

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIO DE LAS OSCILACIONES DE TIPO
SOLAR EN LA ESTRELLA KIC 5701829.**

Tesis que presenta
Dan Josué Deras Badillo.
para optar a la Titulación de
Licenciado en Física.
Asesor: Dr. Lester Fox Machado

julio de 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

"Él hizo la Osa, el Orión y las Pléyades. Él hace cosas grandes e incomprensibles, y maravillosas sin número. ¿Podrás tú atar los lazos de las Pléyades, o desatarás las ligaduras de Orión? ¿Sacarás tú a su tiempo las constelaciones de los cielos, o guiarás a la Osa Mayor con sus hijos? ¿Supiste tú de las ordenanzas de los cielos? Buscad al que hace las Pléyades y el Orión, y vuelve las tinieblas en mañana, y hace oscurecer el día como noche. Jehová es su nombre".

Libro de Job.

A mi madre Elizabeth Badillo quien ya se encuentra disfrutando de su galardón eterno. No lo hubiera logrado sin tu amor, sin tu ejemplo, sin tu dirección hasta el último momento y sobre todo sin tus oraciones por mi. Con la frente en alto te puedo decir: ¡LO HICIMOS!

A mis hermanos Israel, Elizabeth y Rolando quienes nunca dejaron de apoyarme y siempre creyeron que podía lograrlo. Con la frente en alto les puedo decir: ¡LO HICIMOS!

A la familias Angulo Badillo y García Badillo por haberme provisto de techo, cama y comida durante la realización de mi carrera y de mi tesis. Este trabajo no habría sido posible sin su amor, cobijo y sustento. En general a mis tíos y tías Badillo con sus familias: Miri, Marty, Toti, Tirsi, Meris, Becky, Mimí, Mony, Iris, Moy, Hur, Dany y Temo. Gracias por sus constantes oraciones. Los quiero.

A la familia Deras Borbolla por adoptarme y haberme dado consejo y dirección cuando lo necesité.

A mi director de tesis Lester Fox por haberme dado la confianza, el tiempo y la paciencia para la conclusión de este trabajo.

A mi profesor José H. Peña por haberme dado toda la confianza del mundo al proveer los recursos económicos para el término de esta tesis.

A mi amiga de toda la vida Ceci Paredes por todo su apoyo, cariño incondicional y por no dejar de creer en mi. Love you lots!

A mi hermano de otra madre Leonardo Sánchez por su contribución clave para la realización de esta tesis.

A Valentina Abril por su colaboración con las diapositivas de la espectroscopía.

A todo el staff del Instituto de Astronomía de Ensenada y del Observatorio Astronómico Nacional en la Sierra de San Pedro Mártir.

A la UNAM por el apoyo económico a través de DGAPA-PAPIIT IN104612.

Índice

1	Introducción.	1
1.1	Astrosismología y estrellas pulsantes.	1
1.2	Gigantes Rojas.	4
1.3	Oscilaciones de tipo solar en estrellas gigantes rojas.	4
1.4	KIC 5701829.	6
1.5	Motivación y objetivo.	7
2	Aspectos teóricos de la Astrosismología.	9
2.1	Teoría lineal de las oscilaciones.	10
2.1.1	Ecuaciones lineales y adiabáticas.	10
2.1.2	Relaciones de escala.	13
2.2	La naturaleza física de los modos de oscilación.	14
2.2.1	Modos acústicos.	15
2.2.2	Modos gravitatorios.	16
2.2.3	Modos mixtos.	17
2.3	Excitación de los modos.	17
3	Obtención, reducción y análisis de datos observacionales.	19
3.1	Fotometría.	19
3.1.1	Descripción de la misión Kepler.	20
3.1.2	Características del satélite Kepler.	21
3.1.3	El método de tránsito para detectar planetas extrasolares y la astrosismología.	22
3.2	Espectroscopía.	22
3.2.1	Clasificación espectral de las estrellas.	23
3.2.2	Espectrógrafo Boller & Chivens.	24
3.3	Resultados.	25
3.3.1	Curva de luz de KIC 5701829.	25
3.3.2	Diagrama Échelle.	26
3.3.3	Determinación de los modos de oscilación: Period04.	27
3.3.4	Determinación del tipo espectral de KIC 5701829.	29
3.4	Análisis de datos observacionales.	29
3.5	Cálculo de incertidumbres.	31

4	Análisis teórico.	33
4.1	Determinación del estado evolutivo de KIC 5701829: Secuencias evolutivas teóricas.	33
4.2	Criterio estadístico de comparación.	35
5	CONCLUSIONES	39
A	Apéndice 1.	
	Reducción de espectros usando IRAF.	41
B	Apéndice 2.	
	Código de evolución estelar: CESAM2k y código de oscilaciones: FILOU.	47
B.1	Cálculo de modelos de estructura estelar: Código CESAM.	47
B.2	Cálculo de las frecuencias teóricas de oscilación: Código FILOU.	49
C	Bibliografía.	51

1

Introducción.

1.1 Astrosismología y estrellas pulsantes.

La astrosismología se refiere al estudio de la estructura interna de estrellas pulsantes a través del estudio de sus modos propios de oscilación. En esta ciencia, se aprovechan las oscilaciones para sondear el interior estelar el cual no es directamente observable. Cuando se perturba un sistema en equilibrio su respuesta suele ser vibratoria en forma de pequeñas oscilaciones alrededor de dicho equilibrio. Estas vibraciones, si son estacionarias, se suelen llamar modos propios de oscilación porque sus frecuencias determinan la estructura física del sistema que las soporta. El mecanismo principal para esta clase de estrellas es la conversión neta de energía de radiación en energía de pulsación en las capas superficiales (zona de convección). Usualmente, las oscilaciones resultantes son estudiadas bajo la suposición de que son pequeñas, que la estrella está aislada y que es esféricamente simétrica. Hasta ahora, la astrosismología es el único método disponible para derivar la estructura interna de las estrellas con una alta precisión y su objetivo último es el de mejorar los modelos evolutivos de las estrellas.

Las estrellas pulsantes que estudia la astrosismología son aquellas que presentan variaciones de carácter periódico o cuasi-periódico en sus observables (luminosidad, tipo espectral, velocidad radial) causadas por un mecanismo físico de excitación interno. Este fenómeno intrínseco es lo que las diferencia claramente de las variables eclipsantes que, como su nombre lo dice, sufren de variaciones en su luminosidad debido a compañeros que se interponen en la línea de visión del observador y la estrella en cuestión; o las eruptivas cuya variabilidad es producida generalmente por la transferencia de masa a partir de estrellas compañeras. De ahí que a las estrellas pulsantes a menudo se les denomine variables intrínsecas.

Los diferentes grupos de estrellas pulsantes ocupan regiones bien definidas en el diagrama HR. Los llamados pulsadores clásicos ocupan una zona casi vertical denominada *franja de inestabilidad*. Además de las δ Scuti, aquí se encuentran las Cefeidas, las W Virginis (W Vir), las RR Lyrae, las Rapidly Oscillating Ap (roAp), algunas γ Doradus y las ZZ Ceti (ver figura 1.1). Entre las estrellas pulsantes se pueden encontrar desde estrellas muy jóvenes

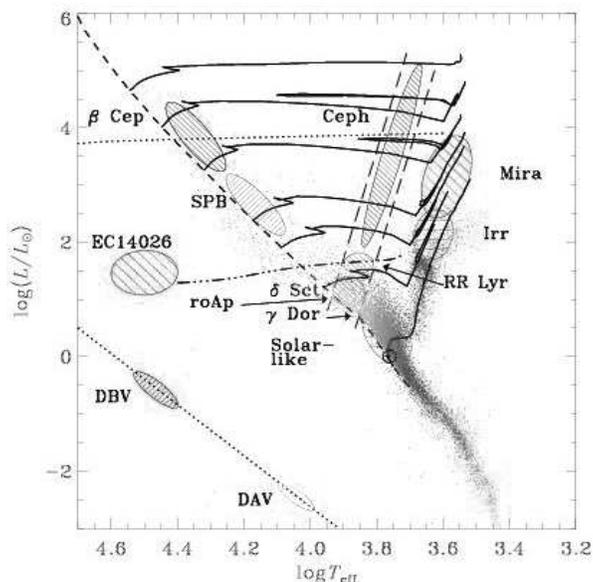


Figura 1.1: Diagrama HR que muestra las regiones donde se encuentran los distintos tipos de estrellas pulsantes. La secuencia principal (SP, en adelante) cruza en diagonal el diagrama desde la parte superior izquierda a la inferior derecha. También se especifican las trazas evolutivas de cinco modelos de estrellas con masas comprendidas entre 1 y $15 M_{\odot}$, incluyéndose la Secuencia Principal de Edad Cero (SPEC). Las líneas a trazos muestran los límites aproximados de la franja de inestabilidad para los diferentes tipos de pulsadores. La línea a puntos es la secuencia de enanas blancas. (<http://www.ster.kuleuven.be/peter/Bstars/HRall.jpg>).

hasta estrellas muy evolucionadas, tanto de Población I y II. Cubren un amplio rango de masas. Pueden presentar períodos de oscilación desde algunas décimas de minutos hasta muchos años. Los diferentes grupos de pulsadores se pueden localizar tanto en el halo como en el bulbo galáctico; en cúmulos abiertos y globulares. Esto hace que su estudio proporcione amplia información de interés para múltiples campos de la astrofísica. En particular la heliosismología (que es el estudio de oscilaciones intrínsecas en el Sol), ha permitido obtener un conocimiento muy detallado acerca de su estructura interna, como por ejemplo, la profundidad de la zona de externa de convección, el contenido de helio y ritmo de rotación interior.

La razón por la cual los interiores estelares pueden ser sondeados a través de las oscilaciones es que diferentes modos de oscilación penetran a diferentes profundidades dentro de la estrella. Las oscilaciones estelares presentes en las estrellas pulsantes corresponden a ondas estacionarias que se propagan a través de cavidades resonantes del interior estelar y cuyo camino se puede ver afectado por cambios locales de presión, densidad, temperatura y composición química, por lo que al estudiarlas se pueden inferir las condiciones físicas del interior estelar. Como cualquier oscilador, una estrella pulsante se caracteriza por sus modos propios de oscilación, los cuales van a depender de la fuerza recuperadora que haga que el sistema retorne a la posición de equilibrio hidrostático. En un sistema autogravitante

las fuerzas principales que intervienen son la presión y la gravedad. Cuando la presión es la fuerza restauradora se trata de modos acústicos o *modos p*. En caso contrario, cuando la fuerza de gravedad es la dominante, se tratan de modos gravitatorios o *modos g*. Cada modo de oscilación estará caracterizado por su período (o equivalentemente, por su frecuencia), y por una terna de valores (n, l, m) que resultan de la distribución espacial del modo en la estrella y se denominan *orden radial*, *grado angular* y *orden azimutal* respectivamente. Los modos observados en las estrellas, sin embargo, deben corresponder a los linealmente inestables, es decir, a aquellos que al ser excitados en el interior estelar no son disipados completamente por efectos no lineales y conservan una amplitud finita. En este caso se dice que la estrella es inestable a la pulsación. En caso contrario, cuando los mecanismos de amortiguamiento de la oscilación prevalecen en el interior de forma que la amplitud de oscilación no puede crecer en el tiempo se dice que es estable. El movimiento oscilatorio más sencillo es cuando $(l = 0)$ que ocurre cuando la estrella se expande y se contrae como un todo manteniendo la simetría esférica. Este es el tipo de movimiento observado en la mayoría de las Cefeidas y RR Lyrae. El modo radial fundamental es aproximadamente igual al tiempo de escala dinámico de la estrella y proporciona información directa de su densidad. La mayor parte de las estrellas pulsantes, no obstante, oscilan de manera más complicada presentando varios modos de pulsación excitados simultáneamente, que pueden ser sobretonos radiales o los llamados modos no radiales que, al propagarse, distorsionan la simetría esférica estelar.

Para obtener información sobre la estructura estelar a partir de los modos de oscilaciones se requieren tres etapas principalmente:

1. Detección de un gran número de frecuencias de pulsación con gran precisión,
2. Identificación de los modos de oscilación, es decir, asignarles los valores correctos de n, l y m .
3. Determinación precisa de los parámetros físicos de las estrellas objetivo.

Dado que la resolución espectral en los espectros de amplitudes depende inversamente del tiempo de observación T : $\Delta\nu \sim \frac{1}{T}$, la detección de las frecuencias de oscilación con alta precisión requiere una cobertura observacional lo más amplia posible que permita conseguir series temporales largas y prácticamente ininterrumpidas.

La obtención de series temporales continuas es ahora una realidad gracias a las observaciones multisitio y a las misiones espaciales. Ejemplos de misiones espaciales dedicadas a llevar a cabo estudios de diferentes tipos de estrellas pulsantes son WIRE (Hacking et al. 1999), CoRoT (Baglin et al. 2002), *Kepler* (Borucki et al. 2010).

En particular, *Kepler*¹ es un satélite de la NASA cuyo principal objetivo es la búsqueda de planetas extrasolares usando el método del tránsito (Borucki et al. 2010). Sin embargo, los datos obtenidos por *Kepler* constituyen una base de datos única para llevar a cabo estudios astrosismológicos. Al final de la misión, se obtendrán las curvas de luz de aproximadamente 150,000 objetos observados de manera continuas entre 1 mes y varios meses.

¹<http://www.kepler.nasa.gov/>

1.2 Gigantes Rojas.

Una estrella nace al condensarse de un material tenue para formar una nebulosa. Condensaciones al azar de este material llevan a la aparición de masas opacas. La gravedad causa que la masa se encoja y conforme lo hace, la temperatura en su centro aumenta. El centro continúa acumulando masa pero debido a la conservación de momento angular, la rotación aumenta pero su radio disminuye. Esta rotación provoca que el material se distribuya en una región en forma de disco alrededor de la estrella (un disco protoplanetario). Cuando la temperatura se ha elevado lo suficiente y el disco de gas y polvo se ha dispersado, la masa comienza a brillar y se convierte en una protoestrella.

Si su masa inicial es menor a un décimo de la del Sol, el núcleo nunca se calentará lo suficiente como para que comiencen las reacciones nucleares, y la estrella simplemente brillará débilmente antes de perder su energía. Si la masa se encuentra entre 0.1 y 1.4 veces la masa del Sol, la estrella se encoje y fluctúa de manera irregular. También manda un fuerte viento estelar, y eventualmente disipa su capullo original de polvo. A esta fase se le conoce como la etapa T Tauri. Cuando la temperatura en el núcleo de la protoestrella se dispara hacia los 10^6 °C, comienzan las reacciones nucleares, es decir, la estrella comienza a transformar hidrógeno en helio y así la estrella llega a la SP. El quemado de hidrógeno durará alrededor de 10,000 millones de años, pero al final, éste suministro se agotará y la estrella será forzada a cambiar su estructura. Como grupo, estas estrellas son llamadas gigantes rojas.

Mientras que cada estrella de SP está funcionando con un proceso único -la fusión termonuclear de hidrógeno en sus núcleos- una gigante roja puede hacerlo con una variedad de procesos y dentro de capas que rodean al núcleo. Al inicio de esta fase, la estrella quema helio en su núcleo, después carbón, después oxígeno.

Sin embargo, independientemente del combustible quemado en su núcleo, la mayoría de la energía producida por la estrella proviene de quemar hidrógeno en la envoltura exterior a su núcleo. Estrellas masivas en transición de un núcleo donde se fusiona hidrógeno a uno donde se fusiona helio tienen fotosferas más frías que las que tenían mientras estaban en su etapa de SP, pero aún se pueden poner más calientes y azules que el Sol. Esto es particularmente cierto para estrellas muy masivas, las cuales durante su fase de gigante roja forman una clase de objetos llamada supergigantes; estas estrellas generan diez mil veces la energía del Sol, pero pueden variar en color desde las muy azules hasta las muy rojas. El radio de la fotosfera de la estrella durante la etapa de gigante roja es dramáticamente más grande (≈ 200 veces más grande en el caso del Sol) comparado con el tenía durante su etapa de SP. Para estrellas menores a un par de masas solares, este incremento en el radio contrarresta un incremento por un factor de 10 o más en la luminosidad (The Astrophysics Spectator 2006). En el caso de las estrellas de baja masa, el área más grande es simplemente para contrarrestar la mayor generación de energía.

1.3 Oscilaciones de tipo solar en estrellas gigantes rojas.

Este tipo de oscilaciones se descubrieron en el Sol a mediados de los años 70, debido a que su amplitud es muy baja. Luego, se comenzaron a buscar en estrellas de campo de tipo solar (tipo espectral G), aunque no se tuvo éxito en encontrarlas. Fue hasta el año de 1994

cuando se demostró que éstas pueden existir en otras estrellas aparte del Sol.

Un grupo de astrónomos de la Universidad de Aarhus (Dinamarca) y del ESO, observaron la estrella η Bootis durante seis noches en el observatorio de Roque de los Muchachos en la isla de La Palma (Islas Canarias) y fueron capaces de mostrar que oscilaba de manera periódica en al menos diez diferentes modos simultáneamente con períodos de alrededor de veinte minutos (Kjeldsen et al. 1994). La astrosismología de gigantes rojas comenzó con varias observaciones de oscilaciones de tipo solar en estrellas G y K basadas en observaciones terrestres de velocidad radial y fotometría. Posteriormente, las observaciones de 150 días realizadas por el satélite CoRoT detectaron claramente oscilaciones radiales y no radiales en el rango de 10 - 100 μ Hz en este tipo de estrellas, lo cual llevó a un gran avance en su estudio.

Las oscilaciones de tipo solar son oscilaciones excitadas por convección turbulenta en las capas superficiales de estrellas frías de SP y post SP con envoltura convectiva. Las gigantes rojas están caracterizadas por una profunda envoltura convectiva y un pequeño núcleo degenerado. Esto es porque ya han agotado el hidrógeno que se encontraba en su núcleo, por lo tanto, ya no hay la misma producción de energía para equilibrar a la gravedad que está comprimiendo la estrella. Esto calienta una capa justo en las afueras del núcleo donde aún hay hidrógeno, iniciando su fusión en helio en esa capa. Dado que la densidad en el núcleo de estas estrellas es bastante alta, la frecuencia de flotabilidad o de Brunt-Väisälä (esto se explicará en el Capítulo 2) puede alcanzar valores muy grandes en la parte central. Los espectros de oscilaciones en estrellas de tipo solar se caracterizan por la presencia de picos de frecuencia igualmente espaciados, cuya separación permite estimar de manera directa la masa y el radio estelar. Específicamente, el espectro se caracteriza por la separación grande de frecuencias y por la separación pequeña de frecuencias (figura 1.2). La separación grande de frecuencias consiste en una serie de picos uniformemente espaciados separados por un intervalo $\Delta\nu$ entre modos p de un mismo grado y adjacientes n : $\Delta\nu \sim \Delta\nu_l = \nu_{n+1,l} - \nu_{n,l}$. La separación grande es proporcional a la densidad media de la estrella. La separación pequeña de frecuencias consiste en una serie de picos uniformemente espaciados por un intervalo $\delta\nu_{l+2} = \nu_{n,l} - \nu_{n-1,l+2}$.

Esta separación es sensitiva al gradiente de la composición química de la estrella y por

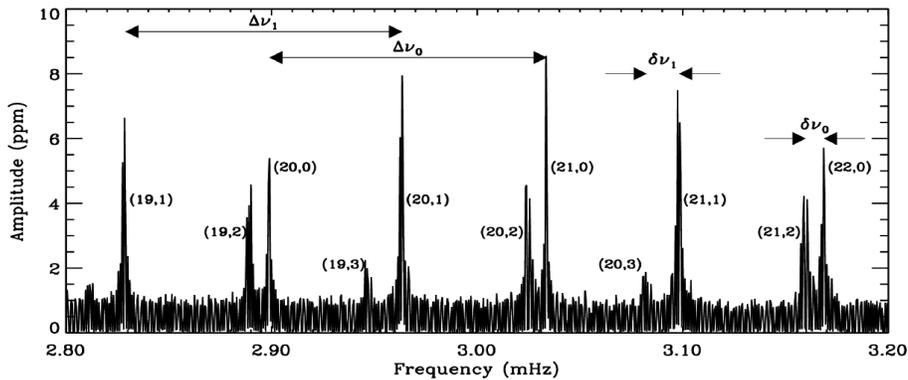


Figura 1.2: Espectro de potencias solar mostrando los valores $l = 3, 2, 1$ y 0 (<http://www.lesia.obspm.fr>).

lo tanto es indicador del estado evolutivo de la estrella.

1.4 KIC 5701829.

KIC 5701829 (BD+40 3689, 2MASS J19222264 +4059425, SAO 48371, TYC 3138-801-1) es una estrella en el campo del satélite *Kepler* (ver figura 1.3) cuya variabilidad fue reportada inicialmente por Baran y Fox Machado (2011) en una búsqueda sistemática de oscilaciones radiales intrínsecas en enanas de tipo espectral M usando la base de datos pública del satélite *Kepler*. Baran y Fox Machado (2011) analizan una muestra 86 estrellas del catálogo *Kepler Input Catalog (KIC)* observadas en los trimestres 0, 1, 2 en cadencia corta que presentan temperatura efectiva y gravedad en el rango esperado para las enanas M. En particular la muestra de Baran y Fox Machado (2011) fue seleccionada de acuerdo a los siguientes criterios: $T_{\text{eff}} < 4500$ K, $\log g > 4.2$, $R < 1.0 R_{\odot}$ e índices de color $1 < R - J < 4$.

La curva de luz de KIC5701829 tiene una duración total de 31 días de los cuales 29 fueron de observación efectiva. Fue obtenida durante el Q2 de su ciclo en cadencia corta



Figura 1.3: Campo de $3.4' \times 3.4'$ de KIC 5701829 (<http://simbad.u-strasbg.fr>).

Tabla 1.1: Parámetros de la estrella KIC 5701829 tomados del catálogo KIC.

Kepler Id.	AR (J2000)	DEC (J2000)	Mag. Kepler (mag)	T_{eff} K	$\log g$ cm/s^2	Radio R_{\odot}
5701829	19:22:22.64	+40:59:42.5	9.047	4623	4.634	0.69

Tabla 1.2: Magnitudes de KIC 5701829 en diferentes bandas tomadas de la base de datos Simbad.

KIC	B	V	J	H	K
5701829	10.27	9.30	7.513	6.990	6.942

(tiempo de integración ~ 1 min).

La base de datos Simbad² da un tipo espectral G5, aunque Baran y Fox Machado (2011) reportan un período de oscilación de aproximadamente 0.5 horas y estiman un tipo espectral de K0III para este objeto. De acuerdo al tipo espectral reportado, KIC 5701829 es una estrella gigante roja pulsante. Los parámetros físicos de KIC 5701829 fueron tomados del catálogo KIC (tabla 1.1) y de la base de datos Simbad (tabla 1.2).

1.5 Motivación y objetivo.

Se ha observado que la estrella KIC5701829 presenta oscilaciones de tipo solar. La motivación de estudiar esta estrella está en el hecho de que, al tratarse de una gigante roja, los patrones de separación corta y larga en su espectro de potencias son fácilmente distinguibles, además de ser de las pocas estrellas que han sido observadas por el satélite *Kepler* en cadencia corta (esto se explicará más adelante). Se pretende usar lo anterior en conjunto con las herramientas de la astrosismología, fotometría y la espectroscopía para hacer un análisis más detallado de su estado evolutivo.

Los objetivos concretos de este trabajo son:

- Analizar la curva de luz de KIC 5701829 para obtener sus frecuencias de oscilación.
- Estimar la masa y el radio de KIC 5701829 a partir de las relaciones de escala.
- Reducir y analizar los espectros estelares de KIC 5701829 y de estrellas estándares tomados en el telescopio de 2.12m del Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir con el objetivo de derivar el tipo espectral de KIC 5701829.
- Calcular una malla de secuencias evolutivas de KIC 5701829 usando el código de estructura y evolución estelar CESAM2k.
- Comparar esas secuencias evolutivas con la posición observacional de KIC 5701829 en el diagrama HR para determinar su edad.
- A partir de cada modelo de estado evolutivo de KIC 5701829, calcular las frecuencias teóricas de oscilación usando el código de oscilaciones FILOU.
- Comparar las frecuencias observacionales de KIC 5701829 con las frecuencias teóricas resultantes de los modelos sismológicos por medio de la minimización de ajustes del tipo χ^2 .
- Determinar los parámetros físicos de KIC 5701829 a partir del modelo que mejor ajusta las frecuencias observacionales y teóricas.

²<http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/>

2

Aspectos teóricos de la Astrosismología.

La idea de obtener información sobre un sistema físico a partir del estudio de sus modos de oscilación es, por supuesto, una de las más viejas en la Física. Sin embargo, es en las últimas décadas, cuando esta técnica se comenzó a aplicar con éxito en el estudio del Sol y de otras estrellas. Como ya se ha indicado, las oscilaciones estelares son ondas estacionarias que se propagan a través de cavidades resonantes dentro de la estrella por lo que son fiel reflejo de su estructura. Los observables típicos como las variaciones en luminosidad y velocidad radial, no son más que el efecto manifiesto de los cambios periódicos en la configuración de equilibrio de estos objetos por perturbaciones que se propagan a través de ellos. Los parámetros de oscilación que se observan en las estrellas incluyen además de las frecuencias, a la variación de la amplitud y los anchos de líneas. Las frecuencias de oscilación tienen ciertas ventajas en el diagnóstico de las propiedades estelares. Por un lado como se dijo más arriba se pueden medir con gran precisión, por otro se pueden relacionar de una manera sencilla con las propiedades de la estrella. Por ejemplo, una simple medida del período fundamental, $\Pi \simeq G\bar{\rho}$, provee la densidad media de la estrella. Las amplitudes de los modos y los anchos de líneas, por otro lado, requieren de un tratamiento detallado de la transferencia de energía dentro y fuera del modo de oscilación y por ese motivo su interpretación es mucho más complicada.

Las oscilaciones observadas en las estrellas pulsantes son típicamente de muy baja amplitud. Esto permite que, en una primera aproximación, se puedan tratar en términos de pequeñas perturbaciones lineales alrededor del modelo de equilibrio resultante de los cálculos de estructura y evolución estelar. Los efectos no lineales, sin embargo, son importantes en la determinación de las amplitudes finales y por lo tanto, del posible mecanismo de selección de los modos. Una simplificación adicional llega del hecho que los períodos de pulsación observados son mucho más cortos que la escala de tiempo térmico a través de la estrella, por lo que las oscilaciones se pueden considerar en una buena aproximación como adiabáticas. Esta aproximación adiabática será suficiente para determinar el espectro total de oscilaciones de un modelo estelar y para calcular las frecuencias de oscilación con una precisión razonable. Por otra parte, los efectos no adiabáticos serán importantes para determinar cuáles modos son inestables a la pulsación.

Los desarrollos teóricos que se explicarán en este capítulo se pueden encontrar con mucho mayor detalle en varios ejemplares de la bibliografía del tema (p. ej. Cox 1980, Unno et al. 1989 o Christensen-Dalsgaard 1998).

2.1 Teoría lineal de las oscilaciones.

La variación temporal y espacial de una perturbación al medio estelar viene dada por:

$$\xi_{nlm}(r, \theta, \varphi, t) = \xi_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega_{nlm}t}. \quad (2.1)$$

Aquí ξ es una perturbación escalar asociada con el modo (por ejemplo el desplazamiento radial); r , θ , φ y t son respectivamente la coordenada radial, la colatitud, la longitud y el tiempo. La distribución espacial de los modos se describe a través de los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta, \varphi)$, determinados como

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m c_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (2.2)$$

donde P_l^m es un polinomio de Legendre asociado y c_l^m es una constante de normalización determinada por

$$c_{lm}^2 = \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}, \quad (2.3)$$

de tal forma que la integral de $|Y_l^m|^2$ sobre la esfera unitaria es igual a 1.

Al índice l se le conoce como *grado angular*, representa el número de líneas nodales presentes en la esfera oscilante, siendo $\sqrt{l(l+1)}$ igual al producto del radio estelar y el número de ondas horizontales del modo. Puede tomar valores enteros positivos. Cuando $l = 0$ hablamos de modos radiales, $l = 1$ modo dipolar, $l = 2$ modo cuadrupolar. El índice m es el *orden azimutal*. Éste da cuenta del número de líneas nodales que atraviesan perpendicularmente el ecuador, con $|m| \leq l$ habiendo $2l+1$ posibles valores de m . Un ejemplo visual de los armónicos esféricos para diferentes l y m lo tenemos en la figura 2.1. Los modos con $m = 0$ se denominan zonales y aquellos con $m = l$ sectoriales. El índice n es el *orden radial* y en los casos más frecuentes se identifica con el número de nodos (ceros) en la autofunción que existe entre el centro de la estrella y la superficie. Puede tomar valores de 0, 1, 2, etc. Cuando $n = 0$ se habla de modo fundamental, si $n = 1$ se trata del primer sobretono, y así sucesivamente. Ya que n se relaciona con la profundidad de la estructura, no es accesible a las observaciones. En general, un modo propio de oscilación queda caracterizado por los tres números cuánticos n , l y m , y por su frecuencia ω_{nlm} , sin embargo en ausencia de rotación (manteniendo la simetría esférica) las frecuencias dependerán solamente de n y l . Ello se debe a que en este caso no existe ninguna dirección privilegiada en la estrella, y por tanto la física de la pulsación, y en consecuencia las frecuencias serán independientes de m .

2.1.1 Ecuaciones lineales y adiabáticas.

Las ecuaciones generales básicas que describen las oscilaciones de una estrella son las ecuaciones de la hidrodinámica. Asumiendo que en el estado de equilibrio hidrostático la estrella posee simetría esférica y que el medio estelar es estático, no viscoso y no magnético; al aplicar la teoría lineal de perturbaciones resulta el siguiente sistema de ecuaciones básicas:

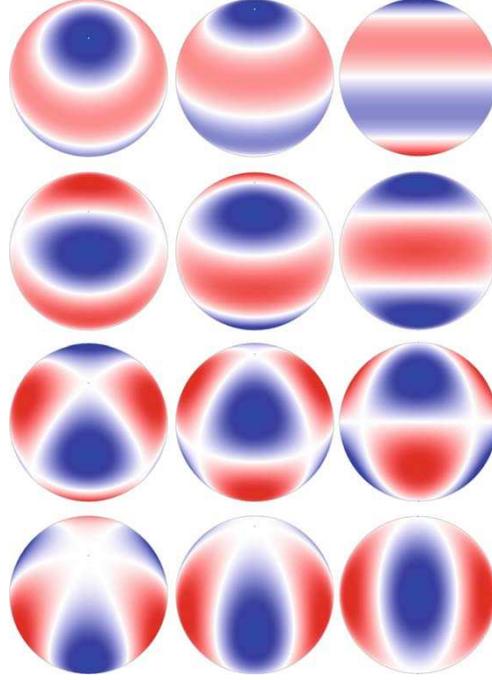


Figura 2.1: Armónicos esféricos para el grado angular $l = 3$. Las columnas muestran los modos desde distintos ángulos: la columna de la izquierda es para una inclinación de 30° en el polo de pulsación, la columna de en medio es para una de 60° y la columna de la derecha para una de 90° . Las líneas blancas representan las líneas nodales l . Los elementos de masa sobre estas líneas no se mueven durante el ciclo de oscilación. El rojo y azul representan secciones de la estrella que se están moviendo hacia adentro (o hacia afuera) y/o calentándose (o enfriándose) en un momento dado o viceversa. Como $l \geq |m|$, el primer renglón muestra los valores $l = 3$, $m = 0$ El segundo renglón muestra los valores $l = 3$, $m = 2$. El tercer renglón muestra $l = 3$, $m = 1$ con dos nodos que son líneas de latitud y otra que es una línea de longitud y el último renglón muestra ($l = 3$, $m = 3$) (Aerts et al. 2010).

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}') = 0, \quad (2.4)$$

- Ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial^2 \delta \vec{r}'}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p_0 + \nabla \Phi', \quad (2.5)$$

- Ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi' = -4\pi G \rho', \quad (2.6)$$

- Ecuación de conservación de la energía térmica:

$$\rho T \frac{\partial \delta S}{\partial t} \equiv \rho T \frac{c_p}{v_T} \left(\frac{\partial(\frac{\delta p}{\rho})}{\partial t} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\partial(\frac{\delta p}{p})}{\partial t} \right) = \rho \varepsilon \left(\frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} \right) - \delta(\nabla \vec{F}'). \quad (2.7)$$

Donde ρ' es la densidad, Φ' es el potencial gravitacional, G es la constante de gravitación universal, v es la velocidad de un elemento de gas y t es el tiempo. Las perturbaciones Eulerianas se denotan por primas, mientras que las perturbaciones Lagrangianas se denotan por δ . S es la entropía específica, \vec{F} es el flujo de energía, ε es el ritmo de generación de energía por unidad de masa, c_p es el calor específico por unidad de masa a presión constante, $v_T \equiv -(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T})_p$, $\Gamma_1 \equiv (\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho})_S$. Aquí se ha despreciado la perturbación Lagrangiana de la composición química, ya que se comentó los períodos de pulsación son mucho más cortos que la escala de tiempo de la nucleosíntesis y de la difusión del material.

El desplazamiento $\delta \vec{r}$ es separado en componentes radial y tangencial:

$$\delta \vec{r} = \xi_r \hat{r} + \vec{\xi}_h. \quad (2.8)$$

Utilizando el sistema de ecuaciones (2.4) - (2.7) junto con la última definición, y considerando las propiedades del operador ∇ en un sistema de coordenadas esféricas se obtienen las siguientes expresiones para ξ_r y ξ_h :

$$\vec{\xi}_r(r) = \sqrt{4\pi} \tilde{\xi}_r(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{r} e^{-i\omega t}, \quad (2.9)$$

$$\vec{\xi}_h(r) = \sqrt{4\pi} \tilde{\xi}_h(r) \left(\frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \right) e^{-i\omega t}. \quad (2.10)$$

Estas dos últimas expresiones representan a las componentes radial y horizontal de la perturbación Lagrangiana del desplazamiento. Igualmente, las perturbaciones Eulerianas de las otras variables (p' , Φ' , etc.) quedarán determinadas en función de los armónicos esféricos de grado l y orden azimutal m según la ecuación (2.1). Esto es una consecuencia de la simetría esférica que posee el problema a resolver.

La aproximación adiabática

Con el propósito de calcular las frecuencias de oscilación, las complicaciones de la ecuación de la energía se evitan prescindiendo del término de calor en la ecuación de conservación. Esto se justifica, debido a que en el interior estelar las escalas de tiempo térmico son del orden del tiempo de Kelvin-Helmholtz, o sea, $t_{\text{ter}} \approx 10^7$ años, mientras que sabemos que los periodos típicos de pulsación son del orden de minutos u horas, por lo que la hipótesis de adiabaticidad es aceptable. Por el contrario, cerca de la superficie t_{ter} es comparable con los periodos de oscilación, luego los modos se vuelven no adiabáticos. Así, las perturbaciones Lagrangianas de p y ρ quedarán relacionadas por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t}, \quad (2.11)$$

que se agrega a (2.4) - (2.6), para formar un sistema de ecuaciones adiabáticas.

Teniendo esto en cuenta, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales y adiabáticas para el cálculo de las perturbaciones:

$$\frac{d\tilde{\xi}_r}{dr} = - \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_{1,0} p_0} \frac{dp_0}{dr} \right) \tilde{\xi}_r + \frac{1}{\rho_0 c_s^2} \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) \tilde{p}' - \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} \tilde{\Phi}', \quad (2.12)$$

$$\frac{d\tilde{p}'}{dr} = \rho_0(\omega^2 - N^2)\tilde{\xi}_r + \frac{1}{\Gamma_{1,0}p_0} \frac{dp_0}{dr} \tilde{p}' + \rho_0 \frac{d\tilde{\Phi}'}{dr}, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\tilde{\Phi}'}{dr} \right) = -4\pi G \left(\frac{\tilde{p}'}{c_s^2} + \rho_0 \frac{\tilde{\xi}_r}{g_0} N^2 \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \tilde{\Phi}'. \quad (2.14)$$

En estas ecuaciones hemos introducido las siguientes frecuencias características:

- Frecuencia de Lamb

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)c_s^2}{r^2}, \quad (2.15)$$

- Frecuencia de Brunt-Väisälä o de flotabilidad

$$N^2 = g_0 \left(\frac{1}{\Gamma_{1,0}p_0} \frac{dp_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right). \quad (2.16)$$

Las ecuaciones (2.12) - (2.14) constituyen un sistema de cuarto orden de ecuaciones diferenciales ordinarias para las cuatro variables dependientes $\tilde{\xi}_r$, \tilde{p}' , $\tilde{\Phi}'$ y $d\tilde{\Phi}'/dr$. A este sistema se agregan cuatro condiciones de frontera: dos en la superficie y dos en el centro. De esta forma se ha llegado a un problema típico de valores propios. Las soluciones no triviales del problema pueden ser obtenidas solamente para valores selectos de ω , la cual constituye un valor propio del problema. Para cada valor de l se tiene un conjunto de ecuaciones y, por tanto, de valores de ω cuyas funciones propias asociadas difieren entre sí en el número de puntos nodales a lo largo del radio, dados por el índice n . Este sistema de ecuaciones con las condiciones de frontera se resuelve numéricamente con un código de oscilaciones estelares.

2.1.2 Relaciones de escala.

La primera aproximación a los datos que aporta la astrosismología está basada en las propiedades generales de las oscilaciones, típicamente la separación grande $\Delta\nu$ y la frecuencia ν_{max} de máxima potencia. Se sabe que en una buena aproximación (Ulrich 1986) $\Delta\nu$ es proporcional a la raíz cuadrada de la densidad estelar. Brown et al. (1991) fueron los primeros en argumentar que la frecuencia de máxima potencia ν_{max} para estrellas de tipo solar debería escalarse con la frecuencia acústica de corte. Kjeldsen y Bedding (Kjeldsen y Bedding 1995) usaron esta suposición para relacionar ν_{max} con las propiedades estelares de la siguiente manera:

$$\frac{\nu_{max}}{\nu_{max\odot}} = \frac{\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}}\right)^{\frac{7}{2}}}{\left(\frac{L}{L_\odot}\right)} \quad (2.17)$$

Esta relación de escala ha funcionado bien observacional y teóricamente. La frecuencia de separación grande promedio ($\Delta\nu$) está directamente relacionada con el tiempo que le toma al sonido viajar a través del diámetro estelar, y por lo tanto es proporcional a la densidad estelar promedio. Esto se expresa en la siguiente relación de escala:

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\odot}} = \left(\frac{\rho}{\rho_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}}\right)^3}{\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)^{\frac{3}{4}}} \quad (2.18)$$

donde $\Delta\nu_{\odot} = 135\mu\text{Hz}$, $\nu_{max\odot} = 3050\mu\text{Hz}$ y $T_{eff\odot} = 5777\text{K}$ son los valores solares. Entonces, eliminando la dependencia de la luminosidad se obtiene:

$$\frac{R}{R_{\odot}} \approx \left(\frac{\nu_{max}}{\nu_{max\odot}}\right) \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\odot}}\right)^{-2} \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

$$\frac{M}{M_{\odot}} \approx \left(\frac{\nu_{max}}{\nu_{max\odot}}\right)^3 \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\odot}}\right)^{-4} \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.20)$$

(Kallinger et al. 2010; Mosser et al. 2010). Si se supone que T_{eff} ya se ha determinado, ésto provee valores del radio R y la masa M de la estrella, independientemente de cualquier modelo. Sin embargo, debe notarse que $\Delta\nu$ y ν_{max} aparecen a potencias bastante altas, particularmente en la expresión para la masa, y por lo tanto los resultados son sensibles a errores en las cantidades observadas. Tal determinación de la masa y el radio estelar dependen de la validez de las escalas supuestas ya se trata de una primera aproximación.

La escala de ν_{max} (Ec. 2.17), no posee una base teórica completamente segura ya que no es posible aún hacer predicciones confiables de las amplitudes de los modos excitados estocásticamente o de su dependencia de la frecuencia. Sin embargo, las relaciones tienen un apoyo observacional muy fuerte.

2.2 La naturaleza física de los modos de oscilación.

Se puede obtener una explicación cualitativa adecuada de los modos de oscilación sin necesidad de resolver numéricamente el sistema de ecuaciones de oscilaciones adiabáticas (2.12) - (2.14), despreciando la perturbación en el potencial gravitacional, Φ' . Esto puede justificarse, en principio, solo para ordenes n o grados l altos (Cowling 1941). En este caso el número de ceros en las autofunciones es elevado y las contribuciones al potencial gravitatorio de las regiones donde la perturbación de densidad tiene signo opuesto se cancelan unas con otras. A este procedimiento se le conoce como la aproximación de Cowling, y permite reducir el orden del sistema a la mitad, con una reducción correspondiente en el número de las condiciones de frontera. Aunque no existe una justificación matemática clara, este tratamiento simplificado de las ecuaciones es muy útil de cara a entender la naturaleza física de los modos de oscilación.

Así en esta aproximación, despreciando las derivadas de las magnitudes en equilibrio dado que las autofunciones varían muy rápido espacialmente, se obtiene la siguiente ecuación para la autofunción ξ_r :

$$\frac{d^2\xi_r}{dr^2} = -K(r)\xi_r, \quad (2.21)$$

donde

$$K(r) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right). \quad (2.22)$$

De la ecuación (2.21) se ve que ξ_r es localmente una función oscilatoria cuando $K(r) > 0$, en caso contrario, cuando $K(r)$ es negativo, la solución es una función exponencial de r . Los modos de oscilación quedarán atrapados en *cavidades resonantes* determinadas por las soluciones donde $K(r)$ es positivo. Las fronteras de esta región estarán determinadas por los puntos donde $K(r) = 0$, los cuales se denominan *puntos de reflexión*, además se aprecia que los tipos de oscilación quedarán determinados por los valores de ω respecto a las frecuencias S_l y N . De acuerdo a esta descripción la solución será oscilatoria cuando:

$$|\omega| > |N| \quad \text{y} \quad |\omega| > S_l, \quad (2.23)$$

o

$$|\omega| < |N| \quad \text{y} \quad |\omega| < S_l; \quad (2.24)$$

y será evanescente cuando:

$$|N| < |\omega| < S_l, \quad (2.25)$$

o

$$S_l < |\omega| < |N|. \quad (2.26)$$

Las propiedades oscilatorias de un modelo estelar dado dependerán del comportamiento de S_l y N en el interior estelar. Se pueden distinguir los siguientes tipos de modos de oscilación: modos p , aquellos que cumplen la condición (2.23) se determinan por la frecuencia acústica, S_l ; modos g , los que cumplen la condición (2.24) y se controlan por la frecuencia de flotabilidad, N y los modos mixtos. Las principales características de estos modos se presentan a continuación.

2.2.1 Modos acústicos.

Son ondas acústicas estacionarias atrapadas entre el punto de reflexión interno y la superficie. Se caracterizan porque su propagación es paralela a la dirección de vibración. La fuerza recuperadora en estas oscilaciones es la presión (de ahí su designación p). El radio de reflexión se localiza donde $\omega = S_l(r_t)$, que se determina a partir de la Frecuencia de Lamb (2.15):

$$\frac{c(r_t)}{r_t} = \frac{\omega}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad (2.27)$$

por lo que los modos de l bajo profundizarán en mayor medida que los de l altos, más superficiales. Los modos p son de frecuencias altas (ver figura 2.2). En general, todos los modos p escalan con la densidad media de la estrella, de forma que estrellas más densas tendrán frecuencias más altas que otras menos densas para un mismo modo. El período fundamental se relaciona con la densidad media a través de la siguiente expresión (Cox 1974):

$$\Pi = 2\pi[(3(\Gamma_1 - 4)\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}]^{-1/2} \quad (2.28)$$

De esta ecuación se aprecia que para un determinado valor de Γ_1 , se obtiene la conocida relación período-densidad media que cumplen la mayoría de estrellas pulsantes, $\Pi\sqrt{\bar{\rho}} \simeq$ constante. También notamos que para un valor de $\Gamma_1 \approx 4/3$ el período, Π , puede alcanzar valores inmensos. Este sería el caso, por ejemplo, en objetos muy masivos formados por partículas relativistas, donde la presión de radiación es mucho más importante que la presión del gas.

Las frecuencias de los modos p de orden alto cumplen las siguientes relaciones asintóticas que son muy útiles en la interpretación de oscilaciones tipo solar y relacionan de manera sencilla a las frecuencias con el orden radial y el grado de los modos (Vandakurov 1967, Tassoul 1980):

$$\nu_{nl} = \frac{\omega_{nl}}{2\pi} \simeq (n + \frac{l}{2} + \frac{1}{4} + \alpha)\Delta\nu \quad (2.29)$$

donde $\Delta\nu \left[2 \int_0^R \frac{dr}{c}\right]^{-1}$ y α es una constante de fase que depende de la frecuencia. De forma que esta ecuación predice un equiespaciamento uniforme $\Delta\nu$ en n de las frecuencias de grado bajo. También los modos de igual valor $n + l/2$ cumplen la relación

$$\nu_{nl} \simeq \nu_{n-l, l+2}. \quad (2.30)$$

2.2.2 Modos gravitatorios.

La gravedad, actuando sobre la perturbación de densidad, provee la fuerza de restauración para estas oscilaciones, por esta razón son llamados modos g . Se comportan como ondas gravitatorias en el interior estelar. Se caracterizan por su propagación transversal a la dirección de vibración, que típicamente se visualiza como una burbuja de gas oscilando en la dirección radial alrededor de la posición de equilibrio bajo la acción de la gravedad, que en su paso desplaza materia hacia los lados y, en menor medida, radialmente. Esta es la razón por la que no existen modos g de grado $l = 0$. Los puntos de reflexión se localizan en $N = \omega$. En las zonas de convección donde $N^2 < 0$ los modos g son evanescentes. En la figura 2.2 se muestra la zona de propagación de los g en un modelo solar.

Los períodos de los modos g de grado bajo están equiespaciados asintóticamente de acuerdo a la siguiente relación válida para n altos (Tassoul 1980),

$$\Pi \simeq \frac{\Pi_0}{L}(n + \alpha_g), \quad (2.31)$$

donde $\Pi_0 = \frac{2\pi^2}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{N^2 r}}$ y α_g es una constante de fase dependiente de l . En este caso los períodos están asintóticamente equiespaciados con el orden del modo.

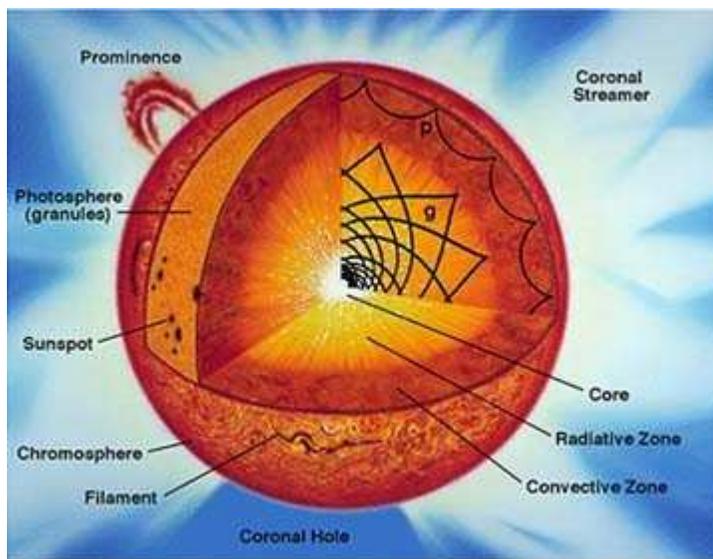


Figura 2.2: Visualización de los modos g y p . Los modos g quedan atrapados en la zona radiativa de la estrella mientras que los modos p son los únicos que llegan a la superficie (zona convectiva) produciendo pulsaciones observables (<http://tremordeterra.blogspot.mx/2009/09/sismologia-estelar.html>).

2.2.3 Modos mixtos.

Son una mezcla entre modos p y g , teniendo sus mayores amplitudes de oscilación tanto en el interior como en la superficie. Son producto del acoplamiento existente entre ambos tipos de oscilación, el cual se hace patente a lo largo de la evolución, cuando sus frecuencias tienden a acercarse. Como ya se explicó, durante la evolución de una estrella desde la SPEC, la composición química central varía al fundirse el hidrógeno y producirse helio, creándose un gradiente negativo del peso molecular medio μ en los bordes externos del núcleo convectivo que hace disminuir la presión central por lo que el núcleo convectivo se contrae. Esto permite que la estabilidad dinámica sea mayor, aumentando el valor de N en esta zona.

2.3 Excitación de los modos.

Para que las estrellas oscilen, se necesita de un mecanismo que excite sus modos. Existen dos tipos de mecanismos de excitación:

El primero es el *mecanismo κ* . En las capas de la estrella donde la opacidad κ aumenta, el flujo que proviene de las capas internas puede ser almacenado temporalmente. La energía acumulada durante la compresión se libera cuando la capa trata de alcanzar su estado de equilibrio expandiéndose. Por lo tanto, la estrella se puede expandir más allá de su radio de equilibrio. Cuando el material regresa a su posición original, la energía vuelve a ser almacenada en el interior estelar y el ciclo se repite. Este mecanismo también es conocido como la válvula de Eddington y explica la variabilidad de la mayoría de las clases conocidas de estrellas pulsantes.

El segundo mecanismo de pulsación es el que posee el Sol y las estrellas de tipo solar que son intrínsecamente estables. Estas oscilaciones son *excitadas estocásticamente* debido a la turbulencia en sus zonas de convección superficial. El movimiento convectivo vigoroso en las capas exteriores superficiales genera ruido acústico en un amplio rango de frecuencias, el cual excita los modos de oscilación de tipo solar. Debido al gran número de elementos convectivos sobre la superficie, la excitación tiene una naturaleza aleatoria, y las amplitudes de las oscilaciones varían mucho en el tiempo.

Como existe una diferencia en la naturaleza física de estos mecanismos de excitación, se puede suponer que existen diferentes dominios de inestabilidad en el diagrama HR. Estos mecanismos deben estar localizados en una parte específica de la estrella para dar lugar a oscilaciones observables. La consecuencia de este requisito es una restricción para la estructura interior de una variable pulsante: si la región de inestabilidad de alguna clase de variable se conoce de manera precisa, los modelos que incorporan este mecanismo de excitación deben ser capaces de reproducirlo. De esta manera, los detalles de la física que describe la estructura interior de las estrellas pueden ser modificados para reflejar las observaciones (Handler 2012).

3

Obtención, reducción y análisis de datos observacionales.

En la introducción se mencionó que el estudio de la estructura estelar a través de métodos sismológicos requiere de series de tiempo de alta resolución y sin interrupciones. Dicho lo anterior, el uso de datos tomados desde el espacio juega un papel fundamental en este estudio, ya que éstos no presentan interrupciones debidas al ciclo noche/día y por lo tanto no afectan la ventana de observación.

Esto es fundamental porque para estrellas más masivas que el Sol, sus períodos de oscilación duran típicamente de horas a días. En este caso, éstos son más difíciles de detectar en Tierra por la pausa que se tiene que hacer de una noche a otra en las observaciones. Otra ventaja aún más importante es que el ruido de centelleo inducido por la atmósfera de la Tierra ya no limita el umbral de detección al actual nivel de milimagnitudes.

En este capítulo se describen los conceptos básicos de fotometría y espectroscopía así como también la adquisición, reducción y análisis de los datos, es decir, la extracción y el análisis de la curva de luz de KIC 5701829 usando la paquetería Period04 ¹ y la determinación de su tipo tipo espectral con base en la comparación con estrellas estándar con la paquetería IRAF (Image Reduction and Analysis Facility) ².

3.1 Fotometría.

La fotometría es la medición precisa del brillo, color y espectro de las estrellas y de otros objetos celestes para obtener información sobre su estructura, temperatura y composición. El matemático y astrónomo griego Hiparco usó un sistema que dividía las estrellas en seis magnitudes, desde la más brillante (magnitud 1) hasta la más débil (magnitud 6). Con el tiempo se fueron descubriendo estrellas aún más brillantes que las de magnitud 1, así que a éstas se les asignaron magnitudes negativas, por ejemplo, una estrella de magnitud -2 es más brillante que una estrella de magnitud 1. El sistema principal de clasificación

¹<http://www.univie.ac.at/tops/Period04/>

²www.iraf.noao.edu/

(UBVRI por sus siglas en inglés) usa bandas en el ultravioleta, el azul, el visual, el rojo y en los rangos infrarrojos. De acuerdo con la base de datos Simbad, la estrella KIC 5701829 tiene una magnitud aparente (en el visible) de 9.30. Más información sobre conceptos y definiciones se pueden encontrar en Dictionary of Geophysics, Astrophysics and Astronomy (Basu 2001) y en Astronomy Methods: A Physical approach to Astronomical Observations (Bradt 2004).

3.1.1 Descripción de la misión Kepler.

El satélite *Kepler* está mapeando una región de la Vía Láctea donde hay una gran cantidad de estrellas de tipo solar y que se encuentra entre las constelaciones del Cisne y de la Lira. Su propósito es la búsqueda de planetas con un tamaño similar al de la Tierra dentro o cerca de la zona habitable. Los resultados de la misión permitirán colocar a nuestro sistema solar dentro del continuo de sistemas planetarios en la Galaxia.

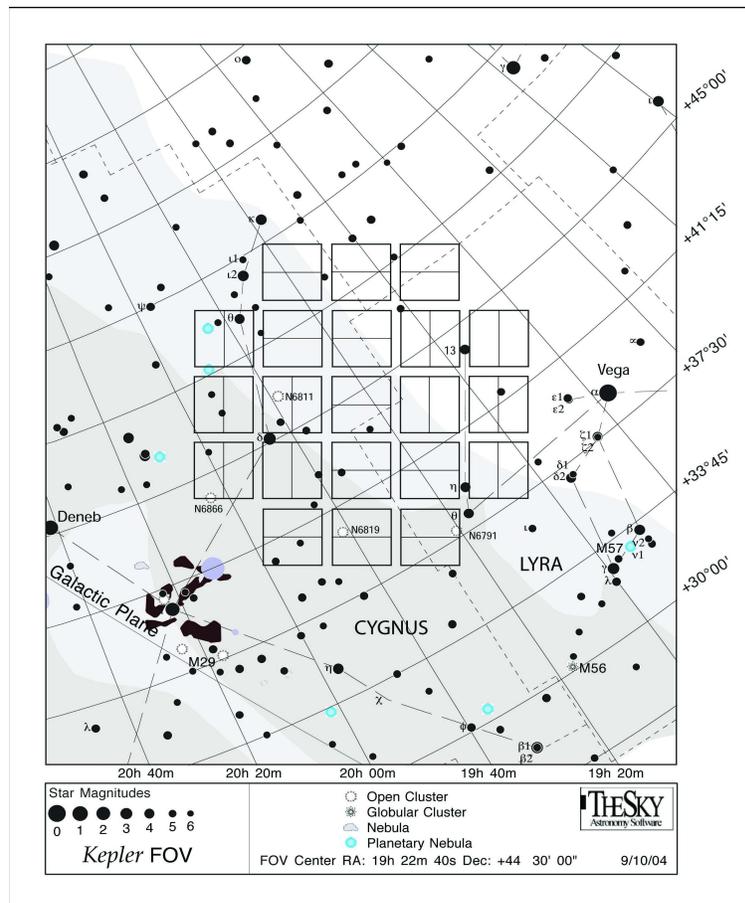


Figura 3.1: Campo de visión del satélite *Kepler* (<http://keplergo.arc.nasa.gov>).

3.1.2 Características del satélite Kepler.

El instrumento del satélite *Kepler* es un telescopio especialmente diseñado de 0.95m de diámetro (ver figura 3.2) llamado fotómetro que cuenta con un arreglo de 42 CCDs (Charge Coupled Device). Este aparato consiste en una placa de silicio dividida en miles (o millones) de pequeños cuadrados fotosensibles. Cada uno de estos cuadrados corresponderá a un pixel en la imagen final. Cada CCD mide 50 x 25 mm y tiene 2200 x 1024 pixeles. Su campo de visión es de $\sim 105^\circ$ cuadrados (ver figura 3.1).

Kepler tiene dos series de datos disponibles: *Cadencia corta* (~ 1 min) y *cadencia larga* (~ 30 min). El intervalo entre lecturas de un pixel dado en un CCD se le conoce como *frame* (o equivalentemente, un tiempo de integración). El *tiempo de integración* (o tiempo de exposición) es el tiempo de flujo acumulado de una fuente celeste en el pixel. Éste tiene una duración de 6.02s además de un tiempo de lectura (read out time) de 0.52s. El tiempo de exposición predeterminado para una cadencia corta es 6.02s x 9 o 54.2s. La tasa de cadencia o tiempo de integración es (6.02s + 0.52s) x 9 o 58.9s (~ 1 min). El tiempo predeterminado para cadencias largas es treinta veces 54.2s, o 1626s. La tasa de cadencia entre el inicio de integraciones consecutivas es treinta veces 58.9s, o 1766s (~ 30 min).

El instrumento tiene la sensibilidad para detectar un planeta con tamaño similar al de la Tierra en una estrella de tipo espectral G2V (tipo solar) y con una magnitud de $m_v = 12$ en 6.5hrs de integración. También posee un filtro espectral paso banda desde 400nm a 850nm.

El fotómetro debe estar en el espacio para evitar interrupciones causadas por los ciclos de noche-día, ciclos de estaciones y perturbaciones atmosféricas, tales como la extinción asociada a las observaciones terrestres.

Kepler observa el mismo campo estelar de manera continua y simultáneamente monitorea la luminosidad de más de 100,000 estrellas durante al menos 3.5 años, que es la duración inicial de la misión.

Dado que la capacidad de almacenamiento abordo es limitada, cada mes el satélite

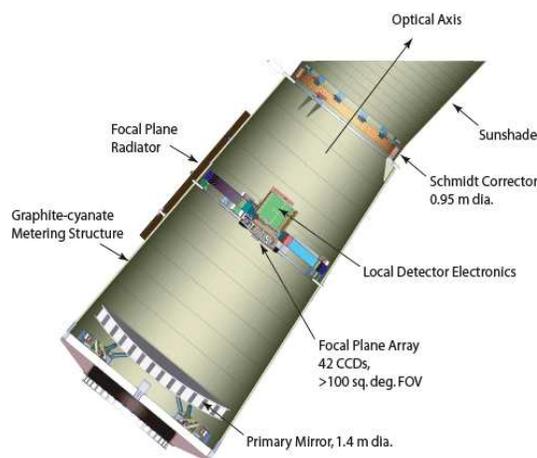


Figura 3.2: Sección transversal del satélite *Kepler* (<http://kepler.nasa.gov/Mission/QuickGuide/MissionDesign/>).

descarga los datos. Además, cada tres meses el satélite gira 90° sobre su eje apuntador para mantener los paneles solares y la sombrilla de cara hacia el Sol cuatro veces al año. Cada uno de estos intervalos se les llaman cuartos (o temporadas) denotados como Q0, Q1, Q2, Q3 que se repiten cada año *Kepler* (cada año que dure la misión). Los nuevos "cuartos" comienzan con el inicio de colección de información para cada nueva temporada y corren de manera continua (1, 2, 3, 4, 5, etc.). Además de las interrupciones en las series de datos causadas por la descarga, sucede que el satélite entra en modo seguro si un rayo cósmico lo golpea o si una secuencia de comando produce respuestas inesperadas, lo que ocasiona que haya huecos indeseables en los datos.

3.1.3 El método de tránsito para detectar planetas extrasolares y la astrosismología.

Cuando un planeta cruza frente a su estrella (desde la perspectiva del observador), se le llama tránsito. Los tránsitos producen un pequeño cambio en la luminosidad de la estrella que depende del tamaño del planeta y de su distancia a la misma. Por ejemplo, para planetas del tamaño de la Tierra y una estrella como el Sol, la luminosidad sólo cambiará en 84 partes por millón (ppm), es decir, 0.008%. Para un planeta del tamaño de Júpiter, ésta variación puede ser del 1 ó 2%. Además, todos los tránsitos producidos por el mismo planeta deben producir el mismo cambio en la luminosidad y deben durar la misma cantidad de tiempo (es decir, debe ser periódico), proveyendo así una señal bastante respetable y un método confiable de detección. En astrosismología, las pulsaciones de tipo solar también causan cambios en la luminosidad y son detectables desde el espacio. La fotometría de alta precisión obtenida por el satélite *Kepler* es capaz de detectar estos cambios y se utiliza para sondear el interior de las estrellas usando las técnicas de astrosismología (Aerts et al. 2010). Esta base de datos es única ya que puede ser usada para caracterizar propiedades comunes de las oscilaciones de un gran número de estrellas variables intrínsecas al analizar sus espectros de amplitudes (Chaplin et al. 2011; Uytterhoeven et al. 2011; Baran y Fox Machado (2011).

3.2 Espectroscopía.

La espectroscopía es el estudio de la interacción entre la materia y la energía. Ésta tiene un gran número de aplicaciones en la química, la física y la astronomía. También permite detectar la absorción o emisión de radiación electromagnética en ciertas longitudes de onda y relacionarlas con los niveles de energía implicados en las transiciones atómicas y moleculares.

El objetivo de la espectroscopía es el de caracterizar la luz que proviene de un objeto de acuerdo a la longitud de onda que la compone. El resultado es una curva de intensidad como función de longitud de onda llamada espectro o distribución espectral de energía. El espectro depende (entre otras cosas) de la composición química del objeto. La longitud de la luz absorbida o emitida por un cuerpo depende esencialmente de las interacciones entre los niveles de energía y el campo de radiación.

A través del estudio del espectro de una estrella se puede deducir su temperatura superficial, composición química y su velocidad radial. A partir de ahí, (en conjunto con otras técnicas) se puede determinar su radio, edad, masa, luminosidad, estado evolutivo y

su distancia.

3.2.1 Clasificación espectral de las estrellas.

La Clasificación Espectral de Harvard.

Esta clasificación está basada en líneas que son mayormente sensibles a la temperatura estelar, en vez de a la gravedad o la luminosidad. Las clases espectrales están divididas en subclases denotadas por números que van del 0-9. Con la temperatura en orden decreciente la secuencia es:

- Tipo O: Estrellas azules con temperatura superficial de 20,000K - 35,000K.
- Tipo B: Estrellas azules-blancas con temperatura superficial de alrededor de 15,000K.
- Tipo A: Estrellas blancas con una temperatura superficial de alrededor de 9,000K.
- Tipo F: Estrellas amarillas-blancas con una temperatura superficial de alrededor de 7000K.
- Tipo G: Estrellas amarillas como el Sol con una temperatura de alrededor de los 5500K.
- Tipo K: Estrellas naranjas-amarillas con una temperatura superficial de alrededor de los 4000K.
- Tipo M: Estrellas rojas con una temperatura superficial de alrededor de los 3000K.

Los colores estelares corresponden a la sensación visual real sólo en los extremos de la clasificación. Las clases espectrales tempranas (o calientes) están caracterizadas por líneas de átomos ionizados mientras que los tipos espectrales fríos (o tardíos) tienen líneas de átomos neutros. Las bandas de absorción de las moléculas también aparecen en los tipos espectrales tardíos. Estas diferencias se deben esencialmente a la diferencia de temperaturas. En la figura 3.3 se muestran las distintas clases espectrales con sus temperaturas y composición química.

La Clasificación espectral Yerkes.

Para una clasificación más precisa, uno también debe tomar en consideración la luminosidad de la estrella ya que dos estrellas con la misma temperatura efectiva pueden tener luminosidades bastante diferentes. Esta clasificación está basada en el escrutinio visual de espectros de rendija con una dispersión de 11.5nm/mm. Se distinguen de entre seis clases de luminosidad:

- Ia Supergigantes más luminosas.
- Ib Supergigantes menos luminosas.
- II Gigantes luminosas.

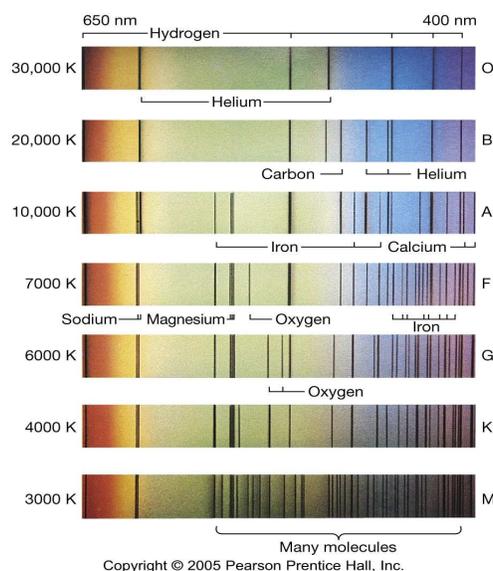


Figura 3.3: Clasificación de espectros estelares de acuerdo con sus temperaturas y composición química (<http://zebu.uoregon.edu/~imamura/122/lecture-4/mk.html>).

- III Gigantes normales.
- IV Subgigantes.
- V Estrellas de SP (enanas).

La clase de luminosidad está determinada a partir de las líneas espectrales que dependen fuertemente de la gravedad superficial estelar, la cual está íntimamente relacionada con la luminosidad. Las masas de las gigantes y las enanas son aproximadamente similares, pero los radios de las gigantes son mucho más grandes que los de las enanas. Esto da lugar a los efectos de luminosidad en el espectro estelar, el cual puede ser usado para distinguir entre estrellas de diferentes luminosidades. Más sobre astronomía general en *Fundamental Astronomy* (Karttunen, H., 1996).

3.2.2 Espectrógrafo Boller & Chivens.

La observación de los espectros de objetos celestes se hace a través de un espectrógrafo. Éste posee un elemento dispersor que separa la luz que llega de los objetos celestes en sus longitudes de onda.

El espectrógrafo Boller & Chivens es un espectrógrafo clásico de resolución espectral baja e intermedia ($R < 10,000$). La escala de placa espacial sobre el espectro es aproximadamente $40''/\text{mm}$. También posee una lámpara de CuHeNeAr.

Este espectrógrafo se usa exclusivamente en el telescopio de 2.1 m de diámetro del Observatorio Astronómico Nacional - San Pedro Mártir ³. Un esquema del espectrógrafo se muestra en la figura 3.4.

³<http://haro.astrossp.unam.mx/indexspm.html>

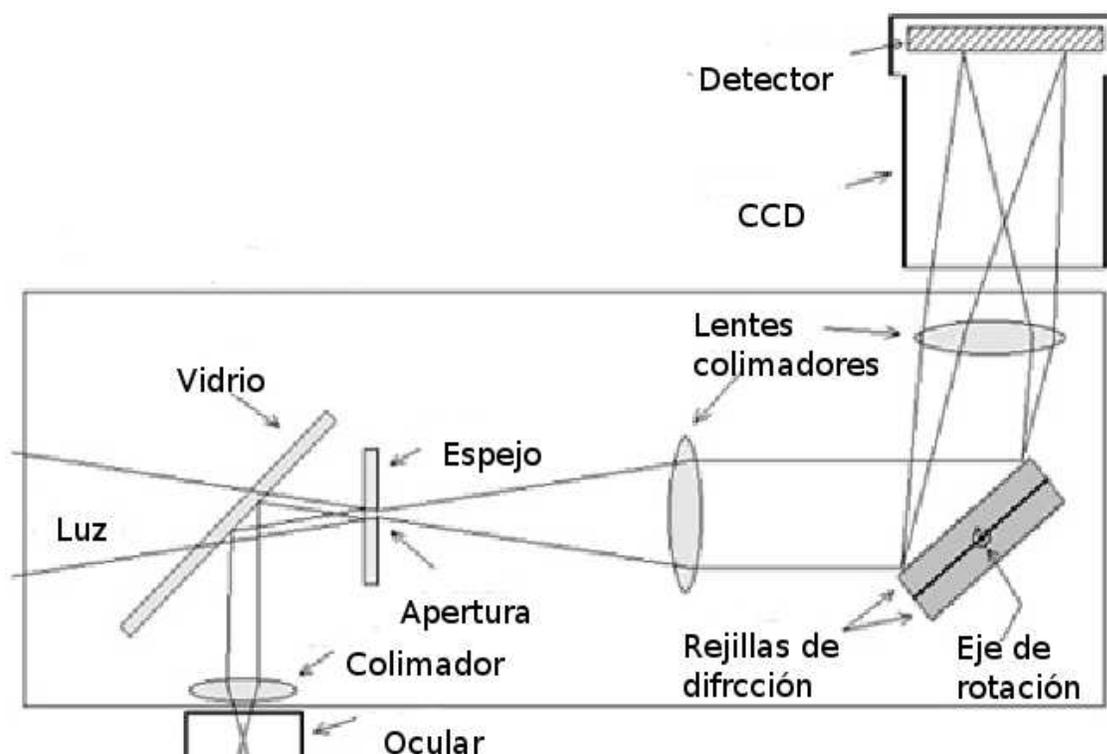


Figura 3.4: Esquema del espectrógrafo Boller & Chivens (<http://observatorio.uniandes.edu.co>).

3.3 Resultados.

Aquí se combinan resultados de astrosismología, fotometría y espectroscopía para determinar parámetros fundamentales precisos de la estrella KIC 5701849.

3.3.1 Curva de luz de KIC 5701829.

La curva de luz de KIC 5701829 (figura 3.5) obtenida por el satélite tiene una duración total de 30.78 días (738.9hrs), de los cuales 29 fueron de observación efectiva durante el Q2 de su ciclo en cadencia corta (tiempo de integración de 58.9s), obteniéndose 41,824 puntos. En la curva de luz, los ejes son flujo relativo vs. BJD (Barycentric Julian Day por sus siglas en inglés). Las fechas en las que se obtuvo la curva de luz son: 55002.61 BJD - 55033.30 BJD correspondientes a las fechas del 20 de Junio de 2009 al 20 de Julio de 2009.

La frecuencia de Nyquist correspondiente a esta serie de datos fue de:

$$f_N = \frac{1}{2t} = 733.70c/d \quad (3.1)$$

donde t es la separación (el tiempo de integración) que hay entre cada punto de la curva de luz.

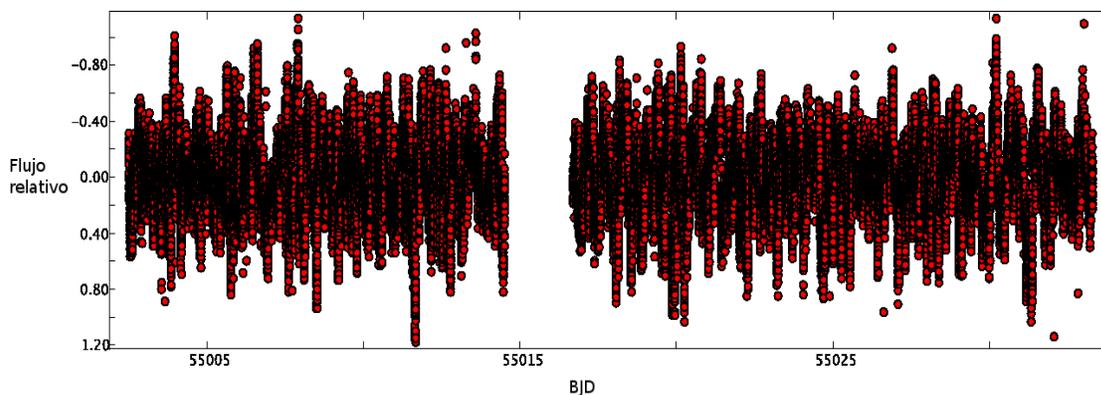


Figura 3.5: Curva de luz de la estrella KIC 5701829 obtenida por el satélite it Kepler.

3.3.2 Diagrama Échelle.

Una de las técnicas más usadas para el análisis sísmico de estrellas de tipo solar es la representación de las frecuencias de oscilación en el llamado diagrama Échelle. El espectro se divide en segmentos de longitud $\Delta\nu$ y se apilan uno sobre otro de tal manera que los modos con un grado dado se alinean verticalmente en "rugosidades" (ridges). Cualquier separación de la regularidad, tales como variaciones en la separación grande de frecuencia, son claramente visibles como una curvatura del diagrama, y las variaciones en la separación pequeña aparecen como convergencia o divergencia de los "ridges" correspondientes. En la

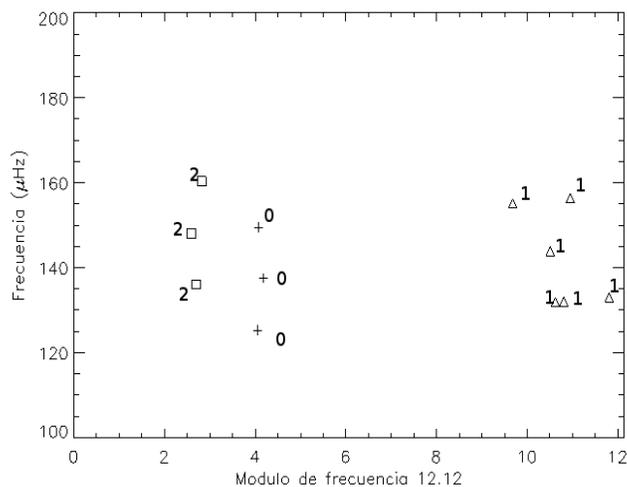


Figura 3.6: Diagrama Échelle donde se muestran los valores $l = 0, 1$ y 2 para las frecuencias observadas.

práctica, se observa que las separaciones grande y pequeña varían con la frecuencia (Suárez et al. 2010 y Bedding y Kjeldsen 2010).

En la figura 3.6 se muestran los valores de l de las frecuencias obtenidas a partir de la curva de luz de KIC 5701829. Los valores $l = 2$ corresponden a modos p puros y los $l = 0$ a modos acústicos puros. En comparación, las frecuencias con el valor $l = 1$ aparecen amontonadas en el lado derecho del diagrama. Esto quiere decir que se tratan de modos mixtos, es decir, una mezcla entre modos g y p .

3.3.3 Determinación de los modos de oscilación: Period04.

Para la determinación del espectro de amplitudes de KIC 5701829 a partir de la curva de luz diferencial se usó el programa Period04. Este programa está basado en el teorema de Fourier y está especialmente dedicado al análisis de grandes series de tiempo astronómicas que contienen huecos. El programa ofrece las herramientas para extraer frecuencias individuales del contenido multiperiodico de las series de tiempo y provee una interfaz sensible para realizar ajustes multifrecuencia simultáneos.

Para generar la lista de aquellos picos que se considerarán genuinos de la estrella con un 99% de confianza, se usa el preblanqueado (prewhitening). Este método consiste en remover períodos de manera secuencial de los datos hasta que se alcanza el nivel de ruido en la señal, restando de la función original $f_0(t_i)$ una senoide de amplitud A_1 , frecuencia Ω_1 y fase φ_1 , correspondientes al pico a blanquear.

$$f(t) = f_0(t_i) - \sum A_i \sin(2\pi(\Omega_i t + \varphi_i)) \quad (3.2)$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

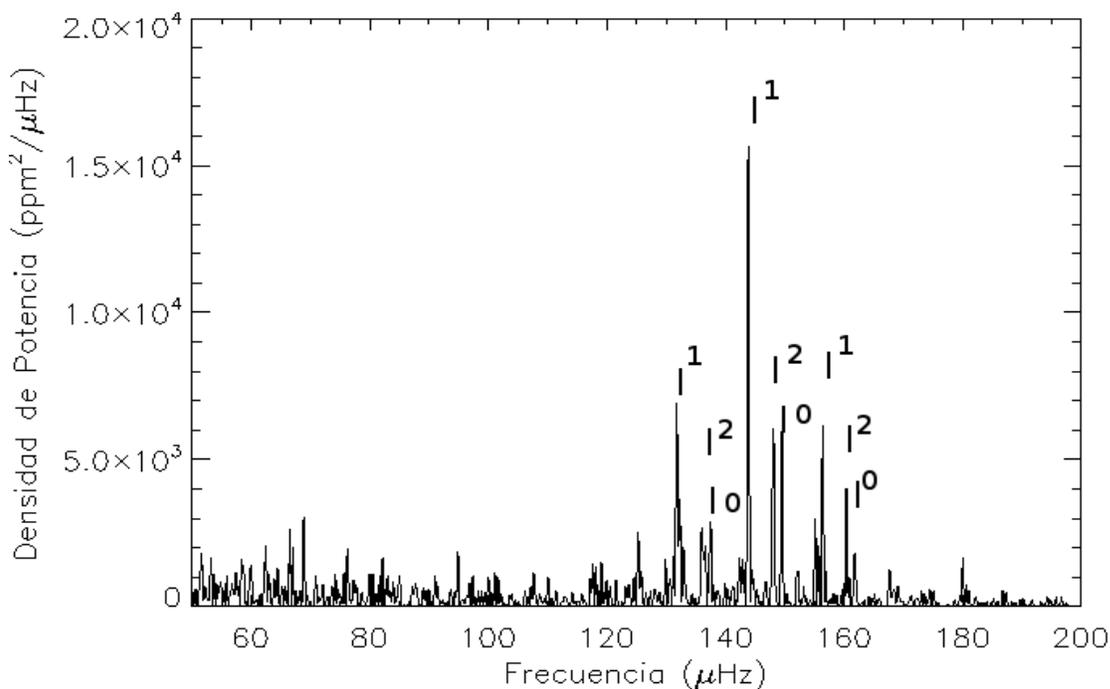
1. Se calcula la transformada de Fourier de la serie temporal original y se identifica el pico de mayor amplitud.
2. Se hace un ajuste por mínimos cuadrados a la serie temporal con esta frecuencia y se mejora simultáneamente la frecuencia, amplitud y fase calculándose la relación señal a ruido de la frecuencia blanqueada.
3. Se calcula la transformada de Fourier de los residuos y se identifica el nuevo pico de mayor amplitud.
4. Se hace un ajuste por mínimos cuadrados usando simultáneamente las frecuencias derivadas.

Este procedimiento se repite hasta que se extraen todas las frecuencias significativas. Sólo se tomaron en cuenta 12 frecuencias cuya señal a ruido fue mayor a 2.9 para una mayor precisión.

Los valores de la tabla 3.1 son las frecuencias observacionales de KIC 5701829 y en la figura 3.7 se muestra su espectro de potencias con sus l respectivamente identificados. Nótese que la mayor S/N es la que corresponde a 12.42c/d (143.69 μ Hz) que resulta ser la máxima frecuencia de pulsación de la estrella.

Tabla 3.1: Frecuencias obtenidas a partir de la curva de luz de KIC 5701829 con sus l correspondientes.

Frecuencia [c/d] \pm 0.03	Frecuencia [μ Hz] \pm 0.3	Amplitud [ppt] \pm 0.001	Fase [2π rad]	S/N	l
11.87	137.33	0.037	0.69	3.6609	0
12.91	149.36	0.046	0.22	4.7456	0
10.82	125.18	0.033	0.24	3.3460	0
12.42	143.69	0.082	0.59	8.4368	1
11.38	131.66	0.079	0.37	7.4063	1
13.51	156.31	0.047	0.29	5.0891	1
13.40	155.03	0.033	0.46	3.5102	1
11.40	131.89	0.053	0.02	5.0319	1
11.49	132.93	0.032	0.05	3.0617	1
12.78	147.86	0.048	0.21	4.8316	2
13.85	160.24	0.040	0.63	4.5144	2
11.75	135.94	0.029	0.42	2.9025	2

Figura 3.7: Espectro de potencias obtenido a partir de la curva de luz de la estrella KIC 5701829 mostrando algunos de los valores de l identificados.

3.3.4 Determinación del tipo espectral de KIC 5701829.

Los espectros de la estrella KIC 5701829 fueron adquiridos en el Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir, B.C., México. Se utilizó el espectrógrafo italiano Boller & Chivens unido al foco Cassegrain f/7.5 del telescopio de 2.12m. Se usó una rejilla de difracción de 400 l/mm y un ángulo de blaze de 6° en el primer orden para las observaciones, con un ángulo de inclinación de 8° para cubrir un rango de longitud de onda desde 4400 a 7900 Å. Se empleó una dispersión de 1.8Å por pixel con una resolución espectral de 8Å (R ~ 750 en la longitud de onda central).

Se utilizó el software IRAF para reducir el espectro obtenido (ver Apéndice A). Se calibraron los pixeles en términos de la longitud de onda para hacer la comparación con los espectros de las estrellas estándar.

El tipo espectral se definió al hacer una comparación directa con plantillas de espectros grabados durante la misma noche de observación, usando el mismo equipo y con espectros de resolución similar de la librería espectral Miles (Sánchez-Blázquez et al. 2006). Ésta incluye 985 estrellas con un gran rango de parámetros atmosféricos y cubre un rango espectral de 3525 a 7500Å con una resolución espectral de 2.5Å.

La figura 3.8 muestra el espectro de la KIC 5701829 y los espectros de las estrellas HD 940264, HD 95345 y HD 86362 que se tomaron en cuenta para hacer una cuidadosa comparación espectral y así poder estimar la temperatura superficial de KIC 5701829.

Al hacer la comparación visual entre los espectros, se determinó que el espectro de KIC 5701829 es muy similar al de la estrella estándar HD 94264. Ramirez y Melendez (2005) calcularon la temperatura superficial de HD 94264 a partir de espectros de alta resolución y encontraron que $T_{eff} = 4670K \pm 51K$, por lo que se le asignó esta temperatura a KIC 5701829.

3.4 Análisis de datos observacionales.

El espectro de potencias presentado en la figura 3.6 permite dar una estimación de las separaciones grande y pequeña de KIC 5701829. Para pasar de ciclos/día a μHz , basta con multiplicar por 11.57.

Se encontró que el valor de la separación larga es de $\Delta\nu = 12.12 \pm 0.3 \mu\text{Hz}$ y el de la separación corta de $\delta\nu = 1.35 \pm 0.3 \mu\text{Hz}$. La frecuencia de la máxima potencia de oscilación se encontró en el rango de 100 a 200 μHz centrada en $\nu_{max} = 143.69 \pm 0.3 \mu\text{Hz}$. El valor de la frecuencia de Nyquist que corresponde a esta serie de datos es de 733.70c/d (8488.90 μHz). A partir de ν_{max} se puede obtener el período de oscilación de KIC 5701829 el cual es aproximadamente 1.93hrs.

La estrella HD 94264 tiene un tipo espectral K0III, por lo que como resultado de esta comparación, KIC 5701829 también tiene un tipo espectral K0III. En general, las estrellas de tipo espectral K son objetos con temperaturas entre 3500 - 4500K que se caracterizan por la presencia de metales neutros en sus fotosferas. En este tipo espectral se comienzan a formar bandas moleculares como las de CH y CN. Dado que las estrellas gigantes de

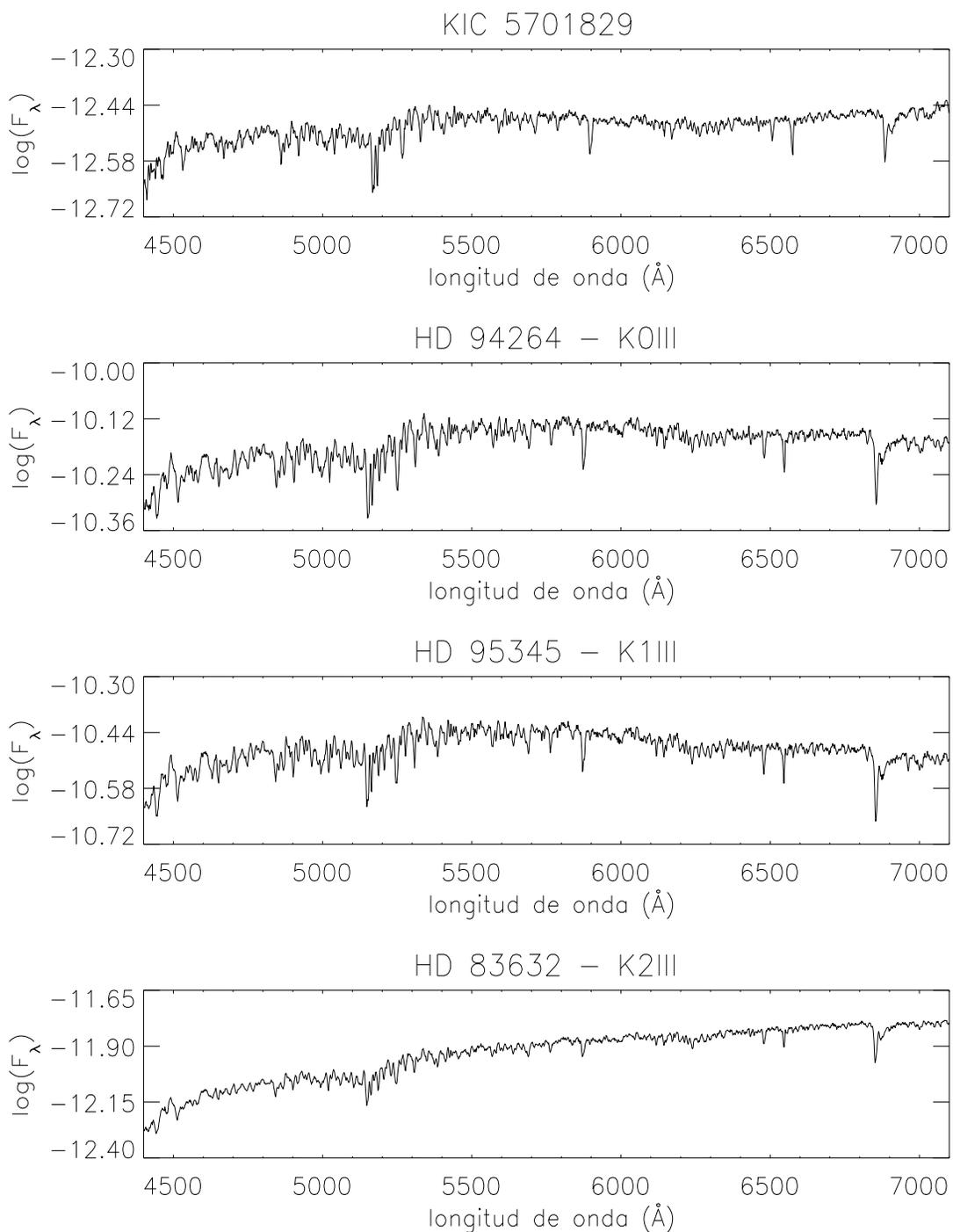


Figura 3.8: Comparación de espectros de estrellas estándar con el espectro de KIC 5701829.

tipo espectral K que tienen una envoltura convectiva externa, las oscilaciones intrínsecas detectadas son oscilaciones de tipo solar.

Además como tiene una clase de luminosidad III, ésta la ubica fuera de la SP sobre la rama de las gigantes, es decir, KIC 5701829 es una gigante roja.

Usando las relaciones de escala descritas en el capítulo 2 (Kjeldsen y Bedding, 1995) se encontró que, en una primera aproximación, la estrella posee una masa $M \approx 1.16M_{\odot} \pm 0.03$ y un radio $R \approx 5.25R_{\odot} \pm 0.05$.

Con los valores obtenidos es posible calcular el logaritmo de la luminosidad normalizada con respecto al valor solar:

$$\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = \log\left(\frac{4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{eff\odot}^4}\right) = 1.07 \pm 0.1 \quad (3.3)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann. También se calculó el logaritmo de la temperatura efectiva:

$$\log(T_{eff}) = 3.67 \pm 0.01 \quad (3.4)$$

Estos valores se usarán más adelante para compararlos con los valores teóricos obtenidos por un modelo de evolución estelar.

3.5 Cálculo de incertidumbres.

Dado que se está trabajando con fotometría, la ventana espectral es útil para estimar el error de las frecuencias extraídas. Éste es aproximadamente igual al FWHM (Full Width at Half Maximum) de la máxima frecuencia de pulsación del espectro obtenido de la estrella. La razón de esto es que se está ajustando una distribución gaussiana (ideal) a la máxima frecuencia de pulsación, por lo tanto, la diferencia entre ellas da una medida de la incertidumbre en la medición. No se consideraron las incertidumbres dadas por el programa Period04 ya que éstas están subestimadas pues sólo calculan la consistencia interna de la solución (ver Breger et al. 1999). En este caso se encontró una $\Delta f \sim 0.03c/d$ ($0.3\mu\text{Hz}$) para todas las frecuencias.

4

Análisis teórico.

Cuando se observa un nuevo fenómeno en la naturaleza siempre se hace necesario hallar un modelo que lo describa adecuadamente. Este modelo debe dar información acerca de los estados previos en los que se encontraba el fenómeno y hacia qué estados evolucionará. Esto es posible gracias al lenguaje de las matemáticas las cuales proveen una manera de describir los fenómenos sin ambigüedades a través de ecuaciones. Una herramienta fundamental para resolverlas es la de los métodos numéricos. Sin embargo, la cantidad de cálculos es tan grande que se tienen que implementar códigos numéricos en computadoras para llevarlos a cabo.

En este capítulo se utilizan un par de códigos numéricos (ver Apéndice B) que resuelven las ecuaciones que describen la estructura y evolución de una estrella (CESAM2K) y que generan las frecuencias de oscilación teóricas correspondientes a este modelo (FILOU). Los resultados obtenidos teóricamente se compararán con los resultados observacionales del capítulo 3.

4.1 Determinación del estado evolutivo de KIC 5701829: Secuencias evolutivas teóricas.

Para calcular una secuencia evolutiva de una estrella con CESAM2k, primero se calcula un modelo homogéneo de SPEC con la masa correspondiente M . Este modelo se evoluciona hasta una edad de 9Gys que para la masa en cuestión sobrepasa la fase de gigante roja .

Después, se dibuja un diagrama HR (ver figura 4.1) con la secuencia evolutiva y la posición observacional de la estrella, y se escoge el modelo que más se ajusta a su estado evolutivo usando el criterio de comparación de χ^2 (ver subsección siguiente). Estas secuencias comienzan en la SP y de ahí suben a través de lo que se conoce como la *rama asintótica de las gigantes rojas*.

Considerando la masa de este modelo, la edad estimada del diagrama HR (con base en tablas generadas por CESAM2k de $\log(T_{eff})$) y la física implementada en el cálculo anterior, nuevamente se calcula un modelo que describirá aproximadamente el estado evolutivo de KIC 5701829.

Este último modelo es el que se usa en el código de oscilaciones FILOU. Con él, se

calculan las frecuencias de oscilación teóricas que se compararán en la siguiente sección con las frecuencias observacionales. En cada modelo se analizaron 600 frecuencias. Las metalicidades usadas fueron: $X=0.70$ $Y=0.28$, $Z=0.02$. En total se calcularon 20 secuencias evolutivas, desde $1.00M_{\odot}$ hasta $1.40M_{\odot}$ en pasos de $0.02M_{\odot}$.

El asterisco muestra la posición esperada de KIC 5701829 con base en los parámetros T_{eff} y $\log(L/L_{\odot})$ obtenidos observacionalmente. Las coordenadas en el diagrama corresponden a: $(3.67 \pm 0.01, 1.07 \pm 0.1)$. Se puede apreciar también que este punto cae dentro de una caja de 0.01×0.1 que es el error tomado en cuenta, por lo que la aproximación es confiable.

En el Apéndice B se describe brevemente la física implementada en el código CESAM2k que sirve para generar modelos de evolución estelar.

Uno de los parámetros que se tomó en cuenta en el código FILOU fue el de un modelo con rotación nula. El motivo es que los espectros que se obtuvieron de KIC 5701829 son de baja resolución. Esto no permite obtener información de la velocidad proyectada de rotación $v \sin i$ de la estrella y por lo tanto, de su ritmo de rotación.

Al agotársele el suministro de hidrógeno a una estrella de SP (inicio de la secuencia evolutiva en Fig. 4.1), su núcleo se contrae y su temperatura aumenta, esto causa que las

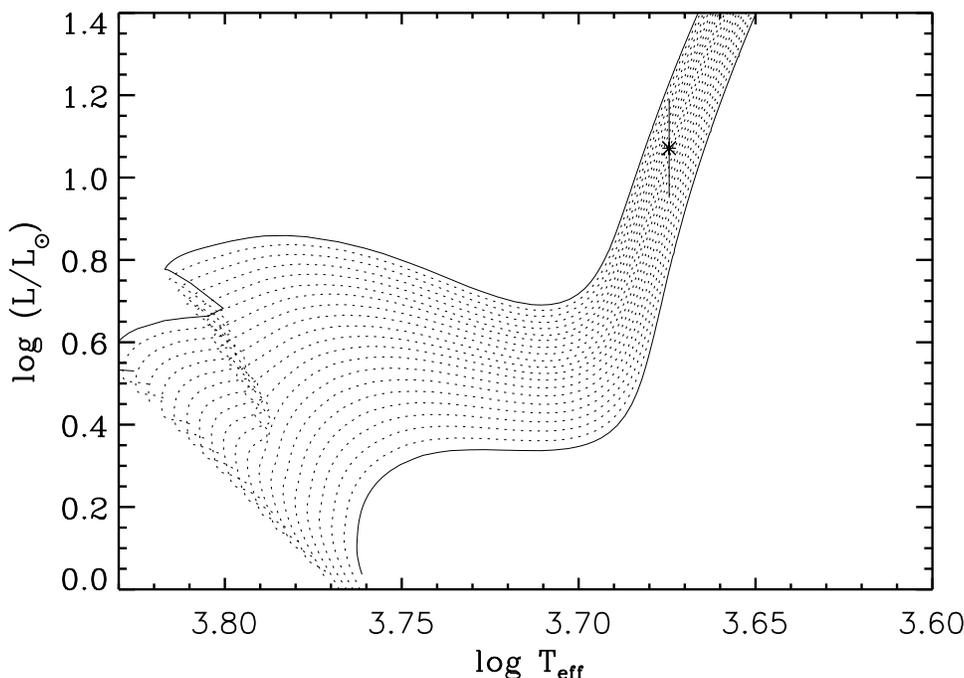


Figura 4.1: Secuencias evolutivas teóricas de KIC 5701829 para masas desde $1.00M_{\odot}$ (línea continua extrema derecha) hasta $1.40M_{\odot}$ (línea continua extrema izquierda) en pasos de $0.02M_{\odot}$.

capas exteriores de la estrella se expandan y se enfríen. La luminosidad de la estrella aumenta considerablemente y ésta se convierte en una gigante roja. El comienzo del consumo de helio (cuando se ha alcanzado $T \approx 10^8 K$ en el núcleo estelar) detiene el enfriamiento de la estrella y el incremento en su luminosidad y la estrella ahora se mueve hacia a la izquierda en el diagrama HR (*flash del helio*). Después de que termina el consumo de helio en el núcleo, la estrella se enfría nuevamente y se mueve hacia la derecha y hacia arriba ascendiendo asintóticamente en el diagrama HR. Esto se debe a que la estrella se vuelve inestable y evoluciona de esta forma hasta alcanzar el equilibrio hidrostático.

4.2 Criterio estadístico de comparación.

Una vez que se que se tienen todas las frecuencias teóricas ν_{teo} de cada modelo estelar, éstas se comparan con las frecuencias observacionales ν_{obs} :

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\nu_{obs} - \nu_{teo})^2 \quad (4.1)$$

donde N es el número total de frecuencias usadas.

El análisis estadístico χ^2 se usa comúnmente para comparar la información observada con la información que se espera obtener de acuerdo con un análisis específico. Lo que se pretende es averiguar la calidad del ajuste; si las desviaciones fueron producto del azar o debidas a otros factores. Entre menor sea el valor de la diferencia entre los valores teóricos con respecto a los valores observados, mejor será el ajuste y en consecuencia se podrá

Tabla 4.1: Comparación de las frecuencias observacionales *F.O.* con los modelos teóricos obtenidas a partir de los códigos numéricos. Las frecuencias están dadas en μHz .

F.O.	$1.00M_{\odot}$	$1.02M_{\odot}$	$1.04M_{\odot}$	$1.06M_{\odot}$	$1.08M_{\odot}$	$1.10M_{\odot}$	$1.12M_{\odot}$	<i>l</i>
137.33	137.13	133.64	140.35	134.51	143.10	135.51	134.00	0
149.36	153.36	152.01	157.10	150.58	158.06	149.71	148.03	0
125.18	120.46	115.29	123.35	118.21	127.86	121.11	119.74	0
143.69	143.99	143.82	143.60	144.11	143.38	143.86	144.19	1
131.66	129.41	132.23	130.20	133.11	130.54	130.86	129.16	1
156.31	156.83	158.07	158.93	157.96	158.16	157.05	156.25	1
155.03	153.74	154.94	155.76	155.24	155.11	154.66	155.00	1
131.89	131.73	129.80	131.83	130.72	132.90	130.86	131.41	1
132.93	134.17	134.75	133.35	135.57	135.08	133.15	133.78	1
147.86	146.98	148.85	147.51	148.59	146.94	147.51	148.49	2
160.25	159.67	159.26	160.43	158.94	159.42	159.98	160.79	2
135.94	135.49	134.82	135.75	135.01	135.55	136.20	134.93	2

Tabla 4.2: Comparación de las frecuencias observacionales $F.O.$ con los modelos teóricos obtenidas a partir de los códigos numéricos. Las frecuencias están dadas en μHz .

F.O.	$1.14M_{\odot}$	$1.16M_{\odot}$	$1.18M_{\odot}$	$1.20M_{\odot}$	$1.22M_{\odot}$	$1.24M_{\odot}$	$1.26M_{\odot}$	l
137.33	142.85	137.68	142.07	131.53	140.23	135.66	142.32	0
149.36	156.88	151.23	156.88	144.49	153.95	147.01	154.17	0
125.18	129.30	124.62	126.82	119.04	126.97	124.45	130.55	0
143.69	143.31	142.57	142.37	143.88	143.76	143.02	144.73	1
131.66	128.51	131.55	129.72	131.59	131.24	131.18	130.43	1
156.31	157.67	156.62	156.90	157.91	158.06	156.46	158.42	1
155.03	154.71	153.81	153.87	155.03	155.12	153.93	155.63	1
131.89	130.78	130.17	132.05	129.36	129.00	130.19	134.86	1
132.93	133.09	132.97	133.86	133.87	133.28	133.25	132.64	1
147.98	148.39	148.45	148.48	148.21	147.56	148.34	148.31	2
160.25	160.77	160.76	160.71	160.30	160.65	160.35	160.19	2
135.94	134.93	136.23	136.91	134.99	136.25	135.21	135.31	2

tomar una decisión en cuanto a cuál es el modelo que más se acerca a las observaciones (Fox Machado et al. 2006).

En las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 se muestran las frecuencias teóricas obtenidas a partir del código FILOU. Éstas se comparan con las frecuencias observacionales asignándoles los valores l más cercanos correspondientes a cada una de ellas.

Tabla 4.3: Comparación de las frecuencias observacionales $F.O.$ con los modelos teóricos obtenidas a partir de los códigos numéricos. Las frecuencias están dadas en μHz .

F.O.	$1.28M_{\odot}$	$1.30M_{\odot}$	$1.32M_{\odot}$	$1.34M_{\odot}$	$1.36M_{\odot}$	$1.38M_{\odot}$	$1.40M_{\odot}$	l
137.33	137.32	140.84	133.86	141.60	138.44	135.72	133.60	0
149.36	148.12	153.55	145.01	152.70	149.29	146.37	144.08	0
125.18	126.70	128.26	122.77	119.88	127.78	125.28	123.31	0
143.69	143.08	144.64	143.79	144.46	143.56	143.21	144.23	1
131.66	130.60	130.14	129.93	128.28	128.07	131.76	128.89	1
156.31	158.32	158.55	157.14	157.72	157.40	156.14	157.29	1
155.03	155.59	155.76	154.40	155.15	155.08	153.55	154.62	1
131.89	132.03	132.35	132.01	130.39	132.21	133.82	130.55	1
132.93	133.15	134.32	134.21	132.57	133.21	136.01	132.64	1
147.98	147.43	146.87	148.40	148.59	148.14	146.79	147.91	2
160.25	159.02	161.40	160.15	160.49	161.22	160.63	159.45	2
135.94	136.09	135.84	135.51	135.56	136.55	136.23	135.24	2

Tabla 4.4: Parámetros de los modelos teóricos calculados para KIC 5701829.

M/M_{\odot}	Edad (Gyrs)	$\log(T_{eff})$	$\log(L/L_{\odot})$	$\log(R/R_{\odot})$	χ^2
1.00	13.2	3.67	0.84	0.60	4.02
1.02	12.2	3.67	0.81	0.58	11.07
1.04	11.3	3.67	0.85	0.60	6.86
1.06	10.5	3.67	0.88	0.61	6.20
1.08	9.86	3.67	0.91	0.63	10.70
1.10	9.20	3.67	0.93	0.64	1.89
1.12	8.60	3.67	0.96	0.65	4.29
1.14	8.04	3.67	0.98	0.67	9.92
1.16	7.53	3.67	1.01	0.68	0.88
1.18	6.95	3.67	1.03	0.69	7.67
1.20	6.46	3.67	1.05	0.70	8.82
1.22	6.07	3.67	1.07	0.71	3.74
1.24	5.70	3.67	1.09	0.72	1.21
1.26	5.35	3.67	1.11	0.73	7.82
1.28	5.07	3.67	1.13	0.74	0.95
1.30	4.72	3.67	1.15	0.75	4.39
1.32	4.47	3.67	1.17	0.76	3.58
1.34	4.20	3.67	1.18	0.76	6.22
1.36	3.98	3.67	1.20	0.77	1.98
1.38	3.78	3.67	1.22	0.78	2.38
1.40	3.56	3.67	1.23	0.79	4.78

A partir de este análisis se determinó que el modelo teórico que más se acerca a los valores observacionales es el que tiene el valor de $\chi^2 = 0.88$. Éste corresponde al modelo de $1.16M_{\odot}$ (Tabla 4.4). Lo anterior le da a KIC 5701829 una edad aproximada de 7.53Gyrs y un radio $R \approx 4.78R_{\odot}$. Estos valores corresponden a una estrella masiva y evolucionada como se encontró en el capítulo 3 a partir de su masa, radio y tipo espectral. Se observa que a pesar de que las relaciones de escala son tan sólo una primera aproximación, el modelo calculado teóricamente coincide perfectamente con el observacional en cuanto a la masa se refiere. La diferencia entre el radio observacional y el teórico se puede explicar considerando que el valor de $\Delta\nu$ es sensible a la rotación de la estrella y estos cálculos no la toman en cuenta ni su intensidad de campo magnético además de que se considera a la estrella adiabáticamente aislada. Otra posible razón es que aunque la estrella fue observada en cadencia corta, sólo fue por 29 días, mientras que hay casos en los que las curvas de luz de las estrellas del campo de *Kepler* duran meses y por lo tanto, ésto dificulta la detección precisa de los modos de oscilación.

En la figura 4.2 se muestra el diagrama Échelle de los valores observacionales $l = 2$ (cuadrados), $l = 0$ (cruces) y $l = 1$ (triángulos) junto con los valores teóricos (puntos)

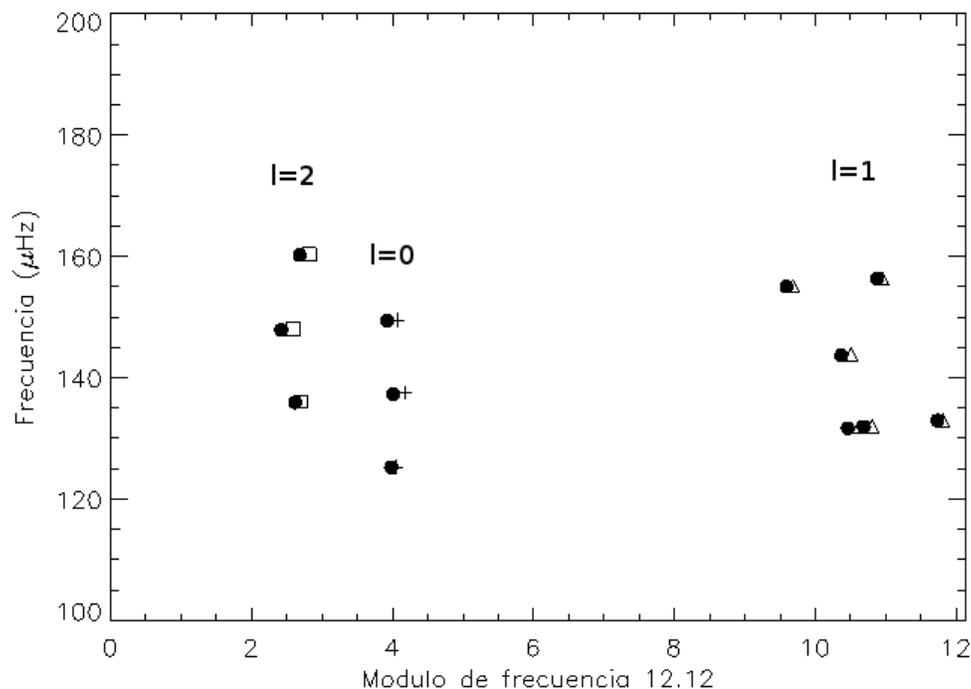


Figura 4.2: Diagrama Échelle mostrando los valores observacionales (símbolos) en comparación con las frecuencias teóricas (puntos) correspondientes a $\chi^2=0.88$.

Tabla 4.5: Comparación final de parámetros observacionales y teóricos de KIC 5701829.

	M/M_{\odot}	$\log(T_{eff})$	$\log(L/L_{\odot})$	$\log(R/R_{\odot})$
Observacional	1.16 ± 0.03	3.67 ± 0.01	1.07 ± 0.1	0.72 ± 0.05
Teórico	1.16	3.67	1.01	0.68

correspondientes al ajuste de $\chi^2=0.88$. Además del ajuste, gráficamente también se puede apreciar la cercanía de los valores teóricos con los observacionales. En la tabla 4.5 se presentan los parámetros finales de KIC 5701829.

5

CONCLUSIONES

La astrosismología ha resultado ser una herramienta muy útil para sondear el interior de las estrellas, al cual no se tiene acceso directamente. Sin embargo, aún quedan muchas interrogantes en cuanto a la descripción precisa de las pulsaciones en las estrellas; qué las inicia, si existen más mecanismos de pulsación o si todos caen dentro de los que ya están propuestos, si cuando las pulsaciones se generan, se mantienen hasta llegar a la superficie, etc.

En este trabajo se ha hecho un estudio más detallado de la estrella KIC 5701829 al identificar sus propiedades estructurales y su estado evolutivo. Ésto se logró usando resultados del análisis de su espectro de oscilación y de sus parámetros superficiales provistos por observaciones espectroscópicas en tierra. La ventaja de esta estrella es que es de las pocas que ha sido observada de manera efectiva durante 29 días en cadencia corta lo que hace más fina su curva de luz y ayuda así a un análisis más preciso.

Estas observaciones han dado como resultado una clara detección de 12 modos identificados con los grados armónicos $l = 0, 1, 2$ entre 50 y 170 μHz con una separación grande de: $\Delta\nu = 12.12 \pm 0.3 \mu\text{Hz}$ y una separación pequeña de $\delta\nu = 1.35 \pm 0.3 \mu\text{Hz}$ además de una frecuencia máxima de pulsación $\nu_{max}=143.66\mu\text{Hz}$. El espectro de oscilación de esta estrella está caracterizado por oscilaciones de tipo solar bien definidas.

El modelado detallado de esta estrella permitió determinar los parámetros principales con un alto nivel de precisión. Al final, se concluyó que esta estrella tiene una masa M de $1.16M_{\odot}$ (teórica y observacional), una edad de 7.53Gyrs (teórica), un radio R de $5.25R_{\odot}$ observacional ($4.78R_{\odot}$ teórico) y una luminosidad observacional $\log(L/L_{\odot}) = 1.07$ (1.01 teórica). Como resultado de su edad y radio, también se concluye que se trata de una gigante roja.

También se comprobó la eficacia de los códigos numéricos empleados en el cálculo de la masa y el radio de la estrella ya que los valores teóricos y los observados son idénticos para la masa y en el caso del radio difieren en tan sólo 8.5%, tomando en cuenta los parámetros iniciales de CESAM2K.

Como se pudo ver en el análisis de los capítulos 3 y 4, los parámetros previos de KIC 5701829 fueron estimados muy superficialmente ya que se encontraron discrepancias entre

los valores reportados de su período (0.5hrs, Baran y Fox Machado (2011)) y su radio ($0.694R_{\odot}$ del Kepler Input Catalog) en comparación con los calculados en este trabajo (1.93hrs y $5.25R_{\odot}$ respectivamente).

Esto no es de sorprenderse ya KIC 5701829 es sólo una estrella entre las más de 100,000 que estudia el satélite *Kepler*, por lo no tienen ninguna particularidad que motive un estudio más detallado hasta el presente trabajo.

Aún queda trabajo por delante. Un artículo relativamente reciente (Bedding et al. 2011), indica que se puede diferenciar entre una gigante roja que está quemando hidrógeno en su cascarón y otra quemando helio en el núcleo. Para poder hacer esto, se necesitan identificar los modos g presentes en el espectro de KIC 5701829. Sin embargo, esto requiere analizar una serie temporal mucho más larga (de 8 meses a un año) que la que se ha usado en este trabajo. Adicionalmente, si se determina la velocidad proyectada de rotación de KIC 5701829, se podría incluir el ritmo de rotación estelar en el análisis teórico y así se obtendrían modelos más realistas a los que se han utilizado aquí. Lo anterior no sólo se restringe para KIC 5701829 sino para el resto de las estrellas que se encuentran en el campo de visión del satélite *Kepler*.

A

Apéndice 1.
Reducción de espectros usando IRAF.

Dan Deras, Valentina Abril, Lester Fox Machado, UNAM Ensenada - OAN SPM
Reducción de datos espectroscópicos.

Proceso de Reducción, Extracción y Calibración de espectros.

Las imágenes instrumentales contienen la información sobre los objetos a estudiar pero también están sujetas a modificaciones a la señal intrínseca del objeto, debido al medio de transmisión y a los sistemas instrumentales con los que se captura dicha información. Para todo el proceso se utilizó el Image Reduction and Analysis Facility (IRAF).

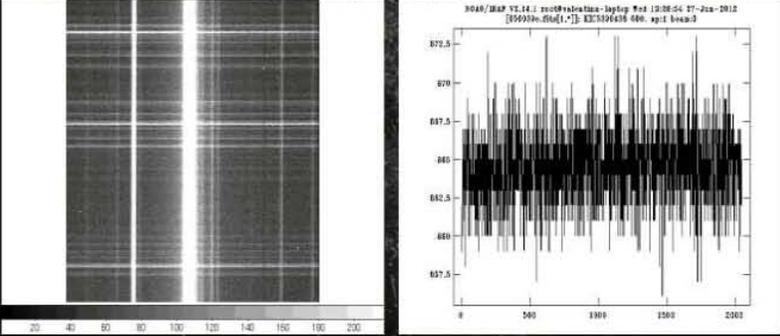


Figura: Izquierda: Apariencia del espectro crudo o instrumental, se observan múltiples espectros. Derecha: Espectro instrumental, que es la suma de todas las señales que recibió la rendija.

Dan Deras, Valentina Abril, Lester Fox Machado, UNAM Ensenada - OAN SPM
Reducción de datos espectroscópicos.

Corrección por BIAS.

Una exposición BIAS es una imagen con obturador cerrado y el menor tiempo de exposición posible. Con esto se determina el ruido electrónico y posibles errores sistemáticos. Estas imágenes deben primero combinarse para formar el MASTER BIAS (outlier rejection), esto con la tarea zerocombine. Posteriormente el MASTER BIAS es sustraído de cada imagen tanto objetos como arcos. Entre más BIAS hay el MASTER BIAS será mas efectivo en la eliminación de ruido (tarea ccdproc).



Figura: MASTER BIAS: Combinación de varios bias, en este caso la combinación de 20 imágenes BIAS.

Figura A.1: Proceso de reducción de espectros.

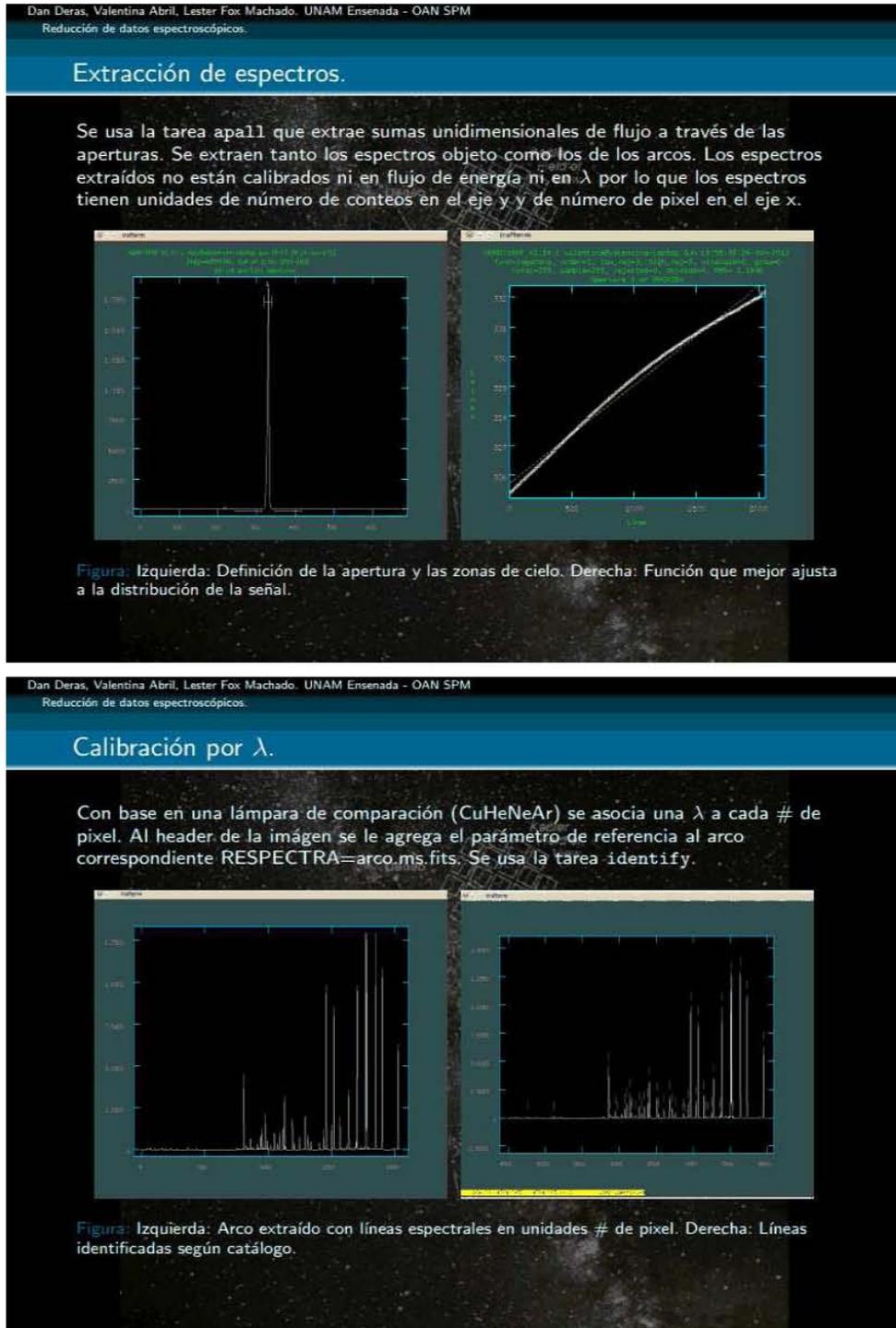


Figura A.2: Extracción de espectros.

Dan Deras, Valentina Abril, Lester Fox Machado. UNAM Ensenada - OAN SPM
Reducción de datos espectroscópicos.

Calibración por λ .

Luego de la identificación de líneas se realiza corrección de dispersión y extracción del espectro calibrado en λ con la tarea `dispcor`. Esta tarea asocia la calibración en λ de los arcos con la distribución de la señal a lo largo de los pixeles en los objetos.

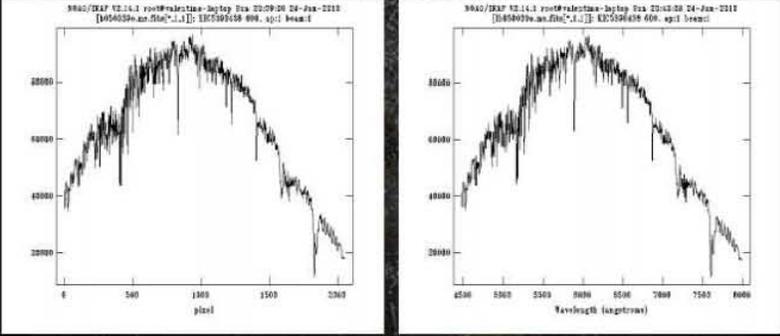


Figura: Izquierda: Espectro del objeto extraído originalmente. Derecha: Espectro extraído calibrado en λ .

Dan Deras, Valentina Abril, Lester Fox Machado. UNAM Ensenada - OAN SPM
Reducción de datos espectroscópicos.

Calibración en Flujo.

- Se determina la masa de aire de la posición del objeto al momento de la observación `setairmass`. La masa de aire es el cociente entre la trayectoria de un fotón a través de la atmósfera y la trayectoria mínima vertical que recorrería al mismo punto en la tierra.
- Se elige una estrella estandar a la cual se aplican los mismos pasos anteriores para la reducción, extracción y calibración en λ . A las estrellas estándares se les conoce muy bien su luminosidad y ésta se utiliza para determinar la cantidad de energía que el instrumento interpreta como conteos. Este flujo por pixel y sus unidades se pueden conocer con las tareas `standard` y `sensitivity`.

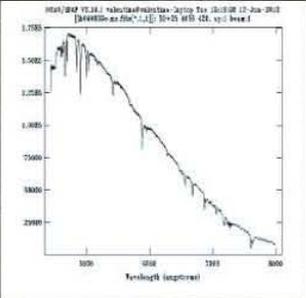


Figura Espectro calibrado en flujo de la estrella estandar en este caso BD +25 4655.

Figura A.3: Calibración por longitud de onda λ .

Dan Deras, Valentina Abril, Lester Fox Machado, UNAM Ensenada - OAN SPM
Reducción de datos espectroscópicos.

Calibración en Flujo.

- La tarea `standard`: Asocia los datos de luminosidad que tiene IRAF de las estrellas estándares observadas la misma noche que los objetos (preferiblemente en el mismo campo), esos archivos los añade al archivo de sensibilidad.
- La tarea `sensfunc` determina la función de sensibilidad y extinción del instrumento basado en la luminosidad de las estrellas estándar en la base de datos, es decir determina que tan sensible es el aparato o que tanta energía recibe y cómo los conteos se asocian con la escala de energía teniendo en cuenta la Luminosidad de las estrellas estándar para diferentes valores de λ .

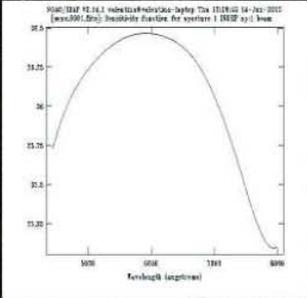


Figura: Función sensibilidad del instrumento basado en los datos instrumentales y de luminosidad de la estrella estándar.

Dan Deras, Valentina Abril, Lester Fox Machado, UNAM Ensenada - OAN SPM
Reducción de datos espectroscópicos.

Calibración en Flujo.

- Por último la tarea `calibrate`: Calcula el flujo aplicando la función sensibilidad determinada a partir de la estándar y transforma los conteos en unidades de energía para los espectros de los objetos ya calibrados en λ .

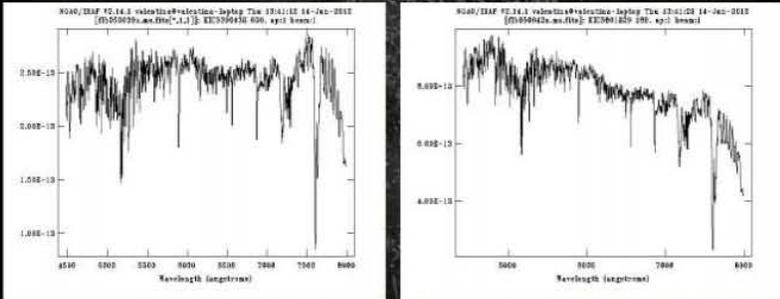


Figura: Izquierda: Espectro final calibrado en flujo y en λ de KIC5390438. Derecha: Espectro final de KIC5701829.

Figura A.4: Calibración por flujo.

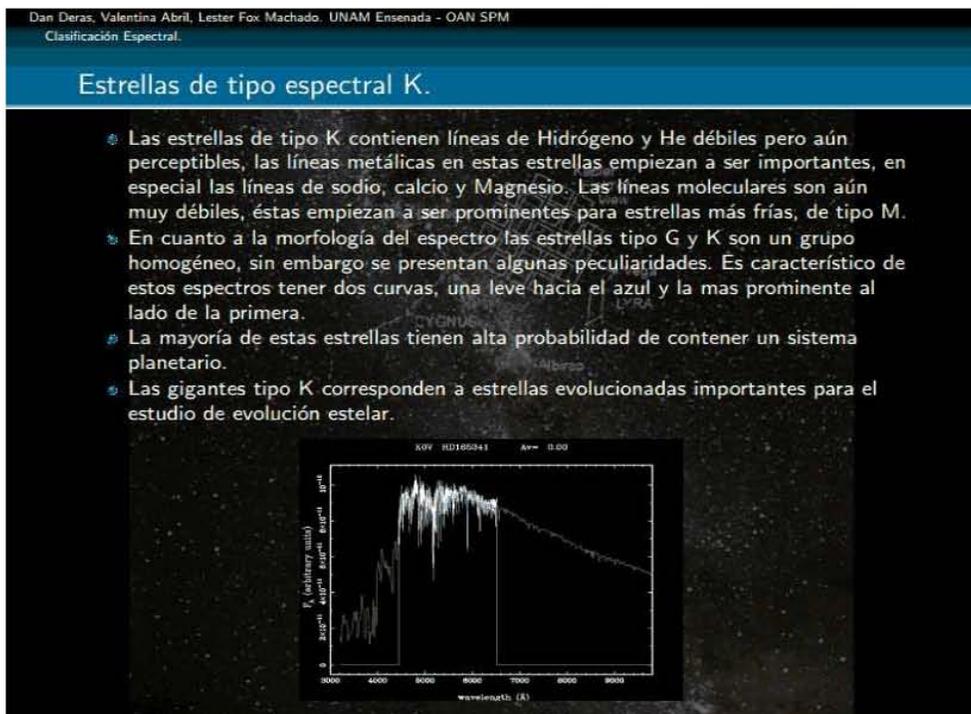
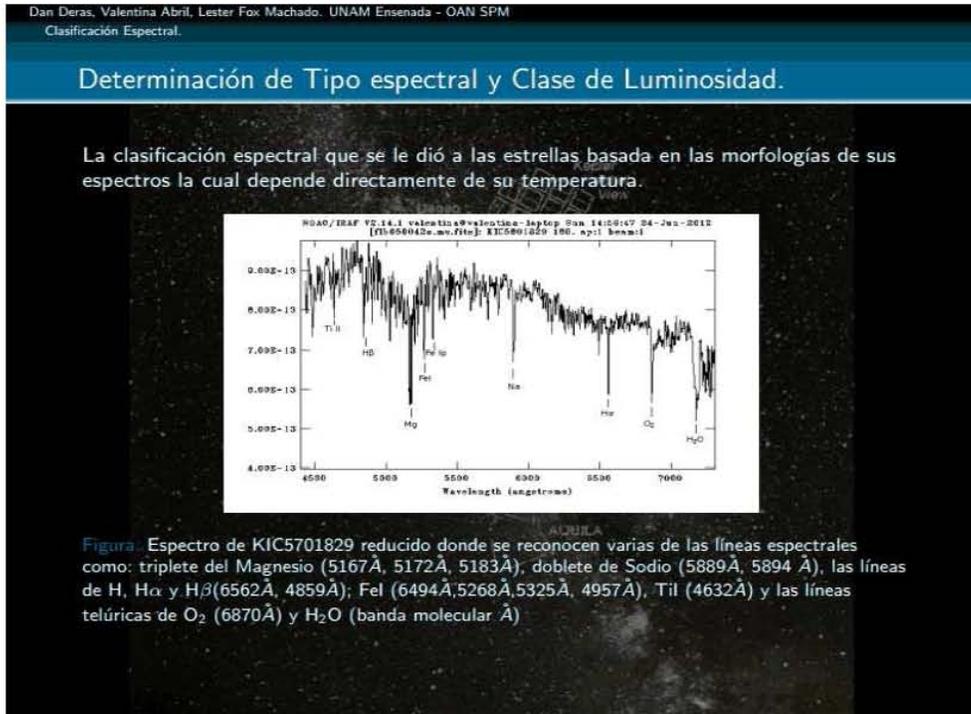


Figura A.5: Determinación del tipo espectral y clase de luminosidad.

B

Apéndice 2.

Código de evolución estelar: CESAM2k y código de oscilaciones: FILOU.

B.1 Cálculo de modelos de estructura estelar: Código CESAM.

Los modelos de estructura estelar adecuados para nuestras estrellas problema, tanto para el cálculo de las isocronas como de las frecuencias de oscilación fueron generados mediante el código de evolución CESAM (Morel 1997).

CESAM (Code d'Evolution Stellaire Adaptatif et Modulaire) consiste en un conjunto de programas y rutinas que permiten llevar a cabo cálculos de la evolución estelar cuasi estática en una dimensión, incluyendo la difusión de las especies químicas y la rotación. Este código integra el sistema de ecuaciones de estructura estelar, utilizando el método de colocación de “splines”. El código se estructura en dos espacios: el espacio físico donde las ecuaciones se escriben sin tener en cuenta el método empleado en su solución y en el espacio funcional (“B-splines”) donde las ecuaciones diferenciales son integradas con el formalismo matemático. Esto proporciona una estructura modular que permite explotar, con el mismo algoritmo, diferentes opciones físicas como: ecuación de estado, opacidad, reacciones termonucleares o difusión, para un mismo cálculo; además de que el orden y la precisión de la solución se ajustan a través de unos pocos parámetros de entrada (Morel 1997).

CESAM permite computar la evolución estelar desde el estado evolutivo de pre-SP hasta el inicio de la combustión de ${}^4\text{He}$ por medio del proceso triple- α ; además puede incluir la pérdida de masa durante la evolución. Como resultado se obtiene el perfil radial de las magnitudes que definen a las estrellas como son la luminosidad, la presión, la temperatura, la densidad o la composición química, así como la variación de los mismos con la evolución temporal de la estrella.

El conjunto de ecuaciones 1D de estructura estelar empleado por CESAM se puede

escribir de la siguiente forma (Morel 1997):

$$\frac{\partial p}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} + \frac{\Omega^2}{6\pi r} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \frac{\partial p}{\partial m} \frac{T}{p} \nabla \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 p} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \varepsilon - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \Psi_i, \quad 1 \leq i \leq n_X, \quad (\text{B.5})$$

donde $\nabla \equiv \partial \ln T / \partial \ln p$ toma una expresión distinta según el transporte de energía sea radiativo o convectivo. Aquí se ha considerado como variable lagrangiana independiente la masa, m , dentro de una esfera de radio $r(m)$, en vez del propio radio. Además se asume una estructura estelar simétricamente esférica, la ausencia del campo magnético y un primer orden en el efecto de la rotación. $\Omega(m, t)$ es la velocidad angular de rotación estelar; $L(m, t)$ es la luminosidad emitida por la superficie de una esfera de radio r en un momento dado t ; ε es el ritmo de generación de energía por unidad de masa; u es la energía interna por unidad de masa; $X_i(m, t)$ es la fracción de núcleos del tipo i por unidad de masa a un radio $r(m)$ en un momento dado t , donde existen n_X especies químicas; por último, Ψ_i es el ritmo de variación de X_i debido a las reacciones termonucleares y en su caso la difusión atómica.

En el presente trabajo, la física implementada en el código para generar los modelos ha sido la siguiente:

- La ecuación de estado de Eggleton et al. (1973). Cabe destacar que la utilización de otra EOS más completa, como puede ser CEFF, conduce a resultados similares en el ámbito de masas de las δ Scuti.
- Tabla de opacidades interpoladas de OPAL, Iglesias & Rogers (1996), complementada a bajas temperaturas por la de Kurucz (1991).
- La convección se describe de acuerdo a la teoría de longitud de mezcla de Henvey et al. (1965), utilizando el criterio de Schwartzchild para decidir si el transporte de energía es por radiación o convección.
- La atmósfera se calcula siguiendo la ley $T(\tau)$ de Hopf.
- Las reacciones termonucleares fueron interpoladas de los ritmos de reacciones nucleares de Caughlan & Fowler (1988). Las cadenas nucleares contienen 20 especies que toman en cuenta el proceso PP, el ciclo CNO y el proceso 3α (Clayton 1968): ^1H , ^2D , ^3He , ^4He , ^7Li , ^8Be , ^{12}C , ^{13}C , ^{14}N , ^{15}N , ^{16}O , ^{17}O ; las especies ^2H , ^7Li , ^7Be se consideran en equilibrio.
- La difusión de especies químicas y la pérdida de masa no fueron consideradas en el cálculo.

B.2 Cálculo de las frecuencias teóricas de oscilación: Código FILOU.

Las frecuencias propias de oscilación de los modelos de estructura estelar que describen aproximadamente el estado evolutivo de nuestras estrellas problema, las hemos computado con el código de oscilaciones adiabáticas FILOU (Tran Minh et al. 1995). En la versión utilizada de dicho código, las frecuencias se calculan a partir de modelos con rotación considerando los efectos hasta el término Ω^2 (segundo orden) en la perturbación producida por el desdoblamiento rotacional.

C

Bibliografía.

- Aerts, C. et al. *Asteroseismology*. "Introducing Asteroseismology". Springer. United Kingdom. 2010. p.14.
- Baglin, A. et al. 2002, ESA-SP; Stellar Structure and Habitable Planet Finding 17-24.
- Basu, D., 2001, 1st ed., CRC Press.
- Baran, A.S., Fox Machado, L. 2011, Acta Astronomica, 61, 325.
- Bedding, T., Kjeldsen, H., 2010, arXiv:1001.5038 [astro-ph.SR].
- Bedding, T. et al. 2011, Nature, 471, 608.
- Borucki, W., et al. 2010, Science, 327, 977.
- Bradt, H., 2004, 1st Ed., Cambridge University Press.
- Breger, M., Handler, G., Garrido. R., et al. 1999, A&A, 349 225.
- Brown, T. M., et al. 1991, ApJ, 368, 599.
- Caughlan, G.R., Fowler, W.A. 1988, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 40, 283.
- Chaplin, W. J., et al. 2011, ApJ, 732, L5.
- Christensen-Dalsgaard, J. 1998, en: Lecture Notes on Stellar Oscillations, 4^a edición, Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet.
- Clayton, D.D.: Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis. Mc GrawHill, New York and London (1968).
- Cowling T. G., 1941, MNRAS101, 367 375.
- Cox J. P., 1974, Pulsating stars, Reports on Progress in Physics, 37, 563-698.
- Cox, J.P. 1980, en: Theory of Stellar Pulsations, Princeton Univ. Press.

- Eggleton, P.P., Faulkner, J., Flannery, B.P. 1973, *A&A*, 23, 325.
- Fox Machado, L., et al. 2006, *A&A*, 446, 611 - 620.
- Hacking, P. et al. 1999, *ASP Conf. Ser.*, 177, 409, Eds. M.D. Bica, R.M. Cutri, & B.F. Madore.
- Handler, G., "Planets, Stars and Stellar Systems", eds. T. D. Oswalt et al., Springer Verlag, 2012, 4, 207.
- Henvey, L.G., Vardya M.S., Bodenheimer, P.L. 1965, *ApJ*, 139, 306.
- Iglesias, C.A., Rogers, F.J. 1991, *ApJ*, 371,408.
- Kallinger, T., et al. 2010, *A&AS*, 522, A1.
- Karttunen, H., et al. 1996, *Fundamental Astronomy 3rd Edition.*, Springer.
- Kjeldsen, H., Bedding, T. 1995, *A&A*, 293, 87.
- Kjeldsen, H., et al. 1994, *Astron. J.* 109, 1313.
- Kurucz, R.L. 1991, en: *Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models*, Crivellari L., Hubeny I and Hummer D.G. (eds.), *NATO ASI Series*. Kluwer, Dordrecht 1991.
- Mosser, B., et al. 2010, *A&AS*, 517, A22.
- Morel, P. 1997, *A&AS*, 124, 597.
- Ramirez, I., Melendez, J. 2005, *ApJ*626, 446.
- Sánchez-Blázquez, P., et al. 2006, *MNRAS*, 371, 703.
- Suárez J.C., et al. 2010, *ApJ*, 721: 537 - 546.
- Tassoul, M. 1980, *ApJS*, 43, 469.
- The Astrophysics Spectator. Issue 3.18, October 18, 2006.
- Tran Minh, F. & L. L on, L. 1995, *Physical Processes in Astrophysics*, 219.
- Ulrich R. K., 1986, *ApJ*, 306, L37.
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., Shibahashi H. 1989, en: *Non-radial Oscillations of Stars*, Tokyo: Tokyo University Press. 2nd ed.
- Uytterhoeven, K. et al. 2011, *A&AS*, 534, A125.
- Vandakurov, Y. V. 1967, *AZh*, 44, 786.