  encajado en  $F_n(X)$  a través de la función inducida por la inclusión de  $Y$  en  $X$ , entonces, para cada  $\delta > 0$ ,  $N_\delta(F_n(Y)) = F_n(N_\delta(Y))$ .*

*Demostración.* Si  $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_k\}$  está en  $F_n(N_\delta(Y))$ , entonces cada  $x_i$  está en  $N_\delta(Y)$  y, por definición, existe  $y_i$  en  $Y$  tal que  $d(x_i, y_i) < \delta$ , por lo que  $H(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$  donde  $\bar{y} = \{y_1, \dots, y_k\}$ , y como  $\bar{y}$  está en  $F_n(Y)$ , se tiene que  $\bar{x}$  está en  $N_\delta(F_n(Y))$ .

Ahora, si  $\bar{x}$  está en  $N_\delta(F_n(Y))$ , existe un  $\bar{y}$  en  $F_n(Y)$  tal que  $H(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$ , y entonces para cada  $x_i$  en  $\bar{x}$  existe un  $y_j$  en  $\bar{y}$  y, por lo tanto, en  $Y$ , que cumple  $d(x_i, y_j) < \delta$ , por lo que  $\bar{x}$  está contenido en  $N_\delta(Y)$  y es un elemento de  $F_n(N_\delta(Y))$ .

De esto se sigue que  $N_\delta(F_n(Y)) = F_n(N_\delta(Y))$ .  $\square$

## 1.5. Conjuntos $\mathcal{Z}$

**Definición 1.5.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que un subconjunto cerrado  $A$  de  $X$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $X$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe una función continua  $f_\epsilon : X \rightarrow X \setminus A$  tal que  $d(x, f_\epsilon(x)) < \epsilon$ , para cada  $x$  en  $X$ .

**Proposición 1.5.2.** Sean  $(X, d_1)$  y  $(Y, d_2)$  espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  homeomorfismos uniformemente continuos tales que  $f \circ g = Id_Y$  y  $g \circ f = Id_X$ . Entonces, un subconjunto cerrado  $A$  de  $X$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $X$  si y sólo si  $f(A)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $Y$ .

*Demostración.* Como  $f$  es un homeomorfismo,  $f(A)$  es cerrado en  $Y$  si y sólo si  $A$  es cerrado en  $X$ .

Sean  $\epsilon > 0$  y  $A$  un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $X$ . Como  $f$  es uniformemente continua, existe  $\delta > 0$  tal que  $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$  siempre que  $d_1(x, y) < \delta$ , y tómesese  $f_\delta : X \rightarrow X \setminus A$  una función continua tal que  $d_1(x, f_\delta(x)) < \delta$  para cada  $x$  en  $X$ .

La función  $g_\delta = f|_{X \setminus A} \circ f_\delta \circ g$  con dominio  $Y$  y codominio  $Y \setminus f(A)$  cumple que  $d_2(g_\delta(y), y) < \epsilon$  para cada  $y$  en  $Y$ , ya que  $g_\delta(y) = f(f_\delta(g(y)))$  y  $y = f(g(y))$ , y esto se puede hacer para cada  $\epsilon > 0$ , lo que muestra que  $f(A)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $Y$ .

El otro caso es análogo, por lo que se sigue la proposición.  $\square$

Este resultado dice que los conjuntos  $\mathcal{Z}$  de un espacio compacto son los mismos para todas las métricas que inducen su topología, ya que toda función continua que lo tenga como dominio es uniformemente continua. Esto se usa inmediatamente en la prueba de la siguiente proposición.

**Proposición 1.5.3.** Supóngase que  $(X, d)$  es un continuo contráctil y que  $A$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $X$ . Entonces,  $\{[*], 0\}$  y  $CA$  visto como subconjunto de  $CX$  son conjuntos  $\mathcal{Z}$  en  $(CX, D)$ , donde  $D$  es una métrica esférica de  $CX$ .

*Demostración.* Por la Proposición 1.1.28, el cono  $CX$  tiene al menos una métrica esférica por ser  $X$  compacto, y todas sus métricas esféricas son equivalentes porque todas inducen la topología del cono. Así, por la Proposición 1.5.2, basta verificar que  $CA$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en una métrica esférica particular. En especial, la métrica esférica que se utilizará será la definida en la Proposición 1.1.27 con la métrica  $d'$  acotada por 1 construida en el Ejemplo 1.1.5 a partir de  $d$ .

Dado que  $d'$  es equivalente a  $d$  y que  $X$  es compacto, la Proposición 1.5.2 muestra que  $A$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  con la métrica  $d$  si y sólo si también lo es con la métrica  $d'$ , por lo que se puede suponer que  $d$  era  $d'$  desde el principio.

Por ser  $X$  contráctil, existe una función continua  $r : X \times I \rightarrow X$  tal que  $r|_{X \times \{0\}}$  es una función constante  $c$  y  $r|_{X \times \{1\}}$  es la función  $Id_X$ . Sean  $0 < \epsilon < 1$  y  $g_\epsilon : X \times I \rightarrow X \times I$  la función dada por

$$g_\epsilon(x, t) = \begin{cases} (r(x, \frac{2t}{\epsilon}), \frac{\epsilon}{2}), & \text{si } t \in [0, \frac{\epsilon}{2}]; \\ (x, t), & \text{si } t \in [\frac{\epsilon}{2}, 1]. \end{cases}$$

Nótese que  $g_\epsilon$  está bien definida, dado que si  $t = \frac{\epsilon}{2}$ ,  $r(x, \frac{2t}{\epsilon}) = r(x, 1) = x$ , y por lo tanto  $(r(x, \frac{2t}{\epsilon}), \frac{\epsilon}{2}) = (x, t)$ .

Para probar que  $g_\epsilon$  es continua, considérese las siguientes funciones:

- la proyección  $p_{[0, \frac{\epsilon}{2}]} : X \times [0, \frac{\epsilon}{2}] \rightarrow [0, \frac{\epsilon}{2}]$ ,
- $c_{\frac{\epsilon}{2}} : [0, \frac{\epsilon}{2}] \rightarrow I$  la función constante que va a dar a  $\frac{\epsilon}{2}$ ,
- $a : [0, \frac{\epsilon}{2}] \rightarrow I$  dada por

$$a(t) = \frac{2t}{\epsilon}.$$

Estas funciones son continuas y, por lo tanto, las funciones  $r \circ (Id_X \times a)$  y  $c_{\frac{\epsilon}{2}} \circ p_{[0, \frac{\epsilon}{2}]}$  son continuas. Ambas tienen por dominio a  $X \times [0, \frac{\epsilon}{2}]$ , por lo que inducen una función continua de éste a  $X \times I$ , que está dada por

$$(x, t) \mapsto (r(x, \frac{2t}{\epsilon}), \frac{\epsilon}{2}).$$

Es claro que  $g_\epsilon$  restringida a  $X \times [0, \frac{\epsilon}{2}]$  es justamente esta función, y  $g_\epsilon$  restringida a  $X \times [\frac{\epsilon}{2}, 1]$  es la identidad, que es también continua. Como  $X \times [0, \frac{\epsilon}{2}]$  y  $X \times [\frac{\epsilon}{2}, 1]$  son cerrados en  $X \times I$ , la Proposición 1.1.3 da que  $g_\epsilon$  es continua.

De la definición de  $g_\epsilon$  se tiene la siguiente igualdad de conjuntos:

$$g_\epsilon(X \times \{0\}) = r(X \times \{0\}) \times \left\{ \frac{\epsilon}{2} \right\} = Im(c) \times \left\{ \frac{\epsilon}{2} \right\},$$

que es un conjunto unitario. Entonces, por el Lema 1.1.20,  $g_\epsilon$  induce una función continua  $G_\epsilon : CX \rightarrow CX$ . El elemento  $[*, 0]$  no está en la imagen de esta función y, usando la Definición 1.1.2, se puede restringir en contradominio a  $CX \setminus \{[*], 0\}$ . Se referirá a esta nueva función por  $G_\epsilon$ .

Se tiene que  $G_\epsilon[x, t] = [x, t]$  siempre que  $t \geq \frac{\epsilon}{2}$ , y cuando  $t < \frac{\epsilon}{2}$ , de la desigualdad del triángulo se sigue que

$$D([x, t], G_\epsilon[x, t]) \leq D([x, t], [*, 0]) + D([*, 0], G_\epsilon[x, t]) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

porque la segunda coordenada de  $G_\epsilon[x, t]$  es  $\frac{\epsilon}{2}$ . Estos dos casos muestran que  $D([x, t], G_\epsilon[x, t]) < \epsilon$  para cada  $[x, t]$  en  $CX$ , y como  $\epsilon > 0$  era arbitraria,  $\{[*], 0\}$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $CX$ .

Como  $A$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $X$ , para cada  $\epsilon > 0$  existe una función continua  $f_\epsilon : X \rightarrow X \setminus A$  tal que  $d(x, f_\epsilon(x)) < \epsilon$  para cada  $x$  en  $X$ . Sea  $\overline{f}_\epsilon = i \circ f_\epsilon$ , donde  $i$  es la inclusión de  $X \setminus A$  en  $X$ . Por ser producto de funciones continuas,  $\overline{f}_\epsilon \times Id_I : X \times I \rightarrow X \times I$  es continua y, dado que  $(\overline{f}_\epsilon \times Id_I)(X \times \{0\})$  está contenido en  $X \times \{0\}$ , induce una función continua  $\overline{F}_\epsilon$  de  $CX$  en  $CX$ .

Considérese la función continua  $F_\epsilon = \overline{F}_{\frac{\epsilon}{2}} \circ G_{\frac{\epsilon}{2}}$  de  $CX$  en sí mismo. La imagen de  $F_\epsilon$  no tiene elementos de  $CA$ , ya que la imagen de  $G_\epsilon$  está contenida en  $CX \setminus \{[*], 0\}$  y, para cada  $t > 0$ ,  $(\overline{f}_\epsilon \times I)(x, t)$  está en  $X \setminus A \times \{t\}$ , por lo que  $\overline{F}_\epsilon[x, t]$  no está en  $CA$ . Entonces,  $F_\epsilon$  se puede restringir en codominio a  $CX \setminus CA$  para cada  $\epsilon > 0$ . De la definición de  $\overline{F}_\epsilon$  se tiene que  $D([x, t], \overline{F}_\epsilon[x, t]) < \epsilon$  para cada  $[x, t]$  en  $CX$ , y por la desigualdad del triángulo para  $D$  se sigue que

$$D([x, t], F_\epsilon[x, t]) \leq D([x, t], G_{\frac{\epsilon}{2}}[x, t]) + D(G_{\frac{\epsilon}{2}}[x, t], F_\epsilon[x, t]) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

y, por lo tanto,  $CA$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $CX$ .  $\square$

A continuación se demuestran los resultados principales de este capítulo, que son centrales para el resto del presente trabajo. La notación usada es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{n+1} &= \{\overline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\overline{x}\| \leq 2\} \\ \mathcal{C}^{n+1} &= \mathcal{B}^{n+1} \setminus \{\overline{0}\} \end{aligned}$$

La función inclusión de  $S^n$  en  $\mathcal{C}^{n+1}$  se denota por  $i$  y se especificará el valor de  $n$  solamente cuando no hacerlo pueda generar confusión.

**Lema 1.5.4.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, Supóngase que para algún  $n$  existen una función uniformemente continua  $T : X \rightarrow \mathcal{C}^{n+1}$  y una función continua  $\hat{\sigma} : S^n \rightarrow X$  tales que  $T \circ \hat{\sigma} \simeq i$ , donde  $i$  es la inclusión de  $S^n$  en  $\mathcal{C}^{n+1}$ . Entonces, existe un  $\epsilon > 0$  para el que no es posible encontrar una función  $\sigma_\epsilon : S^n \rightarrow X$  continua y homotópica a una constante que cumpla que  $d(\hat{\sigma}(s), \sigma_\epsilon(s)) < \epsilon$  para todo  $s$  en  $S^n$ .*

*Demostración.* Por contradicción:

Supóngase que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\sigma_\epsilon : S^n \rightarrow X$  continua y homotópica a una constante tal que  $d(\hat{\sigma}(s), \sigma_\epsilon(s)) < \epsilon$  para cada  $s$  en  $S^n$ .

Dado que  $S^n$  es compacto,  $T \circ \hat{\sigma}(S^n)$  es un compacto en  $\mathcal{B}^{n+1}$  que no tiene a 0 como elemento, por lo que existe un natural  $m$  tal que  $\|T \circ \hat{\sigma}(s)\| > \frac{1}{m}$  para cada  $s$  en  $S^n$ .

Ahora, como  $T$  es uniformemente continua, existe  $\delta > 0$  tal que si  $x$  y  $y$  cumplen que  $d(x, y) < \delta$  entonces  $\|T(x) - T(y)\| < \frac{1}{m}$ . De la suposición inicial se sigue que hay una  $\sigma_\delta : S^n \rightarrow X$  continua y homotópica a una constante tal que  $d(\hat{\sigma}(s), \sigma_\delta(s)) < \delta$  para todo  $s$  en  $S^n$ .

Considérese la función continua  $T \circ \sigma_\delta$ . La función  $\sigma_\delta$  es homotópica a una constante y  $T : X \rightarrow C^{n+1}$  es continua, por lo que la Proposición 1.2.3 implica que  $T \circ \sigma_\delta$  es homotópica a una constante. Nótese que, por las definiciones de  $\delta$  y  $\sigma_\delta$ , se tiene que

$$\|T \circ \hat{\sigma}(s) - T \circ \sigma_\delta(s)\| < \frac{1}{m},$$

para todo  $s$  en  $S^n$ .

Por el Ejemplo 1.2.2, dado que  $\mathcal{B}^{n+1}$  es convexo, se tiene que la función  $H : S^n \times I \rightarrow \mathcal{B}^{n+1}$  dada por

$$H(s, t) = j \circ T \circ \hat{\sigma}(s) + t \cdot (j \circ T \circ \sigma_\delta(s) - j \circ T \circ \hat{\sigma}(s))$$

es una homotopía entre  $j \circ T \circ \hat{\sigma}$  y  $j \circ T \circ \sigma_\delta$ , donde  $j : C^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$  es la inclusión de  $C^{n+1}$  en  $B^{n+1}$ .

Supóngase que 0 no está en la imagen de  $H$ . Entonces, se puede restringir a  $H$  en contradominio a  $C^{n+1}$ , y sea esta restricción  $\hat{H} : S^n \times I \rightarrow C^{n+1}$ , que es continua por ser  $H$  continua. De esto se sigue que  $\hat{H}$  una homotopía entre  $T \circ \hat{\sigma}$  y  $T \circ \sigma_\delta$  en  $C^{n+1}$  porque éstas tienen las mismas reglas de correspondencia que  $j \circ T \circ \hat{\sigma}$  y  $j \circ T \circ \sigma_\delta$ , respectivamente. Esto da lugar a una contradicción, porque la Proposición 1.2.18 muestra que al ser  $T \circ \hat{\sigma} \simeq i$ ,  $T \circ \hat{\sigma}$  no es homotópica a una constante y, por lo tanto, no es homotópica a  $T \circ \sigma_\delta$ .

De esta contradicción se sigue que se puede encontrar  $s_0$  en  $S^n$  tal que  $0 \in H(\{s_0\} \times I)$ , por lo que existe un  $\lambda$  en  $(0, 1)$  tal que

$$T \circ \hat{\sigma}(s_0) + \lambda(T \circ \sigma_\delta(s_0) - T \circ \hat{\sigma}(s_0)) = \bar{0}.$$

Luego, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{m} < \|T \circ \hat{\sigma}(s_0)\| = \lambda\|(T \circ \sigma_\delta(s_0) - T \circ \hat{\sigma}(s_0))\| < \|(T \circ \sigma_\delta(s_0) - T \circ \hat{\sigma}(s_0))\|,$$

que muestra que  $d(\hat{\sigma}(s_0), \sigma_\delta(s_0))$  no es menor estricto que  $\delta$  y, entonces se llega a una contradicción con la suposición de que  $\sigma_\delta$  aproxima a  $\hat{\sigma}$ , con lo que queda demostrado el lema.  $\square$

La siguiente proposición utiliza el Lema 1.5.4 para verificar si un subconjunto  $A$  de  $X$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$ .

**Proposición 1.5.5.** *Sea  $A$  un subconjunto cerrado de un espacio métrico  $(X, d)$ . Supóngase para alguna  $n$  existen una función uniformemente continua  $T : X \setminus A \rightarrow C^{n+1}$  y una función continua y homotópica a una constante  $\sigma : S^n \rightarrow X$ , cuya imagen no intersecta a  $A$ . Si  $T \circ \hat{\sigma}$  es homotópica a  $i$ , con  $\hat{\sigma}$  la restricción del codominio de  $\sigma$  a  $X \setminus A$  e  $i$  la inclusión de  $S^n$  en  $C^{n+1}$ , entonces  $A$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $X$ .*

*Demostración.* Por contradicción:

Supóngase que  $A$  es conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $X$ . Entonces, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $f_\epsilon : X \rightarrow X \setminus A$  continua tal que  $d(x, f_\epsilon(x)) < \epsilon$  para cada  $x$  en  $X$ .

Para cada  $\epsilon > 0$  se define  $\sigma_\epsilon = f_\epsilon \circ \sigma$ . Se tiene que  $d(\hat{\sigma}(s), \sigma_\epsilon(s)) < \epsilon$  en  $X \setminus A$  para cada  $s$  en  $S^n$ , lo que genera una contradicción con el Lema 1.5.4 porque la función  $T : X \setminus A \rightarrow C^{n+1}$  es uniformemente continua,  $\hat{\sigma}$  cumple que  $T \circ \hat{\sigma}$  es homotópica a  $i$  y  $\sigma_\epsilon$  es homotópica a una constante porque  $f_\epsilon$  es continua y  $\sigma$  es homotópica a una función constante.

De esta contradicción se sigue que existe un  $\epsilon_0 > 0$  para el que no es posible encontrar una función continua  $f_{\epsilon_0} : X \rightarrow X \setminus A$  que cumpla que  $d(x, f_{\epsilon_0}(x)) < \epsilon_0$  para cada  $x$  en  $X$  y por lo tanto  $A$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $X$ , con lo que queda demostrada la proposición.  $\square$



## Capítulo 2

# El arco, el ciclo y el triodo

Una gráfica finita  $G$  es un espacio métrico y compacto para el que se puede encontrar un conjunto

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

donde cada  $a_i$  es un subespacio de  $G$  homeomorfo a  $[0, 1]$ , en el que se cumple que, para cualesquiera  $i$  y  $j$  distintos, la intersección de  $a_i$  y  $a_j$  tiene a lo más un elemento, y éste es uno de los extremos de  $a_i$  y de  $a_j$ . Al conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  se le llama *separación de  $G$  en aristas*, a cada  $a_i$  se le llama *arista* de  $G$  con respecto a  $A$ , y a sus puntos extremos se les llama *vértices* de  $G$  con respecto a  $A$ .

**Definición 2.0.6.** *Se dice que una gráfica finita  $G$  es un arco si  $G$  es homeomorfa a  $I$ , y se dice que es un ciclo si es homeomorfa a  $S^1$ .*

**Definición 2.0.7.** *Sea  $G$  una gráfica finita con una separación en aristas  $A$ . Una trayectoria en  $G$  es una sucesión  $\alpha = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ , en la que cada  $a_i$  es una arista y cada  $v_i$  es un vértice, que cumple que dados  $i$  y  $j$  distintos,  $v_i$  y  $v_j$  son elementos distintos de  $G$ , y  $a_{i+1}$  es una arista que tiene a  $v_i$  y  $v_{i+1}$  como extremos. Se define la longitud de  $\alpha$  como el número de aristas en  $(v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ .*

Nótese que la unión de las aristas de una trayectoria es un arco, y que, como la cantidad de aristas en las que está separada  $G$  es finita, el conjunto de trayectorias es finito y, por lo tanto, es posible encontrar una trayectoria que tiene longitud máxima.

En este capítulo se estudia el segundo producto simétrico de algunas gráficas finitas conexas, que es como se llama a aquellas gráficas en las que  $G$  es conexo como espacio topológico. En las primeras dos secciones se prueba

que si una gráfica  $G$  es un ciclo o un arco, entonces  $F_1(G)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(G)$ . Como ya se definió, el espacio  $F_2(G)$  está formado por las parejas no ordenadas de elementos de  $G$ , es decir, los subconjuntos no vacíos de  $G$  con a lo más dos elementos.

Un modelo de  $F_2(G)$  es un conjunto que es biyectable con el conjunto subyacente de  $F_2(G)$  equipado con la métrica inducida por dicha biyección, lo que hace a  $F_2(G)$  y su modelo homeomorfos.

## 2.1. El segundo producto simétrico del arco

Se empezará construyendo un modelo del segundo producto simétrico del arco en  $\mathbb{R}^2$ . Para esto se considera al arco como el conjunto  $[0, 1]$  con su métrica usual, y se identifica el conjunto  $\{a, b\}$  con el par ordenado  $(\min\{a, b\}, \max\{a, b\})$  de  $\mathbb{R}^2$ , donde  $a$  y  $b$  están en  $[0, 1]$ . De esta forma se identifica a  $F_2([0, 1])$  con el triángulo cuyos vértices son los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ , que se denotará por  $\mathcal{T}$ . El espacio  $F_1([0, 1])$  queda encajado en  $\mathcal{T}$  en el conjunto

$$\Delta = \{(t, t) \mid t \in [0, 1]\}.$$

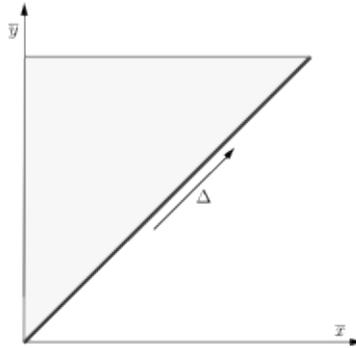


Figura 2.1: El conjunto  $\mathcal{T}$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Se puede ver que la métrica de Hausdorff en  $F_2([0, 1])$  induce la métrica del máximo en  $\mathcal{T}$  dada por

$$d_\infty((a, b), (a', b')) = \max\{|a - a'|, |b - b'|\},$$

que es la métrica del máximo en  $\mathbb{R}^2$ . Esta métrica es equivalente a la métrica usual de  $\mathbb{R}^2$ , por lo que cualquier función polinomial de  $\mathcal{T}$  en algún subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  es continua.

De aquí se sigue que para cada  $3 > \epsilon > 0$ , la función  $f_\epsilon : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} \setminus \Delta$  dada por

$$f_\epsilon(a, b) = ((1 - \epsilon/3) \cdot a, (1 - \epsilon/3) \cdot b + \epsilon/3)$$

es continua —la función  $f_\epsilon$  está bien definida ya que para cada  $(a, b)$  con  $a$  y  $b$  en  $[0, 1]$  las coordenadas de  $f_\epsilon((a, b))$  están en  $[0, 1]$  dado que  $(1 - \epsilon/3) \cdot c$  está en  $[0, 1 - \epsilon/3]$  si  $c$  está en  $[0, 1]$ . Además, como  $a \leq b$  y  $\epsilon/3 > 0$ ,  $(1 - \epsilon/3) \cdot a < (1 - \epsilon/3) \cdot b + \epsilon/3$ —. Esta función es una contracción con razón  $(1 - \epsilon/3)$  y centro en  $(0, 1)$ .

Las funciones  $f_\epsilon$  cumplen que  $|f_\epsilon(a, b) - (a, b)| < \epsilon$  para cada  $a$  en  $[0, 1]$  ya que  $|a - (1 - \epsilon/3) \cdot a|$  y  $|b - (1 - \epsilon/3) \cdot b - \epsilon/3|$  son menores estrictos que  $\epsilon$ . Esto muestra que  $F_1([0, 1])$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2([0, 1])$ .

## 2.2. El segundo producto simétrico del ciclo

Se construye un modelo para el hiperespacio  $F_2(S^1)$  como un cociente de  $[0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$  con su topología usual. Para esto se considera a  $S^1$  dotado de la métrica de la longitud de arco  $l$ , es decir, que dados dos puntos  $z_1$  y  $z_2$  en  $S^1$ ,  $l(z_1, z_2)$  es la longitud del menor arco entre  $z_1$  y  $z_2$ . Dicha métrica es equivalente a la métrica usual de  $S^1$ .

Sean  $h : S^1 \times S^1 \rightarrow F_2(S^1)$  la función dada en la Proposición 1.4.1, y  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por

$$p(\theta) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta)).$$

La función  $p$  es continua, por lo que las funciones  $a : [0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow S^1$  y  $b : [0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow S^1$  dadas respectivamente por

$$a(\alpha, \beta) = p(\alpha + \beta),$$

$$b(\alpha, \beta) = p(\alpha + \pi - \beta),$$

son a su vez continuas. Se ve que  $h \circ (a \times b) : [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow F_2(S^1)$  es continua por ser composición de funciones continuas y, si se le denota por  $P$ , se tiene que está dada por

$$P(\alpha, \beta) = \{p(\alpha + \beta), p(\alpha + \pi - \beta)\}.$$

Para cada  $\{p(\theta_1), p(\theta_2)\}$  en  $F_2(S^1)$  se toman los  $\theta_1$  y  $\theta_2$  que están  $[0, 2\pi)$ . Se puede encontrar una pareja  $(\alpha, \beta)$  en  $[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$  tal, que

$$\{p(\alpha + \beta), p(\alpha + \pi - \beta)\} = \{p(\theta_1), p(\theta_2)\}.$$

Dicho  $\alpha$  es de la forma

$$(\theta_1 + \theta_2)/2 + \pi/2 + n\pi,$$

donde  $n$  es un entero que hace que esta suma esté en  $[0, \pi]$ . Por la construcción de  $\alpha$  se ve que uno entre  $\theta_1 - \alpha$  y  $\theta_2 - \alpha$  está en  $[-\pi/2, \pi/2]$ , y se toma tal como  $\beta$ .

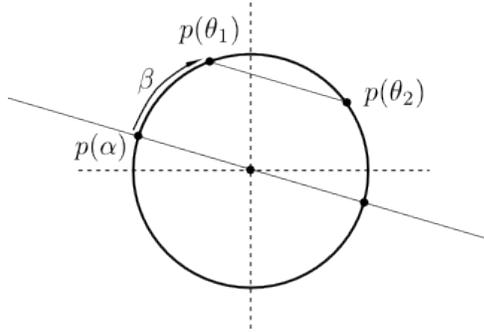


Figura 2.2: Los valores  $\alpha$  y  $\beta$ .

Esto muestra que  $P$  es suprayectiva y, dado que  $[0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$  es compacto y  $F_2(S^1)$  es de Hausdorff, que es una identificación. Entonces,  $F_2(S^1)$  es homeomorfo al cociente de  $[0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$  dado por la relación de equivalencia inducida por  $P$ .

Ahora bien, esta relación está dada por

$$(\alpha, \beta) \sim_P (\alpha', \beta') \text{ si y sólo si } (\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \text{ o } |\alpha - \alpha'| = \pi \text{ y } \beta = -\beta',$$

por lo que  $P$  restringida a  $[0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$  es inyectiva. El cociente de  $[0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$  sobre  $\sim_P$  se denotará por  $\mathcal{X}$ . No es difícil ver que  $\mathcal{X}$  es una cinta de Möbius y es un modelo para  $F_2(S^1)$  que tiene a  $F_1(S^1)$  en la imagen de  $[0, \pi] \times \{-\pi/2, \pi/2\}$  bajo la función cociente. Esta imagen se denotará por  $\Delta$ .

Sean  $(\alpha, \beta)$  y  $(\alpha, \beta')$  dos elementos de  $[0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ , y  $\overline{(\alpha, \beta)}$  y  $\overline{(\alpha, \beta')}$  sus respectivas clases de equivalencia en  $\mathcal{X}$ . La distancia entre estos dos elementos en  $\mathcal{X}$  con la métrica inducida por  $F_2(S^1)$  es  $|\beta - \beta'|$ , porque se usa la métrica de la longitud de arco en  $S^1$ .

Para  $\epsilon > 0$ , sea  $\overline{g}_\epsilon : [0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [0, \pi] \times (-\pi/2, \pi/2)$  dada por

$$\overline{g}_\epsilon((\alpha, \beta)) = \left( \alpha, \left(1 - \frac{\epsilon}{\pi}\right)\beta \right),$$

que es continua por ser polinomial y que, por el Lema 1.1.20, induce una función continua  $g_\epsilon : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \setminus \Delta$ . Para cada  $(\alpha, \beta)$  en  $[0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $g_\epsilon(\alpha, \beta) = (\alpha, (1 - \frac{\epsilon}{\pi})\beta)$ , por lo que la distancia entre  $(\alpha, \beta)$  y  $g_\epsilon(\alpha, \beta)$  en  $\mathcal{X}$  es

$$\left| \beta - (1 - \frac{\epsilon}{\pi})\beta \right| = \left| \frac{\epsilon \cdot \beta}{\pi} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

por lo que  $\Delta$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $\mathcal{X}$  y entonces,  $F_1(S^1)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(S^1)$ .

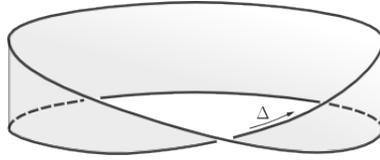


Figura 2.3: El conjunto  $\Delta$  es la frontera de  $\mathcal{X}$ .

### 2.3. El segundo producto simétrico del triodo

Los resultados que se acaban de probar para arcos y ciclos se pueden extender a gráficas con una cantidad finita de componentes conexas, en las cuales cada una de éstas es un arco o un ciclo. Sin embargo, si una de estas componentes falla en ser un arco o un ciclo, su hiperespacio  $F_1$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en su hiperespacio  $F_2$ . Esto se sigue de que la gráfica tiene un vértice en el que inciden al menos tres aristas, como se puede ver en la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.1.** *Sea  $G$  una gráfica conexa que no es un ciclo ni un arco, entonces  $G$  tiene un vértice en el que inciden al menos tres aristas.*

*Demostración.* Sea  $\alpha = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$  una trayectoria de longitud máxima en  $G$ . Existe una arista  $e$  que no está en  $\alpha$ , ya que, de no existir,  $G$  sería la unión de las aristas  $a_i$ , lo que es un arco. Se puede elegir  $e$  tal, que  $v_0$  y  $v_n$  no son sus puntos finales, ya que de no ser así, se sigue que  $G$  sería la unión de las aristas  $a_i$  y  $e$ , lo que formaría un ciclo.

Se define  $E$  como el subconjunto de  $G$  formado por los puntos  $x$  para los que existe una trayectoria  $\beta = (t_0, e, t_1, b_2, \dots, b_m, t_m)$  tal, que  $x$  pertenece a una arista de  $\beta$ . Es claro que un punto de una arista  $e'$  está en  $E$  si y sólo si  $e'$  está contenida en  $E$ , por lo que tanto  $E$  como  $G \setminus E$  son unión de

una cantidad finita de aristas, que son cerrados en  $G$ , por lo que ambos son cerrados. Se sigue que  $E = G$ , porque  $G$  es conexo y  $E$  es no vacío por tener contenido a  $e$ .

Sea  $\beta$  una trayectoria que tiene a  $e$  como primera arista y que tiene una arista a la que pertenece  $t_0$ . Sea  $\epsilon$  la primera arista de  $\beta$  con un vértice en  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ , a saber  $t_k$ , y sea  $c$  el otro vértice de  $\epsilon$ .

Si  $k = 0$  o  $k = n$  y  $c$  no es un vértice en  $\alpha$ , entonces  $\epsilon$  es una arista que tiene un vértice extremo común con  $\alpha$  pero que no está en ella, por lo que  $\alpha$  se puede extender una arista más. Pero  $\alpha$  es de longitud máxima, lo que muestra que  $t_k$  es un vértice interior de  $\alpha$ . Si el vértice  $c$  estuviera en  $\alpha$ , al menos uno entre  $c$  y  $t_k$  sería un vértice interior de  $\alpha$ , y se puede suponer que este vértice es  $t_k$ . En ambos casos, existen vértices  $t_{k-1}$  y  $t_{k+1}$  adyacentes a  $t_k$ . Como  $\epsilon$  no está en  $\alpha$ , es distinta de  $a_k$  y  $a_{k+1}$ , y se sigue que en  $t_k$  inciden al menos tres aristas.  $\square$

Las próximas secciones están dedicadas a mostrar que  $F_1(\Gamma_3)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en el producto simétrico  $F_2(\Gamma_3)$  del triodo  $\Gamma_3$ . La parte central de este resultado depende del Lema 1.5.4. El triodo es el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por:

$$\Gamma_3 = \{t \cdot e_1 \mid t \in [0, 1]\} \cup \{t \cdot e_2 \mid t \in [0, 1]\} \cup \{t \cdot e_3 \mid t \in [0, 1]\}$$

donde  $e_1, e_2$  y  $e_3$  son respectivamente los vectores unitarios  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ . En adelante se denotará al punto  $t \cdot e_i$  por  $t_i$ . Nótese que el elemento  $(0, 0, 0)$  admite tres de estas representaciones, las cuales se utilizarán indistintamente para denotarlo. La métrica asignada a  $\Gamma_3$  es la inducida por la métrica usual de  $\mathbb{R}^3$ .

Gracias al Corolario 1.4.6 se puede dar a  $\Gamma_3$  cualquier métrica que sea equivalente a la usual, y ésta dará lugar a una métrica en  $F_2(\Gamma_3)$  equivalente a la que induce la métrica usual. La métrica en  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\rho_1((a, b, c), (a', b', c')) = |a - a'| + |b - b'| + |c - c'|$$

es equivalente a la métrica usual en  $\mathbb{R}^3$  y, por lo tanto, la métrica inducida en  $\Gamma_3$  y que está dada por

$$\rho_1(r_i, s_j) = \begin{cases} |r - s|, & \text{si } i = j; \\ r + s, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

es equivalente a la métrica usual en  $\Gamma_3$ .

Si  $\{r_i, s_j\}$  y  $\{t_k, u_l\}$  son dos elementos de  $F_2(\Gamma_3)$  tales que  $\{i, j, k, l\}$  es un conjunto de a lo más dos elementos, entonces los puntos  $q_h$ , con  $h$  en

$\{i, j, k, l\}$  y  $q$  en  $[0, 1]$ , forman un subespacio  $J$  de  $\Gamma_3$  que es isométrico a  $[-1, 1]$  con su métrica usual y, por lo tanto,  $F_2(J)$  como subespacio métrico de  $F_2(\Gamma_3)$  es isométrico a  $F_2([-1, 1])$ . Así, la distancia de Hausdorff entre  $\{r_i, s_j\}$  y  $\{t_k, u_l\}$  está dada por:

$$H(\{r_i, s_j\}, \{t_k, u_l\}) = \text{máx}\{\rho_1(r_i, t_k), \rho_1(s_j, u_l)\}$$

si alguna isometría entre  $J$  y  $[-1, 1]$  hace que la imagen de  $r_i$  sea mayor o igual que la imagen de  $s_j$  y que la imagen de  $t_k$  sea mayor o igual que la de  $u_l$ .

Para las parejas de elementos de  $F_2(\Gamma_3)$  restantes, la métrica de Hausdorff está dada por:

$$H(\{r_i, s_j\}, \{t_k, u_l\}) = \begin{cases} \text{máx}\{s + t, s + u, \text{mín}\{r + t, r + u\}\}, \\ \text{máx}\{|u - t|, \text{mín}\{r + u, s + u\}, \text{mín}\{t + s, u + s\}\}, \end{cases}$$

usando el primer caso cuando  $i = j$  e  $i, k$  y  $l$  son distintos y el segundo solamente cuando  $i = k$  e  $i, j$  y  $l$  son distintos. Nótese que en estos dos casos, para  $\{r_i, s_j\}$  fijo se tiene que su distancia a  $\{t_k, u_l\}$  es siempre mayor que  $r$  y  $s$ .

## 2.4. Un modelo para $F_2(\Gamma_3)$

En esta sección se construye un modelo  $\mathcal{M}$  para el espacio  $F_2(\Gamma_3)$  formado de elementos de  $\mathbb{R}^3$ .

Cada elemento de  $F_2(\Gamma_3)$  de la forma  $\{r_i, s_j\}$  con  $i$  distinto de  $j$  se asocia con el vector  $r_i + s_j$ , la suma usual de los vectores  $r_i$  y  $s_j$  en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que los conjuntos  $C_1 = \{(0, r, s) \mid r, s \in [0, 1]\}$ ,  $C_2 = \{(r, 0, s) \mid r, s \in [0, 1]\}$  y  $C_3 = \{(r, s, 0) \mid r, s \in [0, 1]\}$  quedan contenidos en  $\mathcal{M}$ .

A continuación se construyen los puntos que representan a las parejas de la forma  $\{r_i, s_i\}$  donde  $r \geq s$ : el representante de  $\{r_1, s_1\}$  en  $\mathbb{R}^3$  será  $(r, 0, -s)$ , el de  $\{r_2, s_2\}$  será  $(-s, r, 0)$  y el de  $\{r_3, s_3\}$  será  $(0, -s, r)$ . Así, los elementos de la forma  $\{r_1, s_1\}$  quedan representados por los puntos del conjunto  $S_1$  dado por el simplejo con vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  y  $(1, 0, -1)$ . Se denota análogamente por  $S_2$  y  $S_3$  a los conjuntos de representantes de los elementos de la forma  $\{r_2, s_2\}$  y  $\{r_3, s_3\}$  respectivamente. Se tiene entonces que

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^3 (C_i \cup S_i).$$

De aquí y en adelante no se hará distinción entre los elementos de  $F_2(\Gamma_3)$  y los de  $\mathcal{M}$ , y se denotará por  $H$  a la métrica de Hausdorff inducida en  $\mathcal{M}$ .



Si  $r > 0$ , entonces para todo  $\delta \leq r$  positivo se tiene que el conjunto  $B_\delta^H(\{0, r_i\})$  es la unión de las bolas de radio  $\delta$  alrededor de  $\{0, r_i\}$  en los subespacios  $C_{p(i)}$ ,  $C_{p^2(i)}$  y  $S_i$ , donde  $p = (1, 2, 3)$  es la permutación cíclica del conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Nótese que los elementos de  $C_{p(i)} \cap C_{p^2(i)}$  —que también es la intersección de ambos con  $S_i$ — son de la forma  $\{0, r_i\}$ . Ahora bien, el conjunto  $\{0\}$  se encuentra en todos los conjuntos  $C_i$  y  $S_i$ , y cualquier bola de radio  $\epsilon > 0$  alrededor de él es la unión de las bolas de radio  $\epsilon$  alrededor de  $\{0\}$  en  $C_i$  y  $S_i$ .

La discusión anterior muestra que la topología inducida en  $\mathcal{M}$  por la métrica de Hausdorff de  $F_2(D_3)$  es su topología del subespacio inducida por  $\mathbb{R}^3$  con su topología usual, ya que para cada  $x$  existe un  $r$  tal que si  $\epsilon < r$ ,  $B_\epsilon^H(x)$  es un abierto tanto en la topología del subespacio en  $\mathcal{M}$  como en la topología inducida por  $H$ . Esto hace que para cada  $U$  abierto en alguna de estas topologías y cada punto en  $U$ , haya un abierto de ambas topologías entre dicho punto y  $U$ , lo que hace a  $U$  abierto en ambas topologías, por lo que son la misma topología.

## 2.5. $F_1(\Gamma_3)$ no es un conjunto $\mathcal{Z}$ en $F_2(\Gamma_3)$

Para demostrar el resultado principal de esta sección, se hará uso de la Proposición 1.5.5 y de los conjuntos  $C^n$  y  $\mathcal{B}^n$  definidos en la Sección 1.5. Se construirán una función uniformemente continua de  $\mathcal{M} \setminus \Delta$  a  $C^2$  y una función continua y homotópica a una constante de  $S^1$  a  $\mathcal{M}$ . Para hacer esto se aprovechará que la topología en  $\mathcal{M}$  es la inducida como subespacio de  $\mathbb{R}^3$ .

La función  $T : \mathcal{M} \setminus \Delta \rightarrow C^2$  se construirá proyectando a  $\mathcal{M}$  en  $\mathcal{P}$ , el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  que es el plano ortogonal al vector  $(1, 1, 1)$ . Este subespacio es isométrico al plano  $\mathbb{R}^2$  a través de una transformación ortonormal, por lo que se puede encontrar un múltiplo escalar de dicha isometría que haga que la imagen de  $\mathcal{M}$  bajo la composición de estas dos funciones esté contenida en  $\mathcal{B}^2$ , esto por ser  $\mathcal{M}$  un compacto. Sin embargo, para garantizar que la preimagen de  $\{0\}$  bajo  $T$  sea  $\Delta$ , se utilizará una función continua intermedia  $Q : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que haga que la imagen de  $\Delta$  esté contenida en el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  generado por  $(1, 1, 1)$  y entonces, al proyectar a  $Q(\mathcal{M})$  sobre  $\mathcal{P}$  se tendrá que  $Q(\Delta)$  será la preimagen de 0.

Se define la función  $Q : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$Q((a, b, c)) = \begin{cases} (a, b, c), & \text{si } (a, b, c) \text{ está en algún } C_i; \\ (a, -c, -c), & \text{si } (a, b, c) \text{ está en } S_1; \\ (-a, b, -a), & \text{si } (a, b, c) \text{ está en } S_2; \\ (-b, -b, c), & \text{si } (a, b, c) \text{ está en } S_3. \end{cases}$$

Esta función es continua por la Proposición 1.1.3, ya que los conjuntos  $C_i$  y  $S_i$  forman una familia finita de cerrados cuya unión es  $\mathcal{M}$ , y se tiene que  $Q$  restringida a cada  $C_i$  y  $S_i$  es polinomial y, por lo tanto, continua. Nótese que la imagen de  $\Delta$  bajo  $Q$  está contenida en la recta  $\mathcal{R} = \{(t, t, t) \in \mathbb{R}\}$ , como se quería.

Se denota por  $P$  a la función lineal dada por

$$P((x, y, z)) = \left( x - \frac{x+y+z}{3}, y - \frac{x+y+z}{3}, z - \frac{x+y+z}{3} \right),$$

que es continua y que proyecta ortogonalmente a los puntos de  $\mathbb{R}^3$  sobre el plano

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Se puede ver que  $\|P((1, 0, 0))\| = \|P((1, 0, 1))\| = 2/\sqrt{6}$ , donde  $\|\cdot\|$  es la norma usual de  $\mathbb{R}^3$  y, por lo tanto, la imagen bajo  $P$  de cualquier combinación lineal de la forma

$$t \cdot (1, 0, 0) + s \cdot (1, 0, 1),$$

con  $t \geq 0$ ,  $s \geq 0$  y  $t + s \in [0, 1]$ , debe tener norma menor que  $2/\sqrt{6}$  y, dado que cada punto del triángulo cuyos vértices son  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$  y  $(0, 0, 0)$  es de esa forma, la imagen de uno de estos puntos bajo  $P$  está en el disco de radio  $2/\sqrt{6}$  del plano  $\mathcal{P}$ . Este argumento se puede repetir para los puntos  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$  y  $(0, 1, 1)$  y, como  $\|P((1, 1, 1))\| = 0$ , se cumple que  $P(Q(\mathcal{M}))$  está contenida en el disco de radio  $2/\sqrt{6}$ .

Ahora, se dará un múltiplo escalar de una transformación ortonormal entre  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{P}$ . Para esto, basta definirla en una base para  $\mathbb{R}^2$ . Si se escoge una base cuyos elementos tengan la misma norma, entonces basta definir sus imágenes de tal forma que éstas tengan la misma norma y que el ángulo entre ellas sea el mismo que el ángulo entre los básicos de  $\mathbb{R}^2$  escogidos. Así,  $\{(2, 0), (2 \cos(\frac{2\pi}{3}), 2 \sin(\frac{2\pi}{3}))\}$  es una base para  $\mathbb{R}^2$  con sus dos elementos de norma igual a 2 y con el ángulo entre ellos igual a  $\frac{2\pi}{3}$ .

Los vectores  $P(0, 1, 0) = (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$  y  $P(0, 0, 1) = (\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$  tienen norma igual a  $2/\sqrt{6}$ , y no es difícil ver que el ángulo entre ellos es  $\frac{2\pi}{3}$ , por lo que la función lineal  $U$  que hace

$$(2, 0) \mapsto \left( \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) \text{ y } (2 \cos(\frac{2\pi}{3}), 2 \sin(\frac{2\pi}{3})) \mapsto \left( \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

es un múltiplo escalar de una transformación ortonormal, lo que hace a  $U$  un homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{P}$ . Nótese que  $U$  restringida a cualquier subespacio es un homeomorfismo, y que el hecho de que  $U$  sea múltiplo

escalar de una isometría lineal hace que la imagen de  $\mathcal{B}^2$  sea el disco de radio  $2/\sqrt{6}$  en  $\mathcal{P}$ .

Sea  $\bar{T} = U^{-1} \circ P \circ Q : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que es continua y uniformemente continua porque su dominio es un compacto. Además, por la forma en que fue construida,  $\bar{T}(\mathcal{M})$  está contenido en  $\mathcal{B}^2$  y  $\bar{T}^{-1}(\{0\}) = \Delta$ , por lo que  $\bar{T}$  se puede restringir en dominio y contradominio a  $\mathcal{M} \setminus \Delta$  y  $C^2$  respectivamente, y esta función se denotará por  $T$ .

A continuación se construye una función continua  $\zeta : S^1 \rightarrow \mathcal{M}$ , y para esto se utilizará la función  $\bar{T}$  ya definida. Nótese que la función  $P$  restringida a cada plano  $\bar{x}\bar{y}$ ,  $\bar{y}\bar{z}$  y  $\bar{z}\bar{x}$  es lineal y biyectiva, por lo que es un homeomorfismo, y así, se tiene que al estar  $C_1$  contenido en  $\bar{y}\bar{z}$ ,  $C_2$  en  $\bar{z}\bar{x}$  y  $C_3$  en  $\bar{x}\bar{y}$ ,  $\bar{T}$  restringida a  $C_i$  es un homeomorfismo entre  $C_i$  y  $\bar{T}(C_i)$  que además se comporta como una función lineal en  $C_i$  en el sentido de que si  $x$  y  $y$  están en  $C_i$  y  $r$  y  $s$  son escalares tales que  $r \cdot x + s \cdot y$  está en  $C_i$ , entonces se cumple que

$$\bar{T}(r \cdot x + s \cdot y) = r \cdot \bar{T}(x) + s \cdot \bar{T}(y).$$

Los elementos de  $C_1$  son de la forma  $r \cdot (0, 1, 0) + s \cdot (0, 1, 1)$  o de la forma  $r \cdot (0, 0, 1) + s \cdot (0, 1, 1)$ , donde  $r \geq 0$ ,  $s \geq 0$  y  $r + s$  está en  $[0, 1]$ , y las imágenes de  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  y  $(0, 1, 1)$  bajo  $\bar{T}$  son respectivamente  $(2, 0)$ ,  $(2 \cos(\frac{2\pi}{3}), 2 \sin(\frac{2\pi}{3}))$  y  $(2 \cos(\frac{\pi}{3}), 2 \sin(\frac{\pi}{3}))$ . Ahora bien, cada  $\theta$  en  $S^1$  entre  $0$  y  $\frac{2\pi}{3}$  se puede escribir como  $r_0 \cdot (2, 0) + s_0 \cdot (2 \cos(\frac{\pi}{3}), 2 \sin(\frac{\pi}{3}))$  o bien como  $r_0 \cdot (2 \cos(\frac{2\pi}{3}), 2 \sin(\frac{2\pi}{3})) + s_0 \cdot (2 \cos(\frac{\pi}{3}), 2 \sin(\frac{\pi}{3}))$  para algunos  $r_0 \geq 0$  y  $s_0 \geq 0$  con  $r_0 + s_0$  en  $[0, 1]$ , por lo que respectivamente para cada caso  $r_0 \cdot (0, 1, 0) + s_0 \cdot (0, 1, 1)$  o  $r_0 \cdot (0, 0, 1) + s_0 \cdot (0, 1, 1)$  es un elemento de  $C_1$  cuya imagen es  $\theta$ . Un análisis similar para  $C_2$  y  $C_3$  muestra que  $S^1$  está contenido en  $\bar{T}(\mathcal{M})$ .

Dado que  $S^1$  está contenido en  $\bar{T}(\mathcal{M})$ , se puede definir  $\sigma_1 : [0, \frac{2\pi}{3}] \rightarrow C_1$  por

$$\sigma_1(\theta) = \bar{T}_{|C_1}^{-1}(\cos(\theta), \sin(\theta)),$$

y las funciones  $\sigma_2 : [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \rightarrow C_2$  y  $\sigma_3 : [\frac{4\pi}{3}, 2\pi] \rightarrow C_3$  de manera análoga. Como  $\bar{T}_{|C_i}$  es un homeomorfismo, cada  $\sigma_i$  es continua. Además, se tiene que  $\sigma_1(\frac{2\pi}{3}) = \sigma_2(\frac{2\pi}{3})$ ,  $\sigma_2(\frac{4\pi}{3}) = \sigma_3(\frac{4\pi}{3})$ ,  $\sigma_3(2\pi) = \sigma_1(0)$ , y que  $[0, \frac{2\pi}{3}]$ ,  $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$  y  $[\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$  son cerrados en  $S^1$ . Entonces, por la Proposición 1.1.3 estas tres funciones inducen una función continua  $\sigma$  de  $S^1$  en  $\bigcup_{i=1}^3 C_i$  que se puede extender en contradominio a  $\mathcal{M}$ , y como  $0$  no está en la imagen de ninguna de las  $\sigma_i$ , la imagen de  $\sigma$  no interseca a  $\Delta$ . Esto permite definir a la función  $\hat{\sigma} : S^1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus \Delta$  con la misma regla de correspondencia que  $\sigma$ , lo que hace a  $\hat{\sigma}$  continua.

La función  $K : S^1 \times I \rightarrow \mathcal{M}$  dada por  $K(\theta, t) = (1-t) \cdot \sigma(\theta)$  es continua, por lo que  $\sigma$  es homotópica a la función constante  $0 : S^1 \rightarrow \mathcal{M}$ . También se puede ver que  $T \circ \hat{\sigma} = i$ , la inclusión de  $S^1$  en  $C^2$ , lo que se sigue directamente de la definición de  $\sigma$  y de  $\hat{\sigma}$ .

Con estas funciones es posible demostrar la siguiente proposición:

**Proposición 2.5.1.** *El hiperespacio  $F_1(\Gamma_3)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(\Gamma_3)$ .*

*Demostración.* La función  $T : \mathcal{M} \setminus \Delta \rightarrow C^2$  antes definida es uniformemente continua,  $\sigma$  es homotópica a una constante y su imagen no interseca a  $\Delta$ , además  $\hat{\sigma}$  cumple que  $T \circ \hat{\sigma}$  es homotópica a la inclusión de  $S^1$  en  $C^2$ . Entonces, por la Proposición 1.5.5 se tiene que  $\Delta$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $\mathcal{M}$  y gracias a la Proposición 1.5.2 se sigue que  $F_1(\Gamma_3)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(\Gamma_3)$ .  $\square$

## Capítulo 3

# El hiperespacio $F_2(\Gamma_n)$

Se define el eneado  $\Gamma_n$  como el subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  cuyos elementos son los vectores de la forma  $t \cdot e_i$ , donde  $\{e_i\}_{i=1}^n$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y  $t$  está en  $I$ . Rescatando la notación de la sección 2.3, se considerará que  $t_i$  es el vector  $t \cdot e_i$ . Nótese que cada conjunto  $\{t_i \mid t \in I\}$  es homeomorfo a  $I$ , y que los símbolos  $0_1, \dots, 0_n$  denotan a  $\bar{0}$ .

En este capítulo se aprovechará de las funciones construidas en el capítulo anterior para demostrar que  $F_1(\Gamma_n)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  de  $F_2(\Gamma_n)$ , para  $n \geq 3$ .

Para hacer esta prueba por recursión, se necesitarán funciones continuas de  $F_2(\Gamma_n) \setminus F_1(\Gamma_n)$  en  $F_2(\Gamma_{n-1}) \setminus F_1(\Gamma_{n-1})$ . Sin embargo, se necesitará que cada una estas funciones sea uniformemente continua, por lo que es conveniente definirlas como restricciones de funciones continuas de  $F_2(\Gamma_n)$  a  $F_2(\Gamma_{n-1})$ , que son compactos, lo que hace que cualquier función continua entre ellos sea uniformemente continua por la Proposición 1.1.6.

Este camino introduce una condición más a las funciones: se requerirá que  $F_1(\Gamma_n)$  sea la preimagen de  $F_1(\Gamma_{n-1})$  bajo la función respectiva entre  $F_2(\Gamma_n)$  y  $F_2(\Gamma_{n-1})$ . Para esto se construirán funciones sencillas entre uniones disjuntas de celdas de dimensión dos, que inducirán funciones como las requeridas entre  $F_2(\Gamma_n)$  y  $F_2(\Gamma_{n-1})$ .

### 3.1. $F_2(\Gamma_n)$ como cociente

Considérese el conjunto  $A_n$  dado por

$$A_n = \bigsqcup_{i=1}^n \{t_i \mid t \in I\}$$

que es la unión disjunta de  $n$  espacios homeomorfos al intervalo  $[0, 1]$ , con la topología de la unión disjunta. La función  $\pi$  de  $A_n$  en  $\Gamma_n$  dada por

$$\pi(t_i) = t_i$$

es una función continua —es continua en cada  $\{t_i \mid t \in [0, 1]\}$ — y suprayectiva de un compacto a un espacio de Hausdorff, por lo que es una identificación y, por lo tanto, se puede ver a  $\Gamma_n$  como el cociente  $A_n/\bar{0}$  dado por identificar los elementos en el conjunto  $\bar{0} = \{0_1, \dots, 0_n\}$ , que son los puntos de  $A_n$  en los que  $\pi$  no es inyectiva.

Sea  $\bar{\pi} : A_n \times A_n \rightarrow \Gamma_n \times \Gamma_n$  la función producto de  $\pi$  consigo misma. Se tiene que  $\bar{\pi}$  es continua por ser producto de funciones continuas, y es suprayectiva porque para cada  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$  en  $\Gamma_n$  existen  $a$  y  $b$  en  $A_n$  tales que  $\pi(a) = \bar{a}$  y  $\pi(b) = \bar{b}$  y, por lo tanto,  $\bar{\pi}((a, b)) = (\bar{a}, \bar{b})$ . Como  $A_n \times A_n$  es compacto y  $\Gamma_n \times \Gamma_n$  es de Hausdorff,  $\bar{\pi}$  es una identificación.

Se tiene que

$$A_n \times A_n = \bigsqcup_{i,j \leq n} C_{i,j},$$

donde se define

$$C_{i,j} = \{(s_i, t_j) \mid s, t \in [0, 1]\},$$

con  $i$  y  $j$  en  $\{1, \dots, n\}$ . Como  $A_n$  es la unión disjunta de  $n$  arcos este producto tiene la topología de la unión disjunta de los productos de las parejas de arcos, es decir, cada  $C_{i,j}$  es homeomorfo a la celda de dimensión dos, y entonces  $\Gamma_n \times \Gamma_n$  es homeomorfo a un cociente de la unión disjunta de celdas de dimensión dos. Nótese que los  $C_{i,j}$  son cerrados cuya unión es  $A_n \times A_n$ .

La función  $h : \Gamma_n \times \Gamma_n \rightarrow F_2(\Gamma_n)$  de la Proposición 1.4.1 es una identificación, por lo que la Proposición 1.1.19 implica que  $h \circ \bar{\pi} : A_n \times A_n \rightarrow F_2(\Gamma_n)$  es una identificación y, por lo tanto, que  $F_2(\Gamma_n)$  es homeomorfo a un cociente de  $A_n \times A_n$ .

### 3.2. Funciones $\mathcal{H}_n$

En esta sección se define una función continua  $\mathcal{H}_n$  de  $F_2(\Gamma_n) \setminus F_1(\Gamma_n)$  a  $F_2(\Gamma_{n-1}) \setminus F_1(\Gamma_{n-1})$  partiendo de una función entre  $A_n \times A_n$  y  $A_{n-1} \times A_{n-1}$  que inducirá la función requerida a través del Lema 1.1.20. Construir la función  $\mathcal{H}_n$  de esta forma la hará uniformemente continua. Se empleará la notación de la sección 3.1 para referirse a las funciones cociente  $\pi$ ,  $\bar{\pi}$  y  $h$ , para las cuales sólo se hace explícito su dominio y contradominio cuando estos puedan generar confusión.

La función  $\eta_n : A_n \times A_n \rightarrow A_{n-1} \times A_{n-1}$  a construir debe cumplir

- ser continua;
- para  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  en  $A_n \times A_n$ , se tenga que  $h \circ \bar{\pi} \circ \eta_n(\bar{x})$  y  $h \circ \bar{\pi} \circ \eta_n(\bar{y})$  coincidan siempre que  $h \circ \bar{\pi}(\bar{x})$  y  $h \circ \bar{\pi}(\bar{y})$  coincidan. Para  $\bar{x}$  en  $C_{i,j}$ , con  $i$  y  $j$  menores o iguales que  $n - 1$ , basta hacer que  $\eta_n$  se comporte como la identidad;
- si  $\eta_n(r_i, s_j) = (t_k, u_l)$ , entonces  $\eta_n(s_j, r_i) = (u_l, t_k)$ , es decir, que sea simétrica;
- dado que la preimagen de  $F_1(\Gamma_n)$  bajo  $h \circ \bar{\pi}$  son los puntos de la forma  $(t_k, t_k)$ , los puntos  $\eta_n(r_i, s_j)$ , con  $r_i$  y  $s_j$  distintos, deben tener coordenadas distintas ya que, de lo contrario, como el punto  $(r_i, s_j)$  va a dar a un punto de  $F_2(\Gamma_n) \setminus F_1(\Gamma_n)$  bajo  $h \circ \bar{\pi}$ , no se podría inducir una función de  $F_2(\Gamma_n) \setminus F_1(\Gamma_n)$  a  $F_2(\Gamma_{n-1}) \setminus F_1(\Gamma_{n-1})$ .

Si la función cambia el subíndice de  $r_n$  por  $n - 1$  en las coordenadas de los elementos de  $C_{n,i}$  y  $C_{i,n}$ , se obtiene una función que cumple con las condiciones discutidas arriba, excepto en los puntos de  $C_{n-1,n}$  y de  $C_{n,n-1}$ . Esto se arregla definiendo  $\eta_n : A_n \times A_n \rightarrow A_{n-1} \times A_{n-1}$  por

$$\eta_n(r_i, s_j) = \begin{cases} (r_i, s_j), & \text{si } i, j \leq n - 1; \\ (r_{n-1}, s_j), & \text{si } i = n, j < n - 1; \\ (r_i, s_{n-1}), & \text{si } i < n - 1, j = n; \\ (r_{n-1}, s_{n-1}), & \text{si } i = j = n; \\ (0_{n-1}, \text{máx}\{r, s\}_{n-1}), & \text{si } i = n, j = n - 1; \\ (\text{máx}\{r, s\}_{n-1}, 0_{n-1}), & \text{si } i = n - 1, j = n. \end{cases}$$

Esta función es continua restringida a cada  $C_{i,j}$  y, como estos conjuntos son cerrados disjuntos que cubren  $A_n \times A_n$ , se sigue de la Proposición 1.1.3 que  $\eta_n$  es continua; es la identidad en los puntos  $(r_i, s_j)$ , donde  $i$  y  $j$  son menores o iguales que  $n - 1$ ; es simétrica y manda puntos con coordenadas distintas en puntos con coordenadas distintas.

**Proposición 3.2.1.** *La función  $\eta_n$  induce una función de  $F_2(\Gamma_n) \setminus F_1(\Gamma_n)$  en  $F_2(\Gamma_{n-1}) \setminus F_1(\Gamma_{n-1})$  que es uniformemente continua y suprayectiva.*

Para demostrar esta proposición se usará la siguiente proposición auxiliar

**Proposición 3.2.2.** *Existe una única función continua  $\bar{\eta}_n$  de  $\Gamma_n \times \Gamma_n$  en  $\Gamma_{n-1} \times \Gamma_{n-1}$  tal que  $\bar{\pi} \circ \eta_n = \bar{\eta}_n \circ \bar{\pi}$ .*

*Demostración.* El resultado se prueba usando el Lema 1.1.20: sean  $(r_i, s_j)$  y  $(t_k, u_l)$  dos elementos de  $A_n \times A_n$  tales que  $\bar{\pi}(r_i, s_j) = \bar{\pi}(t_k, u_l)$ , es decir,  $(r_i, s_j)$  y  $(t_k, u_l)$  representan al mismo elemento de  $\Gamma_n \times \Gamma_n$ . De la definición de  $\bar{\pi}$  se tiene que  $(\pi(r_i), \pi(s_j)) = (\pi(t_k), \pi(u_l))$ , donde  $\pi$  es la función cociente entre  $A_n$  y  $\Gamma_n$ , y de esto se sigue que  $r = t$  y  $s = u$ .

Si  $r \neq 0$ , la única forma en que puede suceder que  $\pi(r_i) = \pi(t_k)$  es que  $i = k$  y, análogamente, si  $s \neq 0$ , se cumple que  $j = l$ . Ahora bien, si tanto  $r$  como  $s$  son distintos de 0, se tiene que  $(r_i, s_j) = (t_k, u_l)$ .

Si tanto  $r$  como  $s$  son 0, la imagen de  $(r_i, s_j)$  y de  $(t_k, u_l)$  bajo  $\bar{\pi} \circ \eta_n$  es el punto  $(\bar{0}, \bar{0})$ .

Si  $r = 0$  y  $s$  es distinto de 0, se tiene que  $j = l$  y, por lo tanto,  $\eta_n(r_i, s_j)$  y  $\eta_n(t_k, u_l)$  tienen a lo más una coordenada distinta, y en esta coordenada toman los valores  $0_i$  y  $0_k$  respectivamente. Sin embargo, la imagen de estos dos elementos bajo la función cociente  $\pi : A_{n-1} \rightarrow \Gamma_{n-1}$  es  $\bar{0}$ , por lo que  $\bar{\pi} \circ \eta_n(r_i, s_j) = \bar{\pi} \circ \eta_n(t_k, u_l)$ . Lo mismo sucede si  $s = 0$  y  $r$  es distinto de 0.

Estos casos muestran que  $\bar{\pi} \circ \eta_n(r_i, s_j) = \bar{\pi} \circ \eta_n(t_k, u_l)$ , y entonces, por el Lema 1.1.20, existe una única función continua  $\bar{\eta}_n : \Gamma_n \times \Gamma_n \rightarrow \Gamma_{n-1} \times \Gamma_{n-1}$  tal que  $\bar{\pi} \circ \eta_n = \bar{\eta}_n \circ \bar{\pi}$ .  $\square$

Del mismo Lema 1.1.20 se tiene que la regla de correspondencia de  $\bar{\eta}_n$  está dada por  $\bar{\eta}_n(\bar{x}) = \bar{\pi} \circ \eta_n(x)$ , donde  $\bar{x} = \bar{\pi}(x)$ .

*Demostración de la Proposición 3.2.1.* Sean  $\bar{\eta}_n$  como en la Proposición 3.2.2 y  $r_i, s_j, t_k$  y  $u_l$  elementos de  $A_n$  con  $\bar{r}_i, \bar{s}_j, \bar{t}_k$  y  $\bar{u}_l$  sus respectivas imágenes bajo la función cociente  $\pi$ . Supóngase que  $h(\bar{r}_i, \bar{s}_j) = h(\bar{t}_k, \bar{u}_l)$ , es decir, que  $\{\bar{r}_i, \bar{s}_j\} = \{\bar{t}_k, \bar{u}_l\}$ . Por esta suposición debe suceder que  $(\bar{r}_i, \bar{s}_j) = (\bar{t}_k, \bar{u}_l)$  o que  $(\bar{r}_i, \bar{s}_j) = (\bar{u}_l, \bar{t}_k)$ .

Si se da que  $(\bar{r}_i, \bar{s}_j) = (\bar{t}_k, \bar{u}_l)$ , es claro que  $\bar{\pi} \circ \bar{\eta}_n(\bar{r}_i, \bar{s}_j) = \bar{\pi} \circ \bar{\eta}_n(\bar{t}_k, \bar{u}_l)$ .

En cambio, si  $(\bar{r}_i, \bar{s}_j) = (\bar{u}_l, \bar{t}_k)$ , entonces se tiene que  $\bar{r}_i = \bar{u}_l$  y  $\bar{s}_j = \bar{t}_k$ , por lo que se puede suponer que  $r_i = u_l$  y que  $s_j = t_k$ .

Los dos elementos de  $A_{n-1} \times A_{n-1}$  dados por  $\eta_n(r_i, s_j) = (o_e, q_f)$  y  $\eta_n(s_j, r_i) = (q_f, o_e)$  son simétricos por la definición de  $\eta_n$ . Ahora bien, el elemento de  $F_2(\Gamma_{n-1})$  dado por  $h \circ \bar{\eta}_n(\bar{r}_i, \bar{s}_j) = h \circ \bar{\pi} \circ \eta_n(r_i, s_j)$  es  $\{\bar{o}_e, \bar{q}_f\}$ , y, a su vez,  $h \circ \bar{\eta}_n(\bar{t}_k, \bar{u}_l) = h \circ \bar{\pi} \circ \eta_n(s_j, r_i)$  es  $\{\bar{q}_f, \bar{o}_e\}$ .

Estos dos casos muestran que si se cumple que  $h(\bar{r}_i, \bar{s}_j) = h(\bar{t}_k, \bar{u}_l)$ , entonces  $h \circ \bar{\eta}_n(\bar{r}_i, \bar{s}_j) = h \circ \bar{\eta}_n(\bar{t}_k, \bar{u}_l)$ . Por el Lema 1.1.20, se tiene que existe una única función continua  $\hat{\eta}_n : F_2(\Gamma_n) \rightarrow F_2(\Gamma_{n-1})$  tal que  $\hat{\eta}_n \circ h = h \circ \bar{\eta}_n$ .

Por ser  $F_2(\Gamma_n)$  compacto,  $\hat{\eta}_n$  es uniformemente continua. También, dado que  $\eta_n$  deja fijos a los puntos de  $A_{n-1} \times A_{n-1}$ ,  $\bar{\eta}_n$  deja fijos a los puntos

de  $\Gamma_{n-1} \times \Gamma_{n-1}$  y, a su vez,  $\hat{\eta}_n$  fija a los puntos de  $F_2(\Gamma_{n-1})$  visto como subespacio de  $F_2(\Gamma_n)$ . Esto último garantiza que  $\hat{\eta}_n$  sea suprayectiva.

Sea  $\{\bar{r}_i\}$  un elemento de  $F_1(\Gamma_n)$ . Se tiene que  $\{\bar{r}_i\} = h \circ \bar{\pi}(r_i, r_i)$  y, por lo tanto,  $\hat{\eta}_n(\{\bar{r}_i\}) = h \circ \bar{\pi} \circ \eta_n(r_i, r_i)$ . Dado que en  $\eta_n(r_i, r_i) = (r_j, r_j)$  se cumple  $i = j$  cuando  $i$  es distinto de  $n$ , y  $j = n - 1$  cuando  $i = n$ , es claro que  $\hat{\eta}_n(\{\bar{r}_i\}) = \{\bar{r}_j\}$ , que es un elemento de  $F_1(\Gamma_{n-1})$ .

Así mismo, si  $\hat{\eta}_n(\{\bar{r}_i, \bar{s}_j\})$  está en  $F_1(\Gamma_{n-1})$  es porque las coordenadas de  $\bar{\pi} \circ \eta_n(r_i, s_j)$  son iguales. Esto quiere decir que las coordenadas de  $\eta_n(r_i, s_j)$  están en la misma clase de equivalencia de  $A_{n-1}/\bar{0}$ , por lo que son  $0_i$  y  $0_j$ , o son iguales. En el primer caso se tiene que  $r = 0 = s$  y, por lo tanto,  $\{\bar{r}_i, \bar{s}_j\} = \{\bar{0}\}$ . Si son iguales, se cumple que  $r_i = s_j$  y que  $\{\bar{r}_i, \bar{s}_j\} = \{\bar{r}_i\}$ . En ambos casos sucede que  $\{\bar{r}_i, \bar{s}_j\}$  está en  $F_1(\Gamma_n)$ . De esto último y del párrafo anterior resulta que  $F_1(\Gamma_n) = \hat{\eta}_n^{-1}(F_1(\Gamma_{n-1}))$ .

A partir de esto se define  $\mathcal{H}_n$  como la restricción de  $\hat{\eta}_n$  en dominio y contradominio a  $F_2(\Gamma_n) \setminus F_1(\Gamma_n)$  y  $F_2(\Gamma_{n-1}) \setminus F_1(\Gamma_{n-1})$  respectivamente. Por ser la restricción de una función uniformemente continua,  $\mathcal{H}_n$  es uniformemente continua y, como  $\hat{\eta}_n$  es suprayectiva y  $F_1(\Gamma_n) = \hat{\eta}_n^{-1}(F_1(\Gamma_{n-1}))$ , también es suprayectiva, con lo que queda demostrada la proposición.  $\square$

### 3.3. $F_1(\Gamma_n)$ no es subconjunto $\mathcal{Z}$ en $F_2(\Gamma_n)$

En esta sección se demuestra el resultado principal de este capítulo. Para demostrarlo se utilizará el resultado principal de la Sección 2.5 y funciones auxiliares que se construirán en el siguiente lema.

**Lema 3.3.1.** *Si  $n \geq 3$ , entonces existen una función uniformemente continua  $T_n : F_2(\Gamma_n) \setminus F_1(\Gamma_n) \rightarrow C^2$ , una función continua y homotópica a una constante  $\zeta_n : S^1 \rightarrow F_2(\Gamma_n)$  cuya imagen no interseca a  $F_1(\Gamma_n)$  y tal, que su restricción en codominio a  $F_2(\Gamma_n) \setminus F_1(\Gamma_n)$ , denotada por  $\hat{\zeta}_n$ , cumple que  $T_n \circ \hat{\zeta}_n = i$ , donde  $i$  es la inclusión de  $S^1$  en  $C^2$ .*

*Demostración.* Por inducción:

El caso  $n = 3$  se obtiene definiendo  $T_3 = T$  y  $\zeta_3 = \sigma$ , donde las funciones  $T : \mathcal{M} \setminus \Delta \rightarrow C^2$  y  $\sigma : S^1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus \Delta$  son como en la sección 2.5. Estas funciones cumplen las propiedades requeridas.

Paso inductivo:

Supóngase demostrado para  $l \geq 3$ .

Se puede pensar a  $F_2(\Gamma_l)$  contenido en  $F_2(\Gamma_{l+1})$ , por lo que se pueden definir  $\zeta_{l+1} = i_l \circ \zeta_l$ , donde  $i_l$  es la inclusión de  $F_2(\Gamma_l)$  en  $F_2(\Gamma_{l+1})$ , y  $T_{l+1}$  como la función  $T_l \circ \mathcal{H}_{l+1}$ .

La función  $T_{l+1}$  es uniformemente continua por ser composición de funciones uniformemente continuas, y  $\zeta_{l+1}$  es continua y homotópica a una constante porque  $\zeta_l$  es continua y homotópica a una constante e  $i_l$  es continua. Se tiene que la imagen de  $\zeta_{l+1}$  está contenida en  $F_2(\Gamma_l) \setminus F_1(\Gamma_l)$  y que  $T_{l+1}$  restringida a  $F_2(\Gamma_l) \setminus F_1(\Gamma_l)$  coincide con  $T_l$  porque  $\mathcal{H}_{l+1}$  fija a los elementos de  $F_2(\Gamma_l) \setminus F_1(\Gamma_l)$ . De esto se sigue que  $T_{l+1} \circ \hat{\zeta}_{l+1} = T_l \circ \hat{\zeta}_l = i$ , lo que demuestra la existencia de las funciones buscadas para  $l + 1$ .

Se sigue la existencia de las funciones buscadas  $T_n$  y  $\zeta_n$ , para  $n \geq 3$ .  $\square$

**Proposición 3.3.2.** *El hiperespacio  $F_1(\Gamma_n)$  no es subconjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(\Gamma_n)$  si  $n \geq 3$ .*

*Demostración.* Las funciones  $T_n$ ,  $\zeta_n$  y  $\hat{\zeta}_n$  definidas en el Lema 3.3.1 cumplen las hipótesis de la Proposición 1.5.5 considerando al conjunto  $A$  de dicha proposición como  $F_1(\Gamma_n)$ , por lo que se sigue que éste no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(\Gamma_n)$ .  $\square$

### 3.4. Gráficas con eneodos

En esta sección se prueba que si una gráfica finita  $G$  tiene un vértice en el que inciden al menos tres aristas, entonces  $F_1(G)$  no puede ser un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(G)$ . Para demostrar esto se utilizará la siguiente proposición.

**Proposición 3.4.1.** *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A$  un conjunto  $\mathcal{Z}$  de  $X$  y  $Y$  un subespacio de  $X$ . Si para cada  $\epsilon > 0$  existen  $0 < \delta < \epsilon/3$  y una función continua  $g_\epsilon : N_\delta(Y) \rightarrow Y$  que cumple  $d(x, g_\epsilon(x)) < 2\delta$  y  $g_\epsilon^{-1}(A) \subset A$ , entonces  $A \cap Y$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  de  $Y$ .*

*Demostración.* Sea  $f_\delta : X \rightarrow X \setminus A$  una función continua que aproxima en menos que  $\delta$  a la identidad. Es claro que  $f_\delta(Y)$  está contenido en  $N_\delta(Y) \setminus A$ . Se considera a  $g_\epsilon$  restringido en su dominio a  $N_\delta(Y) \setminus A$  y su contradominio a  $Y \setminus A$  y se define  $h_\epsilon = g_\epsilon \circ f_\delta|_Y$ , que es una función continua de  $Y$  en  $Y \setminus A$  que cumple que

$$d(x, h_\epsilon(x)) \leq d(x, f_\delta(x)) + d(f_\delta(x), g_\epsilon(f_\delta(x))) < \delta + 2\delta < \epsilon,$$

por lo que  $A \cap Y$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  de  $Y$ .  $\square$

**Definición 3.4.2.** *Se dice que un continuo  $X$  tiene un eneodo libre  $E$ , si existe un encaje de  $\Gamma_n$  en  $X$  con imagen  $E$ , donde  $E$  sin los puntos imagen de los elementos de  $\Gamma_n$  de la forma  $1_i$ , con  $i$  entre 1 y  $n$ , es un abierto de  $X$ .*

**Proposición 3.4.3.** *Si  $X$  es un continuo con un eneodo libre, entonces  $F_1(X)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  de  $F_2(X)$ .*

*Demostración.* Por contradicción:

Sea  $X$  un continuo con un eneodo libre tal, que  $F_1(X)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  de  $F_2(X)$ . Se identifica dicho eneodo con  $\Gamma_n$  y se le considera con la métrica de la suma  $\rho_1$  inducida por  $\mathbb{R}^n$  en  $\Gamma_n$  de forma análoga a la métrica de la suma inducida en  $\Gamma_3$  por  $\mathbb{R}^3$ .

Sea  $Y$  el eneodo dado por los elementos de  $\Gamma_n$  de la forma  $r_i$  con  $r \leq 1/2$ . Este subespacio es compacto y por lo tanto existe un  $\eta > 0$  tal que  $N_\eta(Y)$  está contenido en el abierto  $U = \Gamma_n \setminus \{1_i\}_{i=1}^n$ .

Para cada  $\epsilon > 0$  se puede dar  $0 < \delta < \min\{\eta, \frac{\epsilon}{3}\}$  y se define  $g_\epsilon : N_\delta(Y) \rightarrow Y$  por  $g_\epsilon(r_i) = (\frac{r}{1+2\delta})_i$  que es claramente continua por ser polinomial cuando se ve a  $\Gamma_n$  encajado en  $\mathbb{R}^n$  y además es inyectiva. Por la Proposición 1.4.5 esta función induce una función  $\bar{g}_\epsilon$  continua e inyectiva de  $F_2(N_\delta(Y))$  en  $F_2(Y)$  que por la Proposición 1.4.7 es una función continua e inyectiva de  $N_\delta(F_2(Y))$  en  $F_2(Y)$  que cumple que  $\bar{g}_\epsilon^{-1}(F_1(Y))$  está contenido en  $F_1(X)$ . Se puede ver que  $\rho_1(x, g_\epsilon(x)) < 2\delta$  para cada  $x$  en  $\Gamma_n$  y por lo tanto  $H(\bar{x}, \bar{g}_\epsilon(\bar{x})) < 2\delta$  para cada  $\bar{x}$  en  $N_\delta(F_2(Y))$ .

De la existencia de las funciones  $\bar{g}_\epsilon$  la Proposición 3.4.1 implica que  $F_1(Y)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(Y)$ . Pero esto es una contradicción con la Proposición 3.3.2, por lo que  $F_1(X)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(X)$ .  $\square$

Se sigue el siguiente corolario:

**Corolario 3.4.4.** *Sea  $G$  una gráfica finita. Si existe un vértice en  $G$  en el que inciden al menos tres aristas, entonces  $F_1(G)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(G)$ .*

*Demostración.* Sean  $A$  una separación de  $G$  en aristas y  $a_1, a_2, \dots, a_n$  todas las aristas que inciden sobre el vértice  $v$ , con  $n \geq 3$ . El conjunto  $A_n = \bigcup_{i=1}^n a_i$  es homeomorfo a  $\Gamma_n$  y los elementos de la intersección de  $A_n$  con la cerradura de  $G \setminus A_n$  son vértices de los  $a_i$  que no son  $v$ , por lo que  $A_n$  es un eneodo libre en  $G$ .

Como  $G$  tiene un eneodo libre, de la Proposición 3.4.3 se sigue el corolario.  $\square$

**Proposición 3.4.5.** *Sea  $G$  una gráfica finita. Se tiene que  $F_1(G)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(G)$  si y sólo si  $G$  es la unión disjunta de arcos y ciclos.*

*Demostración.* Si una componente conexa de  $G$  no es un arco ni un ciclo, de la Proposición 2.3.1 se sigue que debe tener un vértice en el que inciden

al menos tres aristas. Del Lema 3.4.4 se sigue que  $F_1(G)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(G)$ .

Sean  $K_1, K_2, \dots, K_m$  las componentes conexas de  $G$ . Dado que

$$G = \bigsqcup_{i=1}^m K_i,$$

el espacio  $F_2(G)$  es la unión disjunta de los espacios  $F_2(K_i)$  y  $K_i \times K_j$ , con  $i < j$ , y  $F_1(G)$  es la unión disjunta de los hiperespacios  $F_1(G)$ .

Supóngase que cada  $K_i$  es un arco o un ciclo. Entonces, para cada  $i$  existe una función continua  $f_\epsilon^i : F_2(K_i) \rightarrow F_2(K_i) \setminus F_1(K_i)$  que aproxima en menos que  $\epsilon > 0$  a la identidad. Sea  $g_\epsilon^i$  la función continua de  $F_2(K_i)$  a  $F_2(G) \setminus F_1(G)$  dada por la composición de  $f_\epsilon^i$  seguida de la inclusión de  $F_2(K_i) \setminus F_1(K_i)$  en  $F_2(G) \setminus F_1(G)$ . Por la Proposición 1.1.11, las funciones  $g_\epsilon^i$  y las inclusiones de  $K_i \times K_j$  en  $F_2(G) \setminus F_1(G)$  inducen una función continua de  $F_2(G)$  en  $F_2(G) \setminus F_1(G)$  que aproxima en menos que  $\epsilon$  a la identidad. Como esto se puede repetir para cada  $\epsilon$ , se sigue que  $F_1(G)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_2(G)$ , con lo que queda demostrada la proposición.  $\square$

## Capítulo 4

# El espacio $F_n(I)$

En este capítulo se analiza el espacio  $F_1(I)$  como subconjunto de  $F_n(I)$ . Este análisis es importante, pero para justificarlo se necesita la noción de arco libre, que está dada por la siguiente definición.

**Definición 4.0.1.** *Se dice que un espacio topológico  $X$  tiene un arco libre  $A$  si existe un encaje de  $[0, 1]$  en  $X$  cuya imagen es  $A$  tal, que el conjunto imagen de  $(0, 1)$  bajo dicho encaje es abierto en  $X$ .*

Esta definición es análoga a la de enredo libre. El análisis de este caso particular está justificado por la siguiente proposición, que se prueba al final de este capítulo.

**Proposición 4.0.2.** *Si un continuo  $X$  tiene un arco libre y  $F_1(I)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(I)$ , entonces  $F_1(X)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(X)$ .*

Entonces, como un primer paso para caracterizar las gráficas finitas  $G$  en las que se tiene que  $F_1(G)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(G)$  se verificará dicha propiedad para el arco. En este capítulo se hace referencia a la función  $h : I^n \rightarrow F_n(I)$  definida en la Proposición 1.4.1, que se denotará simplemente como  $h$  cuando no haya confusión sobre la  $n$  para la cual se utiliza.

### 4.1. El tercer producto simétrico del arco

En esta sección se muestra que el hiperespacio  $F_1(I)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_3(I)$ . Para llegar a este resultado se construye un modelo para  $F_3(I)$  que es cociente de un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  con su topología usual y se aprovechan las funciones  $P$  y  $U$  de la Sección 2.5 para inducir una función de  $F_3(I)$  en  $\mathcal{B}^2$ .

Sea

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\},$$

que es un subconjunto compacto de  $I^3$ . La función  $h : I^3 \rightarrow F_3(I)$  restringida a  $\mathcal{D}$  es continua y suprayectiva porque todo elemento de  $F_3(I)$  está dado por un conjunto  $\{a, b, c\}$  en el que se puede suponer que  $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ , y entonces  $(a, b, c)$  está en  $\mathcal{D}$  y  $h(a, b, c) = \{a, b, c\}$ . Como  $F_3(I)$  es métrico y por lo tanto de Hausdorff, se sigue que  $h$  es una identificación.

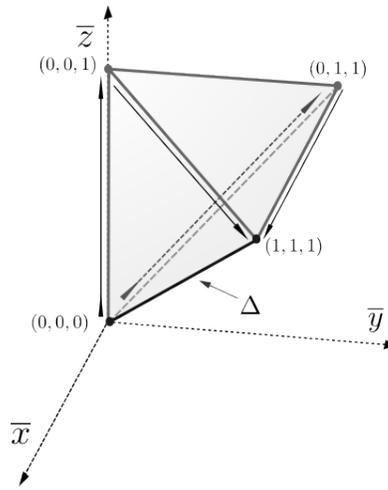


Figura 4.1: El espacio  $\mathcal{D}$  es un simplejo. Si se identifican las caras de  $\mathcal{D}$  con vértices  $\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  y  $\{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$  siguiendo las flechas, se obtiene un modelo para  $F_3(I)$ .

Ahora,  $h(x_1, y_1, z_1) = h(x_2, y_2, z_2)$  si y sólo si  $\{x_1, y_1, z_1\} = \{x_2, y_2, z_2\}$ , por lo que  $h$  identifica al vector  $(a, a, b)$  con el vector  $(a, b, b)$  y es inyectiva en el resto de  $\mathcal{D}$ . Nótese que la preimagen de  $F_1(I)$  en  $\mathcal{D}$  es el conjunto

$$\Delta = \{(t, t, t) \mid t \in I\}.$$

Considérese las funciones  $P$  y  $U$  de la Sección 2.5 y  $O : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $(\theta, r) \mapsto (6\theta, r)$  en coordenadas polares. Se puede ver que los vectores  $P(a, a, b) = (\frac{a}{3} - \frac{b}{3}, \frac{a}{3} - \frac{b}{3}, \frac{2b}{3} - \frac{2a}{3})$  y  $P(a, b, b) = (\frac{2a}{3} - \frac{2b}{3}, \frac{b}{3} - \frac{a}{3}, \frac{b}{3} - \frac{a}{3})$  tienen la misma norma y que abren el ángulo  $\frac{\pi}{3}$ , por lo que las imágenes de  $(a, a, b)$  y  $(a, b, b)$  bajo  $O \circ U^{-1} \circ P$  coinciden. Por esto y por ser  $O$ ,  $U^{-1}$  y  $P$

continuas,  $O \circ U^{-1} \circ P$  induce una función continua  $\bar{T} : F_3(I) \rightarrow \mathcal{B}^2$  que es uniformemente continua por tener dominio compacto. También se tiene que

$$(O \circ U^{-1} \circ P)^{-1}(\{0\}) = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y entonces la preimagen de  $\{0\}$  bajo  $\bar{T}$  es  $F_1(I)$ , por lo que esta función se puede restringir en dominio a  $F_3(I) \setminus F_1(I)$  y en contradominio a  $C^2$ , y se denota a esta función por  $T$ .

Como se vio en la Sección 2.5,  $U^{-1} \circ P$  es un homeomorfismo en el triángulo formado por los vectores  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  y  $(0, 1, 1)$ , y se puede definir  $\sigma_1$  como su inversa en el conjunto

$$A = \left\{ (\cos \theta, \text{sen } \theta) \mid \theta \in \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

Sea  $\bar{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{D}$  dada por  $\bar{\sigma}(\theta) = \sigma_1\left(\frac{\theta}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$ , que es continua por ser  $\sigma_1$  continua. Se puede ver que  $\bar{\sigma}(0) = (0, 1/2, 1/2)$  y  $\bar{\sigma}(2\pi) = (0, 0, 1/2)$ , por lo que el Lema 1.1.20 garantiza que la función  $\bar{\sigma}$  induce una función continua  $\sigma : S^1 \rightarrow F_3(I)$ , y esta función es homotópica a una constante porque la función  $K : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$  definida por

$$K(\theta, t) = (1 - t) \cdot \bar{\sigma}(\theta)$$

es una homotopía entre  $\bar{\sigma}$  y la función constante cuya imagen es  $\{0\}$  que además cumple que  $K(0, t_0)$  y  $K(2\pi, t_0)$  están relacionados por  $h$  para todo  $t_0$ , por lo que  $K$  induce una función continua entre  $S^1 \times I$  y  $F_3(I)$  que es una homotopía entre  $\sigma$  y una función constante.

Como  $\text{Im}(\bar{\sigma}) \cap \Delta = \emptyset$ , se puede definir  $\hat{\sigma}$  como la restricción en contradominio de  $\sigma$  a  $F_3(I) \setminus F_1(I)$ . Ahora,  $\bar{T} \circ \sigma : S^1 \rightarrow \mathcal{B}^2$  es la función inducida por  $O \circ U^{-1} \circ P \circ \bar{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , y dado que  $U^{-1} \circ P \circ \sigma_1 = \text{Id}_A$ , se tiene que  $O \circ U^{-1} \circ P \circ \bar{\sigma}(\theta) = (\cos(\theta + \frac{\pi}{3}), \text{sen}(\theta + \frac{\pi}{3}))$ , que induce la rotación por  $\frac{\pi}{3}$  en  $S^1$ , por lo que  $\bar{T} \circ \sigma$  y  $T \circ \hat{\sigma}$  son dicha rotación. Como  $H : [0, 2\pi] \times I \rightarrow C^2$  dada por

$$H(\theta, t) = T \circ \hat{\sigma} \left( \theta - t \cdot \frac{\pi}{3} \right)$$

es una homotopía entre  $T \circ \hat{\sigma}$  y la inclusión de  $S^1$  en  $C^2$ , por lo que se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.1.1.** *El hiperespacio  $F_1(I)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_3(I)$ .*

*Demostración.* Sean  $T : F_3(I) \setminus F_1(I) \rightarrow C^2$  y  $\sigma : S^1 \rightarrow F_3(I)$  las funciones definidas arriba. Como  $\sigma$  es homotópica a una constante y  $T \circ \hat{\sigma}$  es homotópica a la inclusión de  $S^1$  en  $C^2$ , de la Proposición 1.5.5 se sigue que  $F_1(I)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_3(I)$ .  $\square$

## 4.2. El cono $F_n(I)$

El espacio  $F_n(I)$  es un cono sobre el cono de un espacio topológico que se conoce en la literatura como “el sombrero de burro de dimensión  $n - 2$ ”. Este espacio ha sido estudiado en varios trabajos, en especial en esta tesis se hace referencia a [1, Sección 3, 14–17], en donde Andersen, Marjanovic y Schori muestran que si  $n$  es par, dicho espacio es contráctil, y si  $n$  es impar, es homotópicamente equivalente a  $S^{n-2}$ .

Se tiene que  $F_n(I)$  es el espacio cociente de  $I^n$  con la relación de equivalencia que hace que dos eneadas de  $I^n$  estén relacionadas si y sólo si los respectivos conjuntos que tienen por elementos sus coordenadas coinciden. Considérese el conjunto dado por

$$K_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}.$$

Para cada elemento de  $F_n(I)$  existe un elemento de  $K_n$  cuya imagen bajo  $h$  es dicho elemento de  $F_n(I)$ , por lo que  $h$  restringida a  $K_n$  es una identificación en  $F_n(I)$  por ser  $K_n$  compacto.

Nótese que  $K_n$  está formado por los elementos de  $\mathbb{R}^n$  que son de la forma  $\alpha_1 \cdot (0, \dots, 0, 1) + \alpha_2 \cdot (0, \dots, 0, 1, 1) + \dots + \alpha_n \cdot (1, \dots, 1)$  con  $\alpha_i \geq 0$  para cada  $i$  y con  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ .

Considérese también los conjuntos

$$L_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = 1\}$$

$$M_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 = x_1 \leq \dots \leq x_n = 1\}$$

y las funciones  $R : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $Q : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dadas por

$$R(\bar{x}, t) = t \cdot \bar{x}$$

$$Q(\bar{x}, t) = t \cdot \bar{x} + (1 - t) \cdot \bar{1},$$

donde  $\bar{x}$  está en  $\mathbb{R}^n$  y  $\bar{1}$  es el elemento de  $\mathbb{R}^n$  cuyas coordenadas son 1. Estas funciones son continuas por ser polinomiales y cumplen las siguientes propiedades:

- La imagen de  $L_n \times I$  bajo  $R$  es  $K_n$  y la de  $M_n \times I$  bajo  $Q$  es  $L_n$ .
- $R|_{L_n \times (0,1]}$  y  $Q|_{M_n \times (0,1]}$  son inyectivas.
- $R(L_n \times \{0\}) = \bar{0}$  y  $Q(M_n \times \{0\}) = \bar{1}$ .

Por esto,  $R$  y  $Q$  inducen funciones cociente de  $CL_n$  en  $K_n$  y de  $CM_n$  en  $L_n$  respectivamente. Dichas funciones cociente son homeomorfismos por ser biyectivas y por ser  $L_n$  y  $M_n$  compactos.

**Definición 4.2.1.** Sean  $a \leq b$  dos elementos de  $I$ . Se definen los conjuntos  $I_a^b(n)$  y  $I^b(n)$  por

$$I_a^b(n) = \{\{x_1, \dots, x_n\} \in F_n(I) \mid a = x_1 \leq \dots \leq x_n = b\}$$

$$I^b(n) = \{\{x_1, \dots, x_n\} \in F_n(I) \mid x_1 \leq \dots \leq x_n = b\}.$$

De la definición se ve que  $I^b(n) = \bigcup_{a \in [0, b]} I_a^b(n)$ , que la preimagen de  $I_0^1(n)$  bajo  $h|_{K_n}$  es  $M_n$  y que la preimagen de  $I^1(n)$  es  $L_n$ , por lo que  $h$  restringida a  $M_n$  es una identificación sobre  $I_0^1(n)$  y restringida a  $L_n$  es una identificación sobre  $I^1(n)$ .

Así,  $I_0^1(2) = \{\{0, 1\}\}$  es un conjunto de un elemento;  $I_0^1(3)$ , que es el conjunto  $\{\{0, x, 1\} \in F_3(I)\}$ , es el cociente del arco  $M_3 = \{(0, x, 1) \in I^3\}$  en el que se identifican los puntos  $(0, 0, 1)$  y  $(0, 1, 1)$ , por lo que  $I_0^1(3)$  es homeomorfo a  $S^1$ ; y el espacio  $I_0^1(4) = \{\{0, x, y, 1\} \in F_4(I) \mid x \leq y\}$  es un cociente del espacio  $M_4 = \{(0, x, y, 1) \in I^4 \mid x \leq y\}$ , que es homeomorfo al triángulo de  $\mathbb{R}^2$  cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$  a través de la función

$$(0, x, y, 1) \mapsto (x, y).$$

Los elementos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  de este triángulo están relacionados si y sólo si  $\{0, x_1, y_1, 1\} = \{0, x_2, y_2, 1\}$ , y las clases de equivalencia de esta relación están dadas de la siguiente forma:

Si  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  están relacionados y  $\{0, x_1, y_1, 1\}$  tiene cuatro elementos,  $x_1$  y  $y_1$  son distintos entre sí y distintos de 0 y de 1, por lo que  $x_1 = x_2$  y  $y_1 = y_2$  y entonces  $\{(x_1, y_1)\}$  es una clase de equivalencia.

Cuando  $\{0, x_1, y_1, 1\}$  tiene dos elementos se tienen los siguiente casos:

1.  $x_1 = y_1 = 0$
2.  $x_1 = 0$  y  $y_1 = 1$
3.  $x_1 = y_1 = 1$

y entonces,  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$  es una clase de equivalencia.

Finalmente, si  $\{0, x_1, y_1, 1\}$  tiene tres elementos, se debe cumplir una de las siguientes afirmaciones:

1.  $0 < x_1 < 1$  y  $x_1 = y_1$

2.  $x_1 = 0$  y  $0 < y_1 < 1$
3.  $0 < x_1 < 1$  y  $y_1 = 1$

por lo que el conjunto  $\{(x_1, x_1), (0, x_1), (x_1, 1)\}$ , con  $0 < x_1 < 1$ , forma una clase de equivalencia, y se deben identificar los tres segmentos que unen las parejas de vectores de  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ . Las flechas en la Figura 4.2 indican cómo se deben identificar los segmentos en el triángulo para obtener el espacio  $I_0^1(4)$ .

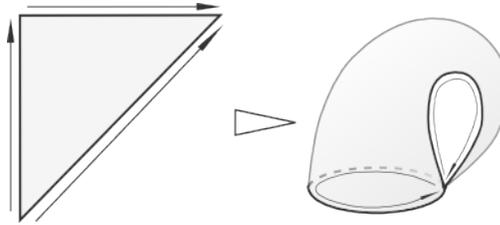


Figura 4.2: El conjunto  $I_0^1(4)$  es homeomorfo al espacio cociente del simplejo de la figura dado por identificar las tres flechas y suele llamarse “sombrero de burro” (Duncehat).

**Proposición 4.2.2.** *El espacio  $F_n(I)$  es homeomorfo al cono sobre  $CI_0^1(n)$  de tal forma que la imagen de  $F_1(I)$  es  $C\{[x, 0]\}$ , donde  $[x, 0]$  denota al vértice de  $CI_0^1(n)$ .*

*Demostración.* Como  $CM_n$  y  $CL_n$  son compactos y  $CI_0^1(n)$  y  $CI^1(n)$  son de Hausdorff, las funciones inducidas por  $h$  entre  $CM_n$  y  $CI_0^1(n)$  y entre  $CL_n$  y  $CI^1(n)$  son identificaciones.

Ahora, dados  $[x, t]$  y  $[y, s]$  en  $CM_n$ , sus imágenes en  $CI_0^1(n)$  son las mismas si y sólo si  $s = t$  y  $h(x) = h(y)$  o  $s = t = 0$ , es decir, que los conjuntos de las coordenadas de  $x$  y  $y$  son los mismos o bien,  $s = t = 0$ . De esto se sigue que  $Q(x, t)$  y  $Q(y, t)$  tienen el mismo conjunto de coordenadas, por lo que sus imágenes bajo  $h$  son las mismas y por lo tanto el homeomorfismo entre  $CM_n$  y  $L_n$  induce una función continua entre  $CI_0^1(n)$  y  $I^1(n)$ .

Análogamente, si  $x$  y  $y$  son elementos de  $L_n$  tales que  $h(x) = h(y)$ , sus conjuntos de coordenadas coinciden, por lo que sus preimágenes en  $CM_n$  bajo el homeomorfismo inducido por  $Q$  tienen a su vez el mismo conjunto de coordenadas, ya que  $h(x) = \{1\}$  implica que ambos provienen del vértice

de  $CM_n$ , y si  $h(x)$  es distinto de  $\{1\}$  se puede ver que la imagen inversa de  $Q$  en  $L_n \setminus \{\bar{1}\}$  está dada por

$$Q^{-1}(x) = \left[ \frac{x - \text{mín } \hat{x} \cdot \bar{1}}{1 - \text{mín } \hat{x}}, 1 - \text{mín } \hat{x} \right],$$

donde  $\hat{x}$  es el conjunto de las coordenadas de  $x$ , y esta función manda parejas de elementos con el mismo conjunto de coordenadas a parejas de elementos que a su vez tienen el mismo conjunto de coordenadas. Esto muestra que el homeomorfismo entre  $CM_n$  y  $L_n$  induce un homeomorfismo entre  $CI_0^1(n)$  y  $I^1(n)$ .

Haciendo un análisis similar se obtiene que  $CI^1(n)$  es homeomorfo a  $F_n(I)$ , ya que el homeomorfismo entre  $CL_n$  y  $K_n$  induce un homeomorfismo entre  $CI^1(n)$  e  $F_n(I)$ , porque tanto  $R$  como su inversa en  $K_n \setminus \{\bar{0}\}$ , que es la función dada por

$$R^{-1}(x) = \left[ \frac{x}{\text{máx } \hat{x}}, \text{máx } \hat{x} \right],$$

mandan parejas de elementos con el mismo conjunto de coordenadas a parejas de elementos que a su vez tienen el mismo conjunto de coordenadas. De esto se sigue que  $F_n(I)$  es homeomorfo a  $CCI_0^1(n)$ .

Bajo este homeomorfismo la preimagen de  $F_1(I)$  es  $C\{[*], 0\}$ , ya que la preimagen de  $\{t \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\}$  en  $CL_n$  es  $C\{\bar{1}\}$  y la preimagen de este en  $CCM_n$  es  $C\{[x], 0\}$ , donde  $[x], 0$  representa al vértice de  $CM_n$ , y a su vez, la imagen de este conjunto en  $CCI_0^1(n)$  es  $C\{[*], 0\}$ .  $\square$

El homeomorfismo entre  $F_n(I)$  y  $CCI_0^1(n)$  permite caracterizar las  $n$  para las que  $F_1(I)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(I)$ . Para dar tal caracterización, se utilizará que si  $n$  es impar,  $I_0^1(n)$  es homotópicamente equivalente a  $S^{n-2}$ , y si  $n$  es par,  $I_0^1(n)$  es contráctil, como se demuestra en [1, Teorema 3.4, Página. 15].

En la siguiente proposición se utiliza que todo cono sobre un espacio topológico es contráctil, como está demostrado en [14, Teorema 1.11].

**Proposición 4.2.3.**  $F_1(I)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(I)$  si y sólo si  $n$  es par.

*Demostración.* Para  $n$  par,  $I_0^1(n)$  y  $CI_0^1(n)$  son contráctiles, y entonces, por la Proposición 1.5.3, se sigue que  $\{[*], 0\}$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $CI_0^1(n)$  y que  $C\{[*], 0\}$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $CCI_0^1(n)$ , pero  $CCI_0^1(n)$  es homeomorfo a  $F_n(I)$  y bajo este homeomorfismo  $C\{[*], 0\}$  va a dar a  $F_1(I)$ , por lo que la Proposición 1.5.2 garantiza que  $F_1(I)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(I)$ .

Si  $n$  es impar,  $I_0^1(n)$  es homotópicamente equivalente a  $S^{n-2}$ , y entonces existen  $f : I_0^1(n) \rightarrow S^{n-2}$  y  $g : S^{n-2} \rightarrow I_0^1(n)$  continuas tales que  $f \circ g$  es

homotópica a la identidad en  $S^{n-2}$  y  $g \circ f$  es homotópica a la identidad en  $I_0^1(n)$ .

Ahora bien,  $f$  induce una función continua  $F : CI_0^1(n) \rightarrow CS^{n-2} = \mathcal{B}^{n-1}$  tal que la preimagen de  $\bar{0}$  es  $[\ast, 0]$ . La función de  $CI_0^1(n) \times I$  en  $\mathcal{B}^{n-1}$  dada por  $(\bar{x}, t) \mapsto t \cdot F(\bar{x})$  es continua e induce  $T : F_n(I) = CCI_0^1(n) \rightarrow \mathcal{B}^{n-1}$  continua tal que la preimagen de  $\bar{0}$  es  $C\{[\ast, 0]\}$ , por lo que  $T$  se puede restringir en dominio a  $CCI_0^1(n) \setminus C\{[\ast, 0]\}$  y en contradominio a  $C^{n-1}$ .

Por otro lado, las funciones  $g' : S^{n-2} \rightarrow CI_0^1(n)$  y  $\sigma : S^{n-2} \rightarrow CCI_0^1(n)$  dadas por  $s \mapsto [g(s), \frac{1}{2}]$  y  $s \mapsto [g'(s), 1]$  respectivamente, son continuas. Además,  $\sigma$  es homotópica a una constante, porque  $K : S^{n-2} \times I \rightarrow CCI_0^1(n)$  dada por

$$K(s, t) = [g'(s), t]$$

es una homotopía de una constante a  $\sigma$ . Como  $[\ast, 0]$  no está en la imagen de  $g'$ ,  $C\{[\ast, 0]\}$  no intersecta a la imagen de  $\sigma$  y se puede definir  $\hat{\sigma}$  como su restricción en contradominio a  $CCI_0^1(n) \setminus C\{[\ast, 0]\}$ .

La función  $T \circ \hat{\sigma}$  tiene la misma regla de correspondencia que  $f \circ g$  y su imagen está contenida en  $S^{n-2}$ , por lo que es homotópica a la inclusión de  $S^{n-2}$  en  $C^{n-1}$ . Entonces, de la Proposición 1.5.5 se sigue que  $C\{[\ast, 0]\}$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $CCI_0^1(n)$  y, por la Proposición 1.5.2, esto implica que  $F_1(I)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(I)$ , con lo que queda demostrada la proposición.  $\square$

Ahora se prueba la Proposición 4.0.2

*Demostración de la Proposición 4.0.2.* Por contradicción:

Supóngase que  $F_1(X)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(X)$ .

Se identifica a  $[0, 1]$  con la imagen  $A$  de su encaje y se considera la métrica en  $A$  como la métrica usual de  $[0, 1]$ . Es claro que  $Y = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  es un arco contenido en el abierto  $(0, 1)$  de  $X$  y, como  $Y$  es compacto, existe  $\eta > 0$  tal que  $N_\eta(Y) = (\frac{1}{3} - \eta, \frac{2}{3} + \eta)$  está contenido en  $(0, 1)$ .

Ahora bien, sean  $\epsilon > 0$ ,  $0 < \delta < \min\{\eta, \frac{\epsilon}{3}\}$  y  $g_\epsilon : N_\delta(Y) \rightarrow Y$  la función continua dada por

$$g_\epsilon(x) = \frac{x - 1/2}{1 + 6\delta} + 1/2.$$

Para cada  $\epsilon$  esta función es inyectiva, por lo que  $\bar{g}_\epsilon : F_n(N_\delta(Y)) \rightarrow F_n(Y)$  construida en la Proposición 1.4.5 es continua e inyectiva. En la Proposición 1.4.7 se muestra que  $F_n(N_\delta(Y)) = N_\delta(F_n(Y))$ , lo que hace a  $\bar{g}_\epsilon$  una función de  $N_\delta(F_n(Y))$  en  $F_n(Y)$  que cumple que  $\bar{g}_\epsilon^{-1}(F_1(Y))$  está contenido en  $F_1(X)$ , y dado que  $|x - g_\epsilon(x)| < 2\delta$ , se tiene que  $H(\bar{x}, \bar{g}_\epsilon(\bar{x})) < 2\delta$  para cada  $\bar{x}$  en  $N_\delta(F_n(Y))$ .

Con esto la Proposición 3.4.1 implica que  $F_1(Y)$  es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(Y)$ , lo que es una contradicción por ser  $Y$  un arco, por lo que  $F_1(X)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(X)$ .  $\square$

De esta proposición y del hecho de que toda arista en una gráfica es un arco libre se siguen los siguientes resultados:

**Corolario 4.2.4.** *Si  $X$  es un continuo con un arco libre y  $n$  es impar, entonces  $F_1(X)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  de  $F_n(X)$ .*

**Corolario 4.2.5.** *Si  $G$  es una gráfica con al menos una arista y  $F_1(I)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  en  $F_n(I)$ , entonces  $F_1(G)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  de  $F_n(G)$ .*

De donde se sigue el siguiente corolario:

**Corolario 4.2.6.** *Si  $G$  es una gráfica con al menos una arista y  $n$  es impar, entonces  $F_1(G)$  no es un conjunto  $\mathcal{Z}$  de  $F_n(G)$ .*



# Bibliografía

- [1] R. N. Andersen, M. M. Marjanovic, y R. M. Schori, Symmetric products and higher dimensional dunce hats, *Topology Proceedings* 18 (1993), 7–17.
- [2] R. D. Anderson, On topological infinite deficiency, *Mich. Math. J.* 14 (1967), 365–383.
- [3] K. Borsuk, On the third symmetric potency of the circumference, *Fund. Math.* 36 (1949), 235–244.
- [4] K. Borsuk y S. Ulam, On symmetric products of topological spaces, *Bull. A. M. S.*, 37 (1931), 235–244
- [5] R. Bott, On the third symmetric potency of  $S^1$ , *Fund. Math.* 39 (1952), 364–368.
- [6] S. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, New York, 1959.
- [7] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [8] A. Illanes, Models of hyperspaces, *Topology Proceedings* 41 (2013), 39–64.
- [9] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1999.
- [10] S. Macías y S. B. Nadler, Jr., Z-sets in hyperspaces, *Questions and Answers Gen. Topology* 19 (2001), 227–241.

- [11] J. M. Martínez-Montejano,  $C(X)$ -coselection spaces and  $Z$ -sets in hyperspaces, *Questions and Answers Gen. Topology* 22 (2004), 147–155.
- [12] W. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [13] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1978.
- [14] J. J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1988.
- [15] H. Toruńczyk, On  $CE$ -images of the Hilbert cube and characterization of  $Q$ -manifolds, *Fund. Math.* 106 (1980), 31–40.
- [16] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [17] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1970.