UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍAS DÉBILES COMPACTAS Y σ-COMPACTAS EN Cp(X).

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:
JOSÉ ALFREDO URIBE ALCÁNTARA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.

MÉXICO, D. F. 2013.

Índice general

Introducción.

Una biyección continua de un espacio topológico Y en un espacio topológico Z es llamada condensación de Y sobre Z, cuando existe tal biyección se dice que Y se condensa sobre Z. No es difícil notar que determinar si la topología de un espacio topológico puede ser debilitada a una topología con propiedades específicas es equivalente a determinar si tal espacio puede ser condensado sobre algún espacio con las propiedades requeridas. Así, preguntarnos por la existencia de una topología débil compacta para un espacio topológico X es equivalente a preguntarnos si existe una condensación de X sobre algún espacio compacto.

S. Banach planteó el problema de determinar si todo espacio de Banach separable admite una topología compacta y metrizable más débil. En [18], E. G. Pytkeev respondió en forma positiva a este planteamiento, demostrando que si X es un subespacio de Borel de un espacio completamente metrizable separable y X no es σ-compacto, entonces existe una condensación de X sobre el cubo de Hilbert $I^{\mathbb{N}}$.

El problema planteado por Banach está relacionado con el problema de determinar topologías débiles compactas para los espacios de funciones $C_p(X)$. Note que el espacio $C_p(X)$ sólo es compacto cuando $X = \emptyset$, por lo cual este problema tiene importancia.

Problema, A. V. Arhangel'skii, [2]. ¿Bajo qué condiciones de X el espacio $C_p(X)$ admite una topología débil compacta (σ-compacta)?

Uno de los propósitos de esta tesis es exponer todos los resultados necesarios para poder demostrar el siguiente resultado de H. Michalewski.

Teorema. Si X es analítico metrizable, entonces $C_p(X)$ se condensa sobre $I^{\mathbb{N}}$.

Este resultado de Michalewski generaliza el resultado de A. V. Arhangel'skii obtenido en [4] que establece que $C_p(X)$ tiene una topología débil compacta cuando X es un espacio metrizable σ-compacto.

Debemos resaltar el hecho de que no es posible generalizar el Teorema de Michalewski para todos los espacios metrizables separables. W. Marciszewski demostró en [16] que si se asume que la mínima cardinalidad de una familia dominante de funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es igual a 2^{ω}, entonces existe un subespacio X de $\mathbb{R}$, tal que $C_p(X)$ no se condensa sobre ningún espacio σ-compacto.

En la Sección 2.2 presentamos una demostración del resultado antes mencionado de Michalewski. De hecho, en ésta exponemos el teorema de H. Michalewski en su forma más general, que utiliza el Axioma de Determinación Proyectiva para demostrar que si X es un subconjunto proyectivo no σ-compacto de un espacio polaco entonces $C_p(X)$ admite una condensación sobre el cubo de Hilbert $I^{\mathbb{N}}$. Mientras que en la Sección 2.3 exponemos la construcción realizada por Marciszewski en [16].

En [6], Arhangel'skii y Pavlov estudiaron sistemáticamente cuándo el espacio $C_p(X)$ admite una topología compacta ó una topología σ-compacta. De manera particular, plantearon las preguntas siguientes (cf. problemas 29 y 30 en [6]):

- Sea A_τ la compactación de Alexandroff del espacio discreto de cardinalidad τ, donde $\tau > \omega$. ¿Existe una condensación de $C_p(A_\tau)$ sobre un espacio σ-compacto?

- Sea X un compacto de Corson (Eberlein) no metrizable. ¿Puede ser condensado $C_p(X)$ sobre un espacio σ-compacto?

En el Capítulo 3 exponemos el resultado de V. V. Tkachuk que establece que si X es un compacto de Corson no metrizable entonces $C_p(X)$ no admite una topología débil σ-compacta. Dicho resultado responde de manera negativa a las dos preguntas anteriores.

Por otro lado, debemos mencionar que el único requisito para la lectura de este trabajo de tesis es el conocimiento de algunos hechos básicos de Topología General y de C_p-teoría. En el capítulo 1 presentamos los resultados básicos de C_p-teoría que son necesarios conocer para realizar una buena lectura de este trabajo.

Hemos diseñado también tres apéndices. En el Apéndice A exponemos los resultados de Teoría Descriptiva que debemos manejar para alcanzar los propósitos que esta obra se plantea. En particular, en dicho apéndice el lector podrá encontrar todo el material para poder entender el Axioma de Determinación Proyectiva que es fundamental para el teorema de H. Michalewski que es expuesto en el Capítulo 2. En el Apéndice B exponemos propiedades básicas de los espacios Lindelof-Σ y en el Apéndice C algunos hechos también básicos de C_p-teoría.

El lector podrá encontrar un desarrollo mucho más completo de los aspectos de Topología General abordados en esta tesis en la obra [11], mientras que nuestras principales referencias para el estudio de C_p-teoría y de Teoría Descriptiva son las obras [5] y [14], respectivamente.

Cualquier espacio considerado en los Capítulos 1 y 2 será un espacio Tychonoff o $T_{3.5}$; es decir, consideraremos espacios X que satisfacen:

(i) para cada $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado, y

(ii) para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 1$ y $f(F) \subseteq \{0\}$.

Por otra parte, en el Capítulo 3 sólo consideraremos espacios metrizables separables.

Haremos uso de la siguiente notación: si X es un espacio topológico, los símbolos $\mathcal{T}(X)$ denotan a la topología del espacio X y $\mathcal{T}^*(X) = \mathcal{T}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Si $F \subseteq X$, escribiremos $U \in \mathcal{T}(F, X)$ cada vez que $U \in \mathcal{T}(X)$ y $F \subseteq U$. Cuando $F = \{x\}$, para algún $x \in X$, escribiremos $U \in \mathcal{T}(x, X)$, en vez de $U \in \mathcal{T}(\{x\}, X)$.

José Alfredo Uribe Alcántara

Capítulo 1

Preliminares de C_p-teoría.

1.1. Introducción.

El propósito de este capítulo es presentar los resultados básicos de C_p-teoría que son necesarios conocer para realizar una buena lectura de esta tesis. El lector podrá encontrar un desarrollo mucho más completo de los aspectos de Topología General abordados en esta tesis en la obra [11], mientras que nuestra principal referencia para el estudio de C_p-teoría es la obra [5].

En la Sección 1.2 se muestran las propiedades más básicas de los espacios de funciones continuas $C_p(X, Z)$ dotados de la topología de la convergencia puntual. Uno de los resultados más relevantes de esta sección establece que el espacio $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$ (Corolario 1.2.9).

Una vez que hemos establecido los espacios $C_p(X)$, en la Sección 1.3, aclaramos cuál es la relación entre $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ bajo el supuesto de que existe una función continua entre los espacios X y Y. Para lograr esto introducimos la noción de mapeo dual y exponemos algunas de sus propiedades básicas. También demostraremos que cualquier espacio X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(C_p(X))$ (Proposición 1.3.5). Terminamos la Sección 1.3 proporcionando algunos resultados que caracterizan el valor de una función cardinal en el espacio X, en términos del valor de otra función cardinal evaluada en el correspondiente espacio $C_p(X)$.

En la Sección 1.4 presentamos propiedades básicas de los espacios monolíticos y de los espacios estables. Además demostramos que monoliticidad de X o de $C_p(X)$ implica estabilidad del otro, esto es, la dualidad entre monoliticidad y estabilidad se da en ambos sentidos (Corolario 1.4.11). Terminamos esta sección demostrando que los espacios Lindelöf Σ son espacios estables (Teorema 1.4.14).

En la Sección 1.5 demostraremos que para cualquier compacto de Corson X, el espacio de funciones $C_p(X)$ es un espacio de Lindelöf (Teorema 1.5.23).

1.2. Hechos básicos relativos a $C_p(X)$.

Como es bien sabido, la topología de cualquier espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ está completamente determinada por la convergencia de sus redes. Efectivamente, recordemos que $x_0 \in cl_X(A)$ si y sólo si existe una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en A que converge a x_0; y que una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en un espacio X, converge a un punto $x_0 \in X$ si para toda vecindad V de x_0 existe un λ_0 en el conjunto dirigido Λ tal que $x_\lambda \in V$ para toda $\lambda \geq \lambda_0$.

En el caso de los espacios de funciones es natural decir que una red de funciones $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ en Z^X (donde Z es un espacio topológico) *converge puntualmente* a una función $f_0 \in Z^X$ si para toda $x \in X$, la red $\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ converge a $f_0(x)$ en el espacio topológico Z. Observe que en la noción de convergencia puntual de una red de funciones no hay una topología inmiscuida para Z^X. Una pregunta muy natural es entonces la siguiente: ¿existe alguna topología $\mathcal{T}$ en Z^X en la que la convergencia de redes en el espacio topológico $(Z^X, \mathcal{T})$ sea equivalente a la convergencia puntual de redes de funciones? La siguiente proposición da respuesta a este planteamiento.

1.2.1 Proposición. *Existe una única topología en Z^X tal que la convergencia puntual de redes en Z^X coincide con la convergencia en el sentido de esta topología. Esta topología es la topología producto en Z^X.*

Demostración. Veamos primero que la convergencia de redes en la topología producto coincide con la convergencia puntual. Sea $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una red en Z^X que converge puntualmente a $f_0 \in Z^X$. Veamos que $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ converge a f_0 en la topología producto de Z^X. Consideremos U un elemento de la base canónica para Z^X que contiene a f_0. Entonces

$$U = \{g \in Z^X : g(x_1) \in V_1, \ldots, g(x_n) \in V_n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n$ son abiertos en Z tales que $f_0(x_i) \in V_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\{f_\alpha(x_i) : \alpha \in A\}$ converge a $f_0(x_i)$, existe $\alpha_i \in A$ tal que $f_\alpha(x_i) \in V_i$ para toda $\alpha \geq \alpha_i$. Debido a que A

es dirigido por $\leq$, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $\alpha_0 \geq \alpha_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así:

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow \alpha \geq \alpha_i \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow f_\alpha \in U.$$

Por lo tanto, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha \in U$ para toda $\alpha \geq \alpha_0$.

Ahora, sea $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una red en Z^X que converge a $f_0 \in Z^X$ en la topología producto de Z^X. Verifiquemos que $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ converge puntualmente a f_0. Consideremos un punto $x \in X$ y un abierto V que contiene a $f_0(x)$. Entonces $U = \{g \in Z^X : g(x) \in V\}$ es un abierto canónico de Z^X que contiene a f_0. Como $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ converge a f_0 en Z^X, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha \in U$ para toda $\alpha \geq \alpha_0$, es decir, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha(x) \in V$ para toda $\alpha \geq \alpha_0$. Por lo tanto $\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ converge a $f_0(x)$ en Z. Con esto podemos concluír que $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ converge puntualmente a f_0.

Finalmente, sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos topologías en Z^X tales que la convergencia de redes en Z^X coincide con la convergencia puntual. Verifiquemos que si $N \subseteq Z^X$ entonces $cl_\mathcal{S}(N) = cl_\mathcal{T}(N)$. Sea $f \in cl_\mathcal{S}(N)$. Entonces existe $S = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una red en Z^X con rango en N que converge a f en la topología $\mathcal{S}$. Obtenemos que $\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ converge a $f(x)$ en Z, para toda $x \in X$. Por lo tanto, $S = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ converge a f en la topología $\mathcal{T}$ y $S(A) \subseteq N$. Hemos probado que $f \in cl_\mathcal{T}(N)$. La otra contención se demuestra del mismo modo. □

Por otro lado, para el lector no debe ser difícil verificar que si X es un subespacio de un espacio Y, S es una red en X y $x_0 \in X$, entonces S converge a x_0 en el espacio X si y sólo si S converge a x_0 en el espacio Y. Consideremos ahora a un conjunto no vacío $M \subseteq Z^X$. Verifiquemos que una red en M converge puntualmente a un elemento $f \in M$ si y sólo si converge en M con la topología heredada de la topología producto de Z^X. Sea $S = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una red en M que converge puntualmente a $f_0 \in M$. Entonces, para toda $x \in X$ se cumple que $\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ converge a $f_0(x)$ en Z. Como M es un subespacio de Z^X, podemos ver a S como una red en Z^X que converge puntualmente a $f_0 \in Z^X$. Por 1.2.1, S converge a f_0 en la topología producto de Z^X. Si equipamos a M con la topología heredada de la topología producto en Z^X, por la observación anterior concluimos que S converge a f_0 en M.

Recíprocamente, sea $S = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una red en M que converge a $f_0 \in M$ en la topología heredada de la topología producto de Z^X. Entonces S converge a f_0 en la topología producto de Z^X. Por 1.2.1, S converge puntualmente a f_0.

Todo lo anterior motiva la siguiente definición.

1.2.2 Definición. Sean X un conjunto no vacío y Z un espacio topológico. Considere al subconjunto no vacío $M = \{f \ : \ f : X \to Z \text{ es una función}\}$ de Z^X, es decir, M es un conjunto de funciones de X en Z. La *topología de la convergencia puntual* en M es la topología de subespacio de Z^X, cuando Z^X está equipado con la topología producto.

Esta definición justifica el nombre con el que en ocasiones se refieren algunos autores a la topología de un producto topológico de Tychonoff, y a la topología de sus subespacios. Por otro lado, se sabe también que la topología producto de Z^X es generada por la familia de todas las proyecciones. La proyección correspondiente a un punto $x \in X$ asigna a cada función $f \in Z^X$ el punto $f(x)$. En el contexto de espacios de funciones esta función es llamada *función evaluación* y es denotado por $\widehat{x}$. Es decir, para cada $x \in X$, $\widehat{x} : Z^X \to Z$ es la función definida por la regla:

$$\widehat{x}(f) = f(x), \text{ para cada } f \in Z^X.$$

En la siguiente proposición enunciamos propiedades conocidas de la topología de subespacio de un producto topológico [9, Proposición 4.15].

1.2.3 Proposición. *Sean X un conjunto, Z un espacio y M un subconjunto de Z^X. Si M está equipado con la topología de la convergencia puntual entonces:*

(i) La topología de M es generada por la familia de las funciones evaluación $\hat{x}$, donde $x \in X$.

(ii) Los conjuntos de la forma

$$[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] = \{g \in M \ : \ g(x_1) \in V_1, \ldots, g(x_n) \in V_n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $x_1, \ldots, x_n$ son puntos de X, y $V_1, \ldots, V_n$ son abiertos en Z, forman una base para M.

(iii) Una función $h : Y \to M$ de un espacio topológico Y a M es continua si y sólo si la composición $\widehat{x} \circ h$ es continua para toda $x \in X$.

(iv) Si Z es un espacio Tychonoff, entonces M también lo es.

Es importante notar ahora que la definición de la topología de la convergencia puntual en algún subespacio M de Z^X no depende de alguna topología en X; pero resulta que en los casos más interesantes la definición del conjunto M dependerá de la topología de X. Por ejemplo, en este trabajo consideraremos conjuntos de tipo $C(X,Z) = \{f : f : X \to Z \text{ es una función continua}\}$, donde X y Z son espacios topológicos. El conjunto $C(X,Z)$ equipado con la topología de la convergencia puntual será denotado $C_p(X,Z)$. El siguiente corolario nos proporciona una caracterización para la llamada base canónica de $C_p(X,Z)$.

1.2.4 Corolario. *Sea $\mathcal{B}$ una base para el espacio Z.*

(i) La colección $\{[x_1,\dots,x_n;O_1,\dots,O_n] : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, x_i \in X, O_i \in \mathcal{B}$ para $i = 1,\dots,n\}$, es una base para el espacio $C_p(X,Z)$.

(ii) Si $f_0 \in C_p(X,Z)$, entonces los conjuntos de la forma

$$[f_0,x_1,\dots,x_n,O_1,\dots,O_n] = \{g \in C_p(X,Z) : g(x_1) \in O_1,\dots,g(x_n) \in O_n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_i \in X$ y $f_0(x_i) \in O_i \in \mathcal{B}$ para $i \in \{1,\dots,n\}$, constituyen una base local para $C_p(X,Z)$ en el punto f_0.

De ahora en adelante, denotaremos con $C_p(X)$ al espacio $C_p(X,\mathbb{R})$. Note que como $\mathbb{R}$ es un espacio Tychonoff, el espacio $C_p(X)$ también lo es.

1.2.5 Corolario. *Si $f_0 \in C_p(X)$, entonces los conjuntos de la forma*

$$[f_0,x_1,\dots,x_n,\epsilon] = \{g \in C_p(X) : |f_0(x_i) - g(x_i)| < \epsilon \text{ para } i = 1,\dots,n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_1,\dots,x_n \in X$ y $\epsilon > 0$, forman una base local para $C_p(X)$ en el punto f_0.

Las bases descritas en los corolarios anteriores son usualmente llamadas *bases canónicas*, y sus elementos *conjuntos abiertos canónicos*.

Ahora demostraremos que si Z tiene además una estructura algebraica, ésta también induce una estructura algebraica en $C_p(X,Z)$. Para ello necesitamos recordar algunos hechos sobre el producto diagonal de funciones.

1.2.6 Observación. Supongamos que tenemos un espacio topológico X, una familia $\{Y_s : s \in S\}$ de espacios topológicos y una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_s : X \to Y_s : s \in S\}$. Bajo estas condiciones podemos definir la función $f : X \to \prod_{s\in S} Y_s$ cuya regla de asociación está dada por: $f(x)$ es el único elemento de $\prod_{s\in S} Y_s$ cuya s-ésima coordenada es $f_s(x)$ (para todo $s \in S$). Esta función es llamada *producto diagonal* de las funciones $\{f_s : X \to Y_s : s \in S\}$ y se denota mediante $\Delta_{s\in S} f_s$, o bien $\Delta\mathcal{F}$. Observe que si cada elemento de $\mathcal{F}$ es una función continua, entonces $f = \Delta_{s\in S} f_s$ también es una función continua (utilice la Proposición 1.2.3). Cuando la familia $\mathcal{F}$ consta de un número finito de funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ se escribe $f_1\Delta f_2\Delta \dots \Delta f_n$ en lugar de $\Delta\mathcal{F}$.

1.2.7 Proposición. *Si Z es un espacio vectorial topológico (respectivamente, anillo topológico, grupo topológico), entonces $C_p(X, Z)$ es un espacio vectorial topológico (respectivamente, anillo topológico, grupo topológico).*

Demostración. Supongamos que Z es un espacio vectorial topológico (los casos restantes se manejan de forma parecida). Esto significa que Z es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y está equipado con una topología que hace continuas a las funciones adición y producto por escalares:

$$\vartheta_+ : Z \times Z \to Z;\ (x, y) \mapsto x + y, \qquad \vartheta : \mathbb{R} \times Z \to Z;\ (r, x) \mapsto r \cdot x \qquad (1)$$

Para cada par f y g en Z^X definimos a las funciones $f + g$ y rf (con $r \in \mathbb{R}$) mediante $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(r\,f)(x) = r \cdot f(x)$, para cada $x \in X$. Ahora definimos:

(i) La función *adición* $\phi_+ : Z^X \times Z^X \to Z^X$ dada por $\phi_+(f, g) = f + g$, para cada $(f, g) \in Z^X \times Z^X$.

(ii) La función *producto por escalares* $\phi : \mathbb{R}\times Z^X \to Z^X$ donde $\phi(r, f) = rf$, para cada $(r, f) \in \mathbb{R} \times Z^X$.

No es díficil comprobar que estas operaciones binarias dan a Z^X una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Afirmación 1. La función ϕ_+ es continua cuando Z^X está equipado con la topología producto.

Demostración de la afirmación: Sea $x \in X$. Considere a las funciones γ_x, $\delta_x : Z^X \times Z^X \to Z$ cuya regla de correspondencia es $\gamma_x(f, g) = f(x)$ y $\delta_x(f, g) = g(x)$, respectivamente. Note que γ_x es la composición de la función proyección correspondiente al primer factor de $Z^X \times Z^X$, con la función evaluación $\widehat{x}$. Por la proposición 1.2.3, γ_x es continua. De forma semejante se justifica la continuidad de δ_x. Por lo anterior, el producto diagonal $\gamma_x \triangle \delta_x : Z^X \times Z^X \to Z \times Z$ es continuo. Evidentemente $\widehat{x} \circ \phi_+ = \vartheta_+ \circ (\gamma_x \triangle \delta_x)$. Utilizando esto último obtenemos que $\widehat{x} \circ \phi_+$ es continua. ⊠

Afirmación 2. La topología producto en Z^X hace continua a la función ϕ. *Demostración de la afirmación:* Sea $x \in X$. Definimos $\psi_x : \mathbb{R} \times Z^X \to Z$ mediante $\psi_x(r, f) = f(x)$. Esta función es continua porque es la composición de la función proyección en el segundo factor de $\mathbb{R} \times Z^X$, con la función evaluación $\widehat{x}$. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times Z^X \to \mathbb{R}$ la proyección al primer factor del producto $\mathbb{R} \times Z^X$. Observe que $\widehat{x} \circ \phi = \vartheta \circ (\pi_1 \triangle \psi_x)$. Por (1), $\widehat{x} \circ \phi$ es continua. ⊠

El conjunto $C_p(X, Z)$ es cerrado con respecto a la adición y el producto por escalares ya que para cualesquiera $f, g \in C_p(X, Z)$ y $r \in \mathbb{R}$ sucede que $\phi_+(f, g) = \vartheta_+ \circ (f \triangle g)$ y $\phi(r, f) = \vartheta \circ (\varphi(r) \triangle f)$, donde $\varphi(r)$ es la función constante cuyo valor en todos los puntos de X es igual a r. Así, $C_p(X, Z)$ es un subespacio vectorial de Z^X. Obtenemos en consecuencia que $\phi_+ \restriction_{C_p(X,Z) \times C_p(X,Z)}: C_p(X, Z) \times C_p(X, Z) \to C_p(X, Z)$ y $\phi \restriction_{\mathbb{R} \times C_p(X,Z)}: \mathbb{R} \times C_p(X, Z) \to C_p(X, Z)$ son funciones continuas. □

Recordemos que un espacio topológico Z es *conexo por trayectorias* si para cualesquiera dos puntos x y y en Z, existe una función continua $\lambda : [0, 1] \to Z$ tal que $\lambda(0) = x$ y $\lambda(1) = y$. Terminamos esta sección probando que cuando Z es conexo por trayectorias, el espacio $C_p(X, Z)$ es denso en Z^X.

1.2.8 Proposición. *Si Z es conexo por trayectorias, entonces el espacio $C_p(X, Z)$ es denso en Z^X.*

Demostración. Sea $[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n]$ un abierto canónico de Z^X, donde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n$ son abiertos en Z (ver 1.2.3). Fijemos puntos $z_i \in V_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$.
Caso 1: $n = 1$. Sea $f : X \to Z$ dada por $f(x) = z_1$ para toda $x \in X$. Entonces $f \in C_p(X, Z) \cap [x_1, V_1]$.
Caso 2: $n \geq 2$. Si probamos que:

1. Existe $\phi : \mathbb{R} \to Z$ continua tal que $\phi(i) = z_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y

2. existe $g : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $g(x_i) = i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$,

obtendremos que $f = \phi \circ g \in C_p(X, Z)$ y $f(x_i) = z_i \in V_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, es decir, $f \in C_p(X, Z) \cap [x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n]$.

Demostración de 1: Sea $I = [0, 1]$. Debido a que Z es conexo por trayectorias, para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ existe $\lambda_k : I \to Z$ continua tal que $\lambda_k(0) = z_k$ y $\lambda_k(1) = z_{k+1}$. Considere $\alpha_k : [k, k+1] \to I$ dada por $\alpha_k(r) = r - k$ para cada $r \in [k, k+1]$. Entonces $\phi_k = \lambda_k \circ \alpha_k : [k, k+1] \to Z$ es continua, $\phi_k(k) = z_k$ y $\phi_k(k+1) = z_{k+1}$. Sean $\delta : (-\infty, 1] \to Z$ definida por $\delta(r) = z_1$ para todo $r \in (-\infty, 1]$ y $\psi : [n, +\infty) \to Z$ dada por $\psi(r) = z_n$ para todo $r \in [n, +\infty)$. Definamos $\phi : \mathbb{R} \to Z$ mediante:

$$\phi(r) = \begin{cases} \delta(r) & \text{si } r \leq 1; \\ \phi_k(r) & \text{si } r \in [k, k+1]; \\ \psi(r) & \text{si } r \geq n. \end{cases}$$

Observe que ϕ es continua. Además, si $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ sucede entonces que $\phi(i) = \phi_i(i) = z_i$. Por otra parte, $\phi(n) = \psi(n) = z_n$.

Demostración de 2: Como X es Tychonoff, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $g_i : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $g_i(x_i) = 1$ y $g_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$. Debido a que $C_p(X, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial, $g_i \in C_p(X, \mathbb{R})$ implica que

$$g = 1 + \sum_{i=1}^{n} (i-1) g_i \in C_p(X, \mathbb{R}).$$

Además, $g(x_i) = 1 + (i-1) g_i(x_i) = i$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

El siguiente corolario establece una característica muy importante de los espacios de funciones $C_p(X)$.

1.2.9 Corolario. *$C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$.*

1.3. El mapeo dual.

Si X, Y y Z son espacios topológicos y $p : X \to Y$ es una función entre X y Y (no necesariamente continua), se define el *mapeo dual asociado a p* como la función $p^* : Z^Y \to Z^X$ cuya regla es $p^*(f) = f \circ p$, para toda $f \in Z^Y$. En esta sección demostraremos algunas propiedades básicas del mapeo dual asociado a una función. La primera de éstas establece que el mapeo dual asociado a una función p es siempre continuo.

1.3.1 Proposición. *El mapeo dual p^* es continuo.*

Demostración. Basta verificar que para toda $x \in X$, la composición $\widehat{x} \circ p^*$ es continua. Sean $x \in X$ y $f \in Z^Y$. Entonces

$$(\widehat{x} \circ p^*)(f) = (f \circ p)(x) = f(y) = \widehat{y}(f), \text{ con } y = p(x) \in Y.$$

Por lo tanto, $\widehat{x} \circ p^*$ es igual al mapeo evaluación en Z^Y determinado por $y = p(x)$. De esta forma, $\widehat{x} \circ p^*$ es continuo (porque $\widehat{y}$ lo es). □

Debido a que la composición de funciones continuas es continua, si p es una función continua, entonces $p^*(C_p(Y,Z))$ está contenido en $C_p(X,Z)$. Por otra parte, dado X un subespacio de Y, podemos considerar la función inclusión $i_X : X \to Y$; el correspondiente mapeo dual $\pi_X = i_X^* : C_p(Y,Z) \to C_p(X,Z)$ es llamado *función restricción* (debido a que la composición $i_X^*(f) = f \circ i_X$ es la restricción de una función $f : Y \to Z$ al subespacio X). Denotaremos mediante $C_p(X|Y)$ a la imagen de π_X, es decir,

$$C_p(X|Y) = \{f \restriction_X : f \in C_p(Y,Z)\} \subseteq C_p(X,Z).$$

La siguiente proposición establece propiedades básicas de la función restricción.

1.3.2 Proposición. *Sea X un subespacio de un espacio topológico Y.*

(i) El espacio $C_p(X|Y)$ es un subespacio denso del espacio $C_p(X)$.

(ii) Si X es un subespacio cerrado de Y, entonces la función restricción $\pi_X : C_p(Y) \to C_p(X|Y)$ es una función abierta.

(iii) Si X es un subespacio denso de Y, entonces $\pi_X : C_p(Y) \to C_p(X)$ es una función inyectiva. Particularmente, la función $\pi_X : C_p(Y) \to C_p(X|Y)$ es una condensación, esto es, una función biyectiva y continua.

Demostración. (i) Sean $h \in C_p(X)$ y $A = [h; x_1, \ldots, x_n; \epsilon]$ una vecindad canónica de h en $C_p(X)$. Como Y es un espacio Tychonoff, existe una función continua $f \in C_p(Y)$ tal que $f(x_i) = h(x_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Por la forma de haber elegido a la función f, obtenemos que $\pi_X(f) \in A$.

(ii) Sea $U \subset C_p(Y)$ un abierto no vacío. Para verificar que $\pi_X(U)$ es un subconjunto abierto de $C_p(X|Y)$, elijamos cualquier $g \in \pi_X(U)$. Entonces existe $f \in U$ tal que $\pi_X(f) = g$. Como U es abierto en $C_p(Y)$, existe una vecindad canónica $A = [f; y_1, \ldots, y_n; \epsilon]$ de f en $C_p(Y)$ tal que $f \in A \subseteq U$. En el caso cuando $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq X$, se tiene que

$$\pi_X(A) = [\pi_X(f); y_1, \ldots, y_n; \epsilon] \cap C_p(X|Y).$$

Por otro lado, si $\{y_1, \ldots, y_n\} \setminus X \neq \emptyset$ entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe un índice $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $\{y_1, \ldots, y_l\} \subseteq X$ y $\{y_{l+1}, \ldots, y_n\} \subseteq Y \setminus X$. Comprobaremos ahora que

$$\pi_X(A) = [\pi_X(f); y_1, \ldots, y_l; \epsilon] \cap C_p(X|Y).$$

Por definición del abierto A se sigue que $\pi_X(A) \subseteq [\pi_X(f); y_1, \ldots, y_l; \epsilon] \cap C_p(X|Y)$. Sólo falta verificar que $[\pi_X(f); y_1, \ldots, y_l; \epsilon] \cap C_p(X|Y) \subseteq \pi_X(A)$. Tomemos cualquier $h \in [\pi_X(f); y_1, \ldots, y_l; \epsilon] \cap C_p(X|Y)$. Como $h \in C_p(X|Y)$, existe una función $k \in C_p(Y)$ tal que $\pi_X(k) = h$. Ahora bien, debido a que Y es de Tychonoff, $X \subset Y$ es cerrado y $\{y_{l+1}, \ldots, y_n\} \subseteq Y \setminus X$, podemos elegir una función $t \in C_p(Y)$ con la propiedad de que $t(X) \subseteq \{0\}$ y $t(y_j) = f(y_j) - k(y_j)$ para cada $j = l+1, \ldots, n$. Entonces $t + k \in A$ y $\pi_X(t+k) = h$. Por lo tanto $h \in \pi_X(A)$.

De esta forma, hemos probado que el conjunto $\pi_X(A)$ es un subconjunto abierto del espacio $C_p(X|Y)$. Como $g \in \pi_X(A) \subseteq \pi_X(U)$, podemos concluir que $\pi_X(U)$ es un subconjunto abierto de $C_p(X|Y)$.

(iii) Sean f, $g \in C_p(Y)$ tales que $\pi_X(f) = \pi_X(g)$. Supongamos que existe $y \in Y$ tal que $f(y) \neq g(y)$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio Hausdorff, existen V y W abiertos ajenos conteniendo a $f(y)$ y $g(y)$ respectivamente. Entonces $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$ es un abierto en Y que contiene a y. Debido a que X es denso en Y, existe $z \in X \cap f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$. Así, $z \in X$, $f(z) \in V$ y $g(z) \in W$. Pero $f \restriction_X = g \restriction_X$ implica $f(z) = g(z)$. Por lo tanto $V \cap W$ es no vacío, lo cual es contradictorio. $\square$

En las siguientes proposiciones se establecen propiedades del mapeo dual que nos serán muy útiles.

Recuerde que una función $f : X \to Y$ es llamada *inmersión* si es una composición de un homeomorfismo y una inclusión, es decir, si existe un subespacio L de Y y un homeomorfismo $f' : X \to L$ tales que $f = i_L \circ f'$, donde $i_L : L \to Y$ es la función inclusión.

1.3.3 Proposición. *Si $p : X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva, entonces el mapeo dual $p^* : C_p(Y, Z) \to C_p(X, Z)$ es una inmersión.*

Demostración. Sean $f,\ g \in C_p(Y,Z)$ tales que $f \circ p = g \circ p$. Si $y \in Y = p(X)$ existe $x \in X$ tal que $p(x) = y$. Así $(f \circ p)(x) = (g \circ p)(x)$, es decir, $f(y) = g(y)$. Por lo tanto p^* es una función inyectiva.

Veamos que $(p^*)^{-1} : p^*(C_p(Y,Z)) \subseteq C_p(X,Z) \to C_p(Y,Z)$ es una función continua. Sean $y \in Y$ y $g \in p^*(C_p(Y,Z))$. Entonces existe $f \in C_p(Y,Z)$ tal que $g = p^*(f) = f \circ p$. Como p es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $p(x) = y$. De esta forma,

$$(\widehat{y} \circ (p^*)^{-1})(g) = \widehat{y}(f) = f(p(x)) = g(x) = \widehat{x}(g).$$

Observamos que $\widehat{y} \circ (p^*)^{-1}$ es la función evaluación en $p^*(C_p(Y,Z))$ correspondiente a x, de lo que se sigue que $\widehat{y} \circ (p^*)^{-1}$ es una función continua. $\square$

1.3.4 Proposición. *Sea $p : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces $p^*(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$ si y sólo si p es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que p es inyectiva. Entonces $p^* : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ es una función suprayectiva porque para cualquier $g \in \mathbb{R}^X$ se tiene que $p^*(g \circ p^{-1}) = g$. Por el Corolario 1.2.9, $C_p(Y)$ es denso en $\mathbb{R}^Y$. Como $p^* : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ es una función continua, $p^*(C_p(Y))$ es denso en $p^*(\mathbb{R}^Y) = \mathbb{R}^X$. Por lo tanto $p^*(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$.

Ahora supongamos que p no es inyectiva. Sean $x_1,\ x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $p(x_1) = p(x_2) = y_0$. Considere

$$U = (\widehat{x}_1)^{-1}((0,\infty)) \cap (\widehat{x}_2)^{-1}((\infty,0)) = \{f \in C_p(X) \,:\, f(x_1) > 0,\ f(x_2) < 0\}.$$

Claramente U es un abierto de $C_p(X)$. Además, U es no vacío porque X es Tychonoff. Note que si $g \in p^*(C_p(Y))$ entonces $g = p^*(f) = f \circ p$ para alguna $f \in C_p(Y)$. Observe ahora que

$$g(x_1) = (f \circ p)(x_1) = f(y_0) = (f \circ p)(x_2) = g(x_2),$$

es decir, $g \notin U$. En conclusión $U \subseteq C_p(X) \setminus p^*(C_p(Y))$. Por tal motivo, $p^*(C_p(Y))$ no es denso en $C_p(X)$. $\square$

Sea X un espacio. Para cada $x \in X$ consideremos la función $e_x = \widehat{x} \restriction_{C_p(X)}: C_p(X) \to \mathbb{R}$, donde $\widehat{x} : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ es la x-ésima proyección asociada al producto $\mathbb{R}^X$. Como cada función e_x es continua, podemos considerar a la función $i_X : X \to C_p(C_p(X))$ dada por $i_X(x) = e_x$ para cada $x \in X$. A continuación demostramos que dicha función es una inmersión de X en $C_p(C_p(X))$. De ahora en adelante denotaremos a $C_p(C_p(X))$ por $C_{p,2}(X)$.

1.3.5 Proposición. *La función i_X es una inmersión.*

Demostración. Sean $x_1,\ x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$. Como X es un espacio Tychonoff, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x_1) = 0,\ f(x_2) = 1$. Así $e_{x_1}(f) = \widehat{x}_1(f) = f(x_1) = 0$. Análogamente $e_{x_2}(f) = 1$. Por lo tanto $e_{x_1} \neq e_{x_2}$, es decir, $i_X(x_1) \neq i_X(x_2)$.

Veamos que i_X es una función continua: sea $x \in X$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $g_1, \ldots, g_m \in C_p(X)$ y $\epsilon > 0$. Consideremos a $[e_x, g_1, \ldots, g_m, \epsilon]$ que es un abierto canónico de e_x en $C_{p,2}(X)$. Recordemos que

$$[e_x, g_1, \ldots, g_m, \epsilon] = \{F \in C_{p,2}(X) : |e_x(g_i) - F(g_i)| < \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, m\}.$$

Definimos $J_i = (g_i(x) - \epsilon,\ g_i(x) + \epsilon)$ para $i = 1, \ldots m$. Debido a que g_i es continua, $g_i^{-1}(J_i)$ es una vecindad de x en X, para $i = 1, \ldots m$. Por lo tanto $V = \cap_{i=1}^{m} g_i^{-1}(J_i)$ es una vecindad de x en X. Verifiquemos que $i_X(V) \subseteq [e_x, g_1, \ldots, g_m, \epsilon]$. Sea $y \in V$. Así $|g_i(y) - g_i(x)| = |e_y(g_i) - e_x(g_i)| < \epsilon$ para $i = 1, \ldots m$, es decir, $i_X(y) = e_y \in [e_x, g_1, \ldots, g_m, \epsilon]$.

Finalmente considere $j_X : i_X(X) \to X$ la función inversa de i_X. Demostremos que j_X es continua: sea $x \in X$ y V una vecindad de x en X. Como X es Tychonoff, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus V) \subseteq \{1\}$. Así, $W = [e_x, f, \frac{1}{2}] \cap i_X(X)$ es una vecindad de $i_X(x)$ en $i_X(X)$. Veamos que $j_X(W) \subseteq V$: supongamos que existe $y \in j_X(W) \setminus V$. Entonces $y \in X \setminus V$ y $f(y) = 1$. Por otra parte, $y \in j_X(W)$ implica que $e_y \in W$. En efecto, si $y \in j_X(W)$ entonces $y = j_X(g)$ con $g \in W$. Aplicando i_X en ambos lados de la ecuación anterior obtenemos $e_y = g$, con $g \in W$.

Así, $e_y \in [e_x, f, \frac{1}{2}] = \{F \in C_{p,2}(X) : |F(f) - e_x(f)| < \frac{1}{2}\}$ y además

$$|e_y(f) - e_x(f)| = |f(y) - f(x)| = 1 < \frac{1}{2},$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $j_X(W) \subseteq V$ y j_X es continua. $\square$

Los siguientes resultados caracterizan el valor de una función cardinal en el espacio X, en términos del valor de otra función cardinal evaluada en el correspondiente espacio $C_p(X)$. En particular, el primero de estos resultados establece la relación entre el peso de red de X y el de $C_p(X)$. Recuerde que si X es un espacio topológico, entonces $nw(X) = min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es una red para } X\} + \omega$, donde $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una red para X si tiene la siguiente propiedad: para todo punto $x \in X$ y cualquier vecindad U de x existe un $M \in \mathcal{N}$ tal que $x \in M \subseteq U$.

1.3.6 Teorema. *Para cualquier espacio X, $nw(X) = nw(C_p(X))$.*

Demostración. Verifiquemos que $nw(C_p(X)) \leq nw(X)$. Sea $\mathcal{P}$ una red en X de cardinalidad mínima y $\mathcal{B}$ una base numerable para $\mathbb{R}$. Para cada $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ y cada par de colecciones $S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{P}$ y $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}$ definimos

$$[S_1, \ldots, S_k, U_1, \ldots, U_k] = \{f \in C(X) \, : \, f(S_i) \subseteq U_i, \, i = 1, \ldots, k\}.$$

Si $\gamma = \{[S_1, \ldots, S_k, U_1, \ldots, U_k] \, : \, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{P}, U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}\}$, entonces γ es una red en $C_p(X)$. Efectivamente, sea $f \in C_p(X)$ y $[f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon]$ una vecindad canónica de f (asumimos que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$). Escojemos $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}$ tales que $f(x_i) \in U_i \subseteq (f(x_i) - \epsilon, f(x_i) + \epsilon)$ para $i = 1, \ldots, k$. Debido a que f es continua existen $S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{P}$ tales que $x_i \in S_i$ y $f(S_i) \subseteq U_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Sucede que $f \in [S_1, \ldots, S_k, U_1, \ldots, U_k] \subseteq [f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon]$.

Ahora consideramos la función $H : \gamma \to \bigcup_{k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}} (\mathcal{P}^k \times \mathcal{B}^k)$ que asocia a cada conjunto de la forma $[S_1, \ldots, S_k, U_1, \ldots, U_k]$ la pareja

$$((S_1, \ldots, S_k), (U_1, \ldots, U_k)) \in \mathcal{P}^k \times \mathcal{B}^k.$$

Por la inyectividad de H:

$$|\gamma| \leq |\bigcup_{k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}} (\mathcal{P}^k \times \mathcal{B}^k)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}} |\mathcal{P}^k \times \mathcal{B}^k| \leq \omega \cdot |\mathcal{P}| = |\mathcal{P}|.$$

Usando lo que acabamos de demostrar y la inmersión de X en $C_p\big(C_p(X)\big)$ obtenemos que $nw(X) \leq nw\Big(C_p\big(C_p(X)\big)\Big) \leq nw(C_p(X))$. $\square$

1.3.7 Definición.

(i) Diremos que $f : X \to Y$ es una *condensación* si f es continua y biyectiva.

(ii) Si X es un espacio Tychonoff, definimos el *i-peso* de X como el número cardinal

$$iw(X) = min\{w(Y) \, : \, Y \text{ es } T_{3.5} \text{ y existe } f : X \to Y \text{ condensación}\}.$$

Recuerde que si X es un espacio T_1 y x es un elemento de X, decimos que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}(X)$ es una *pseudobase local de x* si $\bigcap \mathcal{V} = \{x\}$. El *pseudocarácter del punto x en el espacio X*, denotado mediante $\psi(x, X)$, se define como el número cardinal $\psi(x, X) = min\{|\mathcal{V}| \, : \, \mathcal{V} \text{ es pseudobase local de } x\} + \omega$. El *pseudocarácter del espacio X*, denotado mediante $\psi(X)$, se define como el número cardinal $\psi(X) = sup\{\psi(x, X) \, : \, x \in X\}$.

1.3.8 Lema. *Para todo espacio de Tychonoff X, se tiene que $\psi(X) \leq iw(X)$. Además, si Y es un subespacio de X entonces $iw(Y) \leq iw(X)$.*

Demostración. Considere una condensación $f : X \to Y$ de X sobre un espacio de Tychonoff Y tal que $iw(X) = w(Y)$. Sea $\mathcal{B}$ una base para Y tal que $|\mathcal{B}| = w(Y)$. Observe que si $y \in Y$ y $\mathcal{D} = \{V \in \mathcal{B} : y \in V\}$, entonces $\mathcal{D}$ es una pseudobase local de y en Y, esto es, $\bigcap \mathcal{D} = \{y\}$. Utilizaremos este hecho para mostrar que $\psi(X) \leq iw(X)$.

Elija un punto $x \in X$ y defina $\mathcal{C} = \{f^{-1}(V) : f(x) \in V \in \mathcal{B}\}$. Afirmamos que $\mathcal{C}$ es una pseudobase local de x en X. Claramente $x \in \bigcap \mathcal{C}$. Ahora tome un punto $z \in \bigcap \mathcal{C}$. Entonces $z \in f^{-1}(V)$, para toda $V \in \mathcal{B}$ tal que $f(x) \in V$. Por ello, $f(z) \in V$, para toda $V \in \mathcal{B}$ con $f(x) \in V$. Pero la colección $\mathcal{D} = \{V \in \mathcal{B} : f(x) \in V\}$ es una pseudobase local de $f(x)$ en Y. Así, $f(z) \in \bigcap \mathcal{D} = \{f(x)\}$. Como f es inyectiva, $x = z$. Por lo tanto, $\{x\} = \bigcap \mathcal{C}$.

Observe ahora que $\psi(x, X) \leq |\mathcal{C}| \leq |\mathcal{B}| = iw(X)$. Por lo tanto, $\psi(X) \leq iw(X)$.

Sea Y un subespacio de X. Considere Z un espacio de Tychonoff y $g : X \to Z$ una condensación tal que $w(Z) = iw(X)$. Evidentemente la función $h = g \restriction_Y : Y \to g(Y)$ es también una condensación. Entonces, $iw(Y) \leq w(g(Y)) \leq w(Z) = iw(X)$. $\square$

La *densidad de un espacio* X, denotada mediante $d(X)$, se define como $d(X) = min\{|D| : D \text{ es un subconjunto denso en } X\} + \omega$.

1.3.9 Teorema. *Para cualquier espacio X, sucede que $d(X) = iw(C_p(X)) = \psi(C_p(X))$.*

Demostración. Debido a que $\psi(C_p(X)) \leq iw(C_p(X))$, basta comprobar que $iw(C_p(X)) \leq d(X) \leq \psi(C_p(X))$.

Sea $\tau = d(X)$ y Y un subconjunto denso en X de cardinalidad $\leq \tau$. La función restricción $r_Y : C_p(X) \to Z \subseteq C_p(Y)$ es una condensación de $C_p(X)$ en el subespacio $Z = \pi_Y(C_p(X))$ de $C_p(Y)$ (Proposición 1.3.2). Finalmente

$$iw(C_p(X)) \leq w(Z) \leq w(C_p(Y)) \leq w(\mathbb{R}^Y) \leq \tau = d(X).$$

Ahora tomamos $f \in C_p(X)$, $f \equiv 0$ y γ una familia de vecindades canónicas de f en $C_p(X)$ tales que $\bigcap \gamma = \{f\}$. Para cada $W = [f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon] \in \gamma$ definimos $K(W) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ y consideramos $Y = \bigcup\{K(W) : W \in \gamma\}$. Es cierto que $|Y| \leq |\gamma|$. Además Y es denso en X. Efectivamente, asumimos que existe $x^* \in X \setminus cl(Y)$ y tomamos $g \in C(X)$ tal que $g(x^*) = 1$ y $g \restriction_Y = 0$.

Para cualquier $[f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon] \in \gamma$ se cumple que $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq Y$ y en consecuencia $g \in [f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon]$. Obtenemos que $g \in \bigcap \gamma \setminus \{f\}$, lo que contradice la elección de γ. $\square$

1.3.10 Teorema. *Para todo espacio Tychonoff X, se tiene que $iw(X) = d(C_p(X))$.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.9 y la monotonía de la función i-peso:

$$iw(X) \leq iw\big(C_p\big(C_p(X)\big)\big) = d(C_p(X)).$$

Comprobaremos que $d(C_p(X)) \leq iw(X)$. Sea $h : X \to Y$ una condensación tal que $w(Y) = iw(X)$. Por el Teorema 1.3.6, $nw(C_p(Y)) = nw(Y) \leq w(Y)$. Utilizando la Proposición 1.3.3 obtenemos que $nw(C_p(Y)) = nw(h^*(C_p(Y))) \leq w(Y)$. Finalmente, por la Proposición 1.3.4:

$$d(C_p(X)) \leq d(h^*(C_p(Y))) \leq nw(h^*(C_p(Y))) \leq w(Y) = iw(X).$$

$\square$

1.4. Espacios monolíticos y estables.

En esta sección presentamos propiedades básicas de los espacios monolíticos y de los espacios estables. Además demostramos que monoliticidad de X o de $C_p(X)$ implica estabilidad del otro, esto es, la dualidad entre monoliticidad y estabilidad se dá en ambos sentidos.

1.4.1 Definición. Sea τ un cardinal infinito. Un espacio X es llamado τ-*monolítico* si $nw(cl(A)) \leq \tau$ para todo $A \subseteq X$ tal que $|A| \leq \tau$. Un espacio X es llamado *monolítico* si es τ-monolítico para todo cardinal τ.

Observe que todo espacio separable con peso de red no numerable no es ω-monolítico. Por ello, el espacio "doble flecha de Alexandroff" no es ω-monolítico.

La siguiente proposición nos proporciona ejemplos de espacios monolíticos. Recuerde que si $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos, $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ y $y = (y_\alpha)_{\alpha\in A} \in Y$, entonces el Σ-*producto de los espacios Y_α basado en el punto y* es el subespacio

$$\Sigma(y, Y) = \{z \in Y : |\{\beta \in A : z_\beta \neq y_\beta\}| \leq \omega\}$$

del producto topológico $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$.

1.4.2 Proposición. *Los siguientes espacios son monolíticos:*

(i) *los espacios metrizables;*

(ii) *los espacios con una red numerable (llamados espacios cósmicos);*

(iii) Σ*-productos de espacios con una base numerable.*

Demostración. (i) Se debe a que la metrizabilidad es una propiedad hereditaria y a que en todo espacio metrizable la densidad coincide con el peso de red. En efecto: sea τ un cardinal infinito y $A \subseteq X$ tal que $|A| \leq \tau$. Como $cl(A)$ es un espacio metrizable, sucede que $d(cl(A)) = nw(cl(A))$. Además A es denso en $cl(A)$. Por lo tanto

$$d(cl(A)) \leq |A| + \omega \leq \tau + \omega = \tau,$$

es decir, $nw(cl(A)) \leq \tau$.
(ii) Sea $\tau \geq \omega$. Consideremos un espacio X tal que $nw(X) = \omega$ y $A \subseteq X$ tal que $|A| \leq \tau$. Observe que $nw(cl(A)) \leq nw(X) = \omega \leq \tau$. $\square$

1.4.3 Definición. Sea τ un cardinal infinito. Un espacio X es llamado τ-*estable* si para toda imagen continua Y de X, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $iw(Y) \leq \tau$,

(ii) $nw(Y) \leq \tau$,

Un espacio X es llamado *estable* si es τ-estable para todo cardinal infinito τ.

El Lema 1.3.8 implica que $iw(Y) \leq nw(Y)$, para todo espacio Y. De esta forma, si se cumple la condición (ii) de la Definición 1.4.3, entonces también se cumple la condición (i) de dicha definición. Sin embargo, la desigualdad $nw(Y) \leq iw(Y)$ no siempre es verdadera. En efecto: la función $Id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, donde $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ es la topología euclidiana en $\mathbb{R}$, es una condensación de $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$. Esto implica que $iw(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) = \omega$. Sin embargo, $nw(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) = |\mathbb{R}|$. Este ejemplo nos muestra también que el espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$ no es ω-estable. Observe el lector que un espacio X es estable si y sólo si para toda imagen continua Y de X sucede que $iw(Y) = nw(Y)$.

La siguiente proposición establece que algunas importantes clases de espacios topológicos son subclases de la clase de espacios estables.

1.4.4 Proposición. *(i) Todo compacto es estable;*

(ii) los espacios pseudocompactos son ω-estables.

Demostración. (i) Sean X un espacio compacto, τ un cardinal infinito y Y una imagen continua de X tal que $iw(Y) \leq \tau$. Veamos que $nw(Y) \leq \tau$. Consideremos un espacio de Tychonoff Z tal que existe una condensación $g : Y \to Z$ y además $w(Z) = iw(Y)$. Como Y es un espacio compacto y Z es un espacio T_2, obtenemos que g es un homeomorfismo. Por lo tanto, Z es también un espacio compacto. Debido a que en un espacio compacto el peso de red coincide con el peso, obtenemos que

$$iw(Y) = w(Z) = nw(Z) = nw(Y).$$

(ii) Sean X un espacio pseudocompacto y Y una imagen continua de X tal que $iw(Y) = \omega$. Veamos que $nw(Y) = \omega$. Consideremos un espacio de Tychonoff Z tal que existe una condensación $g : Y \to Z$ y además $w(Z) = \omega$. El hecho de que Y es pseudocompacto implica que g es un homeomorfismo [7]. Por lo tanto, $nw(Y) \leq w(Y) = w(Z) = \omega$. □

1.4.5 Proposición. *Cualquier espacio X es τ-estable para todo $\tau \geq nw(X)$.*

Demostración. Sea Y una imagen continua de X tal que $iw(Y) \leq \tau$. Veamos que $nw(Y) \leq \tau$. Como el peso de red no se incrementa bajo imágenes continuas, tenemos que $nw(Y) \leq nw(X) \leq \tau$. □

A continuación veremos que la propiedad de τ-estabilidad se preserva bajo imágenes continuas.

1.4.6 Proposición. *Sea τ un cardinal infinito y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva de un espacio X en un espacio Y. Si X es τ-estable (estable), entonces Y es τ-estable (estable).*

Demostración. Supongamos que X es τ-estable. Veamos que Y también es τ-estable. Sea U una imagen continua de Y tal que $iw(U) \leq \tau$. Consideremos $\theta : Y \to U$ continua y sobreyectiva. Utilizando el hecho de que $\theta \circ f : X \to U$ es continua sobreyectiva y la τ-estabilidad de X obtenemos que $nw(U) \leq \tau$. □

Ahora encontramos condiciones bajo las cuáles se heredan las propiedades de monoliticidad y estabilidad.

1.4.7 Proposición. *(i) La propiedad de τ-monoliticidad (respectivamente, monoliticidad) es heredada por subespacios arbitrarios.*

(ii) La propiedad de estabilidad es heredada por subespacios cerrado-abiertos.

Demostración. (i) Sean X un espacio τ-monolítico y $A \subseteq W \subseteq X$ tales que $|A| \leq \tau$. Veamos que $nw(cl_W(A)) \leq \tau$. Observemos que

$$nw(cl_W(A)) = nw(cl_X(A) \cap W) \leq nw(cl_X(A)) \leq \tau.$$

(ii) Sean X un espacio τ-estable y Z un subespacio cerrado-abierto de X. Definimos la función $g : X \to Z$ mediante

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in Z, \\ z_0 & \text{si } x \in X \setminus Z, \end{cases}$$

donde z_0 es un elemento fijo de Z. Utilizando el hecho de que g es continua sobreyectiva y la Proposición 1.4.6 obtenemos que Z es τ-estable. □

A continuación demostramos que las propiedades de monoliticidad y estabilidad son duales.

1.4.8 Teorema. *El espacio $C_p(X)$ es τ-monolítico si y sólo si el espacio X es τ-estable.*

Demostración. **Necesidad.** Sea Y una imagen continua de X tal que $iw(Y) \leq \tau$. Tomando $h : X \to Y$ continua y sobreyectiva obtenemos que el correspondiente mapeo dual $h^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es una inmersión (Proposición 1.3.3). Utilizando el inciso (i) de la Proposición 1.4.7 obtenemos que $C_p(Y)$ es τ-monolítico. Por lo tanto $nw(C_p(Y)) \leq d(C_p(Y))$. Debido al Teorema 1.3.6, $nw(C_p(Y)) = nw(Y)$. Por el Teorema 1.3.10 obtenemos que $iw(Y) = d(C_p(Y))$. Finalmente

$$nw(Y) = nw(C_p(Y)) \leq d(C_p(Y)) = iw(Y) \leq \tau.$$

Suficiencia. Tomemos $M \subseteq C_p(X)$ tal que $|M| \leq \tau$. Sea $f : X \to \mathbb{R}^M$ el producto diagonal de M. Recordamos que la función f tiene la regla de correspondencia $f(x) = \{g(x)\}_{g \in M}$. Definimos $Y = f(X) \subseteq \mathbb{R}^M$. Entonces $w(Y) \leq |M| \leq \tau$.

Denotamos mediante el símbolo $\widetilde{Y}$ al conjunto Y equipado con la topología real cociente correspondiente a la función f (vea el capítulo 0 de [5]).

Debido a la continuidad de $f : X \to Y$ obtenemos que la función identidad $i : \widetilde{Y} \to Y$ es una condensación. Entonces, $iw(\widetilde{Y}) \leq w(Y) \leq \tau$. Como X es τ-estable y puede ser mapeado continuamente sobre $\widetilde{Y}$ obtenemos que $nw(\widetilde{Y}) \leq \tau$.

Sea $\tilde{f} = i^{-1} \circ f : X \to \widetilde{Y}$. Por propiedades de la topología real cociente, $C_p(\widetilde{Y})$ es homeomorfo al subespacio cerrado $F = \{h \circ \tilde{f} \, : \, h \in C_p(\widetilde{Y})\} \subseteq C_p(X)$.

Ahora observemos que $M \subseteq F$. Sea $g \in M$. Notemos que $g = p_g \circ f = p_g \circ i \circ \tilde{f}$, donde $p_g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ es la proyección canónica correspondiente a g. Debido a que $p_g \circ i \in C_p(\widetilde{Y})$ obtenemos que $g \in F$. Por lo tanto $nw(cl(M)) \leq nw(cl(F)) = nw(F) = nw(C_p(\widetilde{Y})) = nw(\widetilde{Y}) \leq \tau$. □

Utilizaremos el siguiente lema para demostrar que la propiedad de τ-monolíticidad es dual [5, Lema 0.2.3].

1.4.9 Lema (Lema de Factorización)**.** *Sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ un producto de espacios con una base numerable, Y un subespacio denso de X y $f : Y \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe un subconjunto numerable $B \subseteq A$ y una función continua $g : \pi_B(Y) \subseteq \prod_{\alpha \in B} X_\alpha \to \mathbb{R}$ tal que $g(\pi_B(y)) = f(y)$ para todo $y \in Y$, es decir, $f = g \circ (\pi_B \restriction_Y)$.*

1.4.10 Teorema. *El espacio $C_p(X)$ es τ-estable si y sólo si el espacio X es τ-monolítico.*

Demostración. **Necesidad.** Por el Teorema 1.4.8, el espacio $C_{p,2}(X)$ es τ-monolítico. Debido a que X es homeomorfo a un subespacio de $C_{p,2}(X)$ (Proposición 1.3.5) y al inciso (i) de la Proposición 1.4.7 concluimos que X es τ-monolítico.

Suficiencia. Nuevamente, usando el Teorema 1.4.8, basta demostrar la τ-monoliticidad de $C_{p,2}(X)$ a partir de la τ-monoliticidad de X. Tomemos $M \subseteq C_{p,2}(X)$, con $|M| \leq \tau$. El Lema 1.4.9 nos garantiza que para cada $f \in M$ podemos fijar $B_f \subseteq X$ con las siguientes propiedades:

(i) $|B_f| \leq \tau$,

(ii) si $g_1, \; g_2 \in C_p(X)$ son tales que $g_1 \restriction_{B_f} = g_2 \restriction_{B_f}$, entonces $f(g_1) = f(g_2)$.

Definimos $A = \bigcup\{B_f \; : \; f \in M\} \subseteq X$ y $F = cl(A)$. Utilizando que $|A| \leq \tau$ y que X es τ-monolítico obtenemos: $nw(F) = nw(C_p(F)) \leq \tau$.

Sea $\pi_F : C_p(X) \to Z \subseteq C_p(F)$ la función restricción correspondiente a F, donde $Z = \pi_F(C_p(X))$. Entonces

$$nw(C_p(Z)) = nw(Z) \leq nw(C_p(F)) \leq \tau.$$

Por otra parte, la Proposición 1.3.2 implica que la función π_F es abierta. Consideremos $H = \{h \circ \pi_F : h \in C_p(Z)\}$. Notemos que $M \subseteq H$. En efecto: por definición de F, para cada $f \in M$ existe una función $h_f : Z \to \mathbb{R}$ tal que $h_f \circ \pi_F = f$. Como π_F es una función cociente, $h_f \in C_p(Z)$. Por lo tanto $f \in H$. Así, H es homeomorfo a $C_p(Z)$ y es un subespacio cerrado de $C_{p,2}(X)$ (usamos que π_F es una función cociente). Por lo tanto, $nw(cl(M)) \leq nw(H) = nw(C_p(Z)) \leq \tau$. $\square$

1.4.11 Corolario. *(i) X es monolítico si y sólo si $C_p(X)$ es estable.*

(ii) X es estable si y sólo si $C_p(X)$ es monolítico.

1.4.12 Corolario. *Un espacio X es monolítico (estable) si y sólo si $C_{p,2}(X)$ es monolítico (estable).*

El siguiente lema nos ayudará a demostrar que todo espacio Lindelöf-Σ es estable. Recuerde que un espacio X es *Lindelöf-Σ* si existen un espacio segundo numerable M, un espacio L y funciones $g : L \to M$ y $f : L \to X$ tales que g es perfecta y f es continua sobreyectiva. En el Apéndice B el lector encontrará recopiladas las propiedades de los espacios Lindelöf-Σ que se requiere conocer para una buena lectura de este trabajo.

1.4.13 Lema. *Sean $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ y $\phi : Z \to T$ funciones continuas y sobreyectivas. Supongamos que f es perfecta y ϕ es biyectiva. Entonces Z es la imagen continua de un subespacio cerrado del producto $Y \times T$.*

Demostración. Definimos $\psi = \phi \circ g : X \to T$ y consideramos los productos diagonales $\widetilde{\psi} = \psi \triangle f : X \to T \times Y$ y $\widetilde{g} = g \triangle f : X \to Z \times Y$. Las funciones $\widetilde{\psi}$ y $\widetilde{g}$ son perfectas debido a que f lo es [7]. Además, $\widetilde{\psi} = \Theta \circ \widetilde{g}$, donde $\Theta : Z \times Y \to T \times Y$ está dada por $\Theta(z, y) = (\phi(z), y)$.

Definimos $\theta = \Theta \restriction_{\widetilde{g}(X)} : \widetilde{g}(X) \subseteq Z \times Y \to \widetilde{\psi}(X) \subseteq T \times Y$. Es claro que $\widetilde{\psi} = \theta \circ \widetilde{g}$. Debido a que $\widetilde{g}$ es una función continua y a que $\widetilde{\psi}$ es una función perfecta, sucede que θ es una función cerrada. Además, θ es una condensación debido a que ϕ posee dicha propiedad. Por lo tanto, θ es un homeomorfismo de $\widetilde{g}(X)$ en el subespacio cerrado $\widetilde{\psi}(X) \subseteq T \times Y$.

Utilizando nuevamente la sobreyectividad de g, obtenemos que la proyección en el primer factor del producto $Z \times Y$, restringida a $\widetilde{g}(X) \subseteq Z \times Y$, es una función continua sobreyectiva. Es decir, $\pi_Z \restriction_{\widetilde{g}(X)}: \widetilde{g}(X) \subseteq Z \times Y \to Z$ es continua y sobreyectiva. Concluimos que Z es imagen continua del subespacio cerrado $\widetilde{\psi}(X) \subseteq T \times Y$. □

En el último teorema de esta sección establecemos que los espacios Lindelöf-Σ son espacios estables (esto generaliza el inciso (i) de la Proposición 1.4.4).

1.4.14 Teorema. *Todo espacio Lindelöf-Σ es estable.*

Demostración. Sean Z un espacio Lindelöf-Σ y W una imagen continua de Z tales que $iw(W) \leq \tau$. Veamos que $nw(W) \leq \tau$. Como W es imagen continua de Z, el espacio W también es Lindelöf Σ (vea el inciso (iv) del Corolario B.1.18). Así, podemos asumir que $iw(Z) \leq \tau$ y demostrar que $nw(Z) \leq \tau$ para poder demostrar el resultado.

Sea $\kappa = iw(Z)$ y $\phi : Z \to T$ una condensación tal que $w(T) = \kappa$. Utilizando el inciso (vii) del Corolario B.1.18 obtenemos que existen un espacio segundo numerable Y, un espacio X, una función perfecta $f : X \to Y$ y una función continua $g : X \to Z$ tales que $f(X) = Y$ y $g(X) = Z$. Así, Z es la imagen continua de un subespacio cerrado del producto $Y \times T$ (Lema 1.4.13). Por lo tanto, $nw(Z) \leq nw(Y \times T)$. Pero $nw(Y) = \omega$ y $nw(T) \leq \kappa \leq \tau$ implican que $nw(Y \times T) \leq \tau$. Por lo tanto, $nw(Z) \leq \tau$. □

1.5. $C_p(X)$ en compactos de Corson.

El principal objetivo de esta sección es demostrar que para cualquier compacto de Corson X, el espacio de funciones $C_p(X)$ es un espacio de Lindelöf (Teorema 1.5.23). Recuerde que un espacio compacto X es un *compacto de Corson* si X es homeomorfo a un subespacio de un Σ-producto de espacios metrizables separables.

Sea X un espacio topológico. Mediante el símbolo $\mathcal{E}(X)$ denotaremos a la clase de todos los espacios que pueden ser representados como imágenes continuas del producto de X y algún espacio compacto. Notemos que $\mathcal{E}(X)$ contiene a la clase de todos los espacios compactos y a todas las imágenes continuas de X. En efecto: sea K un espacio compacto y $\pi_K : X \times K \to K$ la proyección en el segundo factor del producto $X \times K$. Evidentemente la función π_K es continua y sobreyectiva. Ahora tomemos un espacio Y tal que existe una función $h : X \to Y$ continua y sobreyectiva. Fijemos cualquier punto $x_0 \in X$. Note que $\{x_0\}$ es un espacio compacto. Además, la función $\widetilde{h} : X \times \{x_0\} \to Y$ definida mediante $\widetilde{h}(x, x_0) = h(x)$, es continua y sobreyectiva. De esta forma, $Y \in \mathcal{E}(X)$.

1.5.1 Definición. Una clase $\mathcal{P}$ de espacios topológicos es llamada *k-dirigida* si las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $X,\ Y \in \mathcal{P}$ implica $X \times Y \in \mathcal{P}$;

(ii) si $X \in \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{E}(X) \subseteq \mathcal{P}$.

El Teorema de Tychonoff [11, Teorema 3.2.4] y el hecho de que la compacidad se preserva bajo imágenes continuas implican que la clase de todos los espacios compactos y la clase de todos los espacios σ-compactos son clases k-dirigidas. Por otra parte, los incisos (i), (iv) y (viii) del Corolario B.1.18 implican que la clase de todos los espacios Lindelöf-Σ es k-dirigida.

1.5.2 Proposición. *Sean $\mathcal{P}$ una clase de espacios k-dirigida, $\widetilde{Y}$ un espacio, $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$ tales que $Y = \widetilde{Y} \setminus \{\widetilde{y}\} \in \mathcal{P}$. Entonces también $\widetilde{Y} \in \mathcal{P}$.*

Demostración. Basta verificar que $\widetilde{Y}$ es imagen continua de $Y \times \{0, 1\}$, donde $\{0, 1\}$ tiene la topología discreta. Sea $h : Y \times \{0,\ 1\} \to \widetilde{Y}$ la función dada por

$$h(y, i) = \begin{cases} \widetilde{y} & \text{si } i = 1, \\ y & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Para cada $V \in \mathcal{T}^*(\widetilde{Y})$ sucede que

$$h^{-1}(V) = \begin{cases} V \times \{0\} & \text{si } \widetilde{y} \notin V, \\ ((V \setminus \{\widetilde{y}\}) \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}) & \text{si } \widetilde{y} \in V. \end{cases}$$

□

Estas nociones encuentran una importante aplicación en la siguiente construcción: Consideremos X un espacio topológico, $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $I_l = [-l, l] \subseteq \mathbb{R}$. Si $A, B \subseteq C_p(X)$ entonces definimos

(i) $\psi_1(A, B) = \{max\{f,\ g\}\ :\ f \in A,\ g \in B\}$,

(ii) $\psi_2(A, B) = \{min\{f,\ g\}\ :\ f \in A,\ g \in B\}$,

(iii) $\phi_l(A) = \{af + bg \,:\, a, b \in I_l,\ f, g \in A\}$.

No es difícil verificar que los subespacios $\psi_1(A, B)$ y $\psi_2(A, B)$ de $C_p(X)$, son imágenes continuas del espacio $A \times B$, mientras que $\phi_l(A)$ es imagen continua de $A^2 \times I_l^2$.

Ahora fijamos $Y \subseteq C_p(X)$. Definamos $S_1(Y) = \{Y\}$, y para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$S_{n+1}(Y) = S_n(Y) \cup \{\psi_i(A, B) \,:\, A,\ B \in S_n(Y),\ i = 1, 2\} \\ \cup \{\phi_l(A) \,:\, A \in S_n(Y),\ l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

De esta forma:

$$S_2(Y) = \{Y\} \cup \{\psi_i(Y, Y) \,:\, i = 1,\ 2\} \cup \{\phi_l(Y) \,:\, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \\ = \{Y,\ \psi_1(Y, Y),\ \psi_2(Y, Y),\ \phi_1(Y),\ \phi_2(Y),\ \phi_3(Y),\ \ldots\}.$$

Los elementos de $S_n(Y)$ son subconjuntos de $C_p(X)$, así, cada elemento de $S_n(Y)$ puede ser considerado con la topología de la convergencia puntual. Es posible verificar (mediante recursión) que cada $S_n(Y)$ es a lo más numerable.

Notemos que si $\mathcal{P}$ es una clase de espacios k-dirigida y $Y \in \mathcal{P}$, entonces $S_n(Y) \subseteq \mathcal{P}$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En efecto: por la propiedad (i) de la definición 1.5.1, $Y^2 \in \mathcal{P}$. Además, por la propiedad (ii) de dicha definición, $\mathcal{E}(Y^2) \subseteq \mathcal{P}$. Sabemos también que $\mathcal{E}(Y^2)$ contiene a todas las imágenes continuas de Y^2. Así, $\psi_i(Y, Y) \in \mathcal{E}(Y^2)$ para $i = 1,\ 2$. Finalmente, por definición del conjunto $\mathcal{E}(Y^2)$ obtenemos que $\phi_l(Y) \in \mathcal{E}(Y^2)$ para todo $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Esto muestra que $S_2(Y) \subseteq \mathcal{P}$. Ahora supongamos que $n \geq 2$ y que $S_n(Y) \subseteq \mathcal{P}$. Para cualesquiera $A,\ B \in S_n(Y)$ y para cualquier $i \in \{1,\ 2\}$ tenemos que $\psi_i(A, B) \in \mathcal{E}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}$. Además, para cualquier $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sucede que $\phi_l(A) \in \mathcal{E}(A^2) \subseteq \mathcal{P}$.

Estas observaciones nos permiten formular la siguiente proposición acerca de la familia

$$S(Y) = \bigcup \{S_n(Y) \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \{Z \,:\, Z \in S_n(Y), \text{ donde} n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

1.5.3 Proposición. *Si $\mathcal{P}$ es una clase de espacios k-dirigida, $Y \subseteq C_p(X)$, $Y \in \mathcal{P}$, entonces la familia $S(Y)$ es numerable y $S(Y) \subseteq \mathcal{P}$.*

Recordemos que una familia $R \subseteq C(X)$ es un *anillo de funciones* si para cualesquiera $f,\ g \in R$ las funciones $f + g, f - g$ y fg también pertenecen a R. La siguiente versión del Teorema de Stone-Weierstrass nos será útil para demostrar la Proposición 1.5.5. Dicha proposición desempeña un papel importante en el desarrollo de los resultados presentados en esta sección.

1.5.4 Teorema (Stone-Weierstrass, [11], 3.2.21)**.** *Sean X un espacio compacto y $R \subseteq C(X)$ un anillo de funciones que contiene a todas las funciones constantes, separa a los puntos de X y es un subconjunto cerrado del espacio $\mathbb{R}^X$ equipado con la topología de la convergencia uniforme. Entonces R coincide con el anillo $C(X)$.*

1.5.5 Proposición. *Sean X un espacio compacto y $Y \subseteq C_p(X)$ tal que $e \in Y$ (donde $e(x) = 1$ para todo $x \in X$). Supongamos también que Y separa a los puntos de X. Entonces el conjunto*

$$M = \bigcup S(Y) = \{f \ : \ \textit{existen}\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,\textit{y}\, Z \in S_n(Y) \,\textit{tales que}\, f \in Z\}$$

es denso en el espacio $C(X)$ equipado con la topología de la convergencia uniforme.

Demostración. Recuerde que un espacio topológico Z es llamado *espacio de Fréchet* si para todo $A \subseteq Z$ y todo $z \in cl(A)$ existe una sucesión $z_1, z_2, \ldots$ de puntos de A que convergen a z. Es bien sabido que todo espacio primero numerable es un espacio de Fréchet [11, 1.6.14]. Por lo tanto $(\mathbb{R}^X, \mathcal{T}_u)$ es un espacio de Fréchet, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología de la convergencia uniforme (Proposición C.2.1). Sea R la cerradura de M en $(\mathbb{R}^X, \mathcal{T}_u)$. Así, $R \subseteq C(X)$ debido a que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua.

Para comprobar que R es un anillo de funciones, basta verificar que para cualesquiera $f, g \in M$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ sucede que $max\{f,\ g\}$, $min\{f,\ g\}$, $af + bg \in M$. Tomemos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $Z \in S_n(Y)$, $\widetilde{Z} \in S_m(Y)$ tales que $f \in Z$ y $g \in \widetilde{Z}$. Asumimos que $n \leq m$. Entonces $S_n(Y) \subseteq S_m(Y)$ y $Z, \widetilde{Z} \in S_m(Y)$. Por lo tanto $max\{f,\ g\} \in \psi_1(Z, \widetilde{Z}) \in S_{m+1}(Y)$. Análogamente obtenemos que $min\{f,\ g\}, af + bg \in M$.

Para concluir aplicamos el Teorema 1.5.4. $\square$

Denotaremos mediante el símbolo $D(\tau)$ al espacio discreto de cardinalidad τ, donde τ es un cardinal infinito.

1.5.6 Definición. El espacio $(X \times D(\tau))^\tau = X^\tau \times D(\tau)^\tau$ es llamado τ-*envolvente* de X y es denotado mediante $o_\tau(X)$. Si X es homeomorfo a $o_\tau(X)$, decimos que X es τ-*invariante.*

1.5.7 Proposición. *El espacio $o_\tau(X)$ es τ-invariante para cualquier espacio X y cualquier cardinal τ.*

Demostración. Sea $Y = o_\tau(X)$. Entonces

$$o_\tau(Y) = Y^\tau \times D(\tau)^\tau = (X^\tau \times D(\tau)^\tau)^\tau \times D(\tau)^\tau = X^\tau \times D(\tau)^\tau = o_\tau(X) = Y.$$

□

1.5.8 Proposición. *Si un espacio X es τ invariante, entonces los espacios X^τ y $X \times D(\tau)$ son homeomorfos a él.*

Demostración. Sea X un espacio τ invariante. Entonces

$$X^\tau = (X^\tau \times D(\tau)^\tau)^\tau = X^\tau \times D(\tau)^\tau = X.$$

Por otra parte, $X \times D(\tau) = (X^\tau \times D(\tau)^\tau) \times D(\tau) = X^\tau \times D(\tau)^\tau = X$. □

Como una consecuencia de la proposición anterior obtenemos lo siguiente.

1.5.9 Proposición. *Sea X un espacio τ-invariante.*

(i) Si $|M| \leq \tau$ y $X_\alpha \in \mathcal{E}(X)$ para todo $\alpha \in M$, entonces $\prod_{\alpha\in M} X_\alpha \in \mathcal{E}(X)$.

(ii) Si γ es una familia de subespacios de un espacio Y, $|\gamma| \leq \tau$, $\gamma \subseteq \mathcal{E}(X)$, entonces $\bigcup \gamma \in \mathcal{E}(X)$.

Demostración. (i) Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|M| = \tau$. Para cada $\alpha \in M$ fijamos un espacio compacto K_α y una función continua sobreyectiva $g_\alpha : X \times K_\alpha \to X_\alpha$. Sea $g : \prod_{\alpha\in M} (X \times K_\alpha) \to \prod_{\alpha\in M} X_\alpha$ definida mediante $g\{(x_\alpha, k_\alpha)\} = \{g_\alpha(x_\alpha, k_\alpha)\}$. Notamos que g es continua y sobreyectiva. Además, por la Proposición 1.5.8:

$$\prod_{\alpha\in M} (X \times K_\alpha) = X^\tau \times \big(\prod_{\alpha\in M} K_\alpha\big) = X \times \big(\prod_{\alpha\in M} K_\alpha\big).$$

Utilizando el Teorema de Tychonoff y la definición de la familia $\mathcal{E}(X)$ obtenemos que $\prod_{\alpha\in M} X_\alpha \in \mathcal{E}(X)$. □

Si $\mathcal{P}$ es una clase de espacios, entonces $(\mathcal{P})_{\sigma\delta}$ denota a la familia de espacios X que pueden ser representados en la forma $X = \bigcap_{i=1}^\infty X_i$, donde cada X_i es la unión de una familia numerable de espacios que pertenecen a la clase $\mathcal{P}$.

1.5.10 Teorema. *Sea X un espacio compacto y $\mathcal{P}$ una clase de espacios k-dirigida. Si existe $Y \subseteq C_p(X)$ tal que $Y \in \mathcal{P}$ y Y separa a los puntos de X, entonces $C_p(X) \in (\mathcal{P})_{\sigma\delta}$.*

Demostración. Sea $e : X \to \mathbb{R}$ la función constante 1 en X. Por la Proposición 1.5.2, el espacio $\widetilde{Y} = Y \cup \{e\}$ pertenece a $\mathcal{P}$. Definimos

$$\widetilde{M} = \bigcup S(\widetilde{Y}) = \{f \,:\, \text{existen}\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,\text{y}\, Z \in S_n(\widetilde{Y}) \,\text{tales que}\, f \in Z\},$$

y para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$M_n = \{g \in \mathbb{R}^X \,:\, \text{existe}\, f \in \widetilde{M} \,\text{tal que}\, |g(x) - f(x)| \leq \tfrac{1}{n} \,\text{para todo}\, x \in X\}.$$

La Proposición 1.5.5 implica que $C_p(X) \subseteq M^* = \bigcap\{M_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Además, $M^* \subseteq C_p(X)$ debido a que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua. Por lo tanto $C_p(X) = \bigcap\{M_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Afirmamos que cada conjunto M_n se puede expresar como la unión de una familia numerable de elementos de $\mathcal{P}$. En efecto: la función $\Theta : \widetilde{M} \times [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^X \to M_n$ definida mediante $\Theta(f, \gamma) = f + \gamma$, es continua y sobreyectiva. Además $S(\widetilde{Y})$ es numerable y $S(\widetilde{Y}) \subseteq \mathcal{P}$ (Proposición 1.5.3). Por lo tanto

$$Z \in S(\widetilde{Y}) \Rightarrow Z \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{E}(Z) \subseteq \mathcal{P} \Rightarrow \Theta\left(Z \times [-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}]^X\right) \in \mathcal{P}.$$

Finalmente,

$$M_n = \Theta\left(\widetilde{M} \times [-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}]^X\right) = \bigcup\{\Theta\left(Z \times [-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}]^X\right) \,:\, Z \in S(\widetilde{Y})\}.$$

□

A continuación obtenemos algunas consecuencias importantes para nuestros propósitos.

1.5.11 Teorema. *Sea X un espacio compacto, $Y \subseteq C_p(X)$ y supongamos que Y separa a los puntos de X. Entonces existen un espacio compacto P y un subespacio cerrado $B \subseteq o_\omega(Y) \times P$ tales que $C_p(X)$ es imagen continua de B.*

Demostración. Consideremos la clase $\mathcal{P} = \mathcal{E}(o_\omega(Y))$. Afirmamos que $\mathcal{P}$ es una clase k-dirigida. En efecto: sean $Z_1,\ Z_2 \in \mathcal{P}$. Por la Proposición 1.5.7 tenemos que $o_\omega(Y)$ es ω-invariante. El inciso (i) de la Proposición 1.5.9 implica que $Z_1 \times Z_2 \in \mathcal{P}$.

Ahora tomemos $Z \in \mathcal{P}$ y $W \in \mathcal{E}(Z)$. Por definición de $\mathcal{E}(Z)$, existen un espacio compacto K y una función continua sobreyectiva $g : Z \times K \to W$. Por otra parte, por definición de $\mathcal{P}$, existen un espacio compacto F y una función continua sobreyectiva $h : o_\omega(Y) \times F \to Z$. Definimos una función continua sobreyectiva $f : o_\omega(Y) \times F \times K \to W$ mediante $f(a, b, c) = g(h(a, b), c)$. La compacidad de $F \times K$ implica que $W \in \mathcal{E}(o_\omega(Y)) = \mathcal{P}$. Por lo tanto $\mathcal{E}(Z) \subseteq \mathcal{P}$.

De esta manera, el Teorema 1.5.10 nos garantiza que $C_p(X) \in (\mathcal{P})_{\sigma\delta}$. Usando el inciso (ii) de la Proposición 1.5.9 obtenemos que si $\gamma \subseteq \mathcal{P}$ y $|\gamma| \leq \omega$, entonces $\bigcup \gamma \in \mathcal{P}$. Por lo tanto, existe $\{Z_i : i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathcal{P}$ tal que $C_p(X) = \bigcap \{Z_i : i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Así, $C_p(X)$ es homeomorfo a un subespacio cerrado del producto $T = \prod_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} Z_i$. Finalmente, por la Proposición 1.5.9 tenemos que $T \in \mathcal{P}$. □

1.5.12 Definición. Una clase $\mathcal{P}$ de espacios es llamada *τ-perfecta*, donde τ es un cardinal infinito, si las siguientes condiciones se cumplen para cualquier $X \in \mathcal{P}$:

(i) $o_\tau(X) \in \mathcal{P}$;

(ii) $\mathcal{E}(X) \subseteq \mathcal{P}$;

(iii) si $Y \subseteq X$ y Y es cerrado en X, entonces $Y \in \mathcal{P}$.

1.5.13 Proposición. *La clase de todos los espacios Lindelöf-Σ es ω-perfecta.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ la clase de todos los espacios Lindelöf-Σ y $X \in \mathcal{P}$. Denotaremos mediante el símbolo $D(\omega)$ al espacio discreto de cardinalidad ω. Los incisos (i) y (viii) del Corolario B.1.18 implican que $o_\omega(X) = X^\omega \times D(\omega)^\omega \in \mathcal{P}$. Finalmente, usando el inciso (iv) de dicho corolario comprobamos que $\mathcal{P}$ satisface las condiciones (ii) y (iii) de la Definición 1.5.12. □

Utilizando el Teorema 1.5.11 obtenemos el siguiente resultado.

1.5.14 Teorema. *Sea X un espacio compacto y $\mathcal{P}$ una clase de espacios ω-perfecta. Entonces $C_p(X) \in \mathcal{P}$ si y sólo si existe $Y \subseteq C_p(X)$ tal que $Y \in \mathcal{P}$ y Y separa a los puntos de X.*

Demostración. Primero demostramos la suficiencia de la condición dada. El Teorema 1.5.11 implica que existen un espacio compacto P y un subespacio cerrado $B \subseteq o_\omega(Y) \times P$ tales que $C_p(X)$ es imagen continua de B. Por otra parte,

$$Y \in \mathcal{P} \Rightarrow o_\omega(Y) \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{E}(o_\omega(Y)) \subseteq \mathcal{P}.$$

Así, $o_\omega(Y) \times P \in \mathcal{P}$. Por la condición (iii) de la Definición 1.5.12 obtenemos que $B \in \mathcal{P}$. Por lo tanto $C_p(X) \in \mathcal{E}(B) \subseteq \mathcal{P}$ (recuerde que $\mathcal{E}(B)$ contiene a todas las imágenes continuas de B).

Para demostrar la necesidad basta tomar $Y = C_p(X)$. □

El Teorema 1.5.14 y la Proposición 1.5.13 implican el siguiente resultado.

1.5.15 Corolario. *Sea X un espacio compacto. Entonces $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf-Σ si y sólo si existe $Y \subseteq C_p(X)$ que separa a los puntos de X y es un espacio Lindelöf-Σ.*

1.5.16 Teorema. *Sea $\mathcal{P}$ una clase de espacios ω-perfecta, $X \in \mathcal{P}$ y Y un subespacio compacto de $C_p(X)$. Entonces $C_p(Y) \in \mathcal{P}$.*

Demostración. Consideremos la función $\psi : X \to C_p(Y)$ dada por $\psi(x)(f) = f(x)$, para cada $x \in X$ y cada $f \in Y$. Así, $\psi(x) = \widehat{x} \restriction_Y$, para cada $x \in X$. Afirmamos que $\psi(X) \subseteq C_p(Y)$ separa a los puntos de Y. En efecto, sean g y h dos elementos distintos de Y. Entonces existe $x_0 \in X$ tales que $g(x_0) \neq h(x_0)$. Por lo tanto $\psi(x_0)(g) \neq \psi(x_0)(h)$.

Por el inciso (ii) de la Definición 1.5.12 obtenemos que $\psi(X) \in \mathcal{P}$. Invocando el Teorema 1.5.14 obtenemos que $C_p(Y) \in \mathcal{P}$. □

1.5.17 Ejemplo. Sean $\tau > \omega$, $D(\tau)$ el espacio discreto de cardinalidad τ y $\xi \notin D(\tau)$. Denotaremos mediante $L(\tau) = D(\tau) \cup \{\xi\}$ al espacio en que sólo el punto ξ no es aislado y en donde las vecindades de ξ son los conjuntos $V \subseteq L(\tau)$ tales que $\xi \in V$ y $L(\tau) \setminus V$ es numerable. Observe que $L(\tau)$ es un espacio de Lindelöf.

Afirmación: Sea $f : L(\tau) \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in C_p(L(\tau))$ y $f(\xi) = 0$ si y sólo si $\{x \in L(\tau) : f(x) \neq 0\}$ es numerable.

Demostración de la afirmación:
Necesidad. Definimos $B_n = f^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$. Note que $B_n \in \mathcal{T}(\xi, L(\tau))$. Por

definición de la topología del espacio $L(\tau)$, sucede que $|L(\tau) \setminus B_n| \leq \omega$. Además $\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} B_n = f^{-1}(\{0\})$. Finalmente:

$$\Big|\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} (L(\tau) \setminus B_n)\Big| = |\{x \in L(\tau) \,:\, f(x) \neq 0\}| \leq \omega.$$

Suficiencia. Supongamos que $f \notin C_p(L(\tau))$ y $f(\xi) = 0$. Por definición de la topología del espacio $L(\tau)$ y por nuestras hipótesis, si $S \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}(L(\tau))$. Por lo tanto, existe $U \in \mathcal{T}(0, \mathbb{R})$ tal que $f^{-1}(U) \notin \mathcal{T}(L(\tau))$ (de lo contrario f sería continua). Como $\xi \in f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(U) \notin \mathcal{T}(L(\tau))$:

$$|\{x \in L(\tau) \,:\, f(x) \neq 0\}| \geq |L(\tau) \setminus f^{-1}(U)| > \omega.$$

Si suponemos que $f \in C_p(L(\tau))$ y $f(\xi) \neq 0$, tenemos que

$$\{x \in L(\tau) \,:\, f(x) \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \in \mathcal{T}(\xi, L(\tau)).$$

Por lo tanto $|L(\tau) \setminus \{x \in L(\tau) \,:\, f(x) \neq 0\}| \leq \omega$. Concluimos que $|\{x \in L(\tau) \,:\, f(x) \neq 0\}| > \omega$. ⊠

La afirmación anterior muestra que el subespacio

$$\{f \in C_p(L(\tau)) \,:\, f(\xi) = 0\} \subseteq C_p(L(\tau))$$

es homeomorfo al subespacio $\Sigma\mathbb{R}^\tau \subseteq \mathbb{R}^\tau$ que consiste de todos los puntos para los cuales el conjunto de coordenadas distintas de cero es numerable.

Recuerde que los espacios compactos contenidos en $\Sigma\mathbb{R}^\tau$ son llamados *compactos de Corson*. Hemos visto por tanto que todo compacto de Corson puede ser inmerso en $C_p(L(\tau))$ para algún τ.

1.5.18 Definición. Para cada cardinal $\tau > \omega$, sea $\mathcal{M}_\tau$ la clase más pequeña de espacios que satisface:

(i) $L(\tau) \in \mathcal{M}_\tau$;

(ii) todo compacto pertenece a $\mathcal{M}_\tau$;

(iii) si $X \in \mathcal{M}_\tau$ y $Y \subseteq X$, Y es cerrado en X, entonces $Y \in \mathcal{M}_\tau$;

(iv) el producto de cualquier familia a lo más numerable de espacios en $\mathcal{M}_\tau$ pertenece a $\mathcal{M}_\tau$;

(v) la imagen de un espacio en $\mathcal{M}_\tau$ bajo una función continua pertenece a $\mathcal{M}_\tau$.

1.5.19 Proposición. *Para cualquier $\tau > \omega$, $\mathcal{M}_\tau$ es una clase de espacios ω-perfecta.*

Demostración. Sea $X \in \mathcal{M}_\tau$. Fijemos $A \subseteq L(\tau)\backslash\{\xi\}$ tal que A es numerable. Así, A es un subconjunto cerrado de $L(\tau)$. Si dotamos al conjunto A con la topología de subespacio respecto de $L(\tau)$ obtenemos que A es homeomorfo a $D(\omega)$. De esta forma, podemos asumir que $D(\omega)$ es un subespacio cerrado de $L(\tau)$. Los incisos (i) y (iii) de la Definición 1.5.18 implican que $D(\omega) \in \mathcal{M}_\tau$. El inciso (iv) de dicha definición implica que $o_\omega(X) = X^\omega \times (D(\omega))^\omega \in \mathcal{M}_\tau$.

Ahora tomamos $Z \in \mathcal{E}(X)$. Existen un espacio compacto F y una función continua sobreyectiva $g : X \times F \to Z$. Los incisos (ii), (iv) y (v) de la Definición 1.5.18 implican que $Z = g(X \times F) \in \mathcal{M}_\tau$. $\square$

El Teorema 1.5.16 y la Proposición 1.5.19 implican lo siguiente.

1.5.20 Proposición. *Si $Y \subseteq C_p(L(\tau))$ y Y es compacto, entonces $C_p(Y) \in \mathcal{M}_\tau$.*

Demostración. Basta recordar que $\mathcal{M}_\tau$ es una clase de espacios ω-perfecta y que $L(\tau) \in \mathcal{M}_\tau$. $\square$

1.5.21 Proposición. *La clase $\mathcal{M}_\tau$ consiste de todos los espacios que pueden ser representados como una imagen continua de un subespacio cerrado del producto del espacio $(L(\tau))^\omega$ y un espacio compacto.*

Demostración. Sean F un espacio compacto, H un subespacio cerrado del producto $(L(\tau))^\omega \times F$ y $g : H \to Z$ una función continua sobreyectiva. Los incisos (i)-(iv) de la Definición 1.5.18 implican que $H \in \mathcal{M}_\tau$. Finalmente, el inciso (v) implica que $Z = g(H) \in \mathcal{M}_\tau$. $\square$

Es muy importante para nosotros demostrar que todos los espacios en $\mathcal{M}_\tau$ tienen la propiedad de Lindelöf. Para ello, note que debido a que el número de Lindelöf de un espacio no se incrementa bajo la multiplicación del espacio por un compacto, es suficiente aplicar el siguiente resultado.

1.5.22 Proposición. *Para cualquier $\tau > \omega$ el espacio $(L(\tau))^\omega$ es un espacio de Lindelöf.*

El lector puede consultar una demostración de este último resultado en [20]. La Proposición 1.5.20 y el Ejemplo 1.5.17 nos conducen al siguiente resultado que es el objetivo principal de esta sección.

1.5.23 Teorema. *Para cualquier compacto de Corson X, el espacio $C_p(X)$ es Lindelöf.*

Capítulo 2

Teorema de H. Michalewski.

2.1. Introducción.

Recordemos que una biyección continua de un espacio Y en un espacio Z es llamada *condensación* de Y sobre Z. Si existe una condensación de Y sobre Z decimos que Y se *condensa* sobre Z. Note que determinar si la topología de un espacio puede ser debilitada a una topología con propiedades específicas es equivalente a determinar si tal espacio puede ser condensado sobre algún espacio con las propiedades requeridas. En efecto: considere un espacio topológico $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Si es posible dotar al conjunto Y de una topología $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}_Y$, entonces la función identidad en Y, $Id_Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Y, \mathcal{T}^*)$, es una condensación del espacio $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sobre el espacio $(Y, \mathcal{T}^*)$. Recíprocamente, si existe un espacio $(Z, \mathcal{T}_Z)$ y una condensación $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ entonces la colección $\mathcal{T}^* = \{f^{-1}(U) \ : \ U \in \mathcal{T}_Z\}$ es una topología en Y más débil que la topología $\mathcal{T}_Y$.

De esta manera, preguntarnos por la existencia de una topología débil compacta para un espacio X es equivalente a preguntarnos si existe una condensación de X sobre un espacio compacto. La topología de un espacio de funciones $C_p(X)$ nunca es compacta (a menos que $X = \emptyset$), por lo cual tiene importancia el problema de determinar topologías débiles compactas para este tipo de espacios topológicos.

Problema [A. V. Arhangel'skii, [2]]. ¿Bajo qué condiciones de X el espacio $C_p(X)$ admite una topología débil compacta (σ-compacta)?

El problema anterior está relacionado con un viejo problema planteado por S. Banach: ¿Todo espacio de Banach separable admite una topología compacta y metrizable más débil? E. G. Pytkeev respondió esta pregunta afirmativamente. Pytkeev demostró en [18] que si X es un subespacio de Borel de un espacio completamente metrizable separable y X no es σ-compacto, entonces existe una condensación de X sobre el cubo de Hilbert $I^{\mathbb{N}}$.

La idea de este capítulo es exponer todos los resultados necesarios para poder demostrar el siguiente resultado de H. Michalewski.

Teorema. Si X es un subconjunto proyectivo y no σ-compacto de un espacio polaco, entonces $C_p(X)$ admite una condensación sobre $I^{\mathbb{N}}$. A menos de que X sea analítico, asumimos el Axioma de Determinación Proyectiva.

Este resultado de Michalewski (propiamente, el relativo a subconjuntos analíticos no σ-compactos de un espacio polaco) generaliza el resultado de A. V. Arhangel'skii obtenido en [4] que establece que $C_p(X)$ tiene una topología débil compacta cuando X es un espacio metrizable σ-compacto. Pero debemos subrayar el hecho de que no es posible generalizar el Teorema de Michalewski (el relativo a subconjuntos analíticos) para todos los espacios metrizables separables. W. Marciszewski demostró en [16] que si se asume que la mínima cardinalidad de una familia dominante de funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es igual a 2^ω, entonces existe X un subespacio de $\mathbb{R}$ tal que $C_p(X)$ no se condensa sobre ningún espacio σ-compacto. Aún se desconoce si es posible construir un ejemplo con estas características sin hacer alguna hipótesis conjuntista adicional.

En la Sección 2.2 presentamos una demostración del Teorema de Michalewski y en la Sección 2.3 exponemos la construcción realizada por Marciszewski en [16]. El lector encontrará en el Apéndice A una exposición de los resultados de Teoría Descriptiva que utilizaremos en este trabajo, particularmente, encontrará una formulación precisa del Axioma de Determinación Proyectiva.

2.2. Teorema de H. Michalewski.

En esta sección consideramos únicamente espacios metrizables y separables.

Decimos que un espacio topológico X es *completamente metrizable* si admite una métrica compatible d tal que (X, d) es completo. Un espacio separable y completamente metrizable es llamado espacio *polaco*. Es importante señalar que todo espacio metrizable y separable es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert $I^{\mathbb{N}}$. Particularmente, los espacios polacos son (salvo homeomorfismo) los subespacios G_δ de $I^{\mathbb{N}}$ [14, Teorema 4.14].

Llamaremos *espacio de Cantor* al espacio $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$, donde consideramos a $2 = \{0, 1\}$ como espacio discreto y tomamos en $2^{\mathbb{N}}$ la topología producto. Además, llamaremos *espacio de Baire* al espacio $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, donde consideramos a $\mathbb{N}$ como espacio discreto y tomamos en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ la topología producto. Estos espacios desempeñan un papel fundamental en el área de Teoría Descriptiva. Debido a que el producto de una cantidad a lo más numerable de espacios polacos, es a su vez un espacio polaco [14, Proposición 3.3] obtenemos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{N}$ son espacios polacos. Subrayamos el hecho de que todo espacio polaco y cero-dimensional es homemomorfo a un subespacio cerrado de $\mathcal{N}$, así como a un subespacio G_δ de $\mathcal{C}$ (Teorema A.4.10). Recuerde que un espacio topológico es *cero-dimensional* si es Hausdorff y tiene una base formada por conjuntos cerrado-abiertos.

A continuación definimos a la jerarquía de Borel y a la jerarquía proyectiva. Además enunciamos las propiedades categóricas de estas clases que utilizaremos en la demostración del teorema de Michalewski.

Recuerde que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, su σ-álgebra de Borel es la menor σ-álgebra de subconjuntos de X que contiene a los subconjuntos abiertos, es decir, la menor colección de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{T}$ y que es cerrada bajo uniones numerables, intersecciones numerables y complementos. Denotamos a la σ-álgebra de Borel de $(X, \mathcal{T})$ mediante $\boldsymbol{B}(X, \mathcal{T})$ ó $\boldsymbol{B}(X)$. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio metrizable, de manera que todo subconjunto cerrado de X es un subconjunto G_δ (Teorema A.2.3). Para cada ordinal $1 \leq \xi < \omega_1$ definimos, por recursión transfinita, las siguientes clases de subconjuntos de X:

(i) $\boldsymbol{\Sigma}^0_1(X) = \{U \subseteq X \,:\, U \text{ es abierto}\}$,

(ii) $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi(X) = \{X \setminus A \,:\, A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X)\}$,

(iii) $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X) = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \,:\, A_n \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\xi_n}(X), \text{ con } 1 \leq \xi_n < \xi, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$, si $\xi > 1$,

(iv) $\boldsymbol{\Delta}^0_\xi(X) = \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X) \cap \boldsymbol{\Pi}^0_\xi(X)$.

La siguiente notación nos ayudará a entender qué tipo de subconjuntos de X conforman a cada una de las clases recién definidas. Denotaremos mediante $G(X)$ a la colección de todos los subconjuntos abiertos de X y mediante $F(X)$

a la colección de todos los subconjuntos cerrados. Además, para cualquier colección $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X, definimos $\mathcal{E}_\sigma = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{E}_\delta = \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = G(X)$, $\mathbf{\Pi}^0_1(X) = F(X)$, $\mathbf{\Sigma}^0_2(X) = (F(X))_\sigma = F_\sigma(X)$, $\mathbf{\Pi}^0_2(X) = (G(X))_\delta = G_\delta(X)$, $\mathbf{\Sigma}^0_3(X) = (G_\delta(X))_\sigma = G_{\delta\sigma}(X)$, $\mathbf{\Pi}^0_3(X) = (F_\sigma(X))_\delta = F_{\sigma\delta}(X)$, etc.

No será complicado para el lector verificar que $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)\cup\mathbf{\Pi}^0_\xi(X) \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}(X)$, para todo ordinal $1 \leq \xi < \omega_1$. Esto implica que

$$\boldsymbol{B}(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Delta}^0_\xi(X).$$

De esta forma, hemos obtenido una descomposición de los conjuntos de Borel de X, en una jerarquía de a lo más ω_1 niveles de conjuntos. Esta descomposición es llamada la *jerarquía de Borel*. Podemos representar esta jerarquía en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & \cdots \\ \mathbf{\Delta}^0_1 & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & \mathbf{\Delta}^0_3 & & \\ & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & \mathbf{\Pi}^0_3 & \cdots \end{array}$$

donde cualquier clase está contenida en toda clase a la derecha de ella. Cuando no haya confusión escribiremos simplemente $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ y $\mathbf{\Delta}^0_\xi$, sin indicar explícitamente el espacio X.

Ahora definiremos a las clases proyectivas.

2.2.1 Definición. Sea X un espacio polaco y A un subconjunto de X. Decimos que A es *analítico* si existen un espacio polaco Y y una función continua $f : Y \to X$ tales que $f(Y) = A$. Un conjunto B es *coanalítico* si $X \setminus B$ es analítico. Denotamos a la clase de conjuntos analíticos (respectivamente, la clase de conjuntos coanalíticos) contenidos en X mediante el símbolo $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ (respectivamente, $\mathbf{\Pi}^1_1(X)$).

Observe que $\emptyset$ es analítico tomando $Y = \emptyset$. El Teorema A.5.5 establece que si X es un espacio polaco y $A \in \boldsymbol{B}(X) \setminus \{\emptyset\}$, entonces existe una función continua y sobreyectiva $g : \mathcal{N} \to A$. Esto implica que $\boldsymbol{B}(X) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$. Como $\boldsymbol{B}(X)$ es cerrada bajo complementos, obtenemos que $\boldsymbol{B}(X) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1(X)\cap\mathbf{\Pi}^1_1(X)$, para cualquier espacio polaco X.

Ahora definimos recursivamente a las *clases proyectivas* $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$ y $\mathbf{\Delta}^1_n$ de subconjuntos en espacios polacos de la siguiente manera:

(i) $\mathbf{\Sigma}^1_1$ es la clase de conjuntos analíticos contenidos en algún espacio polaco,

(ii) $\mathbf{\Pi}^1_n = \{X \setminus A \ : \ X \text{ es polaco}, A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X)\}$,

(iii) $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1} = \{proy_X(A) \ : \ X \text{ es polaco}, A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})\}$, donde $proy_X : X \times \mathcal{N} \to X$ es la proyección al primer factor,

(iv) $\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$.

Es cierto que $\mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n \subseteq \mathbf{\Delta}^1_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (Teorema A.6.6). Así, definimos

$$\mathbf{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbf{\Pi}^1_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbf{\Delta}^1_n.$$

Los elementos de la clase $\mathbf{P}$ son llamados *conjuntos proyectivos*. De esta forma, tenemos el siguiente esquema de la *jerarquía proyectiva* :

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{\Sigma}^1_1 & & \mathbf{\Sigma}^1_2 & & \mathbf{\Sigma}^1_3 & \cdots \\ \mathbf{\Delta}^1_1 & & \mathbf{\Delta}^1_2 & & \mathbf{\Delta}^1_3 & & \\ & \mathbf{\Pi}^1_1 & & \mathbf{\Pi}^1_2 & & \mathbf{\Pi}^1_3 & \cdots \end{array}$$

donde cualquier clase está contenida en toda clase a la derecha de ella.

Las propiedades categóricas más básicas de las clases proyectivas están plasmadas en la siguiente proposición.

2.2.2 Proposición. *(i) Las clases $\mathbf{\Sigma}^1_n$ son cerradas bajo preimágenes continuas, uniones e intersecciones numerables.*

(ii) Las clases $\mathbf{\Pi}^1_n$ son cerradas bajo preimágenes continuas, uniones e intersecciones numerables.

(iii) Las clases $\mathbf{\Delta}^1_n$ son cerradas bajo preimágenes continuas, complementos y uniones numerables.

Dado un espacio polaco X y $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, denotaremos mediante el símbolo $\mathbf{\Sigma}^1_n(X)$ (respectivamente, $\mathbf{\Pi}^1_n(X)$ y $\mathbf{\Delta}^1_n(X)$) a la colección de todos los subconjuntos de X que pertenecen a la clase $\mathbf{\Sigma}^1_n$ (respectivamente, $\mathbf{\Pi}^1_n$ y $\mathbf{\Delta}^1_n$).

A través de todo este capítulo, en varias ocasiones construiremos inmersiones a partir de productos diagonales de familias dadas de funciones. Para recordar la definición de producto diagonal de funciones remitimos al lector a la Observación 1.2.6. Recuérdese también que una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_s : X \to Y_s : s \in S\}$ *separa (o distingue) puntos del espacio* X si para cada par de puntos distintos x, $y \in X$, existe un índice $s \in S$ tal que $f_s(x) \neq f_s(y)$. Adicionalmente, decimos que la familia $\mathcal{F}$ *separa (o distingue) puntos de subconjuntos cerrados de* X si para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existe un índice $s \in S$ tal que $f_s(x) \notin cl(f_s(F))$. El siguiente teorema nos será de mucha utilidad para crear inmersiones. El lector puede consultar una demostración del mismo en [11, Teorema 2.3.20].

2.2.3 Teorema (Teorema de la diagonal)**.** *Sea $\mathcal{F} = \{f_s : X \to Y_s : s \in S\}$ una familia de funciones continuas. Si $\mathcal{F}$ separa puntos de X, entonces el producto diagonal $f = \Delta_{s\in S} f_s : X \to \prod_{s\in S} Y_s$ es una función inyectiva.*

Si, además, la familia $\mathcal{F}$ separa puntos y conjuntos cerrados, entonces f es una inmersión. Particularmente, si existe $s \in S$ tal que f_s es una inmersión, entonces f es también una inmersión.

Ahora consideramos la noción de uniformización.

2.2.4 Definición. Dados dos conjuntos X, Y y $G \subseteq X \times Y$, una *uniformización* de G es un subconjunto $\widetilde{G} \subseteq G$ tal que

$$\forall\, x \in X \ (\ \exists\, y \in Y\ (x, y) \in G \Leftrightarrow \exists!\, y \in Y\ (x, y) \in \widetilde{G}\ ).$$

En tal caso se dice que $\widetilde{G}$ *uniformiza* a G.

Note que, en el contexto de la definición anterior, $\widetilde{G}$ es la gráfica de una función g con dominio $A = proy_X(G)$ tal que $(x, g(x)) \in G \cap (\{x\} \times Y)$, para todo $x \in A$. El Axioma de Elección implica que todo subconjunto de $X \times Y$ admite una uniformización, sin embargo, centraremos nuestro interés en uniformizaciones "definibles".

A partir de ahora, la expresión "Γ es una clase de conjuntos"significa que Γ es alguna de las clases proyectivas, o bien, alguna de las clases que conforman la jerarquía de Borel de algún espacio metrizable y separable. Si X es un espacio metrizable y separable y Γ es una clase de conjuntos, denotaremos mediante $\Gamma(X)$ a la colección de todos los subconjuntos de X que pertenecen a la clase Γ. Introducimos ahora una propiedad que será de mucha utilidad para nuestros propósitos.

2.2.5 Definición. Sea Γ una clase de conjuntos. Decimos que Γ tiene la *propiedad de uniformización* si para todo par de espacios polacos X y Y y todo $G \in \Gamma(X \times Y)$ existe $\widetilde{G} \in \Gamma(X \times Y)$ tal que $\widetilde{G}$ es una uniformización de G.

En [13, Teorema 4.50] se demuestra que existe un conjunto cerrado $C \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ que no admite una uniformización que pertenece a la clase $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Así, la clase $\mathbf{\Sigma}^1_1$ no posee la propiedad de uniformización. El siguiente resultado nos dice que si asumimos el Axioma de Determinancia Proyectiva (ADP), esto es, si asumimos:

Axioma de determinación proyectiva (ADP). *Si $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es un conjunto proyectivo, entonces cualquier juego $G(\mathbb{N}, X)$ está determinado.*

entonces la clase $\mathbf{\Sigma}^1_l$ tiene la propiedad de uniformización siempre que $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sea un número par, mientras que la clase $\mathbf{\Pi}^1_l$ tiene dicha propiedad siempre que $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sea un número impar. No daremos una demostración de este resultado, el lector interesado puede consultar [14, Corolario 39.9].

2.2.6 Teorema. (ADP) *Para todo $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, las clases $\mathbf{\Sigma}^1_{2m+2}$ y $\mathbf{\Pi}^1_{2m+1}$ tienen la propiedad de uniformización.*

Utilizaremos ahora el Teorema 2.2.6 para demostrar el siguiente Teorema.

2.2.7 Teorema. (ADP) *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Para cualquier $A \in \mathbf{\Sigma}^1_n$ existe $P \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C})$ que se condensa sobre A.*

Demostración. Por el Teorema A.6.7, existen un espacio polaco Y que contiene a A, un conjunto $P_0 \in \mathbf{\Pi}^1_{n-1}(\mathcal{C})$ y una función continua $h : P_0 \to Y$ tal que $h(P_0) = A$. Sea $H : P_0 \to Y \times \mathcal{C}$ el producto diagonal de la función $h : P_0 \to Y$ y de la función inclusión $i_{P_0} : P_0 \to \mathcal{C}$. Así, $H(x) = (h(x), x)$ para cada $x \in P_0$. Por el Teorema 2.2.3, H es una inmersión. Definimos $G = H(P_0)$. Utilizando el hecho de que la clase $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ es cerrada bajo imágenes homeomorfas (Proposición 2.2.2) obtenemos que $G \in \mathbf{\Pi}^1_{n-1}(Y \times \mathcal{C})$. Note que existe $\widetilde{G} \in \mathbf{\Pi}^1_n(Y \times \mathcal{C})$ una uniformización de G. En efecto: de acuerdo con el Teorema 2.2.6, las clases $\mathbf{\Pi}^1_j$, tales que j es un número impar, tienen la propiedad de uniformización. Por lo tanto, alguna de las clases $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ tiene la propiedad de uniformización. Supongamos que la clase $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ tiene la propiedad de uniformización. Entonces existe $\widetilde{G} \in \mathbf{\Pi}^1_{n-1}(Y \times \mathcal{C})$ una uniformización de G. Por el Teorema A.6.6, $\mathbf{\Pi}^1_{n-1} \subseteq \mathbf{\Pi}^1_n$. Así, $\widetilde{G}$ es una uniformización de G que pertenece a la clase $\mathbf{\Pi}^1_n$. Razonamos de forma semejante si la clase $\mathbf{\Pi}^1_n$ tiene la propiedad de uniformización.

Observe que $proy_Y(G) = A$. En efecto: si $y \in A$, entonces existe $x \in P_0$ tal que $y = h(x)$. Por lo tanto $(y, x) \in H(P_0) = G$ y en consecuencia $y = proy_Y(y, x) \in proy_Y(G)$. Por otra parte, si $y \in proy_Y(G)$, entonces existe $x \in \mathcal{C}$ tal que $(y, x) \in G = H(P_0)$. Esto implica que existe $x^* \in P_0$ tal que $(y, x) = (h(x^*), x^*)$. Por lo tanto $y = h(x^*) \in h(P_0) = A$.

Definimos $P = H^{-1}(\widetilde{G}) \subseteq P_0$. De esta forma, $P \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C})$ debido a que es la preimágen continua de un elemento de la clase $\mathbf{\Pi}^1_n$ (Proposición 2.2.2). Sólo falta verificar que $h \restriction_P$ es inyectiva y que $h(P) = A$. Veamos que $h \restriction_P$ es inyectiva: sean x, $x' \in P$ tales que $h(x) = h(x')$. Por definición del conjunto P, los puntos $(h(x), x)$ y $(h(x), x')$ pertenecen a $\widetilde{G} \subseteq G$. Utilizando que $\widetilde{G}$ es una uniformización de G, obtenemos que existe un único $z \in \mathcal{C}$ tal que $(h(x), z) \in \widetilde{G}$. Por lo tanto $x = x'$.

Ahora verificaremos que $h(P) = A$. Si $x \in P$, entonces $(h(x), x) \in \widetilde{G} \subseteq G$. Debido a que $proy_Y(G) = A$, obtenemos que $h(x) \in A$. Recíprocamente, si $y \in A = proy_Y(G)$, entonces existe $x \in \mathcal{C}$ tal que $(y, x) \in G = H(P_0)$. Esto implica que existe $x_0 \in P_0$ tal que $(y, x) = (h(x_0), x_0)$. Por lo tanto $x = x_0$ y $y = h(x_0)$, es decir, $x \in P_0$ y $y = h(x)$. □

Es posible demostrar (sin asumir el Axioma de Determinancia Proyectiva) la versión del Teorema 2.2.7 para las clases $\mathbf{\Sigma}^1_1$ y $\mathbf{\Sigma}^1_2$. En el caso de la clase $\mathbf{\Sigma}^1_2$, empleamos la técnica expuesta en el párrafo anterior y el hecho de que la clase $\mathbf{\Pi}^1_1$ tiene la propiedad de uniformización [14, Teorema 36.14]. En el caso de la clase $\mathbf{\Sigma}^1_1$ utilizamos el Teorema 39.3 de [15]. En resumen, tenemos el siguiente resultado.

2.2.8 Teorema. *Sea $n \in \{1, 2\}$. Para cualquier $A \in \mathbf{\Sigma}^1_n$ existe $P \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C})$ que se condensa sobre A.*

Con el propósito de establecer en forma precisa la demostración del resultado de Michalewski es que establecemos lo siguiente.

Sea m un elemento fijo de $\mathbb{N}$. Definimos

$$C_m = \{x = (x_k) \in I^{\mathbb{N}} \ : \ \text{existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_k = \tfrac{1}{m+1} \text{ para todo } k \geq k_0\}.$$

Observe que C_m es el conjunto de sucesiones en I que se estacionan en $\frac{1}{m+1}$.

2.2.9 Lema. *Para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que C_m es un subconjunto F_σ del producto $I^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Para cada $l \in \mathbb{N}$ definimos

$$C_m^l = \{x = (x_k) \in I^{\mathbb{N}} \ : \ x_k = \tfrac{1}{m+1} \text{ para todo } k \geq l\}.$$

Debido a que $C_m = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} C_m^l$, basta demostrar que C_m^l es un subconjunto cerrado de $I^{\mathbb{N}}$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Tomemos pues l un elemento arbitrario de $\mathbb{N}$ y $x = (x_k) \in cl(C_m^l)$. Ahora recordamos que $I^{\mathbb{N}}$ es un espacio metrizable debido a que es el producto de una cantidad numerable de espacios metrizables. Esto implica que existe una sucesión $s = (x^j) \subseteq C_m^l$ que converge a x. Pero el espacio $I^{\mathbb{N}}$ está equipado con la topología de la convergencia puntual (ver la Proposición 1.2.1). Por lo tanto, si utilizamos la notación $x^j = (x_k^j) = (x_0^j, x_1^j, \ldots, x_k^j, \ldots)$ para representar a cada término de s, obtenemos que

$$\lim_{j \to \infty} x_k^j = x_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como $s \subseteq C_m^l$, sucede que $x_k^j = \frac{1}{m+1}$, para todo $j \in \mathbb{N}$ y para todo $k \geq l$. Esto implica que si $k \geq l$, entonces

$$\lim_{j \to \infty} x_k^j = \lim_{j \to \infty} \tfrac{1}{m+1} = \tfrac{1}{m+1}.$$

Por lo tanto $x_k = \frac{1}{m+1}$, para todo $k \geq l$. Concluimos que $x \in C_m^l$ y en consecuencia C_m^l es un subconjunto cerrado de $I^{\mathbb{N}}$. $\square$

De ahora en adelante, denotaremos mediante π_k a la proyección en $I^{\mathbb{N}}$ sobre el k-ésimo factor I (para cada $k \in \mathbb{N}$), y mediante π_k^1 y π_k^2 denotaremos a las proyecciones en los factores apropiados del producto $I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$.

2.2.10 Lema. *Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y Γ alguna de las clases $\mathbf{\Sigma}_n^1$, $\mathbf{\Pi}_n^1$. Si $X \in \Gamma$, M es un subconjunto cerrado de X y $f : M \to I^{\mathbb{N}} \times (I^{\mathbb{N}} \setminus C_m)$ es una función continua e inyectiva tal que $f(M) \in \Gamma$, entonces existe una función $g : X \to I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$ continua e inyectiva que extiende a f y tal que $g(X \setminus M) \subseteq I^{\mathbb{N}} \times C_m$. Además $g(X) \in \Gamma$.*

Demostración.
AFIRMACIÓN 1: Existe una inmersión $h : X \to I^{\mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{m \in \mathbb{N} \ : \ \pi_m \circ h = \pi_k \circ h\}$ es infinito.

Demostración de la Afirmación: Como X es un espacio metrizable y separable, existe una inmersión $\lambda : X \to I^{\mathbb{N}}$ [14, Teorema 4.14]. Consideremos $\{L_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, ajenos entre sí y tales que $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$. Definimos $h : X \to I^{\mathbb{N}}$ mediante $h(x)(k) = \lambda(x)(n)$, donde n es el único número natural tal que $k \in L_n$.

Veamos que h es inyectiva. Sean x, y dos elementos distintos de X. Como la función λ es inyectiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(x)(n) \neq \lambda(y)(n)$. Fijando cualquier $k \in L_n$ obtenemos que $h(x)(k) = \lambda(x)(n) \neq \lambda(y)(n) = h(y)(k)$. Por lo tanto $h(x) \neq h(y)$.

Ahora comprobaremos que h es continua. Por la Proposición 1.2.3, basta verificar que $\pi_k \circ h$ es continua, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Si n es el único número natural tal que $k \in L_n$, entonces $(\pi_k \circ h)(x) = h(x)(k) = \lambda(x)(n) = (\pi_n \circ \lambda)(x)$. Por lo tanto $\pi_k \circ h = \pi_n \circ \lambda$. Como λ es continua, obtenemos que $\pi_k \circ h$ también es continua.

Ahora veamos que para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{m \in \mathbb{N} : \pi_m \circ h = \pi_k \circ h\}$ es infinito. Sea $k \in \mathbb{N}$ y n el único número natural tal que $k \in L_n$. Veamos que $L_n \subseteq \{m \in \mathbb{N} : \pi_m \circ h = \pi_k \circ h\}$. Tomemos $m \in L_n$ y $x \in X$. Entonces $(\pi_m \circ h)(x) = h(x)(m) = \lambda(x)(n)$. Como k también es un elemento de L_n, sucede que $(\pi_k \circ h)(x) = h(x)(k) = \lambda(x)(n)$. Por lo tanto $\pi_m \circ h = \pi_k \circ h$. Debido a que L_n es infinito, obtenemos que $\{m \in \mathbb{N} : \pi_m \circ h = \pi_k \circ h\}$ también es infinito. ⊠

Como M es un subconjunto cerrado de X, sucede que M es un subconjunto G_δ de X (Teorema A.2.3). Por lo tanto $X \setminus M$ es un subconjunto F_σ de X. Así, podemos representarlo en la forma $X \setminus M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_k$, donde M_k es cerrado en X y $M_k \subseteq M_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ (recuerde que la unión finita de subconjuntos cerrados de un espacio topológico es a su vez un subconjunto cerrado).

Observe ahora que

$$f = \big(\Delta_{k\in\mathbb{N}}(\pi_k^1 \circ f)\big)\Delta\big(\Delta_{k\in\mathbb{N}}(\pi_k^2 \circ f)\big). \tag{2.1}$$

En efecto: sea x un elemento arbitrario de M. Denotamos $f(x) = (u^x, v^x)$, donde $u^x = (u_0^x, u_1^x, \ldots)$ y $v^x = (v_0^x, v_1^x, \ldots)$. De esta forma:

$$\begin{aligned} u^x &= \big((\pi_0^1 \circ f)(x), (\pi_1^1 \circ f)(x), \ldots\big) = \Delta_{k\in\mathbb{N}}(\pi_k^1 \circ f)(x) \quad \text{y} \\ v^x &= \big((\pi_0^2 \circ f)(x), (\pi_1^2 \circ f)(x), \ldots\big) = \Delta_{k\in\mathbb{N}}(\pi_k^2 \circ f)(x). \end{aligned}$$

La ecuación (2.1) nos sugiere que podemos obtener una extensión continua de f definiendo dos colecciones de funciones continuas $\{\Phi_k : X \to I : k \in \mathbb{N}\}$ y $\{\Psi_k : X \to I : k \in \mathbb{N}\}$ tales que $\Phi_k \restriction_M = \pi_k^1 \circ f$ y $\Psi_k \restriction_M = \pi_k^2 \circ f$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Posteriormente consideraremos los productos diagonales de cada una de estas familias, esto es $g^1 = \Delta_{k\in\mathbb{N}}\Phi_k$ y $g^2 = \Delta_{k\in\mathbb{N}}\Psi_k$. Finalmente, el producto diagonal de g^1 y g^2 nos proporcionará una función continua $g : X \to I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$ que extiende a f.

Con esta idea en mente definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\phi_k,\ \psi_k : M_k \cup M \to [0,1]$ mediante

$$\phi_k(x) = \begin{cases} (\pi_k^1 \circ f)(x) & \text{si } x \in M, \\ (\pi_k \circ h)(x) & \text{si } x \in M_k, \end{cases}$$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} (\pi_k^2 \circ f)(x) & \text{si } x \in M, \\ \frac{1}{m+1} & \text{si } x \in M_k, \end{cases}$$

Por el Teorema de Extensión de Tietze [14, Teorema 1.3] existen $\Phi_k,\ \Psi_k : X \to [0,1]$ extensiones continuas de ϕ_k y ψ_k. Definimos $g^1 = \Delta_{k\in\mathbb{N}}\Phi_k$, $g^2 = \Delta_{k\in\mathbb{N}}\Psi_k$ y $g = g^1\Delta g^2$.

Afirmación 2: La función g es una extensión de f.

Demostración de la Afirmación: Observe que si $x \in M$, entonces

$$g^1(x) = \Delta_{k\in\mathbb{N}}\Phi_k(x) = \Delta_{k\in\mathbb{N}}\phi_k(x) = \Delta_{k\in\mathbb{N}}(\pi_k^1 \circ f)(x).$$

Análogamente $g^2(x) = \Delta_{k\in\mathbb{N}}(\pi_k^2 \circ f)(x)$. Utilizando la ecuación (2.1) y la definición de la función g obtenemos que $g(x) = f(x)$. Por lo tanto $g\restriction_M = f$. $\boxtimes$

Afirmación 3: $g(X \setminus M) \subseteq I^{\mathbb{N}} \times C_m$.

Demostración de la Afirmación: Sea $x \in X \setminus M$. Fijando $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in M_{k_0}$ y utilizando el hecho de que $M_k \subseteq M_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, obtenemos lo siguiente:

$$\forall\ k \geq k_0 \left(x \in M_{k_0} \Rightarrow x \in M_k \Rightarrow \psi_k(x) = \tfrac{1}{m+1} \Rightarrow \Psi_k(x) = \tfrac{1}{m+1}\right).$$

Además, por definición de la función g^2, sucede que $g^2(x) = \Delta_{k\in\mathbb{N}}\Psi_k(x)$. Estos dos hechos implican que $(\pi_k \circ g^2)(x) = \Psi_k(x) = \frac{1}{m+1}$, para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto $g^2(x) \in C_m$. $\boxtimes$

Afirmación 4: Para todo $k \in \mathbb{N}$, sucede que $g\restriction_{M_k}$ es una inmersión.

Demostración de la Afirmación: Sea k un elemento arbitrario de $\mathbb{N}$. Por la Afirmación 1, para cada $l \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{m \in \mathbb{N}\ :\ \pi_m \circ h = \pi_l \circ h\}$ es infinito. Por lo tanto, para cada $l \in \mathbb{N}$,

$$\{m \in \mathbb{N}\ :\ \pi_m \circ h = \pi_l \circ h\} \cap \{k+1,\ k+2,\ k+3,\ \ldots\} \neq \emptyset.$$

Sea m_l el mínimo de este conjunto. Así, $m_l > k$ y $\pi_{m_l} \circ h = \pi_l \circ h$. Particularmente, $M_k \subseteq \bigcap_{l\in\mathbb{N}} M_{m_l}$. De esta forma, para cualquier $x \in M_k$,

$$\Delta_{l\in\mathbb{N}}\Phi_{m_l}(x) = \Delta_{l\in\mathbb{N}}\phi_{m_l}(x) = ((\pi_{m_0} \circ h)(x), (\pi_{m_1} \circ h)(x), \ldots) = h(x).$$

Por lo tanto $\Delta_{l\in\mathbb{N}}\Phi_{m_l} \restriction_{M_k}$ coincide con $h \restriction_{M_k}$. Además, como h es una inmersión y M_k es cerrado en X, sucede que $h \restriction_{M_k}$ también es una inmersión. De esta forma, $g \restriction_{M_k}$ es una inmersión, ya que es el producto diagonal de una familia de funciones que contiene a la colección $\{\Phi_{m_l} \restriction_{M_k} : l \in \mathbb{N}\}$ (Teorema 2.2.3). $\boxtimes$

Afirmación 5: $g(X) \in \Gamma$.

Demostración de la Afirmación 5: Observe que

$$g(X) = g\big(M \cup (X \setminus M)\big) = f(M) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} g(M_k).$$

Además, recuerde que $\boldsymbol{B}(X) \subseteq \boldsymbol{\Delta}^1_1(X) \subseteq \Gamma(X)$ (Teoremas A.5.5 y A.6.6) y que la clase Γ es cerrada bajo imágenes homeomorfas y uniones numerables (Proposición 2.2.2). Utilizando que, para todo $k \in \mathbb{N}$, M_k es cerrado en X y $g \restriction_{M_k}$ es una inmersión, obtenemos que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} g(M_k) \in \Gamma$. Como $f(M) \in \Gamma$, concluimos que $g(M) \in \Gamma$. $\boxtimes$

Finalmente, la inyectividad de g es consecuencia de lo siguiente:

- la familia $\{M_k : k \in \mathbb{N}\}$ es creciente,
- $g \restriction_M$ es inyectiva y $g \restriction_{M_k}$ es inyectiva, para cada $k \in \mathbb{N}$,
- $g(M) \cap g(X \setminus M) = \emptyset$.

Esto finaliza la demostración del lema. $\square$

Ahora introducimos la siguiente noción.

2.2.11 Definición. Sea Γ una clase de conjuntos, Z un espacio polaco y $X \subseteq Z$. Decimos que X es Γ-*duro* si para cada $P \in \Gamma(\mathcal{C})$ existe una función continua $g : \mathcal{C} \to X$ tal que $P = g^{-1}(X)$. Decimos que X es Γ-*completo* si X es Γ-duro y $X \in \Gamma$.

Note que, en el contexto de la definición anterior, X es Γ-duro, si y sólo si, cualquier elemento de la clase $\Gamma(\mathcal{C})$ es una preimagen continua de X. La noción que introducimos a continuación nos proporciona los ejemplos más comúnes de conjuntos Γ-completos.

2.2.12 Definición. Sean X, Y espacios polacos y Γ una clase de conjuntos. Decimos que un conjunto $U \subseteq Y \times X$ es Y*-universal* para $\Gamma(X)$ si $U \in \Gamma(Y \times X)$ y $\Gamma(X) = \{U_y : y \in Y\}$, donde $U_y = \{x \in X : (y, x) \in U\}$, para cada $y \in Y$.

Observación: Consideremos ahora Y un espacio polaco y Γ una clase de conjuntos. Observe que si existe $U \subseteq Y \times \mathcal{C}$ que es Y-universal para $\Gamma(\mathcal{C})$, entonces U es Γ-completo. En efecto: $U \in \Gamma$, por definición de conjunto Y-universal para $\Gamma(\mathcal{C})$. Por otra parte, debido a que $\Gamma(\mathcal{C}) = \{U_y : y \in Y\}$, obtenemos que para cada $P \in \Gamma(\mathcal{C})$ existe $y \in Y$ tal que $P = U_y$. Para demostrar que U es Γ-duro debemos exhibir una función continua $g : \mathcal{C} \to Y \times \mathcal{C}$ tal que $P = g^{-1}(U)$. Sea $g : \mathcal{C} \to Y \times \mathcal{C}$ dada por $g(x) = (y, x)$, para cada $x \in \mathcal{C}$. Así $g^{-1}(U) = \{x \in \mathcal{C} : (y, x) \in U\} = U_y = P$.

La observación anterior y el hecho de que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C})$ (Teorema A.6.10), implican el resultado plasmado en el siguiente lema.

2.2.13 Lema. *Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existe un conjunto $U \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ que es $\mathbf{\Pi}^1_n$-completo.*

Emplearemos el siguiente resultado sin dar una demostración del mismo. El lector interesado puede consultar [14, 26.11].

2.2.14 Lema. *Sea Γ una clase de conjuntos tal que $\mathbf{\Sigma}^0_2 \cup \mathbf{\Pi}^0_2 \subseteq \Gamma$, cerrada bajo preimágenes continuas y uniones e intersecciones finitas. Si Z es polaco y $X \subseteq Z$, entonces X es Γ-duro, si y sólo si, para cada $P \in \Gamma(\mathcal{C})$ existe una inmersión $g : \mathcal{C} \to Z$ tal que $P = g^{-1}(X)$.*

Utilizando el resultado anterior podemos demostrar lo siguiente:

2.2.15 Lema. *Sea Γ una clase de conjuntos tal que $\mathbf{\Sigma}^0_2 \cup \mathbf{\Pi}^0_2 \subseteq \Gamma$, cerrada bajo preimágenes continuas y uniones e intersecciones finitas. Si Z es un espacio polaco, X es un subconjunto cerrado de Z y X es Γ-duro, entonces para cada $P \in \Gamma(\mathcal{C})$ existe F un subconjunto cerrado de X tal que F es homeomorfo a P.*

Demostración. Sea $P \in \Gamma(\mathcal{C})$. Por el Lema 2.2.14, existe una inmersión $g : \mathcal{C} \to Z$ tal que $P = g^{-1}(X)$. Debido a que g es continua y a que X es cerrado en Z, obtenemos que P es cerrado en $\mathcal{C}$. Como $g : \mathcal{C} \to g(\mathcal{C})$ es un homeomorfismo, $g(P)$ es cerrado en $g(\mathcal{C})$. Por otra parte, debido a que $\mathcal{C}$ es un espacio compacto y a que Z es un espacio Hausdorff, sucede que $g : \mathcal{C} \to Z$ es una función cerrada. Así, $g(\mathcal{C})$ es cerrado en Z. Por lo tanto $g(P)$ es cerrado en Z. El hecho de que $g(P) = g(g^{-1}(X)) \subseteq X$ implica que $g(P) = g(P) \cap X$. Por lo tanto $g(P)$ es cerrado en X. Finalmente, como P es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}$ y $g : \mathcal{C} \to g(\mathcal{C})$ es un homeomorfismo, sucede que $g \restriction_P : P \to g(P)$ es también un homeomorfismo. $\square$

2.2.16 Teorema. *(a) Si X es un espacio $\mathbf{\Pi}^1_1$-completo ó bien $\mathbf{\Pi}^1_2$-completo, entonces X se condensa sobre $I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$.*

(b) Si X es un espacio $\mathbf{\Pi}^1_n$-completo con $n \geq 3$, asumiendo el Axioma de Determinancia Proyectiva podemos concluir que X se condensa sobre $I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Haremos la construcción de la condensación de X sobre $I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$ para ambos casos (inciso (a) e inciso (b)), haciendo énfasis en la aplicación del Axioma de Determinancia Proyectiva en el momento justo en que lo hagamos. Fijemos $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. El Lema 2.2.13 y el hecho de que $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$ garantizan la existencia de un conjunto $Y \subseteq \mathcal{C}$ que es $\mathbf{\Pi}^1_n$-completo.

Afirmación 1: Existe una inmersión cerrada $i : \mathbb{N} \times Y \to X$.

Demostración de la afirmación: Sabemos que el producto de una cantidad a lo más numerable de espacios polacos es un espacio polaco [14, Proposición 3.3]. Recuerde que un espacio topológico es *cero-dimensional* si es Hausdorff y tiene una base formada por conjuntos cerrado-abiertos. El Corolario A.1.3 establece que el producto de una cantidad numerable de espacios discretos es un espacio cero dimensional. Por lo tanto, $\mathbb{N} \times \mathcal{C}$ es un espacio polaco y cero dimensional. Utilizando el Teorema A.4.10 obtenemos que $\mathbb{N} \times \mathcal{C}$ es homemomorfo a un subespacio G_δ de $\mathcal{C}$. Por esta razón podemos asumir que $\mathbb{N} \times \mathcal{C}$ es un subespacio de $\mathcal{C}$.

Debido a que la clase $\mathbf{\Pi}^1_n$ es cerrada bajo imágenes homeomorfas y uniones numerables (Proposición 2.2.2) obtenemos que $\mathbb{N} \times Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}(\{k\} \times Y) \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C})$ (recuerde que $\mathbb{N} \times Y \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$).

Como X es metrizable y separable, sucede que X es homeomorfo a un subespacio del Cubo de Hilbert $I^{\mathbb{N}}$ [14, Teorema 4.14]. Utilizando el Lema 2.2.14 y el hecho de que X es $\mathbf{\Pi}^1_n$-completo, obtenemos que existe una inmersión $g : \mathcal{C} \to I^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathbb{N} \times Y = g^{-1}(X)$. Así, $g(\mathbb{N} \times Y) = g(g^{-1}(X)) \subseteq X$. Definimos $i = g \restriction_{\mathbb{N}\times Y}: \mathbb{N} \times Y \to X$. Como g es continua e inyectiva, sucede que $i : \mathbb{N} \times Y \to i(\mathbb{N} \times Y)$ es biyectiva y continua. Así, para demostrar que $i : \mathbb{N} \times Y \to i(\mathbb{N} \times Y)$ es un homeomorfismo sólo falta verificar que $i : \mathbb{N} \times Y \to i(\mathbb{N} \times Y)$ es una función cerrada. Con este objetivo tomamos W un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}$. Por la inyectividad de g:

$$i(W \cap (\mathbb{N} \times Y)) = g(W) \cap g(\mathbb{N} \times Y) = g(W) \cap i(\mathbb{N} \times Y).$$

Como $\mathcal{C}$ es un espacio compacto y $I^{\mathbb{N}}$ es un espacio Hausdorff, sucede que $g : \mathcal{C} \to I^{\mathbb{N}}$ es una función cerrada. Por lo tanto $g(W)$ es cerrado en $I^{\mathbb{N}}$ y en consecuencia $g(W) \cap i(\mathbb{N} \times Y)$ es cerrado en $i(\mathbb{N} \times Y)$. Esto demuestra que $i : \mathbb{N} \times Y \to X$ es una inmersión.

Ahora comprobaremos que $i : \mathbb{N} \times Y \to X$ es una función cerrada. Para esto verificaremos que $i(\mathbb{N}\times Y)$ es un subespacio cerrado de X. Basta analizar lo que sucede cuando $i(\mathbb{N} \times Y) \subsetneqq X$. Tomemos $x \in X \setminus i(\mathbb{N} \times Y)$. Observe que no es posible que $x \in g(\mathcal{C})$. En efecto: si $x \in g(\mathcal{C})$, entonces $x = g(s)$, para un único $s \in \mathcal{C}$. Así, $s \in g^{-1}(X) = \mathbb{N} \times Y$. Por lo tanto $x \in i(\mathbb{N} \times Y)$, lo que contradice la elección de x. De esta forma,

$$x \in X \setminus (i(\mathbb{N} \times Y) \cup g(\mathcal{C})) = X \setminus g(\mathcal{C}).$$

Como $g : \mathcal{C} \to I^{\mathbb{N}}$ es una función cerrada, $g(\mathcal{C})$ es cerrado en $I^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto $X \setminus g(\mathcal{C})$ es una vecindad del punto x en el espacio X, contenida en $X \setminus i(\mathbb{N} \times Y)$. Esto demuestra que $i(\mathbb{N} \times Y)$ es cerrado en X.

De esta forma, si F es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}$, entonces:

$$i(F \cap (\mathbb{N} \times Y)) = g(F \cap (\mathbb{N} \times Y)) = g(F) \cap g(\mathbb{N} \times Y) = g(F) \cap i(\mathbb{N} \times Y).$$

Por lo tanto $i : \mathbb{N} \times Y \to X$ es una función cerrada. ⊠

Utilizando la inmersión cerrada $i : \mathbb{N} \times Y \to X$ de la Afirmación 1, definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $D_k = i(\{k\} \times Y)$.

Afirmación 2: La colección $\{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una familia discreta de subconjuntos cerrados de X. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$, D_k es un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_n$-completo.

Demostración de la afirmación: Note que como $i : \mathbb{N}\times Y \to X$ es una función cerrada, cada D_k es un subconjunto cerrado de X. Veamos que $\{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una familia discreta en X. Para esto elegimos $x \in X$.

Utilizando que $i(\mathbb{N}\times Y)$ es un subconjunto cerrado de X, obtenemos que si $x \in X \setminus i(\mathbb{N} \times Y)$, entonces $X \setminus i(\mathbb{N} \times Y)$ es una vecindad de x que no intersecta a ningún elemento de la familia $\{D_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Por otra parte, si $x \in i(\mathbb{N} \times Y) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} i(\{k\} \times Y)$, entonces existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in D_k$. Como $i : \mathbb{N} \times Y \to i(\mathbb{N} \times Y)$ es un homeomorfismo, sucede que D_k es abierto en $i(\mathbb{N}\times Y)$. Así, existe $U \in \mathcal{T}^*(X)$ tal que $D_k = U \cap i(\mathbb{N} \times Y)$. Veamos que U sólo intersecta a un elemento de la familia $\{D_k : k \in \mathbb{N}\}$. Tomemos $j \in \mathbb{N} \setminus \{k\}$. Es cierto que $U \cap D_j \subseteq U \cap i(\mathbb{N} \times Y) = D_k$. Por lo tanto, si $U \cap D_j \neq \emptyset$, entonces $D_j \cap D_k \neq \emptyset$, lo que es una contradicción (por la inyectividad de i, si j y k son elementos distintos de $\mathbb{N}$, entonces $D_j \cap D_k = \emptyset$).

Ahora veremos que para todo $k \in \mathbb{N}$, D_k es un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_n$-completo. Sea $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathbf{\Pi}^1_n$ es cerrada bajo imágenes homeomorfas (Proposición 2.2.2), el hecho de que $Y \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C})$ implica $D_k = i(\{k\} \times Y) \in \mathbf{\Pi}^1_n(X)$. ⊠

Recuerde que, dado l un elemento fijo de $\mathbb{N}$, denotamos mediante C_l al conjunto de sucesiones en I que se estacionan en $\frac{1}{l+1}$. Es decir,

$$C_l = \{x = (x_n) \in I^{\mathbb{N}} : \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = \tfrac{1}{l+1} \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Definamos ahora para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k = I^{\mathbb{N}} \times \left(I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>k} C_l\right)$.

Afirmación 3: Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $B_{k+1} = B_k \cup (I^{\mathbb{N}} \times C_{k+1})$.

Demostración de la afirmación: Sea $k \in \mathbb{N}$. Como los elementos de la familia $\{C_l : l \in \mathbb{N}\}$ son ajenos dos a dos, sucede que $C_{k+1} \subseteq I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>k+1} C_l$. Por lo tanto $I^{\mathbb{N}} \times C_{k+1} \subseteq I^{\mathbb{N}} \times \left(I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>k+1} C_l\right) = B_{k+1}$. Además $B_k \subseteq B_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto dos hechos implican que $B_k \cup (I^{\mathbb{N}} \times C_{k+1}) \subseteq B_{k+1}$.

Ahora elegimos $(x, y) \in B_{k+1} = I^{\mathbb{N}} \times \left(I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>k+1} C_l\right)$. Observe que si $y \in C_{k+1}$, entonces $(x, y) \in I^{\mathbb{N}} \times C_{k+1}$. Por otra parte, si $y \in I^{\mathbb{N}} \setminus C_{k+1}$, entonces $y \in I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>k} C_l$ y en consecuencia $(x, y) \in B_k$. ⊠

Afirmación 4: $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$.

Demostración de la afirmación: Basta verificar que $I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$. Sea $(x, y) \in I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$. Si y no es una sucesión estacionaria, entonces $y \in I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>0} C_l = \bigcap_{l>0}(I^{\mathbb{N}} \setminus C_l)$. Por lo tanto $(x, y) \in B_0$. Ocurre lo mismo si y se estaciona en un número que no pertenece al conjunto $\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$.

Ahora supongamos que y se estaciona en algún elemento del conjunto $\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tal que y se estaciona en el número $\frac{1}{k}$. Utilizando que los elementos de la familia $\{C_l : l \in \mathbb{N}\}$ son ajenos dos a dos, obtenemos que: $y \in C_{k-1} \subseteq I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>k-1} C_l$, y en consecuencia $(x, y) \in B_k$. ⊠

Sea $\{F_k : k \in \mathbb{N}\}$ una cubierta cerrada de X, localmente finita y tal que $D_k \subseteq F_k \setminus \bigcup_{l<k} F_l$. Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \cup_{l \leq k} F_l$. Note que $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta cerrada de X y que $A_k \subseteq A_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Nuestro objetivo es construir, de forma recursiva, una colección $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ de funciones tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$:

(1) $f_k : A_k \to I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$ es continua e inyectiva,

(2) $f_k(A_k) \in \mathbf{\Pi}^1_n(I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}})$,

(3) f_{k+1} extiende a f_k,

(4) $B_k \subseteq f_{k+1}(A_{k+1}) \subseteq B_{k+1}$ y $f_0(A_0) \subseteq B_0$.

La unión de las funciones f_k será una condensación de X sobre $I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$.

Primer paso: Construyamos a la función f_0. Como X es metrizable y separable, existe una inmersión $h : X \to I^{\mathbb{N}}$. Como $A_0 = F_0 = D_0$ es cerrado en X, sucede que $h \restriction_{A_0}: A_0 \to I^{\mathbb{N}}$ es una inmersión. Sea $e : A_0 \to I^{\mathbb{N}}$ la función que a cada elemento de A_0 le asocia la sucesión constante $(1, 1, \ldots)$. De esta forma, el producto diagonal $f_0 = h \restriction_{A_0} \Delta e : A_0 \to I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$ es una inmersión (Teorema 2.2.3). Debido a que la clase $\mathbf{\Pi}^1_n$ es cerrada bajo imágenes homeomorfas y a que $A_0 \in \boldsymbol{B}(X) \subseteq \mathbf{\Pi}^1_n(X)$ (Proposición 2.2.2 y Teorema A.5.5), obtenemos que $f_0(A_0) \in \mathbf{\Pi}^1_n(I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}})$. Además

$$(1, 1, \ldots) \in I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>0} C_l \;\Rightarrow\; f_0(A_0) \subseteq I^{\mathbb{N}} \times \big(I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>0} C_l\big) = B_0.$$

Por lo tanto, f cumple las condiciones (1)-(4).

Segundo paso: Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que hemos construido una función f_k que cumple las condiciones (1)-(4). Sabemos que para cada $l \in \mathbb{N}$, C_l es un subconjunto F_σ del producto $I^{\mathbb{N}}$ (Lema 2.2.9). Así $I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>k} C_l \in \boldsymbol{B}(I^{\mathbb{N}})$. Esto implica que

$$B_k = I^{\mathbb{N}} \times \big(I^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{l>k} C_l\big) \in \boldsymbol{B}(I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}) \subseteq \mathbf{\Delta}^1_1(I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_n(I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}).$$

Además, como la función f_k satisface la condición (2), sucede que $(I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}) \setminus f_k(A_k) \in \mathbf{\Sigma}^1_n(I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}})$. Por lo tanto $B_k \setminus f_k(A_k) \in \mathbf{\Sigma}^1_n(I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}})$.

Caso (a): Si X es un espacio $\mathbf{\Pi}^1_1$-completo ó $\mathbf{\Pi}^1_2$-completo, utilizando el Teorema 2.2.8 podemos concluir que existe $P \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{C})$ (ó $P \in \mathbf{\Pi}^1_2(\mathcal{C})$) y una condensación $g : P \to B_k \setminus f_k(A_k)$.

Caso (b): Si X es un espacio $\mathbf{\Pi}^1_n$-completo con $n \geq 3$, aplicando el Teorema 2.2.7 (recuerde que en este caso asumimos el Axioma de Determinancia Proyectiva), podemos concluir que existe $P \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C})$ y una condensación $g : P \to B_k \setminus f_k(A_k)$.

Utilizando el hecho de que D_{k+1} es un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_n$-completo (Afirmación 2) y el Lema 2.2.15, obtenemos que existe F un subconjunto cerrado de D_{k+1} que es homeomorfo a P. Recuerde que F_{k+1} y D_{k+1} son subespacios cerrados de X y que $D_{k+1} \subseteq F_{k+1}$. Esto implica que D_{k+1} es un subespacio cerrado de F_{k+1}. Así, podemos considerar a P como un subespacio cerrado de F_{k+1}. En esta parte de la demostración utilizaremos el Lema 2.2.10 para obtener una extensión adecuada de la función f_k. Debemos comprobar que se cumplen todas las condiciones para aplicar dicho Lema. Note que:

- $A_{k+1} = \cup_{l \leq k+1} F_l \in \boldsymbol{B}(X) \subseteq \mathbf{\Pi}^1_n(X)$,
- $P \subseteq D_{k+1} \subseteq F_{k+1} \setminus \bigcup_{l<k+1} F_l = F_{k+1} \setminus A_k \Rightarrow P \cap A_k = \emptyset$,
- $P \cup A_k$ es un subconjunto cerrado de A_{k+1},
- $g(P) \cup f_k(A_k) = B_k \subseteq I^{\mathbb{N}} \times (I^{\mathbb{N}} \setminus C_{k+1})$ (recuerde que $g : P \to B_k \setminus f_k(A_k)$ es una condensación),
- $g(P) \cap f_k(A_k) = \emptyset$,
- la función $f_k' = g \cup f_k : P \cup A_k \to I^{\mathbb{N}} \times (I^{\mathbb{N}} \setminus C_{k+1})$ es continua, inyectiva y su imagen es un conjunto de Borel.

Aplicando el Lema 2.2.10 a la función f_k' (tomando $m = k+1$) obtenemos $f_{k+1} : A_{k+1} \to I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$ una extensión continua e inyectiva de f_k'. De esta forma, f_{k+1} cumple las condiciones (1)-(3). Veamos que también cumple la condición (4):

$$f_k' = f_{k+1} \restriction_{P \cup A_k} \Rightarrow \; B_k = f_{k+1}(P \cup A_k) = f_k'(P \cup A_k) \subseteq f_{k+1}(A_{k+1}).$$

Por otra parte, el Lema 2.2.10 nos garantiza que $f_{k+1}(A_{k+1} \setminus (P \cup A_k)) \subseteq (I^{\mathbb{N}} \times C_{k+1})$. Además, $f_{k+1}(P \cup A_k) = B_k$. Utilizando la Afirmación 3 obtenemos que:

$$\begin{aligned} f_{k+1}(A_{k+1}) &= f_{k+1}(A_{k+1} \setminus (P \cup A_k)) \cup f_{k+1}(P \cup A_k) \\ &\subseteq (I^{\mathbb{N}} \times C_{k+1}) \cup B_k = B_{k+1}. \end{aligned}$$

AFIRMACIÓN 5: La función $h = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ es una condensación de X sobre $I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$.

Demostración de la Afirmación: Veamos que el dominio de h es el espacio X:

$$dom(h) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} dom(f_k) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = X.$$

La sobreyectividad de h es consecuencia de la condición (4) y de la afirmación 4. En efecto:

$$\begin{aligned} I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}} &= f_0(A_0) \cup \big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\big) \\ &\subseteq f_0(A_0) \cup \big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_{k+1}(A_{k+1})\big) = h(X). \end{aligned}$$

Finalmente, la inyectividad de h se debe a que $A_k \subseteq A_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, y a que cada función f_k es inyectiva. $\square$

Los siguientes resultados fueron establecidos por Andretta y Marcone en [1]. Dichos resultados son una herramienta fundamental para demostrar el Teorema de Michalewski.

2.2.17 Teorema. *Si X es analítico, X no es σ-compacto y $D \subseteq X$ es denso y numerable, entonces $C_p(D|X)$ es un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$-completo.*

2.2.18 Teorema. (ADP) *Si X es un conjunto proyectivo, X no es σ-compacto, $D \subseteq X$ es denso numerable y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ es el mínimo natural tal que $X \in \mathbf{\Sigma}^1_n$, entonces $C_p(D|X)$ y $C_p(X)$ son conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n$-completos.*

Con todo lo anterior, estamos ya en posición de demostrar el resultado de H. Michalewski.

2.2.19 Teorema (Michalewski)**.** *Si X es un subconjunto proyectivo y no σ-compacto de un espacio polaco, entonces $C_p(X)$ se condensa sobre $I^{\mathbb{N}}$. A menos de que X sea analítico, asumimos el Axioma de Determinancia Proyectiva.*

Demostración. Sea $X \in \mathbf{P} = \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \mathbf{\Sigma}^1_m$. Definimos

$$n = \min\{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \, : \, X \in \mathbf{\Sigma}^1_m\}.$$

Si $n = 1$, entonces X es analítico, mientras que si $n > 1$, entonces $X \in \mathbf{\Sigma}^1_n \setminus \mathbf{\Sigma}^1_{n-1}$. Sea D un subconjunto denso y numerable de X. Utilizando el Teorema 2.2.17 para X analítico ó el Teorema 2.2.18 para X proyectivo no analítico, obtenemos que $C_p(D|X)$ es un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_n$-completo. Por el Teorema 2.2.16, $C_p(D|X)$ se condensa sobre $I^{\mathbb{N}}$. Finalmente notamos que el mapeo restricción $\pi_D : C_p(X) \to C_p(D|X)$ es una condensación de $C_p(X)$ sobre $C_p(D|X)$ (Proposición 1.3.2). $\square$

2.2.20 Teorema (Michalewski)**.** *Si X es un espacio analítico metrizable, entonces $C_p(X)$ admite una condensación sobre un espacio compacto.*

2.2.21 Teorema (Michalewski)**.** *$C_p(\mathcal{N})$ admite una topología débil compacta.*

2.3. El ejemplo de W. Marciszewski.

En esta sección presentamos un ejemplo de un espacio X metrizable y separable tal que $C_p(X)$ no se condensa sobre ningún espacio σ-compacto. Esto demuestra que no es posible generalizar el Teorema 2.2.20 para todos los espacios metrizables separables.

Recuerde que el preórden $\leq^*$ en $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se define como

$$f \leq^* g \text{ si } f(n) \leq g(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ salvo una cantidad finita.}$$

Un conjunto $D \subseteq \mathcal{N}$ es llamado *cofinal* en $\langle \mathcal{N}, \leq^* \rangle$ si para cada $f \in \mathcal{N}$ existe $g \in D$ tal que $f \leq^* g$. Los subconjuntos de $\mathcal{N}$ que son cofinales en $\langle \mathcal{N}, \leq^* \rangle$ son llamados *dominantes*. Así, se define el número cardinal

$$\mathfrak{d} = \min\{|D| \, : \, D \text{ es un subconjunto dominante de } \langle \mathcal{N}, \leq^* \rangle\}.$$

El cardinal $\mathfrak{d}$ es llamado el *número de dominación*. Asumiremos que la mínima cardinalidad de un subconjunto dominante en $\mathcal{N}$ es 2^ω, esto es, asumiremos que $\mathfrak{d} = 2^\omega$. Esto significa que el espacio de Baire $\mathcal{N}$ no puede ser cubierto con menos que 2^ω subconjuntos compactos [10, Teorema 8.2]. No será difícil para el lector verificar que esto es equivalente a que la intersección de menos que 2^ω subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contienen a $\mathbb{Q}$ tiene cardinalidad

2^ω. Es sabido que el hecho de que $\mathfrak{d} = 2^\omega$ se sigue de la Hipótesis del Continuo o de el Axioma de Martin y es independiente de los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos.

Los resultados que exponemos a continuación serán útiles para nuestros propósitos.

2.3.1 Proposición. *Todo espacio Y que es una unión numerable de compactos metrizables se condensa sobre un espacio metrizable σ-compacto.*

Demostración. Sea $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$, donde K_n es un subespacio compacto metrizable de Y, para cada $n \in \mathbb{N}$. Debido a que la unión de dos compactos metrizables es un compacto metrizable, podemos asumir que $K_n \subseteq K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Como K_n es segundo numerable, existe una inmersión $i_n : K_n \to I^{\mathbb{N}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Extensión de Tietze [14, Teorema 1.3] podemos fijar $f_n : Y \to I^{\mathbb{N}}$ una extensión continua de i_n. Entonces la función $F = \Delta_{n\in\mathbb{N}} f_n : Y \to (I^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ es continua. Esta función es inyectiva debido a que cualquier par de elementos de Y pertenecen a algún K_n y f_n es inyectiva en K_n. Por lo tanto, $F(Y)$ es un subespacio σ-compacto del espacio metrizable $(I^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ Claramente $F : Y \to F(Y)$ es una condensación. $\square$

2.3.2 Corolario. *Sea X un espacio metrizable y separable. Si $C_p(X)$ se condensa sobre un espacio σ-compacto, entonces existe una condensación de $C_p(X)$ sobre un espacio metrizable σ-compacto.*

Demostración. Sean $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de espacios compactos y $\varphi : C_p(X) \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ una condensación. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $A_n = \varphi^{-1}(K_n) \subseteq C_p(X)$ y consideramos $\varphi\restriction_{A_n}: A_n \to K_n$. Veamos que K_n es metrizable, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como X es metrizable y separable, $d(X) = nw(X) = \omega$. Por el Teorema 1.3.6, $nw(X) = nw(C_p(X))$. Por la monotonía de la función cardinal peso de red, obtenemos que $nw(A_n) = \omega$. Debido a que el peso de red no se incrementa por imágenes continuas concluimos que $nw(K_n) = \omega$. La compacidad de K_n implica $w(K_n) = nw(K_n) = \omega$. Por lo tanto K_n es homeomorfo a un subespacio de $I^{\mathbb{N}}$ y en consecuencia K_n es metrizable. Finalmente, por la Proposición 2.3.1, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ se condensa sobre un espacio metrizable σ-compacto. $\square$

2.3.3 Proposición. *Sea D un subconjunto denso de un espacio metrizable X. Si $D \subseteq Y \subsetneq X$, entonces $C_p(D|X) \subsetneq C_p(D|Y)$.*

Demostración. La inclusión $C_p(D|X) \subseteq C_p(D|Y)$ es inmediata. Fijemos una métrica d compatible con la topología de X y $z \in X \setminus Y$. Así, $d(y,\, z) \neq 0$, para todo $y \in Y$. Definimos la función $f : Y \to \mathbb{R}$ mediante $f(y) = \frac{1}{d(y,\, z)}$. Como la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es continua, sucede que f también es continua. Esto implica que $f \restriction_D \in C_p(D|Y)$. Veamos que $f \restriction_D \notin C_p(D|X)$. Supongamos que existe $g \in C_p(X)$ tal que $f \restriction_D = g \restriction_D$. Como D es un subconjunto denso de X, existe $(x_n) \subseteq D$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0$. Por la continuidad de la función g obtenemos que $\lim_{n\to\infty} f \restriction_D (x_n) = \lim_{n\to\infty} g \restriction_D (x_n) = g(z) \in \mathbb{R}$. Por otra parte, $\lim_{n\to\infty}(f \restriction_D (x_n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d(x_n,\, z)} = \infty$, lo que es una contradicción. $\square$

Comenzamos ahora con la construcción de un espacio metrizable separable X tal que $C_p(X)$ no admite una topología débil compacta.

Supongamos que $\mathfrak{d} = 2^\omega$ y consideramos la siguiente familia de funciones:

$$\mathcal{F} = \{\varphi : B \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ B \in \boldsymbol{B}(\mathbb{R}^D),\ \mathbb{Q} \subseteq D \subseteq \mathbb{R},\ |D| \leq \omega,\ \varphi \text{ es continua}\}.$$

Debido a que el cardinal de esta familia de funciones es igual a 2^ω, podemos enumerarla de la siguiente forma:

$$\mathcal{F} = \{\varphi_\alpha : B_\alpha \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \alpha < 2^\omega\}, \text{ donde } B_\alpha \text{ está contenido en } \mathbb{R}^{D_\alpha}.$$

Mediante recursión transfinita construiremos, para cada $\alpha < 2^\omega$:

- puntos $x_\alpha,\, y_\alpha \in \mathbb{R}$,
- subconjuntos $A_\alpha \in G_\delta(\mathbb{R})$ que contengan a $\mathbb{Q}$,
- funciones continuas $f_\alpha,\, g_\alpha : A_\alpha \to \mathbb{R}$,

que satisfagan las siguientes condiciones (donde $X_\alpha = \mathbb{Q} \cup \{x_\beta \ : \ \beta < \alpha\}$):

(i) $x_\alpha \neq x_\beta$, para $\beta < \alpha$,

(ii) $(X_\alpha \cup \{x_\alpha\}) \cap \{y_\beta \ : \ \beta \leq \alpha\} = \emptyset$,

(iii) $x_\alpha \in \bigcap_{\beta \leq \alpha} A_\beta$,

(iv) si $D_\alpha \nsubseteq X_\alpha$, entonces $y_\alpha \in D_\alpha$,

(v) si $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ y $C_p(D_\alpha|X_\alpha) \nsubseteq B_\alpha$, entonces $X_\alpha \subseteq A_\alpha$ y $f_\alpha \restriction_{D_\alpha} \in \mathbb{R}^{D_\alpha} \setminus B_\alpha$,

(vi) si $D_\alpha \subseteq X_\alpha$, $C_p(D_\alpha|X_\alpha) \subseteq B_\alpha$ y $\varphi_\alpha \restriction_{C_p(D_\alpha|X_\alpha)}$ no es inyectiva, entonces $X_\alpha \subseteq A_\alpha$, $f_\alpha \neq g_\alpha$ y $\varphi_\alpha(f_\alpha \restriction_{D_\alpha}) = \varphi_\alpha(g_\alpha \restriction_{D_\alpha})$.

Es muy importante señalar que las condiciones (iv)-(vi) son mutuamente excluyentes. Durante la construcción, en diversas ocasiones requerimos obtener una extensión continua de una función dada. Esto lo lograremos utilizando el Teorema de Lavrentiev, que a continuación enunciamos. El lector encontrará en el Apéndice A una demostración de este Teorema.

2.3.4 Teorema (Lavrentiev)**.** *Sean Y metrizable, Z completamente metrizable, $H \subseteq Y$ y $\lambda : H \to Z$ una función continua. Entonces existen G un conjunto G_δ tal que $H \subseteq G \subseteq cl(H)$ y una extensión continua $\gamma : G \to Z$ de λ.*

Primer paso de la construcción: $\alpha = 0$. En este paso de la construcción sucede que $X_0 = \mathbb{Q} \cup \{x_\beta \ : \ \beta < 0\} = \mathbb{Q}$ y $\bigcap_{\beta \leq 0} A_\beta = A_0$. Para poder seleccionar a los puntos x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, a los conjuntos $A_0 \in G_\delta(\mathbb{R})$ que contengan a $\mathbb{Q}$ y a las funciones continuas f_0, $g_0 : A_0 \to \mathbb{R}$ que cumplan las condiciones requeridas, consideraremos tres casos mutuamente excluyentes, estos casos corresponden a las condiciones (iv)-(vi).

Caso 1: $D_0 \nsubseteq X_0 = \mathbb{Q}$. Tomamos $y_0 \in D_0 \setminus \mathbb{Q}$ y definimos $A_0 = \mathbb{R}$ y $f_0 = g_0 \equiv 0$. Finalmente elegimos $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{y_0\}$. Es claro que los objetos que hemos elegido cumplen las condiciones (i)-(iv).

Caso 2: $D_0 \subseteq X_0 = \mathbb{Q}$ y $C_p(D_0|X_0) \nsubseteq B_0$. Por definición de la familia $\mathcal{F}$, sucede que $\mathbb{Q} \subseteq D_0$. Por lo tanto $\mathbb{Q} \subseteq D_0 \subseteq X_0 = \mathbb{Q}$. Esto implica que $D_0 = \mathbb{Q}$ y $C_p(D_0|X_0) = C_p(\mathbb{Q})$. Como estamos suponiendo que $C_p(D_0|X_0) = C_p(\mathbb{Q}) \nsubseteq B_0$, existe una función continua $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tal que $f \notin B_0$. Por el Teorema de Lavrentiev (Teorema 2.3.4), existe un conjunto $A_0 \in G_\delta(\mathbb{R})$ tal que $\mathbb{Q} \subseteq A_0$ y una función continua $f_0 : A_0 \to \mathbb{R}$ tal que $f = f_0 \restriction_{\mathbb{Q}}$. Definimos $g_0 = f_0$. Finalmente escogemos $x_0 \in A_0$, $y_0 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{x_0\})$. Hacemos notar que $f_0 \restriction_{D_0} = f_0 \restriction_{\mathbb{Q}} = f \in \mathbb{R}^{D_0} \setminus B_0$. De esta forma, los puntos x_0, y_0, el conjunto A_0 y las funciones continuas f_0, g_0 cumplen las condiciones (i), (ii), (iii) y (v).

Caso 3: $D_0 \subseteq X_0 = \mathbb{Q}$ y $C_p(D_0|X_0) \subseteq B_0$. En este caso también sucede que $D_0 = \mathbb{Q}$ y $C_p(D_0|X_0) = C_p(\mathbb{Q})$. Además, debido a que φ_0 es una función de $B_0 \subseteq \mathbb{R}^{D_0}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y a que estamos suponiendo que $C_p(\mathbb{Q}) \subseteq B_0$, tiene sentido considerar la restricción de φ_0 al conjunto $C_p(\mathbb{Q})$. Esto nos lleva a analizar los siguientes dos subcasos.

Subcaso A: $\varphi_0 \restriction_{C_p(\mathbb{Q})}$ no es inyectiva. Tomemos $f,\ g \in C_p(\mathbb{Q})$ tales que $f \neq g$ y $\varphi_0(f) = \varphi_0(g)$. Por el Teorema de Lavrentiev (Teorema 2.3.4), existen conjuntos $B,\ C \in G_\delta(\mathbb{R})$ tales que $\mathbb{Q} \subseteq B,\ \mathbb{Q} \subseteq C$ y funciones continuas $\tilde{f} : B \to \mathbb{R},\ \tilde{g} : C \to \mathbb{R}$ tales que $\tilde{f} \restriction_{\mathbb{Q}} = f$ y $\tilde{g} \restriction_{\mathbb{Q}} = g$. Definimos $A_0 = B \cap C$, $f_0 = \tilde{f} \restriction_{A_0}$ y $g_0 = \tilde{g} \restriction_{A_0}$. Note que $A_0 \in G_\delta(\mathbb{R})$ porque es la intersección de dos elementos de elementos de esta clase. Además $X_0 = \mathbb{Q} \subseteq A_0$. Como $\mathbb{Q} \subseteq A_0$ y $f \neq g$, obtenemos que $f_0 \neq g_0$. Además

$$\varphi_0(f_0 \restriction_{D_0}) = \varphi_0(f_0 \restriction_{\mathbb{Q}}) = \varphi_0(\tilde{f} \restriction_{\mathbb{Q}}) = \varphi_0(f).$$

Análogamente $\varphi_0(g) = \varphi_0(g_0 \restriction_{D_0})$. Por lo tanto $\varphi_0(f_0 \restriction_{D_0}) = \varphi_0(g_0 \restriction_{D_0})$. Esto muestra que el conjunto A_0 y las funciones f_0, g_0 cumplen la condición (vi). Finalmente elegimos $x_0 \in A_0$, $y_0 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{x_0\})$.

Subcaso B: $\varphi_0 \restriction_{C_p(\mathbb{Q})}$ es inyectiva. Este caso es sencillo: definimos $A_0 = \mathbb{R}$ y $f_0 = g_0 \equiv 0$. Escogemos $x_0 \in A_0$ y $y_0 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{x_0\})$.

Segundo paso de la construcción: Supongamos que para cada $\beta < \alpha < 2^\omega$ hemos escogido puntos $x_\beta,\ y_\beta \in \mathbb{R}$, un conjunto $A_\beta \in G_\delta(\mathbb{R})$ que contiene a $\mathbb{Q}$ y funciones continuas $f_\beta,\ g_\beta : A_\beta \to \mathbb{R}$. Analizaremos los cuatro casos expuestos anteriormente.

Caso 1: $D_\alpha \nsubseteq X_\alpha$. Sea $y_\alpha \in D_\alpha \setminus X_\alpha$. Definimos $A_\alpha = \mathbb{R}$ y $f_\alpha = g_\alpha \equiv 0$. Debido a que asumimos que la intersección de menos que 2^ω subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contienen a $\mathbb{Q}$ tiene cardinalidad 2^ω, sucede que $\bigcap_{\beta \leq \alpha} A_\beta \nsubseteq \{y_\alpha\} \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$. Elegimos

$$x_\alpha \in \bigcap_{\beta \leq \alpha} A_\beta \setminus \big(\{y_\alpha\} \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}\big).$$

El hecho de que $y_\alpha \notin X_\alpha$ implica lo siguiente:

$$\begin{aligned}(X_\alpha \cup \{x_\alpha\}) \cap \{y_\beta : \beta \leq \alpha\} &= (X_\alpha \cup \{x_\alpha\}) \cap \{y_\beta : \beta < \alpha\} \\ &= X_\alpha \cap \{y_\beta : \beta < \alpha\}.\end{aligned}$$

Verifiquemos que $X_\alpha \cap \{y_\beta : \beta < \alpha\} = \emptyset$: supongamos que existe $z \in X_\alpha \cap \{y_\beta : \beta < \alpha\}$. Así $z = y_{\beta_0}$, para algún $\beta_0 < \alpha$. Dado que $z \in X_\alpha$, tenemos dos posibilidades: $z \in \mathbb{Q}$, o bien, $z \in \{x_\beta \ : \ \beta < \alpha\}$. Si $z \in \mathbb{Q}$, entonces $z \in X_{\beta_0} \subseteq (X_{\beta_0} \cup \{x_{\beta_0}\})$. Por lo tanto $(X_{\beta_0} \cup \{x_{\beta_0}\}) \cap \{y_\gamma \ : \ \gamma \leq \beta_0\} \neq \emptyset$, lo que contradice la condición (ii) y la hipótesis de inducción.

Por otra parte, si $z \in \{x_\beta \ : \ \beta < \alpha\}$, entonces $z = x_{\beta_1}$, para algún $\beta_1 < \alpha$. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que $\beta_0 \leq \beta_1$. Por lo tanto $z \in (X_{\beta_1} \cup \{x_{\beta_1}\}) \cap \{y_\gamma \ : \ \gamma \leq \beta_1\}$, lo que contradice la condición (ii) y la hipótesis de inducción. Esto muestra que los objetos que hemos elegido cumplen las condiciones (i)-(iv).

Caso 2: $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ y $C_p(D_\alpha|X_\alpha) \nsubseteq B_\alpha$. Sea $f : X_\alpha \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f \restriction_{D_\alpha} \notin B_\alpha$. Por el Teorema de Lavrentiev (Teorema 2.3.4), existen un conjunto $A_\alpha \in G_\delta(\mathbb{R})$ tal que $X_\alpha \subseteq A_\alpha$ y una función continua $f_\alpha : A_\alpha \to \mathbb{R}$ tal que $f_\alpha \restriction_{X_\alpha} = f$. Definimos $g_\alpha = f_\alpha$. De esta forma, $f_\alpha \restriction_{D_\alpha} = f \restriction_{D_\alpha} \notin B_\alpha$. Esto muestra que el conjunto A_α y la función f_α cumplen la condición (v). Ahora elegiremos a los puntos x_α y y_α.

Note que $\mathbb{R} \nsubseteq X_\alpha$ ya que $|X_\alpha| = |\mathbb{Q} \cup \{x_\beta \ : \ \beta < \alpha\}| < |\mathbb{R}| = 2^\omega$. Elegimos $y_\alpha \in \mathbb{R} \setminus X_\alpha$ y

$$x_\alpha \in \bigcap_{\beta \leq \alpha} A_\beta \setminus \big(\{y_\alpha\} \cup \{x_\beta \ : \ \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta \ : \ \beta < \alpha\}\big).$$

Mediante un razonamiento similar al que hicimos en el Caso 1, en este paso de la construcción obtenemos que $(X_\alpha \cup \{x_\alpha\}) \cap \{y_\beta \ : \ \beta \leq \alpha\} = \emptyset$.

Caso 3: $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ y $C_p(D_\alpha|X_\alpha) \subseteq B_\alpha$.

Subcaso A: $\varphi_\alpha \restriction_{C_p(D_\alpha|X_\alpha)}$ no es inyectiva. Tomemos $f, \ g : X_\alpha \to \mathbb{R}$ continuas, tales que $f \restriction_{D_\alpha} \neq g \restriction_{D_\alpha}$ y $\varphi_\alpha(f \restriction_{D_\alpha}) = \varphi_\alpha(g \restriction_{D_\alpha})$. Utilizando el Teorema de Lavrentiev (Teorema 2.3.4) obtenemos que existen conjuntos B_α, $C_\alpha \in G_\delta(\mathbb{R})$ que contienen a X_α y funciones continuas $\widetilde{f_\alpha} : B_\alpha \to \mathbb{R}$ y $\widetilde{g_\alpha} : C_\alpha \to \mathbb{R}$ tales que $\widetilde{f_\alpha} \restriction_{X_\alpha} = f$ y $\widetilde{g_\alpha} \restriction_{X_\alpha} = g$. Definimos $A_\alpha = B_\alpha \cap C_\alpha$, $f_\alpha = \widetilde{f_\alpha} \restriction_{A_\alpha}$ y $g_\alpha = \widetilde{g_\alpha} \restriction_{A_\alpha}$. Note que f_α y g_α son extensiones continuas de f y g. Además $X_\alpha \subseteq A_\alpha$ y $A_\alpha \in G_\delta(\mathbb{R})$ porque es la intersección de dos elementos de elementos de esta clase. Como $D_\alpha \subseteq A_\alpha$ y $f \restriction_{D_\alpha} \neq g \restriction_{D_\alpha}$, obtenemos que $f_\alpha \neq g_\alpha$. Además:

$$\varphi_\alpha(f_\alpha \restriction_{D_\alpha}) = \varphi_\alpha(f \restriction_{D_\alpha}) = \varphi_\alpha(g \restriction_{D_\alpha}) = \varphi_\alpha(g_\alpha \restriction_{D_\alpha})$$

Esto muestra que el conjunto A_α y las funciones f_α, g_α cumplen la condición (vi). Elegimos a los puntos x_α, y_α como en el caso (2).

Subcaso B: $\varphi_\alpha \restriction_{C_p(D_\alpha|X_\alpha)}$ es inyectiva. Este caso es sencillo: definimos $A_\alpha = \mathbb{R}$ y $f_\alpha = g_\alpha \equiv 0$. Escogemos x_α y y_α como en el caso (2).

Para finalizar la construcción de X, definimos $X = \mathbb{Q} \cup \{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ y lo equipamos con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$. De esta forma, X es un espacio metrizable y separable. Veamos que $C_p(X)$ no se condensa sobre un espacio σ-compacto. Supongamos que existen un espacio σ-compacto S y $\psi : C_p(X) \to S$ una condensación. Por el Corolario 2.3.2 podemos asumir que S es un espacio metrizable. Como S es un espacio σ-compacto metrizable, S es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Así, podemos considerar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

En esta etapa de la demostración utilizaremos el siguiente resultado sobre factorización [3, Teorema 6]. Recordemos que para un subconjunto D de un espacio X, la función $\pi_D : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^D$ es la proyección canónica.

2.3.5 Proposición. *Sea E un subconjunto denso numerable de un espacio Z y sea $\psi : C_p(Z) \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ una función continua. Entonces existen un conjunto numerable $D \subseteq Z$ y una función continua $\vartheta : C_p(D|Z) \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tales que $E \subseteq D$ y $\psi = \vartheta \circ (\pi_D \restriction_{C_p(Z)})$.*

Regresando a la demostración de que $C_p(X)$ no admite condensaciones sobre espacios σ-compactos, note que la Proposición 2.3.5 implica la existencia de un conjunto numerable $D \subseteq X$ y una función continua $\vartheta : C_p(D|X) \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tales que $\mathbb{Q} \subseteq D$ y $\psi = \vartheta \circ (\pi_D \restriction_{C_p(X)})$. Por el Teorema de Lavrentiev (Teorema 2.3.4), existen un conjunto $G \in G_\delta(\mathbb{R}^D)$ que contiene a $C_p(D|X)$ y una función continua $\widetilde{\vartheta} : G \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\vartheta} \restriction_{C_p(D|X)} = \vartheta$. Definamos $B = \widetilde{\vartheta}^{-1}(S) \subseteq G$ y $\varphi = \widetilde{\vartheta} \restriction_B$. Debido a que S es un subespacio σ-compacto, sucede que $S \in F_\sigma(\mathbb{R}^\mathbb{N})$. Por la continuidad de $\widetilde{\vartheta}$, obtenemos que $B \in F_\sigma(\mathbb{R}^D) \subseteq \boldsymbol{B}(\mathbb{R}^D)$. Así, por definición de la familia $\mathcal{F}$, sucede que $\varphi \in \mathcal{F}$, es decir, $\varphi = \varphi_\alpha$, $B = B_\alpha$ y $D = D_\alpha$ para algún $\alpha < 2^\omega$.

Observe ahora que $C_p(D|X) \subseteq B$. En efecto: tomemos $f \in C_p(X)$. Como $\vartheta \restriction_{C_p(D|X)} = \vartheta$, sucede que $\widetilde{\vartheta}(f \restriction_D) = \vartheta(f \restriction_D)$. Además, como $\psi = \varphi \circ (\pi_D \restriction_{C_p(Z)})$, tenemos que $\vartheta(f \restriction_D) = \psi(f) \in S$. Por lo tanto $f \restriction_D \in \widetilde{\vartheta}^{-1}(S) = B$.

También es cierto que $\varphi(B) = S$ y $S \subseteq \varphi(C_p(D|X))$. En efecto: por definición de la función φ sucede que $\varphi(B) = \widetilde{\vartheta}(B)$. Además, por definición del conjunto B sucede que $\widetilde{\vartheta}(B) = \widetilde{\vartheta}(\widetilde{\vartheta}^{-1}(S)) \subseteq S$. Para demostrar la otra contención tomamos $z \in S$. Por la sobreyectividad de ψ, existe $f \in C_p(X)$

tal que $\psi(f) = z$. Entonces $\widetilde{\vartheta}(f \restriction_D) = \psi(f) \in S$. Por lo tanto $f \restriction_D \in \widetilde{\vartheta}^{-1}(S)$ y $z \in \widetilde{\vartheta}(\widetilde{\vartheta}^{-1}(S))$. Finalmente, debido a que $C_p(D|X) \subseteq B$, obtenemos que $z = \varphi(f \restriction_D)$.

Observe también que $\varphi \restriction_{C_p(D|X)}$ es inyectiva. En efecto: si $f,\ g \in C_p(X)$ son tales que $\varphi(f \restriction_D) = \varphi(g \restriction_D)$, entonces $\varphi(f \restriction_D) = \widetilde{\vartheta}(f \restriction_D) = \psi(f)$. Análogamente $\varphi(g \restriction_D) = \psi(g)$. Por la inyectividad de ψ obtenemos que $f = g$.

Teniendo en cuenta las observaciones que acabamos de hacer, analizaremos los cuatro casos considerados durante la construcción del espacio X.

Caso 1: $D_\alpha \nsubseteq X_\alpha$. Por la condición (iv): $y_\alpha \in D_\alpha$. Además, por la condición (ii): $y_\alpha \notin X$. Entonces $D_\alpha \nsubseteq X$, lo que contradice la elección de D_α.

Caso 2: $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ y $C_p(D_\alpha|X_\alpha) \nsubseteq B_\alpha$. Por la condición (v): $X_\alpha \subseteq A_\alpha$. La condición (iii) implica que $x_\beta \in A_\alpha$ para todo $\beta \geq \alpha$. Por lo tanto $X = X_\alpha \cup \{x_\beta \in A_\alpha : \beta \geq \alpha\} \subseteq A_\alpha$ y $f_\alpha \restriction_X \in C_p(X)$. Utilizando nuevamente la condición (v) obtenemos que $f_\alpha \restriction_{D_\alpha} \in C_p(D_\alpha|X) \setminus B_\alpha$, lo que contradice el hecho de que $C_p(D_\alpha|X) \subseteq B_\alpha$.

Caso 3: $D_\alpha \subseteq X_\alpha$, $C_p(D_\alpha|X_\alpha) \subseteq B_\alpha$.

Subcaso A: $\varphi_\alpha \restriction_{C_p(D_\alpha|X_\alpha)}$ no es inyectiva. Por la condición (vi): $X_\alpha \subseteq A_\alpha$. La condición (iii) implica que $x_\beta \in A_\alpha$ para todo $\beta \geq \alpha$. Por lo tanto $X = X_\alpha \cup \{x_\beta \in A_\alpha : \beta \geq \alpha\} \subseteq A_\alpha$. Así $f_\alpha \restriction_X$ y $g_\alpha \restriction_X$ son elementos de $C_p(X)$. Nuevamente por la condición (vi) es cierto que $\varphi(f_\alpha \restriction_{D_\alpha}) = \varphi(g_\alpha \restriction_{D_\alpha})$. Sin embargo $f_\alpha \restriction_D \neq g_\alpha \restriction_D$, lo que contradice el hecho de que $\varphi \restriction_{C_p(D_\alpha|X)}$ es inyectiva.

Subcaso B: $\varphi_\alpha \restriction_{C_p(D_\alpha|X_\alpha)}$ es inyectiva. La condición (i) implica que X_α es un subconjunto propio de X. Por la Proposición 2.3.3, $C_p(D_\alpha|X)$ está contenido propiamente en $C_p(D_\alpha|X_\alpha)$. Sea $h \in C_p(D_\alpha|X_\alpha) \setminus C_p(D_\alpha|X)$. De esta forma $\varphi(h) \in \varphi(C_p(D_\alpha|X_\alpha)) \subseteq \varphi(B_\alpha)$. Pero hemos visto antes que $\varphi(B_\alpha) = S$. Además $\varphi(h) \notin \varphi(C_p(D_\alpha|X))$ porque estamos asumiendo que φ es inyectiva en $C_p(D_\alpha|X_\alpha)$. Por lo tanto $S \setminus \varphi(C_p(D_\alpha|X)) \neq \emptyset$, lo que contradice el hecho de que $S \subseteq \varphi(C_p(D_\alpha|X))$.

Todo lo anterior nos permite concluir que bajo la hipótesis $\mathfrak{d} = 2^\omega$, el subespacio de la recta real $X = \mathbb{Q} \cup \{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ tiene la propiedad de que su espacio de funciones $C_p(X)$ no admite una topología débil σ-compacta (en particular, no admite topologías débiles compactas).

Capítulo 3

El teorema de V. V. Tkachuk.

3.1. Introducción.

En el capítulo anterior desarrollamos toda la teoría necesaria para demostrar el resultado de H. Michalewski que establece que si X es un espacio metrizable analítico entonces $C_p(X)$ sí admite una topología débil compacta. En [6], Arhangel'skii y Pavlov, estudiaron sistemáticamente cuándo el espacio $C_p(X)$ admite una topología compacta ó una topología σ-compacta. De manera particular, plantearon las preguntas siguientes (cf. problemas 29 y 30 en [6]):

- Sea A_τ la compactación de Alexandroff del espacio discreto de cardinalidad τ, donde $\tau > \omega$. ¿Existe una condensación de $C_p(A_\tau)$ sobre un espacio σ-compacto?

- Sea X un compacto de Corson (Eberlein) no metrizable. ¿Puede ser condensado $C_p(X)$ sobre un espacio σ-compacto?

La finalidad del presente capítulo es exponer el resultado de V. V. Tkachuk que establece que si X es un compacto de Corson no metrizable entonces $C_p(X)$ no admite una topología débil σ-compacta. Dicho resultado responde de manera negativa a las anteriores dos preguntas.

3.2. Imágenes de subespacios de espacios producto.

Consideremos una colección de espacios topológicos $\{Z_t : t \in T\}$, $Z = \prod_{t\in T} Z_t$ y $A \subseteq T$. Entonces $Z_A = \prod_{t\in A} Z_t$ es la A-*cara de* Z y $\pi_A : Z \to Z_A$ es la proyección natural definida mediante $\pi_A(f) = f \restriction_A$, para cada $f \in Z$.

Un conjunto $F \subseteq Z$ *depende de* $A \subseteq T$ si $\pi_A^{-1}\big(\pi_A(F)\big) = F$. Note que para cualquier $F \subseteq Z$ y cualquier $A \subseteq T$ sucede que $F \subseteq \pi_A^{-1}\big(\pi_A(F)\big)$. En efecto: si $x \in F$, entonces $\pi_A(x) \in \pi_A(F)$ y en consecuencia $x \in \pi_A^{-1}\big(\pi_A(F)\big)$.

Si F depende de un conjunto de cardinalidad $\leq \kappa$ diremos que F *depende de a lo más* κ*-coordenadas.* Diremos que un conjunto $E \subseteq Z$ *cubre una cara* Z_A de Z si $\pi_A(E) = Z_A$. El siguiente lema nos será de mucha utilidad.

3.2.1 Lema. *Sean $\{Z_t : t \in T\}$ una colección de espacios topológicos, $F \subseteq Z = \prod_{t\in T} Z_t$ y $A, B \subseteq T$. Si F depende de A y $A \subseteq B$, entonces F también depende de B.*

Demostración. Sabemos (por la observación realizada en el segundo párrafo de esta sección) que $F \subseteq \pi_B^{-1}\big(\pi_B(F)\big)$. Así, sólo hace falta verificar que $\pi_B^{-1}\big(\pi_B(F)\big) \subseteq F$. Tomemos $x \in \pi_B^{-1}\big(\pi_B(F)\big)$. Entonces $\pi_B(x) \in \pi_B(F)$, es decir, existe $y \in F$ tal que $\pi_B(x) = \pi_B(y)$. De esta forma, $x \restriction_B = y \restriction_B$. Como $A \subseteq B$, obtenemos que $x \restriction_A = y \restriction_A$. Por lo tanto $\pi_A(x) \in \pi_A(F)$, es decir, $x \in \pi_A^{-1}\big(\pi_A(F)\big)$. Pero por hipótesis $\pi_A^{-1}\big(\pi_A(F)\big) = F$. $\square$

Ahora supongamos que para cada $t \in T$ tenemos una familia $\mathcal{R}_t$ de subconjuntos de Z_t. Sea $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_t : t \in T\}$. Para cualesquier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A = \{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq T$ tal que $t_i \neq t_j$ si $i \neq j$ y $R_1 \in \mathcal{R}_{t_1}$, …, $R_n \in \mathcal{R}_{t_n}$, definimos

$$[t_1, \ldots, t_n; R_1, \ldots, R_n] = \{x \in Z : x(t_i) \in R_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, n\}.$$

Un conjunto $H \subseteq Z$ es llamado $\mathcal{R}$-*estándar* (o simplemente estándar cuando la definición de la familia $\mathcal{R}$ es evidente) si $H = [t_1, \ldots, t_n; R_1, \ldots, R_n]$ para algunos $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A = \{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq T$ tal que $t_i \neq t_j$ si $i \neq j$ y $R_1 \in \mathcal{R}_{t_1}$, …, $R_n \in \mathcal{R}_{t_n}$. En este caso definimos $supp(H) = A$ y $r(H) = n$. Consideraremos que Z es el único subconjunto estándar de Z tal que $r(H) = 0$.

Adicionalmente, dado cualquier punto $x \in Z$ y cualquier $A \subseteq T$ definimos

$$\begin{aligned}\langle x, A\rangle &= \{y \in Z \,:\, y(t) = x(t) \text{ para todo } t \in A\}\\ &= \{y \in Z \,:\, y\restriction_A = x\restriction_A\}.\end{aligned}$$

3.2.2 Proposición. *Sean $\{Z_t : t \in T\}$ una colección de espacios topológicos, $x \in Z = \prod_{t\in T} Z_t$ y $A \subseteq T$. El conjunto $\langle x, A\rangle$ es cerrado en Z, cuando Z está equipado con la topología producto.*

Demostración. Tomemos $y \in Z \setminus \langle x, A\rangle$. Existe $t_0 \in A$ tal que $x(t_0) \neq y(t_0)$. Fijemos U y V abiertos ajenos en el espacio Z_{t_0} que contienen a los puntos $x(t_0)$ y $y(t_0)$, respectivamente. De esta forma, el conjunto $[t_0, V] = \{z \in Z : z(t_0) \in V\}$ es una vecindad de y en el espacio Z que está contenida en $Z \setminus \langle x, A\rangle$. □

Si $A \subseteq T$ entonces la cara Z_A es llamada *κ-residual* si $|T\setminus A| \leq \kappa$. Diremos que un conjunto cerrado no vacío $F \subseteq Z$ es *κ-largo* si, para cualquier $x \in F$ y cualquier conjunto finito $A \subseteq T$, el conjunto $\langle x, A\rangle \cap F$ cubre una cara κ-residual de Z.

Finalmente, recuerde que un espacio Y es una *extensión* de $X \subseteq Y$ si X es denso en Y. Si Y es además un espacio compacto, entonces se dice que Y es una *extensión compacta* de X. Por ejemplo, la compactación de Stone-Čech βX es una extensión compacta de X.

El siguiente lema establece una propiedad relevante de los conjuntos κ-largos.

3.2.3 Lema. *Sea κ un cardinal infinito, $\{N_t : t \in T\}$ una colección de espacios topológicos tal que $nw(N_t) \leq \kappa$ para cada $t \in T$ y $C \subseteq N = \prod_{t\in T} N_t$ un subconjunto denso en N. Supongamos además que para cada $t \in T$, K_t es una extensión compacta del espacio N_t. Si $F \subseteq K = \prod_{t\in T} K_t$ es un conjunto κ-largo, entonces existe un conjunto G de tipo G_κ en el espacio K tal que $F \subseteq G$ y $F \cap C = G \cap C$. En particular, $F \cap C$ es un subconjunto G_κ de C.*

Demostración. Si $F = K$ definimos $G = K$. Supongamos que $K \setminus F \neq \emptyset$, es decir, $F \subsetneq K$. Fijamos, para cada $t \in T$, una red $\mathcal{R}_t$ en el espacio N_t tal que $|\mathcal{R}_t| \leq \kappa$. Sean $\mathcal{M}_t = \{cl_{K_t}(W) : W \in \mathcal{R}_t\}$ y $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t : t \in T\}$. Los subconjuntos $\mathcal{M}$-estándar de K serán llamados *estándar*.

Afirmación 1: La familia $\mathcal{H}$ de todos los subconjuntos estándar es una red en K, para cada $x \in C$, es decir, si $x \in C$ y V es un abierto de K con $x \in V$, existe $P \in \mathcal{H}$ tal que $x \in P \subseteq V$.

Demostración de la Afirmación: Sea $x \in C$. Fijamos $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$ y $U_i \in \mathcal{T}(x(t_i), K_{t_i})$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Por la regularidad de K_{t_i}, existe $V_i \in \mathcal{T}(x(t_i), K_{t_i})$ tal que $cl_{K_{t_i}}(V_i) \subseteq U_i$. Además, existe $W_i \in \mathcal{R}_{t_i}$ que cumple $x(t_i) \in W_i \subseteq V_i \cap N_{t_i}$. Sea $L_i = cl_{K_{t_i}}(W_i)$. Note que $P = [t_1, \ldots, t_n; L_1, \ldots, L_n] \in \mathcal{H}$ y que $x \in P \subseteq V = [t_1, \ldots, t_n; U_1, \ldots, U_n]$. $\boxtimes$

Ahora sean P, $P' \in \mathcal{H}$. Escribiremos $P' \preceq P$ si $P = [t_1, \ldots, t_n, M_1, \ldots, M_n]$ y existe un natural $0 < k \leq n$ tal que $P' = [t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}]$ para distintos $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots n\}$. Si $k < n$ escribiremos $P' \prec P$. Incluiremos el caso cuando $k = 0$, así $K \preceq P$ para todo $P \in \mathcal{H}$. Es importante señalar que si P, $P' \in \mathcal{H}$ son tales que $P' \preceq P$, entonces $P \subseteq P'$.

Por otro lado, decimos que $P \in \mathcal{H}$ es *minimal* si $P \cap F = \emptyset$ y $P' \cap F \neq \emptyset$, para todo $P' \in \mathcal{H}$ tal que $P' \prec P$.

Sea $\mathcal{S} = \{P \in \mathcal{H} : P \text{ es minimal}\}$. Por lo visto en la Afirmación 1 tenemos que para cada $x \in C \setminus F$ existe $P \in \mathcal{S}$ tal que $x \in P$.

Afirmación 2: $|\mathcal{S}| \leq \kappa$.

Demostración de la afirmación: Supongamos que $|\mathcal{S}| > \kappa$. Fijamos $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ tal que $|\mathcal{S}_0| = \kappa^+$ y $n \in \omega$ tal que $r(P) = n$, para todo $P \in \mathcal{S}_0$. Se cumple la siguiente propiedad:

($\star$) Si $A \subseteq T$, $D \subseteq K$ y $P \in \mathcal{H}$ son tales que $\pi_{T\setminus A}(D) = K_{T\setminus A}$ y $P \cap D = \emptyset$, entonces $supp(P) \cap A \neq \emptyset$.

En efecto: sea $P = [t_1, \ldots, t_n, M_1, \ldots, M_n]$. Supongamos que $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq T \setminus A$. Sea $z \in P$. Como $z \restriction_{T\setminus A} \in K_{T\setminus A} = \pi_{T\setminus A}(D)$, existe $x \in D$ tal que $z \restriction_{T\setminus A} = x \restriction_{T\setminus A}$. Debido a que $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq T \setminus A$ y a que $z \restriction_{T\setminus A} = x \restriction_{T\setminus A}$, sucede que $z(t_i) = x(t_i) \in M_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $x \in P \cap D$, lo que contradice el hecho de que $P \cap D = \emptyset$.

Procediendo por recursión, construiremos un conjunto $A_n \subseteq T$ y una subcolección $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_0$ tales que $|A_n| \leq \kappa$, $|\mathcal{S}_n| = \kappa^+$ y $[t_1, \ldots, t_n; M_1, \ldots, M_n] \preceq P$, para cualquier $P \in \mathcal{S}_n$ y algunos $t_1, \ldots, t_n \in A_n$ y $M_1 \in \mathcal{M}_{t_1}, \ldots, M_n \in \mathcal{M}_{t_n}$.

"Primer paso de la recursión": Tomemos cualquier $y \in F$. Como el conjunto F es κ-largo, existe $A_1 \subseteq T$ tal que $|A_1| \leq \kappa$ y $F = \langle x, \emptyset \rangle \cap F$ cubre la cara $K_{T\setminus A_1}$. Por la propiedad ($\star$) tenemos que para cualquier $P \in \mathcal{S}_0$, sucede que $supp(P) \cap A_1 \neq \emptyset$. En efecto: sea $P \in \mathcal{S}_0$. Como $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, P es minimal. Entonces $P \cap F = \emptyset$. También sabemos que $\pi_{T\setminus A_1}(F) = K_{T\setminus A_1}$. Por la propiedad $(\star)$ sucede que $supp(P) \cap A_1 \neq \emptyset$.

Así, podemos fijar $t_1 \in A_1$ tal que el conjunto $\mathcal{S}_0' = \{P \in \mathcal{S}_0 : t_1 \in supp(P)\}$ tiene cardinalidad κ^+. Como $|\mathcal{M}_{t_1}| \leq \kappa$, la anterior implica que existen $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_0'$ y $M_1 \in \mathcal{M}_{t_1}$ tales que $|\mathcal{S}_1| = \kappa^+$ y $[t_1, M_1] \preceq P$ para cualquier $P \in \mathcal{S}_1$.

Asumamos ahora que $0 < k < n$ y tenemos $A_k \subseteq T$ y $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{S}_0$ tales que $|A_k| \leq \kappa$ y $|\mathcal{S}_k| = \kappa^+$. Supongamos además que para algunos $t_1, \ldots, t_k \in A_k$ y $M_i \in \mathcal{M}_{t_i}$, con $i = 1, \ldots, k$, se cumple $[t_1, \ldots, t_k; M_1, \ldots, M_k] \preceq P$, para todo $P \in \mathcal{S}_k$. De esta forma

$$P = [t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_{n-k}, M_1, \ldots, M_k, E_1, \ldots, E_{n-k}],$$

para todo $P \in \mathcal{S}_k$.

Para cada $P \in \mathcal{S}_k$, denotaremos mediante $Q(P)$ al elemento de $\mathcal{H}$ que se obtiene al omitir s_1 y E_1 de la definición de P, es decir,

$$Q(P) = [t_1, \ldots, t_k, s_2, \ldots, s_{n-k}, M_1, \ldots, M_k, E_2, \ldots, E_{n-k}].$$

Evidentemente $Q(P) \preceq P$. Debido a que $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, obtenemos que para todo $P \in \mathcal{S}_k$, sucede que $Q(P) \cap F \neq \emptyset$.

Fijemos $P_0 \in \mathcal{S}_k$. Sea $F' = F \cap Q(P_0)$. Como F es κ-largo, podemos hallar $A \subseteq T$, $|A| \leq \kappa$, tal que F' cubre la cara $K_{T\setminus A}$. Como $T \setminus (A \cup A_k) \subseteq T \setminus A$, tenemos que F' también cubre la cara $K_{T\setminus(A\cup A_k)}$. Definimos $A_{k+1} = A \cup A_k$. Observe que $F' \cap P = \emptyset$, para todo $P \in \mathcal{S}_k$. Así, por la propiedad $(\star)$ tenemos que $supp(P) \cap A_{k+1} \neq \emptyset$, para todo $P \in \mathcal{S}_k$. Supongamos que $P = [t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_{n-k}, M_1, \ldots, M_k, E_1, \ldots, E_{n-k}]$ y $\{s_1, \ldots, s_{n-k}\} \cap A_{k+1} = \emptyset$. Debido a que F' cubre la cara $K_{T\setminus A_{k+1}}$, podemos hallar un punto $x \in F'$ tal que $x(s_i) \in E_i$, para todo $i \leq n-k$. Por otra parte, $x \in Q(P_0)$ implica $x(t_i) \in M_i$, para todo $i \leq k$. Por lo tanto $x \in F' \cap P$, lo que es una contradicción. Obtenemos entonces que $\{s_1, \ldots, s_{n-k}\} \cap A_{k+1} \neq \emptyset$. Por lo tanto $(supp(P) \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}) \cap A_{k+1} \neq \emptyset$, para todo $P \in \mathcal{S}_k \setminus \{P_0\}$.

Así, podemos escoger una familia $\mathcal{S}_{k+1} \subseteq \mathcal{S}_k$ de cardinalidad κ^+, un punto $t_{k+1} \in A_{k+1} \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$ y un conjunto $M_{k+1} \in \mathcal{M}_{t_{k+1}}$ tales que $[t_1, \ldots, t_{k+1}, M_1, \ldots, M_{k+1}] \preceq P$ para cualquier $P \in \mathcal{S}_{k+1}$. Esto termina el segundo paso de la recursión.

Mediante este proceso recursivo generamos una familia $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_0$, $|\mathcal{S}_n| = \kappa^+$, tal que $[t_1, \ldots, t_n, M_1, \ldots, M_n] \preceq P$, para todo $P \in \mathcal{S}_n$.

Utilizando que $r(P) = n$ para todo $P \in \mathcal{S}_0$, obtenemos que

$$P = [t_1, \ldots, t_n, M_1, \ldots, M_n],$$

para todo $P \in \mathcal{S}_n$. Esta contradicción muestra que $|\mathcal{S}| \leq \kappa$. $\boxtimes$

Finalmente note que $G = K \setminus \bigcup \mathcal{S}$ es un subconjunto G_κ de K tal que $F \subseteq G$ y $F \cap C = G \cap C$. $\square$

Recuerde que si φ es una función cardinal y X es un espacio topológico, entonces $h\varphi(X) = sup\{\varphi(W) : W \subseteq X\}$ es la *versión hereditaria de* φ. Por otra parte, si F es un subconjunto cerrado de X, entonces el *pseudocarácter de* F *en* X se define como $\psi(F, X) = \big(\text{mín}\{\, |\mathcal{U}| \,:\, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}(F, X) \text{ y } \bigcap \mathcal{U} = F\,\}\big) + \omega$. Si $F = \{x\}$ para algún $x \in X$, escribimos $\psi(x, X)$ en vez de $\psi(\{x\}, X)$. El *pseudocarácter de* X se define como $\psi(X) = sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$. Además se define $\Psi(X) = sup\{\psi(F, X) : F \text{ es un subconjunto cerrado de } X\}$. Evidentemente $\psi(X) \leq \Psi(X)$.

Recuerde también que una *familia celular en* X es una colección no vacía de abiertos en X no vacíos y ajenos por pares. La *celularidad de* X se define como $c(X) = \big(sup\{\, |\mathcal{F}| \,:\, \mathcal{F} \text{ es una familia celular en } X\}\big) + \omega$. Subrayamos el hecho de que $c(X) \leq nw(X)$ (ver la sección 3 de [12]).

Finalmente, si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}^*(X)$ y $x \in X$, decimos que $\mathcal{V}$ es π-*base local de* x si para toda vecindad U de x existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$. Dado $x \in X$, el π-*carácter del punto* x *en el espacio* X se define como $\pi\chi(x, X) = \big(\text{mín}\{|\mathcal{V}| \,:\, \mathcal{V} \text{ es } \pi\text{-base local de } x\}\big) + \omega$. El π-*carácter del espacio* X es $\pi\chi(X) = sup\{\pi\chi(x, X) : x \in X\}$.

3.2.4 Teorema. *Sea* κ *un cardinal infinito,* $\{N_t : t \in T\}$ *una colección de espacios topológicos tal que* $nw(N_t) \leq \kappa$ *para cada* $t \in T$, $C \subseteq N = \prod_{t \in T} N_t$ *un subconjunto denso en* N, L *un espacio compacto y* $\varphi : C \to L$ *una función continua (no necesariamente sobreyectiva). Si* $y \in C' = \varphi(C)$ *y* $h\pi\chi(y, L) \leq \kappa$*, entonces* $\psi(y, C') \leq \kappa$*.*

Demostración. Sea $y \in C' = \varphi(C)$ tal que $h\pi\chi(y, L) \leq \kappa$. Tomando en cuenta que C' es denso en $cl_L(C')$ y que $cl_L(C')$ es compacto, podemos asumir que C' es denso en L. Fijemos, para cada $t \in T$, una extensión compacta K_t del espacio N_t. Debido a que para cada $t \in T$, N_t es denso en K_t, obtenemos que $K = \prod_{t \in T} K_t$ es una extensión compacta de N. Además, como C es denso en N se tiene que K es también una extensión compacta de C.

Consideremos $\Phi : \beta C \to L$ una extensión continua de φ y $\xi : \beta C \to K$ una extensión continua de la función inclusión $i_C : C \to K$, donde βC es la compactación de Stone-Čech del espacio C. Utilizando que $C' = \varphi(C)$ es denso en L y que Φ es continua, obtenemos fácilmente que Φ es sobreyectiva. Note que ξ también es sobreyectiva.

Para cada $t \in T$, fijamos una red $\mathcal{R}_t$ en el espacio N_t tal que $|\mathcal{R}_t| \leq \kappa$. Definimos $\mathcal{M}_t = \{cl_{K_t}(W) : W \in \mathcal{R}_t\}$ y $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t : t \in T\}$. Los subconjuntos $\mathcal{M}$-estándar de K serán llamados *estándar*.

Afirmación: El conjunto $F_y = \xi\big(\Phi^{-1}(\{y\})\big) \subseteq K$ es κ-largo.

Demostración de la afirmación: Fijemos $x \in F_y$ y un subconjunto finito $A \subseteq T$. Sea $P = \langle x, A\rangle = \{x' \in K : x'(t) = x(t), \text{ para todo } t \in A\}$ y $Q = \Phi(\xi^{-1}(P)) \subseteq L$.

Note que $y \in Q$. En efecto:

$$\begin{aligned} x \in F_y \;&\Rightarrow\; x = \xi(z) \text{ para algún } z \in \Phi^{-1}(y) \\ &\Rightarrow\; x = \xi(z) \text{ para algún } z \in \beta C \text{ tal que } \Phi(z) = y. \end{aligned}$$

Además, $x \in P$ implica $z \in \xi^{-1}(P)$. Por lo tanto $y = \Phi(z)$, para algún $z \in \xi^{-1}(P)$, es decir, $y \in \Phi(\xi^{-1}(P)) = Q$.

Ahora observe que Q es un espacio compacto. Efectivamente: por la Proposición 3.2.2, P cerrado en K. Como $\xi : \beta C \to K$ es una función continua, $\xi^{-1}(P)$ es cerrado en βC. Por la compacidad de βC, $\xi^{-1}(P)$ es también un espacio compacto. Finalmente, por la continuidad de $\Phi : \beta C \to L$ sucede que $Q = \Phi(\xi^{-1}(P))$ es un espacio compacto.

Fijemos ahora una π-base $\mathcal{B}$ del espacio Q en el punto y tal que $|\mathcal{B}| \leq \kappa$. Por la regularidad de Q podemos elegir, para cada $B \in \mathcal{B}$, un conjunto O_B abierto en L tal que $\emptyset \neq O_B \cap Q \subseteq cl_L(O_B) \cap Q \subseteq B$.

Debido a que $c(K) \leq \kappa$ obtenemos que

($\star$) para cualquier abierto U en L, el conjunto $cl_K(\varphi^{-1}(U))$ depende de a lo más κ-coordenadas y coincide con el conjunto $\xi(cl_{\beta C}(\Phi^{-1}(U)))$.

Utilizando la propiedad ($\star$) y el hecho de que $|\mathcal{B}| \leq \kappa$ podemos encontrar un conjunto $S \subseteq T$ que cumple:

(i) $|S| \leq \kappa$,

(ii) $A \subseteq S$,

(iii) $D_B = \xi\big(cl_{\beta C}(\Phi^{-1}(O_B))\big)$ depende de S, para todo $B \in \mathcal{B}$.

En efecto: por la propiedad ($\star$), para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $A_B \subseteq T$ tal que $|A_B| \leq \kappa$ y $\pi_{A_B}^{-1}\big(\pi_{A_B}(D_B)\big) = D_B$. Definimos $S = (\bigcup_{B\in\mathcal{B}} A_B) \cup A$. Debido a que para cada $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $|A_B| \leq \kappa$ y a que A es finito, obtenemos que $|S| \leq \kappa$. Finalmente, por la propiedad ($\star$), para cada $B \in \mathcal{B}$ sucede que D_B depende de A_B. Como $A_B \subseteq S$, utilizando el Lema 3.2.1 obtenemos que D_B depende de S. De esta forma, la cara $K_{T\setminus S}$ es κ-residual.

Ahora veremos que $\pi_{T\setminus S}(P \cap F_y) = K_{T\setminus S}$. Por definición de la función proyección sucede que $\pi_{T\setminus S}(P \cap F_y) \subseteq K_{T\setminus S}$. Sólo hace falta verificar que $K_{T\setminus S} \subseteq \pi_{T\setminus S}(P \cap F_y)$. Sea w un elemento arbitrario de $K_{T\setminus S}$. Definimos

$$E = \pi_{T\setminus S}^{-1}(\{w\}) \cap \pi_S^{-1}(\pi_S(P)) = \{z \in K \,:\, \pi_{T\setminus S}(z) = w \text{ y } \pi_S(z) \in \pi_S(P)\}.$$

Como P depende de A y $A \subseteq S$, se tiene que P depende de S (Lema 3.2.1). Por lo tanto $E = \pi_{T\setminus S}^{-1}(\{w\}) \cap P$. El hecho de que $E \subseteq P$ implica que $\Phi(\xi^{-1}(E)) \subseteq \Phi(\xi^{-1}(P)) = Q$.

Note que $\Phi(\xi^{-1}(E))$ es un subconjunto cerrado de Q. En efecto: utilizando la Proposición 3.2.2 y el hecho de que la función proyección $\pi_{T\setminus S}$ es continua obtenemos que $E = \pi_{T\setminus S}^{-1}(\{w\}) \cap P$ es cerrado en K. Como $\xi : \beta C \to K$ es una función continua, $\xi^{-1}(E)$ es cerrado en βC. Por la compacidad de βC, $\xi^{-1}(E)$ es también un espacio compacto y en consecuencia $\Phi(\xi^{-1}(E))$ es un subespacio compacto de Q.

Es cierto que $y \in \Phi(\xi^{-1}(E))$. En efecto: como $\Phi(\xi^{-1}(E))$ es un subconjunto cerrado de Q y $\mathcal{B}$ es una π-base del punto y en el espacio Q, basta demostrar que $\Phi(\xi^{-1}(E)) \cap B \neq \emptyset$, para todo $B \in \mathcal{B}$. Tomemos pues B un elemento arbitrario de $\mathcal{B}$. La condición $\emptyset \neq O_B \cap Q = O_B \cap \Phi(\xi^{-1}(P))$ implica que existe $u \in \xi^{-1}(P)$ tal que $\Phi(u) \in O_B$. Así $u \in \Phi^{-1}(O_B)$ y $\xi(u) \in D_B \cap P$. Definamos $u' \in K$ mediante $\pi_{T\setminus S}(u') = w$ y $\pi_S(u') = \pi_S(\xi(u))$. De esta forma, $u' \in \pi_S^{-1}\big(\pi_S(D_B)\big) = D_B$. Como $\xi(u) \in P$ y $A \subseteq S$, tenemos que $u' \in P$. Por lo tanto $u' \in E$. Note que $u' \in D_B$ implica que $u' = \xi(z)$, para algún $z \in cl_{\beta C}(\Phi^{-1}(O_B)) \subseteq \Phi^{-1}\big(cl_L(O_B)\big)$. Además, $u' \in E$ implica que $z \in \xi^{-1}(E)$. Por lo tanto $\Phi(z) \in cl_L(O_B) \cap \Phi(\xi^{-1}(E))$. Esto muestra que

$$\emptyset \neq \Phi(\xi^{-1}(E)) \cap cl_L(O_B) = \Phi(\xi^{-1}(E)) \cap cl_L(O_B) \cap Q \subseteq \Phi(\xi^{-1}(E)) \cap B.$$

Utilizando el hecho de que $y \in \Phi(\xi^{-1}(E))$ obtenemos que $y = \Phi(z)$, para algún $z \in \xi^{-1}(E)$. Por lo tanto $z \in \xi^{-1}(E) \cap \Phi^{-1}(\{y\})$. En consecuencia

$$\xi(z) \in E \cap F_y = \pi_{T\setminus S}^{-1}(\{w\}) \cap P \cap F_y.$$

Así, $w = \pi_{T\setminus S}(\xi(z)) \in \pi_{T\setminus S}(P \cap F_y)$.

Debido a que el punto $w \in K_{T\setminus S}$ fue escogido arbitrariamente, obtenemos que $K_{T\setminus S} \subseteq \pi_{T\setminus S}(P \cap F_y)$. Esto muestra que F_y es κ-largo. $\boxtimes$

Note ahora que por el Lema 3.2.3, existe una colección $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}^*(K)$ tal que $|I| \leq \kappa$, $F_y \subseteq \bigcap_{i\in I} U_i$ y $\big(\bigcap_{i\in I} U_i\big) \cap C = F_y \cap C$. Por lo tanto

$$C \setminus F_y = \bigcup_{i\in I} (C \setminus U_i).$$

Sea $\mathcal{F} = \{K \setminus U_i : i \in I\}$. De esta forma, $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos compactos de K tal que $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ y $C \setminus F_y \subseteq \bigcup \mathcal{F} \subseteq K \setminus F_y$.

Además, para cualquier $F \in \mathcal{F}$, el conjunto $W_F = L \setminus \Phi(\xi^{-1}(F))$ es una vecindad abierta de y en el espacio L. En efecto: supongamos que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $y \in \Phi(\xi^{-1}(F))$. Así, $y = \Phi(x)$, para algún $x \in \xi^{-1}(F)$. Por lo tanto $\xi(x) \in \xi\big(\Phi^{-1}(\{y\})\big) \cap F = F_y \cap F$, lo que contradice el hecho de que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq K \setminus F_y$.

Así, $H = \bigcap\{W_F : F \in \mathcal{F}\}$ es un subconjunto G_κ en el espacio L tal que $H \cap C' = \{y\}$. Por lo tanto, $\psi(y, C') \leq \kappa$. $\square$

Los principales resultados de este capítulo serán demostrados utilizando los siguientes corolarios del Teorema 3.2.4. Recuerde que si X es un espacio topológico, la *estrechez de un punto* $x \in X$, denotada $t(x, X)$, es el menor cardinal κ con la propiedad de que para todo $W \subseteq X$ con $x \in cl(W)$ existe $W_0 \subseteq W$, con $|W_0| \leq \kappa$ tal que $x \in cl(W_0)$. La *estrechez del espacio* X, denotada mediante $t(X)$, es el número cardinal $t(X) = (sup\{t(x, X) : x \in X\}) + \omega$.

3.2.5 Corolario. *Sea κ un cardinal infinito, $\{N_t : t \in T\}$ una colección de espacios topológicos tal que $nw(N_t) \leq \kappa$ para cada $t \in T$, $C \subseteq N = \prod_{t\in T} N_t$ un subconjunto denso en N y $\varphi : C \to K$ una función continua (no necesariamente sobreyectiva) de C en un espacio compacto K tal que $t(K) \leq \kappa$. Sea $C' = \varphi(C)$. Entonces todo subespacio cerrado de C' es un conjunto de tipo G_κ, es decir, $\Psi(C') \leq \kappa$. Particularmente $\psi(C') \leq \kappa$.*

Demostración. Sea F' un cerrado no vacío en el espacio C' y $F = cl_K(F')$. Consideramos el mapeo cociente $p : K \to K_F$ que se obtiene al contraer el conjunto F a un punto. Como p es un mapeo cociente, sucede que $t(K_F) \leq t(K) \leq \kappa$ [7]. Definimos $C'' = p(C')$ y denotamos mediante y al punto del espacio K_F representado por F. Entonces, $h\pi\chi(y, K_F) \leq \kappa$ (cf. [21]).

Note que $\psi(y, C'') \leq \kappa$. En efecto: K_F es un espacio compacto porque p es una función continua y sobreyectiva. Además, $p \circ \varphi : C \to K_F$ es continua. Fijemos cualquier $z \in F' \subseteq C' = \varphi(C)$. Entonces existe $x \in C$ tal que $\varphi(x) = z$. Como $F' \subseteq F$, $(p \circ \varphi)(x) = p(z) = y$. Por lo tanto $y \in (p \circ \varphi)(C)$. Aplicando el Teorema 3.2.4 a la función $p \circ \varphi$ (recuerde que $h\pi\chi(y, K_F) \leq \kappa$) obtenemos que $\psi(y, C'') \leq \kappa$.

Sea $q = p \restriction_{C'}: C' \to C''$. Veamos que $q^{-1}(\{y\}) = F'$. Efectivamente: por definición de la función q y del conjunto F obtenemos que $F' \subseteq q^{-1}(\{y\})$. Para demostrar que $q^{-1}(\{y\}) \subseteq F'$ observamos que existe $H \subseteq K$ cerrado en K tal que $F' = C' \cap H$. De esta forma, si $x \in C' \setminus F'$, entonces $K \setminus H \in \mathcal{T}(x, K)$ y $(K \setminus H) \cap F' = \emptyset$. Por lo tanto $x \notin F$ y $q(x) = \{x\} \neq y$, es decir, $x \in C' \setminus q^{-1}(\{y\})$.

Fijamos $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}(y, C'')$ tal que $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ y $\bigcap \mathcal{U} = \{y\}$. Entonces $\mathcal{V} = \{q^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{T}(C')$ y $|\mathcal{V}| \leq \kappa$. Finalmente: $\bigcap \mathcal{V} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} q^{-1}(U) = q^{-1}(\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U) = q^{-1}(\{y\}) = F'$. □

Ahora recordamos que el grado de Lindelöf de un espacio topológico Z, denotado $l(Z)$, es el menor cardinal infinito κ, tal que toda cubierta abierta de Z tiene una subcubierta de cardinalidad menor o igual que κ.

3.2.6 Corolario. *Sea κ un cardinal infinito, $\{N_t : t \in T\}$ una colección de espacios topológicos tal que $nw(N_t) \leq \kappa$ para cada $t \in T$, $C \subseteq N = \prod_{t \in T} N_t$ un subconjunto denso en N y $\varphi : C \to K$ una función continua (no necesariamente sobreyectiva) de C en un espacio compacto K tal que $t(K) \leq \kappa$. Si $C' = \varphi(C)$ y $l(C) \leq \kappa$, entonces $hl(C') \leq \kappa$.*

Demostración. $l(C') \leq \kappa$ debido a que el grado de Lindelöf no se incrementa bajo imágenes continuas. Además, por el Corolario 3.2.5, todo subespacio cerrado de C' es un conjunto G_κ. Concluimos que $hl(C') \leq \kappa$. □

3.2.7 Corolario. *Si C es un subespacio denso de un producto de espacios cósmicos y K es un espacio compacto, entonces para cualquier función continua $\varphi : C \to K$ tenemos que $\Psi(\varphi(C)) \leq t(K)$.*

Demostración. Aplicando el Corolario 3.2.5 a $\kappa = t(K)$ obtenemos el resultado. □

3.3. Aplicaciones a C_p-teoría.

A continuación utilizaremos el siguiente teorema, el lector interesado puede encontrar una demostración en [19].

3.3.1 Teorema (Birkhoff-Kakutani)**.** *Un grupo topológico Hausdorff G es metrizable si y sólo si tiene una base numerable en el elemento identidad.*

3.3.2 Proposición. *Si un grupo topológico G se encaja en un espacio compacto de estrechez numerable entonces G es metrizable. En particular, si $C_p(X)$ se encaja en un espacio compacto de estrechez numerable entonces $C_p(X)$ es segundo numerable y en consecuencia X es numerable.*

Demostración. Supongamos que K es un espacio compacto que contiene un subespacio H homeomorfo a G y que $t(K) = \omega$. Debido a que la función estrechez es monótona, a que $cl_K(H)$ es un espacio compacto y a que H es denso en $cl_K(H)$, podemos asumir que H es denso en K. Además, como G es homeomorfo a H, podemos asumir que G es denso en K.

De esta forma $\chi(g, G) = \pi\chi(g, G) = \pi\chi(g, K) = \omega$, para cualquier $g \in G$ [19]. Utilizando el Teorema 3.3.1 obtenemos que G es metrizable.

Ahora demostraremos la segunda afirmación de la proposición. Supongamos que $C_p(X)$ se encaja en un espacio compacto de estrechez numerable. Por la Proposición 1.2.7, $C_p(X)$ es un grupo topológico. Así, utilizando lo establecido en la primera parte de esta proposición obtenemos que $C_p(X)$ es metrizable. Por lo tanto $\chi(C_p(X)) = \omega$. Para finalizar aplicamos el Teorema 1.1.1 de [5] que establece que $\chi(C_p(X)) = w(C_p(X)) = |X|$. $\square$

3.3.3 Corolario. *Para cualquier espacio X, el espacio $C_p(X)$ se condensa sobre un espacio encajable en un espacio compacto de estrechez numerable si y sólo si $C_p(X)$ se condensa sobre un espacio segundo numerable.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existen un espacio Z y una condensación $h : C_p(X) \to Z$. Supongamos además que existe una inmersión $i : Z \to K$, donde K es un espacio compacto tal que $t(K) = \omega$.

Sabemos que $C_p(X)$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}^X$ (Corolario 1.2.9). Además $i \circ h : C_p(X) \to K$ es continua y $(i \circ h)\big(C_p(X)\big) = i(Z)$. Por el Corolario 3.2.7: $\Psi\big(i(Z)\big) = \omega$. Utilizando el Teorema 1.3.9 y el hecho de que h es una condensación obtenemos que

$$iw\big(C_p(X)\big) = \psi\big(C_p(X)\big) \leq \psi(Z) = \psi\big(i(Z)\big) \leq \Psi\big(i(Z)\big) = \omega.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que existen un espacio segundo numerable Y y una condensación $g : C_p(X) \to Y$. Como Y es segundo numerable, Y se encaja en $I^{\mathbb{N}}$. Además el espacio $I^{\mathbb{N}}$ es compacto y metrizable. El hecho de que $I^{\mathbb{N}}$ es metrizable implica que $I^{\mathbb{N}}$ es un espacio de Fréchet. (Recuerde que un espacio topológico Z es un *espacio de Fréchet* si para todo $U \subseteq Z$ y todo $z \in cl_Z(U)$ existe una sucesión $(z_n) \subseteq U$ que converge a z.) Por lo tanto $t(I^{\mathbb{N}}) = \omega$. $\square$

Es interesante determinar si cualquier imagen continua de $C_p(X)$ que se sumerge en un espacio compacto de estrechez numerable tiene que ser un espacio cósmico, o bien metrizable. Utilizando los Corolarios 1.2.9 y 3.2.5 obtenemos que una imagen con estas características es un espacio perfecto (recuerde que un espacio topológico es *perfecto* si todos sus puntos son puntos límite). En efecto: supongamos que Z es un espacio topológico tal que existe $g : C_p(X) \to Z$ continua y sobreyectiva. Supongamos también que existe un espacio compacto K tal que $t(K) = \omega$ y una inmersión $h : Z \to K$. Sabemos que $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$ (Corolario 1.2.9). Además la función $h \circ g : C_p(X) \to K$ es continua. Note que $(h \circ g)(C_p(X)) = h(Z)$. Tomando $\kappa = \omega$ en el Corolario 3.2.5, obtenemos que $\Psi(h(Z)) = \Psi(Z) = \omega$. Esto significa que todo subconjunto cerrado de Z es un conjunto G_δ (por definición de la función cardinal Ψ). Por lo tanto Z es un espacio perfecto [11, 1.5.H].

El teorema que enseguida demostramos (3.3.4) muestra que la conjetura anterior es verdadera cuando $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf-Σ.

Considere un espacio topológico Z. Recuerde que un cardinal τ es un *precalibre* (respectivamente, un *calibre*) de Z si, para cualquier familia $\{U_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \mathcal{T}^*(Z)$ tal que $|A| = \tau$, existe $B \subseteq A$ tal que $|B| = \tau$ y la familia $\{U_\alpha : \alpha \in B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita (respectivamente, $|B| = \tau$ y $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in B\} \neq \emptyset$).

Por otra parte, si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de Z, decimos que $\mathcal{A}$ es una familia *punto-numerable* si todo elemento de Z está contenido en una cantidad a lo más numerable de elementos de $\mathcal{A}$.

Recuerde también que una colección $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}^*(Z)$ es una π-*base* para Z si para cada U abierto en Z existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$. El π-*peso* del espacio Z se define como $\pi w(Z) = (\text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una } \pi\text{-base para } Z\}) + \omega$.

3.3.4 Teorema. *Supongamos que $\varphi : C_p(X) \to K$ es una función continua (no necesariamente sobreyectiva) y que K es un espacio compacto con $t(K) = \omega$. Sea $Y = \varphi(C_p(X))$. Entonces*

(i) Y es un espacio perfecto de π-peso numerable,

(ii) si $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf-Σ, entonces Y es cósmico.

Demostración. (i) Por el Corolario 3.2.5, Y es un espacio perfecto. Además, ω_1 es un precalibre de $C_p(X)$ [5, 0.3.14]. Por la continuidad de φ, tenemos que ω_1 es un precalibre de Y. Como Y es denso en $cl(Y)$, ω_1 es también un precalibre de $cl(Y)$. Por la compacidad de $cl(Y)$ se tiene que ω_1 es un calibre de $cl(Y)$. Debido a que $t(cl(Y)) = \omega$ obtenemos que $cl(Y)$ tiene una π-base punto numerable (cf. [21]). Por lo tanto $\pi w(Y) \leq \pi w(cl(Y)) = \omega$.
(ii) Supongamos que $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf-Σ. Es cierto que $C_p(X \oplus X)$ es un espacio de Lindelöf. En efecto: por el Corolario B.1.18, $C_p(X) \times C_p(X)$ es un espacio Lindelöf-Σ. Particularmente, $C_p(X) \times C_p(X)$ es un espacio de Lindelöf (vea la Definición B.1.15). Además, $C_p(X) \times C_p(X)$ es homeomorfo a $C_p(X \oplus X)$.

Sabemos que $C_p(X \oplus X)$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}^{X \oplus X}$ (Corolario 1.2.9). Es cierto que $K \times K$ es un espacio compacto de estrechez numerable. Como la función $\varphi : C_p(X) \to K$ es continua, sucede que la función $\eta : C_p(X \oplus X) \to K \times K$ definida mediante $\eta(f, g) = (\varphi(f), \varphi(g))$ también es continua. El hecho de que $Y = \varphi(C_p(X))$ implica que $Y \times Y = \eta(C_p(X \oplus X))$.

Utilizando el Corolario 3.2.6 (con $\kappa = \omega$) obtenemos que $Y \times Y$ es hereditariamente Lindelöf. Esto último implica que Y es un espacio de Lindelöf. Por lo tanto, Y se condensa sobre un espacio segundo numerable [7]. Adicionalmente, como Y es una imagen continua de un espacio Lindelöf-Σ, sucede que Y es también un espacio Lindelöf-Σ (Corolario B.1.18). Por lo tanto $nw(Y) = \omega$, es decir, Y es cósmico. $\square$

Utilizaremos el siguiente lema de [**?**].

3.3.5 Lema. *Si $C_p(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y todo F_n es cerrado en $C_p(X)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $C_p(X)$ se encaja en F_n.*

Recuerde que si α es un ordinal, una sucesión de puntos $\{z_\gamma : \gamma < \alpha\}$ de un espacio Z es llamada una *sucesión libre* de longitud α en Z, si para cada $\beta < \alpha$ sucede que $cl(\{z_\gamma : \gamma < \beta\}) \cap cl(\{z_\gamma : \gamma \geq \beta\}) = \emptyset$. Es cierto que si Z es un espacio de Lindelöf, entonces

$$t(Z) = (sup\{\kappa : \text{existe una sucesión libre de longitud } \kappa \text{ en } Z\}) + \omega.$$

(El lector encontrará una demostración de este resultado en [12].)

3.3.6 Teorema. *Supongamos que $l(X^k) = \omega$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y que $C_p(X)$ es un espacio de Lindelöf. Si $C_p(X)$ se condensa sobre un espacio σ-compacto Y, entonces el espacio X es separable y $\psi(Y) = \omega$.*

Demostración. Sea $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subespacios compactos de Y tales que $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ y $\varphi : C_p(X) \to Y$ una condensación. Señalamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \varphi^{-1}(K_n)$ es un espacio de Lindelöf con estrechez numerable. En efecto: sea n un elemento arbitrario de $\mathbb{N}$. Como K_n es un subconjunto cerrado de Y y $\varphi : C_p(X) \to Y$ es una función continua, sucede que F_n es un subconjunto cerrado de $C_p(X)$. Debido a que $C_p(X)$ es un espacio de Lindelöf y a que dicha propiedad se hereda a subespacios cerrados, obtenemos que F_n es también un espacio de Lindelöf. Adicionalmente, por el Teorema de Arhangel'skii-Pytkeev (Teorema C.1.4), sucede que $t(C_p(X)) = \omega$. La monotonía de la función estrechez implica que $t(F_n) = \omega$.

Ahora veremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $t(K_n) = \omega$. Sea n cualquier elemento de $\mathbb{N}$. Supongamos que $t(K_n) > \omega$. Esto implica que existe un cardinal $\kappa > \omega$ y $\{x_\gamma : \gamma < \kappa\}$ una sucesión libre de longitud κ en K_n. Como φ es una condensación, sucede que $\{\varphi^{-1}(x_\gamma) : \gamma < \kappa\}$ es una sucesión libre de longitud κ en F_n, pero esto contradice el hecho de que F_n es un espacio de Lindelöf con estrechez numerable.

Observe que

$$C_p(X) = \varphi^{-1}(Y) = \varphi^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}(K_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Por el Lema 3.3.5, existen $n \in \mathbb{N}$ y $C \subseteq F_n$ tales que $C_p(X)$ es homeomorfo a C. Así, podemos asumir que C es un subespacio denso de un producto de espacios cósmicos (Corolario 1.2.9). Por definición del conjunto F_n, sucede que $\varphi(C) \subseteq \varphi(F_n) \subseteq K_n$. Aplicando el Corolario 3.2.7 a la función $\varphi \restriction_C : C \to K_n$, obtenemos que $\psi(\varphi(C)) \leq t(K_n) = \omega$.

Por otra parte, debido a que $C_p(X)$ es homeomorfo a C y a que $\varphi \restriction_C : C \to \varphi(C)$ es una condensación, sucede que

$$\psi(C_p(X)) = \psi(C) \leq \psi(\varphi(C)) = \omega.$$

Por lo tanto $d(X) = \psi(C_p(X)) = \omega$ (Teorema 1.3.9). Esto muestra que X es separable.

Ahora demostraremos para todo $y \in Y$, $Y \setminus \{y\}$ es un espacio de Lindelöf. Sea y un elemento arbitrario de $Y = \varphi(C_p(X))$. Denotamos mediante f al único elemento de $C_p(X)$ tal que $\varphi(f) = y$. El hecho de que $\psi(C_p(X)) = \omega$ implica que $\{f\}$ es un subconjunto G_δ de $C_p(X)$. Por lo tanto, $C_p(X) \setminus \{f\}$ es un subconjunto F_σ de $C_p(X)$. Como $C_p(X)$ es un espacio de Lindelöf, todo subconjunto F_σ de $C_p(X)$ también es un espacio de Lindelöf [11, Teorema

3.8.5]. Particularmente $C_p(X) \setminus \{f\}$ es un espacio de Lindelöf. Ahora bien, debido a que la función $\varphi \restriction_{C_p(X)\setminus\{f\}}: C_p(X) \setminus \{f\} \to Y \setminus \{y\}$ es continua sobreyectiva y a que el grado de Lindelöf no se incrementa bajo imágenes continuas, obtenemos que $Y \setminus \{y\}$ es un espacio de Lindelöf. Concluimos que $\psi(Y) = \omega$. □

3.3.7 Corolario. *Supongamos que X es un espacio ω-monolítico tal que para cualquier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, X^k es un espacio de Lindelöf, y que $C_p(X)$ es también un espacio de Lindelöf. Si $C_p(X)$ se condensa sobre un espacio σ-compacto Y, entonces $nw(X) = nw(Y) = \omega$.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.6, $d(X) = \omega$. Debido a que X es ω-monolítico, sucede que $nw(X) = \omega$. En efecto: si D es un subconjunto denso y a lo más numerable de X, entonces $nw(X) = nw(cl(D)) \leq \omega$.

Utilizando el hecho de que el peso de red no se incrementa bajo funciones continuas y el Teorema 1.3.6 obtenemos que $nw(Y) \leq nw(C_p(X)) = nw(X)$. □

El siguiente corolario proporciona una respuesta completa a los problemas 29 y 30 del artículo [6].

3.3.8 Corolario. *Sea X es un espacio ω-monolítico y compacto tal que $C_p(X)$ es Lindelöf. Si $C_p(X)$ se condensa sobre un espacio σ-compacto, entonces X es metrizable. En particular, si X es un compacto de Corson no metrizable, entonces $C_p(X)$ no se condensa sobre un espacio σ-compacto.*

Demostración. Por el Corolario 3.3.7 y la compacidad de X,

$$w(X) = nw(X) = \omega.$$

Así, X es metrizable.

Ahora demostraremos la segunda afirmación del corolario. Sea X un compacto de Corson. Entonces existe un cardinal $\tau \geq \omega$ tal que X es homeomorfo a un subespacio compacto de $\Sigma\mathbb{R}^\tau$, donde $\Sigma\mathbb{R}^\tau$ es el Σ-producto de τ copias del espacio $\mathbb{R}$ (en la demostración de la Proposición 1.2.7 establecimos que $\mathbb{R}^\tau$ es un espacio homogéneo, así, cualquier par de Σ-productos basados en puntos distintos de $\mathbb{R}^\tau$ resultan ser homeomorfos, por lo tanto podemos decir que existe únicamente un Σ-producto de τ copias del espacio $\mathbb{R}$).

Primero veremos que X es ω-monolítico. Sabemos que cualquier Σ-producto de espacios con una base numerable es un espacio monolítico (Proposición 1.4.2). Por lo tanto $\Sigma\mathbb{R}^\tau$ es un espacio monolítico. También sabemos que para cualquier $\kappa \geq \omega$, la propiedad de κ-monoliticidad es heredada por subespacios arbitrarios (Proposición 1.4.7). Entonces X es ω-monolítico.

Por otra parte, el Teorema 1.5.23 establece que si Z es un compacto de Corson, entonces $C_p(Z)$ es un espacio de Lindelöf. Por lo tanto $C_p(X)$ es un espacio de Lindelöf.

Utilizando la primera afirmación de este corolario obtenemos que si $C_p(X)$ se condensa sobre un espacio σ-compacto, entonces X es metrizable. $\square$

Apéndice A

Axioma de determinación proyectiva.

A.1. Árboles y conjuntos cerrados.

Sea A un conjunto no vacío y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos mediante A^n al conjunto de sucesiones finitas

$$s = (s(0),\, s(1), \ldots, s(n-1)) = (s_0,\, s_1, \ldots, s_{n-1})$$

de longitud n en A. Permitimos el caso $n = 0$, en el que $A^0 = \{\emptyset\}$, donde $\emptyset$ denota la *sucesión vacía*. La longitud de una sucesión finita se denota por $long(s)$. Así $long(\emptyset) = 0$. Si $s \in A^n$ y $m \leq n$, definimos $s \restriction_m = (s_0, \ldots, s_{m-1})$. (Así $s \restriction_0 = \emptyset$.) Si s, t son sucesiones finitas en A, decimos que s es un *segmento inicial* de t y que t es una *extensión* de s (en símbolos $s \subseteq t$) si $long(s) \leq long(t)$ y $s = t \restriction_{long(s)}$. Entonces $\emptyset \subseteq s$, para todo s. Dos sucesiones finitas son *compatibles* si una es un segmento inicial de la otra e *incompatibles* en otro caso. Denotamos mediante

$$A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

al conjunto de todas las sucesiones finitas en A. La *concatenación* de $s = (s_0,\, s_1, \ldots, s_{m-1})$ y $t = (t_0,\, t_1, \ldots, t_{n-1})$ es la sucesión

$$s^\frown t = (s_0,\, s_1, \ldots, s_{m-1},\, t_0,\, t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

Si $a \in A$, escribiremos $s^\frown a$ para denotar a la sucesión finita $s^\frown(a)$. Sea $A^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones infinitas $x = (x(n)) = (x_n)$ en A. Si $x \in A^{\mathbb{N}}$

y $n \in \mathbb{N}$, definimos $x \restriction_n = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in A^n$. Decimos que $s \in A^n$ es un *segmento inicial* de $x \in A^{\mathbb{N}}$ si $s = x \restriction_n$. Escribimos $s \subseteq x$ si s es un segmento inicial de x.

A.1.1 Proposición. *La colección de todos los conjuntos de la forma*

$$N_s = \{x \in A^{\mathbb{N}} : s \subseteq x\},$$

donde $s \in A^{<\mathbb{N}}$, es una base para la topología producto de $A^{\mathbb{N}}$ (el conjunto A está dotado de la topología discreta).

Demostración. Debido a que la colección $\{\{a\} : a \in A\}$ es una base para el espacio A, obtenemos que un abierto canónico del producto $A^{\mathbb{N}}$ es de la forma

$$[j_0, \ldots, j_m, \{a_0\}, \ldots, \{a_m\}] = \{x \in A^{\mathbb{N}} : x_{j_i} = a_i,\ i = 0, \ldots m\},$$

donde $m \in \mathbb{N}$, $j_0, \ldots, j_m \in \mathbb{N}$ y $a_0, \ldots, a_m \in A$. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que $j_0 < \ldots < j_m$. Sea $x \in [j_0, \ldots, j_m, \{a_0\}, \ldots, \{a_m\}]$. Definimos la función $s : \{0, 1, \ldots, j_m\} \to A$ mediante

$$s_k = s(k) = \begin{cases} a_i & \text{si } k = j_i \text{ para algún } i \in \{0, \ldots, m\}, \\ x_k & \text{si } k \in \{0, 1, \ldots, j_m\} \setminus \{j_0, \ldots, j_m\}. \end{cases}$$

De esta forma, $x \in N_s \subseteq [j_0, \ldots, j_m, \{a_0\}, \ldots, \{a_m\}]$. □

A.1.2 Proposición. *Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $s \in A^n$, el conjunto N_s es cerrado en el producto $A^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Note que

$$A^{\mathbb{N}} \setminus N_s = \bigcup_{t \in A^n \setminus \{s\}} N_t.$$

En efecto: si $x \in A^{\mathbb{N}} \setminus N_s$, entonces $x \restriction_n \neq s$. Así $t = x \restriction_n \in A^n \setminus \{s\}$. Por otra parte, si $x \in A^{\mathbb{N}}$ y $x \restriction_n = t$ para algún $t \in A^n \setminus \{s\}$, entonces $x \restriction_n \neq s$. □

Recuerde que un espacio topológico es *cero-dimensional* si es Hausdorff y tiene una base formada por conjuntos cerrado-abiertos.

A.1.3 Corolario. *Para todo conjunto no vacío A, el espacio $A^{\mathbb{N}}$ es cero dimensional.*

A.1.4 Definición. Un *árbol* en un conjunto A es un subconjunto $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ cerrado bajo segmentos iniciales, es decir, si $t \in T$ y $s \subseteq t$, entonces $s \in T$. (En particular, $\emptyset \in T$ si T es no vacío.) Llamamos a los elementos de T los *nodos* de T. Una *rama infinita* de T es una sucesión $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $x \upharpoonright_n \in T$, para todo $n \in \mathbb{N}$. El *cuerpo* de T, denotado mediante $[T]$, es el conjunto de todas las ramas infinitas de T, es decir,

$$[T] = \{x \in A^{\mathbb{N}} \,:\, \forall n \,(\, x \upharpoonright_n \in T \,)\}.$$

Decimos que un árbol T es *bien podado* si cada $s \in T$ tiene una extensión propia $t \supsetneq s$, donde $t \in T$.

A.1.5 Proposición. *La función $T \mapsto [T]$ es una biyección entre el conjunto de los árboles bien podados en A y el conjunto de todos los subconjuntos cerrados de $A^{\mathbb{N}}$. Su inversa está dada por*

$$F \mapsto T_F = \{x \upharpoonright_n :\, x \in F,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq A^{<\mathbb{N}}.$$

Demostración. Sea T un árbol bien podado en A. Demostremos que $[T]$ es un subconjunto cerrado de $A^{\mathbb{N}}$. Consideremos una sucesión $(x^k) \subseteq [T]$ que converge a un punto $x \in A^{\mathbb{N}}$. Sea n un elemento arbitrario de $\mathbb{N}$ y $s = x \upharpoonright_n$. Como N_s es un abierto básico que contiene a x, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $x^K \in N_s$. Por lo tanto

$$x \upharpoonright_n = x^K \upharpoonright_n \in T.$$

Ahora tomemos S y T árboles bien podados en A tales que $S \nsubseteq T$. Sea $s \in S \setminus T$. Como S es bien podado, existe $x \in [S]$ tal que $x \upharpoonright_{long(s)} = s$. De esta forma, $x \notin [T]$. Por lo tanto $[S] \nsubseteq [T]$.

Para demostrar la segunda parte de la proposición, consideramos F un subconjunto cerrado de $A^{\mathbb{N}}$. Veamos que T_F es un árbol bien podado en A. Sea $t \in T_F$ y $s \in A^{<\mathbb{N}}$ tal que $s \subseteq t$. Así, $t = x \upharpoonright_n$, donde $x \in F$, $n \in \mathbb{N}$. Además:

$$long(s) \leq n \quad \text{y} \quad s = t \upharpoonright_{long(s)} = x \upharpoonright_{long(s)} \in T_F.$$

T_F es bien podado porque si $x \in F$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \upharpoonright_{n+1}$ es una extensión propia de $x \upharpoonright_n$. Sólo falta comprobar que $[T_F] = F$. Si $x \in A^{\mathbb{N}} \setminus F$, entonces existe $s \in A^{<\mathbb{N}}$ tal que $x \in N_s \subseteq A^{\mathbb{N}} \setminus F$ (Proposición A.1.1). Supongamos que $x \in [T_F]$. Entonces $x \upharpoonright_{long(s)} \in T_F$. Por definición de T_F, existe $y \in F$ tal que $x \upharpoonright_{long(s)} = y \upharpoonright_{long(s)}$. Por lo tanto $y \in N_s \subseteq A^{\mathbb{N}} \setminus F$, lo que contradice la elección de y. $\square$

A.1.6 Definición. Sean S, T árboles en conjuntos A y B, respectivamente. Una función $\varphi : S \to T$ es llamada *monótona* si $s \subseteq t$ implica $\varphi(s) \subseteq \varphi(t)$. Para tal φ, definimos

$$D(\varphi) = \{x \in [S] \ : \ \lim_{n\to\infty} long(\varphi(x \restriction_n)) = \infty\}.$$

Para $x \in D(\varphi)$, definimos

$$\varphi^*(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x \restriction_n) \in [T].$$

Decimos que φ es *propia* si $D(\varphi) = [S]$.

A.1.7 Proposición. *En el contexto de la definición anterior, el conjunto $D(\varphi)$ es un conjunto G_δ en $[S]$ y $\varphi^* : D(\varphi) \to [T]$ es una función continua, donde $[S]$ y $D(\varphi)$ tienen la topología de subespacio respecto de $A^{\mathbb{N}}$ y $[T]$ tiene la topología de subespacio respecto de $B^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Para cada $l \in \mathbb{N}$, definimos

$$U_l = \{x \in [S] \ : \ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } long(\varphi(x \restriction_n)) \geq l\}.$$

Veamos que U_l es un subconjunto abierto de $[S]$. Sea $x \in U_l$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $long(\varphi(x \restriction_n)) \geq l$. Definimos $s = x \restriction_n$. Entonces $x \in N_s \cap [S] \subseteq U_l$. En efecto: si $y \in N_s \cap [S]$, entonces

$$long(\varphi(y \restriction_n)) = long(\varphi(x \restriction_n)) \geq l.$$

Evidentemente $D(\varphi) = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} U_l$.

Por la Proposición A.1.1, los conjuntos $V_t = [T] \cap N_t$, donde $t \in A^{<\mathbb{N}}$, forman una base para el espacio $[T]$. Note que $(\varphi^*)^{-1}(V_t) = \bigcup\{N_s \cap D(\varphi) : s \in S, \ \varphi(s) \supseteq t\}$. $\square$

A.1.8 Proposición. *Sean $F \subseteq H$ dos subconjuntos cerrados no vacíos de $A^{\mathbb{N}}$. Entonces F es un retracto de H.*

Demostración. Por la Proposición A.1.5, existen S y T árboles bien podados en A tales que $[S] = F$ y $[T] = H$. Note que $[S] \subseteq [T]$ implica $S \subseteq T$ (vea el segundo párrafo de la demostración de la Proposición A.1.5). Mediante recursión sobre la longitud de $t \in T$, definiremos una función monónota y propia $\varphi : T \to S$ tal que $\varphi(s) = s$, para todo $s \in S$. Definimos primeramente

$\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Ahora supongamos que hemos definido $\varphi(t)$, para cualquier $t \in T$. Definimos $\varphi(t^\frown a)$, para $a \in A$ y $t^\frown a \in T$ de la siguiente forma: si $t^\frown a \in S$, entonces $\varphi(t^\frown a) = t^\frown a$. Si $t^\frown a \notin S$, definimos $\varphi(t^\frown a)$ como cualquier $\varphi(t)^\frown b \in S$, que existe debido a que S es bien podado. Por la Proposición A.1.7, la función $\varphi^* : [T] \to [S]$ es una retracción de $[T]$ en $[S]$. □

A.2. Extensiones de funciones continuas.

Sean X un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ una función acotada. Definimos *la oscilación de f en* $x \in X$ mediante

$$osc_f(x) = inf\{diam(f(A \cap U)) \,:\, U \in \mathcal{T}(x,\ X)\}.$$

Definimos también $diam(\emptyset) = 0$. Notemos que para cualquier $\epsilon > 0$, el conjunto $A_\epsilon = \{x \in X \,:\, osc_f(x) < \epsilon\}$ es abierto en X. En efecto: si $x \in A_\epsilon$, entonces existe $U \in \mathcal{T}(x,\ X)$ tal que $diam(f(A \cap U)) < \epsilon$. Así, para todo $y \in U$:

$$osc_f(y) \leq diam(f(A \cap U)) < \epsilon.$$

A.2.1 Lema. *Sea $x \in A$. Entonces f es continua en x si y sólo si $osc_f(x) = 0$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Por definición de oscilación de una función en un punto, para cualquier $\epsilon > 0$ existe $U \in \mathcal{T}(x,\ X)$ tal que

$$diam(f(A \cap U)) = sup\{d(f(y), f(z)) \,:\, y,\, z \in A \cap U\} < \epsilon.$$

Por lo tanto, para todo $y \in A \cap U$, se tiene que $d(f(y), f(x)) < \epsilon$.
($\Rightarrow$) Como f es continua en x, para cualquier $\epsilon > 0$ existe $W \in \mathcal{T}(x,\ X)$ tal que $f(A \cap W) \subseteq B(f(x), \frac{\epsilon}{4})$. Así, para cualesquier $y,\, z \in A \cap W$,

$$d(f(y), f(z)) \leq d(f(y), f(x)) + d(f(x), f(z)) < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto $diam(f(A \cap W)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. □

Debido a que $\{x \in X \,:\, osc_f(x) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{1/(n+1)}$, hemos demostrado la siguiente proposición.

A.2.2 Proposición. *Sean X un espacio topológico, Y un espacio metrizable y $f : X \to Y$ una función. Entonces los puntos de continuidad de f forman un conjunto G_δ.*

El siguiente lema nos será de bastante utilidad.

A.2.3 Lema. *Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subseteq X$, entonces $cl(A)$ es un conjunto G_δ.*

Demostración. Consideremos la función $h : X \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = d(x, A)$. Note que

$$cl(A) = h^{-1}(\{0\}) = h^{-1}\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} (-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})\big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} h^{-1}\big((-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})\big).$$

Como h es continua, el conjunto $h^{-1}\big((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\big)$ es abierto en X, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. □

A.2.4 Teorema (Lavrentiev)**.** *Sean X metrizable, Y completamente metrizable, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ una función continua. Entonces existen G un conjunto G_δ tal que $A \subseteq G \subseteq cl(A)$ y una extensión continua $g : G \to Y$ de f.*

Demostración. Sea $G = cl(A) \cap \{x \in X : osc_f(x) = 0\}$. G es la intersección de dos conjuntos G_δ, por ello, G es un G_δ. Por otro lado, si $x \in G$, entonces existe una sucesión $(x_n) \subseteq A$ que converge a x. Además, para cada $\epsilon > 0$ existe $U \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que $diam(f(U \cap A)) < \epsilon$. Considere $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, para todo $n \geq N$. Así

$$n, m \geq N \ \Rightarrow \ x_n, x_m \in U \cap A \ \Rightarrow \ d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon.$$

Por lo tanto $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en (Y, d_Y). Definimos la función $g : G \to Y$ mediante $g(x) = lim_{n\to\infty} f(x_n)$ para cada $x \in G$.

Notemos primeramente que el valor de g no depende de la elección de (x_n). En efecto: sea $(\widetilde{x_n}) \subseteq A$ otra sucesión que converge a x. Considere

$$z = lim_{n\to\infty} f(x_n), \ \ \widetilde{z} = lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x_n}), \ \ \delta = \tfrac{d_Y(z,\widetilde{z})}{4}.$$

Supongamos que $z \neq \widetilde{z}$. Fijemos $W \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que $diam(f(W \cap A)) < \delta$ y V, $\widetilde{V}$ vecindades ajenas de z y $\widetilde{z}$ con diámetro menor que δ. Existe $N \in \mathbb{N}$ que satisface

$$\text{para todo } n \geq N: \ f(x_n) \in V, \ \ f(\widetilde{x_n}) \in \widetilde{V}, \ \ x_n, \ \widetilde{x_n} \in W \cap A.$$

De esta forma:

$$d_Y(z, \widetilde{z}) \leq d_Y(z, f(x_N)) + d_Y(f(x_N), f(\widetilde{x_N})) + d_Y(f(\widetilde{x_N}), \widetilde{z}) < 3\delta < d_Y(z, \widetilde{z}),$$

lo que es una contradicción.

Es claro además que g es una extensión de f. Demostraremos ahora que g es continua, para ello demostraremos que si $U \in \mathcal{T}^*(X)$, entonces se tiene que $diam(g(U \cap G)) \leq diam(f(U \cap A))$. En efecto: sea $x \in U \cap G$. Fijemos una sucesión $(x_n) \subseteq A$ que converge a x. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, para todo $n \geq N$. De esta forma, la sucesión $(y_k) = (x_{N+k})$ está contenida en $U \cap A$. Además

$$g(x) = lim_{k\to\infty} f(y_k).$$

Por lo tanto $g(U \cap G) \subseteq cl(f(U \cap A))$. Entonces

$$diam\big(g(U \cap G)\big) \leq diam\big(cl(f(U \cap A))\big) = diam\big(f(U \cap A)\big).$$

Esto demuestra que para todo $x \in G$, $osc_g(x) \leq osc_f(x) = 0$. Por lo tanto, g es continua en x. □

A.2.5 Teorema. *Si X es metrizable y $Y \subseteq X$ es completamente metrizable, entonces Y es un conjunto G_δ en X. Recíprocamente, si X es completamente metrizable y $Y \subseteq X$ es un conjunto G_δ, entonces Y es completamente metrizable.*

En particular, un subespacio de un espacio polaco es polaco, si y sólo si es un G_δ.

Demostración. Para demostrar la primera afirmación, consideramos $id_Y : Y \to Y$. Por el Teorema A.2.4, existen G un conjunto G_δ tal que $Y \subseteq G \subseteq cl(Y)$ y $g : G \to Y$ una extensión continua de id_Y. Como Y es denso en G, $g = id_G$. Así, $Y = G$.

Demostraremos la segunda afirmación en dos pasos: primero asumiremos que Y es abierto en X, posteriormente abordaremos el caso en que Y es un conjunto G_δ en X.

Paso 1: Y es abierto en X.

Sea $d_X \leq 1$ una métrica compatible con X. Definimos $f : Y \to \mathbb{R}$ mediante

$$\forall x \in Y : \quad f(x) = \big(d_X(x,\, X \setminus Y)\big)^{-1}.$$

Esta función es continua debido a que $d_X(x,\, X\setminus Y) = 0$, si y sólo si $x \in X\setminus Y$. Ahora definimos $d_Y : Y\times Y \to \mathbb{R}$ mediante $d_Y(x, y) = d_X(x, y)+|f(x)-f(y)|$. Note que d_Y es una métrica en Y. En efecto: si x, y, $z \in Y$, entonces

$$d_Y(x, z) \leq d_X(x, y)+d_X(y, z)+|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(z)| = d_Y(x, y)+d_Y(y, z).$$

Veamos que la topología inducida en Y por la métrica $d_X \restriction_Y$ coincide con la topología inducida en Y por la métrica d_Y. En efecto: elegimos cualesquiera $x \in Y$, $r > 0$. Debido a que $d_X \restriction_Y \leq d_Y$, obtenemos

$$B_{d_Y}(x, r) \subseteq B_{d_X}(x, r) \cap Y.$$

Por otra parte, por la continuidad de f, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\, y \in Y \,\big(\, d_X(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \tfrac{r}{2}\big).$$

De esta forma, si $s = min\{\delta, \frac{r}{2}\}$, entonces $B_{d_X}(x, s) \cap Y \subseteq B_{d_Y}(x, r)$.

Finalmente, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en el espacio (Y, d_Y). Como $d_X \leq d_Y$, (x_n) es una sucesión de Cauchy en (X, d_X). Sea $x \in X$ el límite de (x_n) en la métrica d_X. La sucesión $(f(x_n))$ es convergente debido a que

$$lim_{n\to\infty}\big(d_X(x_n, x_m) + |f(x_n) - f(x_m)|\big) = 0 \;\Rightarrow\; lim_{n\to\infty}|f(x_n) - f(x_m)| = 0.$$

Sucede que $x \in Y$, porque de lo contrario

$$d_X(x,\, X \setminus Y) = lim_{n\to\infty} d_X(x_n,\, X \setminus Y) = 0 \;\Rightarrow\; (f(x_n)) \text{ no es acotada,}$$

lo que es una contradicción.

Paso 2: Y es un conjunto G_δ en X.

Sea $Y = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$, donde A_k es abierto en X, $k \in \mathbb{N}$. Consideramos $d_k \leq 1$ una métrica compatible con la métrica inducida en A_k, $k \in \mathbb{N}$. Definimos $\psi : Y \to \Pi_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mediante $\psi(y) = (y,\, y,\, y, \ldots)$. Note que ψ es una isometría entre Y y $\psi(Y)$. En efecto: si y, $\widetilde{y} \in Y$, entonces

$$d(\psi(y),\, \psi(\widetilde{y})) = d((y,\, y, \ldots),\, (\widetilde{y},\, \widetilde{y}, \ldots)) = \Sigma_{k=1}^{\infty}(2^{-k}) d_1(y,\, \widetilde{y}) = d_1(y,\, \widetilde{y}).$$

Por lo visto en el paso 1, cada A_k es un espacio polaco. Como el producto a lo más numerable de espacios polacos es un espacio polaco [14, Proposición 3.3], tenemos que $\Pi_{k\in\mathbb{N}} A_k$ es un espacio polaco. Si demostramos que $\psi(Y)$ es cerrado en $\Pi_{k\in\mathbb{N}} A_k$ habremos terminado. Sea $(y_l) \subseteq Y$ tal que $(\psi(y_l))$ converge puntualmente a $z = (z_k) \in \Pi_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, $z_k = lim_{l\to\infty} y_l$. Por lo tanto $z \in \psi(Y)$. $\square$

A.3. El espacio de Cantor.

A.3.1 Definición. Llamaremos *espacio de Cantor* al espacio $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones de ceros y unos, donde consideramos a 2 como espacio discreto y tomamos en $2^{\mathbb{N}}$ la topología producto.

A.3.2 Definición. Un *esquema de Cantor* en un conjunto X es una familia $\{A_s : s \in 2^{<\mathbb{N}}\}$ de subconjuntos de X tal que:

(i) $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset$, para $s \in 2^{<\mathbb{N}}$,

(ii) $A_{s^\frown i} \subseteq A_s$, para $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, $i \in 2$.

Recordemos que un espacio es *perfecto* si todos sus puntos son puntos límite. Si P es un subconjunto de un espacio topológico X, decimos que P es *perfecto en* X si P es cerrado y perfecto en su topología relativa.

A.3.3 Teorema. *Si X es un espacio no vacío, perfecto y polaco, entonces existe una inmersión de $\mathcal{C}$ en X.*

Demostración. Note que existe un esquema de Cantor $\{U_s : s \in 2^{<\mathbb{N}}\}$ en X tal que

(i) U_s es abierto no vacío,

(ii) $diam(U_s) \leq 2^{-long(s)}$,

(iii) $cl(U_{s^\frown i}) \subseteq U_s$, para $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, $i \in 2$.

En efecto: construimos U_s mediante recursión sobre la longitud de s. Sea x un elemento fijo de X. Definimos $U_\emptyset = B(x, 2^{-1})$. De esta forma, $U_\emptyset$ cumple las condiciones (i) y (ii). Supongamos que para todo $s \in 2^n$ hemos construido U_s que cumple las condiciones (i) y (ii). Sea $x \in U_s$. Por la regularidad de X, existe $W \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que $cl(W) \subseteq U_s$. Como X es perfecto, existe $y \in W \setminus \{x\}$. Definimos

$$U_{s^\frown 0} = B(x, 2^{-(n+2)}) \cap W \text{ y } U_{s^\frown 1} = B(y, 2^{-(n+2)}) \cap W.$$

De esta forma, $diam(U_{s^\frown 0}) \leq diam\big(B(x, 2^{-(n+2)})\big) = 2^{-(n+1)}$. Análogamente, $diam(U_{s^\frown 1}) \leq 2^{-(n+1)}$. Además $cl(U_{s^\frown i}) \subseteq cl(W) \subseteq U_s$, para cada $i \in 2$. Esto termina la construcción del esquema de Cantor.

La condición (iii) implica:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl(U_{x\restriction n+1}) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{x\restriction n}.$$

Por lo tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{x\restriction n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl(U_{x\restriction n})$. Debido a que $\{cl(U_{x\restriction n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección decreciente de cerrados no vacíos, obtenemos que para cada $x \in 2^{\mathbb{N}}$, el conjunto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl(U_{x\restriction n})$ consta de un sólo punto, digamos $\{f(x)\}$. De esta forma tenemos definida a una función $f : 2^{\mathbb{N}} \to X$. Veamos que f es inyectiva y continua, y por lo tanto una inmersión. Sean $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$ tales que $x \neq y$. Utilizando la condición (i) de la Definición A.3.2 obtenemos que si $n^* = min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$, entonces

$$U_{x\restriction n^*+1} \cap U_{x\restriction n^*+1} = \emptyset.$$

Por lo tanto $f(x) \neq f(y)$. Ahora tomemos un punto $y \in 2^{\mathbb{N}}$ y una sucesión $(y^j) \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ tales que (y^j) converge a y. Dado $\epsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-K} < \epsilon$. Por la Proposición A.1.1, $N_{y\restriction K}$ es un abierto canónico en $2^{\mathbb{N}}$ que contiene a y. Así, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $y^j \restriction_K = y \restriction_K$, para todo $j \geq J$. De esta forma, para todo $j \geq J$:

$$f(y^j) \in U_{y^j\restriction K} = U_{y\restriction K} \quad \text{y además} \quad f(y) \in U_{y\restriction K}.$$

Por la condición (ii), $diam(U_{y\restriction K}) \leq 2^{-K}$. Por lo tanto, para todo $j \geq J$, $d(f(y^j), f(y)) < \epsilon$. Por lo tanto, f es continua en $2^{\mathbb{N}}$. □

A.3.4 Corolario. *Si X es un espacio no vacío, perfecto y polaco, entonces $|X| = 2^\omega$. Particularmente, un subconjunto no vacío y perfecto de un espacio polaco tiene cardinalidad 2^ω.*

Demostración. Como X es metrizable y separable, X es homeomorfo a un subespacio de I^ω [14, Teorema 4.14]. Así, $|X| \leq |I^{\mathbb{N}}| = 2^\omega$. Además, por el Teorema A.3.3, X contiene un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$. Entonces, $|\mathcal{C}| = 2^\omega \leq |X|$. □

Sea X un espacio topológico. Decimos que $x \in X$ es un *punto de condensación* si toda vecindad abierta de x es no numerable. Denotaremos mediante X^* al conjunto de todos los puntos de condensación de X.

A.3.5 Proposición. *Si Y es un espacio polaco y perfecto, entonces $Y^* = Y$.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y $U \in \mathcal{T}(y, Y)$. Si demostramos que U satisface las hipótesis del Corolario A.3.4 obtendremos que $|U| = 2^\omega$.

Por el Teorema A.2.5, U es un espacio polaco no vacío. Veamos que U es perfecto en sí mismo. Tomemos $z \in U$ y $W \in \mathcal{T}(z, U)$. Existe V abierto en Y tal que $W = U \cap V$. Por lo tanto, $W \in \mathcal{T}(z, Y)$. Como Y es perfecto, $W \setminus \{z\} \neq \emptyset$. □

A.3.6 Teorema. *Sea X un espacio polaco. Entonces X admite una única representación de la forma $X = P \cup C$, donde P es un subconjunto perfecto de X y C es un abierto a lo más numerable.*

Demostración. Si X es perfecto, entonces definimos $P = X$ y $C = \emptyset$. Si X no es perfecto, entonces definimos $P = X^*$ y $C = X \setminus P$. Fijemos una base a lo más numerable $\mathcal{B}$ para X. Note que

$$C = \bigcup \{W \in \mathcal{B} : |W| \leq \omega\}.$$

En efecto: es claro que si $W \in \mathcal{B}$ y $|W| \leq \omega$, entonces $W \subseteq X \setminus X^* = X \setminus P = C$. Por otro lado, si $x \in C$, por definición de X^*, existe $U \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que U es a lo más numerable. Como $\mathcal{B}$ es base para X, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U$. Por lo tanto $C \subseteq \bigcup\{W \in \mathcal{B} : |W| \leq \omega\}$. Esto muestra que C es un abierto a lo más numerable. Así, P es cerrado en X.

Ahora veamos que P es perfecto en su topología relativa. Sea $z \in P$ y $V \in \mathcal{T}(z, X)$. Entonces:

$$\big(\, |V| > \omega, \;\; |V \cap (X \setminus P)| \leq \omega \,\big) \;\Rightarrow\; |V \cap P| > \omega \;\Rightarrow\; (V \cap P) \setminus \{z\} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, P es perfecto en su topología relativa.

Demostramos ahora que la descomposición es única. Supongamos que $X = P_1 \cup C_1$, donde P_1 es un subconjunto perfecto de X y C_1 es un abierto a lo más numerable. Debido a que P_1 es cerrado en X, obtenemos $P_1 = P_1^*$ (utilizar el Teorema A.2.5 y la Proposición A.3.5). Esto implica que $P_1 \subseteq P$. En efecto: si $x \in P_1$ y $U \in \mathcal{T}(x, X)$, entonces $\omega < |U \cap P_1| \leq |U|$.

Por otra parte, $C_1 \subseteq C$ debido a que C_1 es un abierto numerable. Además

$$C \setminus C_1 \subseteq C \cap P_1 \subseteq C \cap P = \emptyset \;\Rightarrow\; C \subseteq C_1.$$

Finalmente

$$P \setminus P_1 \subseteq P \cap C_1 = P \cap C = \emptyset \;\Rightarrow\; P \subseteq P_1.$$

Por lo tanto $P = P_1$ y $C = C_1$. □

A.3.7 Corolario. *Cualquier espacio polaco no numerable contiene una copia homeomorfa de $\mathcal{C}$ y en particular tiene cardinalidad 2^ω.*

Demostración. Por el Teorema A.3.6, X admite una única representación de la forma $X = P \cup C$, donde P es un subconjunto perfecto de X y C es un abierto a lo más numerable. Como X es no numerable, $P \neq \emptyset$. Además P es un espacio polaco debido a que es cerrado en X (Teorema A.2.5). Utilizando el Teorema A.3.3 obtenemos que P contiene una copia homeomorfa de $\mathcal{C}$. Así, $|\mathcal{C}| = 2^\omega \leq |P| \leq |X|$. Por el Teorema 4.14 de [14], $|X| \leq |I^{\mathbb{N}}| = 2^\omega$. □

A.4. El espacio de Baire.

A.4.1 Definición. Llamaremos *espacio de Baire* al espacio $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones de números naturales, donde consideramos a $\mathbb{N}$ como espacio discreto y tomamos en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ la topología producto.

A.4.2 Definición. Un *esquema de Lusin* en un conjunto X es una familia $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ de subconjuntos de X tal que:

(i) $A_{s^\frown i} \cap A_{s^\frown j} = \emptyset$, para $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $i \neq j$ en $\mathbb{N}$,

(ii) $A_{s^\frown i} \subseteq A_s$, para $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$.

Si (X, d) es un espacio métrico y $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ es un esquema de Lusin en X, decimos que $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ tiene *diámetro que se anula* si

$$lim_{n\to\infty} diam(A_{x\restriction n}) = 0, \text{ para todo } x \in \mathcal{N}.$$

En este caso, si $D = \{x \in \mathcal{N} : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{x\restriction n} \neq \emptyset\}$, definimos $f : D \to X$ mediante

$$\{f(x)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{x\restriction n}.$$

Si $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ es un esquema de Lusin que tiene diámetro que se anula, llamaremos a $f : D \to X$ la *función asociada al esquema de Lusin*.

A.4.3 Proposición. *Sean (X, d) un espacio métrico y $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ un esquema de Lusin que tiene diámetro que se anula. Entonces si $f : D \to X$ es la función asociada al esquema de Lusin, tenemos que*

(i) f es inyectiva y continua.

(ii) Si (X, d) es completo y cada A_s es cerrado, entonces D es cerrado.

(iii) Si A_s es abierto, entonces f es una inmersión.

Demostración. (i) Para demostrar la inyectividad de f utilizamos la condición (i) de la Definición A.4.2. Sean x, $y \in D$ tales que $x \neq y$. Si $n^* = min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$, entonces

$$U_{x\restriction n^*+1} \cap U_{x\restriction n^*+1} = \emptyset.$$

Por lo tanto $f(x) \neq f(y)$.

Ahora veamos que f es continua. Sean $y \in D$ y una sucesión $(y^j) \subseteq D\backslash\{y\}$ tales que (y^j) converge a y. Dado $\epsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $diam(A_{y\restriction_K}) < \epsilon$. Por la Proposición A.1.1, $D \cap N_{y\restriction_K}$ es un abierto canónico en D que contiene a y. Así, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $y^j \restriction_K = y \restriction_K$, para todo $j \geq J$. De esta forma, para todo $j \geq J$:

$$f(y^j) \in A_{y^j\restriction_K} = A_{y\restriction_K} \quad \text{y además} \quad f(y) \in A_{y\restriction_K}.$$

Por lo tanto, para todo $j \geq J$, $d(f(y^j), f(y)) < \epsilon$.

(ii) Consideremos $x \in \mathcal{N}$ y una sucesión $(x^j) \subseteq D$ tal que (x^j) converge a x. Veamos que la sucesión $(f(x^j))$ es de Cauchy en X. En efecto: Dado $\epsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $diam(A_{x\restriction_K}) < \epsilon$. Debido a que $D \cap N_{x\restriction_K}$ es un abierto canónico en D que contiene a x, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $x^j \restriction_K = x \restriction_K$, para todo $j \geq J$. De esta forma, para cualesquiera j, $\widetilde{j} \geq J$:

$$f(x^j) \in A_{x^j\restriction_K} = A_{x\restriction_K} \text{ y además } f(x^{\widetilde{j}}) \in A_{x^{\widetilde{j}}\restriction_K} = A_{x\restriction_K}.$$

Así, para todo j, $\widetilde{j} \geq J$, se tiene que $d(f(x^j), f(x^{\widetilde{j}})) < \epsilon$. Sea $y = lim_{j\to\infty} f(x^j)$. Como cada A_s es cerrado, $y \in A_{x\restriction_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $x \in D$ y $f(x) = y$.

(iii) Veamos que $f(N_s \cap D) = f(D) \cap A_s$, para todo $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. En efecto: si $x \in N_s \cap D$, entonces $f(x) \in A_{x\restriction long(s)} = A_s$. Ahora tomamos $z \in f(D) \cap A_s$. Como f es inyectiva, existe un único $x \in D$ tal que $f(x) = z$. Veamos que $x \in N_s$. Supongamos que $x \restriction long(s) \neq s$. Si

$$k^* = min\{k \in \{0, 1, \ldots, long(s) - 1\} : x_k \neq s_k\},$$

entonces $x \restriction k^* = s \restriction k^*$. Por la condición (ii) de la Definición A.4.2:

$$A_s \subseteq A_{s\restriction k^*+1}.$$

Además, por definición de la función asociada $f(x) \in A_{x\upharpoonright k^*+1}$. Por lo tanto $A_{s\upharpoonright k^*+1} \cap A_{x\upharpoonright k^*+1} \neq \emptyset$, lo que contradice la condición (i) de la Definición A.4.2. $\square$

A.4.4 Lema. *Si X es un espacio polaco, $\epsilon > 0$ y $U \in \mathcal{T}^*(X)$, entonces existe una colección $\{U_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{T}^*(X)$ tal que $diam(U_i) < \epsilon$ y $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} cl(U_i)$.*

Demostración. Sea D un subconjunto denso y numerable de X. Definimos

$$\mathcal{A}_U = \{B(y, \tfrac{1}{i}) : \tfrac{1}{i} < \tfrac{\epsilon}{2},\ y \in D,\ cl(B(y, \tfrac{1}{i})) \subseteq U,\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Si $x \in U$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{i} < \epsilon$ y $B(x, \frac{1}{i}) \subseteq U$. Sea $y \in D \cap B(x, \frac{1}{3i})$. Veamos que $cl(B(y, \frac{1}{3i})) \subseteq B(x, \frac{1}{i})$:

$$z \in cl(B(y, \tfrac{1}{3i})) \ \Rightarrow\ d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \tfrac{2}{3i} < \tfrac{1}{i}.$$

Además $\frac{1}{3i} < \frac{1}{2i} < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto $B(y, \frac{1}{3i}) \in \mathcal{A}_U$ y $x \in cl(B(y, \frac{1}{3i}))$. $\square$

A.4.5 Corolario. *Si X es un espacio polaco, F es cerrado y U es abierto, entonces $F \cap U$ es un conjunto F_σ.*

Demostración. Asumiremos que $F \neq \emptyset \neq U$. Por el Lema A.4.4, existe una colección $\{U_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{T}^*(X)$ tal que $diam(U_i) < 1$ y $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} cl(U_i)$. Así $F \cap U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(F \cap cl(U_i))$. $\square$

A.4.6 Teorema. *Sea X un espacio polaco. Entonces existen un conjunto cerrado $F \subseteq \mathcal{N}$ y una condensación $f : F \to X$. En particular, si X es no vacío, existe una función continua y sobreyectiva $g : \mathcal{N} \to X$ que extiende a f.*

Demostración. Fijemos $d \leq 1$ una métrica completa y compatible con la topología de X.

Afirmación: Si $F \subseteq X$ es un conjunto F_σ y $\epsilon > 0$, entonces F se descompone en una unión ajena $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, donde F_n es un conjunto F_σ, $diam(F_n) < \epsilon$ y $cl(F_n) \subseteq F$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración de la afirmación: Sea $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, donde cada C_n es cerrado. En la demostración del Lema A.4.4 exhibimos una base numerable para el espacio X formada por bolas de diámetro menor que ϵ. Las correspondientes bolas cerradas $\{B_m : m \in \omega\}$ también tienen diámetro menor que ϵ y cubren al espacio X. Entonces

$$F = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} (C_n \cap B_m),$$

donde cada conjunto $C_n \cap B_m$ es cerrado y tiene diámetro menor que ϵ. De esta forma, podemos asumir que cada C_n tiene diámetro menor que ϵ.

Si definimos $G_n = C_n \setminus \bigcup_{k<n} C_k$, entonces $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$, pero ahora la unión es ajena y cada G_n tiene diámetro menor que ϵ. Además, por el Corolario A.4.5, cada G_n es un conjunto F_σ. Sea $G_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m^{(n)}$, donde cada $D_m^{(n)}$ es cerrado. Debido a que cualquier unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, podemos asumir que $D_m^{(n)} \subseteq D_{m+1}^{(n)}$. De esta forma:

$$G_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (D_m^{(n)} \setminus D_{m-1}^{(n)}),$$

con la convención de que $D_{-1}^{(n)} = \emptyset$. Los conjuntos $D_m^{(n)} \setminus D_{m-1}^{(n)}$ son F_σ (de nuevo aplique el Corolario A.4.5), ajenos dos a dos (para cualesquiera m y n), de diámetro menor que ϵ y además

$$cl(D_m^{(n)} \setminus D_{m-1}^{(n)}) \subseteq D_m^{(n)} \subseteq F.$$

Definimos $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ como una ordenación de $\{D_m^{(n)} \setminus D_{m-1}^{(n)} : n, m \in \mathbb{N}\}$. $\boxtimes$

Nuestro objetivo es construir un esquema de Lusin $\{F_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ que nos permita utilizar las propiedades de la correspondiente función asociada expresadas en la Proposición A.4.3. Primero definimos $F_\emptyset = X$. Ahora construimos a los conjuntos etiquetados con sucesiones finitas de números naturales de longitud 1: la afirmación anterior nos garantiza que es posible expresar a $F_\emptyset$ como una unión ajena, digamos $F_\emptyset = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{(i)}$, donde $F_{(i)}$ es un conjunto F_σ, $diam(F_{(i)}) < 2^{-1}$ y $cl(F_{(i)}) \subseteq F_\emptyset$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Para construir a los conjuntos etiquetados con sucesiones finitas de números naturales de longitud 2 utilizamos nuevamente la afirmación anterior, esto es: descomponemos a cada $F_{(i)}$ como una unión ajena, digamos, $F_{(i)} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_{(i)^\frown j}$, donde $F_{(i)^\frown j}$ es un conjunto F_σ, $diam(F_{(i)^\frown j}) < 2^{-2}$ y $cl(F_{(i)^\frown j}) \subseteq F_{(i)}$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Así, construimos un esquema de Lusin tal que para todo $s \in \mathbb{N}^n$, los conjuntos $\{F_{s^\frown n} : n \in \mathbb{N}\}$ son los que resultan de aplicar la afirmación anterior al conjunto F_s, con $\epsilon = 2^{-(long(s)+1)}$. El esquema obtenido tiene las siguientes propiedades:

(i) $F_\emptyset = X$;

(ii) F_s es un conjunto F_σ;

(iii) $F_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_{s^\frown i} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} cl(F_{s^\frown i})$;

(iv) $diam(F_s) \leq 2^{-long(s)}$.

Veamos que la función asociada $f : D \to X$ es una condensación. Por la condición (i) de la Proposición A.4.3, f es inyectiva y continua. Además f es sobreyectiva. En efecto: dado $p \in X$ tomamos $s_0 = \emptyset$, de modo que $p \in F_{s_0}$. Por la condición (iii), existe $s_1 \supseteq s_0$ tal que $p \in F_{s_1}$ y existe $s_2 \supseteq s_1$ tal que $p \in F_{s_2}$. Repitiendo este proceso obtenemos un $x \in \mathcal{N}$ tal que $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x\restriction n}$. Así $f(x) = p$.

Sólo falta verificar que D es cerrado. Sea $x \in \mathcal{N} \setminus D$. Si probamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_{x\restriction n} = \emptyset$, tendremos que $x \in N_{x\restriction n} \subseteq \mathcal{N} \setminus D$ y habremos terminado. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $p_n \in F_{x\restriction n}$. Por las propiedades (iii) y (iv), la sucesión (p_n) es de Cauchy en X y en consecuencia converge a $p \in cl(F_{x\restriction n+1}) \subseteq F_{x\restriction n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x\restriction n}$, lo que es una contradicción.

La última afirmación del teorema se sigue de la Proposición A.1.8. □

A.4.7 Lema. *Sea X un espacio polaco y cero-dimensional. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$, X posee una base numerable formada por conjuntos cerrado-abiertos de diámetro menor que ϵ.*

Demostración. En la demostración del Lema A.4.4 exhibimos una base numerable $\mathcal{B}$ para el espacio X formada por bolas de diámetro menor que ϵ. Por otra parte, como X es cero dimensional, existe una base $\mathcal{W}$ para X formada por conjuntos cerrado-abiertos. Como el espacio X es segundo numerable, podemos extraer una subcolección $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ tal que $\mathcal{W}'$ es base para X y $|\mathcal{W}'| \leq \omega$. Así, para cada $B \in \mathcal{B}$ existe una subcoleción $\mathcal{V}_B \subseteq \mathcal{W}'$ tal que $\bigcup \mathcal{V}_B = B$. De esta forma, la colección $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \mathcal{V}_B \subseteq \mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ es una base numerable para X formada por conjuntos cerrado-abiertos de diámetro menor que ϵ. □

A.4.8 Lema. $\mathcal{C}_0 = \{z \in \mathcal{C} \ : \ z \textit{ se estaciona en } 0\}$ *es un subconjunto F_σ del espacio de Cantor $\mathcal{C}$.*

Demostración. Para cada $l \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{C}_0^l = \{z = (z_i) \in \mathcal{C} \; : \; z_i = 0 \text{ para todo } i \geq l\}.$$

Debido a que $\mathcal{C}_0 = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_0^l$, basta demostrar que $\mathcal{C}_0^l$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Tomemos pues l un elemento arbitrario de $\mathbb{N}$ y $z = (z_i) \in cl(\mathcal{C}_0^l)$. Ahora recordamos que $\mathcal{C}$ es un espacio metrizable debido a que es el producto de una cantidad numerable de espacios discretos, y en consecuencia, metrizables. Esto implica que existe una sucesión $s = (z^k) \subseteq \mathcal{C}_0^l$ que converge a z en la métrica compatible con la topología de $\mathcal{C}$. Pero el espacio $\mathcal{C}$ está equipado con la topología de la convergencia puntual (vea la Definición A.3.1 y la Proposición 1.2.1). Por lo tanto, si utilizamos la notación $z^k = (z_i^k) = (z_0^k, z_1^k, \ldots, z_i^k, \ldots)$ para representar a cada término de s, obtenemos que

$$\lim_{k \to \infty} z_i^k = z_i, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Como $s \subseteq \mathcal{C}_0^l$, sucede que $z_i^k = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $i \geq l$. Esto implica que si $i \geq l$, entonces $\lim_{k \to \infty} z_i^k = \lim_{k \to \infty} 0$. Por lo tanto $z_i = 0$, para todo $i \geq l$. Esto demuestra que $z \in \mathcal{C}_0^l$ y en consecuencia $\mathcal{C}_0^l$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}$. $\square$

A.4.9 Lema. *El espacio de Baire $\mathcal{N}$ es homeomorfo a un subespacio G_δ del espacio de Cantor $\mathcal{C}$.*

Demostración. Para cada $l \in \mathbb{N}$ denotaremos mediante 0^l a la sucesión finita formada por l ceros. Por ejemplo, en el caso en que $l = 0$ sucede que $0^l = \emptyset$. Utilizando esta notación definimos una función $f : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ mediante

$$f(x) = f(x_n) = 0^{x_0} {}^\frown 1 {}^\frown 0^{x_1} {}^\frown 1 {}^\frown 0^{x_2} {}^\frown 1 {}^\frown \ldots.$$

Nuestro objetivo es demostrar que f es una inmersión y que $f(\mathcal{N})$ es un subespacio G_δ del espacio de Cantor $\mathcal{C}$.

AFIRMACIÓN 1: La función f es inyectiva.

Demostración de la afirmación: Elegimos x, y dos elementos distintos de $\mathcal{N}$. Sea $n^* = min\{n \in \mathbb{N} \; : \; x_n \neq y_n\}$. Debido a que $(x_0, \ldots, x_{n^*-1}) = (y_0, \ldots, y_{n^*-1})$ obtenemos que

$$0^{x_0} {}^\frown 1 {}^\frown \ldots {}^\frown 1 {}^\frown 0^{x_{n^*-1}} {}^\frown 1 = 0^{y_0} {}^\frown 1 {}^\frown \ldots {}^\frown 1 {}^\frown 0^{y_{n^*-1}} {}^\frown 1.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad que $x_{n^*} < y_{n^*}$. Así, el bloque de ceros $0^{x_{n^*}}$ es menos largo que el bloque de ceros $0^{y_{n^*}}$. Por lo tanto las sucesiones finitas

$$0^{x_{n^*}} {}^\frown 1 \quad \text{y} \quad 0^{y_{n^*}} \restriction_{x_{n^*}+1}$$

tienen la misma longitud pero son diferentes. Esto a su véz implica que las sucesiones finitas

$$s(x) = 0^{x_0} {}^\frown 1^\frown \ldots {}^\frown 1^\frown 0^{x_{n^*}} {}^\frown 1 \qquad \text{y} \qquad s(y) = 0^{y_0} {}^\frown 1^\frown \ldots {}^\frown 1^\frown 0^{y_{n^*}} \restriction_{x_{n^*}+1}$$

son diferentes. Como $s(x) \subseteq f(x)$ y $s(y) \subseteq f(y)$ obtenemos que $f(x) \neq f(y)$. $\boxtimes$

Afirmación 2: $f(\mathcal{N}) = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$, donde $\mathcal{C}_0 = \{z \in \mathcal{C} \ : \ z \text{ se estaciona en } 0\}$ (vea el lema A.4.8).

Demostración de la afirmación: Tomemos $z \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$. Nuestro objetivo es construir $x \in \mathcal{N}$ tal que $f(x) = z$. Como $\{k \in \mathbb{N} \ : \ z_k = 1\} \neq \emptyset$, comenzamos nuestra construcción definiendo $y_0 = min\{k \in \mathbb{N} \ : \ z_k = 1\}$. Así, $z_{y_0} = 1$ y además para todo $k < y_0$ sucede que $z_k = 0$. Definimos entonces $x_0 = y_0$. Observe que $0^{x_0} {}^\frown 1 = z \restriction_{x_0+1}$.

Note ahora que $\{k \in \mathbb{N} \ : \ k > y_0, \ \ z_k = 1\} \neq \emptyset$ porque de lo contrario $z_k = 0$ para todo $k > y_0$, lo que no es posible. Esto nos permite definir

$$y_1 = min\{k \in \mathbb{N} \ : \ k > y_0, \ \ z_k = 1\}.$$

Así, para todo $y_0 < k < y_1$ sucede que $z_k = 0$. Si definimos $x_1 = y_1 - (y_0 + 1)$ obtenemos que

$$0^{x_0} {}^\frown 1^\frown 0^{x_1} {}^\frown 1 = z \restriction_{(x_0+1)+(x_1+1)} .$$

Ahora supongamos que hemos determinado $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{N}$ y que a partir de estos números hemos definido $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ que cumplen la condición

$$0^{x_0} {}^\frown 1^\frown \ldots {}^\frown 1^\frown 0^{x_n} {}^\frown 1 = z \restriction_{(x_0+1)+\ldots+(x_n+1)} .$$

Para determinar $x_{n+1} \in \mathbb{N}$ definimos $y_{n+1} = min\{k \in \mathbb{N} \ : \ k > y_n, \ \ z_k = 1\}$ (note que $\{k \in \mathbb{N} \ : \ k > y_n, \ \ z_k = 1\} \neq \emptyset$ por la elección de z). De esta forma, para todo $y_n < k < y_{n+1}$ sucede que $z_k = 0$. Definiendo $x_{n+1} = y_{n+1} - (y_n + 1)$ obtenemos que

$$0^{x_0} {}^\frown 1^\frown \ldots {}^\frown 1^\frown 0^{x_{n+1}} {}^\frown 1 = z \restriction_{(x_0+1)+\ldots+(x_{n+1}+1)} .$$

Mediante este proceso obtenemos una sucesión $x \in \mathcal{N}$ que cumple la condición $f(x) = z$. Note que x es la sucesión que cuenta la longitud de cada bloque de ceros consecutivos de z. ⊠

Utilizando el lema A.4.8 obtenemos que $f(\mathcal{N})$ es un subespacio G_δ del espacio de Cantor $\mathcal{C}$.

Afirmación 3: La colección

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{N_s \cap f(\mathcal{N}) \ : \ s \in 2^{<\mathbb{N}} \text{ y } s \text{ termina en } 1\}$$

es una base para $f(\mathcal{N})$.

Demostración de la afirmación: Por la proposición A.1.1 sabemos que la colección

$$\mathcal{B} = \{N_s \cap f(\mathcal{N}) \ : \ s \in 2^{<\mathbb{N}}\}$$

es una base para $f(\mathcal{N})$. Así, para demostrar esta afirmación basta demostrar que para cada $B \in \mathcal{B}$ y cada $z \in B$ existe $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ tal que $z \in \widetilde{B} \subseteq B$. Tomemos pues $B \in \mathcal{B}$ y $z \in B$. Así, existen $m \in \mathbb{N}$ y $s \in 2^m$ tales que $B = N_s \cap f(\mathcal{N})$. Analizaremos los dos casos posibles: $s_{m-1} = 0$ ó $s_{m-1} = 1$. Si $s_{m-1} = 1$, entonces $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$. En este caso basta proponer $\widetilde{B} = B$.
Veamos qué sucede si $s_{m-1} = 0$: como $z \in N_s \cap f(\mathcal{N}) = N_s \setminus \mathcal{C}_0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 < k$ y $z_k = 1$. Además $s = z \restriction_m$. Si definimos $\widetilde{s} = z \restriction_{k+1}$ obtenemos que

$$z \in N_{\widetilde{s}} \cap f(\mathcal{N}) \in \widetilde{\mathcal{B}}.$$

Note que $s \subseteq \widetilde{s}$ implica que $N_{\widetilde{s}} \subseteq N_s$. Por lo tanto $N_{\widetilde{s}} \cap f(\mathcal{N}) \subseteq N_s \cap f(\mathcal{N})$. ⊠

Afirmación 4: $f : \mathcal{N} \to f(\mathcal{N})$ es continua.

Demostración de la afirmación: Por lo visto en la afirmación 3, basta demostrar que para cualesquier $m \in \mathbb{N}$ y $s \in 2^m$ tales que $s_{m-1} = 1$, sucede que $f^{-1}(N_s \cap f(\mathcal{N}))$ es abierto en $\mathcal{N}$. Mediante el proceso efectuado en la demostración de la afirmación 2, podemos construir $t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ tal que t es la sucesión finita que cuenta la longitud de cada bloque de ceros consecutivos de s. Esto significa que

$$s = (s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}) = 0^{t_0}{}^\frown 1^\frown 0^{t_1}{}^\frown 1^\frown \ldots {}^\frown 1^\frown 0^{t_k}{}^\frown 1,$$

para algún $k \in \mathbb{N}$. Veamos que $f^{-1}(N_s \cap f(\mathcal{N})) = N_t$. Note que

$$\begin{aligned} x \in N_t &\Rightarrow t = x \restriction_{k+1} \\ &\Rightarrow (t_0, \ldots, t_k) = (x_0, \ldots, x_k) \\ &\Rightarrow s = 0^{t_0}{}^\frown 1^\frown \ldots^\frown 1^\frown 0^{t_k}{}^\frown 1 = 0^{x_0}{}^\frown 1^\frown \ldots^\frown 1^\frown 0^{x_k}{}^\frown 1 \subseteq f(x) \\ &\Rightarrow f(x) \in N_s. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} y \in f^{-1}(N_s \cap f(\mathcal{N})) &\Rightarrow f(y) \in N_s \\ &\Rightarrow s = f(y) \restriction_m \\ &\Rightarrow 0^{t_0}{}^\frown 1^\frown 0^{t_1}{}^\frown 1^\frown \ldots^\frown 1^\frown 0^{t_k}{}^\frown 1 = f(y) \restriction_m . \end{aligned}$$

Por la forma en que está definida la función f, nos damos cuenta de que la sucesión y cuenta la longitud de cada bloque de ceros consecutivos de la sucesión $f(y)$. Así, la última condición sólo es posible si $t = y \restriction_{k+1}$. Por lo tanto $y \in N_t$. ⊠

Afirmación 5: $f : \mathcal{N} \to f(\mathcal{N})$ es abierta.

Demostración de la afirmación: Veamos que para cualesquiera $l \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{N}^l$ sucede que $f(N_t)$ es abierto en $f(\mathcal{N})$. Consideremos la sucesión

$$s = 0^{t_0}{}^\frown 1^\frown 0^{t_1}{}^\frown 1^\frown \ldots^\frown 1^\frown 0^{t_{l-1}}{}^\frown 1.$$

Note que $f(N_t) = N_s \cap f(\mathcal{N}) \in \widetilde{\mathcal{B}}$. En efecto:

$$\begin{aligned} y \in N_t &\Rightarrow t = y \restriction_l \\ &\Rightarrow (t_0, \ldots, t_{l-1}) = (y_0, \ldots, y_{l-1}) \\ &\Rightarrow s = 0^{t_0}{}^\frown 1^\frown \ldots^\frown 1^\frown 0^{t_{l-1}}{}^\frown 1 = 0^{y_0}{}^\frown 1^\frown \ldots^\frown 1^\frown 0^{y_{l-1}}{}^\frown 1 \subseteq f(y) \\ &\Rightarrow f(y) \in N_s. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $y \in \mathcal{N}$ tal que $f(y) \in N_s$, entonces

$$s = 0^{t_0}{}^\frown 1^\frown \ldots^\frown 1^\frown 0^{t_{l-1}}{}^\frown 1 \subseteq f(y).$$

Pero esto sólo puede suceder si $y \restriction_l = t$, es decir, si $y \in N_t$. Por lo tanto $f(y) \in f(N_t)$. □

A.4.10 Teorema. *Todo espacio polaco y cero-dimensional es homemomorfo a un subespacio cerrado de $\mathcal{N}$ y a un subespacio G_δ de $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea X un espacio polaco y cero-dimensional. Fijemos $d \leq 1$ una métrica completa y compatible con la topología de X.

AFIRMACIÓN: Para cualquier abierto no vacío $U \subseteq X$ y cualquier $\epsilon > 0$, existe una colección $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos cerrado-abiertos, ajenos entre sí y de diámetro menor que ϵ tal que $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$.

Demostración de la afirmación: Por el Lema A.4.7, X posee una base numerable formada por conjuntos cerrado-abiertos de diámetro menor que ϵ. Así, es posible expresar a U en la forma $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$, donde cada U_i es cerrado-abierto y tiene diámetro menor que ϵ. Estableciendo $V_i = U_i \setminus \bigcup_{l<i} U_l$, obtenemos la colección requerida. ⊠

Nuestro objetivo es construir un esquema de Lusin $\{C_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ que nos permita utilizar las propiedades de la correspondiente función asociada expresadas en la Proposición A.4.3. Primero definimos $C_\emptyset = X$. Ahora construimos a los conjuntos etiquetados con sucesiones finitas de números naturales de longitud 1: la afirmación anterior nos garantiza que es posible expresar a $C_\emptyset$ como una unión ajena, digamos $C_\emptyset = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{(i)}$, donde $C_{(i)}$ es cerrado-abierto y $diam(C_{(i)}) < 2^{-1}$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Para construir a los conjuntos etiquetados con sucesiones finitas de números naturales de longitud 2 utilizamos nuevamente la afirmación anterior, esto es: descomponemos a cada $C_{(i)}$ como una unión ajena, digamos, $C_{(i)} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_{(i)^\frown j}$, donde $C_{(i)^\frown j}$ es cerrado-abierto y $diam(C_{(i)^\frown j}) < 2^{-2}$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

De esta forma, construimos un esquema de Lusin tal que para todo $s \in \mathbb{N}^n$, los conjuntos $\{C_{s^\frown n} : n \in \mathbb{N}\}$ son los que resultan de aplicar la afirmación anterior al conjunto C_s, con $\epsilon = 2^{-(long(s)+1)}$. El esquema obtenido tiene las siguientes propiedades:

(i) $C_\emptyset = X$;

(ii) C_s es un conjunto cerrado-abierto;

(iii) $C_s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{s^\frown n}$;

(iv) $diam(C_s) \leq 2^{-long(s)}$.

Sea $f : D \to X$ la función asociada. Utilizando las condiciones (ii) y (iii) de la Proposición A.4.3 obtenemos que D es un subespacio cerrado de $\mathcal{N}$ y que f es una inmersión. Verificamos que f es sobreyectiva mediante la técnica de la demostración anterior: dado $p \in X$ tomamos $s_0 = \emptyset$, de modo que $p \in C_{s_0}$. Por la condición (iii), existe $s_1 \supseteq s_0$ tal que $p \in C_{s_1}$ y existe $s_2 \supseteq s_1$ tal que $p \in C_{s_2}$. Repitiendo este proceso obtenemos un $x \in \mathcal{N}$ tal que $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{x\restriction n}$. Así $f(x) = p$.

La última afirmación se debe a que $\mathcal{N}$ es homeomorfo a un subespacio G_δ de $\mathcal{C}$ (Lema A.4.9). $\square$

Para obtener un homeomorfismo definido sobre todo $\mathcal{N}$ debemos imponer una condición que nos garantize que cada abierto de X se puede descomponer en una unión ajena de una cantidad numerable de conjuntos cerrado-abiertos no vacíos de diámetro arbitrariamente pequeño.

A.4.11 Teorema. *El espacio de Baire $\mathcal{N}$ es el único, salvo homeomorfismos, espacio polaco cero-dimensional no vacío para el que todos los subconjuntos compactos tienen interior vacío.*

Demostración. Notemos que $\mathcal{N}$ tiene estas propiedades. Supongamos que existe K un subespacio compacto de $\mathcal{N}$ que tiene interior no vacío. De esta forma, K contiene un abierto canónico N_s, donde $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Debido a que N_s es un subconjunto cerrado de K obtenemos que N_s también es compacto. Pero esto no es posible, ya que la colección $\{N_{s^\frown n} : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable de abiertos ajenos que cubre a N_s.

Ahora consideramos un espacio X con las propiedades mencionadas en el enunciado del teorema. Fijemos $d \leq 1$ una métrica completa y compatible con la topología de X.

Afirmación: Para cualquier conjunto cerrado-abierto no vacío $U \subseteq X$ y cualquier $\epsilon > 0$, existe una colección $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos no vacíos, cerrado-abiertos, ajenos entre sí y de diámetro menor que ϵ tal que $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$.

Demostración de la afirmación: U no es compacto debido a que tiene interior no vacío. Por lo tanto existe una cubierta abierta de U de la que no es posible extraer una subcubierta finita. Por el Lema A.4.7, cada elemento de dicha cubierta puede expresarse como una unión de conjuntos cerrado-abiertos de diámetro menor que ϵ que pertenecen a una base numerable del espacio X.

Así, la colección de todos estos conjuntos cerrado-abiertos determinan una cubierta numerable $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ del conjunto U de la que tampoco es posible extraer una subcubierta finita. La colección $\{V_i = U_i \setminus \bigcup_{l<i} U_l : i \in \mathbb{N}\}$ también es una cubierta de U de la que no es posible extraer una subcubierta finita. Eliminando a todos los V_i que puedan ser vacíos obtenemos una colección numerable con las propiedades requeridas. $\boxtimes$

Construimos un esquema de Lusin tal que para todo $s \in \mathbb{N}^n$, los conjuntos $\{C_{s^\frown n} : n \in \mathbb{N}\}$ son los que resultan de aplicar el resultado anterior al conjunto C_s, con $\epsilon = \frac{1}{long(s)+1}$ (vea las demostraciones de los Teoremas A.4.6 y A.4.10). El esquema obtenido cumple lo siguiente:

(i) $C_\emptyset = X$, $C_s \neq \emptyset$ para todo $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$;

(ii) C_s es abierto y cerrado;

(iii) $C_s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{s^\frown n}$;

(iv) $diam(C_s) \leq 2^{-long(s)}$.

Sea $f : D \to X$ la función asociada. Por la condición (iii) de la Proposición A.4.3, f es una inmersión. Además, por las condiciones (i) y (iii), f es sobreyectiva. Sólo falta verificar que $D = \mathcal{N}$. Sea $x \in \mathcal{N}$. Por la condición (i), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $p_n \in C_{x\restriction n}$. Por las propiedades (iii) y (iv) la sucesión (p_n) es de Cauchy en X y en consecuencia converge a $p \in cl(C_{x\restriction n+1}) \subseteq C_{x\restriction n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{x\restriction n}$. $\square$

A.5. Conjuntos de Borel.

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema.

A.5.1 Teorema. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio polaco y $A \subseteq X$ es un conjunto de Borel, entonces existe una topología polaca $\mathcal{T}_A \supseteq \mathcal{T}$ para X tal que $\mathbf{B}(\mathcal{T}_A) = \mathbf{B}(\mathcal{T})$ y A es cerrado-abierto en $\mathcal{T}_A$, donde $\mathbf{B}(\mathcal{T}_A)$ y $\mathbf{B}(\mathcal{T})$ denotan a los conjuntos de Borel de $(X, \mathcal{T}_A)$ y $(X, \mathcal{T})$, respectivamente.*

Necesitaremos los siguientes lemas.

A.5.2 Lema. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio polaco y $F \subseteq X$ cerrado. Si $\mathcal{T}_F$ es la topología en X generada por la base*

$$\mathcal{T} \cup \{U \cap F : U \in \mathcal{T}\},$$

entonces $\mathcal{T}_F$ *es polaca,* $\mathbf{B}(\mathcal{T}_F) = \mathbf{B}(\mathcal{T})$ *y* F *es cerrado-abierto en* $\mathcal{T}_F$*.*

Demostración. Denotaremos mediante $\mathcal{O}$ y $\widetilde{\mathcal{O}}$ a las topologías relativas $\mathcal{T}\restriction_F$ y $\mathcal{T}\restriction_{X\setminus F}$, respectivamente. Por el Teorema A.2.5, $(F,\mathcal{O})$ y $(X\setminus F,\widetilde{\mathcal{O}})$ son subespacios polacos de X. En consecuencia, $(F,\mathcal{O})\oplus(X\setminus F,\widetilde{\mathcal{O}})$ es una topología polaca en X.

Veamos que $(F,\mathcal{O})\oplus(X\setminus F,\widetilde{\mathcal{O}}) = (X,\mathcal{T}_F)$. En efecto: todo $U\in\mathcal{T}$ se puede escribir en la forma $U=(U\cap F)\cup(U\cap(X\setminus F))$. Por lo tanto, la base de $\mathcal{T}_F$ está contenida en la suma directa mencionada anteriormente. Además, si U, $V\in\mathcal{T}$, entonces $(F\cap U)\cup((X\setminus F)\cap V)\in\mathcal{T}_F$.

Finalmente: $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_F\Rightarrow\mathbf{B}(\mathcal{T})\subseteq\mathbf{B}(\mathcal{T}_F)$. Además $\mathcal{T}\cup\{U\cap F : U\in\mathcal{T}\}\subseteq\mathbf{B}(\mathcal{T})\Rightarrow\mathbf{B}(\mathcal{T}_F)\subseteq\mathbf{B}(\mathcal{T})$. $\square$

A.5.3 Lema. *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *un espacio polaco y sea* $\{\mathcal{T}_n : n\in\mathbb{N}\}$ *una sucesión de topologías polacas en* X *con* $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_n$*,* $n\in\mathbb{N}$*. Entonces la topología* $\mathcal{T}_\infty$ *generada por* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{T}_n$ *es polaca. Además, si* $\mathcal{T}_n\subseteq\mathbf{B}(\mathcal{T})$ *entonces* $\mathbf{B}(\mathcal{T}_\infty)=\mathbf{B}(\mathcal{T})$*.*

Demostración. Para cada $n\in\mathbb{N}$, fijamos $\{U_i^n : i\in\mathbb{N}\}$ una base del espacio $(X,\mathcal{T}_n)$. De esta forma, $\{U_i^n : i\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\}$ es una subbase de $(X,\mathcal{T}_\infty)$.

Sea $X_n=X$, para $n\in\mathbb{N}$. Consideremos la función $\varphi: X\to\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ dada por $\varphi(x)=(x,\,x,\,x,\ldots)$. El conjunto $\varphi(X)$ es cerrado en $\prod_{n\in\mathbb{N}}(X_n,\mathcal{T}_n)$. En efecto: si $z=(z_n)\in(\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n)\setminus\varphi(X)$, entonces existen i, $j\in\mathbb{N}$, $i\neq j$, tales que $z_i\neq z_j$. Elegimos U, V abiertos ajenos en $\mathcal{T}$ tales que $z_i\in U$, $z_j\in V$; y definimos

$$W_n=\begin{cases} U & \text{si } n=i,\\ V & \text{si } n=j,\\ X_n & \text{si } i\neq n\neq j.\end{cases}$$

De esta forma, $\prod_{n\in\mathbb{N}}W_n$ es abierto en $\prod_{n\in\mathbb{N}}(X_n,\mathcal{T}_n)$ y

$$z\in\prod_{n\in\mathbb{N}}W_n\subseteq(\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n)\setminus\varphi(X).$$

Por el Teorema A.2.5, $\varphi(X)$ es un subespacio polaco de $\prod_{n\in\mathbb{N}}(X_n,\mathcal{T}_n)$.

Veamos ahora que $\varphi:(X,\mathcal{T}_\infty)\to\varphi(X)$ es un homeomorfismo. Para todo $n\in\mathbb{N}$, la composición $\pi_n\circ\varphi = Id_X : (X,\mathcal{T}_\infty)\to(X_n,\mathcal{T}_n)$ es continua. Además, para cualesquiera i, $n\in\mathbb{N}$:

$$\varphi(U_i^n)=\big(\big(\prod_{l\neq n}X_l\big)\times U_i^n\big)\cap\varphi(X).$$

Por lo tanto φ es una función abierta.

Finalmente, debido a que $\{U_i^n : i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ es una subbase para la topología $\mathcal{T}_\infty$, si $\mathcal{T}_n \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{T})$ entonces $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{T})$. Además $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_\infty \Rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{T}) \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{T}_\infty)$. $\square$

Demostración del Teorema A.5.1. Definimos $\mathcal{S}$ como la colección de todos los subconjuntos $A \subseteq X$ para los que existe una topología polaca $\mathcal{T}_A \supseteq \mathcal{T}$ tal que $\mathbf{B}(\mathcal{T}_A) = \mathbf{B}(\mathcal{T})$ y A es cerrado-abierto en $\mathcal{T}_A$. Note que $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X. En efecto: para comprobar que $X \in \mathcal{S}$ basta tomar $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}$. Además, si $A \in \mathcal{S}$, estableciendo $\mathcal{T}_{X\setminus A} = \mathcal{T}_A$, obtenemos que $X \setminus A \in \mathcal{S}$. Finalmente consideremos $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{T}_n$ la topología correspondiente al conjunto A_n que cumple las condiciones en la definición de $\mathcal{S}$. Consideramos $\mathcal{T}_\infty$ la topología generada por $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$. Por el Lema A.5.3, $\mathcal{T}_\infty$ es polaca y además

$$\mathcal{T}_n \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{T}_n) = \mathbf{B}(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{T}_\infty) = \mathbf{B}(\mathcal{T}).$$

Por el Lema A.5.2, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es cerrado en $(X, \mathcal{T}_\infty)$. Además $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_\infty$ debido a que $A_n \in \mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_\infty$.

Una aplicación más del Lema A.5.2 muestra que si F es cerrado en $(X, \mathcal{T})$, entonces $F \in \mathcal{S}$. Por lo tanto $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ y $\mathbf{B}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{S}$. $\boxtimes$

A.5.4 Teorema (Del Conjunto Perfecto para Conjuntos de Borel)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio polaco y $A \in \mathbf{B}(\mathcal{T})$. Entonces A es numerable ó bien el espacio $(A, \mathcal{T}\restriction_A)$ contiene una copia homeomorfa del espacio de Cantor.*

Demostración. Por el Teorema A.5.1 podemos extender la topología $\mathcal{T}$ a una nueva topología polaca $\mathcal{T}_A$ para X, que posee los mismos conjuntos de Borel y en la que A es un conjunto cerrado-abierto. Empleando el Teorema A.2.5 obtenemos que $(A, \mathcal{T}_A\restriction_A)$ es un espacio polaco. Por el Corolario A.3.7, si A es no numerable, entonces existe una inmersión $i : \mathcal{C} \to (A, \mathcal{T}_A\restriction_A)$.

Ahora consideramos al conjunto A equipado con la topología de subespacio respecto de $(X, \mathcal{T})$. Veamos que la función $i : \mathcal{C} \to (A, \mathcal{T}\restriction_A)$ es también una inmersión. En efecto: sea $U \in \mathcal{T}$; note que

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A \;\Rightarrow\; U \cap A \in \mathcal{T}_A\restriction_A \;\Rightarrow\; i^{-1}(A \cap U) \text{ es abierto en } \mathcal{C}.$$

Por lo tanto $i : \mathcal{C} \to (A, \mathcal{T}\restriction_A)$ es continua. Debido a la compacidad del espacio $\mathcal{C}$ y a que $(i(\mathcal{C}), \mathcal{T}\restriction_{i(\mathcal{C})})$ es un espacio Hausdorff obtenemos que $i : \mathcal{C} \to (i(\mathcal{C}), \mathcal{T}\restriction_{i(\mathcal{C})})$ es cerrada. Concluimos que $(A, \mathcal{T}\restriction_A)$ contiene una copia homeomorfa del espacio de Cantor. $\square$

A.5.5 Teorema. *Sea X un espacio polaco y $A \subseteq X$ un conjunto de Borel. Existen un conjunto cerrado $F \subseteq \mathcal{N}$ y una condensación $f : F \to A$. En particular, si $A \neq \emptyset$ existe además una función continua y sobreyectiva $g : \mathcal{N} \to A$ que extiende a f.*

Demostración. Sea $\mathcal{T}_A$ una topología polaca para X tal que $\mathcal{T}_A \supseteq \mathcal{T}$ y A es cerrado-abierto en $\mathcal{T}_A$. Por el Teorema A.2.5, A es un subespacio polaco de $(X, \mathcal{T}_A)$. Utilizando el Teorema A.4.6 obtenemos que existen F un subconjunto cerrado de $\mathcal{N}$ y una condensación $f : F \to (A, \mathcal{T}_A \restriction_A)$. Por lo tanto $f : F \to (A, \mathcal{T} \restriction_A)$ también es una condensación. La última afirmación es consecuencia de la Proposición A.1.8. $\square$

A.6. Las clases proyectivas.

A.6.1 Definición. Sean X un espacio polaco y A un subconjunto de X. Decimos que A es *analítico* si existen un espacio polaco Y y una función continua $f : Y \to X$ tales que $f(Y) = A$. Un conjunto B es *coanalítico* si $X \setminus B$ es analítico.

Denotamos a la clase de conjuntos analíticos (respectivamente, la clase de conjuntos coanalíticos) contenidos en un espacio polaco X mediante el símbolo $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ (respectivamente, $\mathbf{\Pi}_1^1(X)$).

Observe que $\emptyset$ es analítico tomando $Y = \emptyset$. Note también que por el Teorema A.5.5: $\mathbf{B}(X) \subseteq \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$.

A.6.2 Teorema. *Sean X un espacio polaco y $A \subseteq X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$,

(ii) *existe $f : \mathcal{N} \to X$ continua tal que $f(\mathcal{N}) = A$,*

(iii) *existe $F \subseteq X \times \mathcal{N}$ cerrado tal que $A = proy_X(F)$,*

(iv) *existe $G \subseteq X \times \mathcal{C}$ un G_δ tal que $A = proy_X(G)$,*

(v) *existen Y polaco y $B \subseteq X \times Y$ de Borel tales que $A = proy_X(B)$.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Recuerde que todo espacio polaco es imagen continua de $\mathcal{N}$ (Teorema A.4.6).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $f : \mathcal{N} \to X$ es una función continua tal que $f(\mathcal{N}) = A$, entonces $graf(f)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{N} \times X$. Definimos

$$F = \big(graf(f)\big)^t = \{(x,p) \in X \times \mathcal{N} \,:\, (p,x) \in graf(f)\}.$$

Veamos que $proy_X(F) = A$:

$$\begin{aligned} x \in proy_X(F) &\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{N} \,:\, (x,p) \in F \\ &\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{N} \,:\, (p,x) \in graf(f) \\ &\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{N} \,:\, f(p) = x \\ &\Leftrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sea $F \subseteq X \times \mathcal{N}$ cerrado tal que $A = proy_X(F)$. Por el Lema A.4.9, existen H un subconjunto G_δ de $\mathcal{C}$ y un homeomorfismo $h : \mathcal{N} \to H$. Note que $X \times H$ es un subconjunto G_δ de $X \times \mathcal{C}$. En efecto: existe una colección $\{U_l \,:\, l \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathcal{C}$ tales que $H = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} U_l$. Así:

$$X \times H = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} (X \times U_l).$$

Definimos $\psi : X \times \mathcal{N} \to X \times H$ mediante $\psi(x,p) = (x, h(p))$ y $G = \psi(F)$. Como ψ es un homeomorfismo, G es un subconjunto cerrado de $X \times H$. Por el Lema A.2.3, existe una colección $\{W_i \,:\, i \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de $X \times \mathcal{C}$ tales que

$$G = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \big((X \times H) \cap W_i\big) = (X \times H) \cap \big(\bigcap_{l\in\mathbb{N}} W_i\big).$$

Esto muestra que G es un subconjunto G_δ de $X \times \mathcal{C}$.

Finalmente veamos que $proy_X(G) = A$. Si $x \in A$, entonces existe $p \in \mathcal{N}$ tal que $(x,p) \in F$. Por lo tanto $(x, h(p)) \in G$. Ahora tomemos $(x,p) \in F$. Por hipótesis $proy_X(x, h(p)) = x \in A$.
(iv) $\Rightarrow$ (v) Es trivial.
(v) $\Rightarrow$ (i) Sea $\mathcal{T}_{X\times Y}$ la topología producto en $X \times Y$. Por el Teorema A.5.1, existe $\mathcal{T}_B \supseteq \mathcal{T}_{X\times Y}$ una topología polaca para $X \times Y$ tal que B es cerrado-abierto en $\mathcal{T}_B$ y $\mathbf{B}(\mathcal{T}_B) = \mathbf{B}(\mathcal{T}_{X\times Y})$. Como B es cerrado en $(X \times Y, \mathcal{T}_B)$, B es un subespacio polaco de $(X \times Y, \mathcal{T}_B)$ (utilizamos el Lema A.2.3 y el Teorema A.2.5).

Finalmente, note que la función

$$proy_X \restriction_B : (B, \mathcal{T}_B \restriction_B) \to X$$

es continua debido a que $\mathcal{T}_B \supseteq \mathcal{T}_{X\times Y}$. $\square$

A.6.3 Proposición. *(i) Sean X un espacio polaco y $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$.*

(ii) Sean X, Y espacios polacos y $f : X \to Y$ una función Borel medible. Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ son analíticos, entonces $f(A)$ y $f^{-1}(B)$ son analíticos.

Demostración. (i) Por la Definición A.6.1, existen $\{(Y_n, \mathcal{T}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de espacios polacos y $\{f_n : Y_n \to X : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de funciones continuas tales que $f_n(Y_n) = A_n$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que si $n \neq m$ entonces $Y_n \cap Y_m = \emptyset$.

Primero demostraremos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$. Por la Proposición 3.3 de [14], $\oplus_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ es un espacio polaco. Considere la función

$$f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n : \oplus_{n\in\mathbb{N}} Y_n \to X.$$

Si $U \subseteq X$, entonces $f^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(U)$. En efecto:

$$y \in f^{-1}(U) \;\Leftrightarrow\; \exists!\, n \in \mathbb{N} \left(y \in Y_n,\ f_n(y) \in U \right) \;\Leftrightarrow\; \exists!\, n \in \mathbb{N} \left(y \in f_n^{-1}(U) \right).$$

Así, f es continua y $f(\oplus_{n\in\mathbb{N}} Y_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Por lo tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$.

Para demostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ consideramos el conjunto

$$Z = \{(y_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n : f_n(y_n) = f_m(y_m), \text{ para cualesquiera } n,\, m \in \mathbb{N}\}.$$

Note que Z es cerrado en $\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. En efecto: si $(y_n) \in (\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n) \setminus Z$, entonces existen j, $k \in \mathbb{N}$ tales que $f_j(y_j) \neq f_k(y_k)$. Sean U, V vecindades ajenas de $f_j(y_j)$ y $f_k(y_k)$. Definimos

$$W_n = \begin{cases} f_j^{-1}(U) & \text{si}\, n = j, \\ f_k^{-1}(V) & \text{si}\, n = k, \\ Y_n & \text{si}\, j \neq n \neq k. \end{cases}$$

De esta forma $(y_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} W_n \subseteq (\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n) \setminus Z$.

Por el Teorema A.2.5, Z es un espacio polaco. Sea $\varphi = f_0 \circ (\pi_0 \restriction_Z) : Z \to X$, donde $\pi_0 : \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n \to Y_0$ es la proyección en el primer factor del producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Así, φ es continua. Debido a que $f_n(Y_n) = A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $\varphi(Z) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Esto demuestra que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$.

(ii) El conjunto $Y \times A$ es analítico. En efecto: sean Z un espacio polaco y

$g : Z \to X$ una función continua tales que $g(Z) = A$. Definimos $h : Y \times Z \to Y \times X$ mediante $h(y,z) = (y, g(z))$. Así, h es continua y $h(Y \times Z) = Y \times A$.

Como f es Borel medible, $\{(y,x) \in Y \times X \,:\, f(x) = y\} \in \mathbf{B}(Y \times X) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1(Y \times X)$. Utilizando el inciso (i) obtenemos que

$$\begin{aligned} F &= \{(y,x) \in Y \times X \,:\, f(x) = y\} \cap (Y \times A) \\ &= \{(y,x) \in Y \times X \,:\, x \in A,\, f(x) = y\} \in \mathbf{\Sigma}^1_1(Y \times X). \end{aligned}$$

Debido a que la función $proy_Y$ es continua, si demostramos que $proy_Y(F) = f(A)$ habremos terminado. Note que:

$$y \in proy_Y(F) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in X \,\big(\, (y,x) \in F \,\big) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A \,\big(\, f(x) = y \,\big) \;\Leftrightarrow\; y \in f(A).$$

Para demostrar que $f^{-1}(B)$ es analítico, observamos que $X \times B \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X \times Y)$. Notamos que $\{(x,y) \in X \times Y \,:\, f(x) = y\} \in \mathbf{B}(X \times Y) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1(X \times Y)$ y definimos

$$G = \{(x,y) \in X \times Y \,:\, f(x) = y\} \cap (X \times B) = \{(x,y) \in X \times Y \,:\, f(x) = y \in B\}.$$

Por el inciso (i), $G \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X \times Y)$. Además $proy_X(G) = f^{-1}(B)$. $\square$

A continuación introducimos a las clases proyectivas.

A.6.4 Definición. Definimos las *clases proyectivas* $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$ de subconjuntos en espacios polacos de la siguiente manera:

(i) $\mathbf{\Sigma}^1_1$ es la clase de conjuntos analíticos contenidos en algún espacio polaco.

(ii) $\mathbf{\Pi}^1_n = \{X \setminus A \,:\, X \text{ es polaco},\, A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X)\}$,

(iii) $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1} = \{proy_X(A) \,:\, X \text{ es polaco},\, A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})\}$,

(iv) $\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$.

Las propiedades categóricas más básicas de las clases anteriores están establecidas en la siguiente proposición.

A.6.5 Proposición. *(i) Las clases* $\mathbf{\Sigma}^1_n$ *son cerradas bajo preimágenes continuas, uniones e intersecciones numerables.*

(ii) Las clases $\mathbf{\Pi}^1_n$ *son cerradas bajo preimágenes continuas, uniones e intersecciones numerables.*

(iii) Las clases $\mathbf{\Delta}^1_n$ son cerradas bajo preimágenes continuas, complementos y uniones numerables.

Demostración. Haremos inducción sobre n. En la Proposición A.6.3 se demostró que el inciso (i) es válido para $n = 1$. Utilizando la definición de las clases $\mathbf{\Pi}^1_n$ y $\mathbf{\Delta}^1_n$ obtenemos que los incisos (ii) y (iii) también son válidos para $n = 1$. Supongamos que las propiedades (i)-(iii) son válidas para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Demostraremos que la propiedad (i) es cierta para $n+1$. Note que esto implica que las propiedades (ii) y (iii) también se cumplen para $n+1$. Sean X un espacio polaco y $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $B_i \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$ tal que $proy_X(B_i) = A_i$.

Primero demostraremos que $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$ es cerrada bajo uniones numerables. Por hipótesis de inducción, la clase $\mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$ es cerrada bajo uniones numerables. Esto implica que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$. Además

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} proy_X(B_i) = proy_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i).$$

Por lo tanto $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$.

Ahora demostraremos que $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$ es cerrada bajo intersecciones numerables. Note que

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i &\Leftrightarrow \forall\, i \in \mathbb{N}\, x \in proy_X(B_i) \\ &\Leftrightarrow \forall\, i \in \mathbb{N}\, \exists\, p_i \in \mathcal{N}\, (x, p_i) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \exists\, y \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}\, \forall\, i \in \mathbb{N}\, (x, y(i)) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \exists\, y \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}\, (x, y) \in U, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y) \in X \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}} : \forall\, i \in \mathbb{N}\, (x, y(i)) \in B_i\} \\ &= \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \{(x, y) \in X \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}} : (x, y(i)) \in B_i\}. \end{aligned}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideramos la función $I \times \pi_i : X \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to X \times \mathcal{N}$ definida mediante

$$(I \times \pi_i)(x, y) = (I \times \pi_i)(x, y(0), y(1), y(2), \ldots, y(i), \ldots) = (x, y(i)).$$

Utilizando la hipótesis de inducción obtenemos que

$$U = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (I \times \pi_i)^{-1}(B_i) \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}}).$$

Finalmente, fijemos un homeomorfismo $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$. Definimos un homeomorfismo $\Phi : X\times\mathcal{N} \to X\times\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ mediante la fórmula $\Phi(x, p) = (x, \psi(p))$ y denotamos mediante $PROY_X : X\times\mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to X$ a la proyección en el primer factor del producto $X\times\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ (recuerde que $proy_X : X\times\mathcal{N} \to X$ es la proyección en el primer factor del producto $X\times\mathcal{N}$). Note que $PROY_X(U) = proy_X(\Phi^{-1}(U))$. En efecto:

$$\begin{aligned}
x \in PROY_X(U) &\Leftrightarrow \exists\, z \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}\, (x, z) \in U \\
&\Leftrightarrow \exists\, p \in \mathcal{N}\, \Phi(x, p) = (x, \psi(p)) = (x, z) \in U \\
&\Leftrightarrow \exists\, p \in \mathcal{N}\, (x, p) \in \Phi^{-1}(U) \\
&\Leftrightarrow x \in proy_X(\Phi^{-1}(U)).
\end{aligned}$$

Utilizando nuevamente la hipótesis de inducción obtenemos que $\Phi^{-1}(U) \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$. Finalmente

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = PROY_X(U) = proy_X(\Phi^{-1}(U)) \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X).$$

Demostraremos ahora que $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$ es cerrada bajo preimágenes continuas. Para ello sean X, Y espacios polacos y $f : X \to Y$ una función continua. Elegimos $C \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(Y)$ y $A \in \mathbf{\Pi}^1_n(Y \times \mathcal{N})$ tal que $proy_Y(A) = C$. Definimos $h : X\times\mathcal{N} \to Y\times\mathcal{N}$ mediante $h(x, p) = (f(x), p)$. Por hipótesis de inducción:

$$B = h^{-1}(A) \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N}).$$

Note que $proy_X(B) = f^{-1}(C)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(C) &\Leftrightarrow f(x) \in C \\
&\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{N} :\ (f(x), p) \in A \\
&\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{N} :\ (x, p) \in B \\
&\Leftrightarrow x \in proy_X(B).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{-1}(C) \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$. $\square$

A.6.6 Teorema. *Podemos representar a las clases proyectivas en el siguiente esquema*

$$\begin{array}{ccccccc} & \boldsymbol{\Sigma}^1_1 & & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 & & \boldsymbol{\Sigma}^1_3 & \dots \\ \boldsymbol{\Delta}^1_1 & & \boldsymbol{\Delta}^1_2 & & \boldsymbol{\Delta}^1_3 & & \\ & \boldsymbol{\Pi}^1_1 & & \boldsymbol{\Pi}^1_2 & & \boldsymbol{\Pi}^1_3 & \dots \end{array}$$

donde toda clase está contenida en cualquier clase a la derecha de ella.

Demostración. En primer lugar demostraremos que $\boldsymbol{\Sigma}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Hacemos inducción sobre n. Por el Teorema A.6.2, si $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$, entonces existe $F \subseteq X \times \mathcal{N}$ cerrado tal que $A = proy_X(F)$. Así, $F \in \mathbf{B}(X \times \mathcal{N}) \subseteq \boldsymbol{\Pi}^1_1(X \times \mathcal{N})$. Por lo tanto $A \in \Sigma^1_2(X)$. Ahora supongamos que $\boldsymbol{\Sigma}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Por definición de las clases $\boldsymbol{\Pi}^1_n$:

$$\boldsymbol{\Sigma}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\Pi}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Pi}^1_{n+1}.$$

Por lo tanto, si $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}(X)$, entonces $A = proy_X(G)$, con $G \in \boldsymbol{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N}) \subseteq \boldsymbol{\Pi}^1_{n+1}(X \times \mathcal{N})$. Por la Definición A.6.4, $A \in \Sigma^1_{n+2}(X)$.

Ahora demostraremos que $\boldsymbol{\Pi}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En efecto: utilizando la Proposición A.6.5 obtenemos que

$$A \in \boldsymbol{\Pi}^1_n(X) \ \Rightarrow\ A \times \mathcal{N} = proy_X^{-1}(A) \in \boldsymbol{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N}).$$

Por lo tanto, $A = proy_X(A \times \mathcal{N}) \in \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}(X)$.

Tomando complementos en las clases mencionadas en los párrafos anteriores obtenemos que $\boldsymbol{\Pi}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Pi}^1_{n+1}$ y $\boldsymbol{\Sigma}^1_n \subseteq \boldsymbol{\Pi}^1_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. □

A partir de ahora la expresión A *es un conjunto* $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ significa que A pertenece a la clase $\boldsymbol{\Sigma}^1_n(X)$, para algún espacio polaco X. Las expresiones A *es un conjunto* $\boldsymbol{\Pi}^1_n$ y A *es un conjunto* $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ tendrán un significado análogo.

A.6.7 Teorema. *Las imágenes de los conjuntos* $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ *por funciones Borel medibles (en particular, continuas) son conjuntos* $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$*, mientras que las imágenes de los conjuntos* $\boldsymbol{\Pi}^1_n$ *son los conjuntos* $\boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}$.

Demostración. Sean U, V espacios polacos, $h : U \to V$ una función Borel medible y $A \in \boldsymbol{\Pi}^1_n(U)$. Sabemos que

$$graf(h) = \{(u,v) \in U \times V \ :\ v = h(u)\} \in \mathbf{B}(U \times V) \subseteq \boldsymbol{\Pi}^1_n(U \times V).$$

Utilizando la Proposición A.6.5 obtenemos que

$$A \times V = proy_U^{-1}(A) \in \mathbf{\Pi}^1_n(U \times V).$$

Además

$$B = \{(u, h(u)) : u \in A\} = (A \times V) \cap graf(h) \in \mathbf{\Pi}^1_n(U \times V).$$

Por el Teorema A.4.6, existe $g : \mathcal{N} \to U$ continua y sobreyectiva. Definimos

$$\gamma : V \times \mathcal{N} \to U \times V \text{ mediante } \gamma(v, p) = (g(p), v).$$

Así, γ es continua y sobreyectiva.

El conjunto $C = \gamma^{-1}(B) \in \mathbf{\Pi}^1_n(V \times \mathcal{N})$ y en consecuencia $proy_V(C) \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(V)$. Note que $proy_V(C) = h(A)$. En efecto:

$$\begin{aligned} v \in h(A) &\Leftrightarrow \exists u \in A : \ v = h(u) \\ &\Leftrightarrow \exists u \in U : \ (u, v) \in B \\ &\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{N} : \ (g(p), v) \in B \\ &\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{N} : \ (v, p) \in C \\ &\Leftrightarrow v \in proy_V(C). \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(A) \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(V)$.

Debido a lo que acabamos de demostrar, los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$ son las imágenes por funciones Borel medibles de los conjuntos Π^1_{n-1}. Por lo tanto, las imágenes de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$ por funciones Borel medibles son también imágenes de conjuntos Π^1_{n-1} por funciones Borel medibles, luego son conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$. □

A.6.8 Teorema. *Si $X \subseteq Y$ son espacios polacos, entonces*

$$\mathbf{\Sigma}^1_n(X) = \mathbf{\Sigma}^1_n(Y) \restriction_X = \{A \subseteq X : A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(Y)\}.$$

Similarmente para las clases $\mathbf{\Pi}^1_n$ y $\mathbf{\Delta}^1_n$.

Demostración. Utilizando la Proposición A.6.5 y el hecho de que la función inclusión $i_X : X \to Y$ es continua, obtenemos que $\mathbf{\Sigma}^1_n(Y) \restriction_X \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_n(X)$. Habremos terminado si demostramos la siguiente afirmación.

Afirmación: Para cualquier par de espacios polacos $X \subseteq Y$ se cumple

$$\mathbf{\Sigma}^1_n(X) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_n(Y) \quad \text{y} \quad \mathbf{\Pi}^1_n(X) \subseteq \mathbf{\Pi}^1_n(Y).$$

Demostración de la afirmación: Mediante inducción sobre n. Por definición de conjunto analítico, $\mathbf{\Sigma}_1^1(X) \subseteq \mathbf{\Sigma}_1^1(Y)$. Veamos que $\mathbf{\Pi}_1^1(X) \subseteq \mathbf{\Pi}_1^1(Y)$. Si $A \in \mathbf{\Pi}_1^1(X)$, entonces $X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X) \subseteq \mathbf{\Sigma}_1^1(Y)$. Utilizando los Teoremas A.2.5 y A.6.6 obtenemos:

$$X \in \mathbf{B}(Y) \subseteq \mathbf{\Delta}_1^1(Y) \subseteq \mathbf{\Pi}_1^1(Y).$$

Utilizando la Proposición A.6.5:

$$Y \setminus A = (Y \setminus X) \cup (X \setminus A) \in \mathbf{\Sigma}_1^1(Y) \;\Rightarrow\; A \in \mathbf{\Pi}_1^1(Y).$$

Supongamos que la afirmación es válida para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Considere $A \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$. Por hipótesis de inducción y definición de la clase $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$:

$$\exists\, B \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N}) \subseteq \mathbf{\Pi}_n^1(Y \times \mathcal{N}) \;\big(A = proy_X(B) = proy_Y(B)\big).$$

Por lo tanto $A \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(Y)$.

La contención $\mathbf{\Pi}_{n+1}^1(X) \subseteq \mathbf{\Pi}_{n+1}^1(Y)$ se demuestra del mismo modo que la contención $\mathbf{\Pi}_1^1(X) \subseteq \mathbf{\Pi}_1^1(Y)$. □

A.6.9 Definición. Sean X, Y espacios polacos y Γ una clase de conjuntos definida en diversos espacios (por ejemplo $\mathbf{\Sigma}_n^1$, $\mathbf{\Pi}_n^1$, Borelianos, etcétera). Denotamos mediante $\Gamma(X)$ a la colección de todos los subconjuntos de X que pertenecen a Γ. Decimos que un conjunto $U \subseteq Y \times X$ es Y-*universal* para $\Gamma(X)$ si $U \in \Gamma(Y \times X)$ y $\Gamma(X) = \{U_y \,:\, y \in Y\}$, donde $U_y = \{x \in X \,:\, (y,x) \in U\}$.

A.6.10 Teorema. *Para cada espacio polaco X existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}_n^1(X)$ y un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}_n^1(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.8 de [13], existe un cerrado $V \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{N} \times X$ que es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}_1^0(\mathcal{N} \times X)$. Sea

$$U = \{(z,x) \in \mathcal{C} \times X \,:\, \exists\, p \in \mathcal{N}\, (z,p,x) \in V\} = proy_{\mathcal{C}\times X}(V).$$

Note que U es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$. En efecto: $U \in \mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{C} \times X)$ debido a que es imagen continua de un conjunto cerrado (Teorema A.6.7). Además, si $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$, entonces existe un cerrado $F \subseteq \mathcal{N} \times X$ tal que $A = proy_X(F)$. Como V es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}_1^0(\mathcal{N} \times X)$, existe $z \in \mathcal{C}$ tal que

$$F = V_z = \{(p,x) \in \mathcal{N} \times X \,:\, (z,p,x) \in V\}.$$

Note que $A = U_z = \{x \in X \,:\, (z,x) \in U\}$. En efecto:

$$\begin{aligned} x \in A \;&\Leftrightarrow\; \exists\, p \in \mathcal{N} \,:\, (p,x) \in F \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, p \in \mathcal{N} \,:\, (z,p,x) \in V \\ &\Leftrightarrow\; (z,x) \in U \\ &\Leftrightarrow\; x \in U_z. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $V \subseteq \mathcal{C} \times X$ es un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^1_n(X)$, entonces $U = (\mathcal{C} \times X) \setminus V$ es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}^1_n(X)$. Además, si V es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}^1_n(X)$, entonces el conjunto U construido a partir de V como en el caso $\mathbf{\Sigma}^1_1$ es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$ (para demostrar esto se efectúa el mismo razonamiento). $\square$

A.6.11 Teorema. *Si X es un espacio polaco no numerable, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, se cumple que $\mathbf{\Sigma}^1_n(X) \neq \mathbf{\Pi}^1_n(X)$. Por consiguiente*

$$\mathbf{\Delta}^1_n \underset{\neq}{\subseteq} \mathbf{\Sigma}^1_n \underset{\neq}{\subseteq} \Delta^1_{n+1} \;\; \textit{e igualmente} \;\; \mathbf{\Delta}^1_n \underset{\neq}{\subseteq} \mathbf{\Pi}^1_n \underset{\neq}{\subseteq} \Delta^1_{n+1}.$$

Demostración. Por el Corolario A.3.7, X contiene un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$. Si $\mathbf{\Sigma}^1_n(X) = \mathbf{\Pi}^1_n(X)$, entonces $\mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{C}) = \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C})$ (utilizamos el Teorema A.6.8). Veamos que esto no es posible. Por el Teorema A.6.10 existe U un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{C})$. Definimos $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ mediante $\varphi(y) = (y,y)$. Por la Proposición A.6.5,

$$A = \{y \in \mathcal{C} \,:\, (y,y) \notin U\} = \varphi^{-1}\big((\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \setminus U\big) \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C}) = \mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{C}).$$

Entonces, debe existir $y \in \mathcal{C}$ tal que

$$A = U_y = \{x \in \mathcal{C} \,:\, (y,x) \in U\}. \qquad (i)$$

Pero esto último no es posible. En efecto: si $y \in A$, entonces, por definición del conjunto A, $(y,y) \notin U$. Utilizando la ecuación (i) obtenemos que $(y,y) \in U$, lo que es una contradicción. Análogamente, si $y \notin A$ obtenemos una contradicción.

Ahora supongamos que $\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n$. Por definición de las clases $\mathbf{\Delta}^1_n$, obtenemos que $\mathbf{\Sigma}^1_n(X) \subseteq \mathbf{\Pi}^1_n(X)$. Además

$$A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X) \;\Rightarrow\; X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X) \subseteq \mathbf{\Pi}^1_n(X) \;\Rightarrow\; A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X).$$

Por lo tanto $\mathbf{\Sigma}^1_n(X) = \mathbf{\Pi}^1_n(X)$, lo que contradice la primera afirmación del teorema.

Análogamente, $\Delta^1_{n+1} = \mathbf{\Sigma}^1_n$ implica $\mathbf{\Pi}^1_n(X) = \mathbf{\Sigma}^1_n(X)$. $\square$

A.7. Axioma de Determinación Proyectiva.

A.7.1. Juego de Choquet.

A.7.1 Definición (Juego de Choquet)**.** Sea X un espacio topológico no vacío. El *juego de Choquet* G_X de X se define de la siguiente manera: los jugadores I y II toman turnos jugando subconjuntos abiertos no vacíos de X

$$\begin{array}{lllll} I & U_0 & & U_1 & \\ II & & V_0 & & V_1 \dots \end{array}$$

de manera que $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$. Decimos que el jugador II gana esta partida del juego si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. (En consecuencia, el jugador I gana si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$.)

Una estrategia para el jugador I (en este juego) es una "regla" que le dice cómo jugar su n-ésimo movimiento (para cada n) dados los movimientos previos $V_0, \dots, V_{n-1}$ del jugador II. Formalmente, esto último se puede definir de la siguiente manera: sea T el conjunto de todas las sucesiones finitas $(W_0, \dots, W_n)$, donde cada W_i es un abierto no vacío de X y $W_0 \supseteq W_1 \supseteq \dots \supseteq W_n$. Note que T es un árbol bien podado en $\mathcal{T}^*(X)$. El árbol T es llamado *árbol de posiciones legales* en el juego de Choquet G_X. Una *estrategia* para I en G_X es un subárbol $\sigma \subseteq T$ tal que:

(i) σ es no vacío y bien podado,

(ii) si $(U_0, V_0, \dots, U_n) \in \sigma$, entonces para todo abierto no vacío $V_n \subseteq U_n$, $(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n) \in \sigma$,

(iii) si $(U_0, V_0, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}) \in \sigma$, entonces para un único U_n,
$$(U_0, V_0, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in \sigma.$$

Esto se interpreta de la siguiente manera: el jugador I inicia con el único U_0 tal que $(U_0) \in \sigma$. El jugador II juega a continuación cualquier abierto no vacío $V_0 \subseteq U_0$. Por la condición (ii), $(U_0, V_0) \in \sigma$. Entonces el jugador I responde jugando el único abierto no vacío $U_1 \subseteq V_0$ tal que tal que $(U_0, V_0, U_1) \in \sigma$, etc.

Una posición $(W_0, \dots, W_n) \in T$ es *compatible* con σ si $(W_0, \dots, W_n) \in \sigma$. Una partida del juego $(U_0, V_0, U_1, V_1, \dots)$ es *compatible* con σ si
$$(U_0, V_0, U_1, V_1, \dots) \in [\sigma].$$

La estrategia σ es *ganadora* para I, si para toda partida $(U_0, V_0, \ldots)$ compatible con σ, sucede que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$. Análogamente establecemos las nociones de estrategia y de estrategia ganadora para II.

Recordemos que un espacio topológico X es un *espacio de Baire* si para cada sucesión G_1, $G_2, \ldots$ de subconjuntos densos y abiertos de X, la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ es un conjunto denso en X.

A.7.2 Teorema. *Un espacio topológico no vacío X es un espacio de Baire, si y sólo si, I no tiene una estrategia ganadora en el juego de Choquet G_X.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que X no es un espacio de Baire. Consideremos $U_0 \in \mathcal{T}^*(X)$ y $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de abiertos densos en X tales que $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) \cap U_0 = \emptyset$. Establecemos una estrategia ganadora para I en G_X de la siguiente manera: el jugador I comienza jugando U_0. Si II juega $V_0 \subseteq U_0$, tenemos que $V_0 \cap G_0 \neq \emptyset$. Así I puede jugar $U_1 = V_0 \cap G_0 \subseteq V_0$. A continuación II juega $V_1 \subseteq U_1$ y I elige $U_2 = V_1 \cap G_1 \subseteq V_1$, etc. De esta forma $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) \cap U_0 = \emptyset$.
($\Rightarrow$) Supongamos que I tiene una estrategia ganadora σ en G_X. Sea U_0 el primer movimiento de I de acuerdo con σ. Demostraremos que U_0 no es un espacio de Baire. Para esto construiremos un subárbol bien podado no vacío $S \subseteq \sigma$ tal que para cualquier $p = (U_0, V_0, \ldots, U_n) \in S$, el conjunto

$$\mathcal{U}_p = \{U_{n+1} : (U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, U_{n+1}) \in S\}$$

está formado por conjuntos abiertos ajenos entre sí y además $\bigcup \mathcal{U}_p$ es denso en U_n. Suponga que ya hemos construido el subárbol mencionado. Si definimos

$$W_n = \bigcup \{U_n : (U_0, V_0, \ldots, U_n) \in S\},$$

sucede que W_n es abierto y denso en U_0, para cada $n \in \mathbb{N}$. Note ahora que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \emptyset$. En efecto: si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$, entonces (por constrcucción de las colecciones $\mathcal{U}_p$) existe un único

$$(U_0, V_0, U_1, V_1, \ldots) \in [S]$$

tal que $x \in U_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$, lo que contradice el hecho de que $(U_0, V_0, U_1, V_1, \ldots) \in [\sigma]$ y σ es una estrategia ganadora para I. En consecuencia $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \emptyset$. Observe ahora que esto muestra que U_0 no es un espacio de Baire. Resta entonces construir el subárbol S para terminar la demostración.

Para construir el subárbol S, determinaremos de manera inductiva que elementos de σ colocaremos en S. Establecemos $\emptyset \in S$. Si

$$(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}) \in S,$$

entonces

$$(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in S$$

para el único U_n que cumple $(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in \sigma$. Ahora, si $p = (U_0, V_0, \ldots, U_n) \in S$, sucede que para cualquier abierto no vacío $V_n \subseteq U_n$, si $V_n^* = U_{n+1}$ es el movimiento que la estrategia σ requiere del jugador I, entonces U_{n+1} es un abierto no vacío de V_n. Utilizando el Lema de Zorn obtenemos $\mathcal{V}_p$ una colección maximal de abiertos no vacíos $V_n \subseteq U_n$ tal que los elementos de $\{V_n^* : V_n \in \mathcal{V}_p\}$ son ajenos entre sí. Colocamos en S o todos los elementos de σ de la forma

$$(U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, V_n^*), \text{ con } V_n \in \mathcal{V}_p.$$

Entonces

$$\mathcal{U}_p = \{U_{n+1} : (U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, U_{n+1}) \in S\} = \{V_n^* : V_n \in \mathcal{V}_p\}$$

es una familia de abiertos ajenos entre sí. Además, por la maximalidad de $\mathcal{V}_p$, $\bigcup \mathcal{U}_p$ es denso en U_n. En efecto: si $\widetilde{V}_n \subseteq U_n$ es un abierto no vacío que no intersecta a $\bigcup \mathcal{U}_p$, entonces $\mathcal{V}_p \cup \{\widetilde{V}_n\}$ contradice la maximalidad de $\mathcal{V}_p$. □

A.7.3 Definición. Un espacio topológico no vacío X es un *espacio de Choquet* si el jugador II tiene una estrategia ganadora en el juego de Choquet G_X.

Debido a que no es posible que ambos jugadores tengan una estrategia ganadora en G_X, obtenemos que todo espacio de Choquet es un espacio de Baire. Recuerde que utilizando el Axioma de Elección es posible demostrar que existe un *conjunto de Bernstein* $X \subseteq \mathbb{R}$, es decir, X tiene la propiedad de que para todo $P \subseteq \mathbb{R}$ perfecto en $\mathbb{R}$, $P \cap X \neq \emptyset \neq P \setminus X$ [14, Ejemplo 8.24]. A continuación veremos que si $X \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de Bernstein, entonces el jugador II no tiene una estrategia ganadora en el juego de Choquet G_X.

A.7.4 Teorema (Axioma de Elección). *Existe un espacio de Baire que no es un espacio de Choquet.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de Bernstein.

AFIRMACIÓN: X es un espacio de Baire.

Demostración de la afirmación: Sea $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos densos y abiertos en X. Considere $\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{T}^*(\mathbb{R})$ tal que $D_n = V_n \cap X$. El conjunto $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ es no numerable. En efecto: si $V = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\mathbb{R} \setminus V = \mathbb{R} \setminus (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R} \setminus V_n) \ \Rightarrow\ \mathbb{R} = \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R} \setminus V_n)\big) \bigcup \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}\big),$$

lo que contradice el hecho de que $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de Baire.

Utilizando los Teoremas A.2.5 y A.3.6 obtenemos que existe P un conjunto perfecto contenido en V. Por lo tanto $\emptyset \neq X \cap P \subseteq X \cap V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$. $\boxtimes$

Supongamos que II tiene una estrategia ganadora σ en el juego G_X. Construiremos un esquema de Cantor en X que determinará un conjunto perfecto P en $\mathbb{R}$ contenido en X, lo que contradice el hecho de que X es un conjunto de Bernstein.

Hacemos inducción sobre la longitud de $s \in 2^{<\mathbb{N}}$. Definimos $A_\emptyset = X$. Sean $B_0,\ C_0 \in \mathcal{T}(X)$ tales que $B_0 \cap C_0 = \emptyset$ y $diam(B_0), diam(C_0) < 1$. Definimos $A_{(0)}$ y $A_{(1)}$ como los únicos abiertos de X tales que $(B_0, A_{(0)}) \in \gamma$ y $(C_0, A_{(1)}) \in \gamma$.

Ahora consideramos $B_1,\ B_2 \in \mathcal{T}^*(X)$ tales que $cl(B_l) \subseteq A_{(0)}$, $diam(B_l) < \frac{1}{2}$ y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Definimos $A_{(0,0)}$ y $A_{(0,1)}$ como los únicos abiertos de X tales que $(B_0, A_{(0)}, B_1, A_{(0,0)}) \in \gamma$ y $(B_0, A_{(0)}, B_2, A_{(0,1)}) \in \gamma$.

Análogamente construimos $A_{(1,0)}$ y $A_{(1,1)}$.

Supongamos que hemos construido A_s, para todo $s \in 2^{<\mathbb{N}}$. Elegimos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(a,b) \cap X \subseteq A_s$. Fijamos $c, d, s, t \in \mathbb{R}$ tales que $[c,d] \subseteq (a,b)$ y $[s,t] \subseteq (a,b)$. Como X es un conjunto de Bernstein, existen $u \in [c,d] \cap X$ y $v \in [s,t] \cap X$. Sean $G \in \mathcal{T}(u,X)$ y $H \in \mathcal{T}(v,X)$ tales que $G \cap H = \emptyset$. Por la regularidad de X, existen $B_1 \in \mathcal{T}(u,X)$ y $B_2 \in \mathcal{T}(v,X)$ tales que

$$cl(B_1) \subseteq G \cap B(u, \tfrac{1}{2^{n+2}}) \cap A_s \quad \text{y} \quad cl(B_2) \subseteq H \cap B(v, \tfrac{1}{2^{n+2}}) \cap A_s.$$

Definimos $A_{s^\frown 0}$ y y $A_{s^\frown 1}$ como las respuestas de la estrategia σ a los movimientos B_1 y B_2.

Supongamos que hemos construido A_s, para todo $s \in 2^{<\mathbb{N}}$. Definimos $A_{s^\frown 0}$ y $A_{s^\frown 1}$ de manera que cumplan las siguientes propiedades:

(i) $A_{s^\frown 0}$ y $A_{s^\frown 1}$ son respuestas de la estrategia σ,

(ii) $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset$,

(iii) $cl(A_{s^\frown i}) \subseteq A_s$, para $i \in 2$,

(iv) $diam(A_{s^\frown i}) < \frac{1}{n+1}$, para $i \in 2$.

$\square$

A.7.2. Juego fuerte de Choquet.

A continuación definimos el juego fuerte de Choquet.

A.7.5 Definición (Juego fuerte de Choquet)**.** Dado X un espacio topológico no vacío, el *juego fuerte de Choquet* G_X^s se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llllll} I & x_0, U_0 & & x_1, U_1 & & \\ II & & V_0 & & V_1 \dots \end{array}$$

Los jugadores I y II toman turnos jugando subconjuntos abiertos no vacíos de X, como en el juego de Choquet, pero adicionalmente I debe jugar un punto $x_n \in U_n$ y II debe jugar $V_n \subseteq U_n$ con $x_n \in V_n$. Así, debe suceder que

$$U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots \quad \text{y} \quad x_n \in U_n \cap V_n.$$

El jugador II gana esta partida del juego si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. (En consecuencia, el jugador I gana si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$.)

Un espacio no vacío X es un *espacio fuerte de Choquet* si el jugador II tiene una estrategia ganadora en el juego G_X^s (la noción de estrategia se define como en el juego anterior).

A.7.6 Teorema. *Si X es un espacio no vacío completamente metrizable, entonces es un espacio fuerte de Choquet.*

Demostración. Supongamos que el jugador I comienza jugando cualesquiera $U_0 \in \mathcal{T}^*(X)$ y $x_0 \in U_0$. Por la regularidad del espacio X, existe $V_0 \in \mathcal{T}(x_0, X)$ tal que $cl(V_0) \subseteq B(x_0, \frac{1}{2}) \cap U_0$. Así, establecemos V_0 como el primer movimiento de II. Supongamos que, a continuación, I juega cualesquiera $U_1 \in \mathcal{T}^*(X)$ tal que $V_0 \supseteq U_1$ y $x_1 \in U_1$. Elegimos $V_1 \in \mathcal{T}(x_1, X)$ tal que $cl(V_1) \subseteq B(x_1, \frac{1}{4}) \cap U_1$. Establecemos V_1 como el segundo movimiento de II, y así sucesivamente. Observe que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl(V_n)$.

Por construcción, la sucesión (x_n) es de Cauchy en X. Veamos que

$$x = lim_{n\to\infty}\, x_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n.$$

En efecto: supongamos lo contrario. Consideremos $n^* = min\{n \in \mathbb{N} : x \notin cl(V_n)\}$ y $W \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que $W \cap V_{n^*} = \emptyset$. Fijemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in W$, para todo $n \geq N$. De esta forma, si $N^* = max\{n^*, N\}$, entonces $x_{N^*} \in V_{n^*} \cap W$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

Note que con todo lo anterior hemos exhibido una estrategia ganadora para el jugador II. □

A.7.3. Juegos infinitos.

A.7.7 Definición. Sean A un conjunto no vacío y $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$. Asociamos a X el siguiente juego infinito:

$$\begin{array}{llllll} I & a_0 & & a_2 & & \\ II & & a_1 & & a_3 \ldots \end{array}$$

El jugador I juega $a_0 \in A$, entonces II juega $a_1 \in A$, I juega $a_2 \in A$, etcétera. El jugador I gana si y sólo si $(a_n) \in X$. El conjunto X es llamado *conjunto de apuesta*. Denotamos este juego por $G(A, X)$. Una *estrategia* para I es una función $\varphi : A^{<\mathbb{N}} \to A$ con I jugando $a_0 = \varphi(\emptyset)$, $a_2 = \varphi((a_1))$, $a_4 = \varphi((a_1,\ a_3))$, cuando II juega $a_1,\ a_3,\ \ldots$

Una estrategia para I puede ser vista como un árbol $\sigma \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ tal que

(i) σ es no vacío y bien podado,

(ii) $(a_0, a_1, \ldots, a_{2j}) \in \sigma \;\;\Rightarrow\;\; \forall\, a_{2j+1} \in A \;\big(\, (a_0, \ldots, a_{2j}, a_{2j+1}) \in \sigma \,\big)$,

(iii) $(a_0, a_1, \ldots, a_{2j-1}) \in \sigma \;\;\Rightarrow\;\; \exists!\, a_{2j} \in A \;\big(\, (a_0, \ldots, a_{2j-1}, a_{2j}) \in \sigma \,\big)$.

Esto se interpreta de la siguiente manera: I inicia con el único a_0 tal que $(a_0) \in \sigma$. Si a continuación II juega a_1, entonces $(a_0, a_1) \in \sigma$, así hay un único a_2 tal que $(a_0, a_1, a_2) \in \sigma$, y éste es el siguiente movimiento de I, etc.

Una estrategia para I es *ganadora* en $G(A, X)$ si para toda partida del juego $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, en la que I sigue esta estrategia, sucede que $(a_n) \in X$. Análogamente establecemos las nociones de estrategia y de estrategia ganadora para II. Note que no es posible que ambos jugadores tengan una estrategia ganadora en $G(A,X)$. Decimos que el juego $G(A,X)$, o el conjunto X, está *determinado* si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.

Utilizando el Axioma de Elección se puede demostrar que hay conjuntos no determinados (Teorema A.7.4).

A menudo es conveniente considerar juegos en que los jugadores I y II no juegan elementos arbitrarios $a_0, a_1, \ldots$ de un conjunto dado A, sino que tienen que obedecer ciertas reglas. Esto significa que consideramos un árbol no vacío y bien podado $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$, que determina las *posiciones legales*. Para $X \subseteq [T]$ consideramos el juego $G(T,X)$ desarrollado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lcccc} I & a_0 & & a_2 & \\ II & & a_1 & & a_3 \ldots \end{array}$$

Los jugadores I y II toman turnos jugando $a_0, a_1, \ldots$ de manera que

$$(a_0, \ldots, a_n) \in T$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. El jugador I gana si y sólo si $(a_n) \in X$.

De esta forma, si $T = A^{<\mathbb{N}}$ y $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$, entonces $G(A^{<\mathbb{N}}, X) = G(A,X)$ en la notación que empleamos anteriormente.

Las nociones de estrategia, estrategia ganadora y determinación se definen como en los párrafos anteriores. Una estrategia ganadora para I es un árbol no vacío y bien podado $\sigma \subseteq T$ que cumple la condición (ii) mencionada anteriormente, siempre que a_{2j+1} es tal que $(a_0, \ldots, a_{2j}, a_{2j+1}) \in T$, y que cumple la condición (iii). La estrategia σ es ganadora si $[\sigma] \subseteq X$.

A.7.8 Teorema (Gale-Stewart)**.** *Sea T un árbol no vacío y bien podado en A. Si $X \subseteq [T]$ es cerrado o abierto en $[T]$, entonces $G(T,X)$ está determinado.*

A.7.9 Teorema (Martin)**.** *Sea T un árbol no vacío y bien podado en A y sea $X \subseteq [T]$ un conjunto de Borel. Entonces $G(T,X)$ está determinado.*

Axioma de determinación proyectiva (ADP). *Si $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es un conjunto proyectivo, entonces cualquier juego $G(\mathbb{N}, X)$ está determinado.*

Apéndice B

Espacios Lindelöf-Σ.

Antes de introducir la noción de espacio Lindelöf-Σ, introduciremos hechos básicos acerca de funciones multivaluadas (o mapeos multivaluados). Todos los espacios topológicos considerados en este Apéndice se suponen de Tychonoff (a menos que se diga explícitamente lo contrario).

Sean X y Y espacios topológicos. Un *mapeo multivaluado* de X a Y es un mapeo que asigna a cada punto $x \in X$ un subconjunto de Y (no necesariamente diferente del vacío), es decir, un mapeo multivaluado es una función $p : X \to \mathcal{P}(Y)$. Es una práctica común escribir $p : X \to Y$ para denotar al mapeo multivaluado $p : X \to \mathcal{P}(Y)$.

Observe que si $f : X \to Y$ es una función, entonces f puede identificarse con el mapeo multivaluado $p_f : X \to Y$ dado por: $p_f(x) = \{f(x)\}$ para toda $x \in X$. A partir de ahora identificaremos a p_f con f. Asimismo, toda función f induce el mapeo multivaluado $f^{-1} : Y \to X$ definido por $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ para cada $y \in Y$ (observe que para este mapeo multivaluado puede ocurrir que $f^{-1}(y) = \emptyset$). Dicho mapeo es llamado la *inversa de* f.

Por otra parte, si $p : X \to Y$ es un mapeo multivaluado para el cual cada subconjunto $p(x)$ es finito, diremos p es *finito-valuado*. Un mapeo multivaluado $p : X \to Y$ es *compacto-valuado* (o *compactamente-valuado*) si $p(x)$ es siempre un subespacio compacto de Y.

Si $p : X \to Y$ es un mapeo multivaluado, y $A \subseteq X$, entonces definimos la *imagen de* A *bajo* p como el conjunto

$$p(A) = \bigcup_{x \in A} p(x).$$

Si $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ son mapeos multivaluados, definimos la *composición de p con q* como el mapeo multivaluado $q \circ p : X \to Z$ dado por $(q \circ p)(x) = q(p(x))$ para toda $x \in X$.

La siguiente definición es de particular relevancia para nuestros propósitos.

B.1.10 Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Un mapeo multivaluado $p : X \to Y$ es *superiormente semicontinuo* (o *semicontinuo por arriba*) si para todo subconjunto abierto V de Y, el conjunto

$$p^{\#}(V) = \{x \in X : p(x) \subseteq V\}$$

es abierto en X.

B.1.11 Observación. Es facil ver que toda función continua $f : X \to Y$ es un mapeo compactamente-valuado superiormente semicontinuo. Además, note que si $f : X \to Y$ es un mapeo perfecto (esto es, f es continua, sobreyectiva, cerrada y con fibras compactas) entonces la inversa de f es un mapeo compactamente valuado y superiormente semicontinuo. Por otra parte, si X es un espacio topológico, y $F \subseteq X$ es un subespacio cerrado de X, entonces el mapeo multivaluado $p : X \to F$ definido por medio de la fórmula:

$$p(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in F, \\ \emptyset & \text{si } x \notin F, \end{cases}$$

es compactamente valuado y superiormente semicontinuo. Observe que p es la inversa del mapeo inclusión $i_F : F \to X$.

B.1.12 Proposición. *La composición de mapeos compactamente valuados superiormente semicontinuos es un mapeo compactamente valuado superiormente semicontinuo.*

Demostración. Supóngase que $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ son mapeos compactamente valuados semicontinuos superiormente.

Sea V un subconjunto abierto de Z. Verifiquemos que $(q \circ p)^{\#}(V) = p^{\#}(q^{\#}(V))$. Pero note que

$$\begin{aligned} x \in (q \circ p)^{\#}(V) &\Leftrightarrow q(p(x)) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \textstyle\bigcup_{y \in p(x)} q(y) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow q(y) \subseteq V \ \forall\, y \in p(x) \\ &\Leftrightarrow y \in q^{\#}(V) \ \forall\, y \in p(x) \\ &\Leftrightarrow p(x) \subseteq q^{\#}(V) \\ &\Leftrightarrow x \in p^{\#}(q^{\#}(V)). \end{aligned}$$

Con lo anterior y las hipótesis de nuestra proposión, obtenemos facilmente que $(q \circ p)^{\#}(V)$ es un subconjunto abierto de X. Con ello, el mapeo composición $q \circ p$ es semicontinuo superiormente.

Demostraremos ahora que $q \circ p$ es compactamente valuado. Para ello, supongamos que $x \in X$. Tomemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ en Z para $(q \circ p)(x) = \bigcup_{y \in p(x)} q(y)$. Entonces, para toda $y \in p(x)$, la colección $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $q(y)$. Como $q(y)$ es compacto, existe una subcolección finita $\mathcal{U}_y$ de $\mathcal{U}$ tal que $q(y) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_y$. Como q es semicontinuo superiormente, tenemos que $q^{\#}(\bigcup \mathcal{U}_y)$ es abierto en Y y $y \in q^{\#}(\bigcup \mathcal{U}_y)$ para toda $y \in p(x)$. Entonces

$$\mathcal{V} = \{q^{\#}(\bigcup \mathcal{U}_y) : y \in p(x)\}$$

es una cubierta abierta de $p(x)$. Como $p(x)$ es compacto, existen $y_1, \ldots, y_n \in p(x)$ tales que $p(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} q^{\#}(\bigcup \mathcal{U}_{y_i})$. Entonces la colección $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{y_i}$ es una subcolección finita de $\mathcal{U}$ que cubre a $(q \circ p)(x)$. $\square$

La siguiente proposición nos proporciona caracterizaciones útiles de los mapeos compactamente valuados semicontinuos superiormente.

B.1.13 Proposición. *Sea $p : X \to Y$ un mapeo multivaluado. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) el mapeo $p : X \to Y$ es compactamente valuado y semicontinuo superiormente;

(ii) p es la composición de la inversa de un mapeo perfecto definido en un subespacio cerrado de $X \times K$ y una función continua;

(iii) existen un espacio compacto K, un subconjunto cerrado F de $X \times K$ y una función continua $f : F \to Y$ tales que $p = f \circ i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1}$, donde $\pi_X : X \times K \to X$ es la proyección al primer factor e $i_F : F \to X$ es el mapeo inclusión.

Demostración. Probaremos la siguiente cadena de implicaciones: $(i) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (ii)$ y $(ii) \Rightarrow (i)$.

Note primeramente que $(ii) \Rightarrow (i)$ es una consecuencia de la proposición B.1.12 y de la observación B.1.11.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Definamos $K = \beta Y$ y sea

$$F = \operatorname{Graf}(p) = \bigcup_{x \in X} \big(\{x\} \times p(x)\big)$$

la gráfica del mapeo multivaluado p.

Afirmación. F es un subconjunto cerrado de $X \times K$.

Demostración de la Afirmación: Sea $(a, b) \in \big(X \times K\big) \setminus F$. Entonces $b \notin p(a)$. En consecuencia, existen abiertos ajenos A y B de K tales que $b \in A$ y $p(a) \subseteq B$. Como p es semicontinua superiormente, tenemos que $C = \{x \in X : p(x) \subseteq B\}$ es un subconjunto abierto de X que contiene a a. Entonces $(a, b) \in C \times A \subseteq \big(X \times K\big) \setminus F$. Verifiquemos esto último. Sea $(c, d) \in C \times A$. Entonces $c \in C$ y $d \in A$. Por definición de C, tenemos que $p(c) \subseteq B$. Como A y B son ajenos, se tiene que $d \notin p(c)$. Así $(c, d) \notin F$. ⊠

Consideremos ahora a la función $f : F \to Y$ definida por la siguiente fórmula: $f(a, b) = b$ para toda $(a, b) \in F$. Note que $f = \pi_K \restriction_K$ (note también que $\pi_K(F) \subseteq Y$). De esta manera f es continua. Ahora bien, sucede que si $x \in X$ entonces

$$\begin{array}{rcl}\big(f \circ i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1}\big)(x) & = & \big(f \circ i_F^{-1})(\pi_X^{-1}(x)\big) \\ & = & \big(f \circ i_F^{-1})(\{x\} \times K\big) \\ & = & f\big(i_F^{-1}(\{x\} \times K)\big) \\ & = & f\big((\{x\} \times K) \cap F\big) \\ & = & p(x).\end{array}$$

Lo cual muestra que $p = f \circ i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1}$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Demostremos que $p = f \circ h^{-1}$, donde h es la función continua $\pi_X \restriction_F : F \to X$ (recuerde que $\pi_X : X \times K \to X$ es la proyección al primer factor; vea también la observación B.1.11 para la definición de h^{-1}). Efectivamente, por hipótesis tenemos que $p = f \circ i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1}$. Asi que bastará demostrar que $i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1} = h^{-1}$. Pero si $x \in F$ entonces

$$h^{-1}(x) = (\pi_X \restriction_F)^{-1}(x) = (\pi_X \circ i_F)^{-1}(x) = i_F^{-1}(\pi_X^{-1}(x)) = (i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1})(x).$$

Notemos ahora que como K es compacto, podemos aplicar el teorema de Kuratowskii (vea [11, 3.1.16]) y concluir que π_X es una función cerrada. En consecuencia, el mapeo π_X es un mapeo perfecto. Siendo $F \subseteq X \times K$ un subespacio cerrado, se tiene que $\pi_X \restriction_F$ es también un mapeo perfecto. Por lo tanto p es la composición de la inversa h^{-1} de un mapeo perfecto y de una función continua f. □

Introduciremos ahora la noción de red respecto a una cubierta. Dicha noción es importante para poder introducir la correspondiente noción de espacio Σ.

B.1.14 Definición. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una cubierta para X, se dice que una colección $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *red para X respecto de la cubierta $\mathcal{D}$* si

$$\forall\, D \in \mathcal{D} \text{ y } \forall\, U \subseteq X \text{ abierto con } D \subseteq U \text{ existe } R \in \mathcal{R} \text{ tal que } D \subseteq R \subseteq U.$$

Estamos ya en posición de introducir la noción de espacio Σ. A partir de ahora, la frase *$\mathcal{D}$ es una cubierta cerrada de X* significará que $\mathcal{D}$ es una cubierta de X formada por subconjuntos cerrados. Diremos también que la cubierta $\mathcal{D}$ es una *cubierta compacta* si ésta está formada por subespacios compactos.

Por otro lado, recordemos que una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es llamada *familia discreta* de subconjuntos de X si para cada $x \in X$, existe un abierto W de X que contiene a x tal que $|\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\}| \leq 1$. Y una colección $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es σ-discreta si es la unión numerable de familias discretas.

B.1.15 Definición.

(i) Un espacio topológico X es llamado *espacio* Σ si es T_3 y existe una cubierta cerrada $\mathcal{D}$ del espacio X formada por subespacios numerablemente compactos y una familia σ-discreta $\mathcal{R}$ de subconjuntos de X, la cual es una red para X respecto a la cubierta $\mathcal{D}$.

(ii) Diremos que un espacio X es un espacio *Lindelöf-*Σ si éste es un espacio Σ que tiene la propiedad de Lindelöf.

Utilizando la propiedad de Lindelöf y los conceptos dados en la anterior definición, podemos demostrar la siguiente caracterización de los espacios Lindelöf-Σ.

B.1.16 Proposición. *Un espacio X es Lindelöf-Σ si y sólo si existe una cubierta $\mathcal{D}$ de X, formada por subconjuntos compactos, y una familia numerable $\mathcal{R}$ de subconjuntos de X tales que $\mathcal{R}$ es una red para X respecto a $\mathcal{D}$.*

Demostración. Verifiquemos que la condición es necesaria. Sea $\mathcal{D}$ una cubierta para X constituida por subespacios numerablemente compactos, y sea $\mathcal{R}$ una familia σ-discreta de subconjuntos de X. Como los elementos de $\mathcal{D}$ son subespacios cerrados de X, éstos heredan de X la propiedad de Lindelöf. Pero cualquier espacio Lindelöf y numerablemente compacto es compacto; por lo tanto cada uno de los elementos de la cubierta $\mathcal{D}$ es un subespacio compacto de X. Además, dado que en un espacio Lindelöf toda familia discreta es a lo más numerable, la familia $\mathcal{R}$ es numerable, siendo esta familia una unión numerable de familias discretas de subconjuntos de X.

Probemos ahora que la condición es suficiente. Supongamos que existen una cubierta $\mathcal{D}$ de X constituida por subespacios compactos de X, y una red numerable $\mathcal{R}$ para X respecto a la cubierta $\mathcal{D}$. Dado que $\mathcal{R}$ es una familia σ-discreta de subconjuntos de X (pues es numerable), para probar que X es un espacio Lindelöf Σ, bastará demostrar que X tiene la propiedad de Lindelöf.

Para tal fin, consideremos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X. Sea $\mathcal{U}^f$ la familia de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{U}$. Evidentemente, para demostrar que $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta numerable, es suficiente mostrar que $\mathcal{U}^f$ tiene una subcubierta numerable. Ahora bien, para probar esto, llamemos a un $R \in \mathcal{R}$ *marcado* si existe una familia finita $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tal que $R \subset \bigcup \mathcal{V}$. Si $R \in \mathcal{R}$ es marcado elijamos un $U_R \in \mathcal{U}^f$ de tal manera que $R \subset U_R$. Consideremos ahora a la familia $\mathcal{W} = \{U_R : R \in \mathcal{R} \text{ y } R \text{ es marcado}\}$. Claramente, la familia $\mathcal{W}$ es una subfamilia numerable de $\mathcal{U}^f$. Más aún, $\mathcal{W}$ es una subcubierta de $\mathcal{U}^f$. En efecto, consideremos un elemento $x \in X$. Dado que $\mathcal{D}$ es una cubierta de X, existe $C \in \mathcal{D}$ tal que $x \in C$. Como C es compacto y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, podemos elegir un elemento $U \in \mathcal{U}^f$ de tal manera que $C \subset U$. Ahora, dado que $\mathcal{R}$ es una red para X respecto a $\mathcal{D}$, existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $C \subset R \subset U$. Entonces R es un elemento marcado y por lo tanto $U_R \in \mathcal{W}$. Finalmente, observe que debido a la elección del abierto U_R, se tiene que $x \in C \subset R \subset U_R$. Esto demuestra que $\mathcal{W}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}^f$. □

La siguiente proposición resume algunas formas equivalentes de percibir a los espacios Lindelöf-Σ.

B.1.17 Proposición. *Sea X un espacio. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X es un espacio Lindelöf-Σ;

(ii) *existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{R}$ para X con respecto a $\mathcal{D}$;*

(iii) *existen un espacio segundo numerable M y un mapeo compactamente valuado semicontinuo superiormente $p : M \to X$ tales que $p(M) = X$;*

(iv) *existe un espacio segundo numerable M, un espacio L y funciones $g : L \to M$ y $f : L \to X$ tales que g es perfecta y f es continua sobreyectiva;*

(v) *existen un espacio segundo numerable, un espacio compacto K, un subespacio cerrado F de $M \times K$ y una función continua sobreyectiva $f : F \to X$.*

Demostración. La equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$ es la proposición anterior.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Aplicando la proposición 2.4 (inciso (2)) podemos garantizar la existencia de subespacio cerrado L de M, de un mapeo perfecto $g : L \to M$ y de una función continua $f : L \to X$ tales que $p = f \circ g^{-1}$. La última igual implica que f es sobreyectiva.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Consideremos al mapeo $p = f \circ g^{-1}$. Entonces $p : M \to X$ es compactamente valuado, semicontinuo superiormente y $p(M) = X$. Por 2.4, existe un espacio compacto K, un subespacio cerrado F de $M \times K$ y una función continua $h : F \to X$ tales que $p = h \circ i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1}$, donde $\pi_M : M \times K \to M$ es la proyección al primer factor. Obsérvese que $h(F) = M$.

$(v) \Rightarrow (iii)$ Considere el mapeo $p : M \to X$ dado por: $p = f \circ i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1}$, donde $\pi_M : M \times K \to M$ es la proyección al primer factor e $i_F : F \to M \times K$ es la inclusión. Resulta que p es superiormente semicontinuo, compactamente valuado y sobreyectivo.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Suponga que $\mathcal{B}$ es una base numerable para M. Entonces la colección $p(\mathcal{B}) = \{p(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es una red numerable para X respecto de la cubierta compacta $\{p(m) : m \in M\}$ (demuéstrelo).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Consideremos en $\mathcal{R}$ a la topología discreta. Sea

$$M = \{m : \mathbb{N} \to \mathcal{R} : \{m(i) : i \in \mathbb{N}\} = \{R \in \mathcal{R} : D \subseteq R\} \text{ para alguna } D \in \mathcal{D}\}.$$

Obsérvese que si $x \in X$ entonces existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $x \in D$. Defina $A = \{R \in \mathcal{R} : D \subseteq R\}$. Claramente A es a lo más numerable. Entonces existe una enumeración (posiblemente con repeticiones) $A = \{R_i : i \in \mathbb{N}\}$. Entonces la función $m : \mathbb{N} \to \mathcal{R}$ dada por $m(i) = R_i$ pertenece a M. En consecuencia, $\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$. Ahora bien, dotando a M de la topología de subespacio, obtenemos un espacio metrizable separable.

Definamos ahora al mapeo multivaluado $p : M \to X$ de la siguiente manera: $p(m) = \bigcap\{m(i) : i \in \omega\}$, para cada $m \in M$.

Afirmación. p es un mapeo compactamente valuado, semicontinuo superiormente y sobreyectivo.

Demostración de la Afirmación: Como $p(m) = \bigcap\{m(i) : i \in \mathbb{N}\} = D$ tenemos que p es compactamente valuado. Note que la verificación que hemos hecho de que M es no vacío permite también argumentar que p es sobreyectivo. Así que sólo resta probar que p es semicontinuo superiormente. Para ello, supongamos que V es abierto en X y que $m \in p^{\#}(V)$. Entonces $p(m) = D \subseteq V$. Como $\mathcal{R}$ es una red para X respecto de $\mathcal{D}$, existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $D \subseteq R \subseteq V$. En consecuencia, existe una $i \in \omega$ tal que $R = m(i)$. Sea $U = M \cap \pi_i^{-1}(\{R\})$, donde $\pi_i : \mathcal{R}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{R}$ es la i-ésima proyección. Claramente U es un subconjunto abierto de M tal que $m \in U \subseteq p^{\#}(V)$. Luego $p^{\#}(V)$ es abierto en M. Por lo tanto p es semicontinuo superiormente. $\square$

El siguiente corolario nos presenta algunos aspectos de la clase de los espacios Lindelöf-Σ que se han utilizado a través del trabajo de tesis.

B.1.18 Corolario.

(i) *Cada espacio σ-compacto (y por lo tanto, cada espacio compacto) es Lindelöf-Σ.*

(ii) *Cada espacio que tiene red numerable es Lindelöf-Σ. En particular, cualquier espacio segundo numerable es Lindelöf-Σ.*

(iii) *Si $p : X \to Y$ es un mapeo compactamente valuado, semicontinuo superiormente y sobreyectivo, y X es Lindelöf-Σ, entonces Y es Lindelöf-Σ.*

(iv) *La clase de los espacios Lindelöf-Σ es cerrada bajo imágenes continuas, subespacios cerrados y preimagenes perfectas.*

(v) *Si X es Lindelöf-Σ, K es compacto y $Y \subseteq X \times K$ es cerrado, entonces Y es Lindelöf-Σ.*

(vi) *Un espacio X es Lindelöf-Σ si y sólo si existe un espacio metrizable separable M, un espacio compacto K y un subespacio cerrado Y de $M \times K$ tal que X es imagen continua de Y.*

(vii) *Un espacio X es Lindelöf-Σ si y sólo si existen espacios Y y M y funciones $f : Y \to X$, $g : Y \to M$ tales que f es perfecta y g es continua y sobreyectiva, y M es metrizable separable.*

(viii) *El producto de cualquier familia numerable de espacios Lindelöf-Σ es Lindelöf-Σ.*

(ix) *Si X es la unión numerable de una familia de subespacios Lindelöf-Σ, entonces X también es Lindelöf-Σ.*

(x) *Si X es la intersección de una familia numerable de subespacios Lindelöf-Σ de un espacio Z, entonces X es Lindelöf-Σ.*

(xi) *La clase de espacios Lindelöf-Σ es la más pequeña de las clases de espacios topológicos que contienen a todos los espacios compactos y a todos los espacios metrizables separables, y que es cerrada bajo la formación de productos finitos, imágenes continuas y subespacios cerrados.*

Demostración. Los incisos (i), (ii), (iii), (iv), (vi) y (vii) son consecuencia sencilla de la proposición 2.8.

Para demostrar (v), nótese que aplicando el teorema de Kuratowski [11, 3.1.16], podemos concluir que la proyección $\pi_X : X \times K \to X$ es una función perfecta. Aplicando ahora el inciso (iv), deducimos que $X \times K$ e Y son espacios Lindelöf-Σ.

Para demostrar (viii), podemos aplicar (vii) y notar que el producto numerable de espacios metrizables separables es un espacio metrizable separable, el producto de funciones continuas es una función continua, y el producto de una familia de funciones perfectas sigue siendo una función perfecta.

Para demostrar (ix), supóngase que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ son subespacios Lindelöf-Σ de un espacio X tales que $X = \bigcup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dotando a $\mathbb{N}$ de la topología discreta, tenemos que este espacio es Lindelöf-Σ. Además, por el inciso (vii), tenemos que $\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n\big) \times \mathbb{N}$ es un espacio Lindelöf-Σ. Note ahora que $\bigcup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es imagen continua de $\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n\big) \times \mathbb{N}$.

Demostración de (x). Si X_n es subespacio Lindelöf-Σ de un espacio Z, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es homeomorfo al subespacio $K = \{f_x : x \in X\} \bigcap \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ del producto $X^{\mathbb{N}}$, donde $f_x : \mathbb{N} \to X$ está dada por $f_x(n) = x \;\forall\, n \in \mathbb{N}$. Como cada espacio X_n es Lindelöf-Σ, tenemos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es Lindelöf-Σ. Por ello el subespacio K es Lindelöf-Σ (porque es cerrado en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$)

La verificación de (xi) es sencilla. Dejamos al lector la tarea de hacerlo. $\square$

Apéndice C

C.1. El Teorema de Arhangel'skii-Pytkeev.

Dado un espacio topológico X, el *grado de Lindelöf* $l(X)$ del espacio X es el más pequeño de los cardinales infinitos τ para los cuales se tiene la propiedad que de toda cubierta abierta del espacio X, es posible extraer una subcubierta cuya cardinalidad no excede a τ. Asimismo, se define al cardinal $l^*(X)$ como la más pequeña de las cotas superiores del conjunto constituido por los cardinales $l(X^n)$ donde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, esto es,

$$l^*(X) = sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

En esta sección demostraremos el clásico resultado debido a A. V. Arhangel'skii y a E. G. Pytkeev, el cual establece que para cada espacio topológico X, el invariante cardinal $l^*(X)$ coincide con la estrechez del espacio $C_p(X)$.

Para llevar a cabo la demostración de este teorema, demostraremos previamente dos resultados que nos serán de gran utilidad. El primero de estos resultados muestra la relación que existe entre la propiedad de que $l^*(X) \leq \tau$ para algún cardinal τ, con el hecho de que de toda ω-cubierta del espacio $C_p(X)$ es posible extraer una ω-subcubierta cuya cardinalidad no excede a τ. Antes de enunciar formalmente este resultado, necesitamos recordar la noción de ω-cubierta y la forma en que se define a la estrechez de un espacio topológico.

C.1.1 Definición. Sea X un espacio topológico. Se dice que una familia $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}(X)$ es una ω-cubierta de X si para cada conjunto finito $F \subset X$ existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset U$.

Recuérdese que dado un punto x de un espacio X, la *estrechez* $t(x, X)$ *de* X *en el punto* x es el más pequeño de los números cardinales $\tau \geq \omega$

que poseen la siguiente propiedad: para cada $A \subset X$, con $x \in cl(A)$, existe $B \subset A$ tal que $|B| \leq \tau$ y $x \in cl(B)$. De este modo podemos definir a la *estrechez* de un espacio topológico X como el número cardinal infinito $t(X) = sup\{t(x, X) : x \in X\}$.

C.1.2 Teorema. *Sea X un espacio de Tychonoff. Para todo cardinal τ se tiene que $l^*(X) \leq \tau$ si y sólo si cada ω-cubierta $\mathcal{U}$ del espacio X posee una ω-subcubierta $\mathcal{V}$ cuya cardinalidad no excede a τ.*

Demostración. Supongamos que $l^*(X) \leq \tau$. Dada una ω-cubierta $\mathcal{U}$ de X definimos, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, al conjunto $\mathcal{U}_n = \{U^n : U \in \mathcal{U}\}$. Observe que si $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ entonces para el conjunto $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset U$ (puesto que $\mathcal{U}$ es una ω-cubierta de X). Entonces $(x_1, \ldots, x_n) \in U^n$. De esta forma hemos establecido que el conjunto $\mathcal{U}_n$ es una cubierta de X^n, para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Aplicando el hecho de que $l(X^n) \leq \tau$, podemos garantizar la existencia de una familia $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\bigcup\{U^n : U \in \mathcal{V}_n\} = X^n$ y $|\mathcal{V}_n| \leq \tau$, para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Hagamos $\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Entonces $\mathcal{V}$ es una ω-cubierta de X, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ y $|\mathcal{V}| \leq \tau$. Con todo lo anterior hemos probado que la condición dada en el enunciado del teorema es necesaria.

Supongamos ahora que de cada ω-cubierta $\mathcal{U}$ del espacio X es posible extraer una ω-subcubierta cuya cardinalidad no excede a τ. Fijemos un índice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y demostremos que $l(X^n) \leq \tau$.

Para este propósito, consideremos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ del espacio X^n. Diremos que una familia finita $\mathcal{B} \subseteq \tau(X)$ es *$\mathcal{U}$-dominada*, si para cada $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}$ (no necesariamente diferentes) existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $U_1 \times \cdots \times U_n \subset U$. Consideremos a la familia $\mathcal{V} = \{\bigcup\mathcal{B} : \mathcal{B}$ es una familia $\mathcal{U}$-dominada$\}$. Afirmamos que $\mathcal{V}$ es una ω-cubierta de X. En efecto, si $F = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X$ entonces para cada conjunto $\xi = \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ existen vecindades abiertas $V_{i_1}, \ldots, V_{i_n}$ de los puntos $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ tales que $V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_n} \subseteq U_\xi$ para algún $U_\xi \in \mathcal{U}$. Debido a que hay un número finito de tales puntos ξ, cada punto x_i obtiene de esta manera un número finito de vecindades. Intersectándo para toda x_i cada una de estas vecindades, obtenemos abiertos W_i para cada $i \leq k$, tales que la familia $\mathcal{B} = \{W_i : i \leq k\}$ es $\mathcal{U}$-dominada y además $F = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \bigcup\mathcal{B}$. Esto demuestra que $\mathcal{V}$ es una ω-cubierta de X.

Por hipótesis existe una ω-subcubierta $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ de cardinalidad $\leq \tau$. Ahora bien, para cada $U \in \mathcal{W}$ existe una familia $\mathcal{B}_U$ tal que $\mathcal{B}_U$ es $\mathcal{U}$-dominada y $U = \bigcup\mathcal{B}_U$. Entonces, para cada $U \in \mathcal{W}$, existe una familia finita $\mathcal{U}_U \subset \mathcal{U}$

tal que para cualquier $\xi = \{V_1, \ldots, V_n\} \subseteq \mathcal{B}_U$ se tiene que $V_1 \times \cdots \times V_n \subset G_\xi$ para algún $G_\xi \in \mathcal{U}_U$. Hagamos $\mathcal{C} = \bigcup\{\mathcal{U}_U : U \in \mathcal{W}\}$. Entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ y $|\mathcal{C}| \leq \tau$. Además, es fácil verificar que $\mathcal{C}$ es una cubierta de X^n. Por lo tanto, $l^*(X) \leq \tau$. □

C.1.3 Teorema. *Para cualquier espacio Tychonoff X, sucede que $t(C_p(X)) \leq \tau$ si y sólo si cada ω-cubierta $\mathcal{U}$ de X tiene una ω-subcubierta $\mathcal{V}$ tal que $|\mathcal{V}| \leq \tau$.*

Demostración. Supongamos que $t(C_p(X)) \leq \tau$. Dada una ω-cubierta $\mathcal{U}$ de X, consideramos

$$D = \{f \in C_p(X) : f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}.$$

El conjunto D de esta forma definido es un subconjunto denso de $C_p(X)$. Efectivamente, sea $W = [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$ un abierto canónico no vacío de $C_p(X)$. Fijemos un elemento $h \in W$. Como $\mathcal{U}$ es una ω-cubierta de X, para el conjunto $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset U$. Como X es un espacio de Tychonoff, podemos elegir una función $f \in C_p(X)$ tal que $f(x_i) = h(x_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y $f(X \setminus U) \subseteq \{0\}$. Entonces $f \in W \cap D$. Esto prueba que D es denso en $C_p(X)$.

Ahora bien, como $\varphi(1) \in cl(D)$ y $t(C_p(X)) \leq \tau$ (recuerde que para cada $r \in \mathbb{R}$, los símbolos $\varphi(r)$ denotan a la función constante de valor r definida en el espacio X), existe un conjunto $B \subset D$, con $|B| \leq \tau$, tal que $\varphi(1) \in cl(B)$. Para cada $f \in B$, fijemos un elemento $U_f \in \mathcal{U}$ tal que $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq U_f$. Entonces el conjunto $\mathcal{V} = \{U_f : f \in B\}$ es una ω-subcubierta de $\mathcal{U}$ cuya cardinalidad no excede a τ. En efecto, es claro que $|\mathcal{V}| \leq |B| \leq \tau$. Así que consideremos un subconjunto finito $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de X. Como $\varphi(1) \in cl(B)$, existe un elemento $f \in B$ tal que $f \in [\varphi(1); x_1, \ldots, x_n; \frac{1}{2}]$. Entonces para tal función se tiene que $F \subset f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq U_f$. Esto prueba que $\mathcal{V}$ es una ω-subcubierta de $\mathcal{U}$.

Para probar que la condición del teorema es suficiente, supongamos que $A \subset C_p(X)$ y que $f \in cl(A)$. Como $C_p(X)$ es un espacio homogéneo (Proposición 1.2.7), sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f = \varphi(0)$. Afirmamos que para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la familia $\mathcal{U}_n = \{g^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) : g \in A\}$ es una ω-cubierta de X. En efecto, fijemos un índice m y consideremos un subconjunto finito $F = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X$. Como $\varphi(0) \in cl(A)$, existe $h \in [\varphi(0); x_1, \ldots, x_k; \frac{1}{m}] \cap A$. Entonces $F = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq h^{-1}\big((-\frac{1}{m}, \frac{1}{m})\big)$. De esta forma, $\mathcal{U}_m$ es una ω-cubierta de X.

Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existe un conjunto $B_n \subset A$ tal que la familia $\mathcal{V}_n = \{g^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) : g \in B_n\}$ es una ω-subcubierta de $\mathcal{U}_n$ y $|\mathcal{V}_n| \leq \tau$. Hagamos $B = \bigcup\{B_n : n \in \omega \setminus \{0\}\}$. Entonces $B \subset A$, $|B| \leq \tau$ y $\varphi(0) \in cl(B)$. Esto demuestra que $t(C_p(X)) \leq \tau$. □

Como corolario a los dos anteriores teoremas obtenemos el teorema de Arhangel'skii-Pytkeev.

C.1.4 Teorema (Arhangel'skii, [**?**]; Pytkeev, [**?**])**.** *Para cada espacio de Tychonoff X, se tiene que $l^*(X) = t(C_p(X))$.*

C.2. La topología de convergencia uniforme.

Recordemos que una sucesión de funciones $(f_n) \subseteq C(X)$ converge uniformemente a una función $f \in C(X)$ (lo cual denotaremos mediante los símbolos $f_n \rightrightarrows f$) si para cada $\epsilon > 0$ existe un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para cada $x \in X$ y cada $n \geq N$.

Utilizando esta noción podemos definir un operador sobre el conjunto $C(X)$ que nos permitirá introducir una topología en este conjunto. La forma de hacer esto es definiendo, para cada subconjunto A de $C(X)$, al conjunto $[A]$ como aquel subconjunto de $C(X)$ constituido por todos aquellos elementos $g \in C(X)$ para los cuales existe una sucesión (g_n) de elementos de A que converge uniformemente a g. El operador $[\cdot]$ que hemos definido tiene las siguientes propiedades:

(i) $[\emptyset] = \emptyset$;

(ii) para todo $A \subset C(X)$, se tiene que $A \subset [A]$ y $[[A]] = [A]$; además,

(iii) para cualesquiera $A, B \subset C(X)$, tenemos que $[A \cup B] = [A] \cup [B]$.

Es fácil comprobar, utilizando las propiedades (i), (ii) y (iii) antes descritas, que la familia

$$\tau_u = \{C(X) \setminus F : F \subseteq C(X) \text{ es tal que } F = [F]\}$$

es una topología en el conjunto $C(X)$. Tal topología recibe el nombre de *topología de convergencia uniforme* y al espacio topológico de esta forma generado se le denota con los símbolos $C_u(X)$.

En esta sección demostraremos únicamente las propiedades de los espacios $C_u(X)$ que serán de utilidad para el buen desarrollo de los resultados que estableceremos en capítulos posteriores. El lector interesado en estudiar más profundamente a este tipo de espacios puede consultar [11].

Una importante propiedad de los espacios $C_u(X)$ es la metrizabilidad.

C.2.1 Proposición. *Si X es un espacio de Tychonoff, entonces el espacio $C_u(X)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Consideremos a la función $\rho : C(X) \times C(X) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

para cada $(f, g) \in C(X)\times C(X)$, donde $d(f(x), g(x)) = \text{mín}\{|f(x)-g(x)|, 1\}$ para $x \in X$. La función ρ de esta forma definida es una métrica en el conjunto $C(X)$ que induce la topología de $C_u(X)$. Dejaremos al cuidado del lector verificar que la función ρ es una métrica en $C(X)$ y nos dedicaremos a comprobar que ella induce la topología del espacio $C_u(X)$.

Primeramente notemos que debido a la forma en que se ha definido a la topología del espacio $C_u(X)$, para verificar que ρ induce a esta topología sólo necesitamos demostrar que si $(f_n) \subseteq C(X)$ y $f \in C(X)$ entonces la sucesión f_n converge uniformemente a f si y sólo si $\text{lím}_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$. Para demostrar esto último, supongamos primero que (f_n) converge uniformemente a f. Entonces, dada una $\epsilon > 0$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x)-f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in X$ y toda $n \geq N$. Por la definición de la métrica ρ, tenemos que $\rho(f_n, f) \leq \epsilon$ para toda $n \geq N$. Dado que el número real ϵ fue elegido en forma arbitraria, podemos concluir que $\text{lím}_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$.

Para probar la implicación contraria, supongamos que $\text{lím}_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$. Consideremos una $\epsilon > 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\epsilon < 1$. Como $\text{lím}_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$, para tal ϵ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f_n, f) < \epsilon$ para toda $n \geq N$. Por la definición de ρ, tenemos que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in X$ y para toda $n \geq N$. Entonces $(f_n) \rightrightarrows f$.

Con la finalidad de probar la completitud de la métrica ρ, consideremos una sucesión de Cauchy (f_n) en el espacio $C_u(X)$. Entonces para todo $\epsilon > 0$, existe un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f_n, f_k) < \epsilon$ para cualquier par de índices $n, k \geq N$. De aquí tenemos que $|f_n(x) - f_k(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$ y para cualesquiera $n, k \geq N$. De esta forma podemos concluir que para todo $x \in X$, la sucesión $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de los números reales $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo, la sucesión $(f_n(x))$ converge a un número real r_x, para todo $x \in X$. Definamos la función $f : X \to \mathbb{R}$

como $f(x) = r_x$ para cada $x \in X$.

Comprobaremos ahora que la sucesión (f_n) converge uniformemente a la función f. Para este propósito, fijemos un índice $N \in \omega$ para el cual $\rho(f_n, f_k) < \frac{\epsilon}{2}$ para todos los índices $n, k \geq N$. Entonces $|f_n(x) - f_k(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para cualquier $x \in X$ y para todo $n, k \geq N$. Tomando el límite cuando $k \to \infty$, tenemos que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in X$ y toda $n \geq N$. Consecuentemente, la sucesión (f_n) converge uniformemente a f sobre el espacio X. De esto último se desprende que la función f es una función continua. $\square$

C.2.2 Proposición. *Para cada espacio de Tychonoff X, el espacio $C_u(X)$ junto con la operación $\phi_+ : C(X) \times C(X) \to C(X)$ dada por $\phi_+(f, g) = f + g$ para cada $(f, g) \in C(X) \times C(X)$, es un grupo topológico.*

Demostración. Es suficiente demostrar que, al considerar en el conjunto $C(X)$ a la topología de convergencia uniforme, la función ϕ_+ es continua. Para probar esto, consideremos un elemento arbitrario $(f, g) \in C_u(X) \times C_u(X)$. Sea $\epsilon > 0$ cualquiera y consideremos un número $\delta > 0$ tal que $\delta < \min\{\epsilon, 1\}$. Como la topología del espacio $C_u(X)$ es la inducida por la métrica ρ, los conjuntos $B_\rho(f, \frac{\delta}{2})$ y $B_\rho(g, \frac{\delta}{2})$ son vecindades abiertas de f y g en el espacio $C_u(X)$, respectivamente (recuerde que en un espacio métrico (Z, d), si $z \in Z$ y $r > 0$ entonces $B_d(z, r) = \{a \in Z : d(a, z) < r\}$). Afirmamos que tales vecindades tienen la siguiente propiedad: si $h \in B_\rho(f, \frac{\delta}{2})$ y $k \in B_\rho(g, \frac{\delta}{2})$, entonces $\rho(h + k, f + g) < \epsilon$. En efecto, sea $x \in X$ un elemento arbitrario. Entonces $|\big(h+k\big)(x) - \big(f+g\big)(x)| \leq |h(x) - f(x)| + |k(x) - g(x)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. Como x es arbitraria, lo anterior implica que $\rho(h + k, f + g) \leq \delta$. De esta forma, podemos concluir que $\rho(h + k, f + g) < \epsilon$. Por lo tanto, la función ϕ_+ es continua en el punto (f, g). $\square$

Bibliografía

[1] Andretta, A.; Marcone, A.; *Pointwise convergence and the Wadge hierarchy*, Comment. Math. Univ. Carolinae **42** (2001), 159-172.

[2] Arhangel'skii, A. V., *C_p-theory*, Recent progress in general topology (editores M. Husek y J. Van Mill), Elsevier Science Publishers B. V., 1989, 1-56.

[3] Arhangel'skii, A. V., *Factorization theorems and function spaces: stability and monolithicity*, Soviet Math. Dokl. **26** 1982, 177-181.

[4] Arhangel'skii, A. V., *On condensations of C_p-spaces onto compacta*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**, no. 6 (2000), 1881-1883.

[5] Arhangel'skii, A. V., *Topological functions spaces*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht-Boston-London, 1992.

[6] Arhangel'skii, A. V.; Pavlov, O. I., *A note on condensations of $C_p(X)$ onto compacta*, Comment. Math. Univ. Carolin. **43**, no. 3 (2002) 485-492.

[7] Arhangel'skii, A. V.; Ponomarev, V. I., *Fundamentals of general topology: problems and exercises*, Mathematics and its applications, D. Reidel, 1984.

[8] Casarrubias Segura, F., *La clase de los espacios topológicos Lindelöf Σ y algunas subclases especiales*, capítulo 1 en *Topología y sistemas dinámicos 1*, editores Angoa Amador J. [et al], Textos científicos, BUAP, Facultad de Físico Matemáticas, Dirección de Fomento Editorial, 2007.

[9] Casarrubias Segura, F.; Tamariz Mascarúa, Ángel, *Elementos de topología general*, Aportaciones Matemáticas, Textos 37, Nivel Medio. Sociedad Matemática Mexicana, 2012.

[10] van Dowen, E., *The integers and topology, Handbook of Set Theoretic Topology*, Elsevier Science Publishers B. V., 1984, 111-167.

[11] Engelking, R., *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Verlag Helderman, 1989.

[12] Hodel, R., *Cardinal functions I, Handbook of Set Theoretic Topology*, Elsevier Science Publishers B. V., 1984, 1-61.

[13] Ivorra Castillo, C., *Teoría Descriptiva de Conjuntos*. Manuscrito.

[14] Kechris, A., *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag New York, 1995.

[15] Kuratowski, K., *Topology*, vol. 1, Academic Pr / PWN, 1966.

[16] Marciszewski, W., *A function space $C_p(X)$ without a condensation onto a sigma-compact space*, Proc. Amer. Math. Soc. **131**, no. 6 (2003), 1965-1969.

[17] Michalewski, H., *Condensations of projective sets onto compacta*, Proc. Amer. Math. Soc. **131**, no. 11 (2003), 3601-3606.

[18] Pytkeev, E. G., *Upper bounds of topologies*, Math Notes **20**, no. 4 (1976), 831-837.

[19] Tkachenko, M. G., *Grupos topológicos*; Libros de texto, manuales de prácticas y antologías, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 1997.

[20] Tkachuk, V. V., *A C_p-theory problem book*, Problem books in mathematics, Springer, 2011.

[21] Tkachuk, V. V., *Condensations of $C_p(X)$ onto σ-compact spaces*, Applied General Topology **10**, no. 1, 2009, 39-48.