



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TOPOLOGIA DE INTERSECCIÓN DE CUÁDRICAS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

VINICIO ANTONIO GÓMEZ GUTIÉRREZ

TUTOR:

DR. SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO SÁNCHEZ

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, CU

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE 2013.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Resultados sobre cuádricas reales	3
1.1. La imagen de la esfera bajo una transformación cuadrática	3
1.2. Superficies ICC	3
1.2.1. Acciones en superficies compactas y orientables	3
1.2.2. Superficies que se obtienen mediante cuádricas centradas coaxiales	4
1.2.3. Ejemplos de superficies que resultan de intersecciones no coaxiales	6
1.2.4. Cómo duplicar el género	7
1.2.5. Cómo obtener la superficie de género $2g + 1$ a partir de la de género g	8
1.3. Variedades ICC	9
1.3.1. Acciones del n -toro en variedades de dimensión $n+2$	9
1.3.2. Ejemplos que se obtienen mediante cuádricas centradas coaxiales	9
1.3.3. Ejemplos de variedades que resultan de intersecciones no coaxiales	11
1.4. La forma normal	12
2. ¿Cuándo una variedad es intersección completa de cuádricas?	17
2.1. Intersecciones completas compactas	17
2.1.1. (a) implica (b)	18
2.1.2. (b) implica (c)	20
2.2. Intersecciones completas de la esfera con otras cuádricas	20
2.3. La prueba de Akbulut-King	20
3. Resultados sobre la imagen directa de la esfera	23
3.1. Una extensión del Teorema de Toeplitz-Hausdorff	23
3.2. El conjunto discriminante	25
4. El Teorema No Coaxial	29
4.1. Introducción	29
4.2. Los Casos Restantes del Teorema Coaxial	31
4.2.1. Cortes y variedades con configuraciones pentagonales	31
4.2.2. La variedad con configuración heptagonal $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	34
4.2.3. El Teorema Coaxial	36
4.3. Los Teoremas de las Configuraciones Básicas	37
4.3.1. Introducción: La construcción $Y \rightarrow \tilde{Y}$	37
4.3.2. El primer Teorema de las Configuraciones Básicas	39
4.3.3. El segundo Teorema de las Configuraciones Básicas	40
4.4. La construcción $Y \rightarrow Y'$	41
4.5. La Homología de la Cubierta Ramificada	42
4.5.1. Primera sucesión de Mayer-Vietoris	43
4.5.2. Segunda sucesión de Mayer-Vietoris	43
4.6. Un lema simple	44
4.7. Configuraciones Triangulares	44
4.7.1. La superficie de género tres	44
4.7.2. Un vértice múltiple, $s = 1$	45
4.7.3. Dos vértices múltiples, $s = 1$	45
4.7.4. Tres vértices múltiples, $s = 1$	46
4.7.5. Una variedad de dimensión cuatro, $s = 2$	47
4.7.6. Aplicando la construcción $Y \rightarrow Y'$	48
4.8. Configuraciones Pentagonales	49
4.8.1. El caso de dimensión cuatro	49

4.8.2. El caso de dimensión cinco	50
4.8.3. Los casos pentagonales con $s \geq 2$	50
4.9. Configuraciones de 7 o más lados	50
4.9.1. La base de la inducción	50
4.9.2. El paso inductivo	50
4.10. Epílogo	51
4.10.1. Casos en que Y tiene $s=0$, $n=1+p+q$	51
4.10.2. Casos en que Y es la superficie de género tres o cinco	51

Capítulo 1

Resultados sobre cuádricas reales

1.1. La imagen de la esfera bajo una transformación cuadrática

Definición Una transformación cuadrática $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ es aquella cuyas funciones coordenadas son polinomios de segundo grado. Decimos que T está diagonalizada si ninguna de las funciones coordenadas tiene términos cruzados.

Ejemplo Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2(2, 1) + x_2^2(0, 3) + x_3^2(-2, 1) + x_4^2(-1, -2) + x_5^2(1, -2)$$

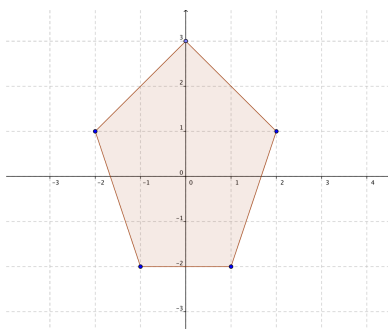


Figura 1.1: En este ejemplo la imagen de la 4-esfera es un pentágono

Ejemplo Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

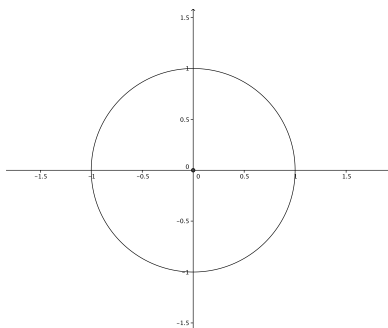


Figura 1.2: En este ejemplo la imagen de la circunferencia unitaria es ella misma

Teorema 1 Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ una transformación cuadrática diagonalizada. Entonces la imagen de la esfera unitaria bajo T es un polígono convexo.

1.2. Superficies ICC

Definición Decimos que un subconjunto de la esfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ es ICC (intersección de cuádricas centradas) si está dado por ecuaciones homogéneas de segundo grado

Nótese que en un conjunto ICC podemos definir una acción no trivial de \mathbb{Z}_2 inducida por la transformación antípoda $T(x) = -x$. En el caso de que el conjunto en cuestión sea la imagen inversa de una transformación cuadrática diagonalizada, además tenemos la acción del grupo $(\mathbb{Z}_2)^n$ generada por las reflexiones con respecto a los hiperplanos coordenados. En tal caso decimos que las cuádricas son *coaxiales*.

1.2.1. Acciones en superficies compactas y orientables

Ejemplo $(\mathbb{Z}_2)^3$ actúa en la esfera S^2 dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cambiando los signos de las coordenadas. Si el punto (x, y, z) tiene las tres coordenadas distintas de cero, su órbita tiene ocho puntos, y el grupo de isotropía correspondiente es trivial. En el caso de que alguna coordenada del punto sea igual a cero, el grupo de isotropía deja de ser trivial, y la órbita consistirá de cuatro o dos puntos, según cuántas coordenadas sean iguales a cero. Esta acción no es libre, pero sí es efectiva. El cociente es un triángulo.

Teorema 2 Sea M una superficie compacta y orientable. Si M admite una acción de $(\mathbb{Z}_2)^n$ tal que

- (i) El cociente de M bajo $(\mathbb{Z}_2)^n$ es un polígono P de $n + k$ lados
- (ii) $(\mathbb{Z}_2)^n$ actúa libremente en los puntos cuya proyección cae en el interior de P
- (iii) Cada vértice es la imagen de puntos donde exactamente dos factores actúan trivialmente
- (iv) Cada arista es la imagen de puntos donde exactamente un factor actúa trivialmente, y ese factor es constante a lo largo de la arista
- (v) Para cada factor existe al menos una arista en la cual actúa trivialmente

Entonces

- (a) Existe una sección
- (b) M es conexa, y
- (c) El género de M es $1 + 2^{n-3}(k + n - 4)$

Demostración

- (a) Sea $\pi : M \rightarrow P$ la proyección de M sobre su cociente P . Queremos probar que existe $s : P \rightarrow M$ continua tal que $\pi s = Id_P$. Como $(\mathbb{Z}_2)^n$ actúa libremente en los puntos cuya proyección cae en el interior de P , podemos decir que la terna $(E, p, intP)$ es un espacio cubriente, donde $E = M - \pi^{-1}(frP)$ y p es la restricción de π a E . (Notación: $intP$ denota al interior de P , frP denota a la frontera de P). Más aún, E es unión ajena de 2^n conjuntos abiertos homeomorfos a un disco. Elijamos uno de estos conjuntos abiertos. Llamémosle D . La proyección π restringida a D es biyectiva, y tiene inversa. Sea $s_0 : intP \rightarrow D$ dicha inversa. Queremos ver que podemos extender s_0 a una función $s : P \rightarrow M$. Tomemos un punto q en el interior relativo de una arista de P . Por hipótesis, existe un único factor de $(\mathbb{Z}_2)^n$ que actúa trivialmente en q . Entonces $\pi^{-1}(q)$ tiene 2^{n-1} preimágenes. ¿Cómo elegir $s(q)$? Tomemos una vecindad U de $q \in M$, lo suficientemente pequeña para que $\pi^{-1}(U)$ esté conformada por 2^{n-1} vecindades de cada uno de los elementos de $\pi^{-1}(q) \subset M$. Como M es una superficie, cada una de estas vecindades puede tomarse homeomorfa a un disco, y como M es Hausdorff, estas vecindades pueden tomarse ajenas. Exactamente una de estas vecindades interseca a $D \subset M$. Elegimos $s(q)$ como el único elemento de $\pi^{-1}(q) \cap D$. Para definir s en todo P solamente falta definirla en los vértices de P . Si q es un vértice de P , entonces $\pi^{-1}(q)$ tiene 2^{n-2} elementos. De manera análoga, existe una vecindad suficientemente pequeña U de q tal que $\pi^{-1}(U)$ consiste de 2^{n-2} vecindades ajenas, exactamente una de las cuales interseca a D . Por construcción, s es continua y $\pi s = Id_P$.
- (b) Por (a), podemos considerar a M como unión de 2^n copias del polígono P , cada una de las cuales se obtiene al multiplicar P por algún elemento de $(\mathbb{Z}_2)^n$. Si M fuera desconexa, entonces deberían existir dos copias de P cada una en una componente conexa distinta de M . Más aún, debería existir un elemento γ en $(\mathbb{Z}_2)^n$ tal que una de las copias se obtenga de multiplicar γ por la otra. Expresemos a γ como producto de los generadores de $(\mathbb{Z}_2)^n$, digamos $\gamma = g_1 g_2 \cdots g_r$. Al multiplicar g_r por P generamos una copia $g_r P$ adyacente a P mediante el lado en el cual g_r actúa trivialmente. Al multiplicar g_{r-1} por $g_r P$, obtenemos otra copia $g_{r-1} g_r P$ adyacente a $g_r P$, y así sucesivamente hasta llegar a γP . Hemos encontrado una trayectoria de copias de P que conecta P con γP .

- (c) Para calcular el género de la superficie M recurriremos a la característica de Euler $\chi = C - A + V$ donde C es el número de caras, A el número de aristas y V el número de vértices. Cada copia del polígono es una cara, y por lo tanto tenemos 2^n caras. Por hipótesis el polígono tiene $n + k$ lados, y cada uno tiene 2^{n-1} copias, por lo tanto tenemos $2^{n-1}(n + k)$ aristas. Nuestro polígono tiene $n + k$ vértices, y cada uno tiene 2^{n-2} copias. Entonces tenemos $2^{n-2}(n + k)$ vértices. Haciendo la cuenta llegamos a que $\chi = 2^{n-2}(4 - n - k)$. Finalmente, usando la ecuación $\chi = 2 - 2g$ llegamos a que el género de M es $g = 1 + 2^{n-3}(n + k - 4)$

Observación *Dos aristas en las cuales se anule un mismo factor no pueden ser incidir en un mismo vértice.*

1.2.2. Superficies que se obtienen mediante cuádricas centradas coaxiales

Teorema 3 *Sea M una superficie conexa, compacta y orientable. Sea n mayor o igual que 3. Entonces M tiene género $1 + 2^{n-3}(n - 4)$ si y solamente si se puede realizar como intersección de cuádricas centradas coaxiales en \mathbb{R}^n*

Prueba

\Leftarrow) Si M se puede realizar como intersección de cuádricas coaxiales centradas en \mathbb{R}^n , entonces tenemos una acción de $(\mathbb{Z}_2)^n$ en ella. El cociente es un polígono de n lados, y se puede realizar como la intersección del primer ortante $\{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ con M . Cada lado está determinado por la intersección con un hiperplano $x_i = 0$, y el cociente tiene exactamente n lados. Se puede ver que se cumplen las hipótesis del teorema anterior, y por lo tanto M tiene el género requerido.

\Rightarrow) El caso de $n = 3$ es el de la esfera, el cual ya está. Para el caso general desarrollaremos la idea siguiente:

1. Consideremos un plano coordenado UV . En él tracemos un polígono convexo de P de n lados, dos de los cuales sean segmento de la parte positiva de los ejes U y V respectivamente, y que además el origen sea un vértice.
2. Consideremos un sistema de desigualdades en el plano UV que determinen al polígono P

$$a_1u + b_1v + c_1 \geq 0$$

$$a_2u + b_2v + c_2 \geq 0$$

...

$$a_{n-2}u + b_{n-2}v + c_{n-2} \geq 0$$

$$u \geq 0$$

$$v \geq 0$$

* Definamos $M \subset \mathbb{R}^n$ por las ecuaciones

$$x_1^2 = a_1x_{n-1}^2 + b_1x_n^2 + c_1$$

$$x_2^2 = a_2x_{n-1}^2 + b_2x_n^2 + c_2$$

...

$$x_{n-2}^2 = a_{n-2}x_{n-1}^2 + b_{n-2}x_n^2 + c_{n-2}$$

* Definamos $\pi : M \rightarrow P$ como $\pi(x_1, \dots, x_n) = (\sqrt{x_{n-1}}, \sqrt{x_n})$

* Aplicando el teorema anterior tenemos que P es un polígono de n lados ($k = 0$) y por lo tanto el género de M es $g = 1 + 2^{n-3}(n - 4)$

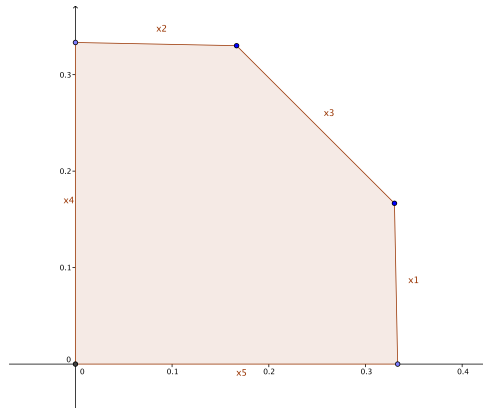
Ejemplo *La superficie de género cinco*

Las desigualdades

$$0 \leq u \leq \frac{1}{3}$$

$$0 \leq v \leq \frac{1}{3}$$

$$u + v \leq \frac{1}{2}$$



definen un pentágono en el plano UV

Introduciendo las variables

$$\begin{aligned}x_1^2 &= \frac{1}{3} - u \\x_2^2 &= \frac{1}{3} - v \\x_3^2 &= \frac{1}{2} - u - v \\x_4^2 &= u \\x_5^2 &= v\end{aligned}$$

obtenemos un sistema de ecuaciones que describe la superficie de género cinco en \mathbb{R}^5

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_4^2 &= \frac{1}{3} \\x_2^2 + x_5^2 &= \frac{1}{3} \\x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Observación $(\mathbb{Z}_2)^5$ actúa en la superficie anterior y el cociente es el pentágono

Observación En una conversación de S. López de Medrano con F. Hirzebruch, sobre la topología de las intersecciones de cuádricas, F. Hirzebruch le comentó a S. López de Medrano que había enlistado cuáles superficies compactas, conexas y orientables se pueden realizar como intersección de cuádricas centradas coaxiales, como parte no publicada del trabajo [6]

1.2.3. Ejemplos de superficies que resultan de intersecciones no coaxiales

En la sección anterior, estudiamos acciones de $(\mathbb{Z}_2)^n$ en superficies tales que el cociente es un polígono. Pero tenían una propiedad adicional: A cada factor de $(\mathbb{Z}_2)^n$ le corresponde un lado del polígono. En esta sección estudiaremos acciones en las cuales a un mismo factor de $(\mathbb{Z}_2)^n$ le pueden corresponder dos aristas del polígono. Para ello vamos a plantear un sistema de $n-2$ ecuaciones de segundo grado en \mathbb{R}^n tales que la superficie definida por dichas ecuaciones sea simétrica con respecto a $n-2$ hiperplanos coordenados. El cociente de la superficie bajo el grupo generado por las reflexiones con respecto a estos hiperplanos será un polígono de $2(n-2)$ lados.

Construcción inductiva.

* Comencemos con $n = 5$

Tomemos al toro $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ como punto de partida. Podemos considerar las ecuaciones siguientes:

$$x_1^2 + x_3^2 = 1$$

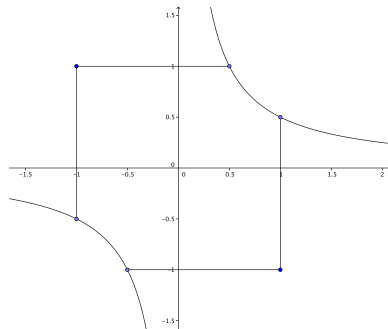
$$x_2^2 + x_4^2 = 1$$

Si proyectamos sobre el plano X_1X_2 obtenemos un cuadrado. Cada punto del interior de este cuadrado representa cuatro puntos del toro y esos cuatro puntos están en una misma órbita bajo las reflexiones con respecto a los hiperplanos $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$. Nótese que la reflexión con respecto al hiperplano $x_3 = 0$ actúa trivialmente sobre los puntos que van a dar a las aristas $x_1 = 1$ y $x_1 = -1$. Análogamente, la reflexión con respecto al hiperplano $x_4 = 0$ actúa trivialmente en los puntos que van a dar a las otras aristas.

Ahora añadamos una nueva variable x_5 relacionada con las anteriores mediante una nueva ecuación.

$$x_5^2 = 1 - 2x_1x_2$$

Sea M el subconjunto de \mathbb{R}^5 definido por las ecuaciones anteriores. Si proyectamos M sobre el plano X_1X_2 ahora obtenemos un hexágono curvo.



Consideremos el grupo de las reflexiones con respecto a los hiperplanos $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ y $x_5 = 0$. La nueva reflexión actúa trivialmente sobre las nuevas aristas. ¿Qué conjunto es M ? Tenemos tres ecuaciones en \mathbb{R}^5 . Se puede ver que es una superficie. Aplicándole el teorema 2 se puede ver que tenemos una acción de $(\mathbb{Z}_2)^3$ en M tal que su cociente es un hexágono, en otras palabras, $n = 3$ y $k = 3$. De donde M es la superficie de género tres.

* Paso inductivo

Supongamos que ya tenemos las $n - 2$ ecuaciones requeridas en \mathbb{R}^n , tales que el cociente bajo la acción de las reflexiones con respecto a los últimos $n - 2$ hiperplanos es homeomorfo a un polígono de $2(n - 2)$ lados en el plano X_1X_2 . En \mathbb{R}^{n+1} tenemos una variable más, x_{n+1} . Añadamos una ecuación de la forma

$$x_{n+1}^2 = a_{n+1}x_1^2 + b_{n+1}x_1x_2 + c_{n+1}x_2^2 + d_{n+1}$$

Elijamos los coeficientes de modo que la curva definida en el plano X_1X_2 por la ecuación $x_{n+1} = 0$ sea una hipérbola que separe dos vértices opuestos del polígono de $2(n - 2)$ lados. La superficie definida en \mathbb{R}^{n+1} por las $n - 2$ ecuaciones anteriores más la nueva ecuación, es simétrica con respecto a los últimos $n - 1$ hiperplanos, y el cociente bajo la acción del grupo de reflexiones correspondientes, es un polígono de $2(n - 1)$ lados.

¿De qué género son las superficies que obtenemos mediante este procedimiento?

Tenemos una acción de $(\mathbb{Z}_2)^m$ en M , y su cociente es un polígono de $2m$ lados. Aplicando el teorema 2 con $n = m$ y $k = m$, obtenemos que nuestras superficies son de género $1 + 2^{m-2}(m - 2)$. Entre otras, obtenemos las superficies de género 3, 9, 25, 65, 161, ...

1.2.4. Cómo duplicar el género

Supongamos que tenemos una superficie compacta y orientable S_g de género g , descrita como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones de segundo grado en \mathbb{R}^{n+2} , posiblemente con términos de primer grado y términos constantes. Supongamos que el sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$q_1(x) = 0$$

$$q_2(x) = 0$$

...

$$q_n(x) = 0$$

Vamos a construir un sistema de ecuaciones en $(\mathbb{R})^{n+4}$ cuyo conjunto de soluciones sea S_{2g} , i.e. la superficie orientable y compacta de género $2g$.

Sea Z el conjunto de puntos $(x, u, v) \in (\mathbb{R})^{n+2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tales que además de las ecuaciones de S_g cumplen las ecuaciones siguientes:

$$u^2 = d^2(x, x_0)$$

$$u = v^2 + d_0$$

Donde x_0 es un punto cualquiera de S_g tal que el vector que va de x_0 al origen no sea un vector tangente a S_g en x_0 . Por $d(x, x_0)$ denotamos a la distancia de x a x_0 , y d_0 es el radio de un pequeño disco centrado en x_0 . Esencialmente lo que estamos haciendo es quitarle un disco a S_g , luego generar una copia, y finalmente pegar ambas copias.

Observación *Esta construcción preserva la suavidad*

Supongamos que para toda x en S_g se cumple que los n vectores

$$\nabla q_1(x), \dots, \nabla q_n(x)$$

son linealmente independientes en \mathbb{R}^{n+2} .

Queremos demostrar que para todo punto (x, u, v) en Z se cumple que los $n + 2$ vectores

$$(\nabla q_1(x), 0, 0)$$

...

$$(\nabla q_n(x), 0, 0)$$

$$(\nabla d^2(x, x_0), -2u, 0)$$

$$(0, -1, 2v)$$

son linealmente independientes en \mathbb{R}^{n+4}

Claramente el conjunto formado por los primeros n vectores más el último, es un conjunto linealmente independiente. ¿Podría darse el caso de que el vector faltante

$$(\nabla d^2(x, x_0), -2u, 0)$$

sea combinación lineal de los demás?

* Si $v \neq 0$, entonces el vector $(0, -1, 2v)$ necesariamente debe estar multiplicado por cero para que la combinación lineal dé como resultado

$$(\nabla d^2(x, x_0), -2u, 0)$$

pero entonces $u = 0$, lo cual contradice la ecuación $u = v^2 + d_0$. Por lo tanto, en este caso los $n + 2$ vectores son linealmente independientes.

* Si $v = 0$, entonces el punto x pertenece a una circunferencia de radio d_0 alrededor de x_0 . Como la recta que va del origen a x_0 no es una recta tangente a la superficie en el punto x_0 , entonces los vectores x y $x - x_0$ deben ser no colineales. Por lo tanto $x - x_0$ no debe ser generado por los gradientes de S_g . Concluimos que los $n + 2$ vectores son linealmente independientes.

1.2.5. Cómo obtener la superficie de género $2g + 1$ a partir de la de género g

Vamos a modificar ligeramente la construcción anterior.

Sea S_g igual que antes.

Sea x_0 un punto de S_g tal que la función

$$f : S_g \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = d^2(x, x_0)$$

alcance su valor máximo en un solo punto $x_1 \in S_g$

Ahora añadamos la ecuación

$$t^2 + (f(x) - k)^2 = r^2$$

donde $k = \frac{f(x_1)}{2}$ y $r = \frac{f(x_1)}{2} - \epsilon$ para alguna ϵ suficientemente pequeña. Sea Z el conjunto de puntos $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}$ tales que cumplen tanto las ecuaciones de S_g como la ecuación añadida.

Nótese que en el plano cuyos ejes son t y $f(x)$, la nueva ecuación es una circunferencia. A una mitad de esta circunferencia le corresponde una copia de S_g perforada quitándole dos discos, centrados en x_0 y x_1 respectivamente. A la otra mitad de la circunferencia le corresponde otra copia, y al pegarlas en $t = 0$ obtenemos S_{2g+1} . Para ver que se preserva la suavidad ahora tenemos que ver que los $n + 1$ vectores

$$(\nabla q_1(x), 0)$$

...

$$(\nabla q_n(x), 0)$$

$$(2f(x) \nabla f(x), 0)$$

son linealmente independientes para toda pareja $(x, t) \in Z$. Esto es claro cuando $t \neq 0$. Cuando $t = 0$ estamos en el borde de los discos que quitamos alrededor de x_0 y x_1 . Podemos decir que $f(x) > 0$ porque no estamos en x_0 . El gradiente de $f(x)$ no es generado por los gradientes de S_g porque x_0 y x_1 son puntos críticos aislados de f , y ϵ es suficientemente pequeña.

Observación De lo anterior se sigue que podemos obtener superficies de todos los géneros

Observación Cualquier superficie orientable y compacta admite una acción de $(\mathbb{Z}_2)^3$ cuyo cociente es homeomorfo a un polígono

Consideremos un encaje de la superficie compacta orientable en \mathbb{R}^3 tal que sea simétrica con respecto a los tres planos XY , XZ y YZ , de modo que "los hoyos" se proyecten sobre circunferencias en el plano XY . Consideremos la acción generada por estas tres reflexiones. El cociente se puede identificar con la intersección de la proyección de la superficie sobre el plano XY con el primer cuadrante, conjunto que resulta homeomorfo a un polígono.

1.3. Variedades ICC

1.3.1. Acciones del n-toro en variedades de dimensión $n+2$

En la sección anterior trabajamos con variables reales. Ahora estudiemos qué sucede cuando trabajamos con variables complejas.

Ejemplo

Consideremos a la esfera de dimensión cinco

$$S^5 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}$$

Consideremos también al 3-toro

$$T^3 = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3 : |u_1| = 1, |u_2| = 1, |u_3| = 1\}$$

T^3 actúa en S^5 multiplicando coordenada a coordenada

$$(u_1, u_2, u_3)(z_1, z_2, z_3) = (u_1 z_1, u_2 z_2, u_3 z_3)$$

La órbita de cada uno de los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ es una circunferencia, y el grupo de isotropía de cada uno de estos puntos es isomorfo al toro de dimensión dos. La órbita de un punto con exactamente una coordenada igual a cero, es un toro de dimensión dos, y el grupo de isotropía correspondiente es isomorfo a una circunferencia. La órbita de un punto con todas sus coordenadas distintas de cero es isomorfa a T^3 , y el grupo de isotropía correspondiente es trivial. El cociente de S^5 bajo esta acción, es un triángulo.

En esta sección vamos a utilizar el resultado siguiente (Teorema 3.6 del artículo de Dennis McGavran) [12]

Teorema 4 Sea $n \geq 4$. Supongamos que T^n actúa de forma localmente suave y efectiva en una variedad M de dimensión $n + 2$, cerrada, compacta, conexa, simplemente conexa, con $n + k$ órbitas del tipo T^{n-2} . Entonces M es equivalente, en la categoría P - L , a la suma conexa

$$\#_{j=0}^{n-3} \left(j \binom{n-2}{j+1} + k \binom{n-3}{j} \right) S^{2+j} \times S^{n-j}$$

Ejemplo

$$T^4 = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{C}^4 : |u_1| = 1, |u_2| = 1, |u_3| = 1, |u_4| = 1\}$$

actúa en

$$S^3 \times S^3 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1\}$$

multiplicando coordenada a coordenada.

En este caso el cociente es un cuadrado y sus cuatro vértices corresponden a cuatro órbitas del tipo T^2

1.3.2. Ejemplos que se obtienen mediante cuádricas centradas coaxiales

La primera familia de superficies de la sección anterior, daba como cociente bajo $(\mathbb{Z}_2)^n$ un polígono de n lados. Si en las ecuaciones sustituimos cada término x_j^2 por $|z_j|^2$, siendo $z_j \in \mathbb{C}$, obtenemos una variedad M dada por $n - 2$ ecuaciones en \mathbb{C}^n . Ahora M tiene dimensión real $n + 2$, y admite una acción de T^n . Vamos a ver si cumple las hipótesis del teorema de McGavran.

1. La acción es efectiva.

Consideremos un punto $z \in M$ tal que la órbita de z corresponda a un punto interior del polígono. El grupo de isotropía de z solamente contendrá al elemento identidad $e = (1, \dots, 1)$, y por lo tanto la intersección de todos los grupos de isotropía es $\{e\}$. Esto quiere decir que la acción es efectiva.

2. M es simplemente conexa.

Utilizando el hecho de que M se obtiene del cociente de $T^n \times P$, donde P es el polígono de n lados, vamos a darle a M una estructura de CW-complejo a partir de la estructura de espacio celular tanto de S^1 como del polígono, y analizaremos el 1-esqueleto correspondiente.

- a) ¿Cuáles son las 0-celdas?

Las 0-celdas de M son producto de las 0-celdas de cada factor de $T^n = (S^1)^n$ por las 0-celdas del polígono P . Si cada factor S^1 tiene una sola 0-celda y una sola 1-celda, entonces T^n tendrá una sola 0-celda, y como el polígono tiene n vértices, entonces M tiene n 0-celdas.

- b) ¿Cuáles son las 1-celdas?

Las 1-celdas de M son productos de 0-celdas de T^n por 1-celdas de P , así como productos de 1-celdas de T^n por 0-celdas de P . Las primeras se pueden identificar con las mismas 1-celdas del polígono P , es decir, son sus n aristas. ¿Qué podemos decir de las segundas? En el caso del producto $T^n \times P$, tenemos n 1-celdas pegadas en cada uno de los vértices del polígono, formando un ramillete de circunferencias en cada vértice. Al tomar el cociente bajo la acción, solamente quedan $n - 2$ circunferencias pegadas en cada vértice.

c) ¿Cuáles son los 1-ciclos no contraíbles?

En primer lugar consideremos las circunferencias pegadas en cada vértice. ¿Todas ellas serán frontera de celdas de dimensión dos? Consideremos los productos de 1-celdas de T^n por 1-celdas de P . Estas forman cilindros que se pegan en las aristas del polígono. Al tomar el cociente, algunas de las circunferencias se contraen a un punto, y entonces en lugar de cilindros tenemos conos. Más aún, tomemos cualquier circunferencia pegada a cualquier vértice del polígono. Desde el punto de vista de las ecuaciones, dicha circunferencia corresponde a una variable que no se anuló en la imagen inversa de vértice. Si una variable no se anuló en un vértice, tampoco se anula en las aristas que le son adyacentes. Esto quiere decir que la circunferencia que tomamos está pegada a un cilindro o a un cono. Si le pegamos un cono, ya acabamos, pues la circunferencia es contraíble. Si le pegamos un cilindro, observamos que dicho cilindro también está pegado a una arista del polígono, recorremos la arista y repetimos el proceso hasta llegar a una arista en la que peguemos un cono. Necesariamente tenemos que llegar a esta situación, pues para cada variable existe una arista en la cual se anula dicha variable. De modo que, regresando a la pregunta, concluimos que para cada circunferencia pegada en cada vértice, existe una 2-variedad con frontera formada por un cono y una serie de cilindros (un cuernito) que tiene por frontera la circunferencia dada.

En segundo lugar consideremos la frontera del polígono. Este es otro 1-ciclo, pero obviamente es frontera, y por lo tanto es contraíble.

Para ver que M es simplemente conexa habría que ver que cualquier lazo es contraíble, no solamente los mencionados anteriormente. Tomemos en cuenta que tenemos dos proyecciones

$$p : T^n \times P \rightarrow M$$

$$\pi : M \rightarrow P$$

Observemos que la codimensión de $\pi^{-1}(\partial P) \in M$ es dos. Dado cualquier lazo $\gamma_1 : S^1 \rightarrow M$, existe otro lazo γ_2 homotópico al primero, tal que $\gamma_2(S^1) \cap \pi^{-1}(\partial P)$ es imagen (bajo p) de una circunferencia en $P \times (S^1)^n$. De lo anterior se sigue que p induce un epimorfismo que va del grupo fundamental de $T^n \times P$ sobre el grupo fundamental de M . Esto permite reducir el estudio de los lazos en M a aquellos que consideramos previamente. Por todo lo expuesto anteriormente, M es simplemente conexa.

Ahora podemos aplicar el teorema de McGavran, con $k = 0$. Concluimos que M es homeomorfa a

$$\#_{j=1}^{n-3} j \binom{n-2}{j+1} S^{2+j} \times S^{n-j}$$

Ejemplo Sea $M \in \mathbb{C}^5$ dado por las ecuaciones

$$|z_1|^2 + |z_4|^2 = \frac{1}{3}$$

$$|z_2|^2 + |z_5|^2 = \frac{1}{3}$$

$$|z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = \frac{1}{2}$$

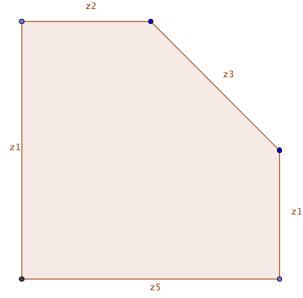
T^5 actúa en M y el cociente es un pentágono

Para concretar las ideas de la demostración anterior, veamos cómo se comporta una variable, por ejemplo z_1 , en cada vértice y en cada arista.

1. En el vértice $(z_4, z_5) = (0, 0)$ tenemos que $|z_1|^2 = \frac{1}{3}$, que $|z_2|^2 = \frac{1}{3}$, y que $|z_3|^2 = \frac{1}{2}$. En particular, z_1 forma una circunferencia de radio $\sqrt{\frac{1}{3}}$.
2. En la arista que va de $(0, 0)$ a $(\frac{1}{3}, 0)$, tenemos que $z_5 = 0$, y que $0 \leq |z_4| \leq \frac{1}{3}$. La ecuación

$$|z_1|^2 + |z_4|^2 = \frac{1}{3}$$

nos dice que z_1 forma una circunferencia de radio variable $\sqrt{\frac{1}{3} - |z_4|^2}$ que se contrae a un punto cuando $|z_4|^2$ tiende a $\frac{1}{3}$



3. En el vértice $(\frac{1}{3}, 0)$, tenemos que $z_1 = 0$
4. En la arista que va de $(\frac{1}{3}, 0)$ a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ tenemos que $z_1 = 0$
5. En el vértice $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, $z_1 = 0$
6. En la arista que va de $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ a $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$, nos encontramos con que sobre cada punto de la arista z_1 forma una circunferencia de radio variable $\sqrt{\frac{1}{3} - |z_4|^2}$ (al recorrer la arista formamos otro cono)
7. En el vértice $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ llegamos a un punto donde z_1 forma una circunferencia de radio $\sqrt{\frac{1}{6}}$
8. En la arista que va de $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ a $(0, \frac{1}{3})$, el radio de la circunferencia que forma z_1 tiende a $\sqrt{\frac{1}{3}}$ conforme nos aproximamos a $(0, \frac{1}{3})$, describiendo un cilindro topológico
9. En el vértice $(0, \frac{1}{3})$, z_1 forma una circunferencia de radio $\sqrt{\frac{1}{3}}$
10. En la arista que va de $(0, \frac{1}{3})$ a $(0, 0)$, z_1 forma una circunferencia de radio constante $\sqrt{\frac{1}{3}}$ a lo largo de los puntos de la arista, describiendo otro cilindro.

Los dos conos y los dos cilindros se pegan para formar una 2-esfera topológica. Claramente cada una de las tres circunferencias correspondientes a los vértices $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ es contraíble. Lo mismo sucede con todas las otras circunferencias que conforman el 1-esqueleto.

Observación Aplicando el teorema 4 (el de McGavran) encontramos que M es homeomorfa a la suma conexa de cinco copias de

$$S^4 \times S^3$$

1.3.3. Ejemplos de variedades que resultan de intersecciones no coaxiales

Consideremos los ejemplos de superficies que vimos como resultado de intersecciones de cuádricas no coaxiales. En dichas superficies teníamos una acción de $(\mathbb{Z}_2)^n$. En esta sección nos proponemos modificar ligeramente dichos sistemas de ecuaciones para obtener variedades como las estudiadas por McGavran, en particular, que sean de dimensión $n + 2$ y que admitan una acción de T^n .

Sean u, v dos variables reales. Definamos un conjunto de n desigualdades de la forma

$$a_j u^2 + 2b_j uv + c_j v^2 + d_j \geq 0$$

tales que cada una de ellas determine la región intermedia de una hipérbola en el plano UV , y que en conjunto determinen un polígono P de $2n$ lados curvos. Sean z_1, z_2, \dots, z_n variables complejas. Definamos M como el subconjunto de puntos de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^2$ tales que satisfacen las ecuaciones

$$|z_j|^2 = a_j u^2 + 2b_j uv + c_j v^2 + d_j$$

M admite una acción de T^n dada por

$$(w_1, \dots, w_n)(z_1, \dots, z_n, u, v) = (w_1 z_1, \dots, w_n z_n, u, v)$$

Tenemos una proyección $\pi : M \rightarrow P$ definida por

$$\pi(z_1, \dots, z_n, u, v) = (u, v)$$

Esta proyección envía órbitas en puntos. Los vértices del polígono corresponden a órbitas del tipo T^{n-2} . Los puntos interiores de las aristas corresponden a órbitas del tipo T^{n-1} . Los puntos interiores del polígono corresponden a órbitas del tipo T^n . La acción es efectiva, pues tenemos puntos donde el grupo de isotropía contiene solamente al elemento neutro $e = (1, \dots, 1) \in T^n$.

¿ M será simplemente conexa?

La respuesta es que sí, y los argumentos son esencialmente los mismos que para los ejemplos de variedades de la sección anterior. El cambio más importante es que cada factor S^1 se colapsa en lados opuestos. Aplicando el teorema de McGavran, obtenemos la conclusión siguiente:

M es homeomorfa a una suma conexa de productos de esferas. Para ser más exactos, a la siguiente suma conexa de productos de esferas

$$\#_{j=0}^{n-3} \left(j \binom{n-2}{j+1} + n \binom{n-3}{j} \right) (S^{2+j} \times S^{n-j})$$

1.4. La forma normal

En el artículo de C.T.C. Wall [19] se muestra que la intersección de dos cuádricas centradas no coaxiales, dadas en la forma

$$x^t A x = 0$$

$$x^t B x = 0$$

es no-singular si todos los valores propios de $A^{-1}B$ son diferentes, y se puede llevar a la forma normal

$$q_1 = \sum_{j=1}^r a_j x_j^2 + \sum_{k=1}^s 2u_k v_k$$

$$q_2 = \sum_{j=1}^r b_j x_j^2 + \sum_{k=1}^s \{ \beta_k (u_k^2 - v_k^2) + 2\alpha_k u_k v_k \}$$

donde los valores propios reales de $A^{-1}B$ son

$$\frac{b_j}{a_j}$$

y los valores propios complejos de $A^{-1}B$ son

$$\alpha_k \pm i\beta_k$$

Observación Agradecemos a Marc Chaperon sus comentarios sobre el proceso de llevar un sistema de dos cuádricas no diagonalizadas a la forma normal.

Si se intersectan transversalmente, podemos suponer que los puntos $(a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r)$ son los vértices de un polígono tal que ningún segmento que une dos vértices contiene al origen. Además, las β_k son todas distintas de cero. Sea M la intersección de las hipersuperficies cuádricas $q_1 = 0$ y $q_2 = 0$ con la esfera unitaria $S^{r+2s-1} \subset \mathbb{R}^{r+2s}$.

Afirmamos que sin pérdida de generalidad podemos suponer que las β_k son iguales a uno, y que las α_j son iguales a cero.

Por hipótesis de suavidad el origen es un valor regular de la función

$$f : S^{r+2s-1} \subset \mathbb{R}^{r+2s} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, \dots, x_r, u_1, v_1, \dots, u_s, v_s) = (q_1, q_2)$$

El caso en el que $s = 0$ ya está estudiado.

Nótese que sin pérdida de generalidad todas las β_k son positivas, pues en caso de que alguna fuera negativa, podemos efectuar un cambio de variables

$$U_k = v_k$$

$$V_k = u_k$$

Reescribiendo el sistema de ecuaciones de M en términos de las nuevas variables, el término donde aparece β_k cambia de signo.

Vamos a enunciar nuestro teorema de manera inductiva.

Teorema 5 Sea $f : S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, u, v) = (q_1(x) + 2uv, q_2(x) + \beta(u^2 - v^2) + 2\alpha uv)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u, v \in \mathbb{R}$, q_1 y q_2 son dos cuádricas homogéneas, y $\beta > 0$. Sea $\tilde{f} : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\tilde{f}(x, u, v) = (q_1(x) + 2uv, q_2(x) + u^2 - v^2)$$

Supongamos que el origen es un valor regular de f .

Entonces es un valor regular de \tilde{f} , y $f^{-1}(0, 0)$ es difeomorfa a $\tilde{f}^{-1}(0, 0)$.

Antes de demostrar este teorema, caractericemos los puntos críticos:

Teorema 6 Sea $f : S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x) = (a(x), b(x)) = (\langle Ax, x \rangle, \langle Bx, x \rangle)$$

donde A y B son dos matrices simétricas de $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{R} , y \langle, \rangle es el producto interior usual de \mathbb{R}^{n+1} y S^n está dada por la ecuación $\langle x, x \rangle = 1$. Entonces

Un punto $x \in S^n$ es un punto crítico de f

$$\Leftrightarrow$$

x es un vector propio de una matriz de la forma

$$A_\theta = \cos(\theta)A + \sin(\theta)B$$

para algún ángulo θ . Más aún: si μ es el valor propio de A_θ asociado a x , entonces la proyección de $f(x)$ sobre el vector unitario $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ es igual a μ .

Prueba. Sea $x \in S^n$ un punto crítico de f .

Entonces el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \nabla a(x) \\ \nabla b(x) \\ 2x \end{pmatrix}$$

es menor que tres.

Esto es equivalente a decir que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} Ax \\ Bx \\ x \end{pmatrix}$$

es menor que tres.

Esto sucede si y solamente si los tres vectores renglón

$$Ax$$

$$Bx$$

$$x$$

son linealmente dependientes, en otras palabras, si existen tres números reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ no todos cero, tales que

$$\lambda_1 Ax + \lambda_2 Bx + \lambda_3 x = 0$$

Ahora bien, no puede darse el caso de que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pues esto implica que

$$\lambda_3 x = 0$$

pero x es unitario, de modo que entonces $\lambda_3 = 0$ lo cual entra en contradicción con el hecho de que no todos eran cero.

Como el vector (λ_1, λ_2) no es cero, podemos normalizarlo, y encontrar un ángulo θ tal que

$$(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}(\lambda_1, \lambda_2)$$

Usando lo anterior la ecuación que expresa la dependencia lineal entre Ax , Bx y x puede escribirse como

$$(\cos(\theta)A + \sin(\theta)B)x = \mu x$$

donde

$$\mu = \frac{-\lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$$

Finalmente, la proyección de $f(x) = (\langle Ax, x \rangle, \langle Bx, x \rangle)$ sobre el vector $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ es igual a

$$\cos(\theta) \langle Ax, x \rangle + \sin(\theta) \langle Bx, x \rangle = \langle (\cos(\theta)A + \sin(\theta)B)x, x \rangle = \langle \mu x, x \rangle = \mu$$

Ahora veamos un resultado breve pero necesario

Lema Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} \beta \sin(\theta) & \cos(\theta) + \alpha \sin(\theta) \\ \cos(\theta) + \alpha \sin(\theta) & -\beta \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

son distintos de cero cuando $\beta \neq 0$

Prueba. Sea μ un valor propio de esta matriz. Por ese hecho, μ debe ser una raíz del polinomio característico

$$(\beta \sin(\theta) - \mu)(-\beta \sin(\theta) - \mu) - (\cos(\theta) + \alpha \sin(\theta))^2 = 0$$

Simplificando queda

$$-(\beta^2 \sin^2(\theta) - \mu^2) - (\cos(\theta) + \alpha \sin(\theta))^2 = 0$$

Despejando μ queda

$$\mu^2 = \beta^2 \sin^2(\theta) + (\cos(\theta) + \alpha \sin(\theta))^2$$

De donde se sigue que μ no puede ser cero.

Ahora vamos con la demostración del teorema de la Forma Normal (el teorema 5).

Sea Σ el conjunto de puntos críticos de $f(x, u, v) = (q_1(x) + 2uv, q_2(x) + \beta(u^2 - v^2) + 2\alpha uv)$. Supongamos que

$$q_1(x) = \langle Ax, x \rangle$$

$$q_2(x) = \langle Bx, x \rangle$$

con A, B matrices simétricas de $n \times n$.

Sean

$$g_1(u, v) = 2uv$$

$$g_2(u, v) = \beta(u^2 - v^2) + 2\alpha uv$$

Las matrices simétricas asociadas a g_1 y g_2 son

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

respectivamente.

Ahora bien, como las matrices asociadas a las cuádricas

$$q_1 + g_1$$

$$q_2 + g_2$$

son

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

entonces los puntos críticos de f son los vectores unitarios (x, u, v) tales que

* x cumple la ecuación

$$(\cos(\theta)A + \operatorname{sen}(\theta)B)x = \mu x$$

* $w = (u, v)$ cumple

$$(\cos(\theta)C + \operatorname{sen}(\theta)D)w = \mu w$$

Necesitamos describir los conjuntos Σ y $f(\Sigma)$. Hay tres casos a considerar:

a) Cuando $x = 0$.

En este caso w es un punto crítico de la función

$$g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$$

La imagen de los puntos críticos de f de la forma $(0, w)$ bajo f está contenida en el conjunto discriminante de g .

b) Cuando $w = 0$.

En este caso x es un punto crítico de la función

$$q(x) = (q_1(x), q_2(x))$$

La imagen de los puntos críticos de f de la forma $(x, 0)$ bajo f está contenida en el conjunto discriminante de q .

c) Cuando $z \neq 0$ y $w \neq 0$ En este caso podemos expresar a (x, w) como combinación lineal de un punto crítico de q y un punto crítico de g .

$$(x, w) = \|x\| \left(\frac{x}{\|x\|}, 0 \right) + \|w\| \left(0, \frac{w}{\|w\|} \right)$$

¿Qué podemos decir de la imagen de (x, w) bajo f ? Tenemos la igualdad

$$f(x, w) = q(x) + g(w)$$

Ya que q y g son homogéneas de segundo grado

$$q(x) + g(x) = \|x\|^2 q \left(\frac{x}{\|x\|} \right) + \|w\|^2 g \left(\frac{w}{\|w\|} \right)$$

Entonces $f(x, w)$ pertenece al segmento de recta que une $q \left(\frac{x}{\|x\|} \right)$ con $g \left(\frac{w}{\|w\|} \right)$. Ahora bien, tomemos en cuenta que tanto x como w son vectores propios correspondientes aun mismo valor propio μ (aunque relacionados con matrices diferentes), aplicando el teorema 6 resulta que la recta que une $q \left(\frac{x}{\|x\|} \right)$ con $g \left(\frac{w}{\|w\|} \right)$ es una recta perpendicular al vector $(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$, y la distancia de dicha recta al origen es $|\mu|$. Se puede ver que si $\beta \neq 0$ entonces $\mu \neq 0$ (en esto no importa el valor de α). Por lo anterior, la recta no pasa por el origen, y tampoco $f(\Sigma)$.

En conclusión:

Podemos describir el conjunto de valores críticos de $f = q + g$ como la unión de

- a) los valores críticos de q
- b) los valores críticos de g
- c) segmentos de recta que unen algunos valores criticos de q con algunos valores críticos de g

Sabemos que el cero no pertenece a ninguno de los conjuntos anteriores, aunque variemos $\beta > 0$ hasta que tome el valor de 1. También podemos variar α hasta cero sin violar la condición de suavidad.

Por lo tanto el teorema 5 queda demostrado.

Capítulo 2

¿Cuándo una variedad es intersección completa de cuádricas?

2.1. Intersecciones completas compactas

En este capítulo vamos a demostrar el teorema siguiente:

Teorema 7 *Sea M una variedad suave y compacta. Son equivalentes:*

- a) M se puede encajar con haz normal trivial en algún espacio euclideo.
- b) M se puede realizar como intersección completa en algún espacio euclideo.
- c) M se puede realizar como intersección transversal de cuádricas no degeneradas en algún espacio euclideo.

Recordemos algunas definiciones.

Definición *Se dice que un haz vectorial τ es establemente trivial si su suma de Whitney $\tau \oplus \epsilon$ con un haz trivial ϵ es trivial.*

Definición *Se dice que una variedad M es establemente paralelizable si su haz tangente es establemente trivial.*

En otras palabras, una variedad es establemente paralelizable si se puede encajar con haz normal trivial en un espacio euclideo de dimensión suficientemente grande.

Como resultado de la investigación realizada acerca de cuáles variedades pueden ser representadas como intersección completa de cuádricas, obtuvimos el teorema 7

Observaciones

- * Las implicaciones (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a) son inmediatas.
- * El espacio euclideo al que se hace referencia en las diferentes afirmaciones no necesariamente es el mismo. De hecho, existen ejemplos donde el espacio euclideo de (b) necesariamente tiene dimensión mayor que el espacio euclideo correspondiente de (a).
- * El teorema sigue siendo válido si cambiamos la condición de que M sea intersección completa por la condición equivalente de que M sea intersección completa suave, i.e. la imagen inversa de un punto regular bajo una función suave entre espacios euclideos.

La demostración que ofrecemos a continuación, está inspirada en el camino que se siguió históricamente para la demostración del teorema de Nash-Tognoli. De acuerdo con Bochnak, Coste y Roy [2], los pasos fueron los siguientes:

1. M es difeomorfa a una componente de una variedad algebraica en algún \mathbb{R}^m (Ver Nash, [13]).
2. Si M es frontera de una variedad compacta, entonces es difeomorfa a una variedad algebraica en algún \mathbb{R}^m (Ver Wallace, [20])
3. M es cobordante a una variedad algebraica V . (Esto se sigue del cálculo del anillo de cobordismo hecho por Thom [17], y del hecho de que se pueden dar generadores explícitos con variedades algebraicas).

4. M es difeomorfa a M_1 tal que $M_1 \cup V$ es una variedad algebraica en algún \mathbb{R}^m . Esto se sigue de una versión relativa de los primeros dos pasos (Ver Tognoli [18]).
5. M es difeomorfa a una variedad algebraica en algún \mathbb{R}^m (Tognoli [18]).

2.1.1. (a) implica (b)

Para demostrar que (a) \Rightarrow (b) vamos a seguir los pasos siguientes:

- i) M es difeomorfa a una unión de componentes de una intersección completa en algún espacio euclideo. (Esto se debe a Seifert [15]).
- ii) Si M es frontera de alguna variedad compacta paralelizable, entonces es difeomorfa a una intersección completa en algún espacio euclideo.
- iii) M es cobordante enmarcada a una variedad V , la cual, con un reenmarcamiento posiblemente diferente, es frontera de una variedad enmarcada compacta. Aplicando (ii) podemos suponer que V es una intersección completa. (En este paso utilizamos el teorema de Kahn-Priddy, ver [9]).
- iv) M es difeomorfa a M_1 tal que $M_1 \sqcup V$ es intersección completa.
- v) M es difeomorfa a una intersección completa en algún espacio euclideo.

Comenzamos.

Paso (i) Consideremos M como encajada con haz normal trivial en alguna esfera euclidea S^{n+k} . Entonces existe una función diferenciable

$$f : U \subset S^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

definida en una vecindad tubular cerrada U de M , y tal que el cero sea un valor regular de f y más aún, que $f^{-1}(0) = M$. Extendamos f a una función suave definida en toda la esfera S^{n+k} , y aproximémosla por una función polinomial $P : S^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ que tenga al cero como valor regular. Entonces $P^{-1}(0)$ es una intersección completa y $P^{-1}(0) \cap U$ es unión de componentes de $P^{-1}(0)$, y es difeomorfa a M si la aproximación es suficientemente buena.

Observación *En general no es posible obtener P tal que $P^{-1}(0)$ sea difeomorfa a M porque en este caso, el elemento de $\pi_{n+k}(S^{n+k})$ definido por M vía la construcción de Pontryagin, debe ser una suspensión. Akbulut y King [1] dieron un ejemplo específico de este hecho.*

Paso (ii) Si M es la frontera de una variedad paralelizable Q , entonces podemos construir la variedad doble de Q , a la cual llamaremos N . Entonces podemos suponer que N está encajada con haz normal trivial en alguna esfera euclidea S^m de modo que la intersección de N con el ecuador S^{m-1} sea transversal y sea precisamente M . Aplicando la prueba de (i) a N , obtenemos una intersección completa $Z = \widehat{N} \cup W$, donde \widehat{N} es difeomorfa a N e intersecta transversalmente a S^{m-1} en M_1 , la cual a su vez es difeomorfa a M . Ahora consideremos una función suave en S^m , que valga x_{m+1} en una vecindad de \widehat{N} , y en W tome un valor constante, positivo y suficientemente grande. Aproximemos esta función suave por una función polinomial P . Entonces $P^{-1}(0) \cap Z$ es una intersección completa difeomorfa a M .

Paso (iii) Lo enunciaremos como un teorema, porque no lo hemos visto en la literatura.

Teorema 8 *Si M es una variedad enmarcada, entonces M es cobordante enmarcada a otra variedad V tal que V es la frontera de alguna variedad paralelizable compacta.*

Prueba. Ya que los grupos de cobordismo enmarcado son finitos, la clase de cobordismo enmarcado de M es la suma de un elemento de torsión dos y un elemento de torsión impar. Es claro que basta probar el resultado para cada sumando. Para el elemento de torsión dos, este resultado es consecuencia del teorema de Kahn-Priddy, y lo demostró N. Ray (ver [14]). Si la clase de cobordismo enmarcado de M es un elemento de torsión impar, entonces es el doble de otra clase. Entonces M es cobordante enmarcada a la unión $N_1 \cup N_2$ de dos copias de la misma variedad enmarcada. Pero si invertimos la orientación en el enmarcamiento de una de las copias, vemos que $N_1 \cup N_2$ con un enmarcamiento diferente, es cobordante enmarcada a cero. De aquí se sigue el resultado siguiente

Teorema 9 *Para toda $n > 0$ existe una variedad enmarcada (V, F) tal que ella, con todos sus posibles reenmarcamientos (V, G) , representa a todas las clases de cobordismo enmarcado en dimensión n .*

Paso (iv) Como en (ii), $M \cup V$ es la frontera de una variedad enmarcada cuyo doble llamaremos N . También podemos suponer que N está enmarcada con haz normal trivial en alguna esfera euclídeana S^m de modo que la intersección de N con el ecuador S^{m-1} es transversal y es $M \cup V$ donde V es una intersección completa que está dada por los polinomios independientes P_1, \dots, P_k con $k = m - 1 - n$. Ahora repitamos (i) y (ii) con la condición adicional de que V no cambie durante el proceso. Para ello, comencemos con una función suave

$$f : U \subset S^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

definida en una vecindad tubular cerrada U de N tal que $0 \in \mathbb{R}^k$ sea un valor regular de f , y que $f^{-1}(0) = N$. Extendámosla a una función suave

$$F : S^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Ya que F se anula en V , podemos expresarla como una suma

$$F(x) = \sum P_i(x)g_i(x)$$

donde cada $g_i : S^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es suave.

Aproximando cada g_i por una transformación polinomial h_i obtenemos una transformación polinomial

$$P : S^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$P(x) = \sum P_i(x)h_i(x)$$

tal que $Z = P^{-1}(0)$ es una intersección completa, y $Z = \widehat{N} \cup W$. Si las aproximaciones son suficientemente buenas, entonces \widehat{N} es difeomorfa a N , y $\widehat{N} \cap \mathbb{R}^{m-1} = M_1 \cup V$ donde M_1 es difeomorfa a M . Ahora consideremos, como en (ii), una función suave

$$g : S^m \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

- * En una vecindad de \widehat{N} sea igual a x_{m+1} , y
- * En W , sea igual a una constante positiva suficientemente grande.

Como g se anula en V , podemos expresarla como una suma

$$g(x) = \sum P_i(x)u_i(x)$$

donde las funciones $u_i : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ son suaves.

Aproximando cada u_i por una función polinomial v_i , obtenemos una función polinomial

$$h : S^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = \sum P_i(x)v_i(x)$$

Ahora consideremos el conjunto definido por las ecuaciones

$$P_1(x) = 0$$

...

$$P_k(x) = 0$$

$$h(x) = 0$$

Este conjunto es una intersección completa, y es de la forma $M_2 \cup V$, con M_2 difeomorfa a M .

Paso (v) Ahora estamos en una situación en la cual $M_2 \cup V$ y V son intersecciones completas en algún \mathbb{R}^{n+k} , con ecuaciones polinomiales

$$f_1 = 0, \dots, f_k = 0$$

$$g_1 = 0, \dots, g_k = 0$$

respectivamente. Para ver que M_2 también es intersección completa, subamos una dimensión y enviemos V al infinito; es decir, en \mathbb{R}^{n+k+1} consideremos los polinomios

$$f_1 = 0$$

...

$$f_k = 0$$

$$(x_{n+k+1})(\sum g_i^2) - 1 = 0$$

Estos polinomios definen una intersección completa que es difeomorfa a M . Con esto terminamos la prueba de que (a) implica (b).

2.1.2. (b) implica (c)

Para probar que (b) \Rightarrow (c), consideremos una intersección completa definida por ciertos polinomios en \mathbb{R}^m . Si alguno de los polinomios tiene un término de grado mayor que dos, entonces contiene un producto de dos variables $x_i x_j$ no necesariamente diferentes. Introduzcamos una nueva variable y junto con una nueva ecuación $y = x_i x_j$, y en las otras ecuaciones sustituyamos el producto $x_i x_j$ por la nueva variable y . Así obtenemos un nuevo conjunto de polinomios, y otra manera de expresar a M como intersección completa. Procediendo de este modo podemos reducir el grado de todos los polinomios que definen a M , hasta que todos tengan un grado de dos (o menos). Cada una de estas ecuaciones define una cuádrica que puede ser degenerada (de hecho, para $m > 2$, es el caso de los polinomios añadidos). Sin embargo, siempre podemos suponer que alguna de las cuádricas no es degenerada, intersectando $M \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ con el paraboloido $x_{m+1} = \sum_{i=1}^m x_i^2$. Una vez que tenemos una cuádrica no degenerada, a esta ecuación podemos añadirle pequeños múltiplos de las otras ecuaciones, para obtener otro conjunto de ecuaciones de segundo grado que represente cuádricas no degeneradas. Con esto terminamos la prueba del teorema 7.

2.2. Intersecciones completas de la esfera con otras cuádricas

Teorema 10 *Sea M una variedad suave compacta. Son equivalentes*

- a) M es la frontera de una variedad compacta paralelizable.
- b) M es difeomorfa a una intersección completa de hipersuperficies algebraicas, una de las cuales es compacta, en algún espacio euclideo.
- c) M es difeomorfa a una intersección transversal de cuádricas no degeneradas, una de las cuales es una esfera, en algún espacio euclideo.

Este teorema ya casi está demostrado, pues del paso (ii) de la prueba del teorema anterior, se muestra que la proposición (a) \Rightarrow (b) es válida dentro de la hipersuperficie compacta $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Para reducir las ecuaciones de M hasta grado dos, sin salirnos de la esfera unitaria, modificamos el procedimiento anterior añadiendo en cada caso una variable y junto con una ecuación $y = \epsilon x_i x_j$

- * Si $\epsilon = 0$, las ecuaciones que teníamos, más la ecuación de la esfera unitaria S^{m+1} , más la ecuación añadida $y = 0$, siguen definiendo a la misma M .
- * Si ϵ es suficientemente pequeña, entonces estas ecuaciones definen una variedad difeomorfa a M , la cual tiene otras ecuaciones, tales que el grado de algunos de sus monomios se han reducido, y esto se puede repetir hasta que todos los polinomios tengan grado menor o igual a dos.

En este caso, obtener cuádricas no degeneradas es más simple, pues la esfera en sí misma es una cuádrica no degenerada. Con esto probamos que (a) implica (c).

Para probar que (b) implica (a), obsérvese que si alguna hipersuperficie Q es compacta, entonces es frontera de una región compacta U de \mathbb{R}^m . Entonces podemos suponer que el resto de los polinomios que definen a M tienen al cero como valor regular, y que definen en U una variedad paralelizable con frontera M .

Finalmente (b) implica (c) es trivial.

Observaciones

- * Según H. King [10], la primera persona que observó que cualquier variedad algebraica puede expresarse por polinomios de grado a lo más dos, fue William Thurston.
- * El teorema 10 implica que el paso (v) de la prueba del teorema 7 no puede realizarse en la esfera, no solamente porque no hay infinito al cual enviar a V , sino porque existen variedades paralelizables que no son frontera de ninguna variedad paralelizable. Los demás pasos de la prueba los pudimos realizar de manera más sencilla en la esfera, porque la aproximación mediante polinomios es más simple cuando estamos trabajando adentro de un conjunto compacto.

2.3. La prueba de Akbulut-King

Existe otra prueba del teorema 7 sugerida por Akbulut y King. A continuación la reconstruiremos, llenando los detalles a nuestro modo.

- I) Constrúyase una transformación suave F definida en S^m , que tenga al cero como valor regular, y tal que $F^{-1}(0) = M \cup X$, como en (i).

- II) Ya que X es en sí misma establemente paralelizable, es la frontera de una variedad compacta.
- III) Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que X es una variedad algebraica. Para ver esto, sea N el doble de la variedad cuya frontera es X , la cual podemos suponer encajada en el mismo espacio euclideo, y de modo que su intersección con la esfera unitaria sea X . Aproximando N por una variedad algebraica ϵ -isotópica \widehat{N} , e intersectándola con S^m , obtenemos \widehat{X} , la cual es algebraica, y puede enviarse a X mediante un difeomorfismo de S^m que restringido a M coincide con la identidad.
- IV) Obténgase una intersección completa $\widehat{M} \cup X$ con \widehat{M} difeomorfa a M . ¿Cómo hacerlo? Sabemos que F se anula en X . Entonces F puede expresarse como una combinación de los polinomios que definen a X , con funciones coeficientes suaves. (Esto se puede hacer aún en el caso de que X no sea intersección completa, trabajando localmente y luego pegando los resultados usando particiones de la unidad). Entonces aproximemos las funciones coeficientes con polinomios, para obtener una intersección completa $\widehat{M} \cup X$ con \widehat{M} difeomorfa a M .
- V) Encajando todo en una dimensión mayor, podemos enviar X al infinito, y así obtenemos una intersección completa difeomorfa a M , como en la prueba de (v).

Observaciones

- * La semejanza entre (v) y (V) no es coincidencia. Nosotros retomamos la idea de Akbulut y King porque era lo que nos faltaba para terminar nuestra demostración.
- * Akbulut y King se propusieron hacer todo en un espacio euclideo. Eso posibilitó que el paso (II) fuera más sencillo. Nosotros preferimos trabajar lo más posible dentro de la esfera unitaria para evitar problemas al aproximar funciones mediante polinomios en un conjunto que no fuera compacto.

Capítulo 3

Resultados sobre la imagen directa de la esfera

3.1. Una extensión del Teorema de Toeplitz-Hausdorff

Sea H un espacio de Hilbert sobre el campo de los números complejos. Sea $f : H \rightarrow \mathbb{C}$ una función de la forma

$$f(z) = \langle Az, z \rangle + \langle \alpha, z \rangle + \langle z, \beta \rangle + c$$

donde A es un operador lineal que va de H en H , $\alpha, \beta \in H$, \langle, \rangle es el producto hermitiano, y $c \in \mathbb{C}$. Sea $S_r(p)$ la esfera de radio r con centro en p .

$$S_r(p) = \{z \in H : \langle z - p, z - p \rangle = r^2\}$$

En esta sección nos proponemos demostrar el resultado siguiente:

Teorema 11 *Si H tiene dimensión mayor que uno, entonces para toda $p \in H$ y para toda $r > 0$, la imagen de $S_r(p)$ bajo f es un subconjunto convexo de \mathbb{C} .*

Observación *Cuando la dimensión de H es uno, $f(S_1(0))$ es una curva (una elipse, para ser más exactos). Solamente sería un conjunto convexo en casos degenerados, cuando la elipse se contrae a un segmento de recta o a un punto.*

Teorema 12 *Si H tiene dimensión mayor que uno, entonces para toda $p \in H$ y para toda $r > 0$, el conjunto de los números complejos de la forma $\langle Az, z \rangle$ variando $z \in S_r(p)$, es un subconjunto convexo de \mathbb{C} .*

Observación *Cuando p es el cero de H y $r = 1$ éste es el teorema de Toeplitz-Hausdorff en su versión clásica (véase [5])*

Demostración del teorema 11

Vamos a utilizar el hecho siguiente

Un subconjunto del plano es convexo \Leftrightarrow su intersección con cualquier recta es un conjunto conexo

Por lo tanto, basta probar que para cualquier línea $l \subset \mathbb{C}$, el conjunto $f^{-1}(l) \cap S$ es conexo (donde S es la esfera unitaria centrada en el origen), porque en tal caso, su imagen $l \cap f(S)$ será conexa, y por lo tanto $f(S)$ será un conjunto convexo. Componiendo con una rotación, podemos suponer que la recta l es vertical, por lo que $f^{-1}(l)$ está dada por una ecuación de la forma

$$\langle Mz, z \rangle + \langle \gamma, z \rangle + \overline{\langle \gamma, z \rangle} + d = 0$$

donde M es un operador hermitiano, $\gamma \in H$ y d es un número real. Por lo tanto, para demostrar nuestro teorema basta probar el siguiente

Lema *Sea $g : H \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$g(z) = \langle Mz, z \rangle + \langle \gamma, z \rangle + \overline{\langle \gamma, z \rangle} + d$$

Si H tiene dimensión mayor que uno, entonces $g^{-1}(0) \cap S$ es conexo.

Para probar este lema, es suficiente considerar el caso particular en el que H tiene dimensión dos, pues en el caso general, dados dos puntos en $g^{-1}(0) \cap S$ podemos considerar la intersección como un subespacio bidimensional que los contenga, y la función restringida a este subespacio tiene de nuevo esta forma. Aplicando el caso particular, obtenemos un subconjunto conexo de $g^{-1}(0) \cap S$ que contiene ambos puntos, lo cual es suficiente para ver que $g^{-1}(0) \cap S$ es conexo. Más aún, ya que cualquier espacio de Hilbert de dimensión compleja dos es isométrico a \mathbb{C}^2 , podemos suponer en adelante que $H = \mathbb{C}^2$.

Ahora supondremos que g no es idénticamente cero, y que $g^{-1}(0) \cap S \neq \emptyset$, pues en tal caso no habría nada que probar. Mediante un cambio de coordenadas podemos suponer que M está diagonalizado. Por lo tanto g es de la forma

$$g(z) = \lambda_1(x_1^2 + y_1^2) + \lambda_2(x_2^2 + y_2^2) + a_1x_1 + b_1y_1 + a_2x_2 + b_2y_2 + c$$

donde las variables y los coeficientes son reales. Mediante rotaciones apropiadas en los planos X_1Y_1 y X_2Y_2 podemos suponer que las b_j son iguales a cero. Entonces $g^{-1}(0) \cap S$ está determinada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_1^2 + y_1^2) + \lambda_2(x_2^2 + y_2^2) + a_1x_1 + a_2x_2 + c \\ x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1 \end{aligned}$$

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la ecuación

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1^2 + y_1^2) + a_1x_1 + a_2x_2 + c + \lambda_2 = 0$$

Sea D la intersección de Σ con la bola unitaria de \mathbb{R}^3 . Claramente $D \neq \emptyset$.

Sean

$$\phi_+, \phi_- : D \rightarrow \mathbb{R}$$

definidas por las ecuaciones

$$\phi_{\pm}(x_1, y_1, x_2) = \pm \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2}$$

Podemos identificar $g^{-1}(0) \cap S$ con $\Gamma_- \cup \Gamma_+$, donde

$$\Gamma_{\pm} = \{(x_1, y_1, x_2, \phi_{\pm}(x_1, y_1, x_2)) : (x_1, y_1, x_2) \in D\}$$

Claramente Γ_+ y Γ_- son homeomorfas a D , y $\Gamma_- \cap \Gamma_+ = D \cap S^2$ donde S^2 es la esfera unitaria de \mathbb{R}^3 .

Para ver que $g^{-1}(0) \cap S$ es conexo, es suficiente probar que

1. D es conexo
2. $D \cap S^2 \neq \emptyset$

Consideraremos tres casos

- * Σ es un cilindro o una línea. Esto sucede si $a_2 = 0$.
- * Σ es un plano. Esto sucede si $\lambda_1 = \lambda_2$.
- * Σ es un paraboloide de revolución. Esto sucede cuando a_2 es distinta de cero y λ_1 es distinta de λ_2 .

En los tres casos se cumple lo que queremos demostrar, y no es difícil convencerse de ello.

¿Qué pasa en el caso real?

En la versión clásica del teorema de Toeplitz-Hausdorff, la función $f(z) = \langle Az, z \rangle$ puede considerarse una pareja de funciones cuadráticas reales de una clase particular. ¿Será cierto el resultado para cualquier pareja de funciones cuadráticas definidas en un espacio de Hilbert real?

Sea H un espacio de Hilbert real. Sean A_1, A_2 dos operadores en H . Sea

$$Q : H \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida por

$$Q(x) = (\langle A_1x, x \rangle, \langle A_2x, x \rangle)$$

y sea S la esfera unitaria en H .

Teorema 13 Si H tiene dimensión diferente de dos, entonces $Q(S)$ es un conjunto convexo.

Este teorema se debe esencialmente a Brickman [3]. Él supuso que tanto A_1 como A_2 eran operadores simétricos, pero de su resultado, el nuestro se sigue. A continuación daremos una prueba utilizando el mismo procedimiento que antes, el cual será más simple en los detalles, pero requiere algunos cambios. Primero consideraremos el caso en el que la dimensión de H es tres, pues es falso en dimensión dos. Igual que antes, la veracidad del resultado en una dimensión implica que vale en dimensiones mayores. Para la prueba en el caso de dimensión tres, mostraremos que la intersección de $Q(S)$ con cualquier línea l en \mathbb{R}^3 es conexa. Nótese que $Q^{-1}(l) \cap S$ no necesariamente es conexa, pero es invariante bajo la acción antipodal en S . Nótese también que Q restringida a S se factoriza a través de la proyección π de la esfera de dimensión dos en el espacio proyectivo real de dimensión dos. La imagen de $Q^{-1}(l) \cap S$ bajo π es una cónica proyectiva (posiblemente degenerada), la cual siempre es conexa. Entonces su imagen bajo Q en \mathbb{R}^2 también es conexa, y coincide con la de $Q(S) \cap l$.

Observación *La extensión de este teorema a la imagen de una esfera cualquiera es falsa. Sea H_1 un espacio de Hilbert real, y sea $H = \mathbb{R} \oplus H_1$. Sean A_1, A_2 las dos proyecciones de H sobre \mathbb{R} y H_1 respectivamente. Sea $Q : H \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por*

$$Q(t, x) = (t^2, \langle x, x \rangle)$$

Se puede ver que la imagen de la esfera de radio uno, con centro en el punto $(1, 0)$ es un arco parabólico, el cual no es un conjunto convexo. Por lo tanto, la versión real del teorema 12 es falsa. En cierto sentido, el teorema de Toeplitz-Hausdorff es más que un resultado sobre funciones cuadráticas. La extensión que obtuvimos depende de que el espacio de Hilbert en cuestión, tenga estructura compleja.

3.2. El conjunto discriminante

La conclusión del teorema de Toeplitz-Hausdorff se centra en la convexidad de la imagen directa de la esfera unitaria bajo una función de la forma $f(z) = \langle Az, z \rangle$. Vamos a tratar de decir algo más sobre la imagen de dicho conjunto.

Definición *El conjunto discriminante de una función f suave, es la imagen directa, bjo f , del conjunto de puntos críticos de f .*

El resultado siguiente es un corolario del teorema 12.

Teorema 14 *Sea $n > 1$. Sea A una matriz de $n \times n$ con coeficientes complejos. Sea $f : S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \langle Az, z \rangle$. Entonces la imagen de la esfera unitaria S^{2n-1} bajo f es la envoltura convexa del conjunto discriminante de f .*

Vamos a argumentar brevemente cada una de las contenciones.

\supseteq

La envoltura convexa del conjunto discriminante de f está contenida en la envoltura convexa de la imagen de la esfera unitaria S^{2n-1} , pero gracias al teorema 12 este resulta un conjunto convexo, es decir, es igual a su envoltura convexa, de donde se sigue esta contención.

\subseteq

Tenemos que la imagen de la esfera unitaria es un conjunto convexo y compacto. Tomemos un punto $z_0 \in S^{2n-1}$. Si z_0 pertenece a la imagen inversa de un valor crítico de f , evidentemente $f(z_0)$ pertenece a la envoltura convexa del conjunto discriminante de f . Si z_0 pertenece a la imagen inversa de un valor regular de f , entonces la diferencial de f en z_0 tiene rango máximo, y por lo tanto la imagen de una vecindad abierta de z_0 será una vecindad abierta de $f(z_0)$. Por lo tanto $f(z_0)$ pertenece a una de las componentes conexas del complemento del conjunto discriminante de f , pero no puede pertenecer a la componente no acotada, entonces está en la envoltura convexa del conjunto discriminante de f .

Ahora vamos a tratar de responder otras preguntas: ¿Qué podemos decir del conjunto discriminante de f ? ¿Qué podemos decir del conjunto de puntos críticos de f ? ¿Cuándo el cero es un valor regular de f ? En caso de que el cero sea un valor regular, ¿Cuál es la imagen inversa del cero? Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso el conjunto de puntos críticos lo conforma un toro, el conjunto discriminante es una circunferencia, y la imagen inversa del cero la forman dos circunferencias.

Para justificar la afirmación anterior, así como para abordar otros ejemplos, utilizaremos el resultado siguiente:

Teorema 15 Sea $f : S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Sean u, v las partes real e imaginaria de f respectivamente. Sean x, y los vectores conformados por partes real e imaginaria del vector complejo $z \in S^{2n-1}$. Sea \bar{f} la composición de f seguida de la conjugación en \mathbb{C} . Sea $g(z) = \langle z, z \rangle$. Entonces el rango de la matriz cuyo primer renglón es el gradiente de u , cuyo segundo renglón es el gradiente de v , y cuyo tercer renglón es el gradiente de g , (con respecto a las variables x_j ó y_j) es igual al rango de la matriz cuyo primer renglón es el gradiente de f , cuyo segundo renglón es el gradiente de \bar{f} , y cuyo tercer renglón es el gradiente de g (con respecto a las variables z_j ó \bar{z}_j).

Prueba. Como el rango de una matriz se preserva bajo operaciones elementales, basta demostrar que podemos pasar de una a otra mediante dichas operaciones. Consideremos una submatriz de la forma

$$B = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

Utilizando las ecuaciones

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

Se deducen las ecuaciones

$$z_x = 1$$

$$z_y = i$$

$$\bar{z}_x = 1$$

$$\bar{z}_y = -i$$

Por otra parte, aplicando la regla de la cadena, encontramos que

$$u_x = u_z z_x + u_{\bar{z}} \bar{z}_x$$

$$u_y = u_z z_y + u_{\bar{z}} \bar{z}_y$$

y otras ecuaciones análogas para v_x y v_y . Sustituyendo en la matriz B obtenemos

$$\begin{pmatrix} u_z + u_{\bar{z}} & iu_z - iu_{\bar{z}} \\ v_z + v_{\bar{z}} & iv_z - iv_{\bar{z}} \\ z + \bar{z} & \bar{z} - z \end{pmatrix}$$

Dividiendo la segunda columna entre i , reemplazando la primera columna por el promedio de ambas, y luego restando este resultado a la segunda columna, y cambiándole el signo, obtenemos

$$\begin{pmatrix} u_z & u_{\bar{z}} \\ v_z & v_{\bar{z}} \\ \bar{z} & z \end{pmatrix}$$

Expresando u y v en términos de f y \bar{f}

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{f+\bar{f}}{2}\right)_z & \left(\frac{f+\bar{f}}{2}\right)_{\bar{z}} \\ \left(\frac{f-\bar{f}}{2i}\right)_z & \left(\frac{f-\bar{f}}{2i}\right)_{\bar{z}} \\ \bar{z} & z \end{pmatrix}$$

Multiplicando el primer renglón por 2 y el segundo por $2i$, reemplazando el primer renglón por el promedio del segundo y del primero, luego restandole el resultado al segundo renglón, y finalmente cambiándole el signo al segundo renglón, llegamos a a la submatriz

$$\begin{pmatrix} f_z & f_{\bar{z}} \\ \bar{f}_z & \bar{f}_{\bar{z}} \\ \bar{z} & z \end{pmatrix}$$

Como se pueden aplicar estas mismas operaciones en el mismo orden en todas las submatrices en cuestión, con esto queda demostrado el teorema.

Ahora apliquemos el resultado para identificar los puntos críticos de la función del ejemplo previo.

Sea

$$f(z) = \langle Az, z \rangle = \langle (z_2, 0), (z_1, z_2) \rangle = z_2 \bar{z}_1$$

Vamos a ver para cuáles parejas (z_1, z_2) se cumple que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & z_2 & \bar{z}_1 & 0 \\ \bar{z}_2 & 0 & 0 & z_1 \\ \bar{z}_1 & z_1 & \bar{z}_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

tiene rango menor que tres Como el punto (z_1, z_2) está en la esfera unitaria, al menos una de sus dos coordenadas es diferente de cero. De ahí que los primeros dos renglones sean diferentes de cero, y por la forma de la matriz, el rango sea al menos dos. Para que no tenga rango tres, se necesita que el tercer renglón sea combinación lineal de los dos primeros. Esto significa que se cumplen las ecuaciones

$$b\bar{z}_2 = \bar{z}_1$$

$$az_2 = z_1$$

$$a\bar{z}_1 = \bar{z}_2$$

$$bz_1 = z_2$$

Para algunos números complejos a, b . Se puede ver que necesariamente se satisfacen las ecuaciones

$$|a|^2 = 1$$

$$b = \bar{a}$$

$$|z_1|^2 = \frac{1}{2}$$

$$z_2 = bz_1$$

de donde se sigue que el conjunto de los puntos críticos de f es $S^1 \times S^1$. También se puede ver que la imagen de los puntos críticos (es decir, el conjunto discriminante) es la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ centrada en el origen. Por lo tanto el 0 es un valor regular de f . ¿Qué podemos decir de la imagen inversa del cero? Es el conjunto

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, z_1 \bar{z}_2 = 0\}$$

En otras palabras, es $S^1 \times S^0$.

Capítulo 4

El Teorema No Coaxial

4.1. Introducción

Sea n un entero mayor o igual que tres. Dada una partición de n en un número impar $k = 2l + 1$ de enteros positivos

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_{2l+1}$$

Sea ρ la k -ésima raíz de la unidad dada por $\rho = e^{\frac{2\pi}{k}i}$. Consideremos la configuración Λ de puntos en el plano complejo ρ^j con multiplicidad n_j , es decir

$$\Lambda = (\rho^1, \dots, \rho^1, \rho^2, \dots, \rho^2, \dots, \rho^k, \dots, \rho^k)$$

Donde ρ^j se repite n_j veces

Sean

s un entero no negativo

$$N = n + 2s$$

$$d_j = n_j + \cdots + n_{(j+l-1) \bmod (2l+1)}$$

Sea $Y = Y(\Lambda, s)$ la subvariedad de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^s$ dada por las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{2l+1} \rho^j \|x_j\|^2 + \sum_{q=1}^s w_q^2 = 0$$

$$\sum_{j=1}^{2l+1} \|x_j\|^2 + \sum_{q=1}^s |w_q|^2 = 1$$

Donde $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ y $w_q \in \mathbb{C}$.

Nos proponemos mostrar que estas variedades son sumas conexas de productos de esferas, e identificar cuáles son específicamente.

El principal teorema de esta sección es el Teorema No Coaxial, el cual, en el contexto anterior, establece que

Teorema 16 *Supongamos que $n > 0$ y $l + s > 1$. Si Y es de dimensión mayor o igual que dos. Entonces Y es difeomorfa a*

$$\#_{j=1}^{2l+1} (S^{d_j+s-1} \times S^{N-d_j+s-2})$$

El principal antecedente del Teorema No Coaxial es el Teorema de Intersección de Cuádricas (Coaxiales) de [11], resultado que tomamos como punto de partida para esta investigación, y que describe la topología de intersecciones de cuádricas en el caso fundamental de que $s = 0$ (salvo por algunos casos que describiremos más adelante). Para la demostración nos apoyaremos en varios resultados de [4], mismos que a continuación se enuncian.

Sean $m > d > 0$ dos enteros. Sea $k = m - d - 1$. Sean

$$\Lambda_i \in \mathbb{R}^k$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$$

A partir de Λ definimos $Z = Z(\Lambda)$ como el subconjunto de \mathbb{R}^m dado por el sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^m \Lambda_i x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 = 1$$

Así definida, puede que Z no sea una subvariedad. Para ello es necesario que se cumpla una cierta condición, misma que formulamos a continuación:

Para cada $I \subset \{1, \dots, m\}$, Λ_I denotará a la sucesión de Λ_i tales que $i \in I$.

Condición de Hiperbolicidad Débil

Si I tiene k elementos o menos, entonces el origen NO está en la envoltura convexa de ningún Λ_I

Notación adicional:

Supongamos que

$$\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$$

Entonces

$$\Lambda' = (\Lambda_1, \Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$$

denota a la sucesión finita obtenida al repetir Λ_1 como primer término a la sucesión finita original Λ . Si $Z = Z(\Lambda)$, entonces $Z' = Z(\Lambda')$. Más en general: Si $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ denota un vector de m enteros positivos, Λ^J denotará a la sucesión finita obtenida al repetir Λ_1 exactamente j_1 veces, Λ_2 exactamente j_2 veces, y así sucesivamente hasta repetir Λ_m exactamente j_m veces. En este contexto Z^J denota a $Z(\Lambda^J)$.

Teorema 17 (1.1 de [4]) *Sea Z simplemente conexa y de dimensión $d \geq 5$.*

Si Z es suma conexa de productos de esferas, entonces Z' también.

Teorema 18 (1.2 de [4]) *Sea Z simplemente conexa y de dimensión $d \geq 5$. Si se cumplen las condiciones siguientes*

* *Todos los grupos de homología de Z son libres*

* *Abajo de la dimensión tope, toda clase de homología puede representarse por esferas encajadas en $Z \times I$ con haz normal trivial*

Entonces Z es suma conexa de productos de esferas, y también Z^J para cualquier J

Teorema 19 (1.3 de [4]) *Supongamos que Z es de dimensión $2c$ y $(c-1)$ -conexa. Entonces:*

1) *Si $c \geq 3$, Z y cualquier Z^J son sumas conexas de productos de esferas.*

2) *Si $c = 2$, cualquier Z^J de dimensión al menos 5 es una suma conexa de productos de esferas.*

Teorema 20 (1.4 de [4]) *Supongamos que Z es de dimensión $2c + 1$ y $(c-1)$ -conexa, con $c \geq 2$, y supongamos que todos los grupos de homología de Z son libres. Entonces:*

(i) *Z es una suma conexa de haces de esferas sobre esferas, (los cuales son establemente triviales) y si $J \neq \underline{1}$ entonces Z^J es una suma conexa de productos de esferas.*

(ii) *Si c es impar o si $c = 2, 6$, entonces Z es una suma conexa de productos de esferas.*

Teorema 21 (A1 de [4]) *Sea Q una variedad con frontera que satisface:*

a) *Q es de dimensión $d + 1 \geq 6$*

b) *Q es simplemente conexa con frontera simplemente conexa*

c) *Para toda i , $H_i(Q)$ es libre, y para $i \geq d - 1$ $H_i(Q) = 0$*

d) *Para toda i existe una colección de esferas $\{S_j^i\}$ tal que están encajadas con haz normal trivial en Q , son ajenas entre sí y representan una base $\{\alpha_{i,j}\}$ de $H_i(Q)$*

Entonces Q es difeomorfa a una suma conexa a lo largo de la frontera

$$\coprod_{i=1}^k (S^{p_i} \times D^{d-p_i+1})$$

y por lo tanto ∂Q es difeomorfa a

$$\#_{i=1}^k (S^{p_i} \times S^{d-p_i})$$

El plan para demostrar el Teorema 16 es el siguiente:

- * Completar la demostración del *Teorema Coaxial* para los casos restantes que quedaban excluidos en su versión original.
- * Mostrar que si tenemos una configuración básica Λ , y si $Y(\Lambda, s)$ cumple el teorema, entonces $Y(\Lambda, s + 1)$ también. *Teoremas de las Configuraciones Básicas*
- * Mostrar que si una configuración Λ' se obtiene de una configuración Λ aumentando la multiplicidad de un vértice, y si $Y(\Lambda, s)$ cumple el Teorema No Coaxial, entonces $Y(\Lambda', s)$ también. *Construcción $Y \rightarrow Y'$* .
- * Mostrar que si $Y(\Lambda, s)$ cumple el Teorema No Coaxial, entonces también lo cumple $Y(\Lambda, s + 1)$. *Construcción $Y \rightarrow \tilde{Y}$* .
- * Demostrar el Teorema No Coaxial para las Configuraciones Triangulares $n = n_1 + n_2 + n_3$
- * Demostrar el Teorema No Coaxial para las Configuraciones Pentagonales $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$
- * Demostrar el Teorema No Coaxial para las Configuraciones de 7 o más lados.

4.2. Los Casos Restantes del Teorema Coaxial

La demostración original del Teorema Coaxial, (ver [11]) hace uso del Teorema del H-cobordismo, y por lo tanto requiere hipótesis que excluyen algunos casos especiales. Corresponden a configuraciones de cinco o más lados para las cuales la variedad no sea simplemente conexa o no sea de dimensión al menos cinco. Específicamente son los siguientes.

- a) La variedad de dimensión 2 con configuración pentagonal $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$. Este caso se demuestra calculando la característica de Euler.
- b) La variedad de dimensión 3 con configuración pentagonal $2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$, es decir, Z' si Z es la del caso anterior. En este caso se calcula la característica de Euler de Z_+ y se ve que es un toro menos cuatro discos. Luego $Z'_+ = Z_+ \times I$, la cual se puede ver que es la suma conexa por la frontera de cinco copias de $S^1 \times D^2$. Entonces Z' , siendo su doble, es la suma conexa de cinco copias de $S^1 \times S^2$. Multiplicando por D^{r-1} en lugar de I se obtienen todos los casos correspondientes a configuraciones de la forma $r + 1 + 1 + 1 + 1$
- c) La variedad de dimensión 4 con configuración heptagonal $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$, la cual es simplemente conexa. Sobre esta variedad se sabía que por ser frontera de una variedad compacta orientable de dimensión 5, su forma de intersección en dimensión dos tiene signatura cero (Thom) y por lo tanto es suma de formas hiperbólicas (Milnor). Por el Teorema de Clasificación Topológica de 4-variedades compactas simplemente conexas (Freedman), es **homeomorfa** a la suma conexa de siete copias de $S^2 \times S^2$. Más adelante veremos que es **difeomorfa**.
- d) Las variedades con configuración pentagonal $n = 1 + 1 + n_3 + n_4 + n_5$ con $n_3 + n_4 + n_5 \geq 5$, pues no son simplemente conexas y tienen dimensión 4 o más.

A continuación presentamos la demostración para las variedades consideradas en los casos (c) y (d).

4.2.1. Cortes y variedades con configuraciones pentagonales

Consideremos el politopo P que resulta del producto de dos simplejos $\Delta^p \times \Delta^q$. Podemos describirlo mediante el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}_+^{p+1} \times \mathbb{R}_+^{q+1}$

$$\sum_{i=0}^p t_i - \sum_{j=0}^q s_j = 0$$

$$\sum_{i=0}^p t_i + \sum_{j=0}^q s_j = 1$$

En términos generales, a partir de un politopo $P \subset \mathbb{R}_+^N$ con N facetas, que son sus intersecciones con los hiperplanos coordinados, podemos construir una variedad $Z(P) \subset \mathbb{R}^N$ que admite una acción de \mathbb{Z}_2^N cuyo cociente es P . Intuitivamente podemos pensar $Z(P)$ como obtenida a partir de P aplicando reflexiones sobre

cada uno de los hiperplanos de \mathbb{R}^N , y luego suavizando las caras. En el caso de que $P = \Delta^p \times \Delta^q$, nuestra variedad es $Z(P) = S^p \times S^q$. De hecho podemos asociarle el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^p x_i^2 - \sum_{j=0}^q y_j^2 &= 0 \\ \sum_{i=0}^p x_i^2 + \sum_{j=0}^q y_j^2 &= 1\end{aligned}$$

Si cortamos a P con un hiperplano transversal, se divide en dos politopos U y V . Podemos construir las variedades $Z(U)$ y $Z(V)$. Bajo ciertas condiciones, si una de ellas es suficientemente sencilla, podemos determinar la otra. Esta es la idea de lo que vamos a hacer a continuación.

Sea $H \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ el hiperplano dado por la ecuación

$$\sum_{i=1}^p t_i + \sum_{j=b+1}^q s_j = \epsilon$$

Sea U el politopo obtenido a partir de P al intersecar con el semiespacio

$$\sum_{i=1}^p t_i + \sum_{j=b+1}^q s_j \leq \epsilon$$

Sea V el politopo obtenido a partir de P al intersecar con el semiespacio

$$\sum_{i=1}^p t_i + \sum_{j=b+1}^q s_j \geq \epsilon$$

Consideremos primero el caso en que $0 < b < q$. El hiperplano

$$\sum_{i=1}^p t_i + \sum_{j=b+1}^q s_j = 0$$

corta a $\Delta^p \times \Delta^q$ en la cara $(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0) \times \Delta^b$. Si ϵ es suficientemente pequeña, U será una vecindad de la cara $(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0) \times \Delta^b \subset \Delta^p \times \Delta^q$. Nótese que la ecuación de H

$$\sum_{i=1}^p t_i + \sum_{j=b+1}^q s_j = \epsilon$$

puede verse como una ecuación lineal para $p + q - b$ variables reales sujetas a $p + q - b$ desigualdades lineales (cada variable debe ser no negativa) es decir, que se puede ver como $\Delta^{p+q-b-1}$. Si ϵ tiende a cero, este simplejo se colapsa a un punto, y el resultado de unir estos simplejos de dimensión $p + q - b - 1$ es un simplejo de dimensión $p + q - b$. De aquí se puede ver que U es equivalente a $\Delta^0 \times \Delta^b \times \Delta^{p+q-b}$. Este producto tiene $p + q + 2$ facetas, de las cuales una es la nueva cara producida por el hiperplano H y las demás estaban determinadas por el politopo original P . Al reflejar en todas las facetas menos la nueva, obtenemos dos copias de $S^b \times D^{p+q-b}$.

Ahora pongamos nuestra atención en V . Afirmamos que $Z(V)$ es precisamente una de las variedades pentagonales de los casos restantes del Teorema Coaxial:

Introduzcamos una nueva variable, junto con una ecuación que la relacione con las anteriores

$$u = \sum_{i=1}^p t_i + \sum_{j=b+1}^q s_j - \epsilon$$

Entonces podemos describir a V mediante el sistema de ecuaciones siguiente en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{p+1} \times \mathbb{R}_+^{q+1}$

$$\begin{aligned}u - \sum_{i=1}^p t_i - \sum_{j=b+1}^q s_j &= -\epsilon \\ \sum_{i=0}^p t_i - \sum_{j=0}^q s_j &= 0\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^p t_i + \sum_{j=0}^q s_j = 1$$

Si a la primera ecuación le sumamos la tercera multiplicada por ϵ queda

$$u + \epsilon t_0 + \sum_{i=1}^p (-1 + \epsilon)t_i + \sum_{j=0}^b \epsilon s_j + \sum_{j=b+1}^q (-1 + \epsilon)s_j = 0$$

Si a la tercera ecuación le sumamos un pequeño múltiplo de ésta, obtenemos una ecuación con todos los coeficientes positivos, la cual podemos sustituir por la del simplejo estándar en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{p+1} \times \mathbb{R}_+^{q+1}$ sin cambiar el tipo combinatorio de la intersección. Por lo tanto, podemos describir a V mediante el sistema de ecuaciones siguiente.

$$u + \epsilon t_0 + \sum_{i=1}^p (-1 + \epsilon)t_i + \sum_{j=0}^b \epsilon s_j + \sum_{j=b+1}^q (-1 + \epsilon)s_j = 0$$

$$\sum_{i=0}^p t_i - \sum_{j=0}^q s_j = 0$$

$$u + \sum_{i=0}^p t_i + \sum_{j=0}^q s_j = 1$$

A este sistema de ecuaciones le corresponde una configuración en la cual tenemos los vértices y multiplicidades siguientes.

1. $(1, 0)$ con multiplicidad 1 (corresponde a la variable u)
2. $(\epsilon, 1)$ con multiplicidad 1 (corresponde a la variable t_0)
3. $(-1 + \epsilon, 1)$ con multiplicidad p (corresponde a las variables t_1, \dots, t_p)
4. $(-1 + \epsilon, -1)$ con multiplicidad $q - b$ (corresponde a las variables s_{b+1}, \dots, s_q)
5. $(\epsilon, -1)$ con multiplicidad $b + 1$ (corresponde a las variables s_0, \dots, s_b)

Por lo tanto, se trata de una configuración pentagonal del tipo $n = 1 + 1 + p + (q - b) + (b + 1)$ donde $n = p + q + 3$
 Recapitulando:

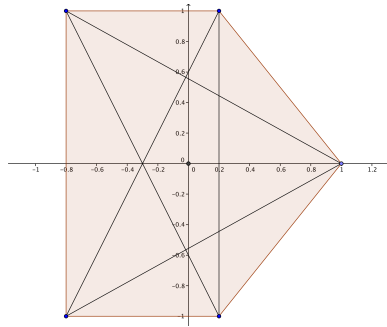


Figura 4.1: La configuración correspondiente a $Z(V)$ es un pentágono

1. V se obtiene a partir de P cortándole un politopo $\Delta^{p+q-b} \times \Delta^b$.
2. Si reflejamos V con respecto a los hiperplanos que definen todas sus facetas menos la correspondiente al hiperplano H con que efectuamos el corte, obtenemos la variedad original $Z(P)$ menos dos copias de $S^b \times D^{p+q-b}$ (no olvidemos que supusimos que $0 < b < q$)

Si adicionalmente suponemos que $b < p$, entonces las dos esferas son contraíbles, y como $2b + 1 < p + q$ se puede suponer que están contenidas en una bola de $Z(P)$ y que no están anudadas ni enlazadas. Como $Z(P) = S^p \times S^q$, entonces al reflejar V con respecto a los hiperplanos que definen todas sus caras menos la producida por H , obtenemos una variedad con frontera

$$Z_+(V) = (S^p \times S^q) \# (S^{p+q} \setminus S^b) \# (S^{p+q} \setminus S^b)$$

es decir

$$Z_+(V) = (S^p \times S^q) \# (S^{p+q-b-1} \times D^{b+1}) \# (S^{p+q-b-1} \times D^{b+1})$$

Para describir $Z(V)$, el doble de $Z_+(V)$, utilizaremos el lema siguiente de [4].

Teorema 22 Sean Q, Q' dos variedades conexas de dimensión d .

(A) Si Q, Q' tienen frontera no vacía, entonces

$$D(Q \# Q') = D(Q) \# D(Q') \# (S^1 \times S^{d-1})$$

(B) Si $\partial Q = \emptyset$ pero $\partial Q' \neq \emptyset$, entonces

$$D(Q \# Q') = Q \# (-Q) \# D(Q')$$

Donde $D(Q)$ denota al doble de Q

Aplicando el inciso (A) a

$$Q = (S^p \times S^q) \# (S^{p+q-b-1} \times D^{b+1})$$

y a

$$Q' = S^{p+q+b-1} \times D^{b+1}$$

podemos decir que $Z(V) = D(Q \# Q')$ es igual a

$$D(Q) \# (S^{p+q-b-1} \times S^{b+1}) \# (S^1 \times S^{p+q-1})$$

y aplicando el inciso (B) concluimos que

$$Z(V) = (2)(S^p \times S^q) \# (2)(S^{p+q-b-1} \times S^{b+1}) \# (S^1 \times S^{p+q-1})$$

Ahora consideremos el caso en que $b = 0$. En este caso en lugar de cortar una cara, le cortamos un vértice al politopo $\Delta^p \times \Delta^q$. Es decir, son de las variedades obtenidas mediante la construcción de truncamiento de vértices expuesta en [4], misma que esbozaremos a continuación. Al reflejar con respecto a todas las caras menos la producida por el hiperplano H , obtenemos $S^p \times S^q$ menos cuatro discos D^{p+q} . El doble de esta variedad con frontera es igual a

$$(S^p \times S^q) \# (S^p \times S^q) \# (3)(S^1 \times S^{p+q-1})$$

Ahora veamos si estamos incluyendo todos los casos restantes del inciso (d) $n = 1 + 1 + n_3 + n_4 + n_5$. Observemos lo siguiente.

1. Sin pérdida de generalidad $n_3 \geq n_5$. En caso necesario reenumeramos las variables invirtiendo el orden.
2. Podemos elegir $p = n_3$, $b = n_5 - 1$ y $q = n_4 + b$
3. Se cumplen las condiciones $b < q$ y $b < p$

De lo anterior podemos concluir que efectivamente, esta demostración incluye los casos pentagonales restantes.

4.2.2. La variedad con configuración heptagonal $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Consideremos el sistema de ecuaciones canónico para esta variedad

$$x_0^2 + \sum_{i=1}^6 a_i x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 b_i x_i^2 = 0$$

$$x_0^2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 1$$

Si intersectamos con el primer ortante y linealizamos mediante el cambio de variables $t_i = x_i^2$ obtenemos un politopo W definido por el sistema de ecuaciones

$$t_0 + \sum_{i=1}^6 a_i t_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 b_i t_i = 0$$

$$t_0 + \sum_{i=1}^6 t_i = 1$$

Este politopo W puede obtenerse como una pieza resultante de cotar un prisma. A continuación desarrollamos esta idea.

Sea $P = \Delta^2 \times \Delta^2$ dado por

$$\sum_{i=1}^6 b_i t_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 t_i = 1$$

Sea H el hiperplano dado por la ecuación

$$\sum_{i=1}^6 a_i t_i = 0$$

H corta a P en dos piezas. Sean

$$U = P \cap \left\{ \sum_{i=1}^6 a_i t_i \geq 0 \right\}$$

$$V = P \cap \left\{ \sum_{i=1}^6 a_i t_i \leq 0 \right\}$$

Podemos describir ambas piezas mediante sistemas de ecuaciones en \mathbb{R}_+^8 .

El sistema de ecuaciones para U

$$-u + \sum_{i=1}^6 a_i t_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 b_i t_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 t_i = 1$$

El sistema de ecuaciones para V

$$u + \sum_{i=1}^6 a_i t_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 b_i t_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 t_i = 1$$

En ambos casos podemos sustituir la última ecuación por

$$u + \sum_{i=1}^6 t_i = 1$$

Notemos que salvo las literales utilizadas, las ecuaciones de V son las mismas que las de W , el politopo correspondiente a la configuración heptagonal $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ con vértices $(1, 0), (a_1, b_1), \dots, (a_6, b_6)$, mientras que U es el politopo correspondiente a la configuración con coeficientes $(-1, 0), (a_1, b_1), \dots, (a_6, b_6)$, la cual se reduce a una configuración pentagonal $7 = 1 + 1 + 3 + 1 + 1$. Estamos interesados en describir $Z(V)$ a partir de $Z(U)$. Más precisamente, en describir $Z_+(V)$ a partir de $Z_+(U)$, donde $Z_+(U)$ es la mitad de la variedad $Z(U)$ que corresponde a especificar que la variable $u \geq 0$. Nótese que esta variable es parte de las que tienen multiplicidad tres, y por lo tanto $Z_+(U)$ ya la tenemos descrita en la sección anterior (4.2.1) en que

demostramos el Teorema Coaxial para las configuraciones del tipo $r + 1 + 1 + 1 + 1$. Luego es igual a la suma conexa por la frontera de cinco copias de $S^1 \times D^3$
Claramente

$$Z(P) = Z_+(U) \cup Z_+(V)$$

Ahora bien, queremos demostrar que el complemento de $Z_+(U)$ en $Z(P)$ es igual a la suma conexa por la frontera de siete copias de $S^2 \times D^2$. En dimensiones mayores esto sería consecuencia del teorema del h-cobordismo, pero en la dimensión cuatro tenemos que ir con más cuidado.

$Z_+(U)$ se puede pensar como una vecindad regular de la gráfica Γ_1 formada por cinco copias de S^1 unidas por cuatro segmentos.

Como $Z(P) \cong S^2 \times S^2$ es simplemente conexa y de dimensión cuatro, entonces Γ_1 se puede deformar isotópicamente dentro de $Z(P)$ a una copia Γ_2 contenida en un disco abierto $D^4 \subset S^2 \times S^2$. En S^4 podemos considerar una versión *estándar* Γ_3 de la misma gráfica dentro de una S^2 máxima, y existirá también una isotopía entre Γ_2 y Γ_3 . Esas isotopías llevan a $Z_+(U)$ a una vecindad regular de Γ_3 . Se puede ver que Γ_3 tiene una vecindad regular *estándar* en S^4 cuyo complemento es la suma conexa por la frontera de cinco copias de $S^2 \times D^2$.

1

Por el teorema de unicidad de la vecindad regular

2

existe una nueva isotopía que lleva a $Z_+(U)$ en la vecindad regular *estándar* de Γ_3 . De estas consideraciones se desprende que:

$$Z_+(V) = (S^2 \times S^2) \# \coprod_5 (S^2 \times D^2)$$

$$Z_+(V) = (S^2 \times S^2)_{-1} \coprod (5)(S^2 \times D^2)$$

Donde el subíndice -1 indica que le quitamos un pequeño disco de la dimensión de la variedad. Ahora bien,

$$\begin{aligned} Z(V) &= D(Z_+(V)) \\ &= \partial(Z_+(V) \times D^1) \\ &= \partial\{(S^2 \times S^2)_{-1} \times D^1\} \coprod (5)(S^2 \times D^3) \\ &= \partial(\coprod (7)(S^2 \times D^3)) \\ &= \#(7)(S^2 \times S^2) \end{aligned}$$

4.2.3. El Teorema Coaxial

Sea n un entero mayor o igual que tres. Dada una partición de n en un número impar $k = 2l + 1$ de enteros positivos

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_{2l+1}$$

Sea ρ la k -ésima raíz de la unidad dada por $\rho = e^{\frac{2\pi}{k}i}$. Consideremos la configuración Λ de puntos en el plano complejo ρ^j con multiplicidad n_j , es decir

$$\Lambda = (\rho^1, \dots, \rho^1, \rho^2, \dots, \rho^2, \dots, \rho^k, \dots, \rho^k)$$

Donde ρ^j se repite n_j veces

Sea

$$d_j = n_j + \cdots + n_{(j+l-1) \bmod (2l+1)}$$

Sea $Y = Y(\Lambda)$ la subvariedad de \mathbb{R}^n dada por las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{2l+1} \rho^j \|x_j\|^2 = 0$$

¹Por ejemplo, usando el

Teorema 23 Sean Q_1, Q_2 dos variedades con frontera conexa de dimensión d , encajadas de manera estándar en S^d . Entonces

$$(S^d \setminus Q_1) \coprod (S^d \setminus Q_2) = S^d \setminus (Q_1 \coprod Q_2)$$

²Para el concepto de la vecindad regular y el teorema de la existencia y unicidad de la misma ver [8]. Cabe señalar que este teorema nos garantiza la conclusión en la categoría P-L, pero en dimensión 4 esto es suficiente para nuestros propósitos

$$\sum_{j=1}^{2l+1} \|x_j\|^2 = 1$$

Donde $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$

Teorema 24 *Supongamos que $l > 1$, entonces Y es difeomorfa a*

$$\#_{j=1}^{2l+1} (S^{d_j-1} \times S^{N-d_j-2})$$

En el caso de que $l = 1$ tenemos que Y es un producto de tres esferas.

4.3. Los Teoremas de las Configuraciones Básicas

4.3.1. Introducción: La construcción $Y \rightarrow \tilde{Y}$

Denotemos las ecuaciones de $Y = Y(\Lambda, s)$ como sigue

$$F_1(x) = 0$$

$$F_2(x) = 0$$

$$\|x\|^2 = 1$$

Gracias a lo anterior, podemos denotar las ecuaciones de $\tilde{Y} = Y(\Lambda, s + 1)$ de la manera siguiente:

$$F_1(x) + u^2 - v^2 = 0$$

$$F_2(x) + 2uw = 0$$

$$\|x\|^2 + u^2 + v^2 = 1$$

Podemos reescribir este sistema de tres ecuaciones reales como un sistema de dos ecuaciones, una compleja y una real

$$F(x) + w^2 = 0$$

$$\|x\|^2 + |w|^2 = 1$$

Donde $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$ y $w = u + iv$

Así que

$$Y = \tilde{Y} \cap \{w = 0\} = \{x \in S^{n-1} : F(x) = 0\}$$

A continuación veremos algunos resultados que utilizaremos más adelante.

Lema \tilde{Y} es una cubierta doble de S^{n-1} , ramificada sobre Y

Demostración

Sea

$$\Phi : \tilde{Y} \rightarrow S^{n-1}$$

$$\Phi(x, w) = \frac{x}{\|x\|}$$

Notamos que:

* Φ está bien definida, pues $(x, w) \in \tilde{Y}$ implica que $F(x) + w^2 = 0$. No puede ser que $x = 0$ porque entonces también $w = 0$, lo cual entra en contradicción con el hecho de que $(x, w) \in S^{n+1}$. Por lo tanto no se presenta el caso de división entre cero.

* Φ es 2 a 1 excepto en los puntos donde $w = 0$.

Para ver lo anterior, supongamos que

$$\Phi(x_1, w_1) = \Phi(x_2, w_2)$$

Entonces

$$\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|}$$

Aplicando F tenemos que

$$F\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}\right) = F\left(\frac{x_2}{\|x_2\|}\right)$$

Por ser F homogénea y cuadrática

$$\frac{F(x_1)}{\|x_1\|^2} = \frac{F(x_2)}{\|x_2\|^2}$$

Por las ecuaciones de \tilde{Y}

$$\frac{w_1^2}{\|x_1\|^2} = \frac{w_2^2}{\|x_2\|^2}$$

Tomando los módulos

$$\frac{|w_1|^2}{\|x_1\|^2} = \frac{|w_2|^2}{\|x_2\|^2}$$

Como $(x_j, w_j) \in S^{n+1}$

$$\frac{1 - \|x_1\|^2}{\|x_1\|^2} = \frac{1 - \|x_2\|^2}{\|x_2\|^2}$$

De donde

$$\|x_1\| = \|x_2\|$$

Utilizando esta información con las igualdades del principio

$$x_1 = x_2$$

Más aún

$$F(x_1) = F(x_2)$$

y

$$w_1^2 = w_2^2$$

Por lo cual

$$w_2 = \pm w_1$$

En conclusión: Φ es 2 a 1 excepto en los puntos donde $w = 0$

* Fuera de Y , Φ es un difeomorfismo local

* Sea $\hat{Y} = \{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} : F(x) + w^2 = 0, \|x\|^2 = 1\}$ Afirmamos que \tilde{Y} es difeomorfa a \hat{Y}
Podemos dar explícitamente el difeomorfismo

$$\phi : \tilde{Y} \rightarrow \hat{Y}$$

$$\phi(x, w) = \frac{1}{\|x\|}(x, w)$$

Y su inverso

$$\phi^{-1} : \hat{Y} \rightarrow \tilde{Y}$$

$$\phi^{-1}(x, w) = \frac{1}{\sqrt{1 + |w|^2}}(x, w)$$

* Sea $\underline{Y} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} : F(x) + z = 0, \|x\|^2 = 1\}$ Afirmamos que \underline{Y} es difeomorfa a S^{n-1}
Podemos dar explícitamente el difeomorfismo

$$G : S^{n-1} \rightarrow \underline{Y}$$

$$G(x) = (x, -F(x))$$

Y su inverso

$$G^{-1} : \underline{Y} \rightarrow S^{n-1}$$

$$G^{-1}(x, z) = x$$

* Sea $g : \hat{Y} \rightarrow \underline{Y}$ dada por $g(x, w) = (x, w^2)$. Entonces Φ es equivalente a g
Se puede ver que $G \circ \Phi = g \circ \phi$, y acabamos de ver que ϕ y G son difeomorfismos.

Sea $\tilde{Y}_0 = \tilde{Y} \cap \{v = 0\}$. Podemos identificar esta variedad con Y' si agregamos la variable u al paquete de las primeras n_1 variables. Consideremos la imagen de \tilde{Y}_0 bajo Φ . Es la subvariedad con frontera

$$\{x \in S^{n-1} : F_1(x) \leq 0, \quad F_2(x) = 0\}$$

Esta variedad se puede identificar con Y'_+ .

Observación \tilde{Y} es la unión de dos variedades con frontera, las cuales son difeomorfas entre sí.

$$\tilde{Y}_+ = \tilde{Y} \cap \{v \geq 0\}$$

$$\tilde{Y}_- = \tilde{Y} \cap \{v \leq 0\}$$

Ambas variedades con frontera se intersectan precisamente en su frontera. Cada una es difeomorfa al exterior de $\Phi(\tilde{Y}_0)$, es decir, al complemento de una vecindad abierta de $\Phi(\tilde{Y}_0)$.

El difeomorfismo $(x, w) \mapsto (x, -w)$ intercambia \tilde{Y}_+ y \tilde{Y}_- . Así que \tilde{Y} se puede ver como la unión de dos copias de \tilde{Y}_+ pegadas por el difeomorfismo de sus fronteras $(x, u) \mapsto (x, -u)$.

Si este difeomorfismo se pudiera extender a otro de \tilde{Y}_+ en \tilde{Y}_+ , se podría concluir que \tilde{Y} es el doble de \tilde{Y}_+ . No hemos podido demostrar esto en general, sin embargo, es cierto bajo ciertas condiciones, muy particulares, pero suficientes para nuestros propósitos, que son las hipótesis del resultado siguiente.

4.3.2. El primer Teorema de las Configuraciones Básicas

Teorema 25 (De las Configuraciones Básicas de dimensión par) *Supongamos que Y es de dimensión $2p$ con $p > 0$, y que es $(p-1)$ -conexa, con $H_p(Y)$ libre de rango $2k$.*

Entonces:

- (a) Y es difeomorfa a la suma conexa de k copias de $S^p \times S^p$
- (b) Y' es difeomorfa a la suma conexa de k copias de $S^p \times S^{p+1}$
- (c) Y'_+ es difeomorfa a la suma conexa por la frontera de k copias de $S^p \times D^{p+1}$
- (d) \tilde{Y} es p -conexa con $H_{p+1}(\tilde{Y})$ libre de rango $2k$

Demostración del caso en que $p \geq 3$.

Empezaremos con (c), la idea es aplicar el Teorema 21. Veamos que $Q = Y'_+$ cumple las hipótesis.

- * La hipótesis sobre la dimensión. Y'_+ es una variedad con frontera de dimensión $2p+1$. Como $p \geq 3$ entonces Y'_+ es de dimensión mayor o igual que siete.
- * La hipótesis de 1-conexidad. Recordemos que la frontera de Y'_+ es Y , la cual por hipótesis es $(p-1)$ -conexa, en particular, simplemente conexa. Más aún, tenemos un epimorfismo de $H_*(Y) \rightarrow H_*(Y'_+)$. Como Y es $(p-1)$ -conexa, entonces también lo es Y'_+ , en particular Y'_+ es simplemente conexa.
- * La hipótesis sobre la estructura de $H_i(Y'_+)$. Tenemos que ver que $H_i(Y'_+)$ es un grupo libre. Sabemos que Y'_+ es homotópicamente equivalente a Y_+ . Para ver que $H_i(Y_+)$ es un grupo libre basta tomar en cuenta la relación entre Y y Y_+ determinada por el hecho de que la composición de la inclusión $Y_+ \hookrightarrow Y$ seguida de la proyección $Y \rightarrow Y_+$ es igual a la identidad. Esto nos dice que el homomorfismo inducido $H_i(Y_+) \rightarrow H_i(Y) \rightarrow H_i(Y_+)$ es el homomorfismo identidad, razón por la cual $H_i(Y_+)$ es isomorfo a su imagen en $H_i(Y)$, pero por hipótesis $H_i(Y)$ es libre, y un subgrupo de un grupo libre también es libre. De lo anterior se sigue que $H_i(Y_+)$ es libre, y $H_i(Y'_+)$ también.
- * Para aplicar el teorema 21 también tenemos que ver que para toda $i \geq d-1$ (es decir, para toda $i \geq 2p-1$) se cumpla que $H_i(Y'_+) = 0$. El epimorfismo citado anteriormente nos asegura que esto se cumple para toda $i \geq p-1$, lo cual es más que suficiente.
- * La hipótesis sobre una colección de esferas que representen una base de la homología. En primer lugar tenemos que por ser $H_p(Y_+)$ el primer grupo de homología no trivial, entonces aplicando el teorema de Hurewicz tenemos que la base de $H_p(Y_+)$ se puede representar por una base de $\pi_p(Y'_+)$, es decir, existen funciones de S^p en Y'_+ cuyas imágenes representan a una base de homología de $H_p(Y'_+)$. En segundo lugar, por ser Y'_+ de dimensión $2p+1$ podemos aplicar el teorema de Whitney y concluir sin pérdida de generalidad estas funciones son encajes con haz normal trivial. Más aún: dadas dos esferas encajadas de dimensión p en una variedad de dimensión $2p+1$ se pueden separar.

Quedando satisfechas todas las hipótesis del teorema 21 podemos concluir que

$$Y'_+ \approx \coprod_k (S^p \times D^{p+1})$$

De aquí se sigue (a) pues Y es la frontera de Y'_+ , y también se sigue (b), pues Y' es el doble de Y'_+ . Sigamos con (d).

Nuestro punto de partida ahora será $W = Y'_+ \times D^1$, la cual es difeomorfa a $\coprod_k (S^p \times D^{p+2})$. El resultado siguiente nos describe su exterior.

Lema del Exterior³ Si $W^{2p+2} \subset S^{2p+2}$, con $p \geq 2$, es difeomorfa a $\coprod_k (S^p \times D^{p+2})$, entonces el exterior de W es difeomorfo a $\coprod_k (S^{p+1} \times D^{p+1})$

Demostración

Consideremos vecindades tubulares de cada S^p y unámoslas por pequeños tubitos, todo en el interior de W . Obtenemos una variedad que es difeomorfa a W e isotópica a ella dentro de S^{2p+2} , ya que sus fronteras son simplemente conexas y el espacio entre ellas es un h-cobordismo. Así, podemos suponer que W misma es de esa forma. Entonces podemos tomar una esfera S^{p+1} en el haz normal a cada S^p dentro de la esfera geodésica normal a un punto. Todas estas esferas son ajenas, y cada una de ellas está contenida en un disco dentro de S^{2p+2} y es frontera de un disco D^{p+2} . Estas esferas representan una base dual de Alexander de la base natural de $H_p(W)$ dada por las esferas S^p . Si tomamos vecindades tubulares de ellas y las unimos por tubitos obtenemos una variedad con frontera V difeomorfa e isotópica al exterior de W , ya que todo lo necesario es simplemente conexo. Con esto queda demostrado el Lema del Exterior.

Regresando a la demostración del inciso (d) del Teorema de la Configuración Básica, tenemos que \tilde{Y} es la unión de dos copias de W mediante un difeomorfismo σ de su frontera Y'

De la sucesión de Mayer-Vietoris de esta unión, la parte no trivial es la siguiente:

$$0 \rightarrow H_{p+2}(\tilde{Y}) \rightarrow H_{p+1}(\partial W) \rightarrow H_{p+1}(W) \oplus H_{p+1}(W) \rightarrow H_{p+1}(\tilde{Y}) \rightarrow H_p(\partial W) \rightarrow 0$$

Esto implica que \tilde{Y} es p -conexa y que $H_{p+2}(\tilde{Y}) = 0$ por Dualidad de Poincaré.

El homomorfismo

$$H_{p+1}(\partial W) \rightarrow H_{p+1}(W) \oplus H_{p+1}(W)$$

es

$$(i_*, i_*\sigma_*)$$

donde i es la inclusión $\partial W \hookrightarrow W$

Por lo tanto su imagen es como la imagen de $(1_*, \sigma_*)$ en $H_{p+1}(W) \oplus H_{p+1}(W)$ la cual es el núcleo del homomorfismo dado por $(a, b) \mapsto b - \sigma_*(a)$

Se sigue que la sucesión anterior se reduce a la siguiente

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^k \rightarrow H_{p+1}(\tilde{Y}) \rightarrow \mathbb{Z}^k \rightarrow 0$$

y que $H_{p+1}(\tilde{Y})$ es libre de rango $2k$, con lo que terminamos la demostración del Teorema de las Configuraciones Básicas para $p \geq 3$.

Observación: Si bien el Lema del Exterior nos describe el Exterior de W en términos suaves, lo que utilizamos para (d) fue la Homología del Exterior

Los casos en que $p = 1$ corresponden a las superficies de género tres y cinco, respectivamente, y no hay más que hacer. A continuación enlistaremos los casos en que $p = 2$ (y por lo tanto corresponden a variedades de dimensión cuatro), cuya demostración pospondremos un poco.

1. $Y = \tilde{Z}$ si Z es la superficie de género tres. Este caso será tratado en el apartado de configuraciones triangulares.
2. $Y = \tilde{Z}$ si Z es la superficie de género cinco. Este caso será tratado en el apartado de configuraciones pentagonales.
3. $Y = Z^J$ si Z es la superficie de género cinco y J es tal que Y es de dimensión cuatro. Estos casos ya fueron discutidos como casos restantes del Teorema Coaxial.

³El caso $p = 1$ se puede demostrar usando el teorema de unicidad de la vecindad regular, como lo hicimos en el caso de la configuración heptagonal $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ del teorema coaxial

4.3.3. El segundo Teorema de las Configuraciones Básicas

El teorema de la subsección anterior es válido solamente para variedades de dimensión par. Ahora enunciaremos una versión análoga para variedades de dimensión impar.

Teorema 26 *Supongamos que Y tiene dimensión $2p+1$ con $p \geq 1$ y que es $(p-1)$ -conexa (en particular conexa), con $H_p(Y)$ libre de rango k . Entonces*

1. Y es difeomorfa a la suma conexa de k copias de $S^p \times S^{p+1}$
2. Y' es difeomorfa a la suma conexa de k_1 copias de $S^p \times S^{p+2}$ y k_2 copias de $S^{p+1} \times S^{p+1}$, con la restricción de que $k_1 + k_2 = k$
3. Y'_+ es difeomorfa a la suma conexa a lo largo de la frontera de k_1 copias de $S^p \times D^{p+2}$ y k_2 copias de $S^{p+1} \times D^{p+1}$
4. \tilde{Y} es p -conexa con $H_{p+1}(\tilde{Y})$ libre de rango k

La demostración para el caso $p \geq 2$ es análoga a la demostración del primer Teorema de las Configuraciones Básicas, sin embargo, es necesario considerar algunas modificaciones. A continuación delinearemos la prueba poniendo énfasis en las partes que requieren un argumento adicional.

- Queremos ver que podemos aplicar el Teorema 21. Veamos que $Q = Y'_+$ cumple las hipótesis de dicho Teorema.

- La hipótesis de la dimensión. Q debe ser de dimensión mayor o igual que seis. Dado que estamos en el caso $p \geq 1$ tenemos que Y es de dimensión $2p+1 \geq 5$ y por lo tanto $Q = Y'_+$ es de dimensión $2p+2 \geq 6$.

- La hipótesis de la conexidad. Q debe ser simplemente conexa y su frontera $\partial Q = Y$ también. Por hipótesis Y es $(p-1)$ -conexa, pero en el caso $p \geq 2$ esto implica que Y es simplemente conexa. El homomorfismo $H_1(Y) \rightarrow H_1(Y'_+)$ sigue siendo un epimorfismo, de donde se sigue que Q es simplemente conexa.

- La hipótesis sobre la estructura de los grupos de homología de Q . El argumento es el mismo que para el caso en que Y es de dimensión par, aunque no debemos de perder de vista que en este caso los dos grupos interesantes son $H_p(Q)$ y $H_{p+1}(Q)$.

- La hipótesis de que **exista una colección de esferas $\{S_j^i\}$ que representen una base para los grupos de homología de Q que sean ajenas y que estén encajadas en Q con haz normal trivial**. Aplicando los teoremas de Hurewicz y de Whitney podemos obtener una colección de k esferas de dimensión p que cumplan las condiciones requeridas, sin embargo, habría que ver que las k esferas de dimensión $p+1$ que obtendríamos de manera análoga, también están encajadas en Q con haz normal trivial. Si $p+1$ es par, el tipo de haz está determinado por el número de intersección de la esfera representante consigo misma, pero es claro que en $Y \times D^1$ cualquier esfera puede separarse de sí misma moviéndose en la dirección de D^1 . Si $p+1$ es impar, la existencia de un haz normal trivial implicaría que dicho haz de esferas sería uno de los sumandos de Y . Pero esto es imposible, porque entonces los grupos de homología de Y tendrían torsión, contradiciendo la hipótesis de que eran libremente generados.

- Solamente falta considerar el caso $p = 1$. La variedad Y tiene que ser conexa y de dimensión tres. En el contexto de este trabajo, eso quiere decir que Y es igual a Z' para Z la superficie de género dos o de género cinco. Ambos casos restantes serán tratados más adelante.

4.4. La construcción $Y \rightarrow Y'$

Sea $Y = Y(\Lambda, s)$ la subvariedad de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^s$ dada por las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{2l+1} \rho^j \|x_j\|^2 + \sum_{q=1}^s w_q^2 = 0$$

$$\sum_{j=1}^{2l+1} \|x_j\|^2 + \sum_{q=1}^s |w_q|^2 = 1$$

con $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ y $w_q \in \mathbb{C}$

Sea $Y' = Y(\Lambda', s)$ la subvariedad de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^s$ dada por las ecuaciones

$$x_0^2 + \sum_{j=1}^{2l+1} \rho^j \|x_j\|^2 + \sum_{q=1}^s w_q^2 = 0$$

$$x_0^2 + \sum_{j=1}^{2l+1} \|x_j\|^2 + \sum_{q=1}^s |w_q|^2 = 1$$

Sean Y_+ el subconjunto de Y dado por la desigualdad $x_n \geq 0$. Sea Y'_+ el subconjunto de Y' dado por la desigualdad $x_0 \geq 0$.

Teorema 27 *Bajo las condiciones anteriores se tienen los isomorfismos*

$$H_i(Y) \cong H_i(Y_+) \oplus H_i(Y, Y_+)$$

$$H_i(Y) \cong H_i(Y'_+) \oplus H_{i+1}(Y'_+, Y)$$

Consideremos la sucesión de grupos de homología de la pareja (Y, Y_+)

$$\cdots \rightarrow H_k(Y_+) \rightarrow H_k(Y) \rightarrow H_k(Y, Y_+) \rightarrow H_{k-1}(Y_+) \rightarrow \cdots$$

Notemos que tenemos una función

$$R : Y \rightarrow Y_+$$

$$R(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, w_1, \dots, w_s) = (x_1, \dots, x_{n-1}, |x_n|, w_1, \dots, w_s)$$

Esta función es una retracción, e induce un epimorfismo entre los grupos de homología.

$$R_* : H_k(Y) \rightarrow H_k(Y_+)$$

Más aún: como

$$R \circ i = Id_{Y_+}$$

(donde $i : Y_+ \hookrightarrow Y$ es la inclusión) entonces

$$R_* \circ i_* = Id : H_k(Y_+) \rightarrow H_k(Y_+)$$

de aquí se sigue que

$$i_* : H_k(Y_+) \rightarrow H_k(Y)$$

es un homomorfismo inyectivo, en otras palabras

$$\ker i_* = 0$$

de donde

$$Im \partial = 0$$

por lo cual

$$\ker \partial = H_k(Y, Y_+)$$

de donde

$$Im j_* = H_k(Y, Y_+)$$

En otras palabras, $j_* : H_k(Y) \rightarrow H_k(Y, Y_+)$ es un epimorfismo. Por teoría de grupos

$$H_k(Y) \cong H_k(Y, Y_+) \oplus \ker j_*$$

Por la exactitud de la sucesión

$$\ker j_* = Im i_*$$

Pero $i_* : H_k(Y_+) \rightarrow H_k(Y)$ es un homomorfismo inyectivo, entonces

$$Im i_* \cong H_k(Y_+)$$

en conclusión

$$H_k(Y) \cong H_k(Y, Y_+) \oplus H_k(Y_+)$$

Teorema 28 *Supongamos que Y es simplemente conexa y de dimensión $d \geq 5$. Si Y es una suma conexa de productos de esferas, entonces Y' también.*

Este es prácticamente el teorema 17 cuya demostración (ver [4]) es válida también para las variedades consideradas en el Teorema No Coaxial.

4.5. La Homología de la Cubierta Ramificada

Supongamos que Y es conexa y no vacía. Debido a la retracción

$$Y \rightarrow Y'$$

se deduce que Y' es conexa y por lo tanto también lo son Y'_+ y Y' .

Sea

$$r_i = \beta_i(Y_+)$$

Nótese que $r_0 = 1$ y que $r_d = r_{d+1} = 0$.

Dado que

$$H_i(Y, Y_+) \cong H_i(Y_-, Y_0) \cong H^{d-i}(Y_-)$$

Podemos reformular la relación

$$H_i(Y) \cong H_i(Y_+) \oplus H_i(Y, Y_+)$$

como

$$H_i(Y) \cong H_i(Y_+) \oplus H^{d-i}(Y_+)$$

De donde

$$\beta_i(Y) = r_i + r_{d-i}$$

Análogamente

$$\beta_i(Y') = r_i + r_{d+1-i}$$

Por lo tanto

$$\beta_i(Y') = \beta_i(Y) + r_{d+1-i} - r_{d-i}$$

4.5.1. Primera sucesión de Mayer-Vietoris

Consideremos la sucesión de Mayer-Vietoris de la terna $(S^{d+2}; Y'_+ \times D^1, W)$

$$H_{i+1}(S^{d+2}) \rightarrow H_i(Y') \rightarrow H_i(Y'_+ \times D^1) \oplus H_i(W) \rightarrow H_i(S^{d+2})$$

Para $1 \leq i \leq d$ esto implica que $H_i(Y') \rightarrow H_i(W)$ es suprayectiva. Esto también sucede en el caso $i = d + 2$, sin embargo no se cumple para $i = d + 1$, pues $\beta_{d+1}(W) = 0$.

4.5.2. Segunda sucesión de Mayer-Vietoris

Consideremos la sucesión de Mayer-Vietoris de la terna $(\tilde{Y}; W, W)$

$$H_{i+1}(Y') \rightarrow H_{i+1}(W) \oplus H_{i+1}(W) \rightarrow H_{i+1}(\tilde{Y}) \rightarrow H_i(Y') \rightarrow H_i(W) \oplus H_i(W)$$

Para $i = 1$ tenemos que $H_1(\tilde{Y}) = 0$, y por dualidad de Poincaré, $H_{d+1}(\tilde{Y}) = 0$.

Sea L_i la imagen de $H_i(Y') \rightarrow H_i(W) \oplus H_i(W)$, y sea l_i su rango. Dado que el homomorfismo en el primer sumando es suprayectivo, tenemos que $l_i \geq \beta_i(W)$. La sucesión de Mayer-Vietoris correspondiente se factoriza en la siguiente

$$0 \rightarrow (H_{i+1}(W) \oplus H_{i+1}(W)) / L_{i+1} \rightarrow H_{i+1}(\tilde{Y}) \rightarrow H_i(Y') \rightarrow L_i \rightarrow 0$$

Por lo tanto

$$(2\beta_{i+1}(W) - l_{i+1}) - \beta_{i+1}(\tilde{Y}) + \beta_i(Y') - l_i = 0$$

Sumando estas ecuaciones desde $i = -1$ hasta $d + 1$ obtenemos

$$\left(2 \sum_{i=0}^{d+2} \beta_i(W) - \sum_{i=0}^{d+2} l_i \right) - \sum_{i=0}^{d+2} \beta_i(\tilde{Y}) + \sum_{i=0}^{d+2} \beta_i(Y') - \sum_{i=0}^{d+1} l_i = 0$$

Ya que el monto total de homología de Y' y \tilde{Y} son iguales al monto total de homología de Y , la igualdad anterior se traduce en

$$\sum_{i=0}^{d+2} (\beta_i(W) - l_i) = 0$$

Ya que todos los sumandos son no positivos, la única manera en que se puede cumplir la igualdad es que todos los sumandos sean iguales a cero, es decir

$$\beta_i(W) = l_i$$

Incorporando esta información en la fórmula deducida de la sucesión exacta previa tenemos que

$$\beta_{i+1}(\tilde{Y}) = \beta_i(Y') + \beta_{i+1}(W) - \beta_i(W)$$

Por otra parte, utilizando la fórmula que relaciona el monto total de homología de Y' con el de Y llegamos a que

$$\beta_{i+1}(\tilde{Y}) = \beta_i(Y) + r_{d+1-i} - r_{d-i} + \beta_{i+1}(W) - \beta_i(W)$$

Ahora bien, por la dualidad de Poincaré, para $1 \leq i \leq d$ tenemos que

$$\beta_i(W) = r_{d+1-i}$$

De lo anterior concluimos que, para $1 \leq i \leq d-1$

$$\beta_{i+1}(\tilde{Y}) = \beta_i(Y)$$

Notemos que para $i = 0, d+1$

$$\beta_0(W) = 1$$

$$\beta_{d+1}(W) = 0$$

Además, sabemos que $H_1(\tilde{Y}) = 0$ y que $H_{d+1}(\tilde{Y}) = 0$. Por lo tanto, los números de Betti varían como esperábamos, y, por inducción, los números de Betti de Y coinciden con los de la suma conexa mencionada en el teorema, para Y conexa, que es el caso que nos interesa.

4.6. Un lema simple

Si Y es conexa y simplemente conexa, entonces Y' también

* Tenemos una retracción

$$r : Y \rightarrow Y_+$$

Induce un epimorfismo

$$r_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(Y_+)$$

Si Y_+ no fuera simplemente conexa, entonces Y tampoco lo sería.

* Sabemos que Y_+ y Y'_+ tienen el mismo tipo de homotopía. Por lo tanto, si Y_+ es simplemente conexa, entonces Y'_+ también.

* Y' puede expresarse como la unión de dos copias de Y'_+ pegadas a lo largo de su frontera. Cada una de las dos piezas es simplemente conexa. Más aún, se pegan a lo largo de la frontera de Y'_+ , es decir, a lo largo de Y , la cual es conexa y simplemente conexa. Aplicando el Teorema de Seifert y Van Kampen sobre el grupo fundamental de la unión de dos espacios, podemos concluir que Y' también es simplemente conexa.

4.7. Configuraciones Triangulares

4.7.1. La superficie de género tres

La variedad correspondiente a la configuración triangular

$$3 = 1 + 1 + 1, \quad s = 1$$

Podemos describir esta variedad mediante el sistema de ecuaciones

$$x^2 = \frac{1}{2} - u^2$$

$$2y^2 = \frac{1}{2} + u^2 - (u+v)^2$$

$$2z^2 = \frac{1}{2} + u^2 - (v-u)^2$$

Donde $x, y, z, u, v \in \mathbb{R}$. Si proyectamos sobre el plano UV obtenemos un hexágono curvo.

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

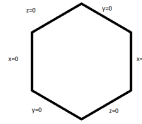


Figura 4.2: En este hexágono cada pareja de lados opuestos está dada por la intersección de la superficie con uno de los hiperplanos coordenados $x = 0$, $y = 0$ ó $z = 0$

$$z \geq 0$$

Reflejando con respecto a los hiperplanos

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Obtenemos ocho hexágonos, los cuales podemos pegar para reconstruir la variedad. Calculando la característica de Euler podemos ver que se trata de la superficie de género tres.

4.7.2. Un vértice múltiple, $s = 1$

Consideremos la variedad Y correspondiente a una configuración triangular de la forma

$$n = m + 1 + 1, \quad s = 1$$

Donde $m > 1$. Sin pérdida de generalidad podemos describir esta variedad mediante el sistema de ecuaciones

$$\|x\|^2 = \frac{1}{2} - u^2$$

$$2y^2 = \frac{1}{2} + u^2 - (u + v)^2$$

$$2z^2 = \frac{1}{2} + u^2 - (v - u)^2$$

Donde $x \in \mathbb{R}^m$, $y, z, u, v \in \mathbb{R}$. Si proyectamos sobre el plano UV obtenemos un hexágono curvo. La preimagen de un punto interior del hexágono es

$$S^{m-1} \times S^0 \times S^0$$

Sea Y_{++} la intersección de Y con los subespacios

$$y \geq 0$$

$$z \geq 0$$

A cada punto del hexágono le corresponde una esfera $S^{m-1} \subset Y_{++}$ con excepción de los puntos que están en las dos aristas donde $x = (0, \dots, 0)$. A dichos puntos solamente les corresponde un punto en Y_{++} . Se puede ver que, alisando las aristas y los vértices, Y_{++} es difeomorfa a

$$S^{m-1} \times I$$

Sea Y_+ la intersección de Y con el subespacio

$$z \geq 0$$

Podemos ver a Y_+ como el espacio de adjunción de dos copias de Y_{++} a lo largo de la subvariedad Y_{0+} dada por

$$y = 0$$

$$z \geq 0$$

Se puede ver que Y_{0+} está conformada por dos discos D^m . De aquí se sigue que

1. $Y_+ \times I$ es difeomorfa a

$$(S^m \times D^2) \sqcup (S^m \times D^2) \sqcup (S^1 \times D^{m+1})$$

2. Y es difeomorfa a

$$(S^m \times S^1) \# (S^m \times S^1) \# (S^m \times S^1)$$

Observación Una prueba alternativa podría desarrollarse a partir de que sabemos que en este caso la mitad de la superficie de género tres es igual al toro menos dos discos.

4.7.3. Dos vértices múltiples, $s = 1$

Consideremos la variedad Z correspondiente a una configuración triangular de la forma

$$n = m + 1 + 2, \quad s = 1$$

Donde $m > 1$. Sin pérdida de generalidad podemos describir esta variedad mediante el sistema de ecuaciones

$$\|x\|^2 = \frac{1}{2} - u^2$$

$$2y^2 = \frac{1}{2} + u^2 - (u + v)^2$$

$$2\|z\|^2 = \frac{1}{2} + u^2 - (v - u)^2$$

Donde $x \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^2$, $y, u, v \in \mathbb{R}$. Z se puede ver como Y' para Y la variedad correspondiente a la configuración triangular

$$n = m + 1 + 1, \quad s = 1$$

Acabamos de ver que Y es difeomorfa a

$$(S^m \times S^1) \# (S^m \times S^1) \# (S^m \times S^1)$$

Tenemos que

1. Z es el doble de Y'_+
2. Y'_+ es difeomorfa a $Y_+ \times I$, es decir,

$$(S^m \times D^2) \sqcup (S^m \times D^2) \sqcup (S^1 \times D^{m+1})$$

Nótese que en este caso la construcción $Y \rightarrow Y'$ se realiza sobre la variable z , y resulta que Y_+ es precisamente la que calculamos para la configuración $n = m + 1 + 1, s = 1$ aunque en dicho caso la multiplicidad estaba asociada a la variable vectorial x .

3. $Y'_+ \times I$ es difeomorfa a

$$(S^m \times D^3) \sqcup (S^m \times D^3) \sqcup (S^1 \times D^{m+2})$$

Por lo anterior, Z , el doble de Y'_+ , es difeomorfa a

$$(S^m \times S^2) \# (S^m \times S^2) \# (S^1 \times S^{m+1})$$

4.7.4. Tres vértices múltiples, $s = 1$

Este caso lo podemos realizar por inducción sobre la dimensión de la variedad Y .

El paso inductivo

Para el paso inductivo basta aprovechar que

1. Si Y es simplemente conexa, también lo es Y'
2. Si Y es de dimensión mayor o igual que cinco, también lo es Y'
3. Si Y es suma conexa de productos de esferas, también lo es Y'
4. El Teorema de la Homología de la Cubierta Ramificada nos describe con exactitud la homología de Y' pues se puede ver como \tilde{Z} para una Z a la cual le podemos aplicar el Teorema Coaxial.

La parte que precisa una fundamentación más detallada es la base de la inducción, en este caso, cuando $6 = 2 + 2 + 2$ y $s = 1$. En este caso Y es de dimensión cinco. Vamos a ver qué podemos decir de Y en este caso.

La base de la inducción

En este caso tenemos una acción de $T^3 = (S^1)^3$ en M^5 pues el sistema de ecuaciones que define a la variedad toma la forma

$$\begin{aligned} |x|^2 &= \frac{1}{2} - u^2 \\ 2|y|^2 &= \frac{1}{2} + u^2 - (v + u)^2 \\ 2|z|^2 &= \frac{1}{2} + u^2 - (v - u)^2 \end{aligned}$$

donde $x, y, z \in \mathbb{C}$ y $u, v \in \mathbb{R}$

La acción tomaría la forma

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z, u, v) = (ax, by, cz, u, v)$$

Para aplicar el Teorema de McGavran M debe cumplir que es una variedad cerrada, compacta, conexa y simplemente conexa de dimensión $n + 2$ en la cual actúe T^n con $n + k$ órbitas del tipo T^{n-2} . En este caso $n = k = 3$ y la condición que no es trivial verificar es la hipótesis de que M sea simplemente conexa. Sin embargo, M se puede ver como cociente de $D^2 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ donde D^2 es un hexágono curvo, y cada factor S^1 se colapsa a un punto en un par de lados opuestos de la frontera del disco. Ciertamente M es simplemente conexa, y podemos aplicar el teorema de McGavran para concluir que M es homeomorfa a la suma conexa de tres copias de $S^2 \times S^3$. Más aún: además de que M es simplemente conexa y de dimensión cinco, ahora sabemos que los grupos de homología de M son libres. Podemos concluir que M es difeomorfa a la suma conexa de tres copias de $S^2 \times S^3$.

Observación Esta variedad también queda cubierta en la demostración del segundo Teorema de las Configuraciones Básicas. Una prueba alternativa puede desarrollarse a partir de un teorema de Smale para variedades de dimensión cinco. Ver [16].

4.7.5. Una variedad de dimensión cuatro, $s = 2$

Sea M la subvariedad de \mathbb{R}^7 dada por las ecuaciones

$$x^2 = \frac{1}{2} - \|u\|^2 \tag{4.1}$$

$$2y^2 = \frac{1}{2} + \|u\|^2 - \|v + u\|^2 \tag{4.2}$$

$$2z^2 = \frac{1}{2} + \|u\|^2 - \|v - u\|^2 \tag{4.3}$$

donde $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{R}^2$. Esto implica que M es de dimensión cuatro. Sea M_+ la intersección de M con el semiespacio dado por la desigualdad $x \geq 0$. M_+ es la mitad de M . Sea B la intersección de M_+ con el semiespacio dado por la desigualdad $y \geq 0$. B es "la cuarta parte" de M . Sea A la intersección de B con el semiespacio dado por la desigualdad $z \geq 0$. A es "la octava parte" de M . En lo que sigue vamos a mostrar que M es difeomorfa a la suma conexa

$$(S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$$

El plan que seguiremos consta de los pasos siguientes:

- (i) A es difeomorfa a un disco de dimensión cuatro
- (ii) B es difeomorfa al producto $S^2 \times D^2$
- (iii) $M_+ \times I$ es difeomorfa a la suma conexa por la frontera

$$(S^2 \times D^3) \amalg (S^2 \times D^3) \amalg (S^2 \times D^3)$$

- (iv) M es la suma conexa de tres copias de $S^2 \times S^2$

Nótese que (iv) es inmediata a partir de (iii).

Veamos una por una estas afirmaciones.

- (i) Podemos identificar A con el conjunto de (u, v) tales que cumplan las tres desigualdades siguientes:

- (a) $\|u\|^2 \leq \frac{1}{2}$
- (b) $\|v + u\|^2 \leq \frac{1}{2} + \|u\|^2$
- (c) $\|v - u\|^2 \leq \frac{1}{2} + \|u\|^2$

Claramente si una pareja (u, v) cumple estas tres desigualdades, y si $t \in (0, 1)$ entonces $t(u, v)$ también cumple las tres desigualdades. No es difícil convencerse de que efectivamente A es un disco.

- (ii) Sea A^* la imagen de A bajo la reflexión con respecto al hiperplano $z = 0$. Podemos expresar a B como la

unión de $A \cup A^*$, es decir, B es la unión de dos copias de un disco de dimensión cuatro.

Ambas copias se intersectan en el conjunto $A \cap A^*$, el cual podemos identificar con las parejas (u, v) tales que se cumplen las desigualdades (a) y (b) anteriores junto con la ecuación (c1)

$$\|v - u\|^2 = \frac{1}{2} + \|u\|^2$$

Se puede ver que la función

$$\varphi : A \cap A^* \rightarrow S^1$$

dada por la regla de correspondencia

$$\varphi(u, v) = \frac{v - u}{\|v - u\|}$$

tiene las propiedades de que es suprayectiva y la imagen inversa de cada elemento $w \in S^1$ es difeomorfa a un disco de dimensión dos. De lo anterior podemos concluir que $A \cap A^*$ es difeomorfo a $S^1 \times D^2$

Por lo tanto B es difeomorfo a $S^2 \times D^2$. Más aún: podemos dar explícitamente ecuaciones para una S^2 encajada en B , basta intersectar B con el subespacio lineal $L^5 \leq \mathbb{R}^7$ determinado por la ecuación vectorial $v = -u$. El resultado es una esfera topológica de dimensión dos que se puede identificar con el elipsoide

$$4z^2 + 6\|u\|^2 = \frac{1}{2}$$

Se puede ver que esta esfera no es contraíble en B

(iii) Sea B^* la imagen de B bajo la reflexión con respecto al hiperplano $y = 0$. Notemos que $M_+ = B \cup B^*$. Podemos describir a $C = M_+ \times I$ de la manera siguiente

$$x^2 = \frac{1}{2} - \|u\|^2 + t$$

$$2y^2 = \frac{1}{2} + \|u\|^2 - \|v + u\|^2$$

$$2z^2 = \frac{1}{2} + \|u\|^2 - \|v - u\|^2$$

sujeto a las condiciones

$$x \geq 0, 0 \leq t \leq 1$$

Afirmamos que C es la suma conexa por la frontera de tres piezas, cada una de las cuales es difeomorfa a $S^2 \times D^3$. Para identificar estas tres piezas, seguiremos la estrategia siguiente:

- Encontrar tres esferas ajenas S^2 contenidas en C .

- Cortar a C en tres piezas, cada una de las cuales contenga exactamente una de las esferas encontradas previamente.

- Finalmente, mostrar que cada una de las piezas realmente es difeomorfa a un producto $S^2 \times D^3$

* Primera esfera: está caracterizada por añadir la ecuación $v = -u, y > 0, t = 0$. Esta esfera está contenida en B

** Segunda esfera: está caracterizada por añadir la ecuación $v = -u, y < 0, t = 0$. Esta esfera está contenida en B^*

*** Tercera esfera: está caracterizada por añadir la ecuación $v = u, t = 1$. Esta esfera tiene una mitad contenida en B y otra mitad contenida en B^*

Claramente son ajenas. Más aún, son representantes de clases de homología que generan al segundo grupo de homología de C .

A continuación identifiquemos piezas que las contengan

* La primera pieza es el subconjunto de C caracterizado por la desigualdad $y \geq \epsilon$. Claramente es difeomorfa a $B \times I$ la cual a su vez es difeomorfa a $S^2 \times D^3$

** La segunda pieza es el subconjunto de C caracterizado por la desigualdad $y \leq -\epsilon$. Claramente también es difeomorfa a $S^2 \times D^3$

*** La tercera pieza es el subconjunto de C que resulta de unir el complemento de las dos piezas anteriores con la vecindad tubular de la tercera esfera. Dicha vecindad tubular está dada por las desigualdades $\|v - u\|^2 \leq \epsilon$, y $1 - \epsilon \leq t \leq 1$. Para convencernos de que el resultado de unir la vecindad tubular de la tercera esfera con la pieza $-\epsilon \leq y \leq \epsilon$ es difeomorfo a la vecindad tubular de la tercera esfera, notemos que la pieza $-\epsilon \leq y \leq \epsilon$, la cual es difeomorfa a $S^1 \times D^4$, se pega de forma que "se tapa el hoyo" de la S^1

Tal como identificamos estas piezas, se intersectan en discos de dimensión cinco y no en discos de dimensión cuatro contenidos en las fronteras respectivas. Sin embargo, es claro que el resultado es el mismo.

4.7.6. Aplicando la construcción $Y \rightarrow Y'$

Tomemos como Y la variedad anterior. Sabemos que es difeomorfa a

$$(S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$$

Afirmamos que

1. Y' es simplemente conexa, pues Y lo es.
2. Y' es de dimensión cinco.
3. Todos los grupos de homología de Y' son libres. De hecho coinciden con los de la suma conexa de tres copias de $S^3 \times S^2$.
4. Abajo de la dimensión tope, (cinco, en este caso), toda clase de homología puede representarse por esferas encajadas en $Y' \times I$ con haz normal trivial.

Entonces se cumplen todas las hipótesis necesarias para aplicar los teoremas [4]. Podemos concluir que

1. Y' y Y^J son sumas conexas de productos de esferas (Y^J denota la variedad obtenida al aplicar sucesivamente la construcción $Y \rightarrow Y'$ a una misma variedad Y).
2. Y y Y^J son las sumas conexas de productos de esferas que dice el Teorema No Coaxial, pues el Teorema de la Homología de la Cubierta Ramificada nos dice que tienen exactamente la homología que deben tener.

Observación Esta variedad también queda cubierta en la demostración del segundo Teorema de las Configuraciones Básicas.

4.8. Configuraciones Pentagonales

4.8.1. El caso de dimensión cuatro

El caso pentagonal de dimensión cuatro.

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad s = 1$$

Se trata de la variedad que resulta de aplicar la construcción

$$Y \rightarrow \tilde{Y}$$

a la variedad Y que es la superficie de género cinco, la cual está encajada en S^4 . Vamos a ver qué podemos rescatar del Teorema de la Configuración Básica.

- * El resultado sobre la homología sigue siendo válido
- * \tilde{Y} sigue siendo la unión de dos piezas
- * Ambas piezas son difeomorfas al complemento de una vecindad tubular de Y'_+ en S^4 , en este caso estamos hablando del complemento de la suma conexa por la frontera de cinco copias de $S^1 \times D^3$ en S^4 . Se puede ver que entonces ambas piezas son simplemente conexas.
- * Ambas piezas se pegan a lo largo de Y'_+ la cual es conexa. Se debe cumplir que \tilde{Y} debe ser simplemente conexa.

Sabemos que \tilde{Y} es una variedad compacta, simplemente conexa y además es frontera de otra variedad. Como antes, le podemos aplicar el Teorema de Clasificación de 4-variedades de Freedman. Dado que los grupos de homología de \tilde{Y} coinciden con los de la suma conexa de cinco copias de $S^2 \times S^2$, podemos concluir que \tilde{Y} es **homeomorfa** a la suma conexa de cinco copias de $S^2 \times S^2$.

¿Será PL-homeomorfa? Tenemos el resultado siguiente de Hosokawa y Kawauchi (ver [7])

Teorema 29 *Sea F_n una superficie cerrada, conexa y orientada de género n en \mathbb{R}^4 . Entonces F_n no está anudada en \mathbb{R}^4 si y solamente existe una isotopía ambiente entre F_n y la frontera de una vecindad regular de una rosa de n -hojas L_n en $\mathbb{R}^3[0]$*

Observaciones

1. Se dice que F_n no está anudada en \mathbb{R}^4 si existe un toro sólido T_n de género n en \mathbb{R}^4 cuya frontera es F_n .
2. De acuerdo a esta definición, la variedad Y no está anudada.
3. Notación: $\mathbb{R}^3[t_0]$ es el hiperplano de \mathbb{R}^4 cuya cuarta coordenada t es t_0 .
4. Una rosa de n -hojas L_n en $\mathbb{R}^3[0]$ es un ramillete de n copias de S^1 encajadas en un plano en $\mathbb{R}^3[0]$.
5. Aplicando este Teorema, podemos decir que Y es PL-isotópica a un encaje estándar de la superficie de género cinco.

Dado que para el encaje estándar la cubierta ramificada es difeomorfa a cinco copias de $S^2 \times S^2$, podemos concluir que \tilde{Y} es PL-homeomorfa a dicha suma conexa. Pero en dimensión cuatro esto es suficiente para que la variedad suave \tilde{Y} sea **difeomorfa** a

$$\#(5)(S^2 \times S^2)$$

Cabe señalar que este tipo de argumentación puede dar lugar a otras demostraciones de los casos especiales de dimensión cuatro que hemos estado estudiando.

Agradecimiento De todos los casos restantes del Teorema No Coaxial, éste fue el que último en demostrar, pues requería otra manera de abordar el problema. Especial agradecimiento le expreso al Dr. Francisco González Acuña (Fico). Sus valiosas sugerencias fueron clave para tratar con variedades como ésta, de dimensión cuatro. También utilizamos ampliamente sus lemas para realizar sumas conexas a lo largo de la frontera de variedades con frontera, en fin, ¡Muchas gracias Fico!

4.8.2. El caso de dimensión cinco

Esta variedad tiene la configuración

$$6 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1, \quad s = 1$$

Es decir, resulta de aplicarle la construcción $Y \rightarrow Y'$ a la variedad de dimensión cuatro que acabamos de estudiar. Tenemos que:

1. Y' es una variedad de dimensión cinco
2. Y' es simplemente conexa
3. Todos los grupos de homología de Y' son libres
4. Abajo de la dimensión tope (cinco en este caso) todas las clases de homología pueden representarse por esferas encajadas en $Y' \times I$ con haz normal trivial

Podemos concluir que Y' es suma conexa de productos de esferas. Más aún, los productos de esferas son los que se afirma en el Teorema No Coaxial. De hecho, esto se sigue no solamente para Y' sino para todas las Y^J , es decir, esto vale para cualquier configuración pentagonal con $s = 1$.

Observación Notemos que esta variedad también queda incluida en la demostración del segundo Teorema de las Configuraciones Básicas.

4.8.3. Los casos pentagonales con $s \geq 2$

Comencemos con la variedad Z que resulta de aplicar la construcción $Y \rightarrow \tilde{Y}$ a la variedad pentagonal de dimensión cuatro con $s = 1$. Estamos casi listos para poder aplicarle a Z el Teorema de la Configuración Básica, pues es de dimensión seis y $H_p(Z)$ es libre de rango 10. Solamente tendríamos que ver que es 2-conexa, pero podemos reproducir la parte de la demostración en la que se muestra que si Y es $(p-1)$ -conexa, entonces \tilde{Y} es p -conexa. Entonces tendríamos que si Y es 1-conexa, entonces \tilde{Y} será 2-conexa, en otras palabras, Z es 2-conexa. Por lo tanto Z queda cubierta por el Teorema de la Configuración Básica. Claramente de aquí se siguen todos los casos pentagonales restantes.

4.9. Configuraciones de 7 o más lados

En este caso tenemos todos los elementos para proceder por inducción.

4.9.1. La base de la inducción

Comencemos con la configuración básica de 7 o más lados.

$$n = 2l + 1 = 1 + \cdots + 1, \quad s = 1$$

Donde $l \geq 3$. En este caso el sistema consta de 3 ecuaciones reales en \mathbb{R}^{2l+3} , y nuestra variedad tiene dimensión $2l \geq 6$. Más aún, una variedad como esta cumple todas las hipótesis del Teorema de la Configuración Básica, pues resultan de aplicar la construcción $Y \rightarrow \tilde{Y}$ a una variedad de la forma

$$Y \cong (S^{l-1} \times S^{l-1}) \# \cdots \# (S^{l-1} \times S^{l-1})$$

que es simplemente conexa pues todas las esferas son de dimensión mayor o igual que dos.

4.9.2. El paso inductivo

Para aplicar el paso inductivo aprovecharemos la información siguiente.

1. Si Y es simplemente conexa, también lo son Y' y \tilde{Y} .
2. Si Y es de dimensión mayor o igual que seis, también lo son Y' y \tilde{Y} .
3. Bajo las condiciones anteriores podemos asegurar que si Y es suma conexa de productos de esferas, también lo son Y' y \tilde{Y} .
4. Conocemos la relación entre la homología de Y y la de Y' y la de \tilde{Y} .

Para verificar que se cumple el Teorema No Coaxial podemos describir nuestra variedad como el resultado de aplicar primero la construcción $Y \rightarrow \tilde{Y}$ exactamente s veces a una variedad que queda cubierta por el Teorema Coaxial. Por todo lo anterior sabemos que nuestra variedad será una suma conexa de productos de esferas. Y gracias al Teorema de la Homología de la Cubierta Ramificada podemos deducir que el número de sumandos es el mismo, y que la dimensión de cada una de las esferas que aparecen en los productos se incrementa en una unidad cada vez que aplicamos la construcción $Y \rightarrow \tilde{Y}$.

Comentario Final Al principio de este capítulo trazamos un plan para demostrar el Teorema No Coaxial. En resumen hicimos lo siguiente:

1. Completamos la demostración del Teorema Coaxial (sección 4.2)
2. Demostramos que el paso inductivo $s \mapsto s + 1$ es válido cuando la dimensión de la variedad es mayor o igual que cinco (secciones 4.3 a 4.6).
3. En el caso de las configuraciones triangulares demostramos que el teorema vale en todas las dimensiones (sección 4.7).
4. En el caso de las configuraciones pentagonales demostramos que el teorema es válido en todas las dimensiones (sección 4.8)
5. En el caso de las configuraciones de siete o más lados (sección 4.9) demostramos la base de la inducción con el Teorema de las Configuraciones Básicas, el cual además abarca todos los valores positivos de s , y también mostramos que podemos aplicar la construcción $Y \rightarrow Y'$ a estas variedades, todas las cuales son de dimensión mayor o igual que cinco.

¡Terminamos!

4.10. Epílogo

En el transcurso de la revisión de este trabajo, descubrimos que se podía simplificar la discusión de varios casos restantes que se obtienen al aplicar la construcción $Y \rightarrow \tilde{Y}$. A continuación añadimos estas demostraciones, simples y bellas.

4.10.1. Casos en que Y tiene $s=0$, $n=1+p+q$

Sin pérdida de generalidad $p \leq q$. $Y = S^0 \times S^{p-1} \times S^{q-1}$. Podemos tomar $Y'_+ = S^0 \times S^{p-1} \times D^q$ encajada de modo estándar en S^{p+q} . Más aún, podemos encajar Y'_+ simétricamente dentro de un ecuador, de modo que la reflexión con respecto a este ecuador extienda el difeomorfismo de pegado entre las fronteras de \tilde{Y}_+ y \tilde{Y}_- a todo su exterior W . Entonces \tilde{Y} es el doble de W , y como éste es igual a S^{p+q} menos dos copias de $S^{p-1} \times D^{q+1}$, entonces \tilde{Y} es igual a $(S^1 \times S^{p+q-1}) \# (S^p \times S^q) \# (S^p \times S^q)$

4.10.2. Casos en que Y es la superficie de género tres o cinco

En ambos casos Y_+ es una superficie conexa con frontera no vacía (en el primer caso es el toro menos dos discos, en el segundo es el toro menos cuatro discos) y por lo tanto $Y'_+ = Y_+ \times D^1$ es una suma conexa a lo largo de la frontera de copias de $S^1 \times D^2$. Aplicando el teorema de Hosokawa y Kawauchi, esto significa que las superficies no están anudadas, y por lo tanto \tilde{Y} es doble cubriente de S^4 ramificada sobre una superficie encajada de manera estándar, lo cual permite aplicar el argumento de simetría anterior y concluir que \tilde{Y} es la suma conexa de copias de $S^2 \times S^2$ (tres y cinco, respectivamente).

Bibliografía

- [1] Akbulut, S. y King, H. *Topology of Real Algebraic Sets*, MSRI Publications **25**, Springer Verlag, 1992.
- [2] Bochnak, J., Coste, M., y Roy, F. *Géométrie algébrique réelle*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete 3-12, Springer-Verlag, 1987.
- [3] Brickman, L. *On the field of values of a matrix* Proc. Amer. Math. Soc. **12**, (1961), 61-66.
- [4] Gitler, S. y López de Medrano, S. *Intersections of Quadrics, Moment-Angle Manifolds and Connected Sums*, arXiv:0901v2, 2009.
- [5] Halmos, P.R. *A Hilbert Space Problem Book*, American Book-Van Nostrand-Reinhold, New-York-Toronto-London-Melbourne (1967) Second edition: Graduate Texts in Mathematics **19**, Springer Verlag, New-York, 1982.
- [6] Hirzebruch, F. *Arrangements of lines and algebraic surfaces*. Arithmetic and Geometry, vol. II, Proc. Math. **36**, 113-140, Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1983.
- [7] Hosokawa, F.; Kawauchi, A. *Proposal for Unknotted Surfaces in Four-Spaces*, Osaka J. Math. **16**, (1979), 233-248.
- [8] Hudson, J. F. P.; Zeeman, E. C. *On regular neighbourhoods*, Proc. London Math. Soc. (3) **14**, 1964 719–745 y *Correction to: „ n regular neighbourhoods”*. Proc. London Math. Soc. (3) **21**, 1970 513–524.
- [9] Kahn, D.S., Priddy, S.B. *Applications of the transfer to stable homotopy theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **78**, (1972), 135-146.
- [10] King, H. *Planar linkages and real algebraic sets*, Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference, 1998, 33-56.
- [11] López de Medrano, S. *The Topology of the Intersection of Quadrics in \mathbb{R}^n* , en *Algebraic Topology* (Arcata Ca,1986), Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics **1370** (1989), 280-292.
- [12] McGavran, D. *Adjacent Connected Sums and Torus Actions*, Transactions of the American Mathematical Society, Volume **251**, 1979, 235-254.
- [13] Nash, J. *Real Algebraic Manifolds* Annals of Mathematics, **56**, No. 3, (Nov.,1952), 405-421.
- [14] Ray, N. *A geometric observation on the Arf invariant of a framed manifold*, Bull. London Math. Soc. **4**, (1972), 163-164.
- [15] Seifert, H. *Algebraische Approximation von Mannifaltigkeiten*, Math. Z. **41**, (1936), 1-17.
- [16] Smale, S. *On the Structure of 5-Manifolds* Annals of Mathematics, **75**, No. 1, January, 1962, 38-46.
- [17] Thom, R. *Quelques Propriétés Globales des Variétés Différentiables*, Comment. Math. Helv., **28**, (1954), 17-86.
- [18] Tognoli, A. *Sur una congettura di Nash*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **27**, (1973), 167-185.
- [19] Wall, C.T.C. *Stability, Pencils and Polytopes*, Bull. London Math. Soc. **12**, (1980), 401-421.
- [20] Wallace, A.H. *Algebraic approximations of manifolds*, Proc. London Math. Soc. **7**, (1957), 196-210.