UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN

FILOSOFÍA DE LA CIENCIA.

CAMPO: FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LÓGICA DE LA CIENCIA.

Un examen de la ley de doble negación bajo el sistema proposicional intuicionista.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:

Gabriel A. Siade Paulín

TUTOR: Dr. J.J. Max Fernández de Castro Tapia
Posgrado en Filosofía de la Ciencia

MÉXICO, D.F. 2013

UNAM POSGRADO

Filosofía de la Ciencia

Por Isabel A. Paulín Hútmacher

Agradecimientos.

Al Dr. Virgilio Beltrán López y el Dr. Augusto Cabrera Manuel por iniciarme en la investigación.

Al Dr. Max Fernández de Castro Tapia por dirigir pacientemente este trabajo.

A la Dra. Ivonne Pallares Vega y Dr. Alfonso Arrollo Santos por su apoyo y generosos comentarios gracias a los cuales profundicé varios temas de la presente tesis.

A los demás miembros del jurado: Dr. Axel Barceló Aspeitia y Dr. Francisco Hernández Quiroz.

A la Dra. Margarita Yépez Hernández, Dra. Isabel Contreras Islas, Dr. Mario Gómez Torrente, Dra. Atocha Aliseda Llera, Dra. Elsa Puente Vázquez, Dra. María de los Ángeles Eraña Lagos, Dr. Ambrosio F. J. Velasco Gómez, Dr. J. Gabriel Siade Barquet, Dr. Oscar R. Uribe Villegas, Mtra. Georgina Paulín Pérez, Dra. Margarita Camarena Luhrs, Mtro. Seymur Espinosa Camacho, las Poetisas Lourdes Sánchez Duarte y María Luisa Cabanillas, al Mtro. en Artes Plásticas Agustín Tamayo, al Filósofo Julio C. Horta Gómez, al Comunicólogo Guillermo D. Jiménez Sánchez, al Sociólogo Makoto C. Noda Yamada, al Amigo Edgardo Blanchet Moreno, a la Historiadora Tamara Medina Sapovalova y a Ana María Cazares Altamirano.

A los miembros de la hermanada comunidad hebreo-libanesa mexicana que siempre he añorado, en especial a Ventura Barquet de Siade.

A la heroica resistencia del pueblo de México.

Dedicado a:

Él aún vigente legado del Ing. Manuel P. Paulín Ortiz

ÍNDICE.

Introducción.

En la literatura del siglo pasado sobre lógica intuicionista[1], *On the principle of excluded middle* es un antecedente en el cual, bajo cierto sistema de axiomas, se examina implícitamente la ley de doble negación ($\vdash (\sim\sim P \rightarrow P)$). En dicha obra, Kolmogorov prueba sobre la base del llamado *sistema* $\mathcal{B}$ -de Brouwer- (sistema compuesto por los axiomas de Hilbert para la implicación y un axioma para la negación propuesto por Kolmogorov [2]), ciertas fórmulas (oraciones simbólicas) que son instancias de la ley de doble negación. A través de ello, Kolmogorov delimita el dominio aplicabilidad del esquema de dicha ley, bajo un sistema de axiomas del cual es excluida.

En la presente tesis, llamada *Un examen de la ley de doble negación bajo el sistema proposicional intuicionista*, derivaremos algunas oraciones simbólicas en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting* (sistema constituido por (i) los axiomas del *cálculo proposicional intuicionista* [3] y (ii) las reglas de inferencia adecuadas para las oraciones simbólicas del lenguaje del *cálculo de oraciones* [4]). A través de las mencionadas oraciones simbólicas delimitaremos el dominio de aplicabilidad del esquema de la ley de doble negación, como en su momento Kolmogorov lo hizo respectivamente bajo el sistema $\mathcal{B}$.

[1] El término “intuitionistic” suele traducirse como *intuicionista*, el cual se vincula al intuicionismo que se considera iniciado con la disertación doctoral de Brouwer. Cf. Posy (2005) p.319.

[2] Cf. Kolmogorov (1981) pp. 422, 418 y 421. Los axiomas de Hilbert para la implicación y el axioma para la negación propuesto por Kolmogorov se pueden consultar en el apartado **V**.

[3] “El cálculo proposicional intuicionista ha sido desarrollado [A. Heyting 1930] como un sistema formal con $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ como constantes…”(Heyting (1971) p.105 -traducción del autor) y sobre la base de ciertos axiomas (ver sección **V.1**)

[4] “…rama de la lógica que esencialmente comprende los conectivos oracionales.” Kalish (1980) p.59. -traducción del autor

En adición a lo anterior, para completar el presente examen de la ley de doble negación, la oración simbólica $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$, oración derivable en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*, será examinada

(1) considerando el significado semántico clásico de la negación (presentado en la sección **III.2**), y

(2) considerando el significado semántico intuicionista de la negación (sección **III.4**).

Dicho examen llevará a exponer distintos resultados, para el valor de verdad y el "valor de probabilidad" (este último vinculado con el que cierta proposición ha sido probada -no ha sido probada), de la oración simbólica presente en el esquema de la ley de doble negación.

Notemos que para completar el presente examen requerimos previamente distinguir el significado semántico clásico de la negación, del significado semántico intuicionista de dicho signo.

En consideración a lo anterior, uno de los **objetivos** centrales del presente trabajo será responder a la siguiente pregunta:

¿ el significado semántico clásico de la negación presenta algún atributo con el que diferenciemos dicho significado, del significado semántico intuicionista de la negación?

El sostenimiento de la respuesta a la pregunta precedente, nos llevará a mantener la siguiente **tesis**.

> ***El significado semántico clásico de la negación presenta un atributo, el cual está ausente en ciertos elementos que representan 'situaciones de evidencia', los cuales se exhiben en algunos modelos intuicionistas asumidos en el significado semántico intuicionista de la negación***.[5]

En relación con lo anterior, demostraremos bajo qué condición se obtendría cierta relación condicional, la cual (simplificadamente) diferiría del atributo considerado que presenta el significado semántico clásico de la negación.

La **metodología** para exponer el atributo anteriormente mencionado, el cual nos permitirá (i) diferenciar el significado semántico clásico de la negación del significado semántico intuicionista, y (ii) completar el presente examen de la ley de doble negación, será la siguiente:

- En *Boceto sobre una teoría del significado* iniciaremos introduciendo al lector en cierto modelo de significado que circunscribiremos en la lógica intuicionista. Modelo en el cual, la comprensión del significado de una *proposición* matemática consiste en la capacidad de reconocer una prueba de ella cuando se nos presenta.

---

[5] El tipo de *modelo intuicionista* (en una *estructura modelo* (**G**, **K**, ***R***)) al que me refiero, Kripke lo define en *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I* como: cierta función binaria $\phi : \mathcal{P} \times K \rightarrow \{ \mathbf{V}, \mathbf{F} \}$ -donde $\mathcal{P}$ es un conjunto de letras oración (del lenguaje del *cálculo de oraciones*) y K es un conjunto cuyos elementos representan 'situaciones de evidencia'. Cf. sección **III.4**.

• En *Proposiciones "indecidibles"* : (i) ejemplificaremos algunas diferencias pertinentes para la lógica entre una proposición y la oración en la que se declara, (ii) examinaremos ciertas similitudes entre una proposición y una oración simbólica, y (iii) presentaremos dos interpretaciones de lo que consideraremos como definición de una proposición.

• En el apartado *Significado de los signos lógicos* distinguiremos el significado semántico de los signos lógicos (del lenguaje $\pounds_p$ del cálculo de oraciones), de lo que supondremos el significado sintáctico de tales signos. Posteriormente, considerando cada una de las interpretaciones mencionadas en el párrafo anterior, presentaremos respectivamente

(i) el significado semántico clásico de los signos lógicos de $\pounds_p$ y

(ii) cierta interpretación intuicionista de los signos lógicos.

En adición a lo anterior, el significado semántico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$, lo exhibiremos directamente de la propuesta de Kripke en *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I.* Además, en este apartado expondremos **el atributo del significado semántico clásico de la negación, con el que diferenciaremos dicho significado del significado semántico intuicionista de la negación**.

• En *Ley de doble negación* exhibiremos lo que permitiría afirmar la negación de $\vdash (\sim\sim P \rightarrow P)$. Lo cual será también condición suficiente de cierta relación condicional, que simplificadamente diferiría del atributo (mencionado en el párrafo precedente) del significado semántico clásico de la negación. Expondremos además, una transcripción de un ejemplo en el cual intuicionistamente falla $\sim\sim P \rightarrow P$.

• En *El sistema proposicional intuicionista de Heyting* presentaremos tanto los axiomas del cálculo proposicional intuicionista desarrollado por Heyting (de los cuales se excluirá el axioma $\vdash$ *(~~ P → P)*), como las reglas de inferencia adecuadas para las oraciones simbólicas del lenguaje $£_p$ (del *cálculo de oraciones*). Axiomas y reglas de inferencia, que determinarán el significado sintáctico intuicionista (bajo los axiomas de Heyting) de los signos lógicos de $£_p$, y que constituirán **el *sistema proposicional intuicionista de Heyting* bajo el cual examinaremos la ley de doble negación**.

Aunque en *Conclusiones* presentaremos un resumen seriado de los resultados obtenidos en esta tesis, finalizaré el presente examen de la ley de doble negación, con algunos comentarios que expondré en el apartado llamado *Comentarios críticos*. En dicho apartado:

(i) exhibiremos algunas propuestas relacionadas con lógica intuicionista, las cuales involucran o cierta instancia de la ley del tercio excluso o involucran la ley de doble negación, y

(ii) exhibiremos cierta problemática que podría presentarse cuando consideramos simultáneamente, traducciones de la noción de negación de Heyting a distintas *fórmulas modales*[6].

[6] Las *fórmulas modales* a las que me refiero fueron propuestas por Gödel en *An interpretation of the intuitionistic propositional calculus*. Cf Apéndice B.

Esta tesis decidí llamarla *Un examen de la ley de doble negación bajo el sistema proposicional intuicionista*, no sólo por el examen explícito que presento en el apartado *El sistema proposicional intuicionista de Heiting*, sino porque las inferencias realizadas en toda la tesis se efectuaron de acuerdo a axiomas (o teoremas) intuicionistas (en el caso de alguna inferencia dentro de la *lógica clásica*, esto se comenta en el pie de página).

El presente trabajo, aunque pretende introducir al estudiante de filosofía de la ciencia (o de la matemática) en la lógica proposicional intuicionista, espero ayude aquel autodidacta interesado en el tema.

I. Boceto sobre una teoría del significado.

En el presente apartado, partiendo de una de las formulaciones sobre el significado de una palabra, formulaciones expuestas por Carnap en *La superación de la metafísica mediante el análisis lógico del lenguaje*, ofreceremos una disertación con la que situaremos cierto modelo de significado (extraído de *La verdad y otros enigmas* obra escrita por Dummett) dentro de la lógica intuicionista.

* * *

En *La superación de la metafísica mediante el análisis lógico del lenguaje*, Carnap presenta cuatro formulaciones sobre el significado de una palabra, considerando a cada una de ellas como condición necesaria y suficiente para que la palabra en cuestión tenga significado. Además, supone que cada una de tales formulaciones dice fundamentalmente lo mismo[7]. Una de dichas formulaciones consiste en establecer las llamadas condiciones de verdad, para (lo que tal autor considera) la *proposición elemental* [8] en la que aparece la palabra por cuyo significado se pregunta.

Aunque en el siguiente apartado expondremos lo que es una *proposición* y lo que llamaremos *estructura* ("*forma*") *proposicional*, por el momento considérese el siguiente ejemplo. Para Carnap, la *forma proposicional elemental* de la palabra "artrópodo" es *la cosa **x** es un artrópodo* [9]. En adición a ello, dicho autor parece sugerir las siguientes condiciones de verdad, bajo las cuales debe ser verdadera la *proposición elemental* que contiene a la palabra "artrópodo" (criterio de verdad): que sea el caso de que (sea verdad que) (i) "***x*** es un animal", (ii) "***x*** posee un cuerpo segmentado", (iii) "***x*** posee extremidades articuladas" y (iv) "***x*** tiene una cubierta de quitina" [10].

---

[7] Cf. Carnap (1965) p.70

[8] En relación a las llamadas *proposiciones elementales*, Carnap expone que: "En primer lugar debe fijarse la sintaxis de la palabra, es decir, la manera como se presenta en la forma proposicional más simple en la que puede aparecer; llamaremos a esta forma proposicional su *proposición elemental*. La forma proposicional elemental para la palabra 'piedra', por ejemplo, es '***x*** es una piedra'; en proposiciones de esta forma podríamos designar algo dentro de la categoría de las cosas para que ocupara el lugar de '***x***', por ejemplo, 'este diamante', 'esta manzana'." Carnap (1965) p.68.

[9] "De esta manera ha quedado resuelto el problema antes mencionado en relación a la forma proposicional elemental de la palabra 'artrópodo', esto es, para la forma proposicional 'la cosa ***x*** es un artrópodo'. " Carnap (1965) p.68.

[10] En lugar de exponer las condiciones de verdad, bajo las cuales debe ser verdadera la *proposición elemental* que contiene a la palabra 'artrópodo', Carnap presenta lo siguiente: "Se ha estipulado que una proposición de esta forma [*la cosa **x** es un artrópodo*] debe ser derivable de premisas de la forma '***x*** es un animal', '***x*** posee un cuerpo segmentado', '***x*** posee extremidades articuladas', '***x*** tiene una cubierta de quitina' y que inversamente, cada una de estas proposiciones debe ser derivable de aquella proposición." Ibídem, pp.68-69.

En adición a lo precedente, Carnap parafrasea las estipulaciones anteriores sobre 'derivabilidad', como estipulaciones sobre su criterio de verdad de la proposición elemental sobre "artrópodos" ("Por medio de estas estipulaciones sobre derivabilidad (en otras palabras: sobre su criterio de verdad, el método de verificación, el sentido) de la proposición elemental sobre 'artrópodos', se fija el significado de la palabra 'artrópodos'." Ibídem, p.69).

Por lo anterior se sugiere el expuesto criterio de verdad.

De lo anterior, y dado que podemos establecer un criterio de aplicación para la *proposición elemental* que contiene a la palabra “artrópodo” ((i)-(iv)), la palabra “artrópodo” tiene significado de acuerdo a la formulación inicialmente mencionada.

Sin embargo, la precedente condición (i)-(iv) remite a palabras de las cuales necesitamos conocer su significado. Por lo tanto, dichas palabras suponemos tendrían significado, es decir, las condiciones de verdad de las respectivas *proposiciones elementales* en las que aparecerían estarían establecidas, y así reiteradamente. Además, para poder afirmar el que cierta x_1 por ejemplo tiene (no tiene) una cubierta de quitina, podríamos constatar si tal x_1 tiene una substancia de aspecto córneo que le da dureza al dermatoesqueleto, y de ello afirmar, si así es el caso, que x_1 tiene una cubierta de quitina. Para ello estaríamos apelando al sentido de la oración en la que se invocan conceptos conocidos: *substancia de aspecto córneo que da dureza al dermatoesqueleto*, para una vez verificado lo declarado, es decir, una vez comprobada la verdad de la proposición en x_1 *tiene una substancia de aspecto córneo que da dureza al dermatoesqueleto*, afirmar aquello que sea el caso para x_1.

La noción de verdad, ya sea implícita en verificar la proposición sobre cierta x_1 que cumple con la condición de verdad de la palabra “artrópodo”, o implícita en el supuesto, de que las palabras presentes en la condición de verdad de la palabra “artrópodo” tienen significado (y así reiteradamente), requiere ser explicada.

Una explicación común de la palabra *verdadero* "…es que ⌈es verdad que *p* ⌉ tiene el mismo sentido que la oración *p*" [11]. En adición a lo anterior, "De una oración se puede decir si tiene sentido, antes de saber si es verdadera o falsa" [12]. Incluso, existen proposiciones declaradas en oraciones, de las que no podemos establecer que sean verdaderas y de las que tampoco podemos establecer que sean falsas, sin por ello carecer de sentido (el cual puede resultar entre otros requisitos, de los conceptos ya conocidos llamados en la oración[13]). Por ejemplo: en la oración *La sucesión 0123456789 aparece en la expansión decimal de π* se declara una proposición que podría resultar con sentido, en tanto que remite a conceptos conocidos, aunque no podamos establecer que sea verdadera y tampoco probar que sea falsa.

Cabe preguntarnos bajo que criterio podemos sostener que ciertos conceptos son conocidos. Lo que daría lugar a que la oración en que son llamados tales conceptos tienda a considerarse con sentido. Situemos ante dicha interrogante, un modelo de significado que circunscribiremos en la lógica intuicionista, modelo extraído de *La verdad y otros enigmas*, obra escrita por Dummett.

---

[11] Dummett (1990) p.86. Dummett comenta que dicha explicación es derivada de Frege, además, en la disertación que desarrolla sobre tal explicación se refiere a ella a través de *es verdad que* ***p*** *si y solo si* ***p***. A partir de ello llega a establecer que: "…siempre será inconsistente afirmar la verdad de toda instancia de 'es verdad que *p* si y solo si *p*' mientras permitamos que haya un tipo de oración que bajo ciertas condiciones no es …verdadera ni falsa." Dummett (1990) p.69.

[12] Carnap (1990) p.25.

[13] "Si una proposición solamente contiene conceptos que ya son conocidos y han sido reconocidos como inobjetables, entonces el sentido de la proposición resulta de dichos conceptos." Ídem.

En la vertiente de la lógica intuicionista desarrollada por Dummett se considera que: “uno entiende los conceptos llamados en el lenguaje si y solo si uno sabe como usar el lenguaje correctamente”[14] (*tesis del uso*). Bajo ésta tesis, la comprensión del significado de un enunciado[15] matemático debía consistir en la capacidad para usar el enunciado de cierta manera, o de responder de una cierta manera al uso que le dan otros[16]. Más dado que, las características reales del uso que aprendemos a hacer de los enunciados matemáticos consisten en reconocer aquello que ha de constituir una prueba o refutación del enunciado, en la lógica intuicionista, examinada a través de la obra mencionada de Dummett, se propuso un modelo de significado donde: “…la comprensión del significado de un enunciado [matemático] consiste en la capacidad de reconocer una prueba de él cuando se nos presenta…”[17].

Volviendo al ejemplo presentado, ¿podríamos afirmar que entendemos los conceptos llamados en la oración *La sucesión 0123456789 aparece en la expansión decimal de π,* a pesar de que carecemos tanto de una prueba como de una refutación de la proposición declarada?. Antes de pretender responder a tal interrogante, delimitemos el término *prueba* presente en el expuesto modelo de significado intuicionista.

---

[14] Shapiro (1997) p.204 –traducción del autor.

[15] Aunque el término *enunciado* es el que se presenta en *La verdad y otros enigmas*, más adelante será precisado a través del término *proposición*.

[16] Cf. Dummett (1990) pp.297-298.

[17] Dummett (1990) p.307. La traducción de *Truth and other enigmas*, realizada por Herrera A., presenta explícitamente el término *prueba*. En el presente trabajo conservé tal término en lugar del término *demostración* por lo siguiente.

“En matemáticas puras, …nos restringimos a demostrar que nuestros supuestos primarios necesariamente implican o vinculan teoremas los cuales son deducidos a partir de dichos supuestos, y omitimos la cuestión de si nuestras conclusiones así como nuestros axiomas o postulados son de hecho verdaderos.

Es posible que sea de alguna ventaja usar la palabra ‘prueba’ para…el procedimiento…por el cual concluimos que una proposición es verdadera…, y designar por ‘deducción’ o ‘demostración’ el procedimiento por el cual solo establecemos una *implicación* o *conexión necesaria* entre una premisa y su conclusión omitiendo la verdad o falsedad de una u otra.” Cohen (1934) p.7-traducción del autor.

Por lo anterior, y dado que las fórmulas derivables a partir de los axiomas de la *aritmética intuicionista* (axiomas que incluyen las *fórmulas axioma* de la lógica proposicional intuicionista) son fórmulas llamadas por Gentzen *intuicionistamente verdaderas* (cf. Gentzen (1969) pp.55-56), optamos por conservar el término *prueba* presente en la traducción mencionada de *Truth and other enigmas*.

•En *On the relation between intuitionist and classical arithmetic*, Gentzen declara que el complemento formal de una prueba, el cual es llamado una *derivación*, "…es una sucesión de fórmulas cada una de las cuales es o una fórmula axioma o resulta de las fórmulas anteriores por la aplicación de una regla operacional " [18] (en relación con los axiomas y reglas de inferencia del sistema formal en el que se estipulen, éstos determinarán el significado sintáctico de los signos lógicos –ver apartado **III**).

•En *Intuitionism An Introduction*, Heyting llamaría una *prueba* de $\wp$: a una construcción matemática realizada con ciertas propiedades dadas, construcción demandada por una proposición matemática $\wp$ [19]. En adelante abreviaré lo anterior llamándole *construcción probatoria* de $\wp$.

En relación con la palabra "construcción" empleada por Heyting, dicho autor la entendería en un sentido amplio, pudiendo denotar:

(i) un método general de construcción[20],

(ii) algún supuesto que unido a una *prueba* de cierta proposición matemática guiara a una *prueba* de otra proposición[21], etc.

---

[18] Gentzen (1969) p. 55 -traducción del autor.

[19] Lo expuesto en el texto, lo extraigo de la siguiente cita: "…una proposición matemática $\wp$ siempre demanda una construcción matemática con ciertas propiedades dadas; ella puede ser afirmada tan pronto como una construcción ha sido realizada. Decimos en ese caso que la construcción *prueba* la proposición $\wp$ y la llamamos una prueba de $\wp$. Por brevedad, también denotaremos por $\wp$ cualquier construcción la cual es proyectada por la proposición $\wp$." Heyting (1971) p.102 -traducción del autor.

[20] Heyting afirma que "Es necesario entender la palabra 'construcción' en sentido amplio, así que ella también puede denotar un método general de construcción…" Ibídem, p.103.

[21] Un ejemplo de tales supuestos puede extraerse de la siguiente cita:
"…$\wp \rightarrow q$ puede ser afirmada si y solo si poseemos una construcción la cual, unida a la construcción $\wp$, debe probar q . Ahora suponga que $\vdash \sim \wp$, esto es, hemos deducido una contradicción de la suposición de que $\wp$ fuese realizada. Entonces, en un sentido, esto puede ser considerado como una construcción, la cual, unida a una prueba de $\wp$ (la cual no existe) guía a una prueba de q ." Ibídem, p.106.

En adición a lo anterior, Heyting interpretaría los signos lógicos explícita o implícitamente a través de la noción de construcción. Por ejemplo:

(i) "$\sim \wp$ puede ser afirmada si y solo si poseemos una construcción la cual, de la suposición de que una construcción $\wp$ fuese realizada, ésta guiara a una contradicción" [22], o

(ii) "$\wp \wedge q$ pueden ser afirmadas si y solo si ambas $\wp$ y q pueden ser afirmadas" [23], es decir, tan pronto como haya sido realizada tanto una construcción matemática con ciertas propiedades dadas demandada por $\wp$ (*construcción probatoria* de $\wp$), como una construcción matemática demandada por q (*construcción probatoria* de q).

Respecto a la pregunta anteriormente planteada, aunque en la oración *La sucesión 0123456789 aparece en la expansión decimal de* π se declare una proposición de la que carecemos tanto de una prueba como de una refutación, ésta es constituyente (como veremos en la sección **IV.1**) de una construcción, la cual, de la suposición de que cierta construcción $\wp$ fuese realizada, ésta guiaría a una contradicción [24]. Reconocer tal prueba, bajo el modelo de significado intuicionista expuesto, funda la comprensión del significado de lo que garantiza el aserto de cierto "enunciado" matemático $\sim \wp$.

* * *

[22] Heyting (1971) p.102.
[23] Ídem.
[24] En **IV.1** transcribiremos un ejemplo adjudicado a Brouwer, donde no es el caso que: la prueba de la negación de la *imposibilidad* de cierta propiedad sea una prueba de la propiedad misma. Pero también expondremos con ello, y a esto me refiero, una construcción donde suponer que ρ no pueda ser racional guiaría a una contradicción, siendo que con el generador de número ρ se presentan entre otras oraciones: *La sucesión 0123456789 aparece en la expansión decimal* π.

Finalizaré este boceto concluyendo que de *La verdad y otros enigmas* podemos extraer un modelo de significado que circunscribimos en la lógica intuicionista. Modelo en el cual, la comprensión del significado de un “enunciado”[25] matemático, precisando, de una proposición matemática, consiste en la capacidad de reconocer una prueba de ella cuando se nos presenta.

El término *prueba*, mencionado en el modelo precedente, podemos delimitarlo considerando que:

i) para Gentzen el complemento formal de una prueba es una *derivación*, y

ii) para Heyting, una construcción matemática realizada con ciertas propiedades dadas, construcción demandada por una proposición matemática $\wp$, es llamada una *prueba* de $\wp$ (lo que abreviaremos como *construcción probatoria* de $\wp$).

No obstante, para completar la delimitación anterior se requiere delimitar la palabra “construcción”, la cual, Heyting entendería en un sentido amplio. Un ejemplo de tales construcciones se presenta en la sección **IV.1**.

En el próximo apartado trataremos de esclarecer lo que (para los propósitos de la lógica) suele entenderse como una *proposición* en distinción de la oración en que se declara; y “definiremos” operacionalmente el negar que una proposición sea absolutamente “decidible”.

---

[25] *Enunciado*: “En ciertas escuelas lingüísticas, secuencia finita de palabras delimitadas por silencios muy marcados. Puede estar constituida por una o varias oraciones.” Diccionario de la Lengua Española. Real Academia Española. Vigésima Edición. Tomo I. Impreso en España. 1984. p.568.

Sin pretender desviar espero al lector, considero pertinente cerrar este apartado comentando cierta línea de investigación extraíble del presente boceto.

En la llamada *tesis del uso*, uno entiende los conceptos llamados en el lenguaje si y solo si uno sabe como usar el lenguaje correctamente. *Conocer como usar*, que en el caso de proposiciones matemáticas consiste en reconocer una prueba o refutación de tales proposiciones.

De lo anterior parece sugerirse que: el reconocimiento de una prueba (o refutación) de cierta proposición matemática $\wp$ es condición necesaria y suficiente, para que los conceptos llamados en la oración con la que se declara dicha proposición matemática sean considerados entendidos (conocidos). Lo que permitiría señalar (tomando en cuenta que "Si una proposición solamente contiene conceptos que ya son conocidos y han sido reconocidos como inobjetables, entonces el sentido de la proposición resulta de dichos conceptos"[26]) que la proposición $\wp$ es candidata para resultar con sentido. No obstante, se presentan los siguientes casos que pudieran delimitar la condición sugerida:

(1) existen proposiciones de las que carecemos tanto de una prueba como de una refutación, proposiciones constituyentes de *construcciones probatorias* reconocidas como pruebas de otras proposiciones matemáticas, éstas últimas, aspirantes a resultar con sentido bajo la condición anteriormente sugerida, y

[26] Carnap (1990) p.25

(2) como veremos adelante, existen vínculos entre ciertas proposiciones los cuales son demostrables a partir de ciertos conceptos. Por lo que, desde la condición sugerida, serían candidatos para resultar con sentido ante el reconocimiento de tales demostraciones. Sin embargo, dichos vínculos entre las proposiciones en cuestión pueden ser falsos en algunos modelos[27].

[27] En el siguiente apartado presentaremos al pie de página, una demostración en la cual bajo el concepto ingenuo de conjunto, *el conjunto de "los píos" está vacío si y solo si el conjunto de "los píos" es igual a "el conjunto vacío"*. Sin embargo, existen modelos donde el vínculo (si y solo si) entre las proposiciones declaradas es falso (considerando la primera interpretación de la definición de proposición expuesta en la sección **II.2**). Cf. notas al pie 33 y 41.

II. Proposiciones "indecidibles".

En el apartado anterior donde situamos cierto modelo de significado que circunscribimos en la lógica intuicionista, y en la literatura sobre el tema, en ocasiones suelen no distinguirse los términos "proposición", "juicio", "enunciado", "oración", etc. Sin pretender abordar las distinciones sobre dichos términos, que suelen exponerse en el análisis para el estudio del estrato sintagmático (análisis que abarca el gramatical, el distribucional, el lógico, etc.[28]), iniciaremos la primera sección presentando cierta definición de una *proposición* acorde con los propósitos de la lógica. Posteriormente

- ejemplificaremos algunas diferencias pertinentes para la lógica entre una proposición y la oración en que se declara[29],
- examinaremos ciertas similitudes entre una proposición y una oración simbólica y
- exhibiremos lo comentado en el apartado anterior sobre cierto vínculo entre proposiciones que versan sobre conjuntos, el cual es demostrable bajo ciertos conceptos, y que sin embargo es falso en algunos modelos.

En la segunda sección expondremos dos interpretaciones de la definición anteriormente mencionada de una *proposición*. Dichas interpretaciones, en el apartado **III**, serán respectivamente consideradas para el significado semántico clásico de los

[28] Una recomendable obra sobre los diversos análisis que permiten estudiar el estrato sintagmático se encuentra en Paulín (2006).
[29] Una fuerte influencia por exponer tales distinciones fue motivada por Cohen (1934).

signos lógicos (del lenguaje del *cálculo de oraciones*), y la interpretación intuicionista de los signos lógicos propuesta por Heyting.

Finalizaremos la segunda sección “definiendo” operacionalmente el negar que una proposición sea absolutamente “decidible”.

*   *   *

II.1. Vínculo entre proposiciones y oraciones.

En *An Introduction to Logic and Scientific Method*, Cohen expone que una proposición, para los propósitos de la lógica, suele definirse como algo que puede decirse que es verdadero o falso (pero no simultáneamente ambos)[30]. Lo anterior, suponiendo que la cópula se distribuye sobre cada disyunto, sugiere la siguiente definición:

Def.1. ***Una proposición es*** algo que puede decirse que es verdadero o que es falso (pero no simultáneamente ambos).

- Ejemplifiquemos algunas diferencias entre una proposición y una oración[31].

(I) Existen oraciones gramaticalmente distintas con las que se manifiestan respectivamente proposiciones, que bajo ciertos conceptos, la verdad (falsedad) de una de ellas conlleva a la verdad (falsedad) de otra y viceversa (implicándose mutuamente el mismo valor de verdad), en adelante, proposiciones *equivalentes*[32]. Por ejemplo: considérese las siguientes distintas oraciones

(i) *El conjunto de "los píos" está vacío*, y

(ii) *El conjunto de "los píos" es igual a "el conjunto vacío".*

---

[30] Cf. Cohen (1934) pp.27-30.

[31] "La *oración* se distingue dentro del habla como la menor expresión que tiene un sentido pleno" (Diccionario Enciclopédico Quillet. Editorial Argentina Arístides Quillet, S.A. Buenos Aires. Grolier Internacional, Inc. Nueva York. Tomo IV. 1968, p. 402).

[32] El criterio expuesto para llamar *equivalentes* a dos proposiciones, en lógica clásica, lleva al ofrecido a continuación por Cohen y Nagel (y viceversa):

"Si ***p*** es verdadera, ***q*** es verdadera.
Si ***p*** es falsa, ***q*** es falsa.

Dos proposiciones conectadas así se dicen *equivalentes*." Cohen (1934) p.55 -traducción del autor.

De las distintas oraciones anteriores podemos obtener, bajo el concepto ingenuo de conjunto (que consiste en considerar que para cada propiedad hay un conjunto), que la proposición declarada en (i) es verdadera (falsa) si y solo si la proposición declarada en (ii) es verdadera (falsa)[33].

(II) En adición a lo anterior, existen oraciones que no manifiestan proposiciones, por ejemplo: *¡Acércate!*.

De lo expuesto en (I) y (II) se sostiene que el conjunto de oraciones es distinto del conjunto de proposiciones, aunque cada proposición se declare a través de una oración, y se simbolice, cuando se tiene el lenguaje artificial adecuado para ello, a través de *oraciones simbólicas*[34].

---

[33] ***Demostración***.
→] Si el conjunto de *los píos* (*B*) está vacío, no tiene elementos, es decir, $\sim\exists x\ (x \in B)$ (y viceversa). Además, bajo el concepto ingenuo de conjunto (que consiste en considerar que para cada propiedad hay un conjunto -cf. Amor (1997) p.5) se tiene que para la propiedad $x \neq x$, existe *el conjunto vacío* (Ø). De ello, $\emptyset = \{\ x\ /\ x \neq x\ \}$, que abrevia: $\forall x\ (\ x \in \emptyset \ \leftrightarrow\ x \neq x\ )$ (cf. Amor (1997) p.2). De lo anterior, y tomando en cuenta el principio de identidad, $\sim\exists x\ (x \in \emptyset)$. A partir de esto último, y si $\sim\exists x\ (x \in B)$, se obtiene que $\forall x\ (\ x \in B\ \leftrightarrow\ x \in \emptyset\ )$. Lo que junto con la definición de igualdad entre conjuntos llevan a establecer que $B = \emptyset$.
←] Bajo el concepto ingenuo de conjunto obtuvimos que $\sim\exists x\ (x \in \emptyset)$. De ello, y si $B = \emptyset$, obtenemos que $\sim\exists x\ (x \in B)$ (de la regla de Leibniz).
De lo demostrado tanto en **→]** como en **←]** se sostiene que $\sim\exists x\ (x \in B)\ \leftrightarrow\ B = \emptyset$. De esto último, y suponiendo que lo demostrable es verdadero, en lógica clásica obtenemos que:
$\sim\exists x\ (x \in B)$ es verdadero (falso) si y solo si $B = \emptyset$ es verdadero (falso).
Por lo anterior, bajo el concepto ingenuo de conjunto, en la oración ***El conjunto de " los píos" está vacío*** se declara una proposición que es verdadera (falsa) si y solo si, la proposición declarada en ***El conjunto de "los píos" es igual a "el conjunto vacío"*** es verdadera (falsa).

[34] Las *oraciones simbólicas* de cierto lenguaje simbólico pueden generarse a través de la notación BNF. Un ejemplo de ello se presenta en la sección **III.1**.

- Examinemos ciertas similitudes entre una proposición y una oración simbólica.

"Una oración simbólica…puede tener dos *valores de verdad*, verdad (V) o falsedad (F) " [35]. Lo anterior sugiere considerar que cada oración simbólica representa algo que puede decirse en tanto posibilidad, que es verdadero o que es falso, es decir, representa al menos una proposición. Exhibamos para tal sugerencia, un ejemplo de proposición a oración simbólica y viceversa.

Considérese el siguiente argumento.

Todos los inmortales son nonatos.

Sócrates es inmortal.

$\therefore$ ***Sócrates es nonato***.

Tanto en las oraciones de cada premisa y de la conclusión se declaran respectivamente proposiciones que, bajo el siguiente esquema de abreviación
I: ***x*** *es inmortal*, *N*: ***x*** *es nonato*, *A*: *Sócrates*[36], es posible representarlas o simbolizarlas a través de las siguientes oraciones simbólicas:

$$\forall \mathbf{x}\,(\,I(\mathbf{x}) \rightarrow N(\mathbf{x})\,)$$

$$I(A)$$

$$\therefore N(A)$$

[35] Kalish (1980) p.88 -traducción del autor. Aunque Kalish se refiere a las oraciones del cálculo simbólico extendemos dicha afirmación para cualquier cálculo, como el de cuantificadores, de identidades, etc.
[36] En el lenguaje simbólico del *cálculo de cuantificadores 'monádico'*, tanto *I* como *N* son letras predicado, mientras que *A* es una letra nombre. Cf. Kalish (1980) pp.119 y 144.

Además, de la oración simbólica $(\ \forall x\,(I(x) \rightarrow N(x))\ \wedge\ I(A)\ )\ \rightarrow\ N(A)$ -que es un teorema del *cálculo de cuantificadores 'monádico'*- podemos exponer que es verdad para cualquier *expansión de verdad funcional* (independientemente del esquema de abreviación inicialmente propuesto)[37]. De ello consideramos representa al menos una proposición en cada *expansión*, ya que cada una de tales *expansiones* tiene el valor de verdad *V* (o *F* -por adición). Por lo tanto, existen oraciones simbólicas "complejas" cuyas *expansiones* pueden representar proposiciones.

No obstante las precedentes ejemplificaciones de proposiciones a oraciones simbólicas y viceversa, "…la proposición es la expresión de un juicio entre dos términos, a saber, sujeto y predicado; que afirma o niega éste (el predicado) de aquel

[37] Como en el argumento simbólico $\forall x\,(I(x) \rightarrow N(x))\quad I(A)\ \therefore N(A)$, la conclusión es derivable de las premisas, dicho argumento es válido (cf. Kalish (1980) p.153). Además, cada premisa así como la conclusión es una *oración simbólica* (una *oración simbólica*, en el cálculo de cuantificadores 'monádico', es una *fórmula simbólica* en la cual ninguna variable está libre. Pero también las *fórmulas simbólicas*, resultantes de escribir una letra predicado seguida de una letra nombre, suelen considerarse constituyentes de oraciones simbólicas. Lo que sugiere incluirlas como tales oraciones -cf. Kalish (1980) pp. 119, 120, 124 y 129).

Ya que es válido el argumento anterior, cuyas premisas y conclusión son respectivamente oraciones simbólicas, en cada una de las *expansiones funcionales de verdad* *, las premisas implican tautológicamente la conclusión (cf. Kalish (1980) pp. 175). De ello, no existe una asignación de valores de verdad con respecto a la cual, simultáneamente, cada una de las premisas tiene el valor de verdad *V* y la conclusión *F* (cf. Kalish (1980) p.99). Lo que (en lógica clásica) lleva a establecer que, con respecto a cualquier asignación *A*, o no es el caso que la conjunción de las premisas es verdad (respecto *A*) o la conclusión es verdad (respecto *A*).

De lo precedente, en cada una de las *expansiones funcionales de verdad* es verdad que la conjunción de las premisas implica la conclusión (con respecto a cualquier asignación de valores de verdad, e independientemente del esquema de abreviación considerado inicialmente en el texto).

* Para obtener una *expansión funcional de verdad*, del argumento en consideración, se realizan los siguientes procedimientos.

1º Se elige una sucesión finita de distintas variables, por ejemplo: y_1, y_2.

2º Se substituye $\forall x\,(I(x) \rightarrow N(x))$ por $(\ I(y_1) \rightarrow N(y_1)\ \wedge\ I(y_2) \rightarrow N(y_2)\ )$.

3º Se *reemplaza uniformemente* la letra nombre *A*, por una de las variables de la sucesión, digamos y_1.

4º En el argumento resultante: $(\ I(y_1) \rightarrow N(y_1)\ \wedge\ I(y_2) \rightarrow N(y_2)\ )\quad I(y_1)\ \therefore N(y_1)$, cada fórmula simbólica compuesta de una letra predicado seguida de una variable se *reemplaza uniformemente* por una letra oración –distintas fórmulas pasan a distintas letras oración-, por ejemplo: $(\ P \rightarrow Q\ \wedge\ R \rightarrow S\ )\quad P\ \therefore\ Q$. Cf. Kalish (1980) p.174.

Notemos que, si nos restringimos a un universo de dos objetos distintos, representados respectivamente por y_1, y_2, la fórmula cuantificada precedente implica la conjunción expuesta y viceversa.

(del sujeto), o incluye o excluye el sujeto respecto del predicado” [38].

En consideración a la precedente definición de proposición, la oración simbólica $(\ \forall x\ (I(x) \rightarrow N(x))\ \wedge\ I(A)\ )\ \rightarrow\ N(A)$ parecería que - bajo el esquema de abreviación inicial- ‘no simboliza’ precisamente una proposición. Pues la respectiva traducción al español representa más que la expresión de un juicio entre dos términos. Por ello, en adelante llamaremos *estructuras proposicionales*, a aquellas oraciones simbólicas (también las fórmulas de los sistemas proposicionales) con las que representamos o simbolizamos, una o varias proposiciones declaradas a través de oraciones simples o compuestas[39].

---

[38] Paulín (2006) p.191.

[39] Un antecedente, de lo que pretendo abarque el término *estructura proposicional*, puede ser extraído de Cohen (1934). Sin pretender desarrollar un planteamiento exhaustivo menciono lo siguiente.

(i) Cohen y Nagel reconocen que las proposiciones tienen estructura: “…La estructura de una proposición por tanto, debe ser expresada y comunicada por una apropiada estructura de símbolos…” (Cohen (1934) p.27 -traducción del autor) y

(ii) exhiben la posibilidad de proposiciones que involucran más de dos términos: “Si el total de la geometría es condensada dentro de una proporción, los axiomas son los antecedentes en la proposición hipotética así obtenida. No obstante, ellos también caracterizan como hemos visto, la estructura formal del sistema en la cual los teoremas son los elementos.” Ibídem, p.133.

- Exhibamos ahora cierto vínculo entre proposiciones que versan sobre conjuntos, el cual es demostrable bajo ciertos conceptos, y que sin embargo es falso en algunos modelos.

En el ejemplo inicialmente expuesto, de dos distintas oraciones:

(i) *El conjunto de "los píos" está vacío* y

(ii) *El conjunto de "los píos" es igual a "el conjunto vacío"*,

en las cuales bajo el concepto ingenuo de conjunto se declaran proposiciones *equivalentes*, se tienen dos estructuras proposicionales:

(i') $\boldsymbol{\sim\exists x} \; \boldsymbol{(} \; P^2(\boldsymbol{x}\, A^1(B^0)\,) \; \boldsymbol{)}$ y (ii') $A^1(B^0) = C^0$

(donde P^2abrevia: ***x** pertenece a **y***, A^1: *El conjunto de **x***, B^0: *Los píos* y C^0: *El conjunto vacío* [40]) ,

que (enfatizo) bajo el concepto ingenuo de conjunto representan proposiciones *equivalentes*. No obstante, bajo otro concepto de conjunto, dichas estructuras podrían representar respectivamente proposiciones con distintos valores de verdad. En relación con ello es posible construir modelos donde el valor de verdad de una sea *V* y el de la otra *F*, si las variables representan el mismo tipo de objeto (elemento del universo) que el que se le asocia a las letras operación de cero plazas[41].

---

[40] Las letras capitales presentadas se caracterizan en el lenguaje simbólico del *cálculo de cuantificadores* -cf. Kalish (1980) pp. 202-203.

[41] En el modelo $\cup$: {0,1} , P^2 : {} , B^0 : 1 , C^0 : 0 , $A^1(0) \mapsto 0$, $A^1(1) \mapsto 1$, $\boldsymbol{\sim\exists x}\; (\, P^2(\boldsymbol{x}\, A^1(B^0)\,)\,)$ tiene el valor de verdad *V* y $A^1(B^0) = C^0$ el de *F*.

De lo precedente, como señalamos al final del apartado anterior, existen *estructuras proposicionales* que representan algún vínculo entre proposiciones, el cual es demostrable bajo ciertos conceptos. Por ejemplo: bajo el concepto ingenuo de conjunto, $\sim\exists \mathbf{x} \, (P^2(\mathbf{x} \, A^1(B^0)) \leftrightarrow A^1(B^0) = C^0$ es demostrable [42]. Vínculo que, aunque sería candidato para gozar de sentido ante el reconocimiento de tales demostraciones, es falso en algunos modelos.

Para finalizar esta sección sobre vínculos entre proposiciones y oraciones concluiremos lo siguiente. Se tienen casos en los cuales, bajo ciertos conceptos, dos distintas *estructuras proposicionales* representan respectivamente proposiciones tal que, la verdad (falsedad) de una de ellas conlleva a la verdad (falsedad) de la otra (y viceversa), es decir, bajo ciertos conceptos, representan proposiciones *equivalentes*. En dichos casos, para establecer la mencionada equivalencia, consideramos *estructuras proposicionales* no aisladamente, sino bajo ciertos esquemas de abreviación, conceptos, axiomas o definiciones en un "sistema de lenguaje" [43].

---

[42] La demostración (bajo el concepto ingenuo de conjunto) de la *estructura proposicional* en cuestión es semejante a la presentada en la nota al pie 33.

[43] Al respecto considérense lo expuesto en el comentario crítico (II) del apartado **VII**, en el cual se exhibe lo que implícitamente involucra suponer distintas estructuras proposicionales como una traducción entre ellas.

II.2. Negar que una proposición sea absolutamente "decidible".

En la disertación anterior consideramos que cada oración simbólica representa algo que puede decirse en tanto posibilidad, que es verdadero o que es falso, en otras palabras, cada oración simbólica simboliza al menos una *proposición*. Sin embargo, "poder decir" como posibilidad se distingue de "poder decir" en tanto que poseemos una autorización para decirlo. Por lo tanto, la definición de *proposición* ***Def.1*** podemos interpretarla en por lo menos dos caminos:

(i) los términos "puede decirse que es verdadero o que es falso" se refieren a los posibles valores de verdad de una *proposición*. Dicha interpretación impera en la construcción de las tablas de verdad de los conectivos lógicos, y en el examen de argumentos formalizados, y

(ii) con los términos mencionados se expone el que se autoriza decir la verdad o en su caso se autoriza decir la falsedad de una *proposición* (nótese que en dicha interpretación suponemos que la autorización se distribuye sobre cada disyunto[44]). Además, si la existencia de una *construcción probatoria* es la base de dicha autorización, tal lectura da lugar a interpretar los signos lógicos (los cuales conectan, vinculan o actúan sobre proposiciones matemáticas) a través de *construcciones probatorias* -como en el caso de la interpretación intuicionista de los signos lógicos propuesta por Heyting (cf. sección **III.3**).

---

[44] En la interpretación intuicionista de los signos lógicos propuesta por Heyting, "$\wp \vee q$ pueden ser afirmadas si y solo si al menos una de las proposiciones $\wp$ y q puede ser afirmada" (Heyting (1971) p.102 -traducción del autor). Lo anterior sugiere considerar que: se autorizar decir la verdad o falsedad de una proposición, si y solo si se autorizar decir la verdad o se autorizar decir la falsedad de tal proposición.

En tanto posibilidad podemos considerar que el valor de verdad de *P* es *V* o el valor de verdad de *P* es *F* -donde *P* representa una proposición-, independientemente de que tengamos una construcción probatoria de *P*, o de que poseamos una construcción la cual, de la suposición de que una construcción de *P* fuese realizada ésta guiara a una contradicción.

La consideración precedente permite, como mencionamos anteriormente, examinar argumentos formalizados o definir tablas de verdad. Pues cuando definimos las tablas de verdad de un signo lógico suponemos los valores de verdad, de las variables proposicionales conectadas por el signo, sin tener una prueba general de las proposiciones representadas a través de las variables.

Sin embargo, ***sostengo que P es verdadera o sostengo que P es falsa***, excluye la posibilidad de aquel caso donde: ***no sostengo que P es verdadera*** por carecer de una justificación para ello, ***y tampoco sostengo que P es falsa*** por la misma razón. En otras palabras, ***⌈sostengo que q⌉ o ⌈sostengo que ~q⌉*** -donde ***q*** representa ***⌈acaece que P⌉***- excluye que: ***no ⌈sostengo que q⌉ y no ⌈sostengo que ~q⌉*** .

Veamos un ejemplo de lo anterior. Supongamos que estuviésemos aislados del ambiente de tal manera que no percibamos el que esté lloviendo, pero tampoco percibamos el que no esté lloviendo. ¿Estaríamos facultados, bajo dicho estado de cosas, a sostener que acaece que está lloviendo o a sostener que no acaece que está lloviendo (siendo este último disyunto distinto de no sostener que acaece que está lloviendo)?. Notemos que ***no ⌈sostengo que q⌉ y no ⌈sostengo que ~q⌉*** 'no es una contradicción' como ***⌈sostengo que q⌉*** y ***no ⌈sostengo que q⌉*** - donde ***q*** representa ***⌈acaece que está lloviendo⌉*** .

En relación al caso anteriormente ejemplificado, en el cuál consideramos indirectamente la segunda interpretación de la definición de *proposición* (***Def.1***), resaltemos lo siguiente.

(1) Bajo dicha interpretación carecer tanto de una autorización para decir que cierta proposición *P* es verdadera, como de una autorización para decir que es falsa, parece llevar a una contradicción en tanto que tal proposición *P* 'no sería' una proposición. Por lo anterior, en adelante consideraremos que en la segunda interpretación de la definición de *proposición* (***Def.1***), ***aquello autorizado en decirse que es verdadero o autorizado en decirse que es falso (pero no simultáneamente ambos) es*** una proposición, sin que aceptemos la cópula reflejada [45].

(2) En la interpretación intuicionista de los signos lógicos propuesta por Heyting, tema expuesto en el siguiente apartado, se exhibirá la diferencia entre:

(i) probar (en algunas ocasiones considerando demostraciones bajo ciertos conceptos, axiomas o definiciones) la negación de cierta proposición matemática (*negación interna*) -lo que notemos autorizaría sostener la negación de dicha proposición (bajo los supuestos considerados)- y

(ii) no tener una prueba de tal proposición (*negación externa*).

Siendo que, cada una de las situaciones en (i) y (ii) es posible simbolizarla a través de distintas estructuras proposicionales propias de lenguajes artificiales amplios.

[45] Aunque con la restricción adoptada (en la segunda interpretación de la definición de *proposición*) dejamos de predicar lo que ***una proposición es***, recordemos que "…la proposición es la expresión de un juicio entre dos términos, a saber, sujeto y predicado, que afirma o niega éste (el predicado) de aquel (el sujeto)…" (Paulín (2006) p.191). Pero también recordemos que las oraciones simbólicas representan o simbolizan, una o varias proposiciones declaradas a través de oraciones simples o compuestas.

Finalizaremos esta sección delimitando operacionalmente aquellos casos de proposiciones, en los que carecemos tanto de una autorización para sostenerlas como de una autorización para sostener negarlas.

En *Philosophy of Mathematics*, obra escrita por Shapiro, se llama a "…una oración φ *absolutamente decidible* si o hay un argumento racionalmente obligatorio que establece a φ o uno que refuta a φ"[46]. De lo anterior, si no es el caso que una oración φ es *absolutamente decidible*, entonces no es el caso que: o hay un argumento racionalmente obligatorio que establece a φ o uno que refuta a φ. Más si no hay un argumento racionalmente obligatorio que establece a φ y tampoco hay uno que refuta a φ[47], en particular no hay una prueba de φ y tampoco hay una prueba de $\sim\varphi$.
Por lo anterior consideraremos la siguiente "definición" operacional:

Def.2. Si no es el caso que una proposición P es *absolutamente decidible*, entonces no hay una prueba de P y tampoco hay una prueba de $\sim P$.

* * *

[46] Shapiro (1997) p.208 -traducción del autor.
[47] Para obtener dicha conjunción, implícitamente consideramos que en el cálculo proposicional intuicionista de Heyting se afirma la certeza de $\sim(P \vee Q) \rightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$ -cf. Heyting (1971) p.104.

En la primera sección del presente apartado iniciamos presentando la siguiente definición:

Def.1. ***Una proposición es*** algo que puede decirse que es verdadero o que es falso (pero no simultáneamente ambos).

Posteriormente ejemplificamos algunas diferencias (pertinentes para la lógica) entre una proposición y la oración en la que se declara. Además expusimos ciertas similitudes entre una proposición y una oración simbólica, y nombramos *estructuras proposicionales* a aquellas oraciones simbólicas con las que representamos, una o varias proposiciones declaradas a través de oraciones simples o compuestas. En suma obtuvimos los siguientes resultados:

(1) el conjunto de oraciones es distinto del conjunto de proposiciones, y

(2) se tienen casos en los cuales, bajo ciertos conceptos, dos distintas *estructuras proposicionales* representan respectivamente proposiciones tal que, la verdad (falsedad) de una de ellas conlleva a la verdad (falsedad) de la otra (y viceversa), es decir, bajo ciertos conceptos, representan proposiciones *equivalentes*. En dichos casos, para establecer la mencionada equivalencia, consideramos *estructuras proposicionales* no aisladamente sino bajo ciertos esquemas de abreviación, conceptos, axiomas o definiciones en un “sistema de lenguaje”.

A partir del resultado en (2) exhibimos lo señalado en el apartado precedente sobre la existencia de *estructuras proposiciones*, que representan algún vínculo entre proposiciones el cual es demostrable bajo ciertos conceptos. Vínculo que, aunque sería candidato para gozar de sentido ante el reconocimiento de tales demostraciones, puede ser falso en algunos modelos.

En la segunda sección los términos “puede decirse que es verdadero o que es falso” presentes en la definición de *proposición* ***Def.1***, los interpretamos

(i) refiriéndose a los posibles valores de verdad de una proposición, y

(ii) como exposición de que se autoriza decir la verdad o en su caso se autoriza decir la falsedad de lo que sería una proposición.

Además, en relación con aquellas proposiciones de las que carecemos tanto de una autorización para sostenerlas como de una autorización para sostener negarlas, presentamos la siguiente “definición” operacional:

Def.2. Si no es el caso que una proposición P es *absolutamente decidible*, entonces no hay una prueba de P y tampoco hay una prueba de $\sim P$.

En el siguiente apartado, las interpretaciones anteriormente mencionadas (de la definición de *proposición* ***Def.1***) serán respectivamente consideradas para el significado semántico clásico de los signos lógicos (del lenguaje del cálculo de oraciones), y la interpretación intuicionista de los signos lógicos propuesta por Heyting.

III. Significado de los signos lógicos.

En el presente apartado inicialmente comentaremos brevemente en que consiste, según lo expuesto por Alchourrón en *Concepciones de la Lógica*, lo que suele cubrir la *semiótica* o teoría general del signo: la sintaxis, la semántica y la pragmática. Comentario con la finalidad de distinguir el *significado semántico de los signos lógicos del lenguaje* $£_p$ *del cálculo de oraciones* (lenguaje que expondremos en la sección **III.1**), de lo que supondremos como el *significado sintáctico de tales signos*.

En la sección **III.2** a partir de la primera interpretación de la definición de *proposición* ***Def.1*** (expuesta en la sección **II.2**) consideraremos que: una *asignación* correlaciona a cada letra oración, uno y solo un posible valor de verdad. Siendo que, respecto a una asignación de valores de verdad presentaremos el significado semántico clásico de los signos lógicos (del lenguaje $£_p$). De lo anterior provendrá el atributo del significado semántico clásico de la negación, con el que posteriormente exhibiremos la diferencia entre dicho significado, y el significado semántico intuicionista de la negación.

El considerar la segunda interpretación de la definición de *proposición* ***Def.1*** (expuesta también en la sección **II.2**) dará entrada en la sección **III.3**, a cierta interpretación intuicionista de los signos lógicos extraída de la presentada por Heyting en *Intuitionism An Introduction*. En dicha sección simbolizaremos (la interpretación intuicionista de) la afirmación de la certeza de la negación de una proposición matemática. A partir de ello demostraremos cierta relación condicional, la cual parecería fundamentar parte del atributo del significado semántico clásico de la negación -expuesto en la sección **III.2**. Además, comentaremos bajo que condición obtendríamos la negación de dicha relación condicional reflejada, siendo que esto último, simplificadamente, diferiría del atributo antes mencionado.

En la sección **III.4** ofreceremos el significado semántico intuicionista de los signos lógicos del lenguaje $\pounds_p$, directamente de la propuesta de Kripke en *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I*. Dicho significado será acorde con la relación condicional demostrada en la sección **III.3**.

Finalmente presentaremos un cuadro comparativo (sección **III.5**), en el que diferenciaremos el significado semántico clásico de la negación, del significado semántico intuicionista.

*　　　　*　　　　*

En *Concepciones de la Lógica*, Alchourrón expone que la semiótica o teoría general de los signos es el nombre genérico que cubre

(i) **la sintaxis**: "…parte de la metateoría que considera solamente las propiedades y relaciones de los signos de un lenguaje $\pounds$, con independencia de cualquier interpretación del lenguaje…" [48],

(ii) **la semántica**: "…parte de la metateoría en la que se consideran las propiedades y relaciones entre los signos de un lenguaje $\pounds$, que dependen de las correlaciones entre las expresiones del lenguaje y la realidad establecida por las funciones de interpretación…" [49] y

(iii) **la pragmática**: "…parte de la metateoría en la que se consideran las reglas de uso de los signos lingüísticos adoptados por un hablante o una comunidad de hablantes del lenguaje..." [50].

En adición a lo anterior, el significado clásico (sección**III.2**) así como intuicionista (sección**III.4**) de los signos lógicos del lenguaje $\pounds_p$, lo presentaremos respectivamente:

(1) con respecto a cierta *asignación*, la cual fija el valor de verdad de cada letra oración, de las oraciones simbólicas sobre las que actúa el signo lógico a definir y

(2) asumiendo definida la función que fija en un punto de Kripke, la *probabilidad* [51] para cada oración simbólica (es decir, el que cierta estructura proposicional ha sido probada – 'no ha sido probada') sobre la que actúa el signo lógico a definir.

---

[48] Alchourrón (1995) p.19.
[49] Ídem.
[50] Ídem.
[51] En el presente trabajo, con el término *probabilidad*, nos referimos a calidad de probable. Mientras que con el término *probable*, a lo que se puede probar. Cf. Diccionario de la Lengua Española. Real Academia Española. Tomo II. Vigésima edición. Editorial Espasa-Calpe. Impreso en España.1984, p.1106

En el significado de los conectivos lógicos que presentaremos a través de la función mencionada en (2), los puntos de Kripke representan "situaciones de evidencia". Mientras que en el significado que presentaremos respecto a una asignación de valores de verdad (1), tal asignación podría fijar implícitamente "situaciones posibles". Ya que dicho significado de los signos lógicos se vincula a situaciones ciertas o a situaciones que podrían ser, consideraremos pertenece al ámbito semántico de una teoría del signo. En adelante llamaremos al comentado significado: *significado semántico de los signos lógicos de* $£_p$.

En distinción al significado semántico de los signos lógicos de $£_p$, en los sistemas proposicionales delimitaremos el *significado sintáctico de dichos signos lógicos*. Es decir, a partir de los axiomas del sistema proposicional ya sea intuicionista, ya sea clásico, junto con las respectivas reglas de inferencia (estipuladas en el metalenguaje del sistema proposicional considerado) derivamos teoremas, los cuales delimitan las relaciones entre los signos lógicos de cada sistema. Siendo que, dicha delimitación se realiza respectivamente, con independencia de la evaluación de funciones de probabilidad, y con independencia de la asignación de valores de verdad.

Por lo anterior, a través de las estructuras proposicionales nombradas como axiomas (y las reglas de inferencia) fijaremos lo que llamaremos el significado sintáctico de los signos lógicos de $£_p$. No obstante, considero pertinente comentar que al presentar en el metalenguaje cierta estructura proposicional como axioma, esto nos remite a varias lecturas de ello en la totalidad de sistemas proposicionales considerados. Veamos un ejemplo. $\sim P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ es un axioma tanto en el sistema proposicional clásico como intuicionista de Heyting, axioma con el que delimitamos respectivamente el significado sintáctico de $\sim$ y $\rightarrow$. Aunque la estructura $\sim P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ es la misma en ambos sistemas, como axioma en el sistema proposicional clásico, cualquier oración simbólica con dicha estructura se considera verdadera [52]. Mientras que como axioma del cálculo proposicional intuicionista de Heyting (axioma constituyente de lo que llamaremos el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*), dicha estructura se considera goza de *aserto* [53], siendo que una proposición matemática goza de *aserto*, tan pronto como una construcción matemática con ciertas propiedades dadas ha sido realizada [54].

[52] Dado que en la literatura suele exponerse que las leyes lógicas enuncian la verdad de cualquier instancia de su respectivo esquema (cf. Dummett (1990) p.21), supondremos que cualquier oración simbólica resultante de aplicar la regla de reemplazamiento (sección **V.2**), a cierta estructura proposicional nombrada como axioma en el sistema proposicional clásico, será verdadera.
[53] Entenderemos por *aserto*: "…Afirmación de la certeza de una cosa" (Diccionario de la Lengua Española. Real Academia Española. Tomo I. Vigésima edición. Editorial Espasa-Calpe, S.A. Impreso en España. 1984, p.138)
[54] Cf. Heyting (1971) p.102.

III.1 El lenguaje simbólico $\pounds_p$.

El *lenguaje simbólico* que presentaremos a continuación constituye el lenguaje del llamado *cálculo de oraciones*, el cuál "…es la rama de la lógica que esencialmente comprende los conectivos oracionales" [55]. Las fórmulas tanto del sistema proposicional clásico como intuicionista pueden caracterizarse exhaustivamente, a través de dicho lenguaje simbólico que llamaremos $\pounds_p$.

Los símbolos del lenguaje $\pounds_p$ consisten en las letras oración P, Q, R…-con o sin subíndices (en la literatura también llamadas variables proposicionales), los signos lógicos de la *negación* $\sim$, de la *implicación* $\rightarrow$, de la *conjunción* $\wedge$ y de la d*isyunción* $\vee$, y los paréntesis.

Las *oraciones simbólicas* de $\pounds_p$ son generadas a través de la siguiente BNF:

$$\varphi \ ::= \ P \ | \sim\varphi \ | \ (\varphi\rightarrow\varphi) \ | \ (\varphi\wedge\varphi) \ | \ (\varphi\vee\varphi)$$ [56].

El significado semántico de los signos lógicos de $\pounds_p$ (tanto clásico como intuicionista), aunque sea extensivo a lenguajes más enriquecidos simbólicamente, lo restringiremos para oraciones simbólicas de $\pounds_p$ [57].

---

[55] Kalish (1980) p.59

[56] La notación BNF dice que las letras oración son oraciones simbólicas, y que podemos construir oraciones complejas de oraciones simbólicas usando la negación $\sim$, la implicación $\rightarrow$, la conjunción $\wedge$ y la disyunción $\vee$ -cf. Ditmarsch (2008) p.12.

[57] En la sección **III.3** simbolizaremos la interpretación intuicionista de la negación de una proposición matemática que goza de *aserto*, restringiéndonos también, a proposiciones representables a través de oraciones simbólicas de $\pounds_p$.

III.2 Significado semántico clásico de los signos lógicos de $\pounds_p$.

En la primera interpretación de la definición de *proposición* (***Def.1***), exhibida en la sección **II.2**, los términos “puede decirse que es verdadero o que es falso” se refieren a los posibles valores de verdad de una *proposición*. Bajo dicha interpretación consideraremos que: una *asignación* correlaciona a cada letra oración (mínima estructura proposicional de $\pounds_p$ constituyente de oraciones simbólicas), uno y solo un posible valor de verdad (*V-F*).

El significado semántico clásico de los signos lógicos de $\pounds_p$, respecto a una asignación *A*, lo presentamos a través de las siguientes definiciones - donde tanto φ como θ representan respectivamente, cualquier oración simbólica del lenguaje $\pounds_p$:

(i) $\sim\varphi$ es verdad (respecto *A*) si y solo si

no es el caso que φ es verdad (respecto *A*),

(ii) $(\varphi\rightarrow\theta)$ es verdad (respecto *A*) si y solo si

no es el caso que φ es verdad (respecto *A*) o θ es verdad (respecto *A*),

(iii) $(\varphi\wedge\theta)$ es verdad (respecto *A*) si y solo si

φ es verdad (respecto *A*) y θ es verdad (respecto *A*) ,

(iv) $(\varphi\vee\theta)$ es verdad (respecto *A*) si y solo si

φ es verdad (respecto *A*) o θ es verdad (respecto *A*).[58]

---

[58] A partir de las reglas que presenta Kalish, para determinar el *valor de verdad* de cualquier oración simbólica con respecto a una asignación dada *A* (cf. Kalish (1980) p.88), se demuestran (clásicamente)las

En distinción al presente significado semántico clásico de los signos lógicos de $\pounds_p$, en el cual, cada asignación corresponde a *un posible valor de verdad* de las letras oración, las cuales constituyen aquellas oraciones simbólicas sobre las que actúa el conectivo a definir (definiciones que remiten al significado de los conectivos del lenguaje natural: “no”, “o”, “y”), en la literatura suele presentarse

(a) el significado de la *implicación* a través de un vínculo obligatorio entre la *verdad* de los juicios involucrados (por ejemplo: “El significado del símbolo $A \rightarrow B$ es agotado por el hecho de que una vez convencidos de la verdad de *A*, debemos aceptar la verdad de *B* también” [59]), y

(b) el significado de la *negación* a través de la prohibición en considerar a cierto juicio como *verdadero* (por ejemplo: “El símbolo $\tilde{A}$ de la lógica de juicios,…expresa…la prohibición de considerar al juicio *A* verdadero” [60]).

En los significados mencionados en (a) y en (b), respectivamente se considera la *verdad* de los juicios involucrados, y se prohíbe considerar a cierto juicio como *verdadero*. Mientras que en el significado semántico clásico presentado en **(i)-(iv)**, basándonos en la primera interpretación de la definición de *proposición* ***Def.1***, consideramos la *posible verdad* de las estructuras proposicionales involucradas.

---

respectivas definiciones expuestas de los conectivos lógicos -*relativizadas* a oraciones simbólicas de $\pounds_p$ (si para cualquier $\varphi \in \pounds_p$, “ el valor de verdad de φ es V –dada una asignación A ” si y solo si “ φ es verdad (respecto A) ”, entre otros supuestos).

[59] Kolmogorov (1981) p.420.

[60] Ídem.

En relación con el significado semántico clásico de la negación expresado en **(i)**, notemos que,

> ***predicar la verdad como posibilidad de la negación de una estructura proposicional (respecto a cierta asignación A), implica negar el predicar sobre dicha estructura su verdad como posibilidad (respecto A), y viceversa***.

Lo anterior será abreviado como $\mathcal{V}_A(\sim\varphi) \leftrightarrow \sim\mathcal{V}_A(\varphi)$ - donde $\mathcal{V}_A(\varphi)$ se lee: *φ es verdad respecto a la asignación A*.

De lo precedente diremos simplificadamente, que *en el significado semántico clásico de la negación,* convencionalmente, ***la negación interna implica la externa y viceversa***, atributo con el que posteriormente exhibiremos la diferencia entre dicho significado, y el significado semántico intuicionista de la negación.

III.3 Interpretación intuicionista de los signos lógicos.

En la segunda interpretación de la definición de *proposición* ***Def.1*** (presentada en la sección **II.2**), con los términos “puede decirse que es verdadero o que es falso” se expone el que se autoriza decir la verdad o en su caso se autoriza decir la falsedad de lo que sería una proposición. En adición a lo anterior, considerar que una prueba de cierta proposición matemática autoriza decir la verdad de dicha proposición, da lugar a interpretar los conectivos lógicos a través de *construcciones probatorias*. Desarrollemos lo anterior.

Si una prueba de una proposición matemática (en ocasiones tomando en cuenta demostraciones bajo ciertos conceptos, axiomas, definiciones o supuestos -como vimos en la sección **II.1**) es lo que *garantiza que tal proposición goce de certeza*, es lo que *autoriza sostener* (bajo los conceptos, axiomas, etc. considerados en la demostración) *que la proposición es verdadera*, entonces con ello se exhibe porqué en la vertiente intuicionista propuesta por Heyting, una proposición matemática gozaba de *aserto*, tan pronto como una *construcción probatoria* de dicha proposición fuese realizada [61]. De ello, una proposición matemática compuesta a través de conectivos lógicos gozaría de *aserto*, tan pronto como una *construcción probatoria* de ella fuese realizada. Lo que da lugar a interpretar los conectivos lógicos, explícita o implícitamente, a través de *construcciones probatorias* [62].

---

[61] “…una proposición matemática $\wp$ siempre demanda una construcción matemática con ciertas propiedades dadas; ella puede ser afirmada [goza de *aserto*] tan pronto como una construcción ha sido realizada. Decimos en ese caso que la construcción *prueba* a la proposición $\wp$ y la llamamos una prueba de $\wp$.” Heyting (1971) p.102.

En adición a lo anterior, recordemos que en *Boceto sobre una teoría del significado* llamamos abreviadamente *construcción probatoria* de $\wp$, a una construcción matemática realizada con ciertas propiedades dadas, construcción demandada por una proposición matemática $\wp$.

[62] En relación con la mencionada interpretación de los conectivos lógicos considérese lo siguiente. “…He dado un criterio para proposiciones matemáticas, diciendo que cualquier proposición matemática tiene la

El considerar la interpretación de la definición de *proposición* inicialmente expuesta, da entrada a la siguiente interpretación intuicionista de los signos lógicos extraída de la presentada por Heyting en *Intuitionism An Introduction* – donde $\wp$ y $\mathscr{g}$ se usan como abreviaciones para proposiciones matemáticas [63] :

(i) $\wp \wedge \mathscr{g}$ ***goza de aserto*** si y solo si ambas $\wp$ y $\mathscr{g}$ ***gozan de aserto***,

(ii) $\wp \vee \mathscr{g}$ ***goza de aserto*** si y solo si al menos una de las proposiciones $\wp$ y $\mathscr{g}$ ***goza de aserto***,

(iii) $\sim\wp$ ***goza de aserto*** si y solo si poseemos una construcción la cual, de la suposición de que una construcción $\wp$ fuese realizada, ésta guía a una contradicción y

(iv) $\wp \rightarrow \mathscr{g}$ ***goza de aserto*** si y solo si poseemos una construcción $\mathfrak{r}$, la cual, unida a cualquier construcción probatoria de $\wp$ (suponiendo que la anterior se efectúa), da automáticamente el efecto de una construcción probatoria de $\mathscr{g}$.

En lo que respecta a la presente interpretación intuicionista de los signos lógicos se tiene lo siguiente. De la afirmación de la certeza de la negación de una proposición matemática (proposición representable a través de una oración simbólica del lenguaje $\pounds_p$), bajo los axiomas del sistema $\mathcal{G}$ de Gödel (**Apéndice B**), probar la negación de una

forma *He efectuado una construcción con las siguientes propiedades*…Esta forma es preservada por los cuatro conectivos.” Ibídem, p.103.

[63] Cf. Heyting (1971) pp.102-103.

proposición matemática, conlleva negar que poseemos una construcción probatoria de dicha proposición.

Lo anterior será abreviado como $\mathcal{B}\,(\sim\varphi) \rightarrow \sim\mathcal{B}\,(\varphi)$ -donde $\mathcal{B}\,(\varphi)$ se lee: *φ es probable* (φ representa cualquier oración simbólica de $\pounds_p$).

De lo precedente diremos simplificadamente que: ***la negación interna conlleva la externa***. Lo que parecería fundamentar parte del atributo del significado semántico clásico de la negación, significado en el que convencionalmente ***la negación interna implica la externa y viceversa***.

Justificación de la relación condicional $\mathcal{B}\,(\sim\varphi) \rightarrow \sim\mathcal{B}\,(\varphi)$.

- Iniciemos **simbolizando** la interpretación en **(iii)** como

(iii') $\vdash \sim\varphi$ *si y solo si* $\mathcal{B}\,(\varphi\rightarrow\perp)$ [64] .

En la simbolización anterior $\vdash$ es el símbolo para *aserto*[65], $\mathcal{B}\,(\varphi)$ se lee: *φ es probable*, $\perp$ es la constante de falsedad (lógica) [66] y φ representa cualquier oración simbólica de $\pounds_p$.

---

[64] Cercano a la presente simbolización, Cook expone que, "…la siguiente clausula semiformal es dada como una definición de la existencia de un verificador para (i.e. la verdad de) oraciones que contienen negaciones:

$\boldsymbol{v}$ verifica $\neg \boldsymbol{A}$ precisamente cuando $\boldsymbol{v}$ verifica $(A\rightarrow\perp)$. " Cook (2000) p.10.

[65] Las fórmulas que gozan de *aserto* son marcadas con $\vdash$ -cf. Heyting (1971) pp.103-104.

[66] "…se usará, además la constante de falsedad (lógica) << ⊥ >> …". Alchourrón (1995) p.40.

En relación con la precedente simbolización comento lo siguiente:

(a) "…el punto normal de partida para definir la negación intuicionista frecuentemente involucra el condicional y una constante de falsedad primitiva (la cual es estipulada siendo *en principio* no probable)" [67], y

(b) en *Intuitionism an Introduction*, Heyting ejemplifica la noción de contradicción considerando la proposición $\wp \equiv (\ \sqrt{2}\ \textit{es racional}\ )$, lo cual le lleva a obtener (bajo ciertos supuestos basados en argumentos conocidos y deducciones) resultados contradictorios [68]. Lo anterior sugiere que $\sim\wp$ goza de *aserto*, cuando probamos que $\wp \rightarrow \perp$.

• ***Demostremos*** que, bajo los axiomas del sistema $\mathcal{G}$ y la simbolización en **(iii')**,

$\mathcal{B}\ (\sim\varphi) \ \rightarrow\ \sim\mathcal{B}\ (\varphi)$ [69].

Supongamos que $\mathcal{B}(\sim\varphi)$. De ello, $\sim\varphi$ gozaría de *aserto*[70], es decir, $\vdash \sim\varphi$. De esto último y **(iii')**, $\mathcal{B}\ (\ \varphi\rightarrow\perp\ )$, que con el axioma $\mathcal{G}_2$' [71] llevan a que $\mathcal{B}\ (\varphi) \ \rightarrow\ \mathcal{B}\ (\perp)$. De ello, y como *en principio* no es el caso que $\perp$ *es probable*, concluimos que $\sim\mathcal{B}\ (\varphi)$. [72]

[67] Cook (2000) pp.9-10.
[68] Cf. Heyting (1971) p.102
[69] En la presente demostración consideraremos los axiomas del sistema $\mathcal{G}$, sin suponer por ello, la traducción propuesta por Gödel de las nociones primitivas de Heyting.
[70] Recordemos que "…una proposición matemática $\wp$ siempre demanda una construcción matemática con ciertas propiedades dadas; ella puede ser afirmada [goza de *aserto*] tan pronto como una construcción ha sido realizada. Decimos en ese caso que la construcción *prueba* a la proposición $\wp$ y la llamamos una prueba de $\wp$." Heyting (1971) p.102.
[71] $\mathcal{G}_2$: $\mathcal{B}(\ P\ ) \rightarrow (\ \mathcal{B}(\ P \rightarrow Q\ ) \rightarrow \mathcal{B}(\ Q\ )\ )$ -cf. **Apéndice B**. Dicho axioma equivale a $\mathcal{G}_2$': $\mathcal{B}(\ P\rightarrow Q\ ) \rightarrow (\ \mathcal{B}(\ P\ ) \rightarrow \mathcal{B}(\ Q\ )\ )$, axioma que indica la distribución del *operador probabilidad* sobre la implicación.
[72] El mismo resultado es demostrable (bajo los axiomas del sistema $\mathcal{G}$), si la interpretación en **(iii)** es simbolizada como $\vdash \sim\varphi$ *si y solo si* $\mathcal{B}\ (\ \mathcal{B}(\varphi)\rightarrow\perp\ )$. Pero también, si es simbolizada como $\vdash \sim\varphi$ *si y solo si* $\mathcal{B}\ (\ \mathcal{B}(\varphi)\rightarrow\mathcal{B}(\perp)\ )$.

No obstante el resultado precedente, como demostraremos en el apartado **IV**, no será el caso de la relación condicional reflejada, es decir , $\sim(\sim\mathcal{B}(\varphi) \rightarrow \mathcal{B}(\sim\varphi))$, cuando $\sim(\mathcal{B}(\sim\sim\varphi) \rightarrow \mathcal{B}(\varphi))$ .Bajo tal condición obtendríamos simplificadamente, que ***no sería el caso que la negación externa conllevare la interna***, lo que diferiría del atributo del significado semántico clásico de la negación, el cual ***la negación interna implica la externa y viceversa***.

Antes de finalizar este apartado y presentar a través de un *modelo intuicionista* en una *estructura modelo*, cierto significado semántico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$, el cual es acorde con la precedente relación condicional demostrada (relación la cual la negación interna conlleva la externa), mencionaré lo siguiente. La llamada negación interna presenta cierta similitud con la *negación matemática* nombrada por Heyting; y la negación externa, con la *negación factual*. Pues en ésta última se niega haber efectuado una construcción[73], mientras que en la *negación matemática* se efectúa una construcción, en la cual se deduce una contradicción de suponer que cierta construcción fuese realizada[74].

[73] "Cualquier aserción matemática puede ser expresada en la forma: *He efectuado la construcción A en mi mente*" (Heyting (1972) p.19 -traducción del autor), siendo que, la *negación factual* de dicha aserción es "…*No he efectuado la construcción A en mi mente…*". Ídem.
[74] La *negación matemática* de una aserción matemática "…puede ser expresada como *He efectuado en mi mente una construcción B, la cual deduce una contradicción de la suposición de que la construcción A fuese realizada…*". Ídem.

III.4 Significado semántico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$.

En el apartado **III.2** presentamos el significado clásico de los signos lógicos de $\pounds_p$ respecto a una *asignación*, la cual correlaciona a cada letra oración constituyente de oraciones simbólicas, con uno y solo un posible valor de verdad (*V*-*F*). Mientras que el significado semántico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$, que extraeremos directamente de la propuesta de Kripke (*Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I*), lo presentaremos a través de un *modelo intuicionista*, el cual es una función binaria cuyo rango representa dos posibles "valores de probabilidad". Expongamos lo que dicho autor define por un *modelo intuicionista* en una *estructura modelo*.

Una *estructura modelo* (intuicionista) se define como "…una terna ordenada (**G** , **K** , ***R***) donde **K** es un conjunto, **G** es un elemento de **K**, y ***R*** es una relación reflexiva y transitiva en **K** ." [75] El elemento **G** en general suele interpretarse como la presente (inicial) "situación de evidencia", en la cual quizá tengamos suficiente información para probar cierta proposición. Mientras que los demás elementos de **K** representan puntos del tiempo posteriores a **G** en que podemos tener varias piezas de información adicional, ya sea con la cual probemos alguna proposición anteriormente no verificada, ya sea para excluir la opinión de que cierta proposición será alguna vez probada. Además, si en el tiempo **H** podemos obtener posteriormente suficiente información para avanzar a **H'**, entonces decimos que **H*R*H'** (**H**, **H'** $\in$ **K**) . [76]

---

[75] Kripke (1965) p.94. Traducción del autor.
[76] Cf. Kripke (1965) pp.98-99.

Un *modelo intuicionista*, en una estructura modelo (**G** , **K** , ***R***), es una función binaria $\phi : \mathcal{P} \times K \rightarrow \{ \mathbf{V}, \mathbf{F} \}$ -donde $\mathcal{P}$ es un conjunto de letras oración de $\pounds_p$ -, la cual satisface la siguiente condición: si $\phi (P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ y $\mathbf{H}\boldsymbol{R}\mathbf{H'}$ ($P \in \mathcal{P}$ y $\mathbf{H}, \mathbf{H'} \in \mathbf{K}$), entonces $\phi (P, \mathbf{H'}) = \mathbf{V}$.[77]

Aunque el rango de ϕ es $\{ \mathbf{V}, \mathbf{F} \}$, **V** y **F** no denotan verdad y falsedad intuicionista, ya que representan "valores de probabilidad", es decir, si "…en un punto particular **H** del tiempo, tenemos suficiente información para probar una proposición A, decimos que $\phi (A, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$…" [78]. Por otro lado,"… $\phi (A, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$ no quiere decir que A ha sido probada *falsa* en **H**. Ella simplemente (aun) no ha sido probada en **H**, pero puede ser establecida después." [79]

El significado semántico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$, asumiendo que $\phi (\varphi, \mathbf{H})$ y $\phi (\theta, \mathbf{H})$ ya han sido definidas -donde tanto φ como θ representan respectivamente cualquier oración simbólica de $\pounds_p$, lo presentamos a través de la siguiente definición inductiva[80]:

(a) $\phi (\varphi \wedge \theta , \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ si y solo si $\phi (\varphi , \mathbf{H}) = \phi (\theta , \mathbf{H}) = \mathbf{V}$;

de otro modo $\phi (\varphi \wedge \theta, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$.

(b) $\phi (\varphi \vee \theta , \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ si y solo si $\phi (\varphi , \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ ó $\phi (\theta , \mathbf{H}) = \mathbf{V}$;

de otro modo $\phi (\varphi \vee \theta , \mathbf{H}) = \mathbf{F}$.

---

[77] Cf. Kripke (1965) p.94.
[78] Kripke (1965) p.98.
[79] Ídem.
[80] Cf. Kripke (1965) p.94.

(c) $\phi(\varphi \rightarrow \theta, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ si y solo si para toda $\mathbf{H'} \in \mathbf{K}$ tal que $\mathbf{H}\boldsymbol{R}\mathbf{H'}$,

$\phi(\varphi, \mathbf{H'}) = \mathrm{F}$ ó $\phi(\theta, \mathbf{H'}) = \mathbf{V}$; de otro modo $\phi(\varphi \rightarrow \theta, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$.

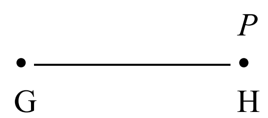
(d) $\phi(\sim\varphi, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ si y solo si para toda $\mathbf{H'} \in \mathbf{K}$ tal que $\mathbf{H}\boldsymbol{R}\mathbf{H'}$,

$\phi(\varphi, \mathbf{H'}) = \mathrm{F}$; de otro modo $\phi(\sim\varphi, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$.

La definición de la negación, propuesta en la cláusula **(d)**, es acorde con la precedente relación condicional demostrada en la sección **III.3**, ya que:

> ***si*** $\boldsymbol{\phi(\sim\varphi, H) = V}$, en palabras, ***si*** $\boldsymbol{\sim\varphi}$ ***es probable en H,***
>
> ***entonces*** (de la cláusula **(d)**, particularizando, y dado que $\mathbf{H}\boldsymbol{R}\mathbf{H}$ -ya que $\boldsymbol{R}$ es una relación reflexiva) $\boldsymbol{\phi(\varphi, H) = F}$, es decir, ***no tenemos una prueba de*** $\boldsymbol{\varphi}$ ***en H***
>
> (siendo aplicable dicha relación condicional a cualquier **H** en **K**).

No obstante, en lo que respecta a la mencionada relación condicional pero reflejada, existen *modelos intuicionistas* en *estructuras modelo* (**G** , **K** , ***R***), que para cierta $\mathbf{H'} \in \mathbf{K}$ es posible no tener una prueba de φ en **H'**, pero tampoco poseer una prueba de $\sim\varphi$ en **H'**. Por ejemplo: “Considérense los siguientes dos puntos del modelo que contrarresta la ley del tercero excluido



Tenemos $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$, $\phi(P, \mathbf{G}) = \mathbf{F}$. Ya que $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$, $\phi(\sim P, \mathbf{G}) = \mathbf{F}$… Intuitivamente, en la presente situación **G**, aún no hemos probado *P*, ni podemos afirmar $\sim P$, desde entonces permanece la posibilidad de que posteriormente generemos suficiente información para avanzar a **H** y afirmar *P*." [81]

En el modelo anterior, no es el caso que, *P* es probable en **G**, y tampoco es el caso que, $\sim P$ es probable en dicho punto. De ello, en la 'situación de evidencia' representada por el punto **G**, no es el caso que la negación externa (no es el caso que, *P* es probable en **G**) conlleva la interna ($\sim P$ es probable en **G**) [82].

A partir de lo precedente sostenemos la siguiente **tesis**.

> ***El significado semántico clásico de la negación presenta un atributo, el cual está ausente en ciertos elementos que representan 'situaciones de evidencia', los cuales se exhiben en algunos modelos intuicionistas asumidos en el significado semántico intuicionista de la negación***.

Finalizaré este apartado comentado lo siguiente. Kripke expone que intuicionistamente la definición inductiva dada anteriormente no funciona, pues ella llama a la ley del tercero excluido tanto en la cláusula **(c)** como **(d)** [83]. Por ello, propuso definir un modelo ϕ como un mapeo de $\phi(\varphi, \mathbf{H})$ a $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, el cual satisface las cláusulas **(a)-(d)** [84], tema desarrollado a través de teoría de categorías [85].

---

[81] Kripke (1965) pp. 99-100. Para la inferencia de $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ a $\phi(\sim P, \mathbf{G}) = \mathbf{F}$ nótese lo siguiente: de $\mathbf{G}R\mathbf{H}$ y $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$, no es el caso que, para toda $\mathbf{H'} \in \mathbf{K}$ tal que $\mathbf{G}R\mathbf{H'}$, $\phi(P, \mathbf{H'}) = \mathrm{F}$. De lo anterior y la cláusula **(d)**, no es el caso que, $\phi(\sim P, \mathbf{G}) = \mathrm{V}$, es decir, no tenemos una prueba de $\sim P$ en **G**.

[82] En el presente modelo guiaría a una contradicción suponer que:

si no es el caso que, *P* es probable en **G** (negación externa),
entonces $\sim P$ es probable en **G** (negación interna).

No obstante lo precedente notemos lo siguiente. Dado que no tenemos una prueba de *P* en **G**, si **G** fuese el único elemento de **K**, entonces (a partir de la definición en **(d)**) obtendríamos que $\phi(\sim P, \mathbf{G}) = V$, es decir, $\sim P$ es probable en **G**. En dicho nuevo modelo, donde **G** sería el único elemento de **K**, la negación externa (no es el caso que, *P* es probable en **G**) conllevaría la interna ($\sim P$ es probable en **G**).

[83] "Nótese que intuicionistamente, la definición inductiva dada aquí no funciona, ya que ella claramente llama a la ley del tercero excluido en la cláusula (c) y (d)…". Kripke (1965) p.95.

[84] "…intuicionistamente, sería mejor definir un modelo ϕ como un mapeo de $\phi(A, \mathbf{H})$ a $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, donde *A* corre sobre fórmulas *arbitrarias* del cálculo proposicional y el cual ocurre de acuerdo con las cláusulas (a)-(d)…". Ídem.

[85] Sobre dicho tema puede consultarse por ejemplo: Bell J.L. *Toposes and Local Set Theories An Introduction*. Clarendon. Press. Oxford. E.U.A. 1988, pp.49-50.

III.5 Cuadro comparativo.

Diferencia entre el significado semántico clásico de la negación y el significado semántico intuicionista.

Definición de *proposición*.
Algo que puede decirse que es verdadero o que es falso.

"***puede decirse***"
como posibilidad

"***puede decirse***"
como autorización

Clásicamente.

Para toda asignación *A*,

$\mathcal{V}_A(\sim\varphi) \leftrightarrow \sim\mathcal{V}_A(\varphi)$.

La negación interna implica la externa y viceversa.

Intuicionistamente.

Para toda $H \in K$,

$\mathcal{B}_H(\sim\varphi) \rightarrow \sim\mathcal{B}_H(\varphi)$.

La negación interna conlleva la externa, y no es el caso que: para todo *modelo* para toda $H \in K$,
$\sim\mathcal{B}_H(\varphi) \rightarrow \mathcal{B}_H(\sim\varphi)$.

$\mathcal{V}_A(\varphi)$ se lee : φ *es verdad respecto a la asignación A*.
$\mathcal{B}_H(\varphi)$ se lee: φ *es probable en el punto* ***H***.

*　　　*　　　*

En el presente apartado inicialmente distinguimos el significado semántico de los signos lógicos de $\pounds_p$, del significado sintáctico de dichos signos. Para ello consideramos lo siguiente.

(i) El significado semántico clásico se presenta respecto a una *asignación* de valores de verdad, y el significado semántico intuicionista, asumiendo definido un *modelo intuicionista* en una *estructura modelo* (para oraciones simbólicas del cálculo de oraciones). En relación con las *asignaciones* mencionadas, cada una de ellas podría representar una "situación posible", mientras que cada punto de Kripke (del conjunto *K* de una *estructura modelo*) se interpreta como una "situación de evidencia".

(ii) En distinción al vínculo entre el significado semántico (ya sea clásico, ya sea intuicionista) y las "situaciones" anteriormente mencionadas, el significado sintáctico de los signos lógicos de $\pounds_p$ lo fijan los axiomas y reglas de inferencia del sistema proposicional considerado, con los cuales se delimitan relaciones entre los signos lógicos de dicho lenguaje simbólico $\pounds_p$. Delimitación con independencia ya sea de aplicar asignaciones de valores de verdad, ya sea de evaluar cierto modelo intuicionista.

Posteriormente el significado semántico clásico de los signos lógicos de $\pounds_p$ (sección **III.2**) fue presentado bajo la primera interpretación de la definición de *proposición* ***Def.1*** (sección **II.2**). En dicho significado, respecto al significado semántico clásico de la negación, se tiene que:

> ***predicar la verdad como posibilidad de la negación de una estructura proposicional (respecto a cierta asignación A), implica negar el predicar sobre dicha estructura su verdad como posibilidad (respecto A), y viceversa.***

Lo anterior fue abreviado como $\mathcal{V}_A(\sim\varphi) \leftrightarrow \sim \mathcal{V}_A(\varphi)$ -donde $\mathcal{V}_A(\varphi)$ se lee: φ *es verdad respecto a la asignación A* (φ representa cualquier oración simbólica de $\pounds_p$).

De lo precedente (simplificadamente), ***en el significado semántico clásico de la negación****,* convencionalmente*,* ***la negación interna implica la externa y viceversa***, atributo del significado semántico clásico de la negación, con el que exhibimos la diferencia entre dicho significado y el significado semántico intuicionista (ver cuadro comparativo -sección **III.5**).

Antecediendo la presentación del significado semántico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$, en la sección **III.3** consideramos la segunda interpretación de la definición de *proposición* ***Def.1*** (expuesta en la sección **II.2**), lo que dio entrada a cierta interpretación intuicionista de los signos lógicos extraída de la presentada por Heyting en *Intuitionism An Introduction*.

En la mencionada sección **III.3**,

(i) simbolizamos la interpretación intuicionista de la afirmación de la certeza de la negación de una proposición matemática (proposición representable a través de una oración simbólica de $\pounds_p$). Siendo dicha simbolización:

$$\vdash \sim\varphi \quad \textit{si y solo si} \quad \mathcal{B}\,(\varphi \rightarrow \bot)$$

-donde $\mathcal{B}\,(\varphi)$ se lee: φ *es probable*, $\bot$ es la constante de falsedad (lógica) y φ representa cualquier oración simbólica de $\pounds_p$. Además,

(ii) a partir de la simbolización anterior, y bajo los axiomas del sistema $\mathcal{G}$ de Gödel, demostramos que probar la negación de una proposición matemática (proposición representable a través de una oración simbólica de $\pounds_p$), conlleva negar que poseemos una construcción probatoria de dicha proposición. De manera abreviada: $\mathcal{B}\ (\sim\varphi) \rightarrow \sim\mathcal{B}\ (\varphi)$. Simplificando lo anterior, ***la negación interna conlleva la externa***.

El significado semántico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$, el cuál presentamos en **III.4** directamente de la propuesta de *Kripke* (*Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I*), preserva en cualquier punto de Kripke el resultado expuesto en el párrafo anterior. De manera abreviada:

$$\forall H \in K,\quad \mathcal{B}_H(\sim\varphi) \rightarrow \sim\mathcal{B}_H(\varphi)$$

-donde *K* es un conjunto constituyente de una *estructura modelo* (intuicionista) y $\mathcal{B}_H(\varphi)$ se lee: φ *es probable en el punto* ***H*** (φ representa cualquier oración simbólica de $\pounds_p$).

De lo precedente (simplificadamente), ***en el significado semántico intuicionista de la negación, la negación interna implica la externa***. Sin embargo, existen *modelos intuicionistas* en *estructuras modelo* (**G** , **K** , ***R***), que para cierta **H'**$\in$ **K** es posible no tener una prueba de φ en **H'** y tampoco poseer una prueba de $\sim\varphi$ en **H'**.

De lo anterior sostuvimos la siguiente **tesis**.

> ***El significado semántico clásico de la negación presenta un atributo, el cual está ausente en ciertos elementos que representan 'situaciones de evidencia', los cuales se exhiben en algunos modelos intuicionistas asumidos en el significado semántico intuicionista de la negación***.

En el siguiente apartado demostraremos bajo que condición no sería el caso de que la negación externa conlleve la interna.

IV. Ley de doble negación.

En este apartado diferenciaremos inicialmente, la estructura proposicional presente en el esquema de la ley de doble negación, de cierta simbolización resultante de suponer a dicha estructura una ley o axioma. Además, interpretando dicha simbolización a través de la interpretación intuicionista de los signos lógicos (sección **III.3**), exhibiremos lo que permitiría afirmar negar que: la estructura proposicional en el esquema de la ley de doble negación goza de *aserto*. Lo cual (simplificadamente) será además condición suficiente, para que no sea el caso de que la llamada negación externa conlleve la interna. Siendo que esto último diferiría del atributo, del significado semántico clásico de la negación exhibido en el apartado anterior.

En la sección **IV.1** expondremos una transcripción, de un ejemplo en el que intuicionistamente falla la estructura proposicional presente en el esquema de la ley de doble negación. Ejemplo donde además exhibiremos una construcción, en la cual, considerar la suposición de cierta proposición matemática sobre un generador de número (previamente dado) guiaría a una contradicción. Lo que podría elucidar parte del sentido de la palabra “construcción” (cf. final del apartado **I**) presente en la interpretación intuicionista, de la afirmación de la certeza de la negación de una proposición matemática.

*　　　*　　　*

El *esquema* de la ley de doble negación presenta la siguiente estructura proposicional del lenguaje $\pounds_p$: $\sim\sim P \rightarrow P$ [86]. Si suponemos a dicha estructura una ley o axioma, esto podría simbolizarse como $\vdash (\sim\sim P \rightarrow P)$ [87]. Además, en lógica clásica, la ley de doble negación enuncia la verdad de cualquier instancia de su respectivo *esquema* [88], más intuicionistamente, el signo $\vdash$ antecediendo a $\sim\sim P \rightarrow P$ señalaría que $\sim\sim P \rightarrow P$ gozaría de *aserto* [89].

De la interpretación intuicionista de los signos lógicos (sección **III.3**), el que la oración simbólica $\sim\sim P \rightarrow P$ gozase de *aserto*, querría decir, que poseemos una construcción $\mathcal{z}$, la cual, unida a cualquier construcción probatoria de $\sim\sim P$, da automáticamente el efecto de una construcción probatoria de P. De lo anterior, aquel caso de proposición matemática, digamos $\wp$, tal que no es el caso que:

> poseamos una construcción $\mathcal{z}$, la cual, unida a cualquier construcción probatoria de $\sim\sim\wp$, da automáticamente el efecto de una construcción probatoria de $\wp$,

permitirá afirmar que no es el caso que $\sim\sim\wp \rightarrow \wp$ goza de *aserto*.

---

[86]A partir del *esquema* de dicha ley y a través de la regla de *reemplazamiento* (presentada en la sección **V.2**) resultan oraciones simbólicas con la misma estructura " $\sim\sim \ldots \rightarrow \ldots$ ".
[87]Cada una de las oraciones simbólicas que son consideradas axioma del cálculo proposicional intuicionista propuesto por Heyting es antecedida por el signo $\vdash$ -cf. Heyting (1971) pp.105-106.
[88]"…existen cuatro leyes lógicas, cada una de las cuales enuncia la verdad de toda instancia de uno de los cuatro esquemas, a saber: ... iv) *Si no es el caso que no **A**, entonces es el caso que **A***, en símbolos, $\sim\sim A \rightarrow A$ ... A iv) se le llama por supuesto la ley de doble negación…". Dummett (1990) pp.21-22.
Dado que en la literatura se presentan ejemplos de proposiciones matemáticas, en los cuales a partir de la interpretación intuicionista de los signos lógicos falla la estructura proposicional presente en el esquema de la ley de doble negación (cf. Heyting (1971) pp. 104 y 17-18), consideraremos que lo anteriormente enunciado por las leyes lógicas es propio de la lógica clásica.
[89]Las fórmulas que gozan de *aserto* son marcadas con $\vdash$ -cf. Heyting (1971) pp.102-104.

En relación con lo precedente, para cualquier oración simbólica φ de $\pounds_p$, **si** no es el caso que, probar $\sim\sim\varphi$ implique probar φ, **entonces** no tenemos una prueba de $\sim\varphi$ y tampoco de φ. Siendo que esto último también es consecuencia, de que no sea el caso de que φ sea *absolutamente decidible* (cf. ***Def.2*** en **II.2**).

- ***Demostremos*** lo anterior.

1) Supongamos que $\sim (\mathcal{B}(\sim\sim\varphi) \rightarrow \mathcal{B}(\varphi))$ -donde $\mathcal{B}(\varphi)$ se lee: *φ es probable*.

2) Del supuesto en 1), $\sim (\sim \mathcal{B}(\sim\sim\varphi) \vee \mathcal{B}(\varphi))$ [90].

3) De lo anterior, $\sim\sim \mathcal{B}(\sim\sim\varphi) \wedge \sim \mathcal{B}(\varphi)$ [91].

4) Además,

4.1) $\sim\sim \mathcal{B}(\sim\sim\varphi) \rightarrow \sim\sim\sim \mathcal{B}(\sim\varphi)$ - para obtener dicha implicación considérese

(i) que la negación interna conlleva la externa, en éste caso: $\mathcal{B}(\sim\sim\varphi) \rightarrow \sim\mathcal{B}(\sim\varphi)$ y

(ii) que $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$ es derivable en el sistema proposicional intuicionista de Heyting [92].

y

4.2) $\sim\sim\sim \mathcal{B}(\sim\varphi) \rightarrow \sim \mathcal{B}(\sim\varphi)$ [93].

5) De las relaciones condicionales en 4) y la conjunción en 3), $\sim\mathcal{B}(\sim\varphi) \wedge \sim\mathcal{B}(\varphi)$.

---

[90]De los axiomas del *sistema proposicional intuicionista de Heyting* A_5, A_9 y A_{10} (sección **V.1**) es derivable $(\sim P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$. De ello, y como la oración simbólica $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$ también es derivable en dicho sistema (cf. Gentzen (1969) p.58), podemos derivar que $\sim (P \rightarrow Q) \rightarrow \sim (\sim P \vee Q)$.

[91]Para tal resultado considérese la siguiente oración simbólica demostrable en el cálculo proposicional intuicionista de Heyting: $\sim (P \vee Q) \rightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$ (cf. Heyting (1971) p.104).

[92] Cf. Gentzen (1969) p.58.

[93]En el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*, $\sim\sim\sim P \rightarrow \sim P$ es una oración simbólica derivable, pero también lo es sobre la base de los axiomas del llamado *sistema* $\mathfrak{B}$ (de Brouwer) -cf. Kolmogorov (1981) pp.425-426.

Por lo anterior queda demostrado que

$$\sim (\mathcal{B} (\sim\sim\varphi) \rightarrow \mathcal{B} (\varphi)) \rightarrow (\sim \mathcal{B} (\sim\varphi) \wedge \sim \mathcal{B} (\varphi)).$$

En palabras, **si** no es el caso que, probar $\sim\sim\varphi$ implique probar φ , **entonces** no tenemos una prueba de $\sim\varphi$ y tampoco de φ .

El antecedente supuesto en la demostración anterior, es decir, $\sim (\mathcal{B} (\sim\sim\varphi) \rightarrow \mathcal{B} (\varphi))$ (el cual simboliza simplificadamente lo que permitiría afirmar negar que: la estructura proposicional presente en el esquema de la ley de doble negación goza de *aserto* –para φ representando una letra oración), es además condición suficiente, para que no sea el caso de que la llamada negación externa conlleve la interna. Esto último, en símbolos adecuados, $\sim (\sim\mathcal{B} (\varphi) \rightarrow \mathcal{B} (\sim\varphi))$.

• ***Demostremos*** lo precedente.

1) Supongamos que $\sim (\mathcal{B} (\sim\sim\varphi) \rightarrow \mathcal{B} (\varphi))$.

2) De 1) y lo anteriormente demostrado, $\sim \mathcal{B} (\sim\varphi) \wedge \sim \mathcal{B} (\varphi)$.

3) Además, $\sim \mathcal{B} (\varphi) \rightarrow ((\sim\mathcal{B} (\varphi) \rightarrow \mathcal{B} (\sim\varphi)) \rightarrow \mathcal{B} (\sim\varphi))$ [94].

4) De esto último y simplificando la conjunción en 2), $\sim (\sim \mathcal{B} (\varphi) \rightarrow \mathcal{B} (\sim\varphi))$.

---

[94] Del axioma A_6 del sistema proposicional de Heyting (sección **V.1**) y el teorema T_3 (**Apartado A**) derivable en dicho sistema (cf. Gentzen (1969) p.58), $P \rightarrow ((P\rightarrow Q) \rightarrow Q)$ es derivable. Considerando lo anterior, para expresiones de cierto lenguaje simbólicamente amplio, obtenemos el exhibido resultado en el texto.

Por lo anterior queda demostrado que

$$\sim (\ \mathcal{B}\,(\sim\sim\varphi)\ \rightarrow\ \mathcal{B}\,(\varphi)\ )\quad\rightarrow\quad\sim (\sim\mathcal{B}\,(\varphi)\ \rightarrow\ \mathcal{B}\,(\sim\varphi)\ )\ .$$

Finalizaré esta sección comentado que, procediendo semejantemente, los resultados anteriormente demostrados para $\mathcal{B}$ son obtenibles para $\mathcal{B}_H$ (donde $\mathcal{B}_H\,(\varphi)$ se lee: φ *es probable en el punto* ***H***).

IV.1 Ejemplo en el cual intuicionistamente falla $\sim\sim P \rightarrow P$.

A continuación presentaremos una transcripción de un ejemplo en donde no es el caso que, la prueba de la negación de la *imposibilidad* de una propiedad sea una prueba de la propiedad misma, ejemplo adjudicado a Brouwer [95]. En el mencionado ejemplo, no gozará de *aserto* que: la negación de la *imposibilidad* de cierta propiedad implique a dicha propiedad, mejor dicho, no es el caso que:

> una construcción z , unida a cualquier construcción probatoria de la negación de la imposibilidad de cierta propiedad, da automáticamente el efecto de una construcción probatoria de la propiedad misma.

La construcción z considerada se presenta con el siguiente *generador de número* ρ [96]:

[95] Cf. Heyting (1971) pp.17-18.

[96] En *Intuitionism An Introduction*, Heyting expone la siguiente "**Definición 1**. Una sucesión de Cauchy de números racionales es un *generador-número real*." (Heyting (1971) p.16). Siendo que, "Una sucesión $\{a_n\}$ de números racionales es llamada una *sucesión de Cauchy*, si para cualquier número natural k podemos encontrar un número natural $n = n(k)$, tal que $| a_{n+p} - a_n | < 1/k$ para cualquier número natural p . " (Ídem).

Un ejemplo de sucesión de Cauchy es la sucesión 0.3, 0.33, 0.333, …, es decir, la sucesión $\{ (10^n - 1) / 3(10^n) \}$ – donde n pertenece a los enteros positivos. Sucesión que, de acuerdo con la **definición 1**, es un *generador-número real*.

Además, en relación con el ejemplo en el cual intuicionistamente falla $\sim\sim P \rightarrow P$, Heyting expone lo siguiente:

(1) "Escribo la expansión decimal de π y debajo de ella la fracción decimal $\rho = 0.333\ldots$, la cual suspendo tan pronto como una sucesión de dígitos 0123456789 se presente en π . Si el 9 de la primera sucesión 0123456789 en π es el n-ésimo dígito después del punto decimal, $\rho = (10^n - 1) / 3(10^n)$." (Ibídem, p17) y

(2) "Pero si decidimos que el generador-número ρ el cual he definido hace algunos momentos…" (Ibídem, p.18).

Por lo anterior optamos por conservar (en la presente transcripción) el término *generador de número* para ρ. Sin embargo, nótese que lo correcto sería llamar *generador de número real* a la sucesión $\{ (10^n - 1) / 3(10^n) \}$ – donde n pertenece a los enteros positivos.

$$\rho = \begin{cases} 1/3 & \text{si es el caso que la sucesión 0123456789 no aparece en la expansión decimal de } \pi, \\ (10^n - 1)/3(10^n) & \text{si es el caso que la sucesión 0123456789 aparece en la expansión decimal de } \pi \end{cases}$$

- donde n sería el *n-ésimo* lugar después del punto decimal (lugar expresado a través del respctivo entero positivo) que ocuparía el 9 de la primera sucesión 0123456789, si ésta se presentáse en la expansión decimal de π [97].

Supongamos que ρ no pueda ser racional. De ello, la sucesión 0123456789 no podría aparecer en la expansión decimal de π, pues si apareciere dicha sucesión tendríamos una n fija, digamos $n = n_0$, y como ρ sería igual al número racional $(10^{n_0} - 1) / 3(10^{n_0})$, ρ sería racional. Más si la sucesión 0123456789 no apareciere en la expansión decimal de π, ρ sería igual a $1/3$, y de ello, ρ sería racional.

Notemos que la suposición inicial guiaría a una contradicción, de ello, no es el caso que ρ no pueda ser racional. Sin embargo, no tenemos derecho a afirmar que ρ es racional, pues esto querría decir, que podemos calcular los enteros k y m tales que $\rho = k/m$.[98]

[97] Nótese que si la sucesión 0123456789 no se presentase en la expansión decimal de π, ρ sería igual a $1/3$, lo que es igual a $\lim_{n \to \infty} \left((10^n - 1) / 3(10^n) \right)$.

[98] Cf. Heyting (1971) pp.17-18.

En relación con esto último comento lo siguiente. A través de inducción matemática podemos demostrar, para toda n perteneciente a los enteros positivos, que $(10^n - 1) \;/\; 3(10^n)$ *es racional* [99]. No obstante, para demostrar que ρ es racional, requeriríamos que "…o podamos indicar una sucesión 0123456789 en π o demostrar que no puede aparecer tal sucesión." [100]

De lo anterior, no es el caso que:

> la construcción $\mathfrak{r}$ con el *generador de número* ρ, unida a la construcción probatoria de no es el caso que ρ no pueda ser racional, da el efecto de una construcción probatoria de ρ es racional,

lo que intuicionistamente se considera como un fallo de la estructura proposicional presente en el esquema de la ley de doble negación [101].

Finalizaré este apartado comentando que existen una infinidad de expresiones decimales de π, dependiendo del último dígito explícitamente expuesto. Por lo que, *el objeto* α *tal que* α *es expansión decimal de* π es una *descripción definida impropia* (ya que más de un objeto (sucesión) satisface ser expansión decimal de π) [102] . Lo anterior sugiere un *cálculo descriptivo*, para abordar adecuadas simbolizaciones del presente ejemplo.

*　　　*　　　*

---

[99]Considere para ello, que la suma entre números racionales es un número racional, y que la multiplicación entre enteros es un número entero.

[100]Heyting (1971) p.18 -traducción del autor.

[101]"Otra forma del principio es $\sim\sim P \rightarrow P$. Hemos encontrado muchos ejemplos de proposiciones para los cuales esto falla: el primero fue ρ *es racional*…". Heyting (1971) p.104.

[102]Cf. Kalish (1980) p.307.

En este apartado diferenciamos la estructura proposicional $\sim\sim P \rightarrow P$ presente en el esquema de la ley de doble negación, de cierta simbolización resultante de suponer a dicha estructura una ley o axioma: $\vdash (\sim\sim P \rightarrow P)$. Siendo que, bajo la interpretación intuicionista de los signos lógicos (sección **III.3**), la simbolización anterior querría decir que poseemos una construcción $\mathfrak{z}$, la cual, unida a cualquier construcción probatoria de $\sim\sim P$, da automáticamente el efecto de una construcción probatoria de P.

En relación con lo precedente, $\sim(\mathcal{B}(\sim\sim\varphi) \rightarrow \mathcal{B}(\varphi))$ (donde $\mathcal{B}(\varphi)$ se lee: φ *es probable*, y φ representa cualquier oración simbólica de $\pounds_p$),

(i) simboliza simplificadamente lo que permitiría afirmar negar que: la estructura proposicional presente en el esquema de la ley de doble negación goza de *aserto* (para φ representado una letra oración), y

(ii) es además condición suficiente para que $\sim(\sim\mathcal{B}(\varphi) \rightarrow \mathcal{B}(\sim\varphi))$ [103].

Simplificadamente: es condición suficiente para que no sea el caso de que la llamada negación externa conlleve la interna. Siendo que esto último diferiría del atributo del significado semántico clásico de la negación.

La transcripción del ejemplo en la sección **IV.1** (en el cual intuicionistamente falla la estructura proposicional presente en el esquema de la ley de doble negación), aunque sustentaría excluir el axioma $\vdash (\sim\sim P \rightarrow P)$ del sistema proposicional de Heyting (sistema que exhibiremos en el siguiente apartado), sugiere un *cálculo descriptivo* para abordar adecuadas simbolizaciones de dicho ejemplo.

---

[103] Dicho resultado también es obtenible para $\mathcal{B}_H$ en lugar de $\mathcal{B}$.

V. El sistema proposicional intuicionista de Heyting.

En la literatura del siglo pasado encontramos autores que propusieron respectivamente, un sistema de axiomas para la *lógica de juicios intuicionista* [104], y un *cálculo proposicional intuicionista*, desarrollado como un sistema formal y sobre la base de ciertos axiomas [105]. Aunque tales propuestas se basaban en distintos conjuntos de axiomas: (i) en los mencionados sistemas, cada una de las fórmulas consideradas como axioma es (en notación contemporánea) una oración simbólica del lenguaje simbólico $\pounds_p$; y (ii) en cada uno de los sistemas propuestos se excluye $\vdash (\sim\sim P \rightarrow P)$ del conjunto de axiomas [106]. En adelante llamaremos a dichas propuestas *sistemas proposicionales intuicionistas*.

En este aparado iniciaremos comentando las propuestas mencionadas arriba sobre los *sistemas proposicionales intuicionistas* tanto de Kolmogorov como de Heyting. Posteriormente presentaremos, respectivamente en la sección **V.1** y la sección **V.2**, los axiomas del cálculo proposicional intuicionista de Heyting; y las reglas de inferencia adecuadas para oraciones simbólicas del lenguaje $\pounds_p$. Axiomas y reglas de inferencia que, como expusimos en el apartado **III**, determinan el significado sintáctico

[104] En *On the principle of excluded middle*, Kolmogorov expone que "…el primer axioma de la negación de Hilbert no puede ser un axioma de la lógica de juicios intuicionista…" (Kolmogorov (1981) p.421 -traducción del autor). Además llamó *sistema* $\mathcal{B}$: al sistema de axiomas compuesto por los axiomas de Hilbert para la implicación, y un axioma para la negación ofrecido por el mismo Kolmogorov (cf. Kolmogorov (1981) p.422). Siendo que, las fórmulas probables sobre la base de los axiomas $\mathcal{B}$ constituirían para Kolmogorov, la *lógica general de juicios* (cf. Kolmogorov (1981) p.425).

Por lo anterior, y suponiendo que la lógica general de juicios conlleva en particular la *lógica de juicios intuicionista*, consideraremos que Kolmogorov propuso implícitamente un sistema de axiomas para la lógica de juicios intuicionista.

[105] Cf. sección **V.1**

[106] El que algunas propuestas exhibieran distintos conjuntos de axiomas, no anula algún posible vínculo derivacional entre un conjunto de axiomas y otro.

intuicionista de los signos lógicos del lenguaje $\mathcal{L}_p$ (bajo los axiomas del cálculo proposicional intuicionista de Heyting).

En la sección **V.3**,

(I) exhibiremos algunas oraciones simbólicas derivables en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*, con las cuales delimitaremos el dominio de aplicabilidad del esquema de la ley de doble negación (delimitación como la realizada por Kolmogorov, bajo el sistema que llamaría *sistema* $\mathcal{B}$ -de Brouwer),

(II) tomando en cuenta cierta oración simbólica derivable en el mencionado sistema de Heyting, y considerando

(i) la primera interpretación de la definición de *proposición* ***Def.1*** (sección **II.2**), a partir de la cual presentamos
(ii) el significado semántico clásico de la negación (sección **III.2**) -significado en el que simplificadamente la negación interna implica la externa y viceversa-

expondremos que: la *estructura proposicional* en el esquema de la ley de doble negación es verdad respecto a cualquier asignación de valores de verdad, y

(III) tomando en cuenta la oración simbólica mencionada en (II), y considerando el significado semántico intuicionista de la negación (sección **III.4**), estableceremos que no es el caso que: la negación de la *estructura proposicional* en el esquema de la ley de doble negación sea probable en el sistema de Heyting.

Finalmente, en la sección **V.4** presentaremos un cuadro comparativo, en el que diferenciaremos el significado semántico clásico de la negación, del significado semántico intuicionista de dicho signo, incorporando además, el significado sintáctico.

*   *   *

El significado sintáctico de los signos lógicos del lenguaje $\mathcal{L}_p$, como expusimos en el apartado **III**, lo determina los axiomas y reglas de inferencia presentes en el sistema proposicional considerado (intuicionista de Heyting, clásico, …). Axiomas y reglas de inferencia, con los cuales derivamos teoremas que delimitan las relaciones entre los signos lógicos de cada sistema. Siendo que, dicha delimitación se realiza con independencia, ya sea de evaluar un modelo intuicionista en una estructura modelo (para las oraciones simbólicas en que se presentan tales conectivos), ya sea de asignarle valores de verdad a las letras oración involucradas.

En la literatura suelen proponerse (lo que llamaremos) *sistemas proposicionales intuicionistas*, sistemas en los cuales, figuran distintos axiomas. Por ejemplo: Kolmogorov (anticipado a la formalización de la lógica intuicionista de Heyting) presenta el *sistema $\mathcal{B}$ -de Brouwer-* actualmente conocido como el cálculo mínimo[107]. En dicho sistema, figuran los axiomas de Hilbert para la implicación[108], además de proponerse un axioma para la negación (cuya verdad sigue de interpretar a tal signo lógico, como la prohibición de considerar el juicio que antecede como verdadero[109]). Siendo que, en el *sistema $\mathcal{B}$* se excluye el axioma $P \rightarrow (\sim P \rightarrow Q)$, axioma presente en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*.

---

[107]Cf. introducción de Wang Hau, al artículo *On the principle of excluded middle*, en Van Heijenoort (1981) p.414.

[108] Axiomas de Hilbert para la implicación en el lenguaje $\mathcal{L}_p$.

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$,
2. $(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$,
3. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$,
4. $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$.

[109] Kolmogorov propone el siguiente axioma para la negación: $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \sim Q) \rightarrow \sim P)$ -exhibo a dicho axioma en el lenguaje $\mathcal{L}_p$. Además expone que "La verdad del axioma propuesto sigue de la más simple interpretación de la negación, la prohibición de considerar el juicio como verdadero…". Kolmogorov (1981) p.422.

No obstante la distinción anteriormente expuesta, tanto en el cálculo mínimo como en el sistema de Heyting, $\vdash (\sim\sim P \rightarrow P)$ está ausente de los axiomas, pues para Kolmogorov, la estructura proposicional anterior es infundada[110], mientras que Heyting, presenta ejemplos de proposiciones para los cuales falla (como el expuesto en el apartado anterior).

En las siguientes secciones presentaremos respectivamente, los axiomas del cálculo proposicional intuicionista de Heyting; y las reglas de inferencia adecuadas para oraciones simbólicas del lenguaje $\pounds_p$. Axiomas y reglas de inferencia, que determinan el significado sintáctico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$ (bajo los axiomas de Heyting).

110 Cf. Kolmogorov (1981) p.426.

V.1 Axiomas del cálculo proposicional intuicionista de Heyting.

“El cálculo proposicional intuicionista ha sido desarrollado [A. Heyting 1930] como un sistema formal con $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ como constantes…y sobre la base de los siguientes axiomas” [111], o sobre la base de las siguientes *fórmulas axioma* [112] :

A_1. $\vdash (P \rightarrow (P \wedge P))$,

A_2. $\vdash ((P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P))$,

A_3. $\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)))$,

A_4. $\vdash (((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$,

A_5. $\vdash (Q \rightarrow (P \rightarrow Q))$,

A_6. $\vdash ((P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q)$,

A_7. $\vdash (P \rightarrow (P \vee Q))$,

A_8. $\vdash ((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P))$,

A_9. $\vdash (((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R))$,

A_{10}. $\vdash (\sim P \rightarrow (P \rightarrow Q))$,

A_{11}. $\vdash (((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \sim Q)) \rightarrow \sim P)$.

En las estructuras proposicionales anteriores, cada letra capital es una letra oración de $£_p$, la cual además es una oración simbólica de dicho lenguaje (tales letras son llamadas en algunos textos: *variables proposicionales*)

[111] Heyting (1971) p.105. Traducción del autor.
[112] En Heyting (1971), cada axioma presentado es cierta oración simbólica de $£_p$ antecedida por el signo $\vdash$, indicando con ello que goza de *aserto* (cf. Heyting (1971) pp. 103 y 105-106). Mientras que en Gentzen (1969), respecto a las *fórmulas axioma* de la lógica proposicional intuicionista (cada una de las cuales es (en notación contemporánea) una oración simbólica de $£_p$), da seña previa de pertenencia a un sistema de fórmulas verdaderas (cf. Gentzen (1969) pp.55-56).

V.2 Reglas de inferencia.

Las reglas de inferencia consideradas en el presente sistema proposicional intuicionista son **(1)** el esquema de inferencia *modus ponens* (*MP*) para oraciones simbólicas (las cuales representaremos tanto por φ como γ) :

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \\ \varphi \rightarrow \gamma\end{array}}{\gamma} \qquad MP$$ [113]

y **(2)** la regla de *reemplazamiento* (*R*): a partir de una *fórmula axioma*, digamos φ, resulta otra oración simbólica, cuando reemplazamos cada ocurrencia de una misma letra oración que se presenta en φ, por la oración simbólica, digamos γ, siempre que coloquemos la misma γ en cada lugar de la letra oración considerada [114].

[113] Gentzen presenta la regla de inferencia en consideración, a través de la siguiente regla operacional: si φ y $\varphi \rightarrow \gamma$ son fórmulas verdaderas, también lo es γ - donde tanto φ como γ sirven "…como variables sintácticas, i.e., como variables para nuestras deliberaciones *sobre* la aritmética." (Gentzen (1969) p. 54 -traducción del autor). Por otro lado, con el lenguaje completo de la de la lógica de primer orden, Posy exhibe un sistema formal donde se axiomatiza la lógica intuicionista, prescribiendo además, que contenga reglas y axiomas para cada partícula lógica. Siendo que la regla de *modus ponens*, la presenta como

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \; .$$

Cf. Posy (2005) pp.336-337.

[114] Cf. Gentzen (1969) pp. 57-58. La regla de reemplazamiento expuesta, a distinción de la presentada por Gentzen, se restringe exclusivamente para variables proposicionales sin argumento, es decir, para letras oración.

V.3 Oraciones simbólicas derivables.

La sucesión de oraciones simbólicas, cada una de las cuales es o una *fórmula axioma*, o resulta de una *fórmula axioma* por la regla de reemplazamiento, o resulta de las oraciones simbólicas anteriores por aplicación del esquema *MP* es llamada una *derivación*. Además, una oración simbólica es llamada *derivable*, si existe una derivación en la cual es la última oración simbólica de la sucesión[115]. Al respecto, notemos que cuando se finaliza la derivación de cierta oración simbólica presentamos un argumento racionalmente obligatorio que la establece, el cual es aplicable a cualquier instancia de dicha oración simbólica (realizando los *reemplazamientos* adecuados en la derivación). De ello, cada una de tales oraciones simbólicas es *absolutamente decidible*[116].

En el presente sistema proposicional, cada una de las siguientes oraciones simbólicas es derivable, independientemente de que las letras oración constituyentes (variables proposicionales) representen proposiciones "decidibles" ("indecidibles").

1. $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$,

2. $\sim\sim(P \rightarrow \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow \sim Q)$,

---

[115] Cf. Gentzen (1969) p.55 y 57-58. De la exposición de Gentzen sobre lo que ***es*** el complemento formal de una prueba (el cual llama una *derivación*), y suponiendo la cópula como ***es lo mismo que***, obtenemos lo presentado en este texto.

En adición a lo anterior, cada una de las fórmulas del sistema proposicional intuicionista extraíble de Gentzen (1969) es (en notación contemporánea) una oración simbólica de $\pounds_p$. Por lo anterior, en el presente apartado substituí el término *fórmula* en Gentzen (1969), por el término *oración simbólica* (sólo conservé el término *fórmula axioma*).

No obstante lo precedente, en el cálculo de cuantificadores "Por una *oración simbólica* se entiende una fórmula simbólica en la cual ninguna variable es libre" (Kalish (1980) p.124). De ello, para ciertos cálculos simbólicos, no es el caso que cada fórmula simbólica sea una *oración simbólica*.

[116] Sobre el término *absolutamente decidible* confróntese la sección **II.2**.

3. $\sim\sim(\sim P) \rightarrow (\sim P)$,

4. $\sim\sim(\sim P \wedge \sim Q) \rightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$ [117].

(I) El dominio de aplicabilidad del esquema de la ley de doble negación queda delimitado en el presente *sistema proposicional intuicionista de Heyting*, a través de las oraciones simbólicas en *2-4*. La oración simbólica, que sea una instancia de cualesquiera de tales oraciones simbólicas (*2-4*), también es una instancia del esquema de la ley de doble negación, la cuál goza de *aserto* (independientemente de que esté constituida de oraciones con las que simbolicemos proposiciones "decidibles" - "indecidibles").

Al respecto del presente dominio de aplicabilidad, Kolmogorov introduce los símbolos ***'A***,***'B***, ***'C***… , los cuales denotan "… juicios arbitrarios para los cuales el juicio mismo sigue de su doble negación" [118] . Siendo que bajo el *sistema* $\mathcal{B}$, tanto los juicios negativos (cf. *3*) como los juicios del tipo ***'A → 'B*** (cf. *2*) son juicios del tipo ***'A*** [119].

---

[117] La derivación "simplificada" de la oración simbólica (con la misma estructura que) en *1*, así como en *2* se realiza en el **Apéndice A** (las derivaciones son "simplificadas" pues en dichas derivaciones, algunas oraciones simbólicas resultan de la aplicación de la regla de *reemplazamiento* a oraciones simbólicas (en lugar de *fórmulas axioma*) que ya han sido derivadas en otros textos).

La oración mostrada en *3* se deriva directamente de los teoremas T_1 y T_4 , teoremas expuestos también en el apéndice anteriormente mencionado.

Para la derivación de la oración en *4* considérese que tanto $\sim\sim(\sim P \wedge \sim Q) \rightarrow \sim\sim(\sim P)$, como $\sim\sim(\sim P) \rightarrow (\sim P)$ son oraciones derivables en el presente *sistema proposicional intuicionista de Heyting*.

La oración en *2* puede derivarse (bajo el *sistema* $\mathcal{B}$) a partir de las siguientes fórmulas probadas por Kolmogorov: ***(46)*** $\sim\sim(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow \sim\sim Q)$ y ***(36)*** $\sim\sim(\sim P) \rightarrow (\sim P)$ (cf. Kolmogorov (1981) pp.427 y 426 –expongo a dichas oraciones simbólicas en notación contemporánea). Mientras que sobre la oración derivable mostrada en *3* menciono lo siguiente: Brouwer demostró que lo absurdo de lo absurdo de lo absurdo es equivalente con lo absurdo (cf. Brouwer (1925) p.253).

[118] Kolmogorov (1981) p.425.

[119] Cf. Kolmogorov (1981) pp.425-427.

(II) A partir de la oración simbólica $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$, la cuál es derivable en el presente sistema proposicional intuicionista, y considerando

(i) la primera interpretación de la definición de *proposición* ***Def.1*** (sección **II.2**), y

(ii) el significado semántico clásico de la negación presentado a partir de la mencionada interpretación (significado en el que simplificadamente la negación interna implica la externa y viceversa)

es posible exponer, basándose en oraciones simbólicas que gozan de *aserto* en sistemas formales intuicionistas, que la estructura proposicional en el esquema de la ley de doble negación es verdad, respecto a cualquier asignación de valores de verdad.

Expongamos lo anterior [120].

- La sucesión de oraciones simbólicas en la que es derivable $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$ **- Apéndice A-** podemos reordenarla como un argumento *válido* en el *cálculo de oraciones*, cuyas premisas son las instancias de axiomas (o de oraciones simbólicas previamente derivadas –*teoremas*) presentes en dicha sucesión, y cuya conclusión es $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$.

- "Ya que un argumento simbólico es válido en el cálculo de oraciones justo en caso de que la conclusión es implicada tautológicamente por las premisas" [121], no existe una

[120] En dicha exposición implícitamente no distinguiremos (incorrectamente) el término *verdadero* del término *verdad*, ya que tal tema sobrepasa las pretensiones del presente trabajo.
[121] Kalish (1980) p.99.

asignación de valores de verdad con respecto a la cual, simultáneamente, cada una de las premisas anteriormente mencionadas tiene el valor de verdad *V* y la conclusión *F* [122].

- De lo precedente, si cada una de las *fórmulas axioma* del presente *sistema* (*proposicional intuicionista de Heyting*) enuncia la verdad de cualquier instancia de su respectivo esquema (para cualquier asignación de valores de verdad), entonces no es el caso que, $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$ es falsa (respecto a cualquier asignación)[123] . Lo que, considerando la primera interpretación de la definición de *proposición* (sección **II.2**), lleva a establecer que $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$ es verdad (respecto a cualquier asignación *A* de valores de verdad) [124].

- De lo anterior, y dado que en el significado semántico clásico de los signos lógicos,

> predicar la verdad como posibilidad de la negación de una estructura proposicional (respecto a cierta asignación *A*), implica negar el predicar sobre dicha estructura su verdad como posibilidad (respecto *A*), y viceversa (cf. sección **III.2**),

llegamos al siguiente resultado: *no es el caso que no es el caso que,* $(\sim\sim P \rightarrow P)$ *es verdad* (respecto a cualquier asignación *A*). Además, de la mutua exclusión entre los

---

[122] Cf. Kalish (1980) pp.99-100.

[123] Para tal deducción considérese lo siguiente: (i) en el cálculo de predicados intuicionista de primer orden, "$\sim\exists x\, Px \rightarrow \forall x \sim Px$" goza de *aserto* (cf. Heyting (1971) p.107), y (ii) en el cálculo proposicional intuicionista de Heyting, "$\sim(P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow \sim Q)$" gozaría de *aserto* (cf. apartado **VII** (**II**) ⇒).

[124] De la primera interpretación de la definición de *proposición*, respecto a una *asignación A* de valores de verdad, $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$ es verdadero (respecto *A*) o $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$ es falso (respecto *A*). Dado que no es el caso que, $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$ es falsa (respecto a cualquier *asignación*), concluimos que $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$ es verdadero (respecto a cualquier *asignación*).

Para la precedente deducción considérese que "$(P \vee Q \;\wedge\; \sim P) \rightarrow Q$" es derivable en el presente sistema proposicional intuicionista, y clausúrese la definición anteriormente mencionada, respecto a las *asignaciones* de valores de verdad.

valores de verdad que tiene una proposición obtenemos que: si $(\sim\sim P \rightarrow P)$ *es falsa* (respecto *A*), entonces *no es el caso que,* $(\sim\sim P \rightarrow P)$ *es verdad* (respecto *A*) [125].

- De los dos resultados precedentes, *no es el caso que,* $(\sim\sim P \rightarrow P)$ *es falsa* (respecto a cualquier *asignación A*). Finalmente, considerando nuevamente la primera interpretación de la definición de *proposición*, concluimos que $(\sim\sim P \rightarrow P)$ *es verdad* (respecto a cualquier asignación *A*), si cada una de las *fórmulas axioma* (del presente sistema proposicional intuicionista) enuncia la verdad de cualquier instancia de su respectivo esquema (para cualquier *asignación* de valores de verdad) [126].

---

[125] "…con respecto a una asignación *A*, cualquier oración simbólica tiene uno de los dos valores de verdad *V* o *F*, pero no ambos." (Kalish (1980) p.88) Expresando tal mutua exclusión (entre los valores de verdad de una oración simbólica) como

no es el caso que: φ es verdad (respecto A) y φ es falsa (respecto A)

-donde φ representa cualquier oración simbólica de $£_p$ -,

y considerando que *"*$\sim(P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow \sim Q)$*"* gozaría de *aserto* en el cálculo proposicional intuicionista de Heyting, obtenemos lo siguiente.
Si $(\sim\sim P \rightarrow P)$ es falsa (respecto *A*), entonces no es el caso que, $(\sim\sim P \rightarrow P)$ es verdad (respecto *A*).

[126] A través de una deducción semejante podemos establecer, prescindiendo de la derivación de $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$, que respecto a cualquier asignación *A*, si $\sim\sim P$ es verdad (respecto *A*) entonces P es verdad (respecto *A*) . No obstante, para deducir de lo anterior (y el significado semántico clásico de la implicación) que "$(\sim\sim P \rightarrow P)$ es verdad (respecto *A*)" requeriríamos que *"*$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim P \vee Q)$*"* fuese derivable, lo que permitiría derivar *"* $P \vee \sim P$ *"* (estructura proposicional presente en el esquema de la ley del tercio excluso, ley "rechazada" en el intuicionismo lógico).

Alternativamente podemos exponer el presente resultado considerando (i) la primera interpretación de la definición de *proposición* y (ii) la oración simbólica *"* $(P \vee \sim P) \rightarrow (\sim\sim P \rightarrow P)$ *"*, la cual es derivable en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting* (entre otras consideraciones).

(III) Finalizaremos esta sección comentando lo siguiente.

En distinción a lo anteriormente expuesto, *la derivación de* $\sim\sim(\ \sim\sim P \ \rightarrow\ P\ )$ es el complemento formal, de una prueba en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*, de la negación de la *estructura proposicional* $\sim(\ \sim\sim P \ \rightarrow\ P\ )$.

En adición a lo anterior, recordemos que del significado semántico intuicionista de la negación (presentado en la sección **III.4**):

> para cualquier punto **H'** de Kripke (donde **H'**$\in$ **K** y **K** es un conjunto constituyente de una *estructura modelo* intuicionista), probar en **H'** la negación de una oración simbólica de $\pounds_p$, implica negar que poseemos una construcción probatoria en **H'** de dicha oración.

De lo precedente, y suponiendo que con cierto punto **H** de Kripke representamos un punto en el tiempo, en el cual tenemos la información respectiva del significado sintáctico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$ [127], establecemos que:

> no es el caso que, $\sim(\ \sim\sim P \ \rightarrow\ P\ )$ *sea probable* en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting* [128].

Notemos que lo anterior difiere de probar la estructura presente en el esquema de la ley de doble negación.

---

[127] Alternativamente podemos suponer cierto modelo intuicionista ϕ_1 "acorde" al mencionado significado, tal que para cualquier oración simbólica φ , la cuál sea derivable en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*, $\phi_1(\varphi, \boldsymbol{H})$ sea igual a V -$\forall$ **H** $\in$ **K** .

[128] "…si ya tenemos una prueba de *A* en la situación **H**, entonces podemos aceptar *A* como probada en cualquier situación **H'** posterior…" (Kripke (1965) p.99). De lo anterior, y ya que en cualquier punto de Kripke la negación interna conlleva la externa, el resultado expuesto en el texto se presentó en modo subjuntivo.

V.4. Cuadro comparativo.

Diferencia entre el significado semántico clásico de la negación y el significado semántico intuicionista, incorporando el significado sintáctico.

Definición de *proposición*.
Algo que puede decirse que es verdadero o falso.

"***puede decirse***" como posibilidad

"***puede decirse***" como autorización

Clásicamente.
Para toda *asignación A*,
$\mathcal{V}_A(\sim\varphi) \leftrightarrow \sim\mathcal{V}_A(\varphi)$.
La negación interna implica la externa y viceversa

Intuicionistamente.
Para toda $H \in K$,
$\mathcal{B}_H(\sim\varphi) \rightarrow \sim\mathcal{B}_H(\varphi)$.
La negación interna conlleva la externa, y no es el caso que: para todo *modelo* para toda $H \in K$,
$\sim\mathcal{B}_H(\varphi) \rightarrow \mathcal{B}_H(\sim\varphi)$.

En el presente *sistema proposicional intuicionista de Heyting*

$\vdash \sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$

$\vdash \sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$

Para toda *asignación A*,

$\mathcal{V}_A(\sim\sim P \rightarrow P)$.

Para toda $H \in K$,
$\sim\mathcal{B}_H(\sim(\sim\sim P \rightarrow P))$.
Además, para ciertas oraciones simbólicas φ de $\mathcal{L}_p$, $\vdash \sim\sim\varphi \rightarrow \varphi$.

$\mathcal{V}_A(\varphi)$ se lee: *φ es verdad respecto a la asignación A*.
$\mathcal{B}_H(\varphi)$ se lee: *φ es probable en el punto* ***H***.

*　　　*　　　*

En el presente *sistema proposicional intuicionista de Heyting*, la oración simbólica que sea una instancia de cualquiera de las siguientes oraciones simbólicas de $£_p$, también es una instancia que goza de *aserto* del esquema de la ley de doble negación:

(i) $\sim\sim (P \rightarrow \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow \sim Q)$,

(ii) $\sim\sim (\sim P) \rightarrow (\sim P)$ y

(iii) $\sim\sim (\sim P \wedge \sim Q) \rightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$.

A partir de lo anterior delimitamos el dominio de aplicabilidad del esquema de dicha ley, para los siguientes casos: $(\varphi \rightarrow \sim \theta)$, $\sim \varphi$, $(\sim \varphi \wedge \sim \theta)$ -donde tanto φ como θ representan respectivamente, cualquier oración simbólica de $£_p$, la cual, podría representar una proposición ya sea "decidible" ("indecidible"), ya sea sobre conjuntos transfinitos.

Además, a partir de la oración simbólica $\sim\sim (\sim\sim P \rightarrow P)$ derivada en el mencionado sistema proposicional de Heyting, y considerando

(i) la primera interpretación de la definición de *proposición* ***Def.1*** (sección **II.2**) y

(ii) el significado semántico clásico de la negación (sección **III.2**)

expusimos que: la estructura proposicional en el esquema de la ley de doble negación es verdad respecto a cualquier asignación de valores de verdad, si cada una de las *fórmulas axioma* (del *sistema proposicional intuicionista de Heyting*) enuncia la verdad de cualquier instancia de su respectivo esquema (respecto a cualquier *asignación* de valores de verdad).

No obstante, a partir de la oración simbólica $\sim\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$ derivada en el sistema de Heyting, y considerando el significado semántico intuicionista de la negación, obtuvimos que no es el caso que, $\sim(\sim\sim P \rightarrow P)$ *sea probable* en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*.

Queda así examinada la ley de doble negación bajo el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*.

VI. Conclusiones.

En *An Introduction to Logic and Scientific Method*, Cohen expone que una *proposición*, para los propósitos de la lógica, suele definirse como algo que puede decirse que es verdadero o falso (pero no simultáneamente ambos). Lo anterior, suponiendo que la cópula se distribuye sobre cada disyunto, sugirió la siguiente definición:

Def.1. ***Una proposición es*** algo que puede decirse que es verdadero o que es falso (pero no simultáneamente ambos).

A partir de interpretar los términos "puede decirse que es verdadero o que es falso" (en ***Def.1***) refiriéndose a los posibles valores de verdad de una proposición consideramos que: una *asignación* correlaciona a cada letra oración (mínima estructura proposicional de $£_p$ constituyente de oraciones simbólicas), uno y solo un posible valor de verdad (*V*-*F*).

Dado lo anterior, respecto a una asignación *A* de valores de verdad presentamos el significado semántico clásico de los signos lógicos (del lenguaje simbólico $£_p$). Siendo que, en el significado semántico clásico de la negación,

> **predicar la verdad como posibilidad de la negación de una estructura proposicional (respecto a cierta asignación *A*), implica negar el predicar sobre dicha estructura su verdad como posibilidad (respecto *A*), y viceversa.**

Lo precedente fue abreviado como $\mathcal{V}_A\,(\sim\varphi) \leftrightarrow \sim \mathcal{V}_A\,(\varphi)$ -donde $\mathcal{V}_A\,(\varphi)$ se lee: φ *es verdad respecto a la asignación A* (φ representa cualquier oración simbólica de $\pounds_p$). Simplificando lo anterior: **en *el significado semántico clásico de la negación,*** convencionalmente*,* ***la negación interna implica la externa y viceversa***.

En distinción a la precedente interpretación, cuando consideramos

(i) que en la definición de *proposición* (***Def.1***), con los términos "puede decirse que es verdadero o que es falso", exponemos el que se autoriza decir la verdad o en su caso se autoriza decir la falsedad de lo que sería una proposición, y

(ii) que una prueba de cierta proposición matemática autoriza decir la verdad de dicha proposición,

da lugar a interpretar los conectivos lógicos, explícita o implícitamente, a través de *construcciones probatorias*[129].

El considerar la interpretación anterior (de la definición de *proposición*) dio entrada a cierta interpretación intuicionista de los signos lógicos, la cual se extrajo de la presentada por Heytinh en *Intuitionism An Introduction*. Siendo que, en el caso de la interpretación intuicionista de la afirmación de la certeza de la negación de una proposición matemática, dicha interpretación se propuso simbolizarla como:

$$\vdash \sim\varphi \quad \textit{si y solo si} \quad \mathcal{B}\,(\varphi \rightarrow \bot)$$

[129] Heyting llamaría una *prueba* de $\wp$: a una construcción matemática realizada con ciertas propiedades dadas, construcción demandada por una proposición matemática $\wp$. En la presente tesis, lo anterior fue abreviado llamándole *construcción probatoria* de $\wp$.

-donde $\vdash$ es el símbolo para *aserto*, $\mathcal{B}\,(\varphi)$ se lee: φ *es probable*, $\perp$ es la constante de falsedad (lógica) y φ representa cualquier oración simbólica de $\pounds_p$.

A partir de la precedente simbolización, y bajo los axiomas del sistema $\mathcal{G}$ de Gödel (**Apéndice B**), demostramos que:

> **probar la negación de una proposición matemática** (proposición representable a través de una oración simbólica de $\pounds_p$), **conlleva negar que poseemos una construcción probatoria de dicha proposición**.

Lo anterior fue abreviado como $\mathcal{B}\,(\sim\varphi) \;\rightarrow\; \sim \mathcal{B}\,(\varphi)$, de lo que simplificadamente se dijo: la llamada negación interna conlleva la externa. Sin embargo, no es el caso que la negación externa conlleve la interna, cuando $\sim\,(\;\mathcal{B}\,(\sim\sim\varphi) \rightarrow \mathcal{B}\,(\varphi)\;)$. Siendo que esto último simboliza simplificadamente, lo que permitiría afirmar negar que: la *estructura proposicional* presente en el esquema de la ley de doble negación goza de *aserto* (para φ representando una letra oración).

El significado semántico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$, el cual fue presentado directamente de la propuesta de Kripke en *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I*, preserva en cualquier punto de Kripke el resultado exhibido arriba, es decir,

$$\forall H \in K,\; \mathcal{B}_H\,(\sim\varphi) \;\rightarrow\; \sim \mathcal{B}_H\,(\varphi)$$

-donde *K* es un conjunto constituyente de una *estructura modelo* (intuicionista), $\mathcal{B}_H(\varphi)$ se lee : φ *es probable en el punto* ***H*** y φ representa cualquier oración simbólica de $\pounds_p$.

De lo anterior dijimos simplificadamente que: la llamada negación interna conlleva la externa. Sin embargo, existen *modelos intuicionistas* en *estructuras modelo* (**G** , **K** , ***R***), que para cierta **H'**$\in$ **K** es posible no tener una prueba de φ en **H'**, pero tampoco poseer una prueba de $\sim\varphi$ en **H'**. En tales elementos de *K* no es el caso que la llamada negación externa implica la interna, lo que difiere del atributo del significado semántico clásico de la negación, en el cual, ***la negación interna implica la externa y viceversa***.

A partir de lo precedente llegamos a sostener la siguiente **tesis**.

> ***El significado semántico clásico de la negación presenta un atributo, el cual está ausente en ciertos elementos que representan 'situaciones de evidencia', los cuales se exhiben en algunos modelos intuicionistas asumidos en el significado semántico intuicionista de la negación.***

Una vez diferenciado el significado semántico clásico de la negación del significado intuicionista de dicho signo, la ley de doble negación fue examinada bajo el *sistema proposicional intuicionista de Heyting* (apartado **V**). Para dicho examen procedimos como a continuación expongo.

A partir del significado sintáctico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$ (significado bajo los axiomas del cálculo proposicional intuicionista de Heyting), y considerando

(i) la primera interpretación de la definición de *proposición* ***Def.1*** (sección **II.2**) y

(ii) el significado semántico clásico de la negación (sección **III.2**)

expusimos que: la estructura proposicional en el esquema de la ley de doble negación es verdad respecto a cualquier asignación de valores de verdad, si cada una de las *fórmulas axioma*, del *sistema proposicional intuicionista de Heyting*, enuncia la verdad de cualquier instancia de su respectivo esquema –para cualquier *asignación* de valores de verdad.

No obstante lo anterior, a partir del mencionado significado sintáctico, y considerando el significado semántico intuicionista de la negación, obtuvimos que no es el caso que:

> **la negación de la estructura proposicional en el esquema de la ley de doble negación sea probable en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*.**

En relación con lo precedente, a través del *sistema proposicional intuicionista de Heyting* delimitamos el dominio de aplicabilidad, del esquema de la mencionada ley para las siguientes casos:

(i) $\varphi \rightarrow \sim\theta$,

(ii) $\sim\varphi$ y

(iii) $\sim\varphi \wedge \sim\theta$

-donde tanto φ como θ representan respectivamente, cualquier oración simbólica de $\pounds_p$.

Finalizaremos este examen exponiendo algunos comentarios críticos en el siguiente apartado, más antes de ello menciono lo siguiente. El ejemplo examinado, en el cual intuicionistamente falla la ley de doble negación (sección **IV.1**), sugiere un *cálculo descriptivo intuicionista* para abordar adecuadas simbolizaciones de los términos involucrados. Un antecedente en el que se proponen distintos tipos de variables proposicionales para distinguir aquellos juicios los cuales siguen de su doble negación, de los juicios de la llamada *lógica general de juicios*, lo encontramos en Kolmogorov *On the principle of excluded middle*. No obstante, "Debe ser recordado que ningún sistema formal puede probarse representar adecuadamente una teoría intuicionista. Siempre permanece un residuo de ambigüedad en la interpretación de los signos…" [130]

[130] Heyting (1971) p.106 -traducción del autor.

VII. Comentarios críticos.

(I) En la sección **III.4**, directamente de la propuesta de Kripke en *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I* , presentamos el significado semántico intuicionista de los signos lógicos de $\pounds_p$. En dicha propuesta, un *modelo intuicionista* en una *estructura modelo* ($\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{R}$) es cierta función binaria $\phi : \mathcal{P} \times \mathrm{K} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ - donde $\mathcal{P}$ es un conjunto de letras oración de $\pounds_p$, y K es un conjunto en el que cada elemento o punto de Kripke se interpreta como una 'situación de evidencia'.

En relación con lo problemático que podría resultar definir un *modelo intuicionista* (en una *estructura modelo*) como una función binaria ($\phi : \mathcal{P} \times \mathrm{K} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$) comento lo siguiente.

• si ($\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{R}$) es una *estructura modelo* intuicionista y $\phi : \mathcal{P} \times \mathrm{K} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ es un modelo en ($\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{R}$) , entonces $\forall\, P \in \mathcal{P}\ \forall\, \mathbf{H} \in \mathbf{K}$, $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ o $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$.

Demostración.

Sean ($\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{R}$) una *estructura modelo* intuicionista, $\phi : \mathcal{P} \times \mathbf{K} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ un modelo en ($\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{R}$) , $P \in \mathcal{P}$ y $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$. Demostremos que $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ o $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$.

Como $P \in \mathcal{P}$ y $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$, $(P, \mathbf{H}) \in \mathcal{P} \times \mathbf{K}$. De ello, y dado que ϕ es una función de $\mathcal{P} \times \mathbf{K}$ a $\{ \mathbf{V}, \mathbf{F} \}$, obtenemos que $\phi(P, \mathbf{H}) \in \{ \mathbf{V}, \mathbf{F} \}$ [131]. De esto último, $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ o $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$ [132], que es lo que queríamos demostrar.

• De lo demostrado, si probásemos que cierta terna $(\mathbf{G} , \mathbf{K} , \boldsymbol{R})$ es una *estructura modelo* intuicionista y $\phi : \mathcal{P} \times \mathbf{K} \rightarrow \{ \mathbf{V}, \mathbf{F} \}$ un modelo en $(\mathbf{G} , \mathbf{K} , \boldsymbol{R})$, entonces quedaría probado $\forall\, P \in \mathcal{P}\ \forall\, \mathbf{H} \in \mathbf{K}$, $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ o $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$. De ello (y bajo tal condición), $\forall\, P \in \mathcal{P}\ \forall\, \mathbf{H} \in \mathbf{K}$, P es probable en $\mathbf{H}$ o no es el caso que, P es probable en $\mathbf{H}$ [133]. Siendo que, la disyunción anterior es una instancia de la ley del tercio excluso, para cierta ampliación del lenguaje $\pounds_{\boldsymbol{p}}$.

• Por lo anterior, definir un *modelo intuicionista* (en una *estructura modelo*) como una función binaria $\phi : \mathcal{P} \times \mathbf{K} \rightarrow \{ \mathbf{V}, \mathbf{F} \}$, bajo la prueba de ciertas condiciones, involucra una instancia de la ley del tercio excluso, cuyo respectivo principio es "rechazado" en el intuicionismo lógico.

---

[131] Como $(P, \mathbf{H}) \in \mathcal{D}om\phi$ y $\mathcal{C}od\phi = \{ \phi(P, \mathbf{H}) \mid (P, \mathbf{H}) \in \mathcal{D}om\phi \}$ (cf. Amor (1997) p.27) , $\phi(P, \mathbf{H}) \in \mathcal{C}od\phi$, es decir, $\phi(P, \mathbf{H}) \in \{ \mathbf{V}, \mathbf{F} \}$.

[132] Como $\phi(P, \mathbf{H}) \in \{ \mathbf{V}, \mathbf{F} \}$ y $\phi(P, \mathbf{H}) \in \{ \mathbf{V}, \mathbf{F} \} \Leftrightarrow (\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V} \vee \phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{F})$ (cf. Amor (1997) p.3) obtenemos que $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ o $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$.

[133] Para tal inferencia (implícitamente) consideramos que el axioma $\mathcal{G}_1 : \mathcal{B}(P) \rightarrow P$ (del sistema $\mathcal{G}$ de Gödel -**Apéndice B**) es aplicable para un lenguaje ampliado simbólicamente. Así si $\ulcorner\ \forall\, P \in \mathcal{P}\ \forall\, \mathbf{H} \in \mathbf{K}$, $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ o $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{F}\ \urcorner$ *es probable*, entonces $\forall\, P \in \mathcal{P}\ \forall\, \mathbf{H} \in \mathbf{K}$, $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{V}$ o $\phi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$.

(II) En la literatura existen ciertas traducciones de nociones clásicas de signos lógicos a nociones intuicionistas[134], así como correspondencias de fórmulas elementales con fórmulas de la *pseudomatematica*[135], las cuales (implícitamente) involucran la ley de doble negación "rechazada" en el intuicionismo lógico. Por ejemplo: traducir $P \rightarrow Q$ como $\sim (P \wedge \sim Q)$ [136] involucra la ley de doble negación, pues bajo los axiomas del *sistema proposicional intuicionista de Heyting*:

$$\vdash (\sim\sim P \rightarrow P) \quad \text{si y solo si} \quad \vdash (\sim (P \wedge \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)).$$

Demostración.

$\Rightarrow$] Supongamos que $\vdash (\sim\sim P \rightarrow P)$.

Como $\vdash ((\sim (P \wedge Q) \wedge P) \rightarrow \sim Q)$ [137] y

$\vdash (((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R)))$ [138] obtenemos que

$\vdash (\sim (P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow \sim Q))$.

De esto último y el supuesto inicial,

$\vdash (\sim (P \wedge \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow Q))$.

---

[134] "…si traducimos respectivamente las nociones clásicas $\sim p$, $p \rightarrow q$, $p \vee q$, $p \bullet q$ por las siguientes nociones intuicionistas $\neg p$, $\neg (p \wedge \neg q)$, $\neg (\neg p \wedge \neg q)$, $p \wedge q$, entonces cualquier fórmula clásica [[válida]] también se sostiene en [el cálculo proposicional intuicionista] *H*." (Gödel (1986a) p.287).

Notemos que en el antecedente anterior se deja corresponder la negación ($\sim$) con lo absurdo ($\neg$).

[135] Cf. Kolmogorov (1981) pp.427-428.

[136] En relación con la traducción propuesta considérese lo siguiente.

"Hablando desde la hermenéutica, para aplicarle el tamiz de la epistemología, hay tres tipos principales de interpretación: la interpretación-lectura, la interpretación-explicación y la interpretación que es al mismo tiempo lectura y explicación." (Beuchot (1990) p.28).

En la interpretación que es al mismo tiempo lectura y explicación suele decirse: *A* si y solo si *B*, donde lo inobservable *B* es simultáneamente condición necesaria y suficiente para lo observable *A*. (Cf. Beuchot (1990) pp. 28 y 31).

En consideración a lo anterior, y dado que traducir "$P \rightarrow Q$" como "$\sim (P \wedge \sim Q)$" da lugar a interpretar (explicar) "$P \rightarrow Q$" como "$\sim (P \wedge \sim Q)$", hay viabilidad de que en dicha traducción se diga: "$P \rightarrow Q$ *si y solo si* $\sim (P \wedge \sim Q)$", donde "$\sim (P \wedge \sim Q)$" es condición necesaria y suficiente para "$P \rightarrow Q$". De ello, "$\sim (P \wedge \sim Q)$" es condición suficiente para "$P \rightarrow Q$".

[137] Cf. Heyting (1971) p.105.

[138] Cf. Gentzen (1969) p.58.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\vdash (\sim (P \wedge \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow Q))$.

De ello, $\vdash (\sim (\sim\sim P \wedge \sim P) \rightarrow (\sim\sim P \rightarrow P))$.

Además, $\vdash \sim (\sim\sim P \wedge \sim P)$ [139].

De lo anterior, $\vdash (\sim\sim P \rightarrow P)$.

[139] Para establecer que dicha fórmula goza de *aserto* considérese que del axioma A_{11} (del *sistema proposicional intuicionista de Heyting*) obtenemos que
$\vdash (((\sim\sim P \wedge \sim P \rightarrow \sim P) \wedge (\sim\sim P \wedge \sim P \rightarrow \sim\sim P)) \rightarrow \sim (\sim\sim P \wedge \sim P))$.

(III) En relación con la problemática que puede presentarse cuando consideramos (simultáneamente) traducciones de la noción de negación de Heyting a distintas *fórmulas modales* comento lo siguiente.

En *An interpretation of the intuitionistic propositional calculus*, Gödel expone que

> "Uno puede interpretar el cálculo proposicional de Heyting por medio de las nociones del cálculo proposicional ordinario y la noción 'P es probable' (escrita $\mathcal{B}(P)$)…"[140], si uno adopta el sistema de axiomas $\mathcal{G}$ para tal noción (entre otras consideraciones)[141].

En adición a lo anterior, Gödel traduce la noción primitiva de Heyting $\neg P$ como $\sim \mathcal{B}(P)$. Además comenta que "Uno también puede traducir con igual éxito $\neg P$ por $\mathcal{B}(\sim \mathcal{B}(P))$ …" [142].

En relación con las traducciones de $\neg P$ a las *fórmulas modales* anteriormente expuestas notemos lo siguiente.

- Si cada una de las traducciones precedentes es considerada una interpretación, interpretación que al mismo tiempo sea lectura y explicación [143], entonces decimos:

[140] Gödel (1986b) p.301. En la presente cita omití la nota al pie del texto original.
[141] Cf. Gödel (1986b) p.301.
[142] Gödel (1986b) p.301.
[143] Cf. nota al pie 136.

(i) $\neg P$ si y solo si $\sim \mathcal{B}\,(P)$

-donde $\sim \mathcal{B}\,(P)$ es simultáneamente condición necesaria y suficiente para $\neg P$, y

(ii) $\neg P$ si y solo si $\mathcal{B}\,(\sim \mathcal{B}\,(P))$

-donde $\mathcal{B}\,(\sim \mathcal{B}\,(P))$ es simultáneamente condición necesaria y suficiente para $\neg P$.

- De lo anterior, y dado que para algunos autores "…una prueba de $\neg \boldsymbol{\Phi}$ es una prueba de que no puede haber una prueba de $\boldsymbol{\Phi}$" [144], obtendríamos que

$$\sim \mathcal{B}\,(P) \quad \text{si y solo si} \quad \mathcal{B}\,(\neg P)$$

- donde $\sim \mathcal{B}\,(P)$ es tanto condición necesaria como suficiente para $\mathcal{B}\,(\neg P)$.

- De lo precedente, e identificando $\neg$ con $\sim$ [145], concluiríamos que

si consideramos simultáneamente las expuestas traducciones (de la noción de negación de Heyting a las *fórmulas modales* anteriormente expuestas), el atributo (***la negación interna implica la externa y viceversa***) con que diferenciamos el significado semántico clásico de la negación del significado semántico intuicionista sería un atributo compartido por ambos significados [146].

[144] Shapiro (1997) p.206.

[145] Si consideramos el atributo con que diferenciamos el significado semántico clásico de la negación, del significado semántico intuicionista de dicho signo, entonces tendríamos que oponernos a identificar la negación clásica con la intuicionista.

No obstante lo anterior, "…en cualquier lenguaje que contiene dos negaciones, ambas cumpliendo las reglas de introducción y eliminación normales, las dos negaciones serían interderivables, a pesar de que otras reglas estén presentes." (Cook (2005) p.396).

En consideración a lo precedente, en lo que respecta al significado sintáctico de la negación, parecería que en los lenguajes mencionados en el párrafo anterior podríamos identificar $\neg$ con $\sim$.

[146] Extendiendo $\sim \mathcal{B}\,(P)$ *si y solo si* $\mathcal{B}\,(\sim P)$, para $\mathcal{B}_H\,(P)$ en lugar de $\mathcal{B}\,(P)$

-donde $\mathcal{B}_H\,(P)$ se lee: *P es probable en el punto **H***.

Sin embargo, el consecuente anterior es insostenible, ya que:

(i) existen *modelos intuicionistas* en *estructuras modelo* (**G** , **K** , ***R***), que para cierta **H'**$\in$ **K** es posible no tener una prueba de *P* en **H'** , pero tampoco poseer una prueba de $\sim P$ en **H'** [147] , y

(ii) si no tenemos una prueba de *P* en **H'** y tampoco una prueba de ~*P* en **H'**, entonces no es el caso que la negación externa (no es el caso que, *P* es probable en **H'**) conlleva la interna (~*P* es probable en **H'**) [148].

147 Cf. sección **III.4**.
148 Cf. sección **III.4**.

APÉNDICE A.

A continuación presento la derivación "simplificada" (en el *sistema proposicional intuicionista de Heyting*) tanto de $\sim\sim(\sim\sim A \rightarrow A)$ como de $\sim\sim(A \rightarrow \sim B) \rightarrow (A \rightarrow \sim B)$ considerando para ello, los siguientes teoremas que también son derivables en dicho sistema[149]:

T1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$
T2 $(A \wedge B) \rightarrow A$
T3 $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
T4 $A \rightarrow \sim\sim A$
T5 $\sim\sim(\sim A \vee \sim\sim A)$
T6 $(\sim\sim A \wedge (A \rightarrow \sim B)) \rightarrow \sim B$
T7 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow B)$
T8 $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$
T9 $\sim(A \wedge B) \rightarrow (B \rightarrow \sim A)$

Derivación de $\sim\sim(\sim\sim A \rightarrow A)$.

1	$A \rightarrow (\sim\sim A \rightarrow A)$	**A5**
2	$\{A \rightarrow (\sim\sim A \rightarrow A)\} \rightarrow \{\sim(\sim\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim A\}$	**T1**
3	$\sim(\sim\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim A$	**MP 1, 2**
4	$\{\sim(\sim\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim A\} \rightarrow \{\sim\sim A \rightarrow \sim\sim(\sim\sim A \rightarrow A)\}$	**T1**
5	$\sim\sim A \rightarrow \sim\sim(\sim\sim A \rightarrow A)$	**MP 3, 4**
6	$\{(\sim A \wedge \sim\sim A) \rightarrow \sim A \quad \wedge \quad (\sim A \wedge \sim\sim A) \rightarrow \sim\sim A\} \rightarrow \sim(\sim A \wedge \sim\sim A)$	**A11**
7	$(\sim A \wedge \sim\sim A) \rightarrow \sim A$	**T2**
8	$(\sim A \wedge \sim\sim A) \rightarrow (\sim\sim A \wedge \sim A)$	**A2**
9	$(\sim\sim A \wedge \sim A) \rightarrow \sim\sim A$	**T2**
10	$\{(\sim A \wedge \sim\sim A \rightarrow \sim\sim A \wedge \sim A) \wedge (\sim\sim A \wedge \sim A \rightarrow \sim\sim A)\} \rightarrow \{\sim A \wedge \sim\sim A \rightarrow \sim\sim A\}$	**A4**

[149] Algunas de los teoremas expuestos se presentan en la literatura (cf. Gentzen (1969) p.58). Además, cada una de las letras capitales ***A***, ***B*** y ***C*** en lo que sigue representa una letra oración (variable proposicional) de $\pounds_p$.

11 $[\{(\sim A\wedge\sim\sim A \rightarrow \sim\sim A\wedge\sim A)\wedge(\sim\sim A\wedge \sim A \rightarrow \sim\sim A)\}\rightarrow(\sim A\wedge \sim\sim A \rightarrow \sim\sim A)]$
$\rightarrow[(\sim A\wedge\sim\sim A \rightarrow \sim\sim A \wedge\sim A)\rightarrow\{(\sim\sim A \wedge \sim A \rightarrow \sim\sim A)\rightarrow(\sim A\wedge \sim\sim A \rightarrow \sim\sim A)\}]$ T3

12 $(\sim A \wedge\sim\sim A \rightarrow \sim\sim A \wedge\sim A)\rightarrow\{(\sim\sim A \wedge\sim A \rightarrow\sim\sim A)\rightarrow(\sim A \wedge\sim\sim A\rightarrow\sim\sim A)\}$ MP 10,11

13 $(\sim\sim A \wedge\sim A \rightarrow \sim\sim A) \rightarrow (\sim A \wedge\sim\sim A \rightarrow \sim\sim A)$ MP 8, 12

14 $(\sim A \wedge \sim\sim A) \rightarrow \sim\sim A$ MP 9,13

15 $[\{(\sim A \wedge\sim\sim A \rightarrow \sim A) \wedge (\sim A \wedge\sim\sim A \rightarrow \sim\sim A)\} \rightarrow \sim(\sim A \wedge \sim\sim A)]$
$\rightarrow [(\sim A \wedge\sim\sim A \rightarrow \sim A) \rightarrow \{(\sim A \wedge\sim\sim A \rightarrow \sim\sim A) \rightarrow \sim(\sim A \wedge \sim\sim A)\}]$ T3

16 $(\sim A \wedge\sim\sim A \rightarrow \sim A) \rightarrow \{(\sim A \wedge \sim\sim A \rightarrow \sim\sim A) \rightarrow \sim(\sim A \wedge\sim\sim A)\}$ MP 6,15

17 $(\sim A \wedge \sim\sim A \rightarrow \sim\sim A) \rightarrow \sim(\sim A\wedge\sim\sim A)$ MP 7,16

18 $\sim(\sim A \wedge \sim\sim A)$ MP 14,17

19 $\sim(\sim A \wedge \sim\sim A) \rightarrow ((\sim A \wedge\sim\sim A) \rightarrow A)$ A10

20 $(\sim A \wedge \sim\sim A) \rightarrow A$ MP 18,19

21 $\{((\sim A \wedge\sim\sim A) \rightarrow A)\} \rightarrow \{\sim A \rightarrow (\sim\sim A \rightarrow A)\}$ T3

22 $\sim A \rightarrow (\sim\sim A \rightarrow A)$ MP 20,21

23 $(\sim\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim\sim(\sim\sim A \rightarrow A)$ T4

24 $\{\sim A \rightarrow(\sim\sim A \rightarrow A)\wedge(\sim\sim A\rightarrow A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A \rightarrow A)\}\rightarrow\{\sim A\rightarrow \sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}$ A4

25 $[\{\sim A\rightarrow(\sim\sim A \rightarrow A)\wedge(\sim\sim A\rightarrow A)\rightarrow \sim\sim(\sim\sim A \rightarrow A)\}\rightarrow\{\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}]$
$\rightarrow[(\sim A\rightarrow(\sim\sim A\rightarrow A))\rightarrow\{((\sim\sim A\rightarrow A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\rightarrow(\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\}]$ T3

26 $\{\sim A\rightarrow(\sim\sim A\rightarrow A)\}\rightarrow\{((\sim\sim A\rightarrow A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\rightarrow(\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\}$ MP24,25

27 $\{(\sim\sim A\rightarrow A) \rightarrow \sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\} \rightarrow \{\sim A \rightarrow \sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}$ MP22,26

28 $\sim A \rightarrow \sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)$ MP23,27

29 $\{\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\wedge\sim\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}\rightarrow\{(\sim A\vee \sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}$ A9

30 $[\{\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\wedge\sim\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}\rightarrow\{(\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}]$
$\rightarrow[(\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\rightarrow\{(\sim\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\rightarrow((\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\}]$ **T3**

31 $\{\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}\rightarrow\{(\sim\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\rightarrow((\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\}$ **MP29,30**

32 $\{\sim\sim A\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}\rightarrow\{(\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}$ **MP28,31**

33 $(\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)$ **MP5,32**

34 $\sim\sim(\sim A\vee\sim\sim A)$ **T5**

35 $[\sim\sim(\sim A\vee\sim\sim A)\wedge\{(\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}]\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)$ **T6**

36 $[\{\sim\sim(\sim A\vee\sim\sim A)\wedge((\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\}\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)]$
$\rightarrow[\sim\sim(\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\{((\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A))\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}]$ **T3**

37 $\sim\sim(\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow[\{(\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)]$ **MP35,36**

38 $\{(\sim A\vee\sim\sim A)\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)\}\rightarrow\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)$ **MP34,37**

39 $\sim\sim(\sim\sim A\rightarrow A)$ **MP33,38**

Derivación de $\sim\sim(A\rightarrow\sim B)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)$

1 $A\wedge B\rightarrow B\wedge A$ **A2**

2 $B\wedge A\rightarrow B$ **T2**

3 $\{A\wedge B\rightarrow B\wedge A\quad\wedge\quad B\wedge A\rightarrow B\}\rightarrow(A\wedge B\rightarrow B)$ **A4**

4 $[\{A\wedge B\rightarrow B\wedge A\quad\wedge\quad B\wedge A\rightarrow B\}\rightarrow(A\wedge B\rightarrow B)]\rightarrow$
$[(A\wedge B\rightarrow B\wedge A)\rightarrow\{(B\wedge A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge B\rightarrow B)\}]$ **T3**

5 $(A\wedge B\rightarrow B\wedge A)\rightarrow\{(B\wedge A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge B\rightarrow B)\}$ **MP3,4**

6 $(B\wedge A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge B\rightarrow B)$ **MP1,5**

7 $A\wedge B\rightarrow B$ **MP2,6**

8 $B \to \{ (A \to \sim B) \to B \}$ A5

9 $[A \wedge B \to B \wedge B \to \{ (A \to \sim B) \to B \}] \to [A \wedge B \to \{ (A \to \sim B) \to B \}]$ A4

10 $[\{ A \wedge B \to B \wedge B \to \{ (A \to \sim B) \to B \}\} \to \{ A \wedge B \to ((A \to \sim B) \to B) \}] \to$
$[(A \wedge B \to B) \to \{(B \to \{ (A \to \sim B) \to B \}) \to [A \wedge B \to ((A \to \sim B) \to B)] \}]$ T3

11 $(A \wedge B \to B) \to \{(B \to \{(A \to \sim B) \to B\}) \to [A \wedge B \to ((A \to \sim B) \to B)]\}$ MP9,10

12 $[B \to \{ (A \to \sim B) \to B \}] \to [A \wedge B \to \{ (A \to \sim B) \to B \}]$ MP7,11

13 $A \wedge B \to \{ (A \to \sim B) \to B \}$ MP8,12

14 $\{ A \wedge A \to \sim B \} \to \sim B$ A6

15 $[\{ A \wedge A \to \sim B \} \to \sim B] \to [A \to \{ (A \to \sim B) \to \sim B \}]$ T3

16 $A \to \{ (A \to \sim B) \to \sim B \}$ MP14,15

17 $[A \to \{ (A \to \sim B) \to \sim B \}] \to [(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to \sim B \}]$ T7

18 $(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to \sim B \}$ MP16,17

19 $[(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to B \} \wedge (A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to \sim B \}] \to$
$[(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to B \wedge (A \to \sim B) \to \sim B \}]$ T8

20 $\{ [(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to B \} \wedge (A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to \sim B \}] \to$
$[(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to B \wedge (A \to \sim B) \to \sim B \}] \}$
$\to$
$\{ [(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to B \}] \to [\{ (A \wedge B) \to ((A \to \sim B) \to \sim B) \} \to$
$\{ (A \wedge B) \to [(A \to \sim B) \to B \wedge (A \to \sim B) \to \sim B] \}] \}$ T3

21 $[(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to B \}] \to \{ [(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to \sim B \}] \to$
$[(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to B \wedge (A \to \sim B) \to \sim B \}] \}$ MP19,20

22 $[(A \wedge B) \to \{ (A \to \sim B) \to \sim B \}] \to$
$\{ (A \wedge B) \to [(A \to \sim B) \to B \wedge (A \to \sim B) \to \sim B] \}$ MP13,21

23 $(A\wedge B) \rightarrow [\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim B\ ]$ **MP18,22**

24 $\{\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow\sim B\ \} \rightarrow \sim(A\rightarrow\sim B)$ **A11**

25 $\{\ (A\wedge B) \rightarrow [\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim B\ ] \quad \wedge$
$[\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim B\ ] \rightarrow \sim(A\rightarrow\sim B)\ \} \rightarrow$
$\{\ (A \wedge B) \rightarrow \sim(A\rightarrow \sim B)\ \}$ **A4**

26 $\{\ [\ (A\wedge B) \rightarrow \{\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim B\ \} \quad \wedge$
$\{\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim B\ \} \rightarrow \sim(A\rightarrow\sim B)\ ] \rightarrow$
$(\ (A\wedge B) \rightarrow \sim(A\rightarrow\sim B)\ )\ \}$
$\rightarrow$
$[\ [\ (A\wedge B) \rightarrow \{\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim B\ \}\ ] \rightarrow$
$\{\ [\ \{\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim B\ \} \rightarrow \sim(A\rightarrow\sim B)\ ] \rightarrow$
$(\ (A\wedge B) \rightarrow \sim(A\rightarrow\sim B)\ )\ \}\ ]$ **T3**

27 $[\ (A\wedge B) \rightarrow \{\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim B\ \}\ ] \rightarrow$
$\{\ [\ \{\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim B\ \} \rightarrow \sim(A\rightarrow\sim B)\ ] \rightarrow$
$(\ (A\wedge B) \rightarrow \sim(A\rightarrow\sim B)\ )\ \}$ **MP25,26**

28 $[\ \{\ (A\rightarrow\sim B) \rightarrow B \quad \wedge \quad (A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim B\ \} \rightarrow \sim(A\rightarrow\sim B)\ ] \rightarrow$
$\{\ (A\wedge B) \rightarrow \sim(A\rightarrow\sim B)\ \}$ **MP23,27**

29 $(A \wedge B) \rightarrow \sim(A \rightarrow \sim B)$ **MP24,28**

30 $\{\ (A \wedge B) \rightarrow \sim(A \rightarrow \sim B)\ \} \rightarrow \{\ \sim\sim(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)\ \}$ **T1**

31 $\sim\sim(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$ **MP29,30**

32 $(B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$ **A2**

33 $\{\ (B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)\ \} \rightarrow \{\ \sim(A \wedge B) \rightarrow \sim(B \wedge A)\ \}$ **T1**

34 $\sim(A \wedge B) \rightarrow \sim(B \wedge A)$ **MP32,33**

35 $\sim(B \wedge A) \rightarrow (A \rightarrow \sim B)$ **T9**

36 $[\sim(A\wedge B)\rightarrow \sim(B\wedge A) \ \wedge\ \sim(B\wedge A)\rightarrow (A\rightarrow\sim B)] \rightarrow [\sim(A\wedge B) \rightarrow (A\rightarrow\sim B)]$ **A4**

37 $\{[\sim(A\wedge B)\rightarrow \sim(B\wedge A) \wedge \sim(B\wedge A)\rightarrow (A\rightarrow\sim B)]\rightarrow[\sim(A\wedge B) \rightarrow (A\rightarrow\sim B)]\}$

$\rightarrow$

$\{[\sim(A\wedge B)\rightarrow \sim(B\wedge A)]\rightarrow[\{\sim(B\wedge A) \rightarrow (A\rightarrow\sim B)\}\rightarrow\{\sim(A\wedge B) \rightarrow (A\rightarrow\sim B)\}]\}$ T3

38 $[\sim(A\wedge B)\rightarrow\sim(B\wedge A)]\rightarrow[\{\sim(B\wedge A)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)\}\rightarrow\{\sim(A\wedge B)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)\}]$ MP36,37

39 $\{\sim(B\wedge A) \rightarrow (A\rightarrow\sim B)\}\rightarrow\{\sim(A\wedge B) \rightarrow (A\rightarrow\sim B)\}$ MP34,38

40 $\sim(A\wedge B) \rightarrow (A\rightarrow\sim B)$ MP35,39

41 $[\sim\sim(A\rightarrow\sim B)\rightarrow\sim(A\wedge B) \wedge \sim(A\wedge B)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)]\rightarrow[\sim\sim(A\rightarrow\sim B)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)]$ A4

42 $\{[\sim\sim(A\rightarrow\sim B)\rightarrow\sim(A\wedge B) \wedge \sim(A\wedge B)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)]\rightarrow[\sim\sim(A\rightarrow\sim B)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)]\}$

$\rightarrow$

$\{[\sim\sim(A\rightarrow\sim B)\rightarrow\sim(A\wedge B)]\rightarrow\{[\sim(A\wedge B)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)]\rightarrow[\sim\sim(A\rightarrow\sim B)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)]\}\}$ T3

43 $[\sim\sim(A\rightarrow\sim B) \rightarrow \sim(A\wedge B)]\rightarrow$
$[\{\sim(A\wedge B) \rightarrow (A\rightarrow\sim B)\} \rightarrow \{\sim\sim(A\rightarrow\sim B) \rightarrow (A\rightarrow\sim B)\}]$ MP41,42

44 $\{\sim(A\wedge B)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)\}\rightarrow\{\sim\sim(A\rightarrow\sim B)\rightarrow(A\rightarrow\sim B)\}$ MP31,43

45 $\sim\sim(A\rightarrow\sim B) \rightarrow (A\rightarrow\sim B)$ MP40,44

APÉNDICE B.

Una interpretación del cálculo proposicional intuicionista ·*.

Uno puede interpretar [150] el cálculo proposicional de Heyting por medio de las nociones del cálculo proposicional ordinario y la noción "*P* es probable" (escrita $\mathcal{B}(P)$), si uno adopta el siguiente sistema de axiomas $\mathcal{G}$ para tal noción:

$\mathcal{G}_1$. $\mathcal{B}(P) \rightarrow P$,

$\mathcal{G}_2$. $\mathcal{B}(P) \rightarrow (\mathcal{B}(P \rightarrow Q) \rightarrow \mathcal{B}(Q))$,

$\mathcal{G}_3$. $\mathcal{B}(P) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{B}(P))$.

Además, para las nociones $\rightarrow, \sim, \cdot, \vee$, serán adoptados los axiomas y reglas de inferencia del cálculo proposicional ordinario, así como también la nueva regla de inferencia: De *P*, $\mathcal{B}(P)$ puede ser inferida.

Las nociones primitivas de Heyting serán traducidas como sigue:

$\neg P$	$\sim \mathcal{B}(P)$
$P \supset Q$	$\mathcal{B}(P) \rightarrow \mathcal{B}(Q)$
$P \vee Q$	$\mathcal{B}(P) \vee \mathcal{B}(Q)$
$P \wedge Q$	$P \cdot Q$.

·*Traducción (del autor) de *An interpretation of the intuitionistic propositional calculus* (obra publicada en Gödel (1986b) pp.301 y 303).

[150] Kolmogorov (*1932*) ha dado una interpretación algo diferente del cálculo proposicional intuicionista, sin estar seguro, especificando un formalismo preciso.

Uno también puede traducir con igual éxito $\neg P$ por $\mathcal{B}(\sim\mathcal{B}(P))$ y $P \wedge Q$ por $\mathcal{B}(P) \cdot \mathcal{B}(Q)$. La traducción de una fórmula arbitraria que se sostiene en el sistema de Heyting es derivable en $\mathcal{G}$; por otro lado, la traducción de $P \vee \sim P$ no es derivable en $\mathcal{G}$; ni en general lo es cualquier fórmula de la forma $\mathcal{B}(P) \vee \mathcal{B}(Q)$ para la cual ni $\mathcal{B}(P)$ ni $\mathcal{B}(Q)$ es ya probado en $\mathcal{G}$. Presumiblemente en el cálculo de Heyting se sostiene una fórmula si y solo si su traducción es probable en $\mathcal{G}$.

El sistema $\mathcal{G}$ es equivalente al sistema de la implicación estricta de Lewis si $\mathcal{B}(P)$ es traducido por $\mathcal{N}(P)$ (ver *Parry 1933a*), y uno aumenta el sistema de Lewis de acuerdo al siguiente axioma adicional de Becker [151]: $\mathcal{N}(P) < \mathcal{N}(\mathcal{N}(P))$.

Debe ser notado que para la noción " probable en cierto sistema formal S", no todas las fórmulas probables en $\mathcal{G}$ se sostienen. Por ejemplo, $\mathcal{B}(\mathcal{B}(P) \rightarrow P)$ nunca se sostiene par tal noción, es decir, para ningún sistema S que contiene aritmética se sostiene. Pues de otro modo, por ejemplo, $\mathcal{B}(0 \neq 0) \rightarrow 0 \neq 0$ y por lo tanto también $\sim\mathcal{B}(0 \neq 0)$ sería probable en S, es decir, la consistencia de S sería probable en S.

[151] *Becker 1930*, p.497.

BIBLIOGRAFÍA.

- **Alchourrón** C. "Concepciones de la lógica" en Alchourrón C., Méndez J.M. y Orayen R. (editores). *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Lógica*. Tomo 7. Editorial Trotta. España. 1995. Pp.11-47.

- **Awodey** S. *Category Theory* en ftp://sumin.in.ua/Books/.../Awodey_S._Category_Theory. E.U.A. 2005.

- **Amor** J.A. *TEORÍA DE CONJUNTOS Para estudiantes de ciencias*. Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M. Primera edición. Impreso y hecho en México. 1997.

- **Beuchot** M. y **Blanco** R. (compiladores). *HERMENÉUTICA, PSICOANÁLISIS Y LITERATURA*. Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Investigaciones Filológicas. Impreso y hecho en México. 1990.

- **Blackburn** P. y **Benthem** J. van "Modal Logic: A Semantic Perspective" en Blackburn P. y otros (editores) "Handbook of Modal Logic" en Gabbay D.M. y otros (editores) *Studies in Logic and Practical Reasoning*. Vol. 3. Elsevier. Primera edición. Reimpresión. Impreso y encuadernado en Hungría. 2007. Pp.1-84.

- **Brouwer** J.E. "Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe" en *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. 33. 1925. Primera sección. Pp.251-256.

- **Brouwer** J.E. "Consciousness, philosophy, and mathematics" en Benacerraf P. (editor) *Philosophy of mathematics: selected readings*. Cambridge University Press. E.U.A. 1983. Pp.90-96.

- **Brouwer** J.E. "On the significance of the principle of excluded middle in mathematics, especially in function theory" en Van Heijenoort J.(compilador) *From Frege to Gödel*. Harvard University Press. Cuarta impresión. E.U.A. 1981a. Pp.334-345.

- **Brouwer** J.E. “Intuitionistic reflections on formalism” en Van Heijenoort J.(compilador) *From Frege to Gödel*. Harvard University Press. Cuarta impresión. E.U.A. 1981b. Pp.490-492.

- **Carnap** R. *Pseudoproblemas en la Filosofía. La psique ajena y la controversia sobre el realismo*. Traducción de Mues L. Instituto de Investigaciones Filosóficas. Universidad Nacional Autónoma de México. Cuaderno 54. Primera edición en español. México.1990.

- **Carnap** R. “La superación de la metafísica mediante el análisis lógico del lenguaje” en Ayer A. (compilador) *The logical positivism*. Editorial Free Press. Nueva York. 1959. Traducido al castellano como *El positivismo lógico*. Editorial Fondo de Cultura Económica. México. 1965. Pp.66-87.

- **Cogburn** J. y **Cook** R.“What negation is not: intuitionism and ‘0=1’” en *Analysis* 60.1, Enero. 2000. Pp. 5-12.

- **Cohen** M. y **Nagel** E. *An Introduction to Logic and Scientific Method*. Harcourt, Brace and World, Inc. Nueva York. 1934.

- **Cook** R. “Intuitionism Reconsidered”. Capítulo 11 en Shapiro S. (editor). *The Oxford Handbook of Philosophy of Math and Logic*. Impreso en E.U.A. 2005. Pp.387-411.

- **Ditmarsch** H. van y otros. *Dynamic Epistemic Logic*. Synthese Library. Vol.337. Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science. Springer. Holanda. 2008.

- **Dummett** M. *Truth and other enigmas*. Gerald Ducnwoth and Company Ltd. Londres 1978. Traducido al castellano como *La verdad y otros enigmas*. Traducción de Herrera A. Editorial Fondo de Cultura Económica. Primera edición. Impreso en México. 1990.

- **Dummett** M. *Elements of Intuitionism***.** Clarendon Press. Oxford. Primera edición. Reimpresión. Gran Bretaña. 1978.

- **Gentzen** G. "On the relation between intuitionist and classical arithmetic" en Szabo M.E.(editor) "The Collected Papers of Gerhand Gentzen" en Heyting A. y otros (editores) *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Company. Impreso en Holanda. 1969. Pp.53-67.

- **Gödel** K. "On intuitionistic arithmetic and number theory" en Gödel K. *Collected Works*. *Volume I. Publications 1929-1936* Oxford University Press. E.U.A. 1986a. Pp. (non) 287-295.

- **Gödel** K. "An interpretation of the intuitionistic propositional calculus" en Gödel K. *Collected Works*. *Volume I. Publications 1929-1936* Oxford University Press. E.U.A. 1986b. Pp.301 y 303.

- **Heyting** A. " Intuitionism. An Introduction" en Brouwer J.E. y otros (editores) *Studies in Logic and Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Company. Tercera edición. Holanda. 1971.

- **Kalish** D. y otros. *Logic Techniques of Formal Reasoning*. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. Segunda edición. Impreso en E.U.A. 1980.

- **Kolmogorov** N. "On the principle of excluded middle" en Van Heijenoort J.(compilador) *From Frege to Gödel*. Harvard University Press. Cuarta impresión. E.U.A. 1981. Pp.414-437.

- **Kripke** S. "Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I" en Crossley J. y Dummett M. "Formal Systems and Recursive Functions. Proceedings of the eighth Logic Colloquium Oxford, July 1963" en Brouwer J.E. y otros (editores) *Studies in Logic and the foundations of mathematics*. North-Holland Publishing Company. Impreso en Holanda. 1965. Pp.92-130.

- **Paulín G.** *Rudimentos del Lenguaje Articulado (Apuntes para el estudiante de Comunicación)*. Facultad de Ciencias Políticas y Sociales. Primera edición. Impreso y hecho en México. 2006.

- **Posy** C. “Intuitionism and Philosophy” Capítulo 9. en Shapiro S.(editor) *The Oxford Handbook of Philosophy of Math and Logic*. Impreso en E.U.A. 2005. Pp.318-355.

- **Shapiro** S. *Philosophy of Mathematics*. Oxford University Press. Impreso en E.U.A. 1997.

- **Troelstra**. “Introductory note to 1933f” en Van Heijenoort J.(compilador) *From Frege to Gödel*. Harvard University Press. Cuarta impresión. E.U.A. 1981. Pp.296-299.

- **Van Heijenoort J**.(compilador) *From Frege to Gödel*. Harvard University Press. Cuarta impresión. E.U.A. 1981.