



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Algunos aspectos de cómo el enredamiento se  
comporta bajo cambios de sistemas de  
referencia no inerciales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:

TUPAC BRAVO IBARRA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. PABLO BARBERIS BLOSTEIN



2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

## Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno  
Bravo  
Ibarra  
Tupac  
55 94 84 39  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
305502900
2. Datos del tutor  
Dr.  
Pablo  
Barberis  
Blostein
3. Datos del sinodal 1  
Dr.  
Alfred Barry  
U'ren  
Cortés
4. Datos del sinodal 2  
Dr.  
Erick Leonardo  
Patiño  
Jaidar
5. Datos del sinodal 3  
Dr.  
Carlos Francisco  
Pineda  
Zorrilla
6. Datos del sinodal 4  
Dr.  
Saúl Noé  
Ramos  
Sánchez
7. Datos del trabajo escrito  
Algunos aspectos de cómo el enredamiento se comporta bajo cambios de sistemas de referencia  
no inerciales  
85 p  
2013

---

*“If the doors of perception were cleansed every thing would appear to man as it is, Infinite”*

*The Marriage of Heaven and Hell - William Blake*

# Agradecimientos

Quiero agradecer antes que nada a mi familia por todo el apoyo brindado. A mi papá y a mi mamá, tías y tíos, primas y primos (y demás) que estuvieron interesados todo el tiempo acerca de mi progreso a lo largo de toda mi carrera.

A todos mis amigos y amigas, que gracias a ellos soy la persona que soy hoy en día.

Al Dr. Pablo Barberis, por introducirme a esta maravillosa rama de la física que es la Información Cuántica Relativista, por apoyarme y motivarme a lo largo de ésta última faceta de mi carrera y por siempre estar al pendiente de mis intereses académicos. A este mismo nivel quiero agradecer también al Dr. Carlos Pineda (que también es sinodal), quien a pesar de no ser mi asesor bajo papel, lo fue en espíritu, interés y apoyo (por lo cual le asigné el título de “tío asesor”).

A la Dra. Ivette Fuentes de la Universidad de Nottingham, por su apoyo e interés mostrado en mi carrera y por ofrecerme formar parte de su equipo de investigación en la misma universidad.

Al Dr. Alberto Güijosa y al Dr. Saúl Ramos (quien también es sinodal), por su apoyo con discusiones de suma importancia para la realización de este trabajo y de planeaciones concernientes a mi futuro académico y por sus intentos de convencerme de estudiar esa maravillosa área de la física que es la Teoría de Cuerdas (leeré acerca de eso en mis tiempos libres).

Al Dr. Isaac Pérez del King’s College London, por una discusión importante de mi trabajo durante su estancia en México.

A la Dra. Citlali Sánchez Aké, por lograr mi interés en el área del depósito de películas delgadas por ablación láser.

A mis demás sinodales: el Dr. Alfred U’Ren y el Dr. Leonardo Patiño por su interés en mi

---

trabajo.

Finalmente, a la Universidad Nacional Autónoma de México por dejarme formar parte de esta maravillosa comunidad y por darme la oportunidad de estudiar esta asombrosa ciencia, al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) y a la UNAM a través del proyecto IA101713 y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) a través del proyecto 153190.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Objetivos y organización de la tesis</b>	<b>3</b>
<b>3. Espacio de Minkowski</b>	<b>5</b>
3.1. Convenciones y Diagramas Espacio-Tiempo . . . . .	5
3.2. Objetos Acelerados en el Espacio de Minkowski . . . . .	10
<b>4. Espacio de Rindler</b>	<b>14</b>
<b>5. Cuantización del Campo Escalar Real en Espacio de Minkowski</b>	<b>21</b>
5.1. Ecuación de Klein-Gordon y Expansión en Modos . . . . .	21
5.2. Espacio De Hilbert Generado por $\hat{a}_{\vec{k}}$ y $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ . . . . .	26
5.3. Hamiltoniano e Interpretación de <i>Partícula</i> . . . . .	28
<b>6. Cuantización del Campo Escalar Real en Marcos de Referencia No-inerciales</b>	<b>31</b>
6.1. Ecuación de Klein-Gordon Generalizada . . . . .	31
6.2. Transformaciones de Bogoliubov . . . . .	33
<b>7. Cuantización en Espacio de Rindler</b>	<b>37</b>
<b>8. Estudio del enredamiento mediante el uso de coordenadas de Rindler</b>	<b>43</b>
8.1. Alicia cae a un agujero negro: descripción del PRL 95, 120404 (2005) . . . . .	43

8.2. El efecto Unruh en información cuántica más allá de la aproximación <i>single-mode</i> : descripción del PRA 82, 042332 (2010) . . . . .	49
<b>9. Análisis crítico del enredamiento en coordenadas de Rindler</b>	<b>52</b>
9.1. El problema de la aproximación <i>single mode</i> . . . . .	52
9.2. Reinterpretación de enredamiento v.s. aceleración . . . . .	57
9.2.1. PRA 82, 042332 (2010) . . . . .	57
9.2.2. PRL 95, 120404 (2005) . . . . .	58
9.3. El problema de los detectores y propuesta para el cálculo de enredamiento . . . . .	59
<b>10. Conclusiones</b>	<b>63</b>
<b>Apéndice A. Álgebra Tensorial</b>	<b>64</b>
A.1. Variedades diferenciables y Espacio Tangente . . . . .	64
A.2. Sistemas de referencia . . . . .	67
A.3. Derivación covariante . . . . .	68
<b>Apéndice B. Equivalencia Schwarzschild-Rindler en el límite <math>r \rightarrow 2M</math></b>	<b>70</b>
<b>Apéndice C. Qubits y Enredamiento Cuántico</b>	<b>72</b>
C.1. Matriz de Densidad . . . . .	73
C.2. Transpuesta Parcial, Negatividad y Negatividad Logarítmica . . . . .	75

# Capítulo 1

## Introducción

La Información Cuántica Relativista (o RQI, por sus siglas en inglés) es una (relativamente) nueva área de la Física que tiene como objetivo la cuantificación y manipulación del enredamiento cuántico cuando se tienen los siguientes escenarios: si hay movimiento cuasi-lumínico (i.e., velocidades cercanas a la de la luz), si hay marcos no inerciales involucrados y/o si se consideran espacio-tiempos curvos (i.e., se toma a consideración la acción gravitatoria sobre el sistema en estudio).

En trabajos como [17], [9], [14], [18], [3] y más recientemente [6] (entre otros) ya se habían realizado cálculos de enredamiento cuántico usando representaciones del *grupo de Poincaré* bajo diferentes configuraciones de sistemas físicos.

En la última década se ha buscado generalizar estos resultados pero ahora considerando movimiento uniformemente acelerado. Desafortunadamente el grupo de Poincaré deja de ser una simetría del espacio cuando se trabaja en marcos no inerciales, por lo que no es posible usar las herramientas de teoría de representaciones planteadas por Weinberg en [19].

En los trabajos [8] y [5] (entre otros), se consideran estados de Bell cuyos subsistemas se describen usando diferentes modos; en [8], el estado inicial está expresado en modos de Minkowski, sin embargo un subsistema es descrito con modos dados por las coordenadas de Minkowski y el otro por modos dados por las coordenadas de Rindler, mientras que en [5] un subsistema es descrito por modos

---

de Minkowski y el otro por modos dados por la base de Unruh, introducidos en el capítulo 7. Con esto, se busca cuantificar el cambio del enredamiento como una función de la aceleración. En estos artículos se deja de lado el formalismo de Weinberg y se usa la *Teoría Cuántica de Campos* (o QFT, por sus siglas en inglés), en la cual ya hay cálculos realizados cuando se tienen sistemas de referencia no inerciales y/o espacio-tiempos curvos mediante el uso de las llamadas *transformaciones de Bogoliubov*, que nos permiten relacionar los distintos modos.

A pesar de que la manera de atacar el problema en cuestión en estos artículos es interesante, presentan un par de interpretaciones erróneas que pueden llevar a pensar que sus resultados obtenidos no son del todo correctos.

El objetivo del presente trabajo es analizar con cuidado dichos artículos ([8] y [5]) y recalcar los problemas de interpretación que poseen. Particularmente, se aclara el problema de la aproximación *single-mode*, el cual fue encontrado por los autores y en [5] proponen un camino alternativo para resolverlo.

Otro problema resuelto fue la interpretación del comportamiento del enredamiento como función de la aceleración. La Dra. Fuentes (autora de [8] y [5]) tenía sospechas de que algo estaba mal en los artículos mencionados y, durante una de sus estancias en México, lo discutimos junto con el Dr. Pablo Barberis. En su visita, la autora nos comentó de un posible problema con la interpretación de las gráficas que obtuvo en [8] y [5] y con su colaboración, lo estudiamos y encontramos la que creemos que es la interpretación correcta.

Este problema es comentado muy brevemente en [1]. En el presente trabajo se analiza con detenimiento este problema de interpretación y se presenta lo que pensamos que es la interpretación correcta para [8] y [5].

Adicionalmente, se propone una alternativa al cálculo de enredamiento usando *detectores de Unruh-DeWitt*.

## Capítulo 2

# Objetivos y organización de la tesis

En el presente trabajo se estudian formas para calcular el enredamiento cuántico mediante el uso de sistemas de referencia no inerciales.

En el capítulo 3 se hace un breve repaso del uso de diagramas espacio-tiempo y de la cinemática de objetos acelerados en el espacio de Minkowski.

En el capítulo 4 se introducen las coordenadas de Rindler como las coordenadas más convenientes para un observador uniformemente acelerado, describiendo a detalle sus propiedades matemáticas y topológicas (conexidad).

En el capítulo 5 se hace un breve repaso de la cuantización del campo escalar real en coordenadas de Minkowski, introduciendo a grandes rasgos las herramientas necesarias para el desarrollo del trabajo.

En el capítulo 6 se introducen las transformaciones de Bogoliubov, que nos permiten utilizar diferentes álgebras bosónicas para poder describir a un campo escalar en distintos sistemas de coordenadas y también se introducen relaciones entre los coeficientes de Bogoliubov.

En el capítulo 7 se particulariza el capítulo 6 al caso en que se utilizan coordenadas de Rindler para describir a un campo escalar real. Se especifican las transformaciones necesarias y se introduce la base de Unruh para poder saltar más fácilmente de la base de Minkowski a la base de Rindler, especificando las relaciones entre las distintas álgebras y relacionando los vacíos de Unruh, Minkowski

---

y Rindler.

En el capítulo 8 se relatan los desarrollos seguidos en el PRL 95, 120404 (2005) y en el PRA 82, 042332 (2010) (respectivamente) y se reproducen los cálculos pertinentes.

En el capítulo 9 estudian a fondo los procesos seguidos por los autores en los artículos mencionados y se mencionan problemas con las interpretaciones y herramientas utilizadas en dichos artículos. También se presenta una alternativa para medir el enredamiento usando detectores de Unruh-Dewitt.

## Capítulo 3

# Espacio de Minkowski

### 3.1. Convenciones y Diagramas Espacio-Tiempo

En el espacio-tiempo plano con coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ , la métrica en uso es  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Un postulado importante para la física en general (no sólo para la relatividad) es el hecho de que la velocidad de la luz  $c$  (en el vacío) es la misma para cualquier observador. Esto lleva a consecuencias como la contracción de Lorentz y la dilatación temporal.

Para poder describir el movimiento de una partícula en el espacio-tiempo, se usan *diagramas espacio-tiempo*, donde se usa el eje vertical para describir el tiempo y el eje horizontal para describir la posición (usualmente se considera el movimiento únicamente en la dirección  $x$ ). De esta manera, un objeto que se mueve a velocidad constante (por ejemplo) sigue una trayectoria recta.

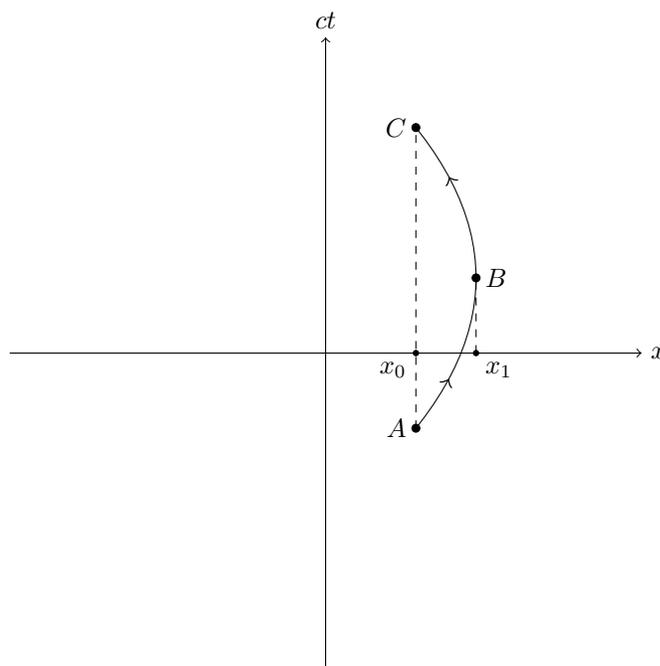


Figura 3.1: Un objeto parte de  $x_0$  (evento  $A$ ) y viaja en la dirección  $x$  con velocidad variable. Al llegar a  $x_1$ , frena por completo (evento  $B$ ) y regresa a  $x_0$  (evento  $C$ ).

Consideremos un objeto que sigue una cierta trayectoria  $T$  en un diagrama espacio-tiempo para un observador  $O$ , y sea  $\bar{O}$  un segundo observador tal que en su sistema de referencia, el objeto en cuestión siempre permanece en reposo (i.e. el marco de referencia del objeto). Tomemos como ejemplo la trayectoria de la figura 3.1. El tiempo que transcurre entre los eventos  $A$  y  $C$  depende del observador en cuestión. Se suele llamar *tiempo propio* al tiempo que mide el observador  $\bar{O}$  y suele denotarse por  $\tau$ .

Si el observador  $O$  mide un intervalo de tiempo  $\Delta t$  y el observador  $\bar{O}$  mide un intervalo de tiempo  $\Delta \tau$ , entonces ambos intervalos están relacionados mediante  $\Delta t = \gamma \Delta \tau$ , donde  $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ , o si se usan unidades naturales (haciendo  $c = 1$ <sup>1</sup>, que es lo más común) se tiene que  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  (a  $\gamma$  se le conoce como el factor de Lorentz).

Sea una partícula que se mueve a velocidad constante  $v$  en la dirección  $x$  en un sistema de

<sup>1</sup>A partir de este punto se usarán unidades naturales a lo largo de este trabajo a menos que se indique explícitamente lo contrario

referencia  $O$  y otro sistema de referencia  $\bar{O}$  en el cual la partícula permanece en reposo. Sean  $\{x^\mu\} = (t, x, y, z)$  las coordenadas para el sistema de referencia  $O$  y  $\{x^{\bar{\mu}}\} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  las coordenadas para  $\bar{O}$ . La matriz de transformación para pasar de  $O$  a  $\bar{O}$  está dada por

$$\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Con esto se tiene que  $\bar{t} = \gamma(t - vx)$ ,  $\bar{x} = \gamma(x - vt)$ ,  $\bar{y} = y$ ,  $\bar{z} = z$ . A estas transformaciones se le conocen como *transformaciones de Lorentz*. En ocasiones y en casos más generales, esta específica transformación de Lorentz se conoce como *boost*.

Un *4-vector* es un vector en el espacio de Minkowski, i.e. es un vector tangente a una trayectoria en el espacio de Minkowski y transforma como  $V^{\bar{\mu}} = \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu} V^{\nu}$ , donde  $\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu}$  es la forma matricial de las transformaciones de Lorentz.

El producto interior entre dos 4-vectores está dado en términos de la métrica de Minkowski por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} \quad (3.2)$$

y de igual manera, la norma de un 4-vector se obtiene a partir de

$$\vec{A}^2 \equiv |\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} . \quad (3.3)$$

Dado que la norma de un 4-vector es una pseudo-distancia (debido a que no es definida positiva), puede ser positiva, nula (no sólo para el vector cero) o incluso negativa. Podemos entonces clasificar a un 4-vector  $\vec{A}$  como

- *espacialoide*, si  $\vec{A}^2 < 0$
- *temporaloide*, si  $\vec{A}^2 > 0$
- *nulo*, si  $\vec{A}^2 = 0$  .

La *4-velocidad* es un 4-vector definido como

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (3.4)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio del objeto de estudio.

Para el sistema momentáneamente en reposo<sup>2</sup>, las componentes de la 4-velocidad son simplemente  $\{u^{\bar{\mu}}\} = (1, 0, 0, 0)$ , mientras que para el sistema donde tiene rapidez distinta a cero es  $\{u^\mu\} = \gamma(1, u^i)$ , donde  $u^i$  es la velocidad usual euclidea. La norma de la 4-velocidad es siempre mayor a cero, por lo que es un 4-vector temporaloide. Más aún,  $u^\mu u_\mu = 1$  siempre.

Análogamente, la *4-aceleración* se define como

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (3.5)$$

y es un vector espacialoide puesto que  $\vec{a}^2 < 0$ . Las componentes de la 4-aceleración en el SMR son  $\{a^{\bar{\mu}}\} = (0, \alpha, 0, 0)$ , donde  $\alpha^2 = -a^\mu a_\mu$  es la magnitud de  $a$ . Las componentes para el sistema donde el objeto está acelerado son  $\{a^\mu\} = (\alpha\gamma v, \alpha\gamma, 0, 0)$ .

Debido a que ningún objeto puede viajar más rápido que la luz en vacío, las trayectorias espacialoides están prohibidas. Por lo mismo, la luz viaja en líneas rectas nulas (rectas a 45<sup>o</sup>).

---

<sup>2</sup>Sistema de referencia en el cual el objeto en estudio está en reposo (SMR)

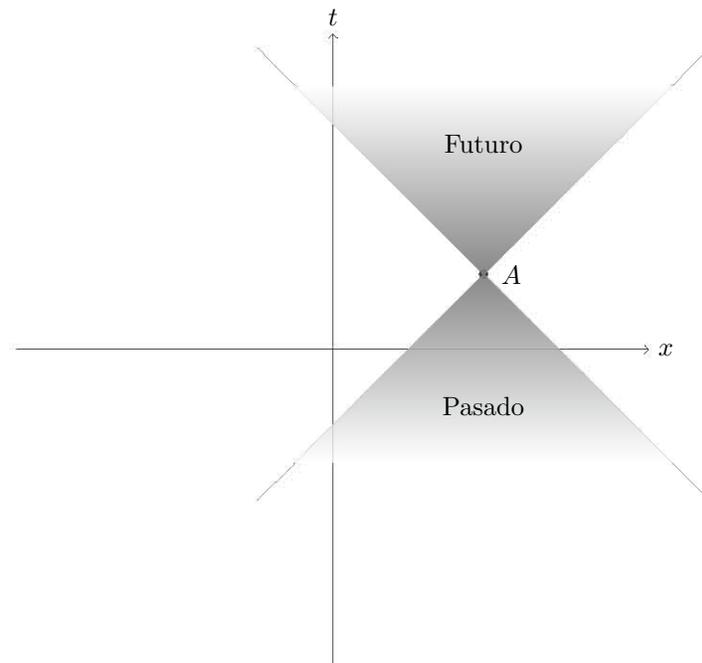


Figura 3.2: El cono de luz para el evento  $A$ : en la sección superior está el futuro de  $A$  y en la sección inferior está el pasado de  $A$ .

El que no sea posible viajar más rápido que la luz le otorga a cada evento  $A$  una subvariedad en la cual es capaz de enviar y recibir información, por ejemplo en forma de luz. Como nada supera la velocidad de la luz, esta subvariedad se representa como conos en los diagramas espacio-tiempo y se les llama *conos de luz*; de esta manera lo que se encuentra arriba dentro del cono de luz representa el futuro de  $A$  y lo que está abajo dentro del cono de luz es el pasado de  $A$ , como se muestra en la figura 3.2.

Si un evento  $A$  se encuentra dentro del cono de luz de un evento  $B$  (o viceversa), se dice que  $A$  y  $B$  son *causalmente conexos*, y si por el contrario  $A$  no está dentro del cono de luz de  $B$  o viceversa, entonces  $A$  y  $B$  son *causalmente desconexos*.

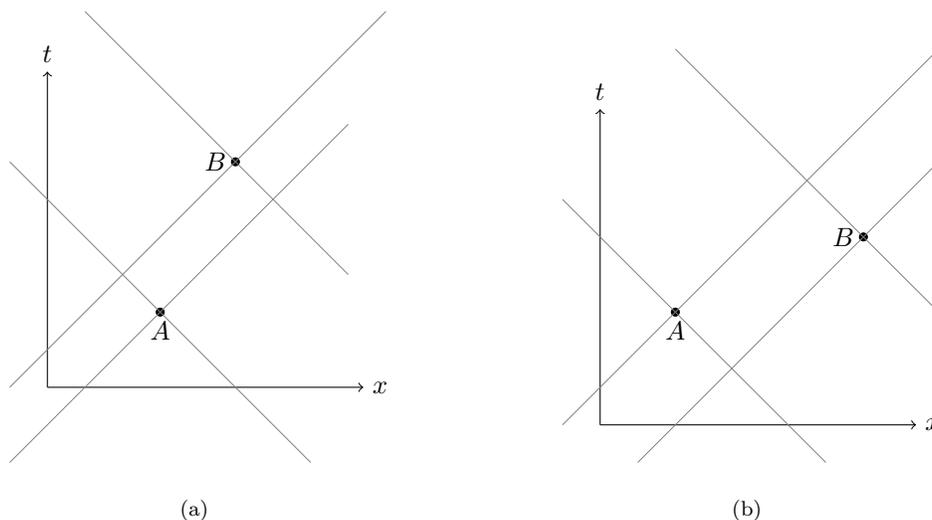


Figura 3.3: La figura 3.3(a) muestra dos eventos causalmente conexos, mientras que la figura 3.3(b) muestra dos eventos causalmente desconexos

## 3.2. Objetos Acelerados en el Espacio de Minkowski

¿Cuál es la trayectoria que sigue un objeto acelerado en el espacio de Minkowski?

Supongamos que una partícula se mueve con aceleración constante sobre el eje  $x$ . Por simplicidad, consideraremos un espacio 1+1 dimensional, i.e., con una dimensión temporal y una espacial.

Sabemos que

$$\alpha^2 = -a^\mu a_\mu = -\left(\frac{du^0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du^1}{d\tau}\right)^2. \quad (3.6)$$

Por otro lado,  $u^{0^2} - u^{1^2} = u^\mu u_\mu = 1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) &= 2u^0 \frac{du^0}{d\tau} - 2u^1 \frac{du^1}{d\tau} = 0 \\ \Rightarrow \frac{du^0}{d\tau} &= \frac{u^1}{u^0} \frac{du^1}{d\tau}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sustituyendo la ec. (3.7) en la ec. (3.6),

$$\alpha^2 = - \left( \frac{u^1}{u^0} \frac{du^1}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{du^1}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{u^{0^2}} \left( \frac{du^1}{d\tau} \right)^2 . \quad (3.8)$$

Por otra parte,

$$dt = \gamma d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{du^1}{d\tau} = \gamma \frac{du^1}{dt} . \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.9) en (3.8) y recordando que  $u^0 = \gamma$ ,

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \left( \frac{du^1}{dt} \right)^2 \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{du^1}{dt} . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Integrando (3.10), tenemos entonces que  $u^1 + k_1 = \alpha t$ , pero sabemos que  $u^1 = \gamma v$ , entonces

$$\alpha t - k_1 = \gamma v = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} . \quad (3.11)$$

Despejando  $v$  de (3.11),

$$v = \frac{\alpha t - k_1}{\sqrt{1 + (\alpha t - k_1)^2}} . \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.12) en la definición de  $\gamma$  y recordando que  $dt = \gamma d\tau$ , obtenemos

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = \frac{dt}{\sqrt{1 + (\alpha t - k_1)^2}} . \quad (3.13)$$

Integrando (3.13) obtenemos finalmente que

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \sinh^{-1}(\alpha t - k_1) + k_2 \quad (3.14)$$

y

$$t = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau - k_2) + \frac{k_1}{\alpha} \quad (3.15)$$

y como

$$\frac{dx}{d\tau} = u^1 = \alpha t - k_1 = \sinh(\alpha\tau - k_2) ,$$

entonces

$$x = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau - k_2) + k_3 , \quad (3.16)$$

donde las constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  se definen fijando un origen en  $x$  y  $t$  y una velocidad inicial.

Tomando  $t(\tau = 0) = t_0$ ,  $x(\tau = 0) = x_0$  y  $v(\tau = 0) = v_0$ , obtenemos finalmente que

$$\begin{cases} t = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau + \tanh^{-1} v_0) + t_0 - \frac{\gamma_0}{\alpha} v_0 \\ x = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau + \tanh^{-1} v_0) + x_0 - \frac{\gamma_0}{\alpha} v_0 \end{cases} , \quad (3.17)$$

donde  $\gamma_0$  es el factor gamma de Lorentz evaluado en la velocidad inicial  $v_0$ .

La trayectoria descrita por estas ecuaciones resultan ser hipérbolas. Podemos apreciar mejor este hecho haciendo (como ejemplo)  $t_0 = x_0 = 1/\alpha$  y  $v_0 = 0$  (del cual,  $\gamma_0 = 1$ ) y restando los cuadrados de (3.15) y (3.16), de donde vemos que

$$\begin{aligned} x^2 - t^2 &= \frac{1}{\alpha^2} (\cosh^2(\alpha\tau) - \sinh^2(\alpha\tau)) \\ \Rightarrow x^2 - t^2 &= \frac{1}{\alpha^2} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.2. OBJETOS ACELERADOS EN EL ESPACIO DE MINKOWSKI

---

Con esta elección de constantes, los objetos acelerados siguen trayectorias hiperbólicas que intersectan al eje  $x$  en  $x = 1/\alpha$ . Cabe resaltar que tienen asíntotas en las rectas  $t = x$  y  $t = -x$ , como era de esperarse.

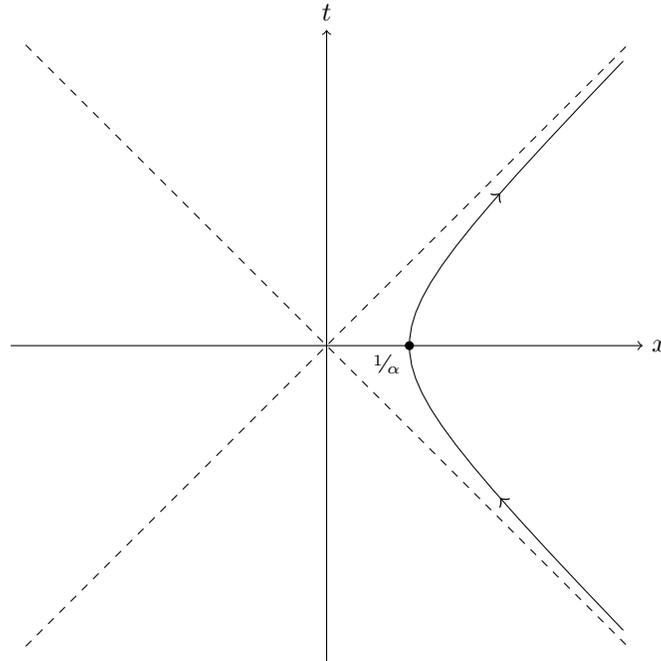


Figura 3.4: Trayectoria que sigue un objeto con aceleración  $\alpha$  en el espacio de Minkowski

## Capítulo 4

# Espacio de Rindler

La pregunta que surge ahora es ¿cómo ve un observador acelerado el espacio?

Un observador acelerado no tiene una velocidad constante, por lo que es común pensar que la métrica dada por sus coordenadas no sea una métrica tipo Minkowski.

Debido a que su velocidad cambia en cada punto, es natural pensar que la parte temporal se vea afectada por un factor espacial. Esta afirmación viene del hecho de que un sistema de medición ideal, debe de permanecer constante para el observador en cuestión. No sería práctico tener una regla que cambiara de longitud conforme pase el tiempo, por lo que el requisito a pedir es que si la longitud de una viga medida a un tiempo  $\tau$  en el marco de referencia del observador acelerado es  $l$ , entonces seguirá siendo  $l$  a un tiempo  $\tau' > \tau$ . Sin embargo, esta longitud cambiará dependiendo de la dirección en que se mueve la viga de acuerdo al observador inercial, es decir, cada punto de la viga tendrá una aceleración distinta, lo cual debe estar en acuerdo con la dinámica del cuerpo rígido y con la contracción de Lorentz.

Supongamos que la parte afectada es la temporal y hagamos una analogía con la contraparte clásica: sea  $b(x)$  una función que depende únicamente de la posición en el espacio (no en el tiempo) que afecte a la parte temporal de la métrica, i.e. a  $dt^2$ . Entonces la métrica buscada es de la forma

$$ds^2 = b(x)dt^2 - dx^2 . \tag{4.1}$$

---

Para que se preserven las unidades de  $ds^2$ , es necesario que  $b(x) \propto x^2$ .

Debido a que un observador acelerado se mueve en hipérbolas, es natural pensar en describir su espacio en base a funciones hiperbólicas. Tomemos como transformación de prueba a las ecuaciones (3.15) y (3.16) reescribiéndolas (y haciendo cero las constantes) como

$$\begin{cases} t = \rho \sinh(\alpha\eta) \\ x = \rho \cosh(\alpha\eta) \end{cases} \quad (4.2)$$

donde las nuevas coordenadas están dadas por  $\{x^{\bar{\mu}}\} = (\eta, \rho)$  y donde  $\alpha$  es la aceleración constante del observador.

Encontremos ahora los vectores base para este nuevo sistema de coordenadas.

Sabemos que la base se transforma como  $\vec{e}_{\bar{\mu}} = \Lambda^{\nu}_{\bar{\mu}} \vec{e}_{\nu}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\eta} &= \Lambda^t_{\eta} \vec{e}_t + \Lambda^x_{\eta} \vec{e}_x \\ &= \partial_{\eta} t \vec{e}_t + \partial_{\eta} x \vec{e}_x \\ &= \alpha \rho \cosh(\alpha\eta) \vec{e}_t + \alpha \rho \sinh(\alpha\eta) \vec{e}_x . \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\vec{e}_{\rho} = \sinh(\alpha\eta) \vec{e}_t + \cosh(\alpha\eta) \vec{e}_x .$$

Con esto, y con el hecho de que  $g_{tt} = \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = 1$ ,  $g_{xx} = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = -1$  y  $g_{tx} = g_{xt} = 0$ , entonces

$$\begin{cases} g_{\eta\eta} = \alpha^2 \rho^2 \\ g_{\rho\rho} = -1 \\ g_{\eta\rho} = g_{\rho\eta} = 0 \end{cases} ,$$

con lo cual la métrica es

---


$$ds^2 = \alpha^2 \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2, \quad (4.3)$$

como se esperaba. Estas coordenadas se conocen como *coordenadas de Rindler* y expresan la manera de medir de un observador acelerado.

Existe otra manera para ver estas coordenadas. Notemos que este sistema de coordenadas no está definido en el origen, i.e. no hay una carta que lo pueda cubrir debido a que el determinante de la métrica se vuelve cero cuando  $\rho = \eta = 0$ , con lo cual en particular  $\rho$  debe ser distinto de cero.

Para  $\rho > 0$ , sea

$$\rho = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\xi},$$

tomando ahora a  $\{x^{\bar{\mu}}\} = (\eta, \xi)$  como el nuevo sistema de coordenadas. La transformación (4.2) toma ahora la forma

$$\begin{cases} t = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\xi} \sinh(\alpha\eta) \\ x = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\xi} \cosh(\alpha\eta) \end{cases}. \quad (4.4)$$

Con esto, los vectores base son ahora

$$\begin{cases} \vec{e}_\eta = e^{\alpha\xi} (\cosh(\alpha\eta) \vec{e}_t + \sinh(\alpha\eta) \vec{e}_x) \\ \vec{e}_\xi = e^{\alpha\xi} (\sinh(\alpha\eta) \vec{e}_t + \cosh(\alpha\eta) \vec{e}_x), \end{cases}$$

los componentes de la métrica son

$$\begin{cases} g_{\eta\eta} = e^{2\alpha\xi} \\ g_{\xi\xi} = -e^{2\alpha\xi} \\ g_{\eta\xi} = g_{\xi\eta} = 0 \end{cases}$$

y el elemento de línea es

$$ds^2 = e^{2\alpha\xi}(d\eta^2 - d\xi^2) = e^{2\alpha\xi}\eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}dx^{\bar{\mu}}dx^{\bar{\nu}} , \quad (4.5)$$

es decir,  $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = e^{2\alpha\xi}\eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ . A esto se le conoce como una métrica *conformalmente plana*, ya que difiere de la métrica de Minkowski sólo por un factor cuadrático, preservando ángulos.

Con esta parametrización, la aceleración propia está dada por

$$a = \alpha e^{-\alpha\xi} . \quad (4.6)$$

De (4.4) vemos que los puntos en los que  $\xi = \text{cte.}$  corresponden a hipérbolas (figura 4.1) que intersectan al eje  $x$  en  $1/\alpha$  cuando  $\xi = 0$ , ya que

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{\alpha^2}e^{2\alpha\xi} . \quad (4.7)$$

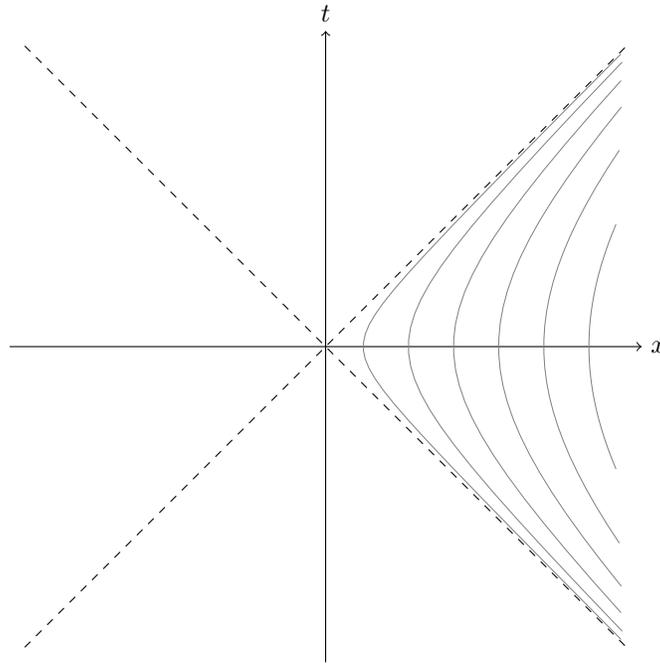


Figura 4.1: Las superficies para las cuales  $\xi = \text{cte.}$  son hipérbolas.

---

De (4.4) notamos que

$$\frac{t}{x} = \frac{\sinh(\alpha\eta)}{\cosh(\alpha\eta)} = \tanh(\alpha\eta)$$

$$\Rightarrow t = x \tanh(\alpha\eta)$$

por lo que los puntos para los que  $\eta = \text{cte.}$  corresponden a rectas que intersectan al origen, como lo muestra la figura 4.2.

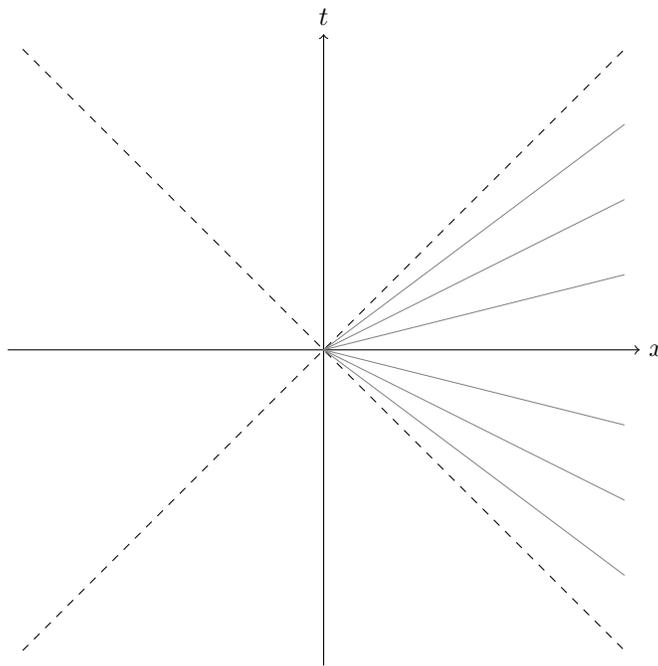


Figura 4.2: Las superficies para las cuales  $\eta = \text{cte.}$  son rectas que parten del origen.

Teniendo esto en cuenta, el espacio de Rindler puede representarse como se muestra en la figura 4.3.

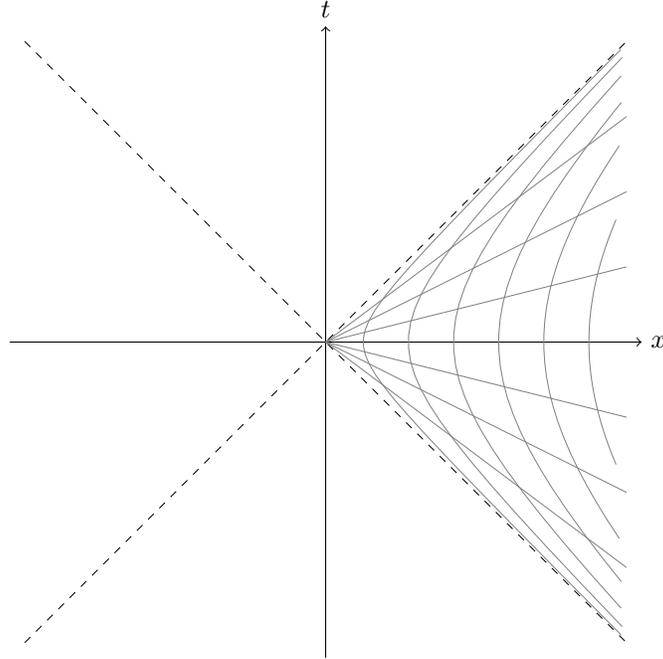


Figura 4.3: Líneas coordenadas para un observador acelerado en espacio plano (espacio de Rindler)

Para  $\rho < 0$ , el proceso es el mismo pero con el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{\alpha} e^{\alpha\xi} \sinh(\alpha\eta) \\ x = -\frac{1}{\alpha} e^{\alpha\xi} \cosh(\alpha\eta) \end{cases} \quad (4.8)$$

Esto define una nueva familia de curvas que son una reflexión sobre el eje  $t$  de la figura 4.3.

Debido a ciertas restricciones que resaltaremos a continuación, el espacio de Rindler se subdivide en 4 regiones:

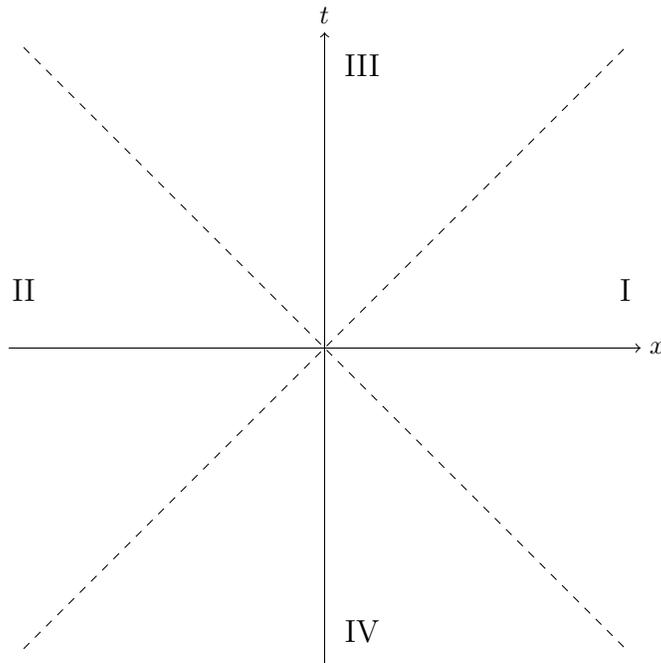


Figura 4.4: Subdivisiones del espacio de Rindler

Las secciones I y II son capaces de enviar información a la sección III y de recibir información de la sección IV, sin embargo son causalmente desconexos: no hay manera en que se puedan comunicar uno con el otro. A las secciones I y II se les conoce como *cuñas de Rindler*.

Vale la pena resaltar que  $\alpha$  juega un papel de “factor de escala” para las coordenadas de Rindler, ya que las mismas coordenadas pueden representar la métrica de otro observador uniformemente acelerado con el simple hecho de cambiar  $\alpha$ , lo cual cambiará la línea coordenada con  $\xi = 0$ .

## Capítulo 5

# Cuantización del Campo Escalar Real en Espacio de Minkowski

### 5.1. Ecuación de Klein-Gordon y Expansión en Modos

El punto fundamental del presente trabajo es el campo escalar, que se define a continuación<sup>1</sup>:

Un *campo escalar* es una función invariante de Lorentz (no cambia su valor ante boosts) que le asigna un escalar a un punto determinado del espacio-tiempo. El escalar puede ser real o complejo, pero para fines del presente trabajo nos concentraremos en estudiar el campo escalar real. Se denotará a un campo escalar evaluado en el evento con coordenadas  $(t, \vec{x})$  como  $\phi(t, \vec{x})$ . El hecho de que sea real garantiza que  $\phi^*(t, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x})$ .

Debido a que en teoría de campos se trabaja con puntos espacio-temporales, un lagrangiano no es conveniente para expresar una acción debido a que la integral únicamente está integrada únicamente respecto al factor temporal. Sin embargo, un campo depende intrínsecamente de todas las coordenadas, por lo que se suele trabajar con *densidades lagrangianas*, que dependen del valor de campo y de sus derivadas espacio-temporales, i.e.,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ . Con este lenguaje, la acción

---

<sup>1</sup>La referencia usada para esta sección es [10], a menos que se especifique explícitamente alguna otra.

de un campo escalar está dada por

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x . \quad (5.1)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos son entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 . \quad (5.2)$$

La densidad lagrangiana para un campo escalar libre (sin ninguna interacción) es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2) , \quad (5.3)$$

donde  $m^2$  jugará un papel importante un poco más adelante.

Retomando la teoría lagrangiana, en la que el momento lo definimos como  $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$ , definimos ahora el *momento canónico conjugado* a  $\phi$  como

$$\pi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(t, \vec{x}) , \quad (5.4)$$

donde  $\dot{\phi} \equiv \partial_t \phi$ .

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, la ecuación de movimiento para el campo escalar libre queda entonces

$$\square \phi + m^2 \phi = 0 , \quad (5.5)$$

donde a  $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$  se le conoce como el operador *D'Alambertiano*. A la ecuación (5.5) se le conoce como la *ecuación de Klein-Gordon*, y tiene exactamente la misma forma que la evolución de una función de onda para una partícula libre relativista con unidades  $\hbar = c = 1$ .

Para tener una intuición más clara de lo que la ecuación (5.5) representa, expandimos en modos de Fourier el campo  $\phi(t, \vec{x})$  [10] como

$$\tilde{\phi}(t, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi(t, \vec{x}) \quad (5.6)$$

y su transformación inversa es

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}(t, \vec{k}) . \quad (5.7)$$

Sustituyendo (5.7) en (5.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \square\phi + m^2\phi &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \partial_t^2 \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}(t, \vec{k}) - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \nabla^2 \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}(t, \vec{k}) \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} m^2 \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}(t, \vec{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left( e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \partial_t^2 + \nabla^2 (e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) + m^2 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \tilde{\phi}(t, \vec{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left( \partial_t^2 + \vec{k}^2 + m^2 \right) \tilde{\phi}(t, \vec{k}) \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (5.8)$$

pero esto sólo sucede si

$$\begin{aligned} \left( \partial_t^2 + \vec{k}^2 + m^2 \right) \tilde{\phi}(t, \vec{k}) &= \left( \partial_t^2 + \omega_{\vec{k}}^2 \right) \tilde{\phi}(t, \vec{k}) \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (5.9)$$

con  $\omega_{\vec{k}} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ .

De (5.9) notamos que la ecuación de movimiento para los modos no es más que la ecuación de una infinidad de osciladores armónicos simples desacoplados, cuya frecuencia individual para algún modo  $\vec{k}$  es  $\omega_{\vec{k}}$ .

Siguiendo el esquema tradicional de cuantización de un sistema clásico en mecánica cuántica (en el que convertimos a operadores a  $x_i$  y a  $p_i$ ), promovemos ahora a operadores a  $\phi(t, \vec{x})$  y a  $\pi(t, \vec{x})$ ,

imponiendo las reglas de conmutación

$$\begin{cases} [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{x}')] = 0 \\ [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Retomando la ecuación (5.9) y el hecho de que el campo obedece la ecuación del oscilador armónico para cada  $\vec{k}$ , expresamos a  $\hat{\phi}(t, \vec{k})$  y a  $\hat{\pi}(t, \vec{k})$  en operadores de escalera (o de ascenso y descenso)  $\hat{a}_{\vec{k}}$  y  $\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger$  (donde cada subconjunto  $\{\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger\}$  para una cierta  $\vec{k}$  obedece un álgebra similar a la del oscilador armónico, como se verá un poco más adelante) como

$$\hat{\phi}(t, \vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}(\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger), \quad (5.11)$$

y

$$\hat{\pi}(t, \vec{k}) = -i\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}}(\hat{a}_{\vec{k}} - \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger). \quad (5.12)$$

De esta manera, (5.7) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}(\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{k}} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger) \\ &= \int d^3k (u_{\vec{k}}(t, \vec{x})\hat{a}_{\vec{k}} + u_{\vec{k}}^*(t, \vec{x})\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger), \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde

$$u_{\vec{k}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (5.14)$$

son funciones asociadas a los modos (también comúnmente denominadas simplemente como 'mo-

dos').

Análogamente, las expansiones (5.11) y (5.12) llevan a que  $\hat{\pi}(t, \vec{x})$  se expresa como

$$\hat{\pi}(t, \vec{x}) = -i \int d^3k \omega_{\vec{k}} (u_{\vec{k}}(t, \vec{x}) \hat{a}_{\vec{k}} - u_{\vec{k}}^*(t, \vec{x}) \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger) \quad (5.15)$$

Los modos (5.14) definen un espacio de Hilbert, cuyo producto interno debe ser covariante de Lorentz y está dado por [4]

$$\begin{aligned} (u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) &= -i \int d^3x u_{\vec{k}}(t, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{k}'}^*(t, \vec{x}) \\ &= -i \int d^3x (u_{\vec{k}}(t, \vec{x}) \partial_t u_{\vec{k}'}^*(t, \vec{x}) - u_{\vec{k}'}^*(t, \vec{x}) \partial_t u_{\vec{k}}(t, \vec{x})) . \end{aligned} \quad (5.16)$$

La ortonormalidad de los modos garantiza que

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (5.17)$$

Las relaciones (5.10) y las expansiones (5.13) y (5.15) conllevan a las relaciones de conmutación<sup>2</sup> [12] entre  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$  y  $\hat{a}_{\vec{k}}$ , las cuales son

$$\begin{cases} [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}] = 0 \\ [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \end{cases} . \quad (5.18)$$

Hasta el momento hemos definido una serie de operadores e impuesto la manera en que se relacionan. La pregunta lógica que sigue es: ¿sobre qué actúan?

Mediante teoría de representaciones de grupos, que no es fundamental para el presente trabajo, es posible conocer el tipo de espacio sobre el cual estos operadores actúan.

---

<sup>2</sup> A las relaciones (5.18) se les conoce como CCR's (*Canonical Commutation Relations*) o como *álgebra bosónica*. Más adelante se entenderá por qué.

## 5.2. Espacio De Hilbert Generado por $\hat{a}_{\vec{k}}$ y $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$

El espacio de Hilbert necesario para esta teoría es el *espacio de Fock* simétrico, definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S(\mathcal{H}^{\otimes i}) \quad (5.19)$$

$$= \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus S(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \oplus S(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \oplus \dots, \quad (5.20)$$

donde  $\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$  y  $S$  indica simetrización de los espacios en cuestión.

Habiendo definido el espacio de Hilbert, similarmente al caso del oscilador armónico, denotamos el estado base (el que no posee excitaciones) como  $|0\rangle$  (también llamado *vacío de Fock*) y lo definimos como el estado tal que

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \quad (5.21)$$

i.e., el estado tal que al aplicarle el operador de ascenso de cualquier modo  $\vec{k}$  nos mande al elemento 0 del espacio de Hilbert. Cabe recalcar que  $|0\rangle$  NO es el cero del espacio, sino que es el estado de mínima energía<sup>3</sup>.

Los estados excitados los denotaremos por

$$a_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle = |1_{\vec{k}}\rangle, \quad (5.22)$$

lo cual denotará que el modo  $k$  tiene una excitación. Similarmente,

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{k}''}^\dagger a_{\vec{k}'''}^\dagger |0\rangle &= \sqrt{2} |1_{\vec{k}'''}, 1_{\vec{k}'}, 1_{\vec{k}''}, 1_{\vec{k}}\rangle \\ &= \sqrt{2} |1_{\vec{k}}, 2_{\vec{k}'}, 1_{\vec{k}''}, 1_{\vec{k}'''}\rangle. \end{aligned} \quad (5.23)$$

---

<sup>3</sup>En la siguiente sección se verá por qué

La acción de estos operadores para un estado  $|n_{\vec{k}}\rangle$  son

$$\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger |n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n+1} |(n+1)_{\vec{k}}\rangle \quad (5.24)$$

y

$$\hat{a}_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n} |(n-1)_{\vec{k}}\rangle . \quad (5.25)$$

De esta manera, el estado más general que podemos construir es

$$(a_{\vec{k}_1}^\dagger)^{n^{(1)}} \cdots (a_{\vec{k}_r}^\dagger)^{n^{(r)}} |0\rangle = \left( \prod_{i=1}^r \sqrt{n^{(i)}} \right) |n_{\vec{k}_1}^{(1)}, \dots, n_{\vec{k}_r}^{(r)}\rangle, \quad (5.26)$$

donde se excita  $n^{(i)}$  veces el modo  $\vec{k}_i$ .

La normalización de estos estados está dada por  $\langle 0|0\rangle = 1$  para el vacío y

$$\begin{aligned} \langle 1_{\vec{k}} | 1_{\vec{k}'} \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'} | 0 \rangle \\ &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle &= \sqrt{n} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger |(n-1)_{\vec{k}}\rangle \\ &= \sqrt{n} \sqrt{n} |((n-1)+1)_{\vec{k}}\rangle \\ &= n |n_{\vec{k}}\rangle . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Por (5.28) a  $\hat{n}_{\vec{k}} \equiv \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$  se le conoce como *operador de número*, ya que nos indica las excitaciones del modo  $\vec{k}$ .

### 5.3. Hamiltoniano e Interpretación de *Partícula*

El hamiltoniano para el campo escalar libre se obtiene a partir de la densidad lagrangiana por la ecuación

$$H = \int d^3x \mathcal{H} , \quad (5.29)$$

donde

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (5.30)$$

es la *densidad hamiltoniana*.

El hamiltoniano toma entonces la forma (ya considerando a los campos como operadores)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \left( \hat{\pi}^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right) \quad (5.31)$$

Usando las expansiones (5.13) y (5.15) y las relaciones de conmutación (5.18) se observa que el hamiltoniano se puede expresar como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \int d^3k \omega_{\vec{k}} \left( \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right) \\ &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} \left( \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right) \\ &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} \left( \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \delta^3(0) \right) . \end{aligned} \quad (5.32)$$

Esta ecuación presenta un problema aparentemente grave, ya que al haber un número infinito de modos, el hamiltoniano diverge. Sin embargo, esto no representa un problema, ya que la medición de energías es relativa y no absoluta, es decir, sólo podemos cuantificar diferencias en la energía, por lo que es posible remover este término sin mayor problema introduciendo un *ordenamiento normal* (operación lineal) denotado por  $:\ :$ , el cual coloca todos los operadores de ascenso a la izquierda de

los operadores de descenso.

Reescribiendo la ecuación (5.32),

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} \left( \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right) \\ &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} \left( \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger - \frac{1}{2} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} \right) .\end{aligned}$$

Aplicando el ordenamiento normal a esta última expresión obtenemos

$$\begin{aligned}: \hat{H} : &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} \left( : \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} : + \frac{1}{2} : \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger : - \frac{1}{2} : \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} : \right) \\ &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} \left( \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger - \frac{1}{2} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} \right) \\ &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} .\end{aligned}\tag{5.33}$$

Claramente,

$$\begin{aligned}: \hat{H} : |0\rangle &= \int d^3k \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle \\ &= 0 ,\end{aligned}\tag{5.34}$$

por lo que el estado  $|0\rangle$  es el estado cuya energía es cero, y corresponde al de mínima energía.

Aplicando este nuevo hamiltoniano a un estado de una excitación de un modo  $\vec{k}$  vemos que

$$\begin{aligned}
 : \hat{H} : |1_{\vec{k}}\rangle &= \int d^3k' \omega_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'} |1_{\vec{k}}\rangle \\
 &= \int d^3k' \omega_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle \\
 &= \int d^3k' \omega_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger (\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'}) |0\rangle \\
 &= \int d^3k' \omega_{\vec{k}'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') |1_{\vec{k}'}\rangle \\
 &= \omega_{\vec{k}} |1_{\vec{k}}\rangle \\
 &= \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} |1_{\vec{k}}\rangle .
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Sabemos que el momento relativista se expresa en términos del vector de onda como  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ , pero como estamos usando unidades tal que  $\hbar = c = 1$ , entonces  $\vec{p} = \vec{k}$  y por lo tanto  $\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = E_{\vec{p}}$ , que es justo la energía de una partícula relativista con masa  $m$  y momento  $\vec{p}$ .

De la misma forma, aplicando el hamiltoniano a un estado general obtenemos

$$: \hat{H} : |n_{\vec{k}_1}^{(1)}, \dots, n_{\vec{k}_r}^{(r)}\rangle = \left( \sum_i n^{(i)} \sqrt{k_i^2 + m^2} \right) |n_{\vec{k}_1}^{(1)}, \dots, n_{\vec{k}_r}^{(r)}\rangle . \tag{5.36}$$

Esto nos lleva a dos grandes consecuencias: la primera que las excitaciones de un campo escalar real corresponden a partículas libres relativistas idénticas de masa  $m$ , y segunda, que al ser un espacio simétrico y al no cambiar el signo al intercambio de partículas identificamos a estas como *bosones*, por lo cual podemos concluir que el campo escalar real describe un número indefinido de bosones en el espacio-tiempo de Minkowski.

Tomando estas cuestiones en consideración, es usual llamar a los operadores de ascenso y descenso como operadores de *creación* y *aniquilación*, respectivamente, ya que la aplicación de los mismos conlleva a un número diferente de partículas en el sistema. Es por esto que al conjunto de operadores  $\{\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger\}$ , junto con las relaciones de conmutación (5.18) se les conoce como *álgebra bosónica*.

## Capítulo 6

# Cuantización del Campo Escalar Real en Marcos de Referencia No-inerciales

### 6.1. Ecuación de Klein-Gordon Generalizada

Recordemos que para pasar de un marco de referencia inercial a uno no inercial, basta con hacer las sustituciones  $\eta \longleftrightarrow g$  y  $\partial \longleftrightarrow \nabla$ . Tomando esto en cuenta, la ecuación de Klein-Gordon toma la forma

$$(\square + m^2)\phi = 0 , \tag{6.1}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \square\phi &\equiv g^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\nabla_{\bar{\mu}}\nabla_{\bar{\nu}}\phi \\
 &= g^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\nabla_{\bar{\mu}}(\partial_{\bar{\nu}}\phi) \\
 &= g^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\partial_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\nu}}\phi - \Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\partial_{\bar{\lambda}}\phi .
 \end{aligned}$$

Con lo cual, la ecuación de Klein-Gordon generalizada a sistemas no inerciales es

$$(g^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\partial_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\nu}} - \Gamma^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\partial_{\bar{\lambda}} + m^2)\phi = 0 . \quad (6.2)$$

Para fines prácticos, se considerará en el presente trabajo un campo escalar libre en un espacio de fondo con dimensión 1 + 1, es decir, con una dimensión espacial y una temporal.

Cuando se trabaja en una sola dimensión espacial y con bosones con  $m = 0$ , resulta práctico referirse a los modos en términos de su frecuencia, puesto que  $k \propto \omega$  y el signo de  $\omega$  dependerá únicamente de la dirección de  $k$ .

Es claro que la solución de esta ecuación en general no serán ondas planas, como en el caso de un sistema inercial. Sin embargo, la ecuación (6.2) tiene la forma para poder ser resuelta como un problema de Sturm-Liouville. Con lo cual también puede expandirse en modos de soluciones para la ecuación homogénea. Dicho esto, expandimos a  $\phi(x^{\bar{\mu}})$  en términos de las soluciones para el nuevo sistema de coordenadas de la misma manera que para el caso inercial:

$$\phi(x^{\bar{\mu}}) = \int d\omega(\bar{a}_{\omega}\bar{u}_{\omega} + \bar{a}_{\omega}^*\bar{u}_{\omega}^*), \quad (6.3)$$

donde ahora la integral estará evaluada de 0 a  $\infty$ .

El producto interno de estos modos debe estar definido ahora respecto a coordenadas que lleven la noción de “espacio”. Análogamente, también debe existir (si el espacio-tiempo lo admite) una coordenada que lleve la noción de tiempo. El vector base asociado a esta coordenada necesariamente debe ser un *vector de Killing*, el cual cumple que

$$\nabla_{\bar{\nu}} V^{\bar{\mu}} + \nabla_{\bar{\mu}} V^{\bar{\nu}} = 0 , \quad (6.4)$$

y además debe ser temporaloide respecto a las nuevas coordenadas. El tiempo estará asociado a este vector de Killing, y toda superficie (o hipersuperficie, dependiendo de la dimensión del espacio) espacialoide con un valor fijo para la coordenada asociada al vector de Killing se le llama *superficie de Cauchy*. En el caso euclideo, el vector de Killing es el asociado a la coordenada  $t$  y las superficies de Cauchy son todas las superficies para las cuales  $t = \text{cte}$ .

Con esto comprendido, el producto interno está dado ahora por [4]

$$(\bar{u}_\omega, \bar{u}_{\omega'}) = -i \int_{\Sigma} \sqrt{-g_{\Sigma}} \bar{u}_\omega(x^{\bar{\mu}}) \overleftrightarrow{\partial}_\eta \bar{u}_{\omega'}^*(x^{\bar{\mu}}) d\Sigma , \quad (6.5)$$

donde  $\Sigma$  es una superficie de Cauchy,  $\eta$  es la coordenada asociada al vector de Killing y  $g_{\Sigma}$  es el determinante de la métrica de  $\Sigma$ .

## 6.2. Transformaciones de Bogoliubov

La cuantización de la ecuación (6.3) lleva al nuevo operador de campo  $\hat{\phi}(x^{\bar{\mu}})$  a ser expandido como

$$\hat{\phi}(x^{\bar{\mu}}) = \int d\omega (\hat{a}_\omega \bar{u}_\omega + \hat{a}_\omega^\dagger \bar{u}_\omega^*) . \quad (6.6)$$

Análogamente al caso inercial, imponemos las relaciones de conmutación (5.10) para el nuevo sistema. De igual manera, las relaciones de conmutación (5.18) entre los nuevos operadores de creación y aniquilación quedan

$$\begin{cases} [\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega') \\ [\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}] = 0 \\ [\hat{a}_\omega^\dagger, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = 0 \end{cases} . \quad (6.7)$$

Estos operadores actúan sobre un nuevo espacio de Fock con un nuevo vacío definido por

$$\bar{a}_\omega |\bar{0}\rangle = 0, \quad (6.8)$$

junto con todo el desarrollo que se llevó a cabo para el caso inercial.

Debido a que estamos trabajando el mismo sistema físico pero con dos sistemas coordenados distintos, es posible pasar de un sistema a otro. Es decir, podemos expresar la base de soluciones del observador inercial en términos de la base de soluciones del observador no inercial, como lo muestran las ecuaciones (6.9)

$$\begin{cases} \bar{u}_\omega = \int d\lambda (\alpha_{\omega\lambda} u_\lambda + \beta_{\omega\lambda} u_\lambda^*) \\ u_\lambda = \int d\omega (\alpha_{\omega\lambda}^* \bar{u}_\omega - \beta_{\omega\lambda} \bar{u}_\omega^*) \end{cases} \quad (6.9)$$

De igual manera, podemos expresar el álgebra bosónica del marco de referencia inercial en términos del álgebra bosónica del marco de referencia no inercial como lo muestran las ecuaciones (6.10)

$$\begin{cases} \hat{\bar{a}}_\omega = \int d\lambda (\alpha_{\omega\lambda}^* \hat{a}_\lambda - \beta_{\omega\lambda}^* \hat{a}_\lambda^\dagger) \\ \hat{a}_\lambda = \int d\omega (\alpha_{\omega\lambda} \hat{\bar{a}}_\omega + \beta_{\omega\lambda} \hat{\bar{a}}_\omega^\dagger) \end{cases} \quad (6.10)$$

A las transformaciones (6.9) y (6.10) se les conoce como *transformaciones de Bogoliubov* y nos relacionan la manera en que dos observadores (uno inercial y el otro no inercial) calculan excitaciones en su marco de referencia. A los coeficientes  $\alpha_{\omega\lambda}$  y  $\beta_{\omega\lambda}$  se les conoce como *coeficientes de Bogoliubov*, que se definen por

$$\begin{cases} \alpha_{\omega\lambda} = (\bar{u}_\omega, u_\lambda) \\ \beta_{\omega\lambda} = -(\bar{u}_\omega, u_\lambda^*) \end{cases} \quad (6.11)$$

y cumplen con las relaciones

$$\begin{cases} \int d\omega (\alpha_{\lambda\omega} \alpha_{\sigma\omega}^* - \beta_{\lambda\omega} \beta_{\sigma\omega}^*) = \delta(\lambda - \sigma) \\ \int d\omega (\alpha_{\lambda\omega} \beta_{\sigma\omega} - \beta_{\lambda\omega} \alpha_{\sigma\omega}) = 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

Cabe resaltar que a pesar de que

$$\begin{cases} \hat{a}_\lambda |0\rangle = 0 & \text{para } \{x^\alpha\} \\ \hat{a}_\omega |\bar{0}\rangle = 0 & \text{para } \{x^{\bar{\alpha}}\} \end{cases} \quad (6.13)$$

el vacío de ambos espacios de Fock en general no coincide, ya que

$$\begin{aligned} \hat{a}_\lambda |\bar{0}\rangle &= \int d\omega (\alpha_{\omega\lambda} \hat{a}_\omega + \beta_{\omega\lambda}^* \hat{a}_\omega^\dagger) |\bar{0}\rangle \\ &= \int d\omega (\alpha_{\omega\lambda} \hat{a}_\omega |\bar{0}\rangle + \beta_{\omega\lambda}^* \hat{a}_\omega^\dagger |\bar{0}\rangle) \\ &= \int d\omega \beta_{\omega\lambda}^* |\bar{1}_\omega\rangle \neq 0 . \end{aligned}$$

Más aún, si recordamos que  $\hat{n}_\lambda = \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda$ , entonces

$$\begin{aligned}\langle \bar{0} | \hat{n}_\lambda | \bar{0} \rangle &= \langle \bar{0} | \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda | \bar{0} \rangle \\ &= (\hat{a}_\lambda | \bar{0} \rangle)^\dagger (\hat{a}_\lambda | \bar{0} \rangle) \\ &= \left( \int d\omega \beta_{\omega\lambda}^* | \bar{1}_\omega \rangle \right)^\dagger \left( \int d\sigma \beta_{\sigma\lambda}^* | \bar{1}_\sigma \rangle \right) \\ &= \left( \int d\omega \beta_{\lambda\omega} \langle \bar{1}_\omega | \right) \left( \int d\sigma \beta_{\sigma\lambda}^* | \bar{1}_\sigma \rangle \right) \\ &= \int d\omega d\sigma \beta_{\lambda\omega} \beta_{\sigma\lambda}^* \langle \bar{1}_\omega | \bar{1}_\sigma \rangle \\ &= \int d\omega d\sigma \beta_{\lambda\omega} \beta_{\sigma\lambda}^* \delta(\omega - \sigma) \\ &= \int d\omega |\beta_{\lambda\omega}|^2 .\end{aligned}\tag{6.14}$$

El resultado de la ecuación (6.14) es sorprendente, ya que nos indica que el número de excitaciones del campo depende del observador en cuestión, lo cual nos impulsa a buscar una nueva manera de definir lo que es una partícula.

## Capítulo 7

# Cuantización en Espacio de Rindler

Ahora que sabemos cómo relacionar el contenido de excitaciones visto desde un sistema inercial con el de uno no inercial, podemos ahora saber cómo se relacionan los estados de un espacio de Minkowski con uno de Rindler.

Consideraremos ahora un campo escalar en dimensión 1+1 con bosones asociados con  $m = 0$ . La ecuación (5.5) toma ahora la forma

$$\square\phi = 0 . \tag{7.1}$$

Recordando que la métrica de Rindler es conformalmente plana, vemos que

$$\bar{\square}\phi = e^{2\alpha\xi}\square\phi = 0 , \tag{7.2}$$

que es la misma ecuación que (7.1) pero con coordenadas  $(\eta, \xi)$ .

La expansión en modos de Rindler en término de coordenadas de Minkowski [5] está dada por

---


$$\begin{cases} u_{\Omega}^I(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left( \frac{x - \epsilon t}{l_{\Omega}} \right)^{i\epsilon\Omega} \\ u_{\Omega}^{II}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left( \frac{\epsilon t - x}{l_{\Omega}} \right)^{-i\epsilon\Omega} \end{cases}, \quad (7.3)$$

donde  $\epsilon$  toma los valores  $\{+1, -1\}$  dependiendo de la dirección de  $k$ , los números romanos indican la caña de Rindler en cuestión,  $l_{\Omega}$  es una constante que se fijará más adelante y  $\Omega$  es la *frecuencia adimensional* de Rindler, definida en términos de  $k$  como

$$\Omega = \frac{|k|}{\alpha}, \quad (7.4)$$

donde  $\alpha$  es la aceleración propia<sup>1</sup> cuando  $\xi = 0$ , como se observa en las ecuaciones (3.18) y (4.7).

La expansión del campo en términos de operadores es entonces

$$\hat{\phi} = \int d\Omega (\hat{a}_{\Omega}^I \bar{u}_{\Omega}^I + \hat{a}_{\Omega}^{I\dagger} \bar{u}_{\Omega}^{I*} + \hat{a}_{\Omega}^{II} \bar{u}_{\Omega}^{II} + \hat{a}_{\Omega}^{II\dagger} \bar{u}_{\Omega}^{II*}). \quad (7.5)$$

El vacío para el nuevo espacio de Fock se define como

$$|0\rangle_R = |0\rangle^I |0\rangle^{II}, \quad (7.6)$$

donde  $\hat{a}_{\Omega}^I |0\rangle^I = 0$  y  $\hat{a}_{\Omega}^{II} |0\rangle^{II} = 0$ .

Para relacionar los estados de Rindler con los de Minkowski, resulta más sencillo introducir una base nueva, la *base de Unruh*, cuyos modos se definen en términos de la base de Rindler como

$$\begin{cases} u_{\Omega,U}^R = \cosh(r_{\Omega}) \bar{u}_{\Omega}^I + \sinh(r_{\Omega}) \bar{u}_{\Omega}^{II*} \\ u_{\Omega,U}^L = \cosh(r_{\Omega}) \bar{u}_{\Omega}^{II} + \sinh(r_{\Omega}) \bar{u}_{\Omega}^{I*} \end{cases}, \quad (7.7)$$

donde  $r_{\Omega}$  se define de tal manera que

---

<sup>1</sup>Más adelante se comentará más a detalle esta expresión, ya que resulta de gran importancia para el presente trabajo.

---


$$\tanh(r_\Omega) = e^{-\pi\Omega} \quad (7.8)$$

y la expansión del operador de campo es ahora

$$\hat{\phi} = \int d\Omega (\hat{a}_{\Omega,U}^R u_{\Omega,U}^R + \hat{a}_{\Omega,U}^{R\dagger} u_{\Omega,U}^{R*} + \hat{a}_{\Omega,U}^L u_{\Omega,U}^L + \hat{a}_{\Omega,U}^{L\dagger} u_{\Omega,U}^{L*}) . \quad (7.9)$$

Las relaciones de conmutación que siguen los operadores de creación y aniquilación en la base de Unruh son las mismas que las del álgebra bosónica.

Utilizando los productos internos entre modos, las relaciones entre los modos de Unruh y Minkowski [5] son

$$\begin{cases} u_\omega = \int d\Omega (\alpha_{\omega\Omega}^R u_{\Omega,U}^R + \alpha_{\omega\Omega}^L u_{\Omega,U}^L) \\ u_{\Omega,U}^R = \int d\omega \alpha_{\omega\Omega}^{R*} u_\omega \\ u_{\Omega,U}^L = \int d\omega \alpha_{\omega\Omega}^{L*} u_\omega \end{cases} . \quad (7.10)$$

Análogamente, para los operadores de creación y aniquilación,

$$\begin{cases} \hat{a}_\omega = \int d\Omega (\alpha_{\omega\Omega}^{R*} \hat{a}_{\Omega,U}^R + \alpha_{\omega\Omega}^{L*} \hat{a}_{\Omega,U}^L) \\ \hat{a}_{\Omega,U}^R = \int d\omega \alpha_{\omega\Omega}^R \hat{a}_\omega \\ \hat{a}_{\Omega,U}^L = \int d\omega \alpha_{\omega\Omega}^L \hat{a}_\omega , \end{cases} , \quad (7.11)$$

donde los coeficientes de Bogoliubov [5] están dados por

---


$$\begin{cases} \alpha_{\omega\Omega}^R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \sqrt{\frac{\Omega \sinh(\pi\Omega)}{\pi}} \Gamma(-i\epsilon\Omega) (\omega l_\Omega)^{i\epsilon\Omega} \\ \alpha_{\omega\Omega}^L = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \sqrt{\frac{\Omega \sinh(\pi\Omega)}{\pi}} \Gamma(i\epsilon\Omega) (\omega l_\Omega)^{-i\epsilon\Omega} \end{cases} . \quad (7.12)$$

De esta manera, podemos fijar la constante  $l_\Omega$  como

$$l_\Omega = l (\Gamma(-i\epsilon\Omega))^{i/\epsilon\Omega} \left( \frac{\Omega \sinh(\pi\Omega)}{\pi} \right)^{i/2\epsilon\Omega} \quad (7.13)$$

de tal manera que

$$\begin{cases} \alpha_{\omega\Omega}^R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} (\omega l)^{i\epsilon\Omega} \\ \alpha_{\omega\Omega}^L = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} (\omega l)^{-i\epsilon\Omega} \end{cases} . \quad (7.14)$$

Dadas las relaciones (7.7), podemos expresar a los operadores de creación y aniquilación de Unruh en términos de los de Rindler como

$$\begin{cases} \hat{a}_{\Omega,U}^R = \cosh(r_\Omega) \hat{a}_\Omega^I - \sinh(r_\Omega) \hat{a}_\Omega^{II\dagger} \\ \hat{a}_{\Omega,U}^L = \cosh(r_\Omega) \hat{a}_\Omega^{II} - \sinh(r_\Omega) \hat{a}_\Omega^{I\dagger} \end{cases} . \quad (7.15)$$

Cabe resaltar que los operadores de aniquilación de Minkowski únicamente dependen de operadores de aniquilación de Unruh y no de creación, por lo que los vacíos de Minkowski y Unruh coinciden, i.e.,  $|0\rangle_{\mathcal{M}} = |0\rangle_U$ .

<sup>2</sup>Queremos ahora ver cómo se relacionan los vacíos de Unruh y Rindler. Como en general los vacíos de dos observadores no inerciales no coinciden, y dada la relación (7.6), entonces podemos suponer que

---

<sup>2</sup>A partir de aquí y hasta el final del capítulo se usa el procedimiento presentado en [7] para encontrar una expresión que relacione al vacío de Unruh/Minkowski con estados de Rindler

---


$$|0_\Omega\rangle_U = \sum_n f_\Omega(n) |n_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II} , \quad (7.16)$$

donde  $|n_\Omega\rangle^I$  es el estado con  $n$  excitaciones en el modo  $\Omega$  de la cuña I y  $|n_\Omega\rangle^{II}$  es el estado con  $n$  excitaciones en el modo  $\Omega$  de la cuña II.

Aplicando el operador  $\hat{a}_{\Omega,U}^R$  al estado (7.16) y usando las relaciones (7.15) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{a}_{\Omega,U}^R |0_\Omega\rangle_U \\ &= (\cosh(r_\Omega) \hat{a}_\Omega^I - \sinh(r_\Omega) \hat{a}_{\Omega,U}^{II\dagger}) \sum_n f_\Omega(n) |n_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II} \\ &= \sum_n f_\Omega(n) \cosh(r_\Omega) \hat{a}_\Omega^I |n_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II} - \sum_n f_\Omega(n) \sinh(r_\Omega) \hat{a}_{\Omega,U}^{II\dagger} |n_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II} \\ &= \sum_n f_\Omega(n) \cosh(r_\Omega) \sqrt{n} |(n-1)_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II} \\ &\quad - \sum_n f_\Omega(n) \sinh(r_\Omega) \sqrt{n+1} |n_\Omega\rangle^I |(n+1)_\Omega\rangle^{II} \\ &= \sum_n f_\Omega(n+1) \cosh(r_\Omega) \sqrt{n+1} |n_\Omega\rangle^I |(n+1)_\Omega\rangle^{II} \\ &\quad - \sum_n f_\Omega(n) \sinh(r_\Omega) \sqrt{n+1} |n_\Omega\rangle^I |(n+1)_\Omega\rangle^{II} \\ &= \sum_n (f_\Omega(n+1) \cosh(r_\Omega) - f_\Omega(n) \sinh(r_\Omega)) \sqrt{n+1} |n_\Omega\rangle^I |(n+1)_\Omega\rangle^{II} . \end{aligned} \quad (7.17)$$

La ecuación (7.17) nos indica la relación de recurrencia

$$f_\Omega(n+1) \cosh(r_\Omega) = f_\Omega(n) \sinh(r_\Omega) \Leftrightarrow f_\Omega(n+1) = \tanh(r_\Omega) f_\Omega(n) . \quad (7.18)$$

Pero

$$f_\Omega(0) = \frac{f_\Omega(1)}{\tanh(r_\Omega)} = \frac{f_\Omega(2)}{\tanh^2(r_\Omega)} = \dots = \frac{f_\Omega(n)}{\tanh^n(r_\Omega)} ,$$

por lo que

---


$$f_{\Omega}(n) = \tanh^n(r_{\Omega})f_{\Omega}(0) . \quad (7.19)$$

Sustituyendo (7.19) en (7.16), tenemos que

$$|0_{\Omega}\rangle_U = f_{\Omega}(0) \sum_n \tanh^n(r_{\Omega})|n_{\Omega}\rangle^I |n_{\Omega}\rangle^{II} . \quad (7.20)$$

Normalizando la ecuación (7.20),

$$\begin{aligned} 1 &= {}_U\langle 0_{\Omega}|0_{\Omega}\rangle_U \\ &= |f_{\Omega}(0)|^2 \sum_n \tanh^{2n}(r_{\Omega}) \\ &= |f_{\Omega}(0)|^2 \frac{1}{1 - \tanh^2(r_{\Omega})} \\ &= |f_{\Omega}(0)|^2 \cosh^2(r_{\Omega}) , \end{aligned} \quad (7.21)$$

con lo cual vemos que

$$f_{\Omega}(0) = \frac{1}{\cosh(r_{\Omega})} . \quad (7.22)$$

Sustituyendo (7.22) en (7.20) y recordando que los vacíos de Unruh y de Minkowski coinciden, obtenemos finalmente (como se muestra en [8], [5], [2] y [7])

$$|0_{\Omega}\rangle_U = \frac{1}{\cosh(r_{\Omega})} \sum_n \tanh^n(r_{\Omega})|n_{\Omega}\rangle^I |n_{\Omega}\rangle^{II} , \quad (7.23)$$

que también es el vacío de Minkowski.

## Capítulo 8

# Estudio del enredamiento mediante el uso de coordenadas de Rindler

En este capítulo se estudian los cálculos realizados en [8] y [5], reproduciendo los cálculos pertinentes y mostrando los resultados que los autores obtuvieron y finalmente, publicaron.

### 8.1. Alicia cae a un agujero negro: descripción del PRL 95, 120404 (2005)

En esta sección, se usará la interpretación dada por los autores<sup>1</sup>.

Se considera un estado de Bell del tipo

$$|\Phi^+\rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_\omega\rangle_{\mathcal{M}}|0_{\omega'}\rangle_{\mathcal{M}} + |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}}|1_{\omega'}\rangle_{\mathcal{M}}), \quad (8.1)$$

---

<sup>1</sup>En el siguiente capítulo se aclararán varias aseveraciones hechas en este artículo

donde  $|0_\omega\rangle_{\mathcal{M}}$  y  $|1_\omega\rangle_{\mathcal{M}}$  corresponden al vacío de Minkowski y al primer estado excitado en la frecuencia  $\omega$  de los modos de Minkowski, respectivamente. Rob se encuentra en un marco de referencia inercial y posee un detector sensible únicamente a los modos con frecuencia  $\omega$ , mientras que Alice, que cae a un agujero negro (i.e., se encuentra muy cerca del horizonte de eventos) tiene un detector sensible únicamente a los modos cuya frecuencia es  $\omega'$ .

La métrica que describe la geometría del espacio-tiempo de un agujero negro neutro, estático de masa  $M$  es la *métrica de Schwarzschild*, dada en coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \varphi)$  por (en unidades tales que  $c = G = 1$ )

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2). \quad (8.2)$$

Sin embargo, como se puede apreciar en la sección B, cuando un objeto cae radialmente a un agujero negro y se encuentra muy cerca del horizonte de sucesos, la métrica de Schwarzschild puede aproximarse por la métrica de Rindler, por lo que es equivalente para este sistema físico el que Alice se esté moviendo con aceleración uniforme.

Debido a que Alice se está moviendo aceleradamente, es conveniente expresar su estado en coordenadas de Rindler mediante la transformación de coordenadas descrita en (4.4) y en (4.8) para las cuñas de Rindler I y II, respectivamente.

De esta manera, se expresa el vacío de Minkowski en términos de modos de Rindler como se hace en la ecuación (7.23). Una vez hecho esto, se estipula la relación [2]

$$|1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{\cosh^2(r_{\omega'})} \sum_n \tanh^n(r_{\omega'}) \sqrt{n+1} |(n+1)_\omega\rangle^I |n_\omega\rangle^{II}, \quad (8.3)$$

que representa el primer estado excitado de Minkowski con frecuencia  $\omega$  en términos de estados de Rindler, y en la cual se toma la aproximación *single-mode*<sup>2</sup>.

Una vez obtenido el estado excitado de Minkowski en términos de estados de Rindler, se calcula la matriz de densidad del estado de Bell descrito en (8.1),

---

<sup>2</sup>Se explicará esto más a detalle en el siguiente capítulo

$$\begin{aligned}
 \rho &= |\Phi^+\rangle_{\mathcal{M}} \langle \Phi^+|_{\mathcal{M}} \\
 &= \frac{1}{2} (|0_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |0_{\omega'}\rangle_{\mathcal{M}} \langle 0_\omega|_{\mathcal{M}} \langle 0_{\omega'}|_{\mathcal{M}} + |0_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |0_{\omega'}\rangle_{\mathcal{M}} \langle 1_\omega|_{\mathcal{M}} \langle 1_{\omega'}|_{\mathcal{M}} \\
 &\quad + |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |1_{\omega'}\rangle_{\mathcal{M}} \langle 0_\omega|_{\mathcal{M}} \langle 0_{\omega'}|_{\mathcal{M}} + |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |1_{\omega'}\rangle_{\mathcal{M}} \langle 1_\omega|_{\mathcal{M}} \langle 1_{\omega'}|_{\mathcal{M}}) .
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Expresando a (8.4) en términos de los estados de Rindler, se obtiene

$$\rho = \frac{1}{2} (\rho_{0000} + \rho_{0011} + \rho_{1100} + \rho_{1111}) , \tag{8.5}$$

donde

$$\left\{ \begin{aligned}
 \rho_{0000} &= \frac{1}{\cosh^2(r_{\omega'})} \sum_{n,m} \tanh^{n+m}(r_{\omega'}) \left( |0_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |n_{\omega'}\rangle^I \langle 0_\omega|_{\mathcal{M}} \langle m_{\omega'}|^I \otimes |n_{\omega'}\rangle^{II} \langle m_{\omega'}|^{II} \right) \\
 \rho_{0011} &= \frac{1}{\cosh^3(r_{\omega'})} \sum_{n,m} \tanh^{n+m}(r_{\omega'}) \sqrt{m+1} \left( |0_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |n_{\omega'}\rangle^I \langle 1_\omega|_{\mathcal{M}} \langle (m+1)_{\omega'}|^I \otimes |n_{\omega'}\rangle^{II} \langle m_{\omega'}|^{II} \right) \\
 \rho_{1100} &= \frac{1}{\cosh^3(r_{\omega'})} \sum_{n,m} \tanh^{n+m}(r_{\omega'}) \sqrt{n+1} \left( |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |(n+1)_{\omega'}\rangle^I \langle 0_\omega|_{\mathcal{M}} \langle m_{\omega'}|^I \otimes |n_{\omega'}\rangle^{II} \langle m_{\omega'}|^{II} \right) \\
 \rho_{1111} &= \frac{1}{\cosh^4(r_{\omega'})} \sum_{n,m} \tanh^{n+m}(r_{\omega'}) \sqrt{(n+1)(m+1)} \left( |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |(n+1)_{\omega'}\rangle^I \langle 1_\omega|_{\mathcal{M}} \langle (m+1)_{\omega'}|^I \otimes |n_{\omega'}\rangle^{II} \langle m_{\omega'}|^{II} \right)
 \end{aligned} \right. \tag{8.6}$$

Considerando ahora que Alice no puede ver lo que pasa en la cuña II puesto que se mueve en la cuña I, es necesario trazar sobre los estados de la cuña II. Realizando la traza parcial

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Tr}_{II}(\rho_{0000}) = \frac{1}{\cosh^2(r_{\omega'})} \sum_n \tanh^{2n}(r_{\omega'}) \left( |0_{\omega}\rangle_{\mathcal{M}} |n_{\omega'}\rangle^I \langle 0_{\omega}|_{\mathcal{M}} \langle n_{\omega'}|^I \right) \\
 \text{Tr}_{II}(\rho_{0011}) = \frac{1}{\cosh^3(r_{\omega'})} \sum_n \tanh^{2n}(r_{\omega'}) \sqrt{n+1} \left( |0_{\omega}\rangle_{\mathcal{M}} |n_{\omega'}\rangle^I \langle 1_{\omega}|_{\mathcal{M}} \langle (n+1)_{\omega'}|^I \right) \\
 \text{Tr}_{II}(\rho_{1100}) = \frac{1}{\cosh^3(r_{\omega'})} \sum_n \tanh^{2n}(r_{\omega'}) \sqrt{n+1} \left( |1_{\omega}\rangle_{\mathcal{M}} |(n+1)_{\omega'}\rangle^I \langle 0_{\omega}|_{\mathcal{M}} \langle n_{\omega'}|^I \right) \\
 \text{Tr}_{II}(\rho_{1111}) = \frac{1}{\cosh^4(r_{\omega'})} \sum_n \tanh^{2n}(r_{\omega'}) (n+1) \left( |1_{\omega}\rangle_{\mathcal{M}} |(n+1)_{\omega'}\rangle^I \langle 1_{\omega}|_{\mathcal{M}} \langle (n+1)_{\omega'}|^I \right)
 \end{array} \right. , \tag{8.7}$$

con lo cual podemos expresar a la traza parcial de (8.4) sobre los estados de la cuña II como

$$\rho_{\mathcal{M},I} = \text{Tr}_{II}(\rho) = \frac{1}{2 \cosh^2(r_{\omega'})} \sum_n \tanh^{2n}(r_{\omega'}) \rho_n , \tag{8.8}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \rho_n = & |0_{\omega}\rangle_{\mathcal{M}} |n_{\omega'}\rangle^I \langle 0_{\omega}|_{\mathcal{M}} \langle n_{\omega'}|^I + \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh(r_{\omega'})} |0_{\omega}\rangle_{\mathcal{M}} |n_{\omega'}\rangle^I \langle 1_{\omega}|_{\mathcal{M}} \langle (n+1)_{\omega'}|^I \\
 & + \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh(r_{\omega'})} |1_{\omega}\rangle_{\mathcal{M}} |(n+1)_{\omega'}\rangle^I \langle 0_{\omega}|_{\mathcal{M}} \langle n_{\omega'}|^I + \frac{n+1}{\cosh^2(r_{\omega'})} |1_{\omega}\rangle_{\mathcal{M}} |(n+1)_{\omega'}\rangle^I \langle 1_{\omega}|_{\mathcal{M}} \langle (n+1)_{\omega'}|^I .
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Posteriormente, los autores evalúan si el estado es o no enredado mediante el criterio PPT (véase apéndice C.2). Para esto, es necesario obtener los eigenvalores de la transpuesta parcial de la matriz de densidad (8.8). Intercambiando los qubits de Alice, la transpuesta parcial dada por

$$\rho_{\mathcal{M},I}^{\text{TA}} = \begin{matrix} & \langle 1, n | & \langle 0, n + 1 | & \langle 1, n + 1 | & \langle 0, n + 2 | & \\ \begin{matrix} |1, n\rangle \\ |0, n + 1\rangle \\ |1, n + 1\rangle \\ |0, n + 2\rangle \end{matrix} & \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \frac{n \tanh^{2(n-1)}(r_{\omega'})}{2 \cosh^4(r_{\omega'})} & \frac{\sqrt{n+1} \tanh^{2n}(r_{\omega'})}{2 \cosh^3(r_{\omega'})} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \frac{\sqrt{n+1} \tanh^{2n}(r_{\omega'})}{2 \cosh^3(r_{\omega'})} & \frac{\tanh^{2(n+1)}(r_{\omega'})}{2 \cosh^2(r_{\omega'})} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \frac{(n+1) \tanh^{2n}(r_{\omega'})}{2 \cosh^4(r_{\omega'})} & \frac{\sqrt{n+2} \tanh^{2(n+1)}(r_{\omega'})}{2 \cosh^3(r_{\omega'})} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \frac{\sqrt{n+1} \tanh^{2(n+1)}(r_{\omega'})}{2 \cosh^3(r_{\omega'})} & \frac{\tanh^{2(n+2)}(r_{\omega'})}{2 \cosh^2(r_{\omega'})} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & , \end{matrix} \quad (8.10)$$

donde se hace la simplificación de notación  $|0_{\omega}\rangle_{\mathcal{M}}|n_{\omega'}\rangle^I \equiv |0, n\rangle$  para todos los estados.

La matriz  $\rho_{\mathcal{M},I}^{\text{TA}}$  es entonces una matriz diagonal en bloques, la cual contiene un bloque único para cada iteración de  $n$ , por lo que los eigenvalores de  $\rho_{\mathcal{M},I}^{\text{TA}}$  son la suma de los eigenvalores de cada bloque.

Los eigenvalores para el bloque  $n, n + 1$ , están dados por

$$\lambda_{\pm}^n = \frac{\tanh^{2n}(r_{\omega'})}{4 \cosh^2(r_{\omega'})} \left[ \left( \frac{n}{\sinh^2(r_{\omega'})} + \tanh^2(r_{\omega'}) \right) \pm \sqrt{Z_n} \right], \quad (8.11)$$

donde

$$Z_n = \left( \frac{n}{\sinh^2(r_{\omega'})} + \tanh^2(r_{\omega'}) \right)^2 + \frac{4}{\cosh^2(r_{\omega'})}. \quad (8.12)$$

Para aceleraciones finitas (es decir, cuando  $r_{\omega'} < \infty$ ), un eigenvalor es siempre negativo, con lo cual se puede afirmar que el estado siempre está enredado.

Para poder obtener una visión mas clara del cambio de enredamiento respecto a la aceleración, los autores calculan la *negatividad logarítmica* (véase apéndice C.2), dada por

$$N(\rho) = \log_2(2\mathcal{N} + 1), \quad (8.13)$$

donde  $\mathcal{N}$  es la *negatividad* “usual” (véase apéndice C.2).

Claramente, la negatividad de  $\rho_{\mathcal{M},I}^{\text{TA}}$  es la suma de todos los eigenvalores  $\lambda_-^n$  (para el bloque  $n, n + 1$ ), pues el término de la raíz siempre es mayor al término sin raíz. Con esto, la negatividad logarítmica expresada en [8] es

$$N(\rho_{\mathcal{M},I}) = \log_2 \left( \frac{1}{2 \cosh^2(r_{\omega'})} + \Lambda \right), \quad (8.14)$$

donde

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh^{2n}(r_{\omega'})}{2 \cosh^2(r_{\omega'})} \sqrt{\left( \frac{n}{\sinh^2(r_{\omega'})} + \tanh^2(r_{\omega'}) \right)^2 + \frac{4}{\cosh^2(r_{\omega'})}}. \quad (8.15)$$

La gráfica de  $r_{\omega'}$  v.s.  $N(\rho_{\mathcal{M},I})$  se muestra en la figura 8.1

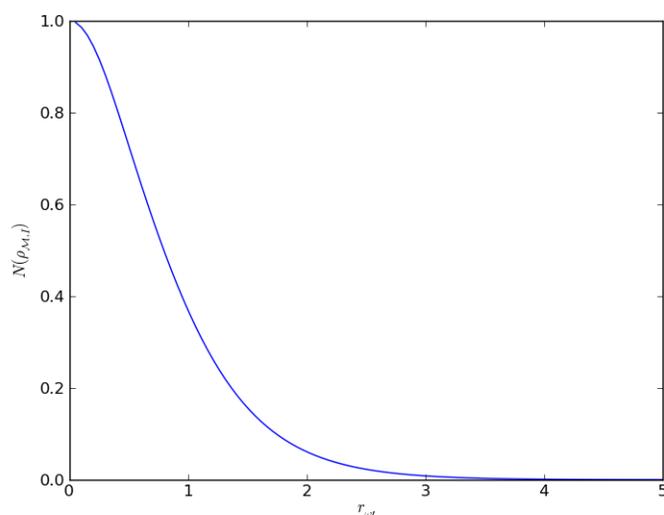


Figura 8.1: Comportamiento de la negatividad logarítmica respecto al factor  $r_{\omega'}$ .

Usando límites superiores e inferiores de la negatividad de tal manera que las sumas tengan un valor exacto, los autores confirman que  $\lim_{r_{\omega'} \rightarrow 0} N(\rho_{\mathcal{M},I}) = 1$  y  $\lim_{r_{\omega'} \rightarrow \infty} N(\rho_{\mathcal{M},I}) = 0$ .

Posteriormente, los autores calculan la *información mutua* del estado en cuestión, pero ese cálculo va más allá de los objetivos del presente trabajo, por lo que no será incluido.

## 8.2. El efecto Unruh en información cuántica más allá de la aproximación *single-mode*: descripción del PRA 82, 042332 (2010)

En la primera parte este paper se estudia la cuantización del campo escalar real usando modos de Rindler, discutiendo la relación entre los modos de Minkowski, Unruh y Rindler, que se ha mencionado en el capítulo 7.

En la segunda sección, que es la de nuestro interés, se estudia el cambio de enredamiento de un estado de Bell dado por

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_\omega\rangle_{\mathcal{M}}|0_\Omega\rangle_U + |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}}|1_\Omega\rangle_U), \quad (8.16)$$

donde se interpreta a una excitación de Unruh como

$$|1_\Omega\rangle_U = \hat{a}_{\Omega,U}^\dagger |0\rangle_U, \quad (8.17)$$

con

$$\hat{a}_{\Omega,U}^\dagger = q_R \hat{a}_{\Omega,U}^R + q_L \hat{a}_{\Omega,U}^L \quad (8.18)$$

y la condición de normalización  $|q_R|^2 + |q_L|^2 = 1$ .

Usando la relación entre vacío de Unruh y estados de Rindler (7.23) y las relaciones (7.15) puede verse que

$$|1_\Omega\rangle_U = \frac{1}{\cosh(r_\Omega)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh^n(r_\Omega)}{\cosh(r_\Omega)} \sqrt{n+1} |\Psi_\Omega^n\rangle, \quad (8.19)$$

donde

$$|\Psi_\Omega^n\rangle = q_L |n_\Omega\rangle^I |(n+1)_\Omega\rangle^{II} + q_R |(n+1)_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II}. \quad (8.20)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el capítulo 8.1 y tomando en cuenta el estado de una excitación (8.19), la matriz de densidad que describe al estado (8.16) después de realizar la traza parcial sobre la cuña II es

$$\rho_I = \frac{1}{2 \cosh^2(r_\Omega)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n}(r_\Omega) \rho_n, \quad (8.21)$$

donde  $\rho_I = \text{Tr}_{II} (|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|)$  y

$$\begin{aligned} \rho_n = & |0_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |n_\Omega\rangle^I \langle 0_\omega|_{\mathcal{M}} \langle n_\Omega|^I + \frac{n+1}{\cosh^2(r_\Omega)} \left( |q_R|^2 |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |(n+1)_\Omega\rangle^I \langle 1_\omega|_{\mathcal{M}} \langle (n+1)_\Omega|^I \right. \\ & + |q_L|^2 |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |n_\Omega\rangle^I \langle 1_\omega|_{\mathcal{M}} \langle n_\Omega|^I \left. \right) + \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh(r_\Omega)} \left( q_R |0_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |(n+1)_\Omega\rangle^I \langle 1_\omega|_{\mathcal{M}} \langle n_\Omega|^I \right. \\ & + q_L |0_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |n_\Omega\rangle^I \langle 1_\omega|_{\mathcal{M}} \langle (n+1)_\Omega|^I + q_R |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |n_\Omega\rangle^I \langle 0_\omega|_{\mathcal{M}} \langle (n+1)_\Omega|^I \\ & + q_L |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |(n+1)_\Omega\rangle^I \langle 0_\omega|_{\mathcal{M}} \langle n_\Omega|^I \left. \right) + q_R q_L^* \frac{\tanh(r_\Omega)}{\cosh^2(r_\Omega)} \sqrt{(n+1)(n+2)} \left( |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |(n+2)_\Omega\rangle^I \langle 1_\omega|_{\mathcal{M}} \langle n_\Omega|^I \right. \\ & \left. + |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} |n_\Omega\rangle^I \langle 1_\omega|_{\mathcal{M}} \langle (n+2)_\Omega|^I \right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Para analizar el enredamiento en este sistema, los autores usan la negatividad, definida por (C.13), para lo cual se requiere la transpuesta parcial de (8.21), dada por

$$\rho_I^{\text{T}A} = \frac{1}{2 \cosh^2(r_\Omega)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n}(r_\Omega) \rho_n^{\text{T}A}, \quad (8.23)$$

donde  $\rho_n^{\text{T}A}$  es la transpuesta parcial de (8.22) sobre los qubits de Alice.

Los autores llaman a la partición que corresponde a un modo de Minkowski y a un modo de Rindler de la cuña I como la partición Alice-Rob, mientras que a la partición dada por un modo de Minkowski y un modo de Rindler de la cuña II le llaman Alice-antiRob.

Claramente, la matriz de densidad dada por (8.21) describe a la partición Alice-Rob. Para obtener la matriz de densidad para la partición Alice-antiRob, basta con realizar la traza parcial sobre la cuña I en lugar de la cuña II e intercambiar  $q_R$  por  $q_L$  y viceversa.

Desafortunadamente, no es posible calcular analíticamente la negatividad para la matriz de densidad dada por (8.23). Con la ayuda de dos programas escritos en PYTHON fue posible reproducir numéricamente la negatividad para ciertos valores de  $q_R$  y  $q_L$ . La figura 8.2 muestra la negatividad calculada numéricamente para  $q_R = 1, 9.5, 9, 8.5, 8, 7.5, 7$  y  $6.5$  para las particiones Alice-Rob y Alice-AntiRob.

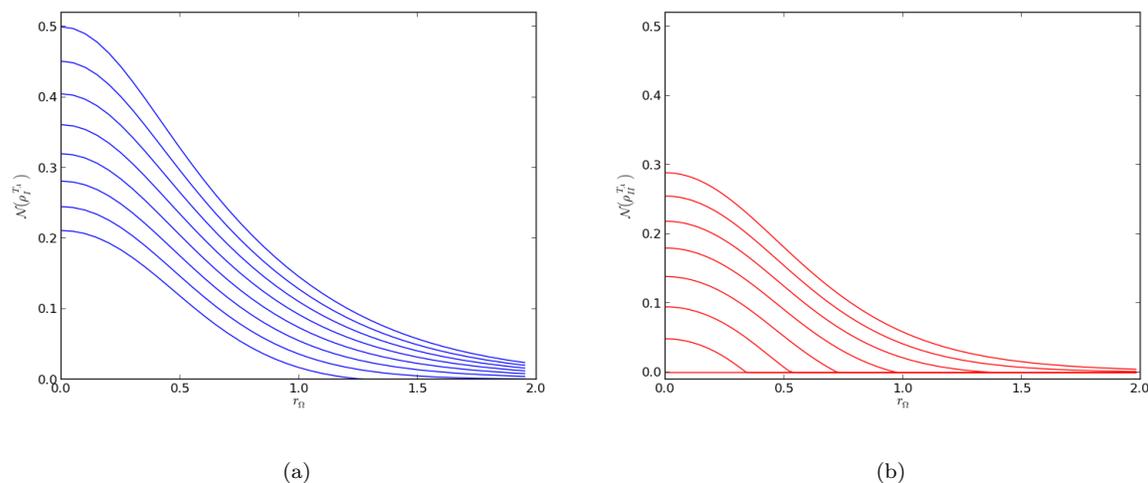


Figura 8.2: La figura 8.2(a) muestra la negatividad numéricamente calculada de la matriz de densidad de la partición Alice-Rob para  $q_R = 1, 9.5, 9, 8.5, 8, 7.5, 7$  y  $6.5$  (mostrados en la gráfica de arriba hacia abajo), mientras que la figura 8.2(b) muestra la negatividad de la matriz de densidad de la partición Alice-antiRob usando los mismos valores de  $q_R$  (mostrados en la gráfica de abajo hacia arriba)

La siguiente sección de [5] estudia el enredamiento de la misma manera pero considerando ahora campos espinoriales (Dirac), pero está más allá de los objetivos del presente trabajo.

## Capítulo 9

# Análisis crítico del enredamiento en coordenadas de Rindler

En este capítulo se estudian las afirmaciones y los resultados de dichos artículos. Se muestran los resultados expuestos relevantes para el presente trabajo y se analizan de acuerdo a las consideraciones físicas pertinentes.

### 9.1. El problema de la aproximación *single mode*

Esta sección es un análisis exclusivo del PRL 95, 120404 (2005). Cabe resaltar que el problema de [8] explicado en esta sección no es propio de este artículo, sino que fue heredado de [2] y es discutido en [5].

Se considera el estado inicial (8.1) y se estipula la relación (8.3), donde se hace alusión a la aproximación *single mode* (a un modo) dada por  $\hat{a}_\omega \approx \hat{a}_{\omega,U}^R$ . Tomando en cuenta esta sustitución y considerando las relaciones (7.15), tenemos que

$$\hat{a}_\omega \approx \hat{a}_{\omega,U}^R = \frac{1}{\cosh(r_\omega)} \hat{a}_\omega^I . \quad (9.1)$$

Aplicando este resultado a la ecuación (7.23) obtenemos

$$\begin{aligned}
 |1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} = \hat{a}_\omega^\dagger |0_\omega\rangle_{\mathcal{M}} &= \frac{1}{\cosh(r_\omega)} \sum_n \tanh^n(r_\omega) \frac{1}{\cosh(r_\omega)} \hat{a}_\omega^{I\dagger} |n_\omega\rangle^I |n_\omega\rangle^{II} \\
 &= \frac{1}{\cosh^2(r_\omega)} \sum_n \tanh^n(r_\omega) \sqrt{n+1} |(n+1)_\omega\rangle^I |n_\omega\rangle^{II}, \tag{9.2}
 \end{aligned}$$

justo como se observa en la ecuación (8.3).

La aproximación single-mode implica en las ecuaciones (7.11) que

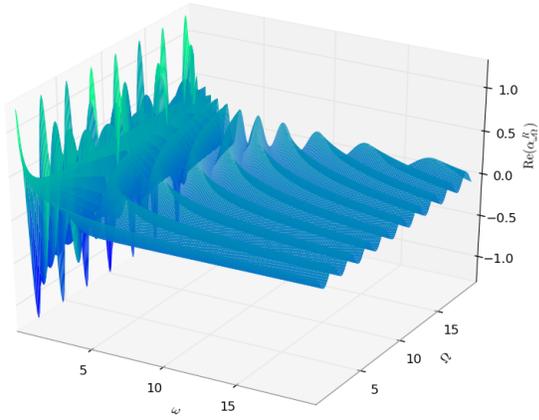
$$\begin{aligned}
 \hat{a}_{\omega,U}^R &= \int d\omega' \alpha_{\omega'\omega}^R \hat{a}_{\omega'} \\
 &\approx \int d\omega' \delta(\omega' - \omega) \hat{a}_{\omega'} \\
 &= \hat{a}_\omega, \tag{9.3}
 \end{aligned}$$

es decir, la relación (9.3) implica que

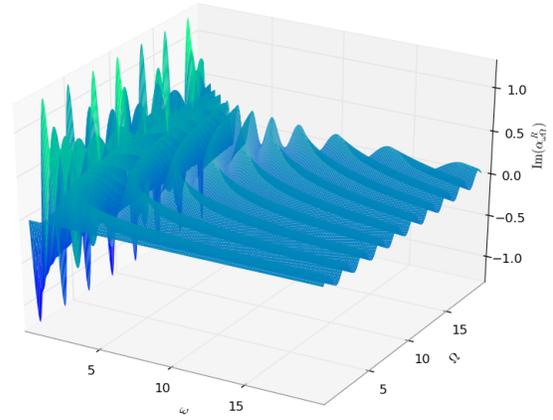
$$\alpha_{\omega'\omega}^R \approx \delta(\omega' - \omega), \tag{9.4}$$

lo cual quiere decir que los coeficientes de Bogoliubov  $\alpha_{\omega\Omega}^R$  tienen que tener una distribución lo suficientemente “aguda” como para poder aproximarla como una delta de Dirac. Sin embargo, por las ecuaciones (7.14) observamos que

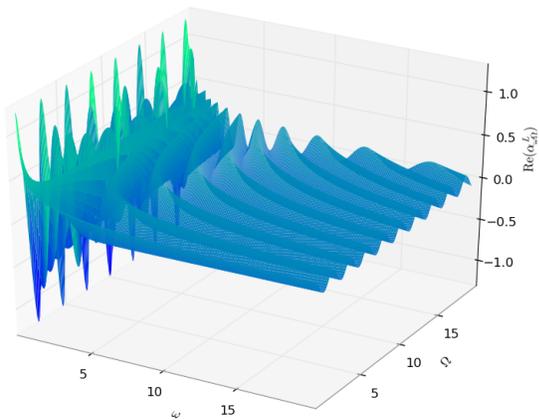
$$\begin{aligned}\alpha_{\omega\Omega}^R &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} (\omega l)^{i\epsilon\Omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} e^{\ln(\omega l)^{i\epsilon\Omega}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} e^{i\epsilon\Omega \ln(\omega l)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} [\cos(\epsilon\Omega \ln(\omega l)) + i \operatorname{sen}(\epsilon\Omega \ln(\omega l))] .\end{aligned}\tag{9.5}$$



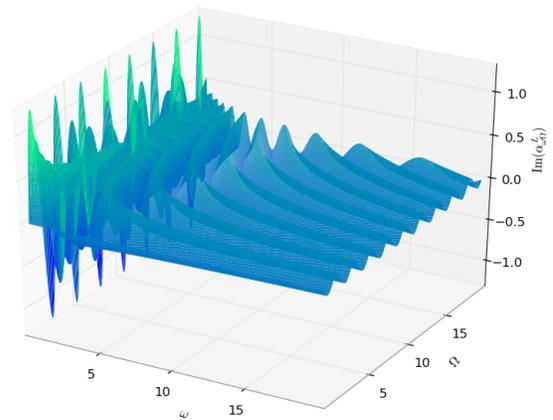
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 9.1: Figura 9.1(a): parte real de  $\alpha_{\omega\Omega}^R$ . Figura 9.1(b): parte imaginaria de  $\alpha_{\omega\Omega}^R$ . Figura 9.1(c): parte real de  $\alpha_{\omega\Omega}^L$ .  
Figura 9.1(d): parte imaginaria de  $\alpha_{\omega\Omega}^L$ .

Por la ecuación (9.5) y por las figuras 9.1(a), 9.1(b), 9.1(c) y 9.1(d) se puede observar que la distribución dada por estos coeficientes de Bogoliubov tienen un comportamiento oscilatorio en el plano complejo sin darle “preferencia” a ninguna frecuencia, por lo que no es posible aproximarlos por deltas de Dirac.

La manera ideal de obtener un estado excitado de Minkowski es ver la relación que hay entre los operadores de Minkowski y los de Rindler. Para esto, sustituimos la primera relación de (7.15) en la primera relación de (7.11) y sacamos el conjugado hermitiano, obteniendo así

$$\begin{aligned}\hat{a}_\omega^\dagger &= \int d\Omega (\alpha_{\omega\Omega}^R \hat{a}_{\Omega,U}^{R\dagger} + \alpha_{\omega\Omega}^L \hat{a}_{\Omega,U}^{L\dagger}) \\ &= \int d\Omega (\alpha_{\omega\Omega}^R (\cosh(r_\Omega) \hat{a}_\Omega^{I\dagger} - \sinh(r_\Omega) \hat{a}_\Omega^{II}) + \alpha_{\omega\Omega}^L (\cosh(r_\Omega) \hat{a}_\Omega^{II\dagger} - \sinh(r_\Omega) \hat{a}_\Omega^I)) .\end{aligned}\quad (9.6)$$

Aplicando (9.6) a (7.23),

$$\begin{aligned}|1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} &= \hat{a}_\omega^\dagger |0_\omega\rangle_{\mathcal{M}} \\ &= \frac{1}{\cosh(r_\Omega)} \sum_n \tanh^n(r_\Omega) \hat{a}_\omega^\dagger |n_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II} \\ &= \frac{1}{\cosh(r_\Omega)} \sum_n \tanh^n(r_\Omega) \int d\Omega' \left[ \alpha_{\omega\Omega'}^R (\cosh(r_{\Omega'}) \hat{a}_{\Omega'}^{I\dagger} |n_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II} - \sinh(r_{\Omega'}) \hat{a}_{\Omega'}^{II\dagger} |n_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{\omega\Omega'}^L (\cosh(r_{\Omega'}) \hat{a}_{\Omega'}^{II\dagger} |n_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II} - \sinh(r_{\Omega'}) \hat{a}_{\Omega'}^I |n_\Omega\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II}) \right] .\end{aligned}\quad (9.7)$$

La aplicación de los operadores de creación y aniquilación a los estados de Rindler dependerá de si  $\Omega' = \Omega$  o  $\Omega' \neq \Omega$ , ya que en este último caso, los operadores de aniquilación erradicarán los términos con el factor  $\sinh(r_{\Omega'})$  de (9.7). Pero al notar la integral de éste término, nos damos cuenta de que estamos quitando el punto  $\Omega' = \Omega$  del intervalo de integración, por lo que la integral no se ve afectada. Con esto en cuenta, la ecuación (9.7) se vuelve

$$|1_\omega\rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{\cosh(r_\Omega)} \sum_n \tanh^n(r_\Omega) \int_{\Omega' \neq \Omega} d\Omega' \cosh(r_{\Omega'}) \left[ \alpha_{\omega\Omega'}^R |n_\Omega, 1_{\Omega'}\rangle^I |n_\Omega\rangle^{II} + \alpha_{\omega\Omega'}^L |n_\Omega\rangle^I |n_\Omega, 1_{\Omega'}\rangle^{II} \right] ,\quad (9.8)$$

que es la forma correcta de obtener una excitación de Minkowski en términos de excitaciones de

Rindler.

## 9.2. Reinterpretación de enredamiento v.s. aceleración

En esta sección se presenta un problema de interpretación de resultados.

Tanto [8] como [5], muestran gráficas que relacionan a la negatividad del operador de densidad obtenido del estado de Bell en cuestión con el factor  $r_\Omega$ , afirmando que lo que se expresa es el cambio de enredamiento cuántico respecto a la aceleración de un observador.

Cabe resaltar que se usan estados de Bell distintos en ambos artículos; para [8] se usa el estado de Bell entre modos de Minkowski dado por (8.1), mientras que para [5] se usa el estado de Bell entre modos de Unruh y de Minkowski (8.16), donde los estados etiquetados con  $\Omega$  corresponden a estados de Unruh. Sin embargo, el problema de interpretación de las gráficas está presente en ambas publicaciones.

Debido a que las gráficas muestran el cambio de la negatividad en términos de  $r_\Omega$ , es necesario ver cómo cambia  $\Omega$  en términos de la aceleración y de la frecuencia de Rindler.

### 9.2.1. PRA 82, 042332 (2010)

En este artículo usan un sistema coordinado ligeramente distinto al de [8] y muy similar a (4.2) (sin embargo, son los mismos sistemas bajo un renombramiento de coordenadas), dado por

$$\begin{cases} t = \chi \sinh \eta \\ x = \chi \cosh \eta \end{cases}, \quad (9.9)$$

para el cual, la frecuencia adimensional de Rindler la definen los autores como

$$\Omega = \frac{\Omega_a}{a}, \quad (9.10)$$

donde  $a$  es la aceleración propia, representada por la coordenada  $\chi$ , ya que

$$\sqrt{x^2 - t^2} = \chi = \frac{1}{a} . \quad (9.11)$$

Claramente, esta  $a$  es distinta a la  $\alpha$  mencionada en las coordenadas (4.4), ya que  $\alpha$  permanece constante cuando cambia  $\xi$ , mientras que  $a$  cambia cuando cambia  $\chi$ .

Regresemos ahora al estado dado en (8.16) y a la ecuación (7.8). Los autores expresan a  $r_\Omega$  en esta ocasión como

$$r_\Omega = \tanh^{-1} \left( e^{-\pi\Omega a/a} \right) , \quad (9.12)$$

afirmando así que un cambio de  $r_\Omega$  implica un cambio en  $a$ , puesto que la ecuación (9.12) aparentemente tiene una dependencia explícita de  $a$ . Sin embargo, una simple sustitución de (9.10) en (9.12) muestra que puede escribirse como  $r_\Omega = \tanh^{-1} (e^{-\pi\Omega})$ , justo como lo muestra la ecuación (7.8). Esto quiere decir que entonces  $r_\Omega$  varía conforme cambia la frecuencia adimensional de Rindler  $\Omega$  y por ende, las figuras 8.2 no muestran el cambio del enredamiento como función de la aceleración, sino el cambio del enredamiento para una familia de estados  $|\Phi^+\rangle$  (dados por (8.16)) con diferentes frecuencias de Rindler.

### 9.2.2. PRL 95, 120404 (2005)

A primera vista, el problema de la variación de la aceleración no se encuentra en [8], debido a que en la parametrización de las coordenadas de Rindler dada por (4.4),  $\alpha$  únicamente determina la escala, por lo que cambiar  $\alpha$  implícitamente implica cambiar la aceleración del observador y por lo cual a primera instancia parece que la gráfica 8.1 efectivamente representa el cambio de la negatividad cuando cambia la aceleración de Bob. Sin embargo, hay un problema mucho más sutil, y es que al cambiar  $\alpha$ , también estamos cambiando los modos del campo, con lo cual ya no se tiene el mismo estado inicial que inicialmente se tenía. Para ver esto, tomamos las ecuaciones para los modos de Rindler dados por (7.3) y los expresamos en términos de las coordenadas  $(\eta, \xi)$ , obteniendo así

$$\begin{aligned}
 u_{\Omega}^I(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left( \frac{x - \epsilon t}{l_{\Omega}} \right)^{i\epsilon\Omega} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \exp \left[ i\epsilon\Omega \ln \left( \frac{x - \epsilon t}{l_{\Omega}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} l_{\Omega}^{-i\epsilon\Omega} \exp \left[ i\epsilon\Omega \ln \left( \frac{e^{\alpha\xi}}{\alpha} [\cosh(\alpha\eta) - \epsilon \sinh(\alpha\eta)] \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} (l_{\Omega}\alpha)^{-i\epsilon\Omega} e^{i\epsilon\Omega\alpha(\xi - \epsilon\eta)}, \tag{9.13}
 \end{aligned}$$

con lo cual tenemos finalmente que

$$u_{\Omega}^I(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} (l_{\Omega}\alpha)^{-i\epsilon\Omega} e^{i\epsilon|k|(\xi - \epsilon\eta)}, \tag{9.14}$$

que son ondas planas, como se esperaba de la ecuación (7.2).

Análogamente para los modos de la cuña II, su expresión en coordenadas de Rindler es

$$u_{\Omega}^{II}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} (l_{\Omega}\alpha)^{i\epsilon\Omega} e^{-i\epsilon|k|(\xi - \epsilon\eta)}. \tag{9.15}$$

Podemos observar de las ecuaciones (9.14) y (9.15) que los modos de Rindler tienen una dependencia explícita de la aceleración  $\alpha$ , por lo cual no es posible cambiar  $\alpha$  y que el modo permanezca siendo el mismo a menos que se cambien simultáneamente  $\xi$ ,  $\eta$  y  $k$ , concluyendo así que la variación de  $\alpha$  da lugar entonces a una familia nueva de modos, que es lo que en realidad muestra la gráfica 8.1.

### 9.3. El problema de los detectores y propuesta para el cálculo de enredamiento

El problema final que se estudiará en este presente trabajo, es la ausencia de detectores un poco más “realistas” que nos permitan medir el enredamiento del sistema.

Siempre que se realiza una medición en la Física, se compara con algún instrumento de medición.

### 9.3. EL PROBLEMA DE LOS DETECTORES Y PROPUESTA PARA EL CÁLCULO DE ENREDAMIENTO

---

Si se desea medir una distancia, es necesario tener algún aparato conocido con el cuál comparar, como una regla en este caso en particular.

Los cálculos de enredamiento en las publicaciones [8] y [5] se realizan usando únicamente los estados del campo, mencionando únicamente que cada observador lleva consigo un detector que permite medir una frecuencia en particular, pero nunca son llevados a los cálculos, por lo que en realidad nunca son tomados en cuenta estos detectores.

Una solución alterna a este problema es acoplar al sistema en cuestión un par de detectores que nos permitan medir el enredamiento del sistema. La manera en que funcionan, es mediante la *transferencia de enredamiento* (o en su terminología en inglés, *entanglement swapping*), mediante la cual, el enredamiento del campo se transfiere a los detectores en uso.

Se propone que la interacción de los detectores con el campo sea de tipo monopolar, en donde los detectores son partículas puntuales<sup>1</sup> con niveles de energía internos.

El hamiltoniano para esta interacción está dado por [4]

$$\hat{H}(\tau) = c\hat{m}(\tau)\hat{\phi}(x(\tau)) \quad (9.16)$$

donde  $\hat{m}(\tau)$  es el momento monopolar del detector,  $c$  es la constante de acoplamiento y el campo está evaluado en la trayectoria que sigue el detector. A este tipo de detectores se les conoce como *detectores de Unruh-DeWitt* [4].

El operador de evolución temporal con un hamiltoniano de este tipo está dado por

$$\hat{U} = e^{i \int d\tau \hat{H}(\tau)}, \quad (9.17)$$

donde los límites de la integral dependerán del tiempo durante el cual esté prendido el detector.

Si consideramos que los únicos estados energéticos accesibles del detector son  $|E_0\rangle$  (para el estado base) y  $|E_1\rangle$  (para el primer estado excitado), entonces es posible considerar al detector como un qubit, con el cual será posible calcular el enredamiento considerando que no se puede conseguir enredamiento a partir de sistemas no enredados, i.e., si el sistema de detectores está enredado

---

<sup>1</sup>Generalizaciones con perfiles espaciales y/o diferentes funciones de *prendido/apagado* se tratan en [15] y [13].

### 9.3. EL PROBLEMA DE LOS DETECTORES Y PROPUESTA PARA EL CÁLCULO DE ENREDAMIENTO

---

al finalizar la interacción campo-detectores (con un estado inicial separable para los detectores), entonces el campo inicialmente debió de haber estado enredado.

De esta manera, podemos calcular (por ejemplo), la amplitud de probabilidad de que el detector tome un estado de energía arbitrario (de los considerados en la base), suponiendo que inicialmente está en su estado base y que el campo no tiene ninguna excitación mediante la expresión

$$A = \langle \phi |_{\mathcal{M}} \langle E | \hat{U} | E_0 \rangle | 0_\omega \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (9.18)$$

donde  $|\phi\rangle_{\mathcal{M}}$  es el estado más general del campo, dado por

$$|\phi\rangle_{\mathcal{M}} = C_0 | 0 \rangle + \int d\omega C_\omega | 1_\omega \rangle_{\mathcal{M}} + \int d\omega d\omega' C_{\omega\omega'} | 1_\omega, 1_{\omega'} \rangle_{\mathcal{M}} + \int d\omega d\omega' d\omega'' C_{\omega\omega'\omega''} | 1_\omega, 1_{\omega'}, 1_{\omega''} \rangle_{\mathcal{M}} + \dots \quad (9.19)$$

y donde  $C_\omega, C_{\omega\omega'}, C_{\omega\omega'\omega''}, \dots$  son coeficientes de normalización.

Desafortunadamente, hacer los cálculos de manera exacta resulta imposible, por lo que es necesario acudir a teoría de perturbaciones para poder obtener resultados.

Si suponemos que el acoplamiento entre el detector y el campo es muy débil, entonces podemos expandir a  $\hat{U}$  como

$$\hat{U} = 1 + i \int d\tau \hat{H}(\tau) - \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \hat{H}(\tau) \hat{H}(\tau') + \dots, \quad (9.20)$$

por lo que a primer orden de perturbación, la ecuación (9.18) toma la forma

$$A_1 = ic \langle \phi |_{\mathcal{M}} \langle E | \int d\tau \hat{m}(\tau) \hat{\phi}(x(\tau)) | E_0 \rangle | 0_\omega \rangle_{\mathcal{M}}. \quad (9.21)$$

Habiendo definido esto, es natural ahora poner a dos detectores a interactuar con el mismo campo, y después ver la amplitud de probabilidad de que el estado de Bell inicial del campo se haya transferido a los detectores. El hamiltoniano para esta interacción es entonces

$$\hat{H}(\tau) = c \left[ \hat{m}_1(\tau) \hat{\phi}(x_1(\tau)) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{m}_2(\tau) \hat{\phi}(x_2(\tau)) \right], \quad (9.22)$$

donde  $\hat{m}_1(\tau)$  y  $\hat{m}_2(\tau)$  son los momentos monopoles de los detectores 1 y 2, respectivamente y el acoplamiento entre ambos detectores con el campo es el mismo.

Teniendo esto, y haciendo que el primer detector se ponga en movimiento rectilíneo uniforme y el segundo en movimiento uniformemente acelerado, sólo es necesario calcular la amplitud de probabilidad de que el estado de Bell del campo se transmita a los detectores. La amplitud de probabilidad para esto sería

$$A = \langle \phi |_{\mathcal{M}} \langle \Phi_E^+ | e^{i \int d\tau (c [\hat{m}_1(\tau) \hat{\phi}(x_1(\tau)) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{m}_2(\tau) \hat{\phi}(x_2(\tau))])} | E_0 E_0 \rangle | \Phi^+ \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (9.23)$$

donde  $|\Phi_E^+\rangle$  es el estado de Bell en cuestión para los detectores.

Las coordenadas usadas para este formalismo en este trabajo son, por sencillez las de Minkowski. Sin embargo, el uso de coordenadas de Rindler para describir los mismos procesos no debe alterar el resultado, puesto que la física no debe de depender del sistema coordinado. Después de elegir las coordenadas deseadas, hay que especificar las trayectorias de los detectores y elegir el orden de perturbación al cual se desee trabajar. En nuestro caso, es necesario trabajar hasta segundo orden puesto que excitaciones de más de un estado sólo ocurren a partir de ese orden.

# Capítulo 10

## Conclusiones

En general es complicado cuantificar el enredamiento cuántico cuando se trabaja con coordenadas distintas a las de Minkowski. Hemos visto que no es para nada trivial realizar cálculos con resultados satisfactorios y es igual o más complicado interpretar correctamente lo que significan físicamente. Algunos de los problemas mencionados en el trabajo se reducen al entendimiento completo de las coordenadas de Rindler, las cuales no son sencillas de entender en un corto lapso de tiempo y requieren de un análisis profundo, haciendo particular énfasis en la correcta especificación de los parámetros utilizados y la diferencia de los mismos con las variables usadas para definir al sistema coordinado en sí.

El uso de detectores es vital para poder describir correctamente el cambio del enredamiento, ya que son nuestra manera de medir las excitaciones de un campo. También nos proporcionan una manera alternativa de medir el enredamiento sin tener que usar necesariamente coordenadas de Rindler, pues basta únicamente con especificar la línea de mundo seguida por los detectores en cuestión. Este resultado, al igual que la física en general, debe de ser independiente del sistema coordinado.

Sin embargo, y a pesar de sus defectos, los artículos [8] y [2] despertaron el interés mundial en la Información Cuántica Relativista y actualmente es un área en la que el interés de la comunidad científica crece día con día.

# Apéndice A

## Álgebra Tensorial

### A.1. Variedades diferenciables y Espacio Tangente

Una *variedad diferenciable*  $M$  es un espacio topológico que es lo “suficientemente similar” a un espacio euclideo como para poder utilizar las herramientas del Cálculo.

Una *variedad diferenciable*  $M$  de clase  $C^k$  y  $\dim = n$  es un espacio topológico que cumple

- I)  $M$  es de Hausdorff
- II) Existe una colección de funciones (denominada *atlas*, cuyos elementos se les llama *cartas*)  $\Phi$  tal que
  - a)  $\{\text{Dom } \varphi \mid \varphi \in \Phi\}$  es una cubierta abierta de  $M$
  - b)  $\forall \varphi \in \Phi$ ,  $\varphi$  es un homeomorfismo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$
  - c)  $\forall \varphi, \psi \in \Phi$  con  $(\text{Dom } \varphi \cap \text{Dom } \psi) \neq \emptyset$ , se tiene que
$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\text{Dom } \varphi \cap \text{Dom } \psi) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
 es de clase  $C^k$ .

Dada una curva  $\alpha$  en  $M$  parametrizada por  $\lambda$ , es posible asociarle a cada punto de la curva un *vector tangente* en un punto  $p$  de  $M$  mediante

$$\dot{\alpha}_p = \left( \frac{d\alpha}{d\lambda} \right)_p . \quad (\text{A.1})$$

Nótese que tanto la curva como el vector tangente son independientes de la carta en uso, a pesar de que sus componentes no lo sean.

Al conjunto de vectores tangentes a  $M$  en un punto  $p$  se le llama *espacio tangente* a  $M$  en  $p$  y se le denota por  $T_p(M)$  ó  $T_pM$ . Es usual denotar a los elementos del espacio tangente como *vectores contravariantes* y a sus componentes con un superíndice, de tal manera que puedan ser expresados en términos de la base en notación de Einstein como  $\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu$ , donde  $V^\mu$  es la  $\mu$ -ésima componente del vector  $\vec{V}$  y  $\vec{e}_\mu$  es el  $\mu$ -ésimo elemento de la base.

Al espacio dual del espacio tangente se le conoce como *espacio cotangente* a  $M$  en  $p$  y se le denota por  $T_p^*(M)$  ó  $T_p^*M$ . A los elementos del espacio cotangente se les conoce como *1-formas* ó *vectores covariantes*. Sus componentes suelen denotarse con un subíndice, de tal manera que puedan ser expresados en términos de la base dual como  $\tilde{q} = q_\mu \tilde{\omega}^\mu$ , donde  $q_\mu$  es la  $\mu$ -ésima componente de la 1-forma  $\tilde{q}$  y  $\tilde{\omega}^\mu$  es el  $\mu$ -ésimo elemento de la base dual.

Con esto podemos ahora definir lo que es un tensor.

Un *tensor*  $T$  de rango  $\binom{r}{s}$  en  $M$  es un mapeo lineal en cada uno de sus argumentos de  $s$  vectores y  $r$  1-formas a  $\mathbb{R}$ , i.e.

$$T : \overbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}^s \times \overbrace{T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M}^r \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.2})$$

y sus componentes se denotan como

$$T_{a_1 \dots a_s}{}^{b_1 \dots b_r} \equiv T(\vec{e}_{a_1}, \dots, \vec{e}_{a_s}, \tilde{\omega}^{b_1}, \dots, \tilde{\omega}^{b_r}) . \quad (\text{A.3})$$

Si, por ejemplo,  $T$  es un tensor de rango  $\binom{1}{2}$ , entonces el mapeo de 3 argumentos cualesquiera sería

$$T(\vec{V}, \vec{W}, \tilde{q}) = T(V^\mu \vec{e}_\mu, W^\nu \vec{e}_\nu, q_\lambda \tilde{\omega}^\lambda) \quad (\text{A.4})$$

$$= V^\mu W^\nu q_\lambda T(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu, \tilde{\omega}^\lambda) \quad (\text{A.5})$$

$$= T_{\mu\nu}{}^\lambda V^\mu W^\nu q_\lambda . \quad (\text{A.6})$$

Cabe resaltar que los vectores son tensores de rango  $\binom{0}{1}$  y las 1-formas son tensores de rango  $\binom{1}{0}$ .

El *tensor métrico* o *métrica*  $g$  es un tensor de rango  $\binom{0}{2}$  que le asocia a dos vectores su producto punto:  $g_{\mu\nu} = g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) \equiv \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$ . De esta manera, para dos vectores  $\vec{V}$  y  $\vec{W}$  se tiene que

$$g(\vec{V}, \vec{W}) = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu . \quad (\text{A.7})$$

Gracias a que el producto interior en este caso es conmutativo, entonces el tensor métrico es un tensor simétrico, i.e.  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ .

Por definición, la inversa de la métrica es un tensor  $\binom{2}{0}$  denotado por  $g^{\mu\nu}$ <sup>1</sup> y que cumple  $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda$ .

La métrica también genera un isomorfismo entre  $T_p M$  y  $T_p^* M$ , el cual se puede visualizar mediante las relaciones

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad (\text{A.8})$$

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu . \quad (\text{A.9})$$

Es importante mantener el orden escrito en los índices para poder subirlos y bajarlos correctamente usando las relaciones (A.8) y (A.9) debido a que un tensor puede o no ser simétrico en dichos índices.

Otra manera conveniente de expresar la métrica de un espacio es por el elemento de línea, dado

---

<sup>1</sup>Es común referirse a las componentes de un Ltensor como el tensor en sí. Estos abusos de lenguaje y de notación se usarán a lo largo del presente trabajo.

por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (\text{A.10})$$

De esta manera, la métrica euclídeana con  $\dim = 3$  (por ejemplo) donde  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  es simplemente

$$ds^2 = \delta_{ji} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2 . \quad (\text{A.11})$$

Y si se quiere usar coordenadas esféricas, la métrica es

$$ds^2 = dr^2 + r^2(\sin^2 \phi d\theta^2 + d\phi^2) . \quad (\text{A.12})$$

## A.2. Sistemas de referencia

Muchas veces con establecer un sistema de referencia ingenioso un problema puede reducirse considerablemente. Por ello es necesario poder realizar cambios de coordenadas.

Cuando se realiza un cambio de coordenadas, las componentes de un tensor pueden cambiar, incluso algunas pueden anularse. Pero algo que caracteriza a un tensor es que si todas sus componentes son nulas en un sistema de referencia, entonces son nulas en todo sistema de referencia. Dicho de otro modo, un tensor cuyas componentes son distintas de cero en un sistema de referencia no puede anularse totalmente en ningún otro sistema de referencia.

La matriz de cambio de coordenadas (jacobiana) para pasar de un sistema con coordenadas  $\{x^\nu\}$  a otro sistema con coordenadas  $\{x^{\bar{\mu}}\}$  está dada por

$$\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu} \equiv \frac{\partial x^{\bar{\mu}}}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu x^{\bar{\mu}} . \quad (\text{A.13})$$

Como se realiza el cambio de coordenadas es

$$x^{\bar{\mu}} = \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu} x^\nu \quad (\text{A.14})$$

y la transformación inversa es

$$x^\mu = \Lambda^\mu_{\bar{\nu}} x^{\bar{\nu}}, \quad (\text{A.15})$$

donde  $\Lambda^\mu_{\bar{\nu}}$  es la matriz de transformación inversa y cumple  $\Lambda^{\bar{\mu}}_{\nu} \Lambda^\lambda_{\bar{\mu}} = \delta^\lambda_{\nu}$ . De esta manera, por ejemplo, un tensor de rango  $\binom{1}{2}$  se transforma como

$$T_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}} = \Lambda^\alpha_{\bar{\mu}} \Lambda^\beta_{\bar{\nu}} \Lambda^{\bar{\lambda}}_{\gamma} T_{\alpha\beta}^{\gamma}. \quad (\text{A.16})$$

### A.3. Derivación covariante

Si las coordenadas en uso son curvilíneas, la derivación de un vector está dada por

$$\partial_\alpha \vec{V} = \partial_\alpha (V^\beta \vec{e}_\beta) = (\partial_\alpha V^\beta) \vec{e}_\beta + V^\beta \partial_\alpha \vec{e}_\beta. \quad (\text{A.17})$$

Como las derivadas de vectores son también vectores, podemos expresar a  $\partial_\alpha \vec{e}_\beta$  como una combinación lineal de elementos de  $T_p M$  como

$$\partial_\alpha \vec{e}_\beta = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu. \quad (\text{A.18})$$

A los símbolos  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  se les conoce como *símbolos de Christoffel* (o coeficientes de Christoffel). Notemos que  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  NO es un tensor puesto que puede ser nulo en ciertos sistemas de coordenadas, a pesar de que no lo sea en otros.

Podemos entonces reescribir la ecuación (A.17) como

$$\partial_\alpha \vec{V} = (\partial_\alpha V^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} V^\beta) \vec{e}_\mu = (\nabla_\alpha V^\mu) \vec{e}_\mu, \quad (\text{A.19})$$

donde a

$$\nabla_\alpha V^\mu = \partial_\alpha V^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} V^\beta \quad (\text{A.20})$$

### A.3. DERIVACIÓN COVARIANTE

---

se le conoce como la *derivada covariante* y es una generalización de la derivada usual en coordenadas curvilíneas. Notemos que si usamos coordenadas euclidianas, los símbolos de Christoffel se anulan y la derivada covariante se vuelve la derivada usual.

Análogamente, puede demostrarse que la derivada covariante aplicada a las componentes de una 1-forma es

$$\nabla_{\alpha} V_{\mu} = \partial_{\alpha} V_{\mu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} V_{\beta} . \quad (\text{A.21})$$

Cabe resaltar que la derivada covariante de una función escalar es la derivada usual, puesto que un escalar no depende del sistema de referencia que se está usando, con lo cual se tiene que para una función escalar  $f$ ,  $\nabla_{\alpha} f = \partial_{\alpha} f$ .

Con esto dicho, uno de los postulados más importantes en la relatividad general, que establece que las ecuaciones de la física deben de ser las mismas independientemente del observador se reflejan en el siguiente “truco” para pasar de un sistema de referencia inercial a uno no inercial: si se tiene una ecuación física covariante (en términos de componentes espacio-temporales) en un sistema de referencia inercial, los únicos cambios que se deben de realizar para pasar a un sistema de referencia no inercial son  $\eta \longleftrightarrow g$  y  $\partial \longleftrightarrow \nabla$ , es decir, cambiar la métrica de Minkowski por la métrica de las nuevas coordenadas y cambiar las derivadas parciales por derivadas covariantes.

## Apéndice B

# Equivalencia

## Schwarzschild-Rindler en el límite

$$r \rightarrow 2M$$

La *métrica de Schwarzschild* con coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  dada por (en unidades tales que  $c = G = 1$ )

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{B.1})$$

describe la geometría del espacio-tiempo de un cuerpo esférico, estático, con carga eléctrica neutra y masa  $M$ . Asimismo, esta métrica puede usarse para describir la geometría del espacio-tiempo generada por la presencia de un agujero negro cuyo horizonte de sucesos se encuentra en  $r = 2M$ .

Si trayectoria que sigue una partícula en este espacio-tiempo es puramente radial, la métrica de Schwarzschild toma entonces la forma

---


$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 . \quad (\text{B.2})$$

Realizando el cambio de variable  $r$  a  $\sigma$ , con  $r - 2M = \sigma^2/8M$ , vemos que el factor  $(1 - 2M/r)$  de la ecuación (B.2) toma entonces la forma

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{(A\sigma)^2}{1 + (A\sigma)^2} \quad (\text{B.3})$$

con  $A = (4M)^{-1}$ . Sin embargo, cuando  $r \approx 2M$  entonces  $\sigma \approx 0$ , por lo que la ecuación (B.3) puede aproximarse simplemente por  $(A\sigma)^2$ . Con esto en cuenta, y en el límite cuando  $r \approx 2M$ , entonces la ecuación (B.2) se expresa como

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ &= \frac{(A\sigma)^2}{1 + (A\sigma)^2} dt^2 - \frac{1 + (A\sigma)^2}{(A\sigma)^2} (A\sigma)^2 d\sigma^2 \\ &\approx (A\sigma)^2 dt^2 - \frac{1}{(A\sigma)^2} (A\sigma)^2 d\sigma^2 \\ &= A^2 \sigma^2 dt^2 - d\sigma^2 , \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

que es justo la métrica de Rindler como se tiene en la ecuación (4.3). Es decir, cuando un objeto se encuentra muy cerca del horizonte de sucesos de un agujero negro, la métrica de Schwarzschild puede aproximarse por la métrica de Rindler.

## Apéndice C

# Qubits y Enredamiento Cuántico

Nuestro interés ahora es la información que se puede extraer de un sistema. Clásicamente, la unidad mínima de información es el *bit*, el cual puede tomar los valores 0 ó 1 y que puede ser enviado y recibido de diferentes maneras: por ejemplo en un circuito electrónico, donde una señal de 0V corresponde al valor 0 del bit y una señal de 5V corresponde a 1.

En sistemas cuánticos podemos hacer la misma identificación siempre y cuando la base del espacio de Hilbert (i.e., los estados que pueda tomar el sistema) sea la de un sistema de dos niveles perfectamente distinguibles. Ejemplos de estos sistemas pueden ser un átomo de dos niveles, un sistema de partículas con espín  $1/2$  o la polarización de un fotón, siempre y cuando esté restringida a vertical u horizontal (dependiendo de la base) entre otros ejemplos. En estos casos, le asignamos los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  (no confundirse con estados de un espacio de Fock) a los posibles estados que puede tomar el sistema. Con esto podemos definir una nueva unidad de información cuántica a la cual llamamos *qubit* (de “quantum bit” o “bit cuántico”), que al igual que un bit clásico, puede tomar únicamente dos valores, a diferencia de que el qubit puede estar en una superposición de ambos.

El estado más general de un qubit es

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle , \tag{C.1}$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y la condición de normalización implica que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . La topología de un qubit se aprecia claramente si se elegimos  $\alpha$  y  $\beta$  de tal manera que

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (\text{C.2})$$

donde  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . De esta manera, la topología del qubit es la de una esfera, llamada *esfera de Bloch*.

El estado más general de dos qubits A y B vive en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  y está representado por

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{AB} &= \alpha(|0\rangle_A |0\rangle_B) + \beta(|0\rangle_A |1\rangle_B) + \gamma(|1\rangle_A |0\rangle_B) + \delta(|1\rangle_A |1\rangle_B) \\ &\equiv \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde identificamos el subíndice con la posición que tiene el valor de cada qubit.

Sean  $|\psi\rangle_A$  y  $|\psi\rangle_B$  el estado de dos qubits A y B, respectivamente. Decimos que el estado es *separable* cuando  $|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B$ . Si el estado no es separable, entonces decimos que está *enredado*.

Unos estados particulares de máximo enredamiento son los *estados de Bell*, dados por

$$\begin{cases} |\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \\ |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \end{cases}. \quad (\text{C.4})$$

## C.1. Matriz de Densidad

Para poder estudiar mezclas estadísticas de estados, necesitamos definir el *operador de densidad* (o *matriz de densidad*)  $\rho$ . Definimos un *estado puro* como el estado cuya matriz de densidad se puede expresar como

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (\text{C.5})$$

Definimos un *estado mixto* como el estado tal que su matriz de densidad está dada por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (\text{C.6})$$

con  $\sum_i p_i = 1$ .

Para ejemplificar esto, supongamos que tenemos un ensamble de estados  $|\psi_a\rangle$  y  $|\psi_b\rangle$ , donde  $|\psi_a\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  y  $|\psi_b\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ , con  $\rho_a = |\psi_a\rangle\langle\psi_a|$  y  $\rho_b = |\psi_b\rangle\langle\psi_b|$ . Si  $p$  es la probabilidad de que un miembro del ensamble esté en  $|\psi_a\rangle$ , entonces

$$\begin{aligned} \rho &= p\rho_a + (1-p)\rho_b \\ &= p|\psi_a\rangle\langle\psi_a| + (1-p)|\psi_b\rangle\langle\psi_b|. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

En el lenguaje de la matriz de densidad, se dice que un sistema compuesto por dos subsistemas  $A$  y  $B$  es separable si

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \quad (\text{C.8})$$

con  $\sum_i p_i = 1$ .

El enredamiento de un sistema se puede cuantificar de diferentes maneras. Para un estado puro, el enredamiento está dado por la *entropía de Von Neumann*  $S(\rho)$ , dada por

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \ln \rho), \quad (\text{C.9})$$

de la cual se tiene que si  $S(\rho) = 0$ , entonces el estado es separable; si por el contrario  $S(\rho) = 1$ , entonces el estado está máximamente enredado.

## C.2. Transpuesta Parcial, Negatividad y Negatividad Logarítmica

Cuando se tiene un estado mixto, la entropía de von Neumann falla al cuantificar enredamiento cuántico, pues pueden existir estados que no sean separables cuya entropía de Von Neumann sea idénticamente cero.

Para estados mixtos, otras formas de calcular el enredamiento utilizadas por la simpleza de su cálculo son la negatividad y la negatividad logarítmica.

Ambas medidas de enredamiento<sup>1</sup> usan un criterio de separabilidad llamado el *criterio de Peres-Horodecki* [16], [11], también conocido como criterio PPT ( de *positive partial transpose*). En este criterio, se usa la *transpuesta parcial* de la matriz de densidad, definida de la siguiente manera: si  $\rho$  está dada por

$$\rho = \sum_{i,j,k,l} p_{ijkl} |i\rangle_A \langle j|_A \otimes |k\rangle_B \langle l|_B, \quad (\text{C.10})$$

entonces la transpuesta parcial de  $\rho$  respecto al subsistema  $B$ , denotada  $\rho^{T_B}$ , está dada por

$$\begin{aligned} \rho^{T_B} &= \sum_{i,j,k,l} p_{ijkl} |i\rangle_A \langle j|_A \otimes (|k\rangle_B \langle l|_B)^T \\ &= \sum_{i,j,k,l} p_{ijkl} |i\rangle_A \langle j|_A \otimes |l\rangle_B \langle k|_B. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

El criterio PPT establece que si  $\rho^{T_B}$  tiene al menos un eigenvalor negativo, entonces  $\rho$  está enredado.

Cabe recalcar que el criterio PPT no depende del subsistema del cual se tome la transpuesta parcial, debido a que si hubiéramos tomado la transpuesta parcial respecto al subsistema A, entonces tendríamos

---

<sup>1</sup>Realmente no son medidas de enredamiento en el término estricto, debido a que no convergen a la entropía de von Neumann en el caso de estados puros. Sin embargo, son una buena herramienta para cuantificar el enredamiento para estados mixtos.

$$\begin{aligned}
 \rho^{TA} &= \sum_{i,j,k,l} p_{ijkl} |j\rangle_A \langle i|_A \otimes |k\rangle_B \langle l|_B \\
 &= \left( \sum_{i,j,k,l} p_{ijkl} |i\rangle_A \langle j|_A \otimes |l\rangle_B \langle k|_B \right)^T \\
 &= (\rho^{TB})^T .
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

La *negatividad* es una manera de calcular el enredamiento que hace uso del criterio PPT, definida por

$$\mathcal{N}(\rho) = \frac{\|\rho^{TA}\| - 1}{2}, \tag{C.13}$$

donde  $\|M\| \equiv \text{Tr} \sqrt{X^\dagger X}$  es la norma de traza, la cual se reduce a  $\|M\| = \sum_i |\lambda_i|$  (donde  $\{\lambda_i\}$  son los eigenvalores de  $M$ ) si  $M$  es hermitiana. Con esto, (C.13) se simplifica a

$$\mathcal{N}(\rho) = \sum_i \frac{|\lambda_i| - \lambda_i}{2}, \tag{C.14}$$

que es simplemente la suma del valor absoluto de los eigenvalores negativos de  $\rho$ .

Al igual que en la entropía de von Neumann, la negatividad es nula cuando el estado es separable y es 1 cuando es máximamente enredado.

Otra manera de calcular el enredamiento es mediante la *negatividad logarítmica*, la cual se define por

$$\mathcal{N}(\rho) = \log_2 \left( \text{Tr} \sqrt{\rho \rho^\dagger} \right), \tag{C.15}$$

que en términos de la negatividad se ve como

$$\mathcal{N}(\rho) = \log_2(2\mathcal{N} + 1). \tag{C.16}$$

## C.2. TRANSPUESTA PARCIAL, NEGATIVIDAD Y NEGATIVIDAD LOGARÍTMICA

La ventaja que tiene la negatividad logarítmica respecto a la negatividad, es que es aditiva ante productos tensoriales, i.e.,  $N(\rho_1 \otimes \rho_2) = N(\rho_1) + N(\rho_2)$ . Sin embargo, una desventaja que tiene es que puede ser nula aún cuando el estado se encuentra enredado.

# Bibliografía

- [1] ALSING, P. M., AND FUENTES, I. Observer dependent entanglement. *Class.Quant.Grav.* *29* (2012), 224001.
- [2] ALSING, P. M., AND MILBURN, G. J. Teleportation with a uniformly accelerated partner. *Phys. Rev. Lett.* *91* (Oct 2003), 180404.
- [3] BARTLETT, S. D., AND TERNO, D. R. Relativistically invariant quantum information. *Phys. Rev. A* *71* (Jan 2005), 012302.
- [4] BIRREL, N., AND DAVIES, P. C. W. *Quantum Fields in Curved Space*, primera ed. Cambridge University Press, 1982.
- [5] BRUSCHI, D. E., LOUKO, J., MARTÍN-MARTÍNEZ, E., DRAGAN, A., AND FUENTES, I. Unruh effect in quantum information beyond the single-mode approximation. *Phys. Rev. A* *82* (Oct 2010), 042332.
- [6] CASTRO-RUIZ, E., AND NAHMAD-ACHAR, E. Entanglement properties of a system of two spin-1 particles under a lorentz transformation. *Phys. Rev. A* *86* (Nov 2012), 052331.
- [7] FUENTES, I. Lecture series on relativistic quantum information, 2010.
- [8] FUENTES-SCHULLER, I., AND MANN, R. B. Alice falls into a black hole: Entanglement in noninertial frames. *Phys. Rev. Lett.* *95* (Sep 2005), 120404.

- [9] GINGRICH, R. M., AND ADAMI, C. Quantum entanglement of moving bodies. *Phys. Rev. Lett.* 89 (Dec 2002), 270402.
- [10] GÜIJOSA, A. Apuntes del curso ¿qué es la teoría de cuerdas?, 2012.
- [11] HORODECKI, P. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Phys. Lett. A* 232 (Aug 1997).
- [12] KAKU, M. *Quantum Field Theory: Modern Introduction*. Oxford University Press, 1993.
- [13] LEE, A. R., AND FUENTES, I. Spatially extended unruh-dewitt detectors for relativistic quantum information. *pre-print* (2012). arXiv:1211.5261v1 [quant-ph] 22 Nov 2012.
- [14] LI, H., AND DU, J. Relativistic invariant quantum entanglement between the spins of moving bodies. *Phys. Rev. A* 68 (Aug 2003), 022108.
- [15] LOUKO, J., AND SATZ, A. How often does the Unruh DeWitt detector click? Regularization by a spatial profile. *Classical and Quantum Gravity* 23 (2006), 6321–6343.
- [16] PERES, A. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.* 77 (Aug 1996), 1413–1415.
- [17] PERES, A., SCUDO, P. F., AND TERNO, D. R. Quantum entropy and special relativity. *Phys. Rev. Lett.* 88 (May 2002), 230402.
- [18] PERES, A., AND TERNO, D. R. Quantum information and relativity theory. *Rev. Mod. Phys.* 76 (Jan 2004), 93–123.
- [19] WEINBERG, S. *The Quantum Theory of Fields (Volume 1)*, 1 ed. Cambridge University Press, June 1995.