



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
ÁREA ENERGÍA, SISTEMAS ENERGÉTICOS

**Estudio teórico del flujo producido por una fuerza de
Lorentz azimutal en un agitador electromagnético**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
James Pérez Barrera

TUTOR PRINCIPAL
Dr. Sergio Cuevas García, Instituto de Energías Renovables

MÉXICO, D. F. Agosto 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Eduardo Ramos Mora

Secretario: Dr. Sergio Cuevas García

Vocal: Dr. Federico Vázquez Hurtado

1^{er.} Suplente: Dr. Miguel Pérez Robles

2^{do.} Suplente: Dr. Julio Javier Martinell Benito

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto de Energías Renovables,
UNAM

TUTOR DE TESIS:

Dr. Sergio Cuevas García

FIRMA

Agradecimientos

A la UNAM, especialmente al Instituto de Energías Renovables, por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría en un ambiente fraterno y confortable.

A los nuevos amigos que he encontrado en esta etapa de mi vida: Saúl, maestro que me inició en el fascinante mundo de los métodos numéricos y sin el cual este trabajo no habría sido posible. A Cinthya, Memo, J.J., Chapo, Chapito y Manuel, con quienes he pasado grandes momentos de mucha risa. A Enrique, por lo momentos de discusión acerca de sus experimentos que han enriquecido mi formación. A Rodolfo, por los momentos de locura que hemos compartido como compañeros de cubo. A mis compañeros de generación.

Al CONACyT por el apoyo económico brindado durante la realización de esta tesis. Así como también al proyecto CONACYT 131399 “Flujos magnetohidrodinámicos en campos magnéticos inhomogéneos”.

Al Dr. Eduardo Ramos por los conocimientos que me ha transmitido durante las clases que me ha impartido.

Especialmente al Dr. Sergio Cuevas García por haberme mostrado el exquisito mundo de la mecánica de fluidos, especialmente de la MHD; por el tiempo que ha dedicado a la revisión y corrección de esta tesis y, principalmente, por haberme permitido trabajar bajo su tutela, lo cual ha significado un gran honor.

Dedicatoria

A. M. D. G.

A mis padres, quienes siempre me han apoyado en todas mis empresas y han sabido enseñarme a través de su ejemplo.

A mis hermanos, de quienes siempre he recibido apoyo y consejo.

A mis amigos, hermanos por elección, con quienes he compartido momentos invaluable e inolvidables.

Índice general

Resumen	7
Introducción	8
1. Formulación del problema	16
1.1. Ecuaciones de la mecánica de fluidos	16
1.2. Ecuaciones del campo electromagnético	17
1.2.1. Ecuaciones de Maxwell	18
1.2.2. Ley de Ohm	19
1.2.3. La fuerza de Lorentz	19
1.3. Aproximación MHD	20
1.4. Formulación ϕ ($R_m \ll 1$)	21
1.5. Ecuaciones adimensionales	23
2. Solución analítica para el flujo MHD entre cilindros concéntricos	26
2.1. Formulación del problema	26
2.2. Solución para la aproximación bidimensional	28
3. Soluciones numéricas de flujos MHD en geometría cilíndrica	38
3.1. Aproximación bidimensional para el flujo entre dos cilindros concéntricos	39
3.1.1. Aproximación bidimensional con campo magnético uniforme .	39
3.1.2. Aproximación bidimensional con campo magnético no uniforme	42
3.1.3. Aproximación bidimensional con campo magnético localizado .	47
3.2. Modelo Q2D del flujo en un agitador MHD	54
3.2.1. Ecuaciones del modelo Q2D	54
3.2.2. Determinación de la función f	57
Conclusiones y trabajo a futuro	61

A. El método de volumen finito	64
A.1. Discretización de las ecuaciones de balance	64
A.2. Condiciones de frontera	67
A.2.1. Condición del primer tipo o Dirichlet	67
A.2.2. Condición del segundo tipo o Neumann	68
A.3. Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes	69
A.3.1. Acoplamiento presión-velocidad	70
A.3.2. Método SIMPLEC	71
Bibliografía	73

Resumen

En este trabajo se presenta una primera descripción teórica del flujo de un fluido eléctricamente conductor producido en un agitador electromagnético con geometría cilíndrica debido a una fuerza de Lorentz azimutal. Esta fuerza se genera a partir de la interacción de una corriente eléctrica radial, que se inyecta directamente en el fluido, y un campo magnético producido por un imán permanente. Este flujo ha sido estudiado de manera experimental en el IER encontrándose una inestabilidad tipo Kelvin-Helmholtz que consiste en vórtices anticiclónicos que no han sido previamente reportados en la literatura. Al considerar que el flujo del fluido es completamente bidimensional y tiene lugar únicamente en la dirección azimutal, se obtiene una solución analítica de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno. A partir de esta solución se plantea una explicación cualitativa de la región en la cual pueden existir los vórtices anticiclónicos así como de su largo tiempo de vida. Con el fin de estudiar comportamientos que se encuentran fuera del alcance del modelo analítico, se realizó un código numérico bidimensional para resolver las ecuaciones de balance y poder observar lo que sucede durante el flujo transitorio así como también el efecto que provoca un campo magnético aplicado no uniforme. De manera general, se encontró que la no uniformidad del campo magnético aplicado resulta en perfiles de velocidad azimutal muy asimétricos en comparación con la solución analítica. Asimismo, al inicio del movimiento se encontró que el flujo presenta un perfil de velocidad similar a un flujo Kepleriano regularizado, el cual ha sido utilizado en la simulación de fenómenos astrofísicos que dan lugar a la formación de vórtices anticiclónicos parecidos a los observados en el laboratorio. De esta forma se establecieron las similitudes y diferencias entre los fenómenos experimentales a escala de laboratorio observados en el IER y los reportados a nivel astrofísico en la literatura especializada. Asimismo, se programó una herramienta numérica utilizando una aproximación cuasi-bidimensional que incorpora la fricción existente con la pared del fondo del agitador, lo que tiene un efecto de frenado en el flujo global estudiado.

Introducción

La *magnetohidrodinámica* (MHD) es el área de la física que conjunta los conceptos de la mecánica de fluidos y el electromagnetismo para estudiar el comportamiento de los fluidos eléctricamente conductores cuando estos interactúan con campos magnéticos. Como resultado de la interacción entre fluidos y campos, en los fenómenos MHD se presentan interesantes patrones de flujo que no se observan en los casos meramente hidrodinámicos.

En la naturaleza, los flujos MHD ocurren en procesos tales como el *efecto dínamo*, el cual explica que la existencia del campo magnético terrestre se debe a las corrientes eléctricas que se inducen en el núcleo líquido de la Tierra por el movimiento del mismo. La MHD también se aplica en el estudio de la *inestabilidad magnetorotacional*, la cual es un fenómeno astrofísico que está relacionado con la formación de las galaxias.

Dada la naturaleza inherente de los fluidos conductores de electricidad, tales como los electrolitos, los metales líquidos y los plasmas, estos son susceptibles de ser afectados por la acción de fuerzas de cuerpo electromagnéticas. En aplicaciones tecnológicas, este hecho trae consigo la ventaja de poder prescindir de la intrusión de partes mecánicas para, por ejemplo, hacer que estos fluidos se agiten, mezclen o sean transportados de un lugar a otro. Debido a lo anterior, en las últimas décadas se han desarrollado diversos procesos industriales en los que la magnetohidrodinámica tiene particular importancia [Asai (2012)]. Dichos procesos se utilizan en aplicaciones tales como la metalurgia, la ingeniería nuclear y el procesamiento electromagnético de materiales (EPM, por sus siglas en inglés), por citar algunas. Por ejemplo, en el método Czochralski, empleado para la elaboración de silicio cristalino, se siembra un cristal en el seno del material fundido (silicio líquido) para que después de un cierto proceso, al enfriarse, se produzca un cristal de mayor tamaño con una concentración homogénea de aditivos denominados *dopantes*. Debido a que el silicio cristalino se emplea en dispositivos electrónicos, la estructura cristalina y distribución de los dopantes afectan de manera importante sus propiedades eléctricas, por ello se requiere

que los procesos de cristalización y dopaje se lleven a cabo con mucha precisión. Al igual que otros autores, Hjellming y Walker (1986) han sugerido la aplicación de campos magnéticos para controlar el movimiento del silicio líquido y con ello producir cristales con mejores propiedades eléctricas.

Existen diversas aplicaciones de los dispositivos MHD tales como las *bombas MHD*, empleadas para llevar un fluido conductor de un lugar a otro o los *agitadores MHD*, los cuales se utilizan para mezclar y/o agitar fluidos. Los agitadores MHD se utilizan tanto para estudios básicos como para aplicaciones relacionadas al procesamiento de materiales en donde se aprovechan las fuerzas electromagnéticas para agitar el material tratando de preservar su pureza. En el presente trabajo se describe la modelación numérica de un agitador MHD con geometría cilíndrica bajo diversas condiciones de operación, las cuales incluyen tanto la imposición de un campo magnético uniforme, como de uno no uniforme y localizado.

En el Instituto de Energías Renovables (IER) de la UNAM (antes Centro de Investigación en Energía) se cuenta con el antecedente de estudios sobre el comportamiento de delgadas capas de electrolitos o de metales líquidos sujetas a la acción de fuerzas electromagnéticas [Figuroa (2010), Beltrán (2010), Rivero (2012)]. Recientemente, se han llevado a cabo en el IER experimentos en un agitador MHD con geometría cilíndrica donde se crea una fuerza azimutal para agitar un electrolito [Pérez-Espinoza (2012)]. La presente tesis tiene por objetivo iniciar la descripción teórica de los flujos observados en este sistema y tratar de profundizar en su análisis.

El agitador MHD consiste en una pieza rectangular de acrílico con una cavidad cilíndrica de 8.75 cm de diámetro y un barreno circular de 2.54 cm en el centro de la cavidad. Una lámina delgada de cobre, que cubre la pared interna de la cavidad cilíndrica, y una pieza del mismo material, embebida en el barreno circular, sirven como electrodos por los cuales se puede inyectar una corriente eléctrica que es esencialmente radial. El agitador cuenta con un dispositivo electrónico de control que permite invertir la dirección de la corriente o bien inyectarla de manera alternante (ver Fig. 1a).

En la cavidad cilíndrica se vierte una solución salina de bicarbonato de sodio al 8% *m/v*. Debajo del agitador se coloca un imán rectangular permanente, de tal forma que el campo magnético aplicado es aproximadamente uniforme y actúa de manera perpendicular a la sección circular del agitador con una intensidad promedio de 0.4 T. Al interactuar el campo magnético del imán y la corriente eléctrica aplicada, se produce una fuerza de cuerpo denominada *fuerza de Lorentz*, la cual se expresa en la forma $\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0$, donde \mathbf{j} es la densidad de corriente eléctrica y \mathbf{B}_0 es el campo magnético

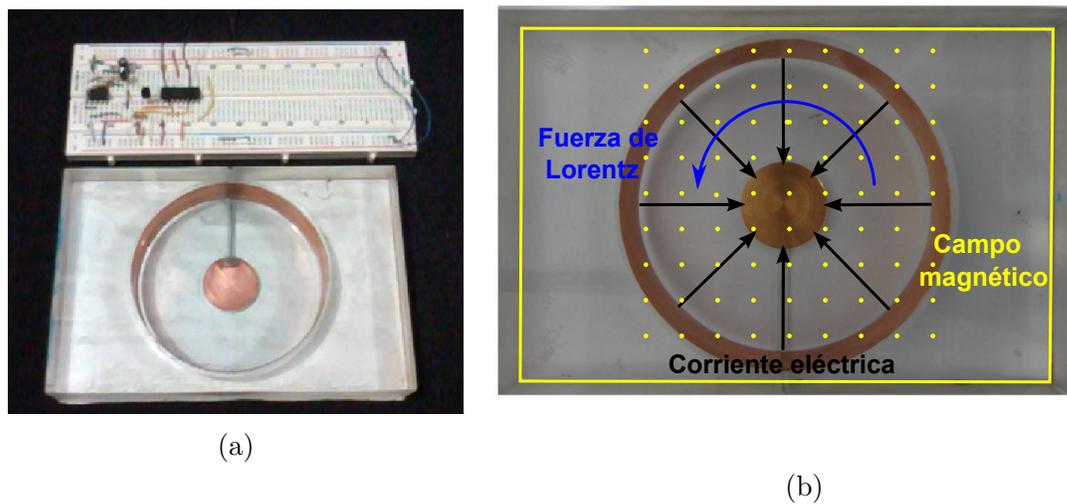


Figura 1: a) Agitador MHD con geometría cilíndrica [Pérez-Espinoza (2012)]. Se muestra el agitador junto con el sistema de control para la corriente que se inyecta en el equipo. b) La interacción de la corriente eléctrica radial (flechas negras) y el campo magnético aplicado que sale del plano de la página (puntos amarillos) produce una fuerza de Lorentz en la dirección azimutal en sentido antihorario (flecha azul).

aplicado. Dadas las direcciones de \mathbf{j} y \mathbf{B}_0 , la fuerza de Lorentz provoca el movimiento del electrolito en la dirección azimutal (ver Fig. 1b).

Dada la naturaleza del experimento resulta complicado, mediante métodos ópticos tradicionales tales como la Velocimetría por Imágenes de Partículas (PIV, por sus siglas en inglés), realizar mediciones cuantitativas del flujo dentro del dispositivo, así que para visualizar los patrones de flujo se utiliza tinta vegetal como trazador del movimiento del electrolito. En una segunda versión del experimento se espera contar con la posibilidad de realizar mediciones utilizando el método PIV. Se ha observado que para ciertos valores de la corriente inyectada, el flujo sufre una inestabilidad tipo Kelvin-Helmholtz, lo cual produce la formación de estructuras vorticosas denominadas *vórtices anticiclónicos* cuyo sentido de giro es contrario al sentido del flujo global (es decir, si el fluido se mueve netamente en sentido horario, los vórtices giran en sentido antihorario). En la Figura 2 se muestran ocho vórtices observados en el agitador MHD cuando la corriente inyectada es de 260 mA. La corriente eléctrica para este caso se inyecta de manera radial hacia afuera y ya que el campo magnético sale del plano de la página, el flujo neto se da en el sentido de las manecillas del

reloj. Inyectar la corriente en forma radial hacia adentro produce un flujo en sentido anti-horario en el cual, para ciertos valores de la corriente también se observan los vórtices surgidos de la inestabilidad.



Figura 2: Vórtices anticiclónicos observados en el agitador MHD para una corriente de 260 mA [Pérez-Espinoza (2012)].

Se han realizado diversos estudios sobre el comportamiento y estabilidad de electrolitos en contenedores cilíndricos. Qin y Bau (2012) analizan numéricamente la estabilidad de un electrolito sometido a una fuerza de Lorentz azimutal en un agitador similar al analizado en el IER. Sin embargo, en vez del electrodo central embebido en el fondo del contenedor, estos autores consideraron que el electrodo central es otro cilindro concéntrico. Ésta es una configuración que ha sido más estudiada que la utilizada inicialmente en el IER. En su estudio, estos autores consideran una ecuación electroquímica que describe el campo de concentración de las especies constituyentes del electrolito empleado y llegan a la conclusión de que la variación radial de la concentración de los iones provoca efectos que estabilizan el flujo cuando la corriente se dirige en dirección radial hacia adentro, y lo desestabilizan cuando es en dirección radial hacia afuera. Este resultado aparentemente contradice el resultado experimental observado en el laboratorio del IER, pues las inestabilidades se observan independientemente del sentido en el que se inyecta la corriente [Pérez-Espinoza (2012)]. Recientemente se han realizado nuevos experimentos en el IER que muestran que cuando se utilizan dos cilindros concéntricos como electrodos, la inestabilidad también aparece.

A pesar de que Qin y Bau reportan la aparición de inestabilidades en sus resultados, las inestabilidades descritas ocurren en el plano meridional (rz) y consisten en celdas

convectivas debidas a los gradientes de concentración (Fig. 3). Sin embargo, no se reporta la aparición de vórtices anticiclónicos en el plano $r\theta$ como los observados en los experimentos del IER.

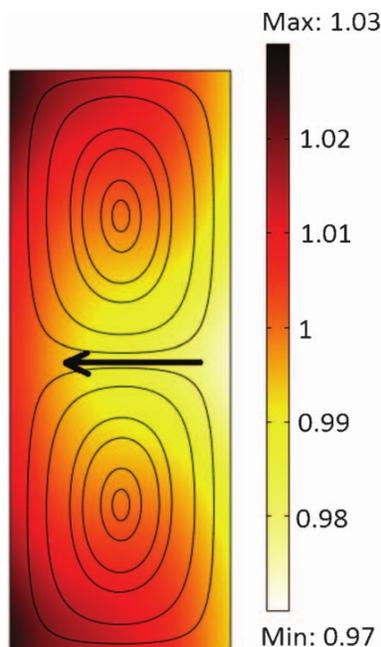


Figura 3: Inestabilidad reportada por Qin y Bau (2012) en el plano rz para un agitador MHD. El mapa de colores muestra la concentración de uno de los iones constituyentes del electrolito binario empleado.

Digilov (2007) hizo experimentos en los cuales utilizó una solución acuosa de $CuSO_4$ al 2%, la cual confinó entre dos electrodos cilíndricos concéntricos de aluminio separados por una distancia de ~ 22.5 mm (Fig 4). En todos los casos reportados por el autor únicamente se observa un flujo en la dirección azimutal. Este autor además ofrece una solución analítica al problema suponiendo que los cilindros concéntricos son infinitos. Sin embargo, esta solución es incompleta pues se realiza una sobre simplificación en la cual la velocidad del fluido no influye en la distribución del potencial eléctrico, cuando en realidad dicha distribución sí depende de la velocidad. En el Capítulo 2 del presente trabajo se obtiene una solución analítica que describe mejor el flujo en cuestión. Un antecedente del enfoque seguido aquí es el flujo MHD en espiral entre ductos anulares presentado por Nuñez (2008).

Debido a las discrepancias anteriormente mostradas y al entendimiento parcial del fenómeno, resulta prudente complementar los estudios experimentales realizados en

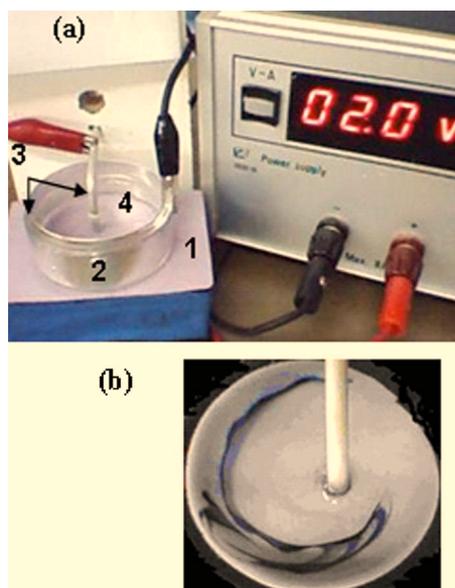


Figura 4: a) Dispositivo experimental utilizado en los experimentos de Digilov (2007) que consta de (1) un imán rectangular permanente, (2) contenedor cilíndrico, (3) electrodos cilíndricos de aluminio y (4) solución de $CuSO_4$. b) Flujo azimutal observado por el autor.

el IER mediante estudios teórico-numéricos para el caso de un agitador MHD con geometría cilíndrica con el fin de lograr una mejor comprensión de lo que ocurre en este tipo de dispositivos.

Resulta interesante observar que los vórtices anticiclónicos, análogos a los encontrados experimentalmente en el IER, son “estructuras coherentes” que se han observado en simulaciones numéricas durante la formación de objetos protoplanetarios [Bracco *et al.* (1999), Lissauer (1993)]. Cuando una estrella nace, se encuentra rodeada de polvo interstelar que gira con una gran cantidad de momento angular, presentándose un balance entre la fuerza de gravedad y la fuerza en la dirección radial de tal manera que se genera un “disco protoplanetario”. Conforme el polvo interstelar se aproxima al plano medio del disco, se comienzan a formar agregados de partículas debido a inestabilidades gravitacionales. Lo anterior resulta en perturbaciones del flujo que, si son lo suficientemente grandes, se convierten en vórtices anticiclónicos que promueven el agregado de partículas que eventualmente se convierten en cuerpos sólidos como planetas [Bracco *et al.* (1999)]. Para estudiar cómo los vórtices anticiclónicos se generan a partir del disco protoplanetario, Bracco *et al.* (1999) realizaron simula-

ciones numéricas utilizando un método pseudo-espectral con condiciones periódicas y un perfil de velocidad dado de un “flujo Kepleriano regularizado” como condición inicial (Fig. 5). Como resultado de sus simulaciones, los autores reportaron la existencia de vórtices anticiclónicos que tienen una gran similitud con aquellos observados a nivel laboratorio en el IER (Fig. 6).

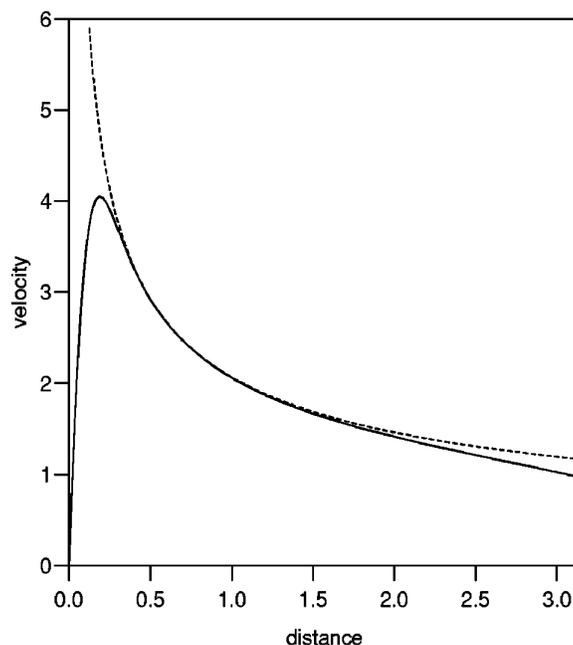


Figura 5: Flujo Kepleriano utilizado en las simulaciones de Bracco *et al.* (1999). La línea punteada representa un perfil Kepleriano clásico. La línea sólida es el perfil Kepleriano regularizado.

A pesar de la gran similitud, se pueden observar diferencias entre ambos fenómenos como lo son el número de vórtices, la posición radial y el tamaño de los mismos. Resulta interesante que los fenómenos sean tan parecidos ya que las escalas de tiempo y longitud son muy diversas, además de que las fuerzas involucradas son de origen distinto. Para el caso del experimento del IER, las escalas de tiempo corresponden a segundos y las longitudes características son de unos pocos centímetros, en tanto que en la simulación Bracco *et al.* (1999) se emplean escalas de tiempo de miles de años y de longitud del orden de miles de kilómetros.

El resto de la tesis está conformada de la siguiente manera. El Capítulo 1 describe la formulación matemática del problema en estudio, iniciando con las ecuaciones de balance de la mecánica de fluidos y las ecuaciones del electromagnetismo, sintetizando

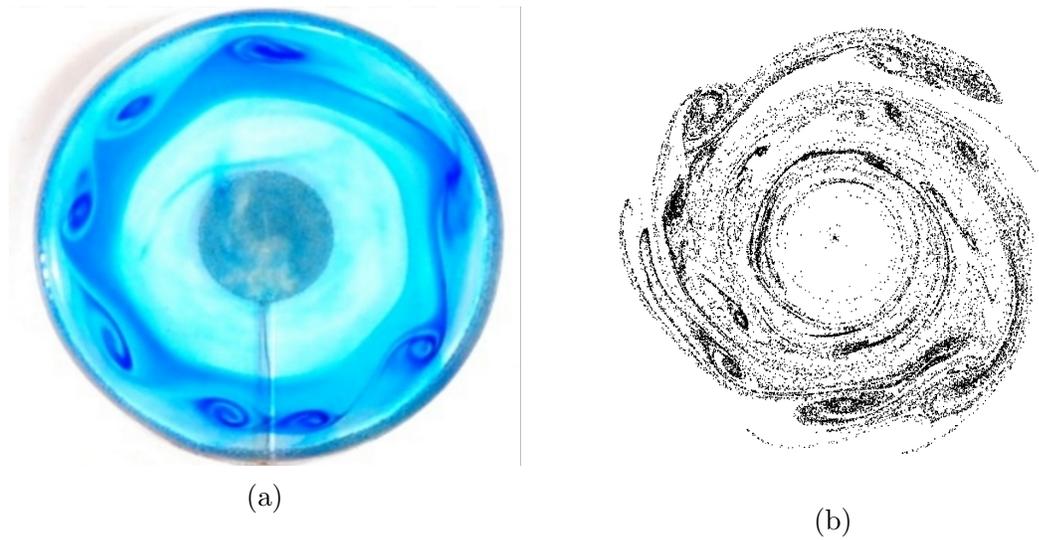


Figura 6: Similitud entre vórtices anticiclónicos observados en el IER y los obtenidos mediante cálculos numéricos por Bracco *et al.* (1999). a) Vórtices observados en el agitador MHD del IER mediante una tinta vegetal trazadora. b) Distribución de partículas trazadoras computadas por Bracco *et al.* (1999)

las ecuaciones básicas de la MHD. Posteriormente se describe la adimensionalización del fenómeno y las consideraciones realizadas para la modelación de un agitador MHD con geometría cilíndrica. En el Capítulo 2 se resuelven analíticamente las ecuaciones de balance bajo ciertas consideraciones utilizando una aproximación bidimensional del flujo entre cilindros concéntricos infinitos bajo un campo magnético uniforme. En el Capítulo 3 se resuelven de manera numérica las ecuaciones de balance completas en las aproximaciones bidimensional y cuasi-bidimensional y se estudian los casos de campo magnético uniforme así como no uniforme, en donde se incluye el caso de campos magnéticos localizados. Se muestran los resultados obtenidos mediante la técnica de volumen finito aplicada al problema bajo estudio. Finalmente, en el último capítulo se resumen las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Formulación del problema

En el presente capítulo se describe la formulación matemática del problema en estudio. Se comienza con una breve descripción de las ecuaciones de balance de la mecánica de fluidos para un fluido Newtoniano incompresible. En seguida se abordan las ecuaciones del electromagnetismo y se conjuntan ambas para obtener las ecuaciones de balance de un fluido conductor en un campo magnético en la denominada aproximación MHD. Por último, se adimensionalizan las ecuaciones y se expresan en la llamada formulación ϕ , es decir, la formulación que utiliza el potencial eléctrico como variable dependiente, además de la presión y el campo de velocidad.

1.1. Ecuaciones de la mecánica de fluidos

En mecánica de fluidos se busca describir el comportamiento de los fluidos cuando estos son sometidos a ciertas condiciones externas que incluyen, por ejemplo, gradientes de presión, temperatura o movimiento de partes mecánicas. Desde un punto de vista macroscópico se acepta que la *hipótesis del continuo* es válida, esto es, se pueden definir todas las propiedades del fluido (por ejemplo presión, densidad, velocidad) en cualquier punto del espacio y en cualquier instante de tiempo sin importar el comportamiento específico a nivel molecular. Bajo esta óptica se pueden emplear la ley de conservación de la masa, la Segunda Ley de movimiento Newton y la Primera Ley de la Termodinámica, en unión con relaciones constitutivas y ecuaciones termodinámicas de equilibrio local, para obtener un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento espacio-temporal de los fluidos [Currie (2007)].

En muchas aplicaciones prácticas, los líquidos, y aún los gases, pueden considerarse incompresibles, esto es, su volumen no cambia debido a la acción de fuerzas compresionales y por ende su densidad es constante. Al aplicar la ley de conservación de la masa a un fluido incompresible se obtiene la denominada *ecuación de continuidad*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

donde \mathbf{u} es el campo de velocidad del fluido que en general depende del espacio y del tiempo. De lo anterior podemos interpretar que, en el seno de un fluido, la cantidad de masa que entra en cualquier elemento de volumen es la misma que la que sale del mismo.

En muchas aplicaciones prácticas, como en el caso de los problemas tratados en el presente estudio, el fluido de trabajo se puede considerar Newtoniano. Tal es el caso de los fluidos conductores más comunes, es decir, los electrolitos y los metales líquidos. Para un fluido Newtoniano, la aplicación de la Segunda Ley de Newton lleva a las denominadas *ecuaciones de Navier-Stokes* que se pueden expresar en la forma

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad (1.2)$$

donde ρ y η representan la densidad y viscosidad dinámica del fluido; p es el campo de presión y \mathbf{f} denota una fuerza de cuerpo que actúa sobre el fluido.

1.2. Ecuaciones del campo electromagnético

En la MHD nos interesa describir los flujos de fluidos eléctricamente conductores cuando interaccionan con campos magnéticos. El comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos se describe, de manera general, mediante ecuaciones relativistas, sin embargo en los fenómenos MHD a escala de laboratorio, las velocidades son pequeñas cuando se comparan con la velocidad de la luz. Como resultado, las ecuaciones electromagnéticas empleadas en estudios de laboratorio corresponden a la electrodinámica clásica en la aproximación no relativista. Entre estas ecuaciones se incluyen las *ecuaciones de Maxwell*, la *fuerza de Lorentz* y una relación constitutiva conocida como la *ley de Ohm*.

1.2.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales parciales que describen el comportamiento espacio-temporal de los campos eléctricos y magnéticos y son consideradas entre las ecuaciones con mayor influencia en toda la ciencia [Fleisch (2008)]. De manera local para un medio material homogéneo, isotrópico y lineal, estas ecuaciones se expresan como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

La Ecuación 1.3 es la *Ley de Gauss para el campo eléctrico*, donde \mathbf{E} es el campo eléctrico, ρ_e es la densidad de carga eléctrica total en el punto donde se evalúa la misma y ϵ representa la permitividad del medio material. Esta ecuación muestra que las cargas eléctricas producen campos eléctricos, de tal forma que podemos considerar a las cargas positiva como “fuentes” de campo eléctrico y a las cargas negativas como “sumideros” de dichos campos. La Ecuación 1.4 establece que no existen cargas magnéticas aisladas, es decir, que los imanes siempre poseen dos polos opuestos, donde \mathbf{B} es el campo vectorial de inducción magnética. La Ecuación 1.5 se conoce como la *Ley de inducción de Faraday* y, en síntesis, expresa que la variación temporal de un campo magnético es capaz de producir un campo eléctrico. Finalmente, la Ecuación 1.6 se denomina *Ley de Ampère-Maxwell* y de ella podemos interpretar que un campo magnético puede ser producido por una densidad de corriente estacionaria y un campo eléctrico variable en el tiempo, donde μ es la permeabilidad magnética del medio. Para materiales no magnetizables, como los estudiados en el presente trabajo, se logra una buena aproximación considerando que $\mu = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío [Davidson (2001)]. Cabe hacer notar que el término dependiente del tiempo de la Ecuación 1.6 es un término relativista, donde $1/(\mu\epsilon) = c^2$, siendo c la velocidad de la luz.

Notemos que si se toma la divergencia de la Ecuación 1.6 y se utiliza la ley de Gauss para el campo eléctrico (Ec. 1.3), obtenemos la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Esta ecuación manifiesta la *conservación de la carga eléctrica*, es decir, que la carga eléctrica no se crea ni se destruye.

1.2.2. Ley de Ohm

La ley de Ohm es una ecuación constitutiva que establece que la densidad de corriente eléctrica dentro de un conductor en reposo es proporcional a la fuerza ejercida sobre sus cargas libres [Davidson (2001)], y por tanto es proporcional al campo eléctrico aplicado, es decir,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}', \quad (1.8)$$

donde la constante de proporcionalidad σ es una propiedad material del conductor conocida como conductividad eléctrica y \mathbf{E}' es el campo eléctrico en el sistema en reposo. Cuando el conductor se mueve con una velocidad \mathbf{u} respecto al sistema de laboratorio, la ley de Ohm se modifica considerando el campo efectivo medido desde dicho sistema, esto es,

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{u}, \quad (1.9)$$

donde el término entre paréntesis se denomina campo eléctrico efectivo y también se ha incluido en el segundo término del lado derecho la denominada corriente de convección [Cuevas (2004)].

1.2.3. La fuerza de Lorentz

En un medio material con una densidad de carga eléctrica ρ_e y una densidad de corriente \mathbf{j} , la fuerza electromagnética por unidad de volumen está dada por

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (1.10)$$

Dicha fuerza de cuerpo se conoce como *la fuerza de Lorentz*.

1.3. Aproximación MHD

Para estudiar fenómenos MHD es necesario acoplar las ecuaciones de la mecánica de fluidos con las ecuaciones del electromagnetismo. En la mecánica de fluidos ordinaria estamos interesados en fenómenos que ocurren a velocidades bajas comparadas con la de la luz y las ecuaciones de balance son invariantes ante transformaciones galileanas. Por su parte, las ecuaciones de Maxwell son relativistas e invariantes ante transformaciones de Lorentz. Para lograr el acoplamiento de ambos conjuntos de ecuaciones se hace uso de la denominada *aproximación MHD*, la cual echa mano de las siguientes consideraciones:

- Los fenómenos MHD son no relativistas, esto es, la velocidad característica del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz ($|\mathbf{u}| \ll c^2$).
- Solamente ocurren variaciones a bajas frecuencias, es decir, los fenómenos estudiados son cuasi-estacionarios.
- La magnitud de los campos eléctricos es del orden de la fuerza electromotriz inducida por el movimiento del fluido, es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

Tomando en cuenta las suposiciones anteriores es posible simplificar el conjunto de ecuaciones de modo que se obtenga un sistema consistente que es invariante ante transformaciones galileanas y en el que se pueden desprestigiar la corriente de desplazamiento de Maxwell, el término $\rho_e \mathbf{E}$ de la fuerza de Lorentz (Ec. 1.10) así como la corriente de convección en la ley de Ohm [Cuevas (2004)].

Considerando las aproximaciones anteriores, las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido eléctricamente conductor en un campo electromagnético se expresan mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.13)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (1.14)$$

Las Ecuaciones 1.11 y 1.12 corresponden a la ley de Gauss para campos magnéticos, la ley de inducción de Faraday, la ley de Ampère y la ley de Ohm. La Ecuación 1.14 es la ecuación de Navier-Stokes con el término fuente de la fuerza de Lorentz. Nótese

que al aplicar el operador de divergencia a la ley de Ampère (Ec. 1.12a) se obtiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (1.15)$$

la cual es la conservación de la carga bajo la aproximación considerada. La ley de Gauss para el campo eléctrico normalmente no es relevante en MHD. No obstante, las ecuaciones (1.11)-(1.14) constituyen un sistema completo.

1.4. Formulación ϕ ($R_m \ll 1$)

Los fluidos eléctricamente conductores de interés para la investigación que se realiza en el IER son los electrolitos y los metales líquidos. Los electrolitos son soluciones diluidas (generalmente acuosas) en las cuales se halla disuelta una sal binaria, la cual le otorga sus propiedades de conductividad eléctrica. Algunos metales son líquidos a temperatura ambiente (por ejemplo el mercurio), en tanto que también es posible que un metal originalmente sólido se convierta en líquido mediante la adición de grandes cantidades de energía (por ejemplo, el hierro líquido existente en el núcleo terrestre, o los metales fundidos que se trabajan en la industria metalúrgica). Una de las principales diferencias entre ambos tipos de fluidos conductores estriba en la conductividad eléctrica, siendo pequeña para los electrolitos y muy grande para los metales líquidos. Esta diferencia entre las conductividades de ambos tipos de fluidos permite el tratamiento matemático distinto en cada caso y acarrea diferentes simplificaciones en las ecuaciones de balance.

Un parámetro adimensional de fundamental importancia en MHD es el *número de Reynolds magnético* (R_m), definido de acuerdo a

$$R_m = \frac{u_c L}{\eta_m}, \quad (1.16)$$

donde $\eta_m = 1/(\mu_0 \sigma)$ representa la difusividad magnética. Para flujos MHD de líquidos a nivel industrial o laboratorio, este parámetro puede ser interpretado como el cociente de la magnitud del campo magnético inducido en el fluido y la magnitud del campo magnético aplicado [Davidson (2001)].

De manera adimensional, el campo magnético total se puede expresar como la contribución de dos partes [Müller y Bühler (2001)]

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + R_m \mathbf{b}, \quad (1.17)$$

donde \mathbf{B}_0 representa el campo magnético aplicado y \mathbf{b} el campo magnético inducido debido al movimiento del fluido dentro del campo \mathbf{B}_0 . Comúnmente, en flujos de metales líquidos o electrolitos a escala industrial o de laboratorio se encuentra que los campos inducidos (tanto el campo magnético como la densidad de corriente eléctrica) son muy pequeños cuando se les compara con los aplicados, esto es, $R_m \ll 1$. Como resultado de lo anterior se obtiene que $\mathbf{B} \approx \mathbf{B}_0$, es decir, el campo magnético aplicado no se modifica.

Bajo esta aproximación la ley de inducción de Faraday (Ec. 1.11b) se reduce a la forma

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.18)$$

es decir, el rotacional del campo eléctrico se iguala a cero y, gracias a ello, podemos concluir que dicho campo es potencial, esto es,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (1.19)$$

donde ϕ representa el potencial eléctrico en el seno del fluido.

Con la Ecuación 1.19, la ley de Ohm se expresa entonces como

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0). \quad (1.20)$$

Obteniendo la divergencia de la ecuación anterior y haciendo uso de la conservación de la carga (Ec. 1.15), se obtiene una ecuación de Poisson para el potencial eléctrico (ϕ) en el fluido

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0). \quad (1.21)$$

Finalmente, el campo magnético aplicado debe satisfacer las ecuaciones de la magnetostática

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 = 0. \quad (1.22)$$

En síntesis, las ecuaciones fundamentales de la MHD que utilizan a la velocidad, la presión y el potencial eléctrico como variables dependientes y que corresponden a la denominada *formulación ϕ* [Smolentsev *et al.* (2010)], se expresan en la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.23)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0), \quad (1.25)$$

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0). \quad (1.26)$$

1.5. Ecuaciones adimensionales

Con el fin de expresar de manera más general el problema, es común adimensionalizar las ecuaciones de balance mediante el reescalamiento de las magnitudes características del mismo, de tal forma que el efecto del cambio de las condiciones del fenómeno se estudia mediante la variación de ciertos parámetros adimensionales característicos. La adimensionalización también resulta en una disminución del tiempo de cómputo empleado en la solución numérica de las ecuaciones de balance.

Para adimensionalizar ecuaciones, se definen escalas características, las cuales a su vez sirven para definir variables adimensionales que se sustituyen en el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver. Para el caso del presente trabajo, las ecuaciones adimensionales se obtienen para el flujo entre dos cilindros concéntricos. De esta forma, la escala de longitud para el agitador MHD bajo estudio corresponde a la separación entre los dos electrodos ($R_2 - R_1$), el campo magnético característico es el campo máximo debido al imán permanente y el voltaje característico viene dado por la diferencia de potencial aplicada a los electrodos (Fig. 1.1).

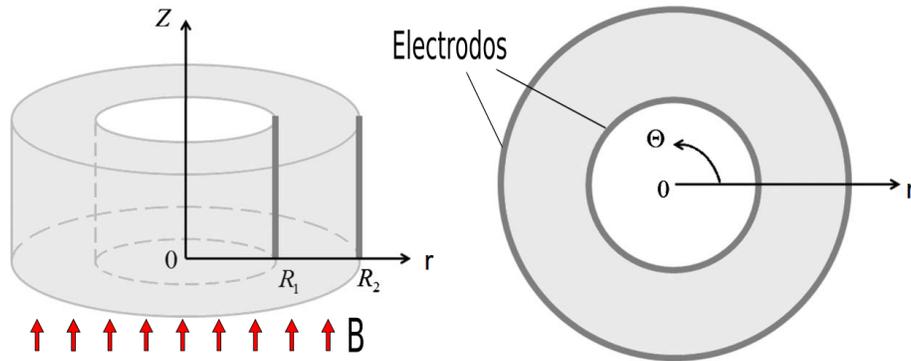


Figura 1.1: Esquema del agitador MHD.

La velocidad característica puede obtenerse de la ley de Ohm y es una función de la diferencia de potencial, del campo magnético y de la longitud característica

$$L = R_2 - R_1 \quad , \quad B_c = B_{max} \quad , \quad \phi_c = \phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi \quad , \quad u_c = \frac{\Delta\phi}{B_c L}. \quad (1.27)$$

Con lo anterior se definen las siguientes variables adimensionales

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{L} \quad , \quad \mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{B_c} \quad , \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{u_c}, \quad (1.28)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho u_c^2}, \quad \phi^* = \frac{\phi - \phi_1}{u_c B_c L} = \frac{\phi - \phi_1}{\Delta \phi}, \quad t^* = \frac{t}{L/u_c}. \quad (1.29)$$

en las cuales el superíndice (*) simboliza que se trata de una variable adimensional.

Al sustituir las variables adimensionales en las ecuaciones fundamentales de la MHD en la formulación ϕ (Ecs. (1.23)-(1.26)) y realizar las pertinentes operaciones algebraicas, se obtiene

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{Ha^2}{Re} \mathbf{j}^* \times \mathbf{B}_0^*, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{j}^* = -\nabla^* \phi^* + \mathbf{u}^* \times \mathbf{B}_0^*, \quad (1.32)$$

$$\nabla^{*2} \phi^* = \nabla^* \cdot (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}_0^*), \quad (1.33)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{B}_0^* = 0, \quad \nabla^* \times \mathbf{B}_0^* = 0. \quad (1.34)$$

En las ecuaciones anteriores aparecen dos números adimensionales conocidos como el número de *Reynolds* (Re) y el número de *Hartmann* (Ha), los cuales se definen de acuerdo a las siguientes ecuaciones

$$Re = \frac{u_c L}{\nu}, \quad (1.35)$$

$$Ha = B_c L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}. \quad (1.36)$$

El número de Reynolds hidrodinámico (Ec. 1.35) estima el cociente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas en el fluido, así, altos números de Reynolds indican que las fuerzas inerciales dominan el flujo, en tanto que a bajos números de Reynolds, la transferencia de momento es dominada por difusión. El número de Hartmann (Ec. 1.36) mide la relación entre las fuerzas magnéticas y las fuerzas viscosas. A altos números de Hartmann, el flujo es dominado por fuerzas magnéticas, caso contrario es dominado por fuerzas viscosas. Para fenómenos a escala de laboratorio donde se utilizan electrolitos, debido a que la conductividad de los mismos es pequeña y a que los campos magnéticos no son muy intensos, los números de Hartmann son pequeños ($Ha \leq 1$). Tal es el caso de los experimentos realizados en el agitador MHD cilíndrico.

Adicionalmente, podemos definir el llamado *parámetro de interacción* (N)

$$N = \frac{Ha^2}{Re}, \quad (1.37)$$

que puede interpretarse como el cociente de la fuerza de Lorentz con las fuerzas inerciales [Davidson (2001)].

Finalmente, las ecuaciones adimensionales de la MHD en formulación ϕ , expresando la ecuación de Navier-Stokes en geometría cilíndrica tienen la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{Ha^2}{Re} (j_\theta B_z - j_z B_\theta), \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] + \frac{Ha^2}{Re} (j_z B_r - j_r B_z), \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_z + \frac{Ha^2}{Re} (j_r B_\theta - j_\theta B_r), \quad (1.41)$$

$$\mathbf{j} = -\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0, \quad (1.42)$$

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0), \quad (1.43)$$

donde se han omitido las ecuaciones magnetostáticas y el superíndice (*) por simplicidad. u_i , B_i y j_i corresponden a la componente i de la velocidad, campo magnético aplicado y densidad de corriente eléctrica, respectivamente. Las Ecuaciones 1.38-1.43 constituyen un sistema cerrado que puede resolverse si se cuenta con las condiciones iniciales y de frontera adecuadas. La solución analítica de estas ecuaciones se aborda en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Solución analítica para el flujo MHD entre cilindros concéntricos

En el presente capítulo se resuelven de manera analítica las ecuaciones fundamentales de la MHD en la formulación ϕ para la aproximación bidimensional del flujo entre dos cilindros concéntricos producido por una fuerza electromagnética azimutal.

2.1. Formulación del problema

A continuación se establecen las consideraciones principales que permiten obtener una solución analítica para uno de los flujos de interés en este trabajo, es decir, el flujo entre dos cilindros conductores producido por una fuerza de Lorentz azimutal. Dada la complejidad del problema, se considera una aproximación bidimensional que permite obtener una solución analítica sencilla.

En la aproximación bidimensional se realizan las siguientes consideraciones:

- El fluido se encuentra confinado entre dos cilindros concéntricos, de longitud infinita, de radios R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$), los cuales sirven como electrodos. De esta manera se evita el problema de la singularidad en el origen ($r = 0$) y se asegura que, al establecer una diferencia de potencial entre los electrodos, la corriente inyectada sea netamente radial ($\mathbf{j} = j_r \hat{\mathbf{e}}_r$).
- El campo magnético es uniforme y su única componente es paralela al eje de los cilindros ($\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{k}}$).

- Como resultado de las dos consideraciones anteriores, el flujo es totalmente bidimensional, esto es, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u_r, u_\theta, 0)$. En particular, en esta aproximación se evita tratar con las *capas de Hartmann*, es decir, con las capas formadas en las paredes normales al campo magnético. Dichas paredes serían las tapas de los cilindros que se omiten completamente en este tratamiento.
- El flujo se encuentra en estado estacionario y completamente desarrollado, con lo cual las componentes de la velocidad solamente dependen de la posición radial ($u_r = u_r(r)$, $u_\theta = u_\theta(r)$).

Teniendo en cuenta lo anterior, las ecuaciones de balance presentadas en el capítulo anterior se simplifican a

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru_r) = 0, \quad (2.1)$$

$$u_r \frac{du_r}{dr} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right] + \frac{Ha^2}{Re} j_\theta B_0, \quad (2.2)$$

$$u_r \frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_r u_\theta}{r} = \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right] - \frac{Ha^2}{Re} j_r B_0, \quad (2.3)$$

$$j_r = -\frac{d\phi}{dr} + u_\theta B_0, \quad (2.4)$$

$$j_\theta = -u_r B_0, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{B_0}{r} \frac{d}{dr} (ru_\theta), \quad (2.6)$$

en las que el operador Laplaciano está dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right). \quad (2.7)$$

En el sistema anterior, la Ecuación 2.1 representa la conservación de la masa, las Ecuaciones 2.2 y 2.3 representan los balances de cantidad de movimiento en las direcciones r y θ , respectivamente, las Ecuaciones 2.4 y 2.5 representan las componentes de la corriente dadas por la ley de Ohm y la Ecuación 2.6 es la ecuación que satisface el potencial eléctrico.

2.2. Solución para la aproximación bidimensional

La Ecuación 2.1 se puede resolver mediante integración directa. Ello resulta en que $ru_r = cte$, la cual debe satisfacer las condiciones de no deslizamiento en los dos cilindros ($u_r(R_1) = u_r(R_2) = 0$), con lo cual se encuentra

$$u_r(r) = 0, \quad (2.8)$$

obteniéndose así que

$$j_\theta = 0. \quad (2.9)$$

Si se sustituyen estos resultados en las demás ecuaciones, el sistema a resolver se reduce a

$$\frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_\theta}{dr} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right] - \frac{Ha^2}{Re} j_r B_0 = 0, \quad (2.11)$$

$$j_r = -\frac{d\phi}{dr} + u_\theta B_0, \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{B_0}{r} \frac{d}{dr} (ru_\theta). \quad (2.13)$$

La Ecuación 2.10 representa un balance entre la fuerza centrífuga y el gradiente de presión en dirección radial. Las Ecuaciones 2.11, 2.12 y 2.13 se deben resolver de manera acoplada con las correspondientes condiciones de frontera

$$u_\theta(R_1) = u_\theta(R_2) = 0 \quad , \quad \phi(R_1) = 0, \phi(R_2) = 1. \quad (2.14)$$

Sustituyendo la Ecuación 2.12 en la Ecuación 2.11 se obtiene:

$$\frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_\theta}{dr} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right] - \frac{Ha^2}{Re} B_0 \left(u_\theta B_0 - \frac{d\phi}{dr} \right) = 0. \quad (2.15)$$

Multiplicando la Ecuación 2.13 por r

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = B_0 \frac{d}{dr} (ru_\theta), \quad (2.16)$$

integrando

$$r \frac{d\phi}{dr} = B_0 ru_\theta + C_1, \quad (2.17)$$

con lo cual

$$\frac{d\phi}{dr} = B_0 u_\theta + \frac{C_1}{r}, \quad (2.18)$$

$$B_0 u_\theta - \frac{d\phi}{dr} = -\frac{C_1}{r}, \quad (2.19)$$

donde C_1 es una constante de integración.

Sustituyendo la Ecuación 2.19 en 2.15 y multiplicando por Re se obtiene,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_\theta}{dr} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} - Ha^2 B_0 \left(-\frac{C_1}{r} \right) = 0, \quad (2.20)$$

y desarrollando la derivada

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{Ha^2 B_0 C_1}{r} = 0. \quad (2.21)$$

El segundo y tercer término de la expresión anterior se pueden simplificar en la forma

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2}, \quad (2.22)$$

con ello se obtiene

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{Ha^2 B_0 C_1}{r} = 0, \quad (2.23)$$

rearrreglando

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_\theta}{r} \right) = -Ha^2 B_0 \frac{C_1}{r}, \quad (2.24)$$

e integrando tenemos

$$\frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_\theta}{r} = -Ha^2 B_0 C_1 \ln(r) + C_2. \quad (2.25)$$

El término de la izquierda se puede expresar como

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_\theta) = \frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_\theta}{r}, \quad (2.26)$$

sustituyendo 2.26 en 2.25 se obtiene

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_\theta) = -Ha^2 B_0 C_1 \ln r + C_2, \quad (2.27)$$

y al integrar se encuentra

$$ru_\theta = -Ha^2 B_0 C_1 \int r \ln r dr + C_2 \frac{r^2}{2} + C_3. \quad (2.28)$$

La integral de la Ecuación 2.28 se puede resolver por partes, obteniéndose de esta forma

$$u_\theta(r) = C_2' r + \frac{C_3}{r} - C_1' r \ln r, \quad (2.29)$$

donde las constantes C_1' y C_2' se definen de la siguiente manera

$$C_1' = \frac{Ha^2 B_0 C_1}{2}, \quad C_2' = \frac{Ha^2 B_0 C_1}{4} + \frac{C_2}{2}. \quad (2.30)$$

Para determinar el valor de las constantes se hace uso de las condiciones de frontera para la velocidad (Ec. 2.14a), y con ello se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$C_1' R_1 \ln R_1 + C_2' R_1 + \frac{C_3}{R_1} = 0, \quad (2.31)$$

$$C_1' R_2 \ln R_2 + C_2' R_2 + \frac{C_3}{R_2} = 0, \quad (2.32)$$

cuya solución es

$$C_2' = C_1' \left(\frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{R_2^2 - R_1^2} \right), \quad (2.33)$$

$$C_3 = \frac{C_1' R_1^2 R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2}}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (2.34)$$

Sustituyendo lo anterior en la Ecuación 2.28, el perfil de velocidad tiene la forma

$$u_\theta(r) = \frac{Ha^2 B_0 C_1}{2} \left[\left(\frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{R_2^2 - R_1^2} \right) r + \left(\frac{R_1^2 R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2}}{R_2^2 - R_1^2} \right) \frac{1}{r} - r \ln r \right], \quad (2.35)$$

donde la constante C_1 se determina mediante el acoplamiento existente entre la velocidad y el potencial eléctrico.

Sea

$$u_\theta(r) = Ha^2 B_0 C_1 u_f(r), \quad (2.36)$$

con

$$u_f(r) = \left(\frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{2(R_2^2 - R_1^2)} \right) r + \left(\frac{R_1^2 R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2}}{2(R_2^2 - R_1^2)} \right) \frac{1}{r} - \frac{r \ln r}{2}. \quad (2.37)$$

Sustituyendo la Ecuación 2.35 en la Ecuación 2.18 e integrando

$$\phi(r) = \int_{R_1}^r B_0 u_\theta(r) dr + C_1 \ln r + D. \quad (2.38)$$

Aplicando las condiciones de frontera (Ec. 2.14b) se obtiene

$$C_1 \ln R_1 + D = 0, \quad (2.39)$$

$$C_1 \left(Ha^2 B_0^2 \int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr + \ln R_2 \right) + D = 1, \quad (2.40)$$

y resolviendo el sistema anterior, se determina que los valores de las constantes C_1 y D son

$$C_1 = \frac{1}{Ha^2 B_0^2 \int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr + \ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad (2.41)$$

$$D = -\frac{\ln R_1}{Ha^2 B_0^2 \int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr + \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (2.42)$$

Finalmente, el perfil de velocidad azimutal y el potencial eléctrico tienen la forma

$$u_\theta(r) = \frac{Ha^2 B_0}{Ha^2 B_0^2 \int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr + \ln \frac{R_2}{R_1}} \left[\left(\frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{2(R_2^2 - R_1^2)} \right) r + \left(\frac{R_1^2 R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2}}{2(R_2^2 - R_1^2)} \right) \frac{1}{r} - \frac{r \ln r}{2} \right], \quad (2.43)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{Ha^2 B_0^2 \int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr + \ln \frac{R_2}{R_1}} \left\{ Ha^2 B_0^2 \int_{R_1}^r u_f(r) dr + \ln \frac{r}{R_1} \right\}, \quad (2.44)$$

donde

$$\int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr = \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 - R_1^2)} \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{R_2^2 - R_1^2}{8}. \quad (2.45)$$

De las Ecuaciones 2.43 y 2.44, se puede observar que los perfiles estacionarios no dependen del número de Reynolds. El número de Reynolds influye en el flujo transitorio

y, por tanto, en el tiempo necesario para que el sistema alcance el estado estacionario, así, a mayores Re , el sistema tarda más en llegar a un estado independiente del tiempo.

El único parámetro que afecta a esta solución es el número de Hartmann (Ha). Para efectos del presente estudio, dado que la geometría del agitador y las propiedades del fluido están fijas, Ha refleja básicamente la magnitud del campo magnético aplicado. Analizando la solución encontrada se pueden realizar las siguientes observaciones:

1. De la Ecuación 2.43

$$\begin{aligned} \text{Si } Ha = 0 &\Rightarrow u_{\theta}(r) = 0, \\ \text{Si } Ha \rightarrow \infty &\Rightarrow u_{\theta}(r) \rightarrow \frac{u_f(r)}{\int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr}, \end{aligned}$$

esto es, por un lado, en ausencia de campo magnético el fluido se encuentra en reposo. Por otro, cuando el campo magnético es muy intenso, la velocidad azimutal mantiene su dependencia en la posición radial y tiene un límite finito.

2. De la Ecuación 2.44

$$\begin{aligned} \text{Si } Ha = 0 &\Rightarrow \phi(r) = \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) / \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right), \\ \text{Si } Ha \rightarrow \infty &\Rightarrow \phi(r) \rightarrow \frac{\int_{R_1}^r u_f(r) dr}{\int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr}, \end{aligned}$$

es decir, en ausencia de campo magnético el potencial eléctrico en el fluido depende solo logarítmicamente de la coordenada radial y de la geometría del sistema. Por su parte, cuando la magnitud del campo aplicado tiende a infinito, el potencial eléctrico en el fluido depende del perfil de velocidad pero se encuentra acotado entre cero y uno ($0 < \phi < 1$).

Las Figuras 2.1 y 2.2 muestran los perfiles estacionarios de velocidad azimutal y potencial eléctrico para diversos números de Hartmann.

En la Figura 2.1 se puede observar que el perfil de velocidad no es simétrico y que su pendiente se encuentra más pronunciada cerca del cilindro interno. De hecho el valor máximo de la velocidad se localiza en $r \approx 0.43$ para todos los valores de Ha .

En la Figura 2.2, se puede ver que el potencial eléctrico tiene comportamientos distintos según el número de Hartmann. Para Ha pequeños, la curva descrita por

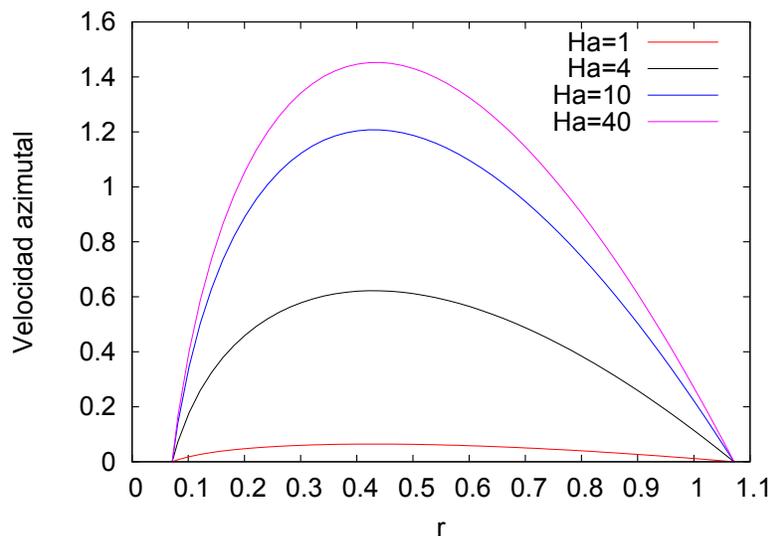


Figura 2.1: Perfil de velocidad azimutal (caso estacionario bidimensional) para distintos números de Hartmann.

el potencial es cóncava, en tanto que a Ha grandes, su comportamiento es similar a una “s” alargada, mostrando por tanto un punto de inflexión. Lo anterior muestra claramente que la velocidad afecta la distribución de potencial, a diferencia de lo supuesto en la solución de Digilov (2007), ya que al variar Ha la velocidad del fluido varía. Se puede observar también que existe un punto común por el cual todas las curvas cruzan y que se localiza en $r \approx 0.86$. Dicho punto coincide también con el punto de inflexión para los mayores valores de Ha ($Ha = 10$ y 40).

El perfil de velocidad azimutal (Ec. 2.43) se puede expresar de manera simplificada como

$$u_{\theta}(r) = Ar + \frac{B}{r} + Cr \ln r, \quad (2.46)$$

donde las constantes A , B y C se definen como

$$A = \frac{Ha^2 B_0}{Ha^2 B_0^2 \int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr + \ln \frac{R_2}{R_1}} \left(\frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{2(R_2^2 - R_1^2)} \right), \quad (2.47)$$

$$B = \frac{Ha^2 B_0}{Ha^2 B_0^2 \int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr + \ln \frac{R_2}{R_1}} \left(\frac{R_1^2 R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2}}{2(R_2^2 - R_1^2)} \right), \quad (2.48)$$

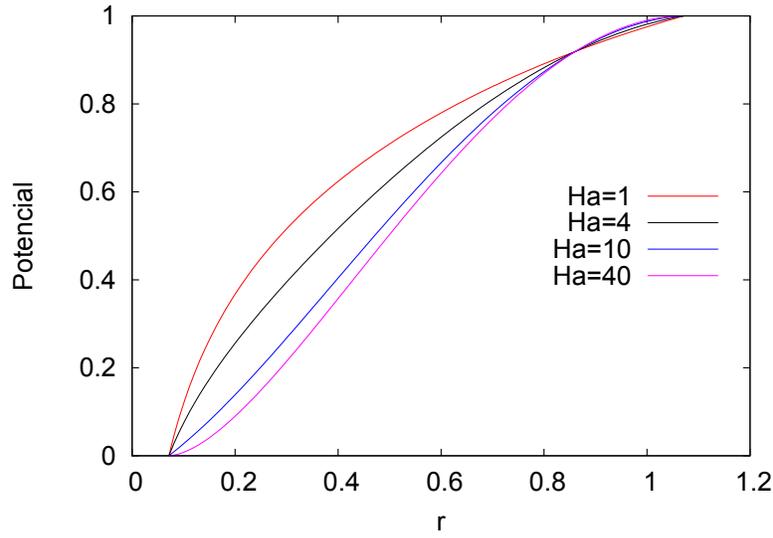


Figura 2.2: Potencial eléctrico (caso estacionario bidimensional) para distintos números de Hartmann.

$$C = -\frac{1}{2} \frac{Ha^2 B_0}{Ha^2 B_0^2 \int_{R_1}^{R_2} u_f(r) dr + \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (2.49)$$

Calculando la vorticidad encontramos

$$\nabla \times \mathbf{u} = \omega_z \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & r\hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & ru_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_z,$$

con lo cual se obtiene

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [Ar^2 + B + Cr^2 \ln r], \quad (2.50)$$

$$\omega_z = 2A + C(1 + 2 \ln r). \quad (2.51)$$

El esfuerzo cortante adimensional viene dado por

$$\tau = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Ar + \frac{B}{r} + C \ln r}{r} \right), \quad (2.52)$$

es decir,

$$\tau = C - \frac{2B}{r^2}. \quad (2.53)$$

La Figura 2.3 muestra el comportamiento de la vorticidad y el esfuerzo cortante para diversos valores del número de Hartmann. Se puede observar que para ambos casos se tiene una región en donde el esfuerzo es negativo mientras que la vorticidad es positiva, siendo esta región independiente del número de Hartmann. De las Ecuaciones 2.51 y 2.53 se pueden obtener fácilmente los puntos en los cuales se halla el cambio de signo. Así, el esfuerzo cortante es cero en $r \approx 0.166$ mientras la vorticidad se anula en $r \approx 0.657$ (ver Figuras 2.3(a)-(b)). De acuerdo a Marcus (1990), la región donde la vorticidad y el esfuerzo cortante tienen signos contrarios, corresponde a una zona en la cual no pueden existir “estructuras coherentes”. Esto se debe a que la diferencia de signo entre estas dos cantidades provoca que los vórtices sean “estirados”, fragmentados y destruidos en un tiempo muy corto. Si los signos son iguales, el vórtice redistribuye su vorticidad de tal forma que su valor máximo se localiza en su centro.

A pesar de los resultados experimentales limitados con que se cuenta actualmente, lo anterior parece concordar con las observaciones experimentales realizadas en el IER, pues en todos los experimentos reportados en los cuales hay inestabilidades, los vórtices anticiclónicos se localizan cerca del cilindro externo [Pérez-Espinoza (2012)]. Es de esperarse que en dicha región, tanto la vorticidad como el esfuerzo cortante tengan el mismo signo. Este resultado también deja entrever que es posible que existan vórtices muy cerca del cilindro interno. Este es un punto que debe comprobarse experimentalmente a partir de mediciones cuidadosas de los campos de velocidad.

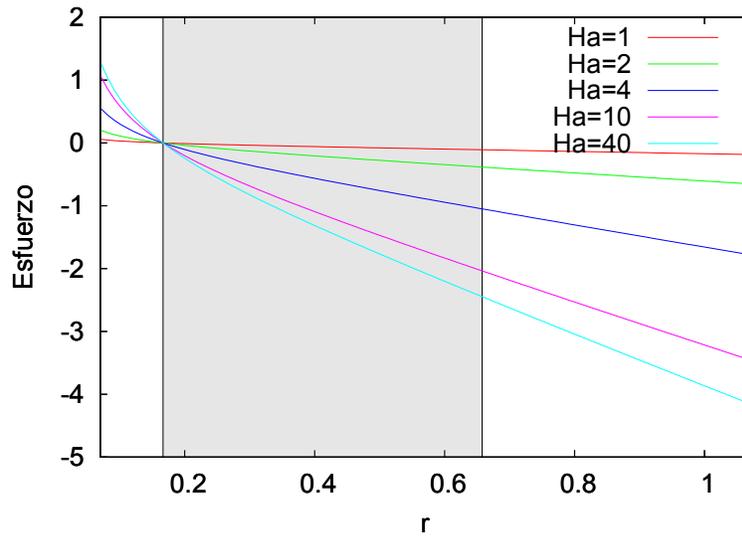
Según la teoría clásica de estabilidad [Chandrasekhar (1961), Drazin (2002)], la aparición de inestabilidades se debe a pequeñas perturbaciones en el flujo inherentes a los experimentos. Si el flujo lo favorece, las perturbaciones inicialmente pequeñas crecen tanto que hacen que el flujo transite de un flujo laminar a otro o incluso de un régimen laminar a uno turbulento. Para el caso de los experimentos del IER, las perturbaciones que dan origen a la aparición de los vórtices anticiclónicos pueden deberse, por ejemplo, a pequeñas imperfecciones en los electrodos de cobre causadas durante su fabricación o debidas a la electrólisis presente en el proceso; o bien, a una distribución no uniforme de la corriente inyectada; a la aparición de pequeñas burbujas de gas generadas por la electrólisis o a otros factores no tan evidentes. De cualquier forma, una vez que aparecen los vórtices en el agitador, estos permanecen durante periodos muy largos de tiempo.

Una posible explicación cualitativa del tiempo de vida tan largo de estas estructuras, puede intentarse a partir de la ecuación de transporte de vorticidad. Tomando el rotacional de la ecuación de Navier-Stokes con el término fuente de la fuerza de Lorentz, la ecuación de vorticidad se obtiene en la forma

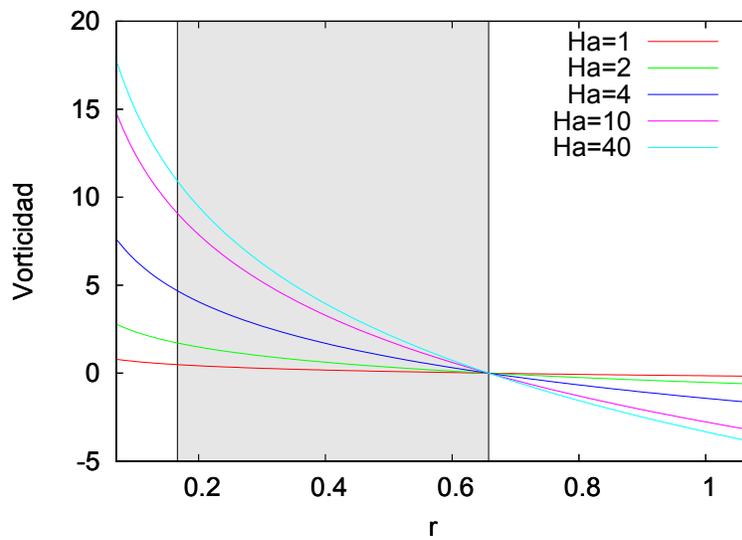
$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \frac{Ha^2}{Re} \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0), \quad (2.54)$$

en donde se puede notar que el término de la fuerza de Lorentz actúa como una fuente de vorticidad en el flujo. Para ciertos valores de la corriente inyectada, los términos de creación de vorticidad por la fuerza de Lorentz y de disipación de vorticidad por efectos viscosos se balancean de tal forma que la vorticidad alcanza un valor casi constante, el cual, debido a la existencia de zonas en las que la vorticidad y el esfuerzo cortante tienen el mismo signo, solamente se redistribuye. Lo anterior resulta en que los vórtices observados en el agitador se mantienen por largos periodos de tiempo debido a que la vorticidad no se disipa, sino que únicamente se redistribuye. Evidentemente, esta hipótesis está sujeta a su confirmación mediante un modelo numérico con el que se espera contar en un futuro.

En el siguiente capítulo se aborda la solución numérica de las ecuaciones fundamentales de la MHD para los casos bidimensional y cuasi-bidimensional para distintas distribuciones de campo magnético aplicado, entre las que se incluye campo uniforme, no uniforme y localizado.



(a)



(b)

Figura 2.3: Comparación del esfuerzo cortante (a) y la vorticidad (b) para distintos números de Hartmann. El área sombreada corresponde a una región donde los esfuerzos cortantes tienen signo negativo y la vorticidad signo positivo, región en la cual no pueden existir estructuras coherentes como los vórtices anticiclónicos [Marcus (1990)].

Capítulo 3

Soluciones numéricas de flujos MHD en geometría cilíndrica

En general, las ecuaciones de la MHD son ecuaciones diferenciales parciales no lineales que, salvo en contadas excepciones, no tienen soluciones analíticas. Debido a lo anterior, para estudiar los fenómenos que estas ecuaciones modelan se hace uso de métodos numéricos que permiten la solución aproximada de las ecuaciones de balance y estudiar aspectos que difícilmente se consideran en las soluciones analíticas tales como los fenómenos transitorios, además pueden modelar muy diversas condiciones experimentales de manera relativamente sencilla. En el presente capítulo se describe la solución numérica de las ecuaciones fundamentales de la MHD en la formulación ϕ para distintos casos. Se comienza con la solución numérica de las ecuaciones para el flujo MHD bidimensional en estado estacionario promovido por una fuerza de Lorentz azimutal en geometría cilíndrica. Dicha solución se valida con ayuda de la solución analítica obtenida en el capítulo anterior. Posteriormente se aborda la solución numérica en geometría cilíndrica para el caso de un campo magnético no uniforme que abarca toda la región del flujo y otro caso en donde el campo magnético está localizado en ciertas zonas de la región del flujo. Finalmente se describe la modelación cuasi-bidimensional con fricción del agitador MHD.

3.1. Aproximación bidimensional para el flujo entre dos cilindros concéntricos

Para el análisis numérico del fenómeno en estudio se desarrolló un código numérico computacional que resuelve las ecuaciones fundamentales de la MHD en formulación ϕ para una geometría cilíndrica y que utiliza el método de Volumen Finito (FV, por sus siglas en inglés). La estrategia de solución numérica de las ecuaciones es la descrita por Versteeg y Malalasekera (1995) y se presenta en detalle en el Apéndice A. Para todas las simulaciones bidimensionales, el dominio geométrico fue dividido en $n_r = 50$ y $n_\theta = 150$, siendo n_r y n_θ la cantidad de volúmenes de control en las respectivas direcciones, y un paso de tiempo $\Delta t = 0.001$.

3.1.1. Aproximación bidimensional con campo magnético uniforme

Con el fin de validar los resultados arrojados por el código numérico, se resolvió el caso descrito analíticamente en el capítulo anterior. Las Figuras 3.1 y 3.2 muestran los perfiles de velocidad azimutal y potencial eléctrico obtenidos de manera numérica comparados con la solución analítica para el flujo entre dos cilindros concéntricos infinitamente largos cuando el campo magnético aplicado es uniforme. Las líneas continuas representan la solución analítica en tanto que las líneas punteadas fueron obtenidas con la herramienta numérica. Tanto para la velocidad como para el potencial eléctrico se observa una muy buena concordancia entre ambas soluciones.

La solución analítica obtenida en el capítulo precedente no considera lo que ocurre durante el estado transitorio del flujo. Una de las ventajas de las soluciones numéricas es que permiten acceder al comportamiento del flujo cuando éste tiene una dependencia temporal. La Figura 3.3 muestra la evolución temporal del perfil de velocidad azimutal observado para valores de $Re = 100$ y $Ha = 1$. Se puede apreciar que, al inicio del movimiento del fluido, la velocidad azimutal tiene su valor máximo cerca del cilindro interno y este punto se va desplazando hacia el cilindro externo conforme pasa el tiempo hasta alcanzar el estado estacionario.

La Figura 3.4 muestra que al inicio del movimiento la velocidad azimutal dentro del agitador MHD tiene un comportamiento similar al de un perfil Kepleriano regularizado, el cual fue utilizado por Bracco *et al.* (1999) en las simulaciones astrofísicas donde observó vórtices anticiclónicos (ver introducción). Lo anterior constituye otra

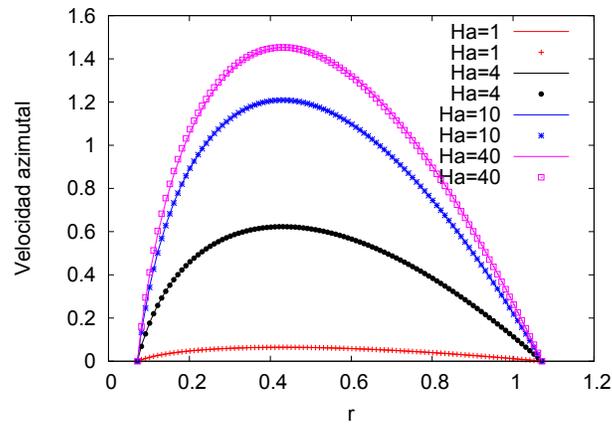


Figura 3.1: Comparación de la velocidad azimutal obtenida de manera analítica (línea continua) y numérica (símbolos) para distintos valores del número de Hartmann para el flujo MHD entre cilindros concéntricos.

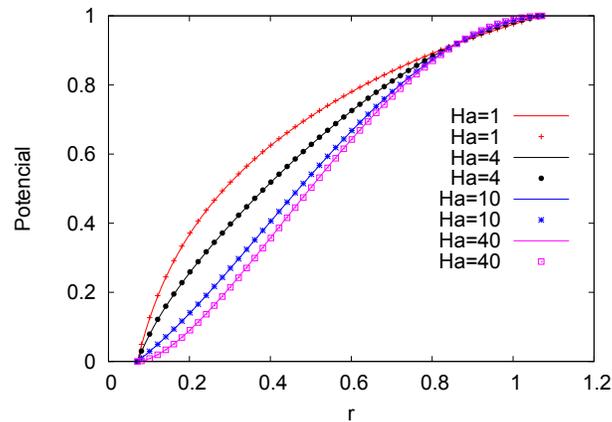


Figura 3.2: Comparación del potencial eléctrico obtenido de manera analítica (línea continua) y numérica (símbolos) para distintos valores del número de Hartmann para el flujo MHD entre cilindros concéntricos.

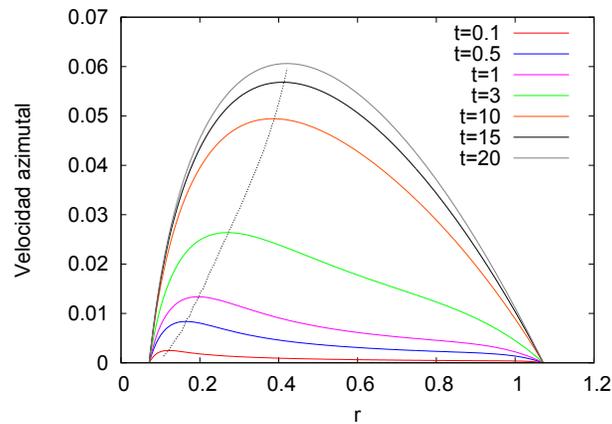


Figura 3.3: Perfil de velocidad azimutal para $Re = 100$ y $Ha = 1$ para diversos instantes de tiempo. La línea puntada muestra el comportamiento del punto de mayor velocidad en cada instante de tiempo.

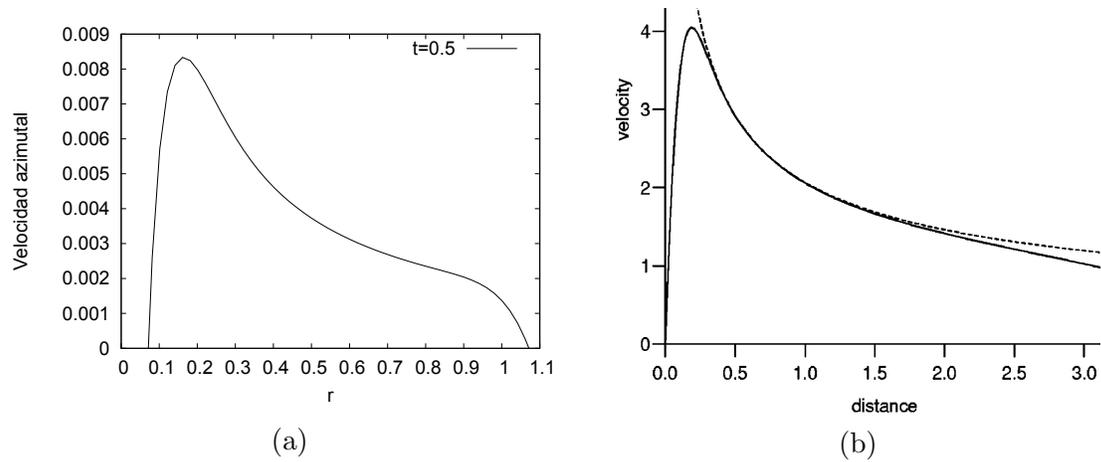


Figura 3.4: Comparación del perfil de velocidad calculado para: a) el agitador MHD para $Re = 100$ y $Ha = 1$ y b) el perfil Kepleriano regularizado utilizado por Bracco *et al.* (1999).

fuerte similitud entre los dos tipos de fenómenos. Queda pendiente el explorar la manera en que este perfil inicial de velocidad influye en el desarrollo de la inestabilidad que da lugar a la formación de vórtices anticiclónicos. En Bracco *et al.* (1999), el perfil Kepleriano regularizado tiene su valor máximo cerca del centro del disco protoplanetario y decae de manera exponencial al alejarse del centro. La velocidad es cero únicamente muy lejos del centro del disco, ello se debe a que el flujo no se encuentra confinado a una región espacial, mientras que en las simulaciones del presente estudio, el fluido se adhiere a las paredes rígidas entre las cuales se encuentra confinado, debido a ello, la velocidad azimutal cae rápidamente cuando nos acercamos al cilindro externo.

3.1.2. Aproximación bidimensional con campo magnético no uniforme

Con el fin de simular el flujo el agitador MHD de manera más fiel a la realidad, en vez de considerar que el campo magnético es perfectamente uniforme en todo el espacio, al código numérico se le implementó una expresión analítica que reproduce el campo magnético de un imán permanente cuadrado mediante la superposición de dos placas planas magnetizadas separadas por una pequeña distancia [McCaig (1977)]. Las dos placas tienen polaridad opuesta y dimensiones $2a$ y $2b$ (en este caso se consideró que $a = b$) y se encuentran separadas por una distancia c . Localizando el origen del sistema de coordenadas en el centro de la superficie superior del imán, la componente z del campo magnético, a una distancia z_0 de la placa, viene dada por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 B_z(x, y) = \epsilon \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{(x+a)(y+b)}{z_0 [(x+a)^2 + (y+b)^2 + z_0^2]^{1/2}} \right) \right. \\
 + \tan^{-1} \left(\frac{(x-a)(y-b)}{z_0 [(x-a)^2 + (y-b)^2 + z_0^2]^{1/2}} \right) \\
 - \tan^{-1} \left(\frac{(x+a)(y-b)}{z_0 [(x+a)^2 + (y-b)^2 + z_0^2]^{1/2}} \right) \\
 \left. - \tan^{-1} \left(\frac{(x-a)(y+b)}{z_0 [(x-a)^2 + (y+b)^2 + z_0^2]^{1/2}} \right) \right\}, \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

donde ϵ es un parámetro de normalización calculado a partir del campo magnético máximo. Dado que se trata de una aproximación bidimensional, la única componente del campo que se considera es precisamente la componente normal al plano del flujo, es decir, B_z . La Figura 3.5 muestra la distribución de la componente z del campo magnético medida experimentalmente por Pérez-Espinoza (2012) para el imán permanente utilizado en el experimento y la componente adimensionalizada calculada con la Ecuación 3.1.

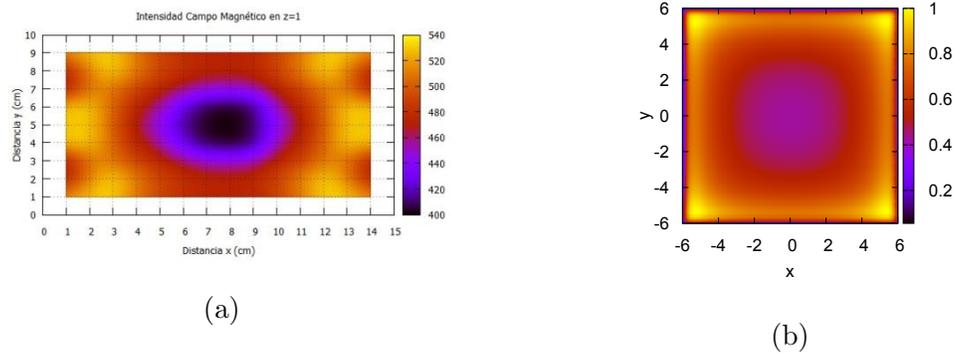


Figura 3.5: Comparación cualitativa de la intensidad de la componente B_z del campo magnético. a) Medición en un imán rectangular [Pérez-Espinoza (2012)]. b) Cálculo obtenido con la ecuación de McCaig (1977) para un imán cuadrado. El código de colores indica la intensidad del campo.

A partir de la comparación cualitativa de los campos magnéticos medidos experimentalmente por Pérez-Espinoza (2012) y los obtenidos mediante la Ecuación 3.1 se puede observar que hay rasgos similares entre ambos casos pues se observa una depresión circular en la intensidad del campo magnético en el centro del imán mientras que los puntos de intensidad máxima se localizan cerca de los bordes del mismo.

Utilizando la expresión analítica para el campo magnético de dos placas con polaridad opuesta que da lugar a una distribución espacial no uniforme del campo de un imán permanente, se resolvieron las ecuaciones fundamentales de la MHD en la formulación ϕ . La Figura 3.6 muestra la distribución de la componente z (normal al plano) del campo magnético aplicado para distintas posiciones del centro geométrico del imán respecto del centro del agitador, de modo que la no uniformidad del campo en la región del flujo es distinta en cada caso.

Las Figuras 3.7, 3.8 y 3.9 muestran los perfiles de velocidad azimutal y potencial

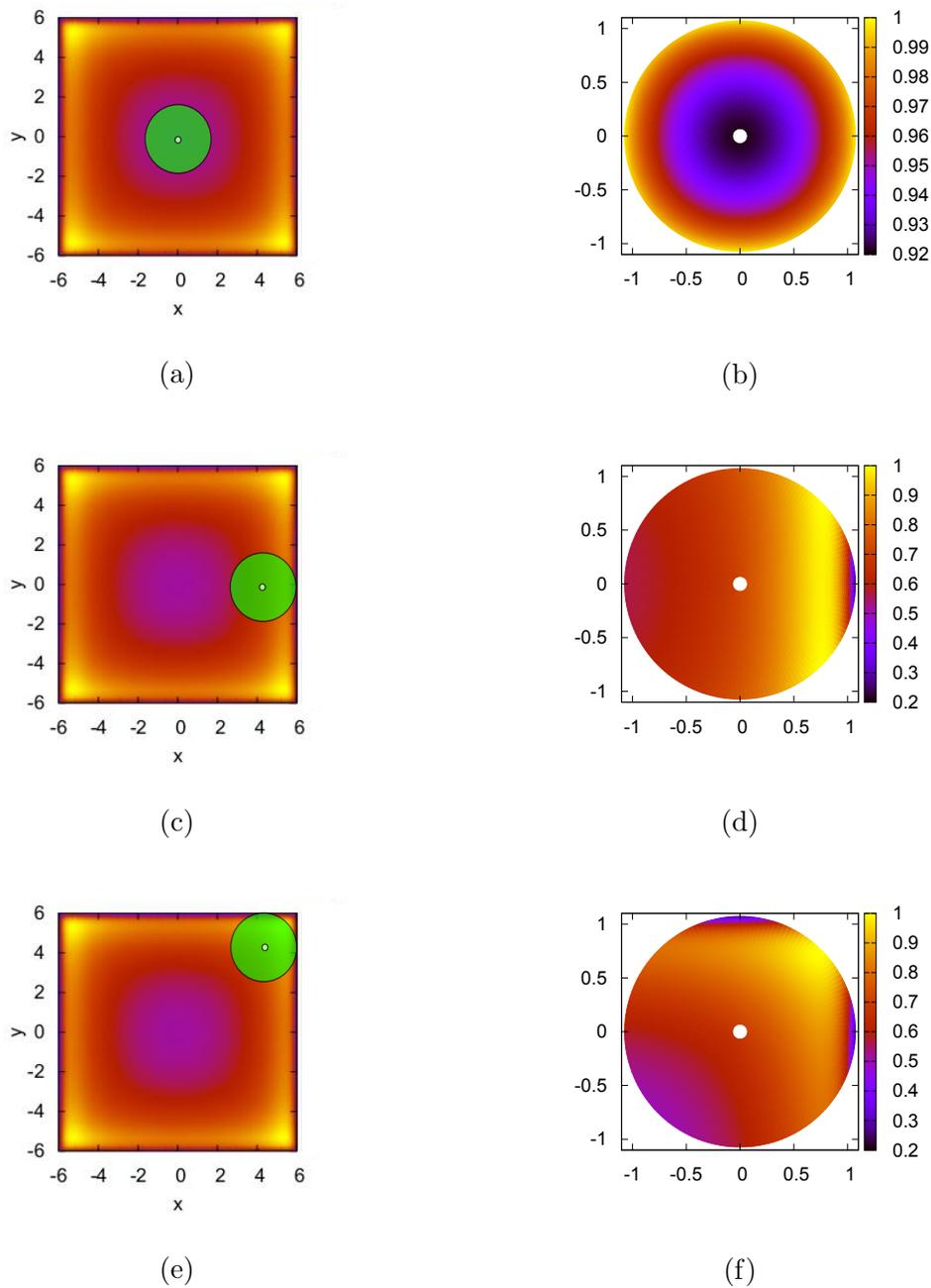


Figura 3.6: Distintas distribuciones de campo magnético para diversas posiciones del agitador sobre el imán. En las figuras a), c) y e) el círculo verde muestra la ubicación del agitador sobre el imán. En las figuras b), d) y f) se muestra la distribución de campo magnético en la región de flujo correspondiente a los casos mostrados en las figuras a), c) y e), respectivamente. El círculo blanco en el centro denota la localización del cilindro interior.

eléctricos estacionarios para las tres distribuciones de campo magnético no uniforme mostradas en la Figura 3.6 comparadas con respecto al caso del campo magnético uniforme. En la Figura 3.7 se puede notar que, al ser simétrica la distribución del campo magnético, el perfil de velocidad se observa prácticamente igual que para el caso del campo uniforme cuando el número de Hartmann es pequeño. Cuando el número de Hartmann es grande se aprecia una ligera variación en la magnitud de las velocidades, pero se conserva la forma del perfil. El potencial eléctrico no se ve tan afectado debido al campo no uniforme cuando éste es simétrico.

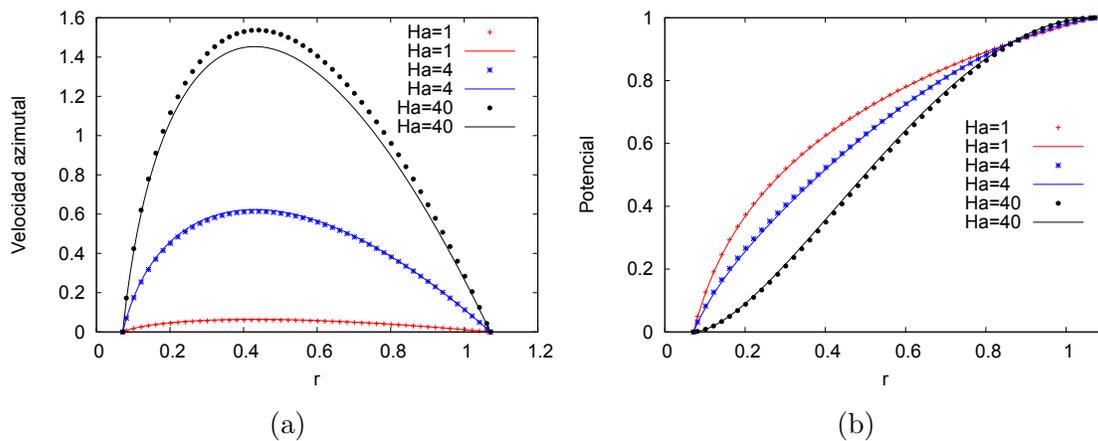


Figura 3.7: Comparación de perfiles estacionarios de a) velocidad azimutal y b) potencial eléctrico para la distribución simétrica de campo magnético mostrada en la Figura 3.6(b). Las líneas continuas corresponden a la solución analítica con un campo magnético uniforme y las líneas con símbolos a la solución con el campo magnético no uniforme.

De la Figura 3.8 se observa que, al romper la simetría con respecto al eje y del campo aplicado y únicamente conservar la simetría con respecto al eje x , la velocidad se afecta de manera importante pues cerca del cilindro interno se observan las mayores velocidades. Incluso el punto de velocidad máxima se desplaza más cerca del cilindro interno cuando el campo magnético es intenso ($Ha = 40$).

En la Figura 3.9 se puede apreciar que al romper la simetría con respecto a ambos ejes coordenados, el perfil de velocidad azimutal desplaza su punto de velocidad máxima más cerca del cilindro interno. El potencial eléctrico presenta ligeras variaciones para altos números de Hartmann.

En las tres figuras se puede apreciar que la distribución no uniforme del campo

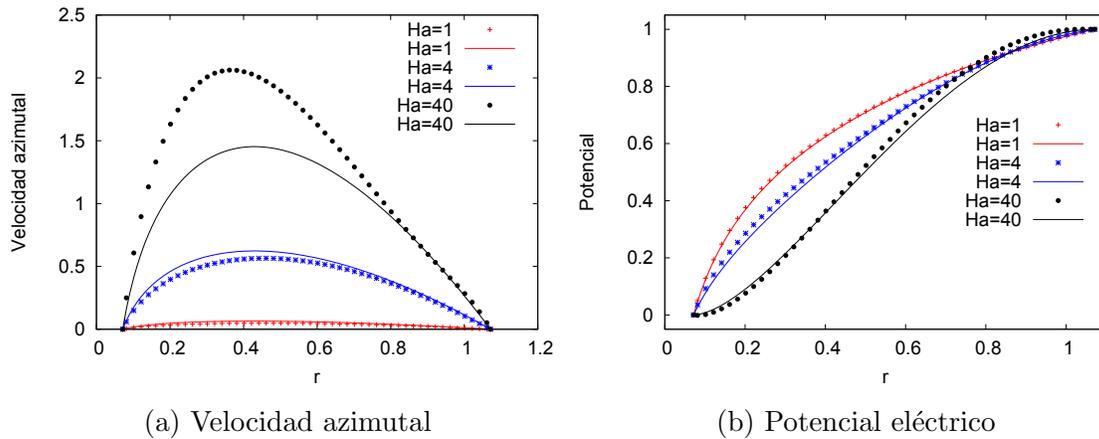


Figura 3.8: Comparación de perfiles estacionarios de a) velocidad azimutal y b) potencial eléctrico para la distribución de campo magnético con simetría con respecto al eje x mostrada en la Figura 3.6(d). Las líneas continuas representan las soluciones analíticas con campo magnético uniforme y las líneas con símbolos las soluciones numéricas con campo magnético no uniforme.

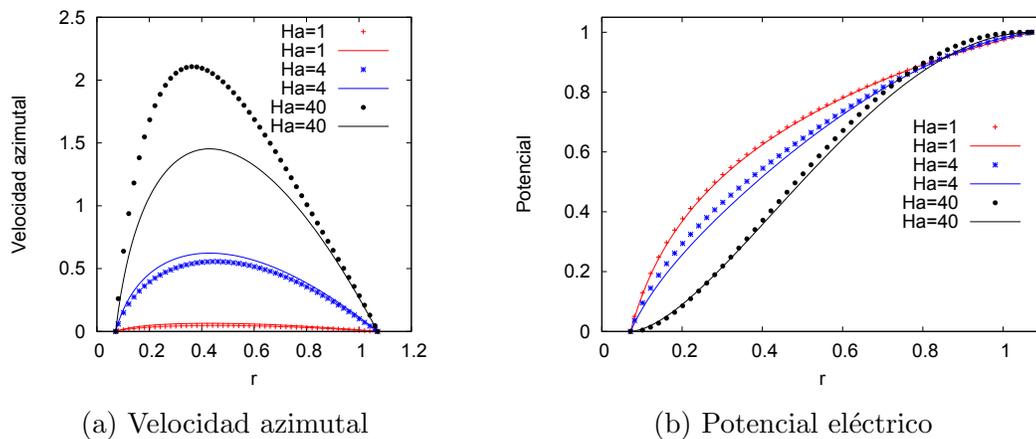


Figura 3.9: Comparación de perfiles estacionarios de a) velocidad azimutal y b) potencial eléctrico para la distribución de campo magnético no uniforme mostrada en la Figura 3.6(f), donde se rompe la simetría con respecto a ambos ejes. Las líneas continuas corresponden a la solución analítica con un campo magnético uniforme y las líneas con símbolos a la solución numérica con el campo magnético no uniforme.

magnético tiene un efecto general para la velocidad azimutal. Para Ha pequeños el perfil de velocidad se encuentra por debajo de la solución analítica, en tanto que para Ha grandes, dicho perfil se localiza por encima de la curva descrita por la solución analítica.

3.1.3. Aproximación bidimensional con campo magnético localizado

Teniendo en cuenta el campo magnético no uniforme descrito por McCaig (1977), es posible manipular las dimensiones de la placa magnetizada y obtener de esa forma campos magnéticos localizados en ciertas regiones específicas del agitador MHD. Con ello se resolvieron las ecuaciones de la MHD para estudiar el comportamiento que un campo localizado tiene sobre el flujo en el agitador.

Las Figuras 3.10, muestra distintas distribuciones de campo magnético para diversos arreglos de imanes cuyo diámetro es una décima parte de la separación entre los cilindros. En los cuatro casos los imanes se localizan a una distancia $r = 0.6$ del centro geométrico y están igualmente espaciados en la coordenada azimutal dependiendo del número de imanes. En todos los casos, los imanes tienen la misma orientación y su componente perpendicular sale del plano de la página.

Las Figuras 3.11, 3.12, 3.13 y 3.14 muestran los perfiles de velocidad estacionarios para los diversos arreglos de imanes localizados para valores de $Re = 100$ y $Ha = 1$. En la Figura 3.11, que corresponde al caso de un solo imán (ver Figura 3.10a) puede observarse que la presencia del campo magnético localizado genera, cerca de la zona de influencia del imán, un vórtice dipolar, el cual es asimétrico debido al confinamiento geométrico en el que se encuentra, presentando la parte externa un alargamiento más pronunciado que la parte interna. Es importante notar que a pesar de la localización del campo magnético existe un movimiento global del fluido en dirección antihoraria.

En la Figura 3.12, que corresponde al caso de dos imanes sobre el eje x (ver Figura 3.10b), se observa un flujo global antihorario y, de manera muy tenue, la existencia de dos vórtices cerca del cilindro externo sobre dicho eje, los cuales giran en sentido contrario entre sí. Estos vórtices parecen ser un remanente de vórtices dipolares localizados sobre los imanes, pero al ser mayor la fuerza de Lorentz cerca del cilindro interno, el fluido es arrastrado en la dirección azimutal evitando que se formen los vórtices interiores.

En las Figuras 3.13 y 3.14, correspondientes a los arreglos mostrados en las Figu-

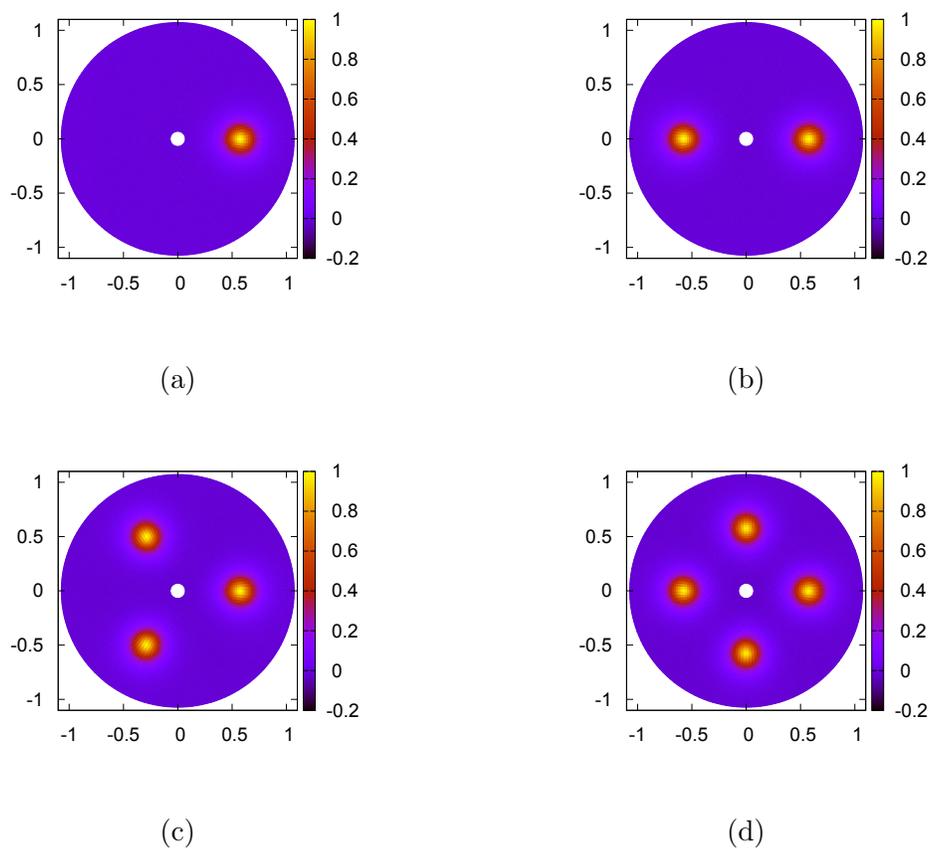


Figura 3.10: Distribución de intensidad de campo magnético para varios arreglos de imanes localizados en $r = 0.6$ y espaciados b) 180° , c) 120° y d) 90° en la coordenada azimutal. La relación entre el diámetro de los imanes y el espacio entre los cilindros es 0.1.

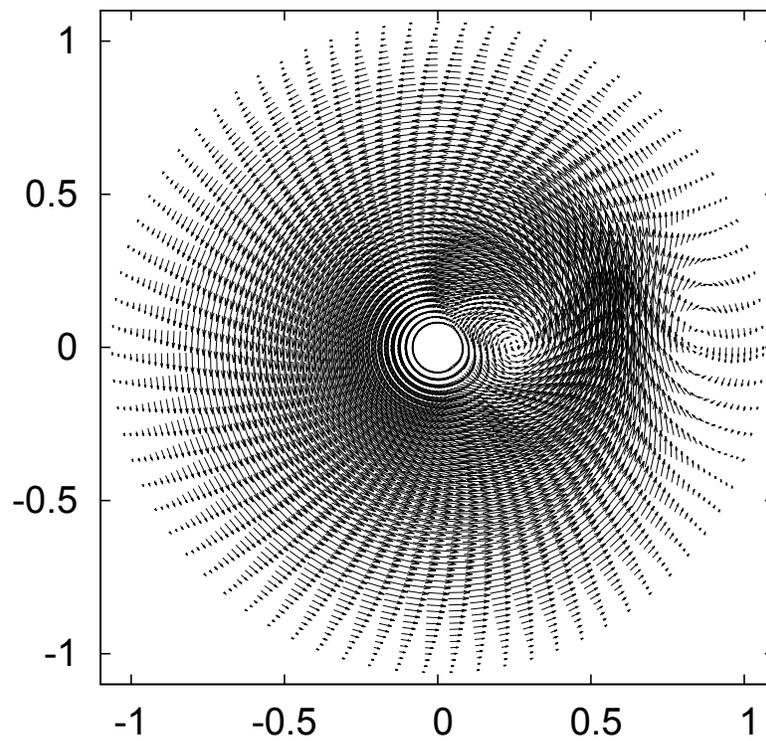


Figura 3.11: Campo de velocidad para el caso estacionario con un imán localizado (Figura 3.10(a)) para $Ha = 1$ y $Re = 100$.

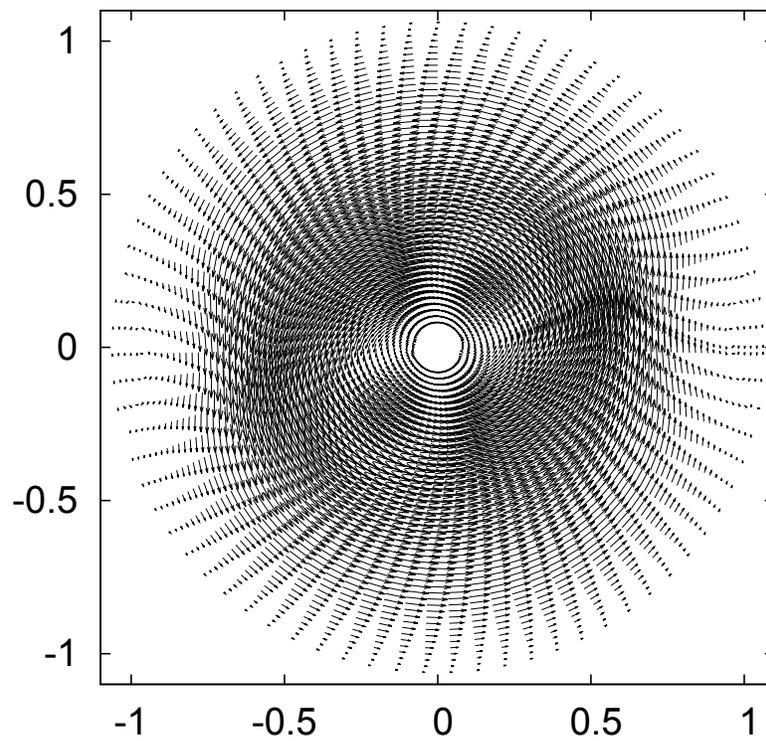


Figura 3.12: Campo de velocidad para el caso estacionario con dos imanes localizados (Figura 3.10(b)) para $Ha = 1$ y $Re = 100$.

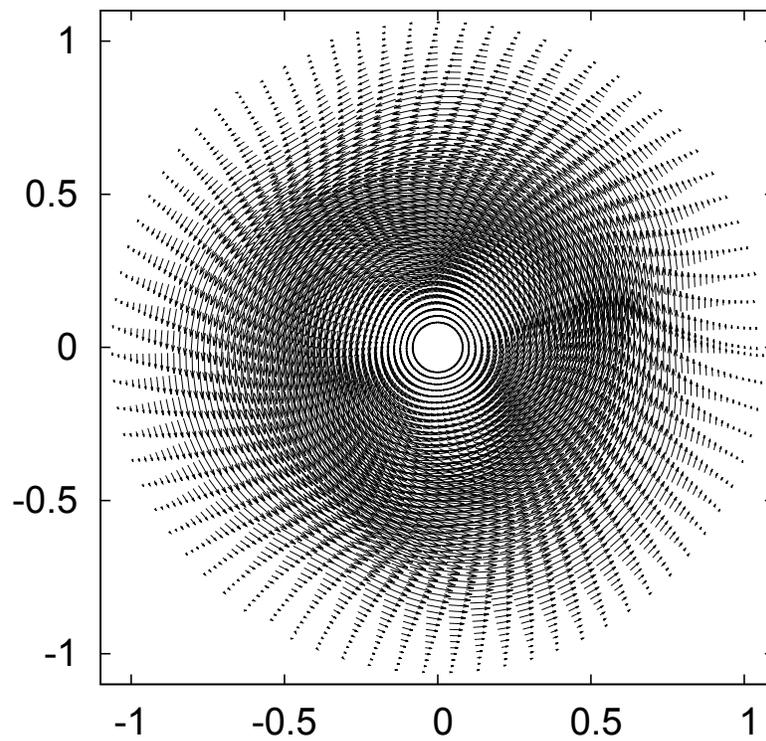


Figura 3.13: Campo de velocidad para el caso estacionario con tres imanes localizados (Figura 3.10(c)) para $Ha = 1$ y $Re = 100$.

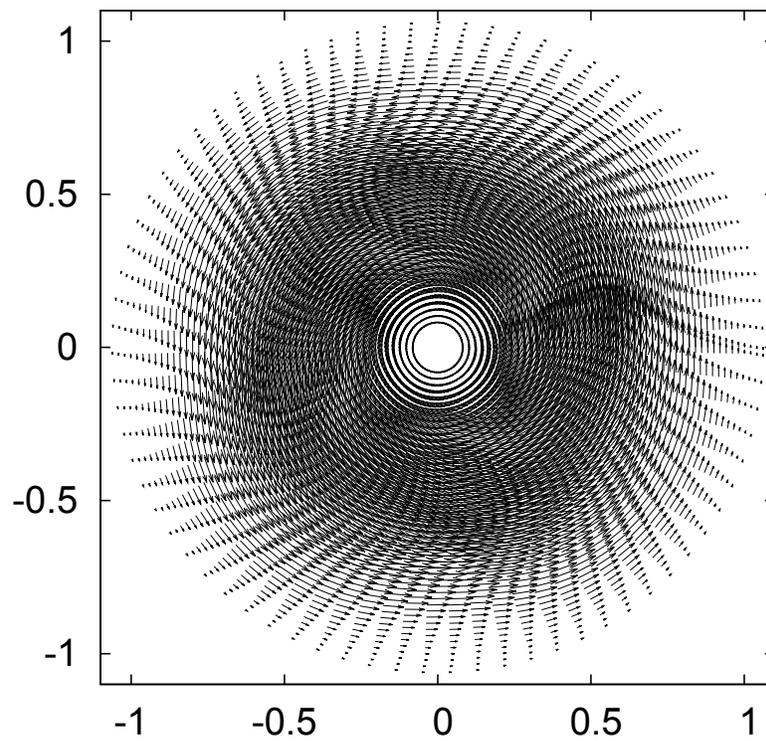


Figura 3.14: Campo de velocidad para el caso estacionario con cuatro imanes localizados (Figura 3.10(d)) para $Ha = 1$ y $Re = 100$.

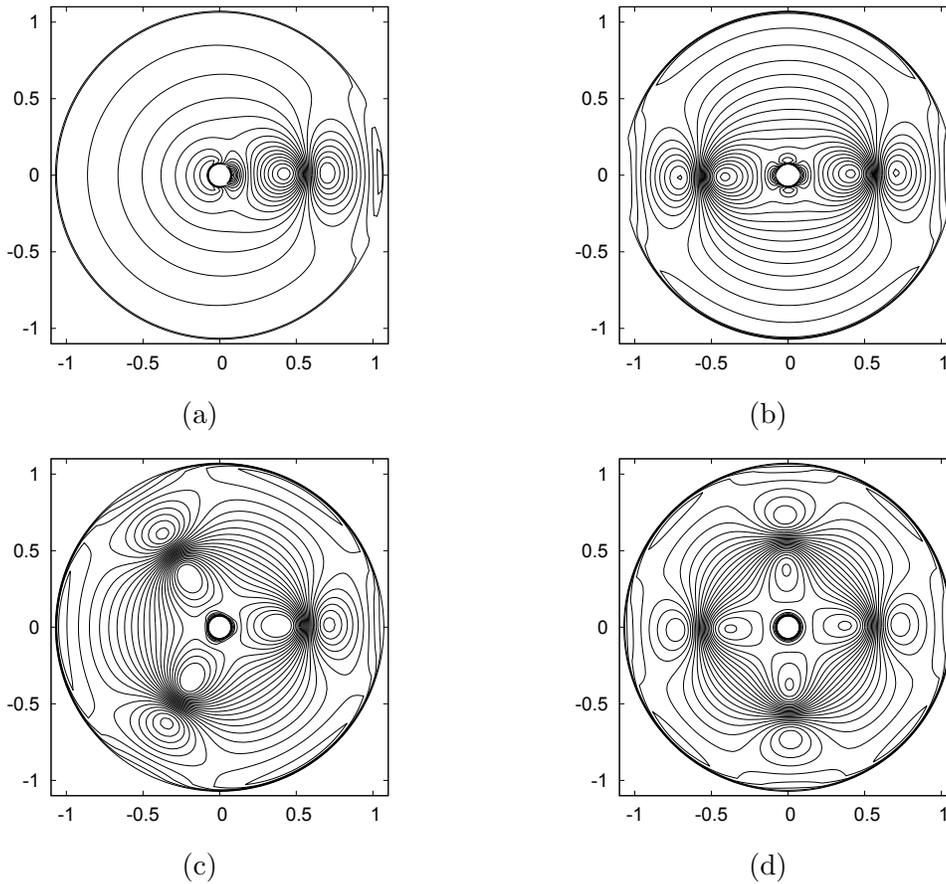


Figura 3.15: Isolíneas de vorticidad en estado estacionario para arreglos de a) uno, b) dos, c) tres y d) cuatro imanes localizados. Las cuatro figuras fueron obtenidas para $Ha = 1$ y $Re = 100$.

ras 3.10c y 3.10d, no se aprecia la formación de vórtices sino una rotación global en sentido antihorario. Sin embargo, el campo de velocidad se ve afectado por la presencia de los imanes y a la distancia se puede apreciar la formación de figuras geométricas según el número de imanes localizados. Cuando observamos el caso de tres imanes (correspondiente al arreglo mostrado en la Figura 3.10c), se observa una figura triangular, en tanto que cuando hay cuatro imanes (correspondiente al arreglo de la Figura 3.10d) se aprecia un cuadrado. Nótese que para estos dos casos, el flujo ocurre en la coordenada azimutal y lo que se visualiza como figuras geométricas es solo el efecto del cambio en la magnitud de los vectores de velocidad en la zona del

campo magnético más intenso. Al igual que en la Figura 3.12, el aumento del campo magnético, y por ende de la fuerza de Lorentz, provoca el arrastre del fluido de tal manera que ninguno de los vórtices que existen en los casos de uno y dos imanes se observa cuando se tienen un mayor número de imanes. Sin embargo, es resaltable señalar que durante el estado transitorio se observa la formación de vórtices dipolares localizados sobre todos los imanes, aunque estos decaen rápidamente conforme pasa el tiempo.

La Figura 3.15 muestra isolíneas de vorticidad en estado estacionario para los diversos arreglos de imanes mostrados en la Figura 3.10 para $Ha = 1$ y $Re = 100$. Se puede apreciar que al aumentar el número de imanes, las líneas de vorticidad tienen una mayor densidad en la región existente entre los imanes, con lo cual podríamos decir, de manera cualitativa, que hay mayor interacción entre el flujo producido por un imán y su imán vecino conforme se reduce la distancia existente entre ambos.

3.2. Modelo Q2D del flujo en un agitador MHD

En la sección anterior se consideró una aproximación bidimensional del flujo producido por una fuerza de Lorentz azimutal en un agitador MHD. Tal modelo no considera los efectos producidos por la pared del fondo del recipiente (la cual es normal al campo aplicado y por tanto se presenta una capa límite denominada *capa de Hartmann*, que tiene gran importancia en MHD [Davidson (2001)]), ni la superficie libre del electrolito. Una manera de considerar el efecto de la pared del fondo y la superficie libre es mediante un modelado cuasi-bidimensional (Q2D), el cual consiste en promediar las ecuaciones de balance de la MHD en la dirección z e incluir un término de fricción en las mismas que toma en cuenta la existencia de la capa límite en el fondo del contenedor. La metodología implementada es la descrita por Figueroa (2006).

3.2.1. Ecuaciones del modelo Q2D

Suponiendo que el transporte de momento en la dirección z es dominado por difusión, de manera general las componentes de la velocidad son

$$\mathbf{u} = [u_r(r, \theta, z, t), u_\theta(r, \theta, z, t), 0] \quad (3.2)$$

Las ecuaciones de balance pueden escribirse como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{Ha^2}{Re} j_\theta B_z, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] - \frac{Ha^2}{Re} j_r B_z, \quad (3.5)$$

donde

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (3.6)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.7)$$

De la ley de Ohm sabemos que

$$j_r = B_0 u_\theta - \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (3.8)$$

$$j_\theta = -B_0 u_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}. \quad (3.9)$$

Multiplicando la Ecuación 3.5 por r , derivando el resultado con respecto a r y restándole la derivada con respecto a θ de la Ecuación 3.4 se obtiene la ecuación de transporte de vorticidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r\omega_z)}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(r\omega_z) - u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \left(u_\theta - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{Re} \left\{ \nabla^2(r\omega_z) \right. \\ \left. - 2\nabla^2 u_\theta + 2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} \\ - \frac{Ha^2}{Re} \left\{ B_0^2 r \omega_z - B_0 r \nabla^2 \phi + B_0 r \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde

$$\omega_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], \quad (3.11)$$

representa la vorticidad del campo de velocidades.

Ahora se puede definir el promedio de una función arbitraria $g(r, \theta, z, t)$ sobre el grosor de la capa de fluido como [Figuroa (2006)]

$$\langle g \rangle(r, \theta, t) = \frac{1}{h} \int_0^h g(r, \theta, z, t) dz, \quad (3.12)$$

con h como el grosor de dicha capa. Ahora introducimos la suposición de que todas las variables pueden escribirse como su valor promediado multiplicadas por una función f que depende de la coordenada z

$$u_r(r, \theta, z, t) = \langle u_r \rangle(r, \theta, t) f(r, \theta, z), \quad (3.13)$$

$$u_\theta(r, \theta, z, t) = \langle u_\theta \rangle(r, \theta, t) f(r, \theta, z), \quad (3.14)$$

$$\omega_z(r, \theta, z, t) = \langle \omega_z \rangle(r, \theta, t) f(r, \theta, z), \quad (3.15)$$

$$\phi(r, \theta, z, t) = \langle \phi \rangle(r, \theta, t) f(r, \theta, z). \quad (3.16)$$

La dependencia en r y θ de la función f refleja la posibilidad de que el campo magnético pueda considerarse no uniforme. Además debe satisfacer la condición de normalización

$$\frac{1}{h} \int_0^h f dz = 1. \quad (3.17)$$

Si ahora se sustituyen las Ecuaciones 3.13-3.16 en la ecuación de vorticidad (Ec. 3.10) y se integra el resultado en toda la capa del fluido, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r\omega_z)}{\partial t} + \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla)(r\omega_z) - u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \left(u_\theta - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right] I = \frac{1}{Re} \left\{ \nabla_\perp^2 (r\omega_z) \right. \\ \left. - 2\nabla_\perp^2 u_\theta - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{r\omega_z}{\tau} \right\} \\ - \frac{Ha^2}{Re} \{ B_0^2 r \omega_z - B_0 r \nabla_\perp^2 \phi \}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde

$$\nabla_\perp^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (3.19)$$

$$I = \frac{1}{h} \int_0^h f^2 dz, \quad (3.20)$$

$$\tau^{-1} = \frac{1}{h} \left[\frac{df}{dz} \right]_{z=0}^{z=h}. \quad (3.21)$$

τ es un tiempo adimensional característico para el decaimiento de la vorticidad debido a la presencia del campo magnético en la capa de Hartmann.

3.2.2. Determinación de la función f

Para completar el modelo Q2D se debe determinar explícitamente la función f . Esta función se determina de manera aproximada pues lo que se pretende es que describa de manera razonable la dependencia del perfil de velocidad en la coordenada z . Esta función debe modelar entonces la transición de la velocidad cero en el fondo, debido a la condición de no deslizamiento, hasta la velocidad finita en la superficie libre, donde se supone la ausencia de esfuerzos cortantes. Además debe tomar en cuenta la presencia del campo magnético normal al fondo del recipiente, que caracteriza a la capa de Hartmann presente en dicha pared. Para la determinación de f es necesario imponer suposiciones fuertes que se justifican una vez obtenida la función y visto su efecto sobre el modelo numérico Q2D. Finalmente es necesario recordar que éste es solo un modelo que intenta simplificar de manera físicamente razonable los efectos tridimensionales del flujo. Primeramente se considera que en todo el dominio la corriente es netamente radial, en tanto el campo magnético apunta en la dirección z , y como resultado, la fuerza de Lorentz actúa en la dirección azimutal. Debido a lo anterior, se puede suponer que la única componente de la velocidad es azimutal y, para efectos de la determinación de f , supondremos que únicamente depende de z , esto es $u_\theta = \hat{f}(z)$. La ecuación que gobierna a la función f se determina entonces a partir de la Ecuación 3.5, tomando en cuenta además que no existe gradiente de presión en la dirección azimutal y que la fuerza de Lorentz viene dada por la corriente radial y el campo magnético aplicado. Con las consideraciones anteriores se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2 \hat{f}}{dz^2} - \left[\frac{1}{r_{max}^2} + Ha^2 B_0^2 \right] \hat{f} = -Ha^2 B_0 \frac{d\phi}{dr}, \quad (3.22)$$

donde r_{max} representa la posición radial en la cual se localiza el valor máximo de la velocidad azimutal y se toma como un valor característico para el perfil de velocidad. Por su parte, ϕ es el potencial eléctrico obtenido analíticamente como se describió en el capítulo anterior. Recordemos además que \hat{f} es una función que debe ser normalizada.

La Ecuación 3.22 debe satisfacer las condiciones de no deslizamiento en el fondo del recipiente y la ausencia de esfuerzos cortantes en la superficie libre, entonces

$$\hat{f}(0) = 0, \quad \left. \frac{d\hat{f}}{dz} \right|_h = 0. \quad (3.23)$$

Considerando lo anterior, la función \hat{f} tiene la forma

$$\hat{f}(z) = -\frac{Ha^2 B_0 \phi'}{A} \left[\cosh \{A^{1/2} (h - z)\} \operatorname{sech} \{A^{1/2} h\} - 1 \right], \quad (3.24)$$

donde

$$A = \frac{1 + r_{max}^2 Ha^2 B_0^2}{r_{max}^2}. \quad (3.25)$$

La función normalizada viene dada por

$$f(z) = \frac{\hat{f}(z)}{M}, \quad (3.26)$$

donde M es una constante de normalización dada por

$$M = \frac{1}{h} \int_0^h \hat{f}(z) dz = \frac{Ha^2 B_0 \phi'}{A} \left[\frac{\tanh (A^{1/2} h)}{A^{1/2} h} - 1 \right], \quad (3.27)$$

de tal manera que la función normalizada queda

$$f(z) = A^{1/2} h \left[\frac{\cosh \{A^{1/2} (h - z)\} \operatorname{sech} \{A^{1/2} h\} - 1}{\tanh \{A^{1/2} h\} - A^{1/2} h} \right]. \quad (3.28)$$

Nótese que esta función es independiente del número de Reynolds y que adquiere una dependencia espacial en las coordenadas r y θ debido al campo magnético aplicado. La Figura 3.16 muestra el comportamiento de f para dos números de Hartmann. Cuando el campo magnético aplicado es despreciable ($Ha = 0$), la función describe un perfil parabólico tipo Poiseuille, en tanto que cuando el campo magnético es intenso se forma un perfil aplanado que asemeja al perfil de Hartmann.

Sustituyendo esta función en las Ecuaciones 3.20 y 3.21, se obtiene

$$I = \frac{Ah}{2 [\tanh (A^{1/2} h) - A^{1/2} h]} \left\{ h [\operatorname{sech}^2 (A^{1/2} h) + 2] - 3 \tanh (A^{1/2} h) \right\}, \quad (3.29)$$

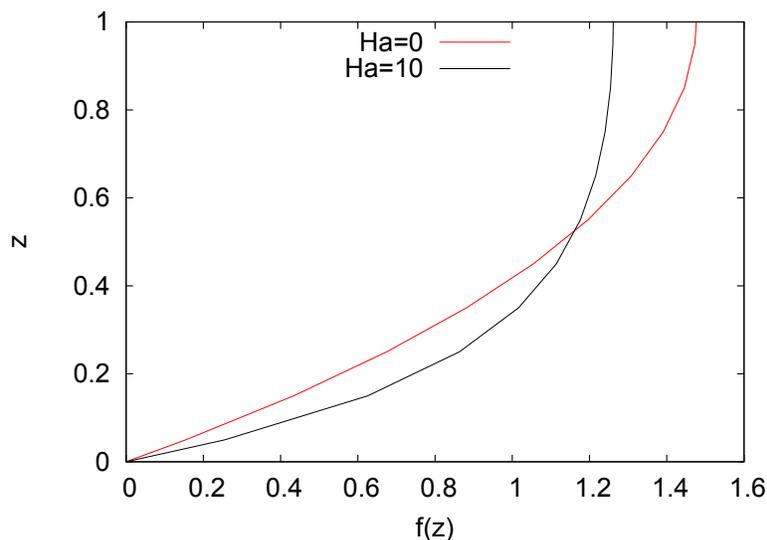


Figura 3.16: Comportamiento de f como función de z cuando el campo magnético aplicado es despreciable ($Ha = 0$) y cuando es intenso ($Ha = 10$).

y

$$\tau^{-1} = \frac{A \tanh(A^{1/2}h)}{\tanh(A^{1/2}h) - A^{1/2}h}. \quad (3.30)$$

Conocidas las funciones I y τ^{-1} , se resolvieron las ecuaciones de balance en la aproximación Q2D para el flujo MHD entre dos cilindros concéntricos con un campo magnético uniforme. La Figura 3.17 muestra los perfiles estacionarios de velocidad azmiutal para dos números de Hartmann para los casos bidimensional (líneas continuas) y cuasi-bidimensional (símbolos). En ambos casos puede observarse que los perfiles obtenidos con el modelo Q2D se encuentran por debajo de sus correspondientes soluciones bidimensionales. Lo anterior tiene sentido ya que al agregar términos adicionales de fricción a las ecuaciones es de esperar que el fluido se frene y, por lo tanto, presente velocidades menores que en caso bidimensional, en el cual no se consideran los efectos de la pared del fondo y la superficie libre.

Si se incluyen los efectos de la pared del fondo y la superficie libre a los flujos con campos magnéticos no uniformes y localizados, se observa el mismo efecto que para el caso con campo magnético uniforme, es decir, las velocidades calculadas se encuentran por debajo de sus correspondientes aproximaciones bidimensionales. Es de esperarse que la magnitud de la velocidad obtenida mediante los cálculos cuasi-

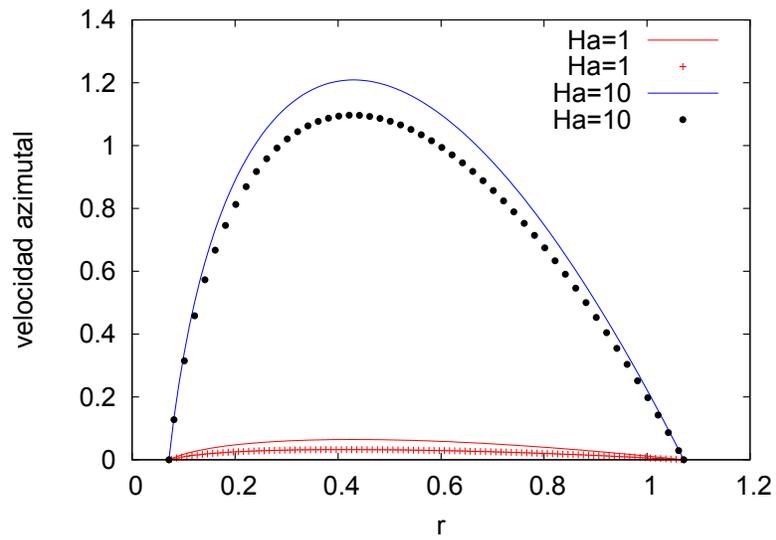


Figura 3.17: Comparación de perfiles de velocidad azimutal para el caso bidimensional (líneas continuas) y cuasi-bidimensional (líneas con símbolos) para dos números de Hartmann.

bidimensionales se acerque más al valor experimental, lo cual queda por verificarse.

Conclusiones y trabajo a futuro

En el presente trabajo se realizó un estudio teórico sobre el flujo producido por una fuerza de Lorentz azimutal en un agitador electromagnético con distintas condiciones de operación que involucran principalmente la variación de la distribución de la intensidad del campo magnético aplicado. Uno de los objetivos del trabajo fue tener un entendimiento más profundo de los flujos que se presentan en el agitador en donde se ha observado experimentalmente la aparición de inestabilidades que dan lugar a la formación de vórtices anticiclónicos. De esta forma se realizó un estudio analítico del flujo mediante la resolución de las ecuaciones fundamentales de la MHD en una aproximación bidimensional en estado estacionario con campo magnético uniforme, así como un estudio numérico, bajo las aproximaciones bidimensional y cuasi-bidimensional con fricción, con el cual se analizaron diversas distribuciones de campo magnético no uniforme y localizado.

De la solución analítica de las ecuaciones se pudo observar que los perfiles de velocidad azimutal estacionarios con campo magnético uniforme son independientes del número de Reynolds y son asimétricos, teniendo su valor máximo en $r \approx 0.43$ para todos los valores de Ha . Se observó que el único parámetro adimensional que afecta la solución analítica es el número de Hartmann, el cual, para efectos del presente trabajo, refleja la intensidad del campo magnético aplicado. Puede mostrarse que para bajos números de Hartmann ($Ha \ll 1$), las velocidades son del orden Ha^2 . Conforme se aumenta la intensidad del campo magnético, la velocidad azimutal crece hasta alcanzar un límite finito cuando $Ha \rightarrow \infty$. Con un análisis más detallado se pudo obtener que dentro del agitador existe una región, comprendida entre $0.166 \leq r \leq 0.657$, en la cual la vorticidad y el esfuerzo cortante tienen signos contrarios. Dicha región, de acuerdo a Marcus (1990), corresponde a una zona en donde no pueden existir vórtices anticiclónicos. Este resultado parece concordar con las observaciones experimentales hechas en el IER, en las cuales los vórtices observados se localizan cerca del cilindro externo [Pérez-Espinoza (2012)]. De acuerdo a Marcus (1990), en la región en donde

la vorticidad y el esfuerzo cortante tienen signos iguales, existe una redistribución de la vorticidad de tal manera que ésta tiene sus valores máximos en el centro de los vórtices que puedan formarse en dicha zona. Es probable que dentro del agitador MHD, debido a pequeñas perturbaciones inherentes a los experimentos, se formen vórtices anticiclónicos que, de acuerdo a la teoría de Marcus (1990), tienden a concentrarse cerca del cilindro externo. En esta zona, y para ciertos valores de la corriente utilizada en el experimento, la generación de vorticidad debida a la fuerza de Lorentz y la disipación de vorticidad debida a efectos viscosos se equilibran de tal manera que la vorticidad alcanza un valor constante. Debido a que únicamente se redistribuye la vorticidad, los vórtices observados experimentalmente en el IER no se disipan durante largos intervalos de tiempo. Lo anterior constituye una posible explicación cualitativa de la existencia, por largos periodos de tiempo, de vórtices anticiclónicos en el agitador del IER y, por supuesto, está sujeta a validación tanto experimental como teórica.

Para la parte numérica del presente estudio se programó un código numérico para la solución de las ecuaciones fundamentales de la MHD utilizando la técnica de volumen finito. En una primera etapa se validó el código numérico simulando el caso bidimensional en estado estacionario y comparando los resultados con la solución analítica. Una vez validado, fue posible calcular los perfiles de velocidad para el estado transitorio, donde se observó que al inicio del movimiento del fluido los puntos de velocidad máxima se encuentran cerca del cilindro interno y se aprecia que a tiempos cortos, el perfil de velocidad es similar a un perfil Kepleriano regularizado. Con lo anterior se establece una similitud entre el flujo en el agitador MHD del IER y los fenómenos astrofísicos simulados por Bracco *et al.* (1999) aunque las condiciones físicas de ambos flujos son muy distintas. Posteriormente se utilizó una expresión analítica que proporciona el campo magnético de un imán permanente cuadrado y con ello se observó que los perfiles de velocidad azimutal pierden aún más la simetría cuando el campo magnético no es uniforme, pues el punto de máxima velocidad llega a moverse cerca del cilindro interno cuando los números de Hartmann son altos. También se realizaron simulaciones para observar el efecto de un campo magnético localizado. Para ello se realizaron diversos arreglos desde uno hasta cuatro imanes con igual polaridad. Se pudo observar que en el caso de un solo imán se forma un vórtice dipolar que es asimétrico debido al confinamiento geométrico. En el caso de dos imanes se aprecia la aparición de dos vórtices muy débiles en posiciones diametralmente opuestas en la región cercana al cilindro externo. Para el caso de tres y cuatro imanes se observa que no existen vórtices en el flujo, ello puede deberse a que el flujo debido a los imanes interacciona de manera más intensa resultando en el arrastre del fluido en la dirección azimutal. Finalmente, se realizó un modelo

Q2D con fricción, el cual toma en cuenta la fricción del fondo del recipiente así como la superficie libre, y se observó que las magnitudes de la velocidad muestran valores menores a los calculados para el caso bidimensional, lo que es consistente con el hecho de haber incluido en el flujo un efecto disipativo adicional.

Con los códigos numéricos desarrollados, sería conveniente realizar simulaciones en las que se consideren diversas condiciones que no han sido tratadas experimentalmente como la variación de la separación entre los cilindros o bien considerar cilindros excéntricos. Asimismo se plantea la necesidad de desarrollar un modelo totalmente tridimensional para realizar simulaciones más reales de los flujos que se presentan en el agitador MHD. El simular la aparición de la inestabilidad que da lugar a los vórtices anticiclónicos observados de manera experimental parece requerir la implementación de una técnica numérica basada en métodos espectrales, ya que estos son más adecuados para estudiar de manera sistemática diferentes modos que pueden ser perturbados en un flujo determinado. Aunado a lo anterior, se deben realizar nuevos experimentos en los que sea posible medir, de manera precisa, los campos de velocidad en el agitador con el fin realizar una validación cuantitativa de las simulaciones numéricas de los flujos en cuestión.

Apéndice A

El método de volumen finito

La solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el método de volumen finito consiste en dividir el dominio de interés en pequeños volúmenes de control e integrar las ecuaciones en cada uno de esos pequeños volúmenes. Hecho lo anterior, se hace uso de algún esquema numérico que permita aproximar todos y cada uno de los términos de las ecuaciones a resolver. Lo anterior resulta en un sistema de ecuaciones lineales que al resolverse nos proporciona una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales iniciales.

A continuación se describe brevemente el método de discretización y solución de las ecuaciones de balance mediante el método de volumen finito. Dicha metodología puede hallarse con mayor detalle en Versteeg y Malalasekera (1995).

A.1. Discretización de las ecuaciones de balance

Sea ϕ un variable dependiente generalizada que satisface la ecuación general de advección-difusión

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S, \quad (\text{A.1})$$

donde \mathbf{u} es el campo de velocidades, Γ es un coeficiente de difusión generalizado y S un término fuente de la variable ϕ .

La discretización de las ecuaciones de balance se obtiene integrando la Ecuación A.1 en un pequeño volumen de control $\Delta V = \Delta x \Delta y$ como el que se muestra en la Figura A.1

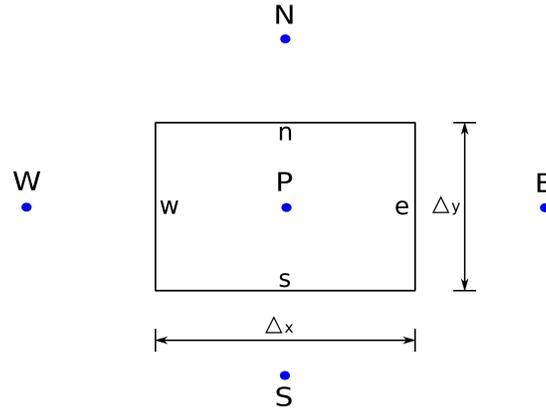


Figura A.1: Volumen de control cartesiano. P representa el centro del volumen de control. Las letras mayúsculas E , W , N y S representan los centros de los volúmenes de control inmediatos a P y las letras minúsculas se emplean para denotar las correspondiente fronteras del volumen P .

La discretización del término temporal se realiza utilizando un esquema totalmente explícito, esto es,

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = (\phi_P - \phi_P^0) \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (\text{A.2})$$

donde ϕ_P y ϕ_P^0 indican el valor de la variable ϕ en el centro del volumen de control para un tiempo t y el tiempo inmediato anterior, respectivamente.

Haciendo uso del teorema de Gauss, se puede expresar la integral del término convectivo como una integral de superficie de la forma

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) dV = \int_{\Delta s} (\mathbf{u}\phi) \cdot \hat{n} ds, \quad (\text{A.3})$$

la cual se puede expresar de manera desarrollada como

$$\int_{\Delta s} (\mathbf{u}\phi) \cdot \hat{n} ds = u_e \phi_e A_e - u_w \phi_w A_w + v_n \phi_n A_n - v_s \phi_s A_s, \quad (\text{A.4})$$

done u y v representan las componentes x y y de la velocidad, ϕ_i se refieren al correspondiente valor de ϕ en cada una de las caras del volumen de control y $A_e = A_w = \Delta y$ y $A_n = A_s = \Delta x$ a las dimensiones de las caras del volumen de control.

El término difusivo se discretiza, con ayuda del teorema de Gauss, como

$$\int_{\Delta s} (\Gamma \nabla \phi) \cdot \hat{n} ds = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e A_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w A_w + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n A_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s A_s. \quad (\text{A.5})$$

El término fuente de aproxima de acuerdo a

$$\int_{\Delta V} S dV = \bar{S}_P \Delta V, \quad (\text{A.6})$$

siendo \bar{S}_P el valor promedio del término fuente dentro del volumen de control.

Dado que se desea resolver las ecuaciones de tal manera que se conozcan los valores de la variable ϕ en los centros de los volúmenes de control, es necesario aproximar los términos de la parte convectiva y difusiva mediante algún esquema que nos permita cambiar esos términos de las fronteras a los centros del volumen de control.

Los términos convectivos, en los cuales yace la no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, se aproximan mediante un *esquema central*, el cual consiste en promediar de manera aritmética las cantidades deseadas:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}, \quad \phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2}, \quad \phi_s = \frac{\phi_S + \phi_P}{2}. \quad (\text{A.8})$$

La discretización del término difusivo se realiza mediante *diferencias centrales* y ello resulta en una aproximación de segundo orden:

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}, \quad \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}, \quad (\text{A.9})$$

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n = \Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y}, \quad \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s = \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y}. \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo las aproximaciones anteriores en la ecuación general de advección difusión (Ec. A.1) se obtiene la forma discreta de la misma, es decir,

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P, \quad (\text{A.11})$$

donde

$$a_E = \Gamma_e \frac{A_e}{\Delta x} - \frac{u_e A_e}{2}, \quad (\text{A.12})$$

$$a_W = \Gamma_w \frac{A_w}{\Delta x} + \frac{u_w A_w}{2}, \quad (\text{A.13})$$

$$a_N = \Gamma_n \frac{A_n}{\Delta y} - \frac{v_n A_n}{2}, \quad (\text{A.14})$$

$$a_S = \Gamma_s \frac{A_s}{\Delta y} + \frac{v_s A_s}{2}, \quad (\text{A.15})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (\text{A.16})$$

$$S_P = \bar{S}_P + \phi_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (\text{A.17})$$

La ecuación de continuidad, de manera discreta se escribe como

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_{\Delta s} \mathbf{u} \cdot \hat{n} ds = u_e A_e - u_w A_w + v_n A_n - v_s A_s = 0. \quad (\text{A.18})$$

Para resolver el sistema A.11 se requieren condiciones de frontera adecuadas, las cuales se tratan en la siguiente sección.

A.2. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se presentan generalmente como una distribución explícita de la variable de interés en la frontera (condición del primer tipo y *Dirichlet*) o como la derivada de la misma (condición del segundo tipo o *Neumann*). La forma discreta de cada uno de estos tipos de condiciones se trata a continuación.

A.2.1. Condición del primer tipo o Dirichlet

Si se considera que se conoce de manera explícita el valor de la variable ϕ en alguna de las fronteras, esto es, $\phi_b = \phi_0$, donde el subíndice b denota alguna frontera del sistema, es posible corregir las ecuaciones algebraicas de los volúmenes de control adyacentes a dicha frontera. De la Figura A.2, se puede observar que el volumen E se encuentra fuera del dominio de interés y se conocen el valor de la variable ϕ en la frontera este.

El valor de la frontera se puede aproximar como

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}. \quad (\text{A.19})$$

Despejando ϕ_E

$$2\phi_e = \phi_E + \phi_P \quad \Rightarrow \quad \phi_E = 2\phi_e - \phi_P. \quad (\text{A.20})$$

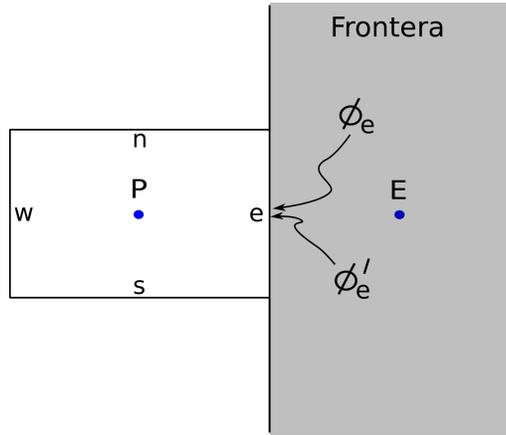


Figura A.2: Volumen de control adyacente a la frontera este. Cuando se conoce el valor ϕ_e se trata de una condición del primer tipo. Cuando se conoce el valor de la derivada de la variable (ϕ'_e) se trata de una condición del segundo tipo.

Si ahora se sustituye la Ecuación A.20 en la forma discreta de la ecuación de advección-difusión (Ec. A.11) se obtiene

$$a_P \phi_P = a_E (2\phi_e - \phi_P) + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P. \quad (\text{A.21})$$

Rearreglando lo anterior se llega a

$$a_P^* \phi_P = a_E^* \phi_e + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P^*, \quad (\text{A.22})$$

donde

$$a_P^* = a_P + a_E, \quad a_E^* = 0, \quad S_P^* = S_P + 2a_E \phi_e. \quad (\text{A.23})$$

A.2.2. Condición del segundo tipo o Neumann

Si se conoce el valor de la derivada de la variable en la dirección normal a la frontera (Fig. A.2), se pueden corregir los volúmenes adyacentes a dicha frontera como sigue. Se aproxima la derivada ϕ'_e como

$$\phi'_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}, \quad (\text{A.24})$$

de donde

$$\phi_E = \phi_e \Delta x + \phi_P. \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo en A.11 se obtiene

$$a_P \phi_P = a_E (\phi_e \Delta x + \phi_P) + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P, \quad (\text{A.26})$$

que se puede expresar como

$$a_P^* \phi_P = a_E^* \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P^*, \quad (\text{A.27})$$

donde

$$a_P^* = a_P - a_E, \quad a_E^* = 0, \quad S_P^* = S_P + a_E \phi_e \Delta x. \quad (\text{A.28})$$

A.3. Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

La solución numérica de las ecuaciones Navier-Stokes entraña ciertas dificultades. La primera radica en la no linealidad de las ecuaciones, misma que se puede manejar en cada iteración debido a la existencia de un dominio temporal en el fenómeno estudiado. Otra dificultad conocida radica en el hecho de que, si las velocidades y la presión se calculan en el mismo punto, se pueden obtener soluciones físicamente incorrectas. Esta dificultad se ataca mediante el uso de las llamadas *mallas desfasadas* (“staggered grid”), con las cuales el cálculo de las velocidades se realiza en las caras de los volúmenes de control en tanto que las variables escalares se resuelven en los centros de los mismos (Figura A.3).

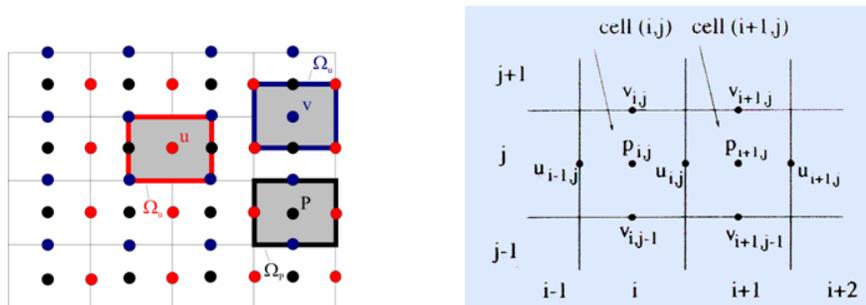


Figura A.3: Arreglos de mallas desfasadas. Se puede apreciar que las componentes de la velocidad y la presión se calculan en puntos distintos de la malla.

La tercera dificultad para la solución de Navier-Stokes radica en el hecho de que no se cuenta con condiciones de frontera para la presión, y ésta a su vez se encuentra

acoplada con la velocidad, esto es, para resolver la velocidad es necesario conocer el gradiente de presión, pero no se puede conocer de manera directa el gradiente de presión debido a la falta de condiciones de frontera para la misma. Esta dificultad se supera mediante la ecuación de continuidad de manera que *el gradiente de presión es correcto cuando, al resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, el campo de velocidades satisface la ecuación de continuidad*. El método de desacople empleado en el presente trabajo se describe a continuación.

A.3.1. Acoplamiento presión-velocidad

Los términos fuente de las ecuaciones discretizadas para las velocidades dependen del gradiente de presión. Al no contar con condiciones iniciales o de frontera para dicha variable es necesario hacer una suposición de la presión (digamos p^*) y realizar correcciones de la forma $p = p^* + p'$ hasta que el campo de velocidades sea solenoidal, es decir, satisfaga la ecuación de continuidad. La forma discreta de la ecuación general de advección-difusión (Ec. A.11), considerando que ϕ es una de las componentes de velocidad, se puede escribir como

$$a_n u_n = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_n (p_P - p_N). \quad (\text{A.29})$$

donde el término fuente se ha separado en b , que incluye una parte temporal y fuentes de cantidad de movimiento en el flujo, y el gradiente de presión. Los términos dentro de la sumatoria corresponden a los vecinos inmediatos del volumen de control considerado.

Al realizar una primera suposición del gradiente de presión, la Ecuación A.29 puede expresarse como

$$a_n u_n^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_n (p_P^* - p_N^*). \quad (\text{A.30})$$

Debido a que no se conoce el gradiente de presión real, es de esperar que al resolver la Ecuación A.30, la velocidad no satisfaga la ecuación de continuidad, por ello se hace necesario realizar correcciones a la presión, las cuales a su vez resultan en correcciones de la velocidad.

Sea p' la corrección de la presión y u' la corrección de la velocidad que satisfacen

$$p = p^* + p', \quad u = u^* + u'. \quad (\text{A.31})$$

Si se resta la Ecuación A.30 de la Ecuación A.29 se obtiene

$$a_n u'_n = \sum a_{nb} u'_{nb} + A_n (p'_P - p'_N). \quad (\text{A.32})$$

En este punto se pueden realizar ciertas simplificaciones del término $\sum a_{nb}u'_{nb}$, lo cual da lugar a una familia de métodos de raíz genérica SIMPLE (*Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations*).

A.3.2. Método SIMPLEC

En este método la Ecuación A.32 se simplifica restando $\sum a_{nb}u'_n$ en ambos lados de la ecuación. Lo anterior resulta en

$$\left(a_n - \sum a_{nb}\right)u'_n = \sum a_{nb}(u'_{nb} - u'_n) + A_n(p'_P - p'_N). \quad (\text{A.33})$$

Considerando que las correcciones de la velocidad son pequeñas, se puede despreciar el término $\sum a_{nb}(u'_{nb} - u'_n)$ para obtener

$$u'_n = d_n(p'_P - p'_N), \quad (\text{A.34})$$

pero $u = u^* + u'$, con lo cual

$$u_n = u_n^* + d_n(p'_P - p'_N), \quad (\text{A.35})$$

donde

$$d_n = \frac{A_n}{a_n - \sum a_{nb}}. \quad (\text{A.36})$$

Sustituyendo A.36 en la ecuación de continuidad se obtiene la ecuación de corrección de la presión.

De manera general, el algoritmo empleado en la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes se describe a continuación:

1. Se inicia con una suposición p^* de la presión.
2. Con la presión supuesta se calculan los coeficientes para la solución de la velocidad.
3. Se resuelven las ecuaciones para las componentes de la velocidad.
4. Se calculan coeficientes para la corrección de la presión.
5. Se resuelve la ecuación para la corrección de la presión.
6. Se corrige la presión mediante $p = p^* + p'$.

7. Se corrige el campo de velocidad por medio de la Ecuación A.35.
8. Se resuelven ecuaciones para otras variables (como temperatura o potencial eléctrico).
9. Se itera hasta que el campo de velocidad sea solenoidal.

Bibliografía

- Asai, S. (2012). “Electromagnetic processing of materials”. Springer, Berlin.
- Beltrán, A. (2010). “Dinámica de flujos en obstáculos magnéticos”. Tesis doctoral, Centro de Investigación en Energía, UNAM.
- Bracco, A., Chavanis, P. H., y Provenzale, A. (1999). “Particle aggregation in a turbulent Keplerian flow”. *Physics of Fluids* **11**, 2280–2287.
- Chandrasekhar, S. (1961). “Hydrodynamic and hydromagnetic stability”. Oxford.
- Cuevas, S. (2004). “Introducción a la magnetohidrodinámica: Memorias de la escuela de verano de física”. UNAM-UAEM.
- Currie, I. G. (2007). “Fundamental mechanics of fluids”. Cambridge. Tercera edición.
- Davidson, P. A. (2001). “An introduction to magnetohydrodynamics”. Cambridge.
- Digilov, R. M. (2007). “Making a fluid rotate: Circular flow of a weakly conducting fluid induced by a Lorentz body force”. *American Journal of Physics* **75**, 361–367.
- Drazin, P. G. (2002). “Introduction to hydrodynamic stability”. Cambridge.
- Figueroa, A. (2010). “Dinámica de vórtices generados mediante fuerzas electromagnéticas”. Tesis doctoral, Centro de Investigación en Energía, UNAM.
- Figueroa, A. (2006). “Generación de vorticidad mediante fuerzas magnéticas”. Tesis de maestría, Centro de Investigación en Energía, UNAM.
- Fleisch, D. (2008). “A student’s guide to the Maxwell’s equations”. Cambridge.
- Hjellming, L. N. y Walker, J. S. (1986). “Melt motion in a Czochralski crystal puller with an axial magnetic field: isothermal motion”. *Journal of Fluid Mechanics* **164**, 237–273.

- Lissauer, J. J. (1993). “Planet formation”. *Annual Review of Astronomy & Astrophysics* **31**, 129–174.
- Marcus, P. S. (1990). “Vortex dynamics in a shearing zonal flow”. *Journal of Fluid Mechanics* **215**, 393–430.
- McCaig, M. (1977). “Permanent magnets in theory and practice”. Wiley.
- Müller, U. y Bühler, L. (2001). “Magnetofluidynamics in Channels and Containers”. Springer.
- Nuñez, J. (2008). “Transferencia de calor en un flujo MHD en ductos anulares”. Tesis de maestría, Centro de Investigación en Energía, UNAM.
- Pérez-Espinoza, J. E. (2012). “Diseño y construcción de un agitador magnetohidrodinámico”. Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico de Zacatepec.
- Qin, M. y Bau, H. H. (2012). “Magnetohydrodynamic flow of a binary electrolyte in a concentric annulus”. *Physics of Fluids* **24**, 037101–1–20.
- Rivero, M. A. (2012). “Estudio experimental de flujos en dispositivos de bombeo y agitación electromagnéticos”. Tesis doctoral, Centro de Investigación en Energía, UNAM.
- Smolentsev, S., Cuevas, S., y Beltrán, A. (2010). “Induced electric current-based formulation in computations of low magnetic Reynolds number magnetohydrodynamic flows”. *Journal of Computational Physics* **229**, 1558–1572.
- Versteeg, H. K. y Malalasekera, W. (1995). “An Introduction to Computational Fluid Dynamics: the finite volume method”. Longman Scientific & Technical.