UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

SUPERVARIEDADES

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

OSCAR FRANCISCO GUAJARDO GARZA

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. GREGOR WEINGART

MÉXICO, D.F. FEBRERO, 2012

Este trabajo está dedicado a Paulina de la Luz Contreras Rosales.
Ella sabe por qué.

Índice general

Agradecimientos

All that is gold does not glitter;
not all those who wander are lost;
the old that is strong does not wither,
deep roots are not reached by the frost.
J.R.R. Tolkien

Hace ya casi cuatro años llegué a Cuernavaca a hacer una tesis de licenciatura. Después de un año de lidiar con la geometría diferencial presenté esa tesis y entré a estudiar la maestría. Hace casi dos años que empecé a trabajar en esta tesis. Ya iba siendo hora de que también la presentase.

Cuatro años es un tiempo muy corto para estudiar matemáticas; pero también es un periodo muy largo para conocer gente. Una buena parte de esas personas que he conocido en cuatro años ha sido fundamental para no volverse loco estudiando matemáticas; y también para agregar a algunas de esas personas al acervo de amigos. Este trabajo es un humilde y merecido homenaje a todas esas personas; las de aquí y las de otros lados. Desafortunadamente, una lista detallada y completa está fuera del propósito de este trabajo, así que me limitaré a hacer un esbozo de tal lista.

Y las primeras personas que deben aparecer en esa lista, completa o no, son Oscar y Lupina, mis papás. Nunca podré agradecerles suficientemente por todo. Por eso, para no vanalizar ese agradecimiento, dejo esto como está. Ustedes saben que los quiero un montón y que son el único jurado que me preocupo por impresionar.

Después deben aparecer aquellos que ya estaban en la lista preeliminar, gente que me recibió calurosamente acá y gente que me dolió dejar allá. Por mencionar a algunos, ellos son Paulina, Liadibinka, Mileiby, Malena, Rafa+Pao, Héctor, Eréndira, Samuel, Jairo… y un larguísimo etcétera.

Luego, las personas que conocí en este camino que llega a un claro pero aún se extiende a lo lejos. La mayor parte de estas personas son amigos que están en la misma sintonía y otros que afortunadamente no lo están. Ahora mismo vienen a mi mente Horacio, Haydee, José Luis, Carlos Cabrera, Marina, Gerino, Toño, Eli, Lula, Luis F., el Frank, Jess, Jannina, Mark, Cheques, Agustín, Carolina, Noemí, Adrián, Ramiro… y así podríamos continuar ad æternam.

A las personas de las listas incompletas anteriores quiero agradecerles por estar ahí para hablar de mates, para salir por una chela antes/después de las matemáticas; a otras por NO estudiar matemáticas y permitirme tomarme un descanso en su compañía; y desde luego, a todos ellos les agradezco su afabilidad y su tiempo para aguantar mis debrayes extraños y más que nada, les agradezco haberme honrado con su amistad. Todos ustedes, estén o no sus nombres escritos ahí, son indirectamente contribuyentes a la realización de este trabajo y hacen de mi vida una película extraña cuyo libreto aún no es claro pero cuyo reparto es excepcional; por todo lo cual les quedo y les quedaré siempre agradecido.

Desde luego tengo que agradecer a dos personas muy agradables, comprensibles, pacientes y no siempre desinteresadas: Bao y Boris, mis sobrinos postizos este año; ellos aguantaron la mayor parte de la neura generada por escribir este trabajo. Y por eso debo repetir a Haydee Aguilar y a José Luis Cisneros, por la confianza con que me dejaron a cargo de sus enanos peludos. Gracias por dejarme conocerlos.

Agradezco también a mis sinodales por la paciencia con que me guiaron por este caminito de la tesis; por sus preguntas, comentarios y sugerencias y también por el interés que mostraron al leer este trabajo. Ellos son Adolfo Sánchez, Gabriel Ruiz, Ramiro Carrillo y Carlos Villegas.

Last but not least: a Gregor Weingart, el Goyo, por ayudarme a entender que las matemáticas son una extraña aleación entre poesía, arte y ciencia, todo mezclado mediante el placer y la diversión que deja hacer matemáticas.

Oscar Guajardo
Cuernavaca, abril de 2012

Introducción

And I won't worry about a thing
because we've got it made;
here on the inside, outside so far away.
Ian Anderson

El propósito de este trabajo es estudiar las bases de la supergeometría diferencial desde un punto de vista clásico; esto es, nuestro enfoque plantea la teoría de supervariedades y transformaciones supersuaves en términos diferenciales clásicos.

En la literatura disponible sobre el tema, la categoría de supervariedades tiene como objetos espacios anillados donde la gavilla de estructura es un álgebra superconmutativa y los morfismos son homomorfismos de gavillas de estos espacios anillados. En este trabajo los objetos de estudio son haces de álgebras superconmutativas–lo cual implica que son haces vectoriales, para los cuales existe una teoría extensa–y los morfismos son operadores diferenciales. Es en este sentido que el enfoque del trabajo es clásico puesto que utilizamos conceptos y técnicas usuales y muy conocidas en geometría diferencial.

Nuestras razones para emprender un estudio desde "primeros principios" de la supergeometría son principalmente dos:

- es posible probar resultados importantes acerca de estos objetos sin utilizar coordenadas locales, lo cual simplifica las pruebas y el tratamiento;
- fundamentar el estudio de la supergeometría diferencial (entendida como el estudio de invariantes diferenciales locales, e.g. la curvatura) utilizando el lenguaje usual de la geometría diferencial.

Además de estas razones, consideramos que añadir un enfoque a una teoría extensamente estudiada (además de no ser superfluo) permite buscar conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas. En el capítulo 2 probamos que el enfoque de espacios anillados y nuestro enfoque son equivalentes, por lo que el punto de vista de este trabajo no representa pérdida alguna de generalidad en el estudio de la supergeometría. Debemos destacar que no hemos encontrado la prueba de esta equivalencia en la literatura matemática hasta la fecha de redacción de este trabajo.

Si bien la teoría de supervariedades tiene como motivación entender modelos que explican fenómenos en la mecánica cuántica, sentimos que estos objetos son matemáticamente interesantes por sí mismos ya que representan la instancia más sencilla de los espacios no conmutativos (cuyo estudio también está motivado por algunos modelos cuánticos). La generalidad de este estudio no es solamente para obtener resultados particulares a partir de teoremas más generales; es una manera muy efectiva de desarrollar nuestro entendimiento de estos objetos. En particular, las supervariedades están muy relacionadas con el estudio de ecuaciones diferenciales, ya que las aplicaciones supersuaves son operadores diferenciales lineales.

La definición clásica de una variedad diferenciable es en términos de un atlas maximal, que consiste en una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de un espacio topológico M y homeomorfismos locales $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, donde $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ es abierto; además se requiere que la aplicación

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ sea un difeomorfismo. Otro enfoque consiste en estudiar el álgebra $\mathcal{C}^\infty(M)$ de funciones diferenciables $f : M \to \mathbb{R}$ y definir una variedad diferenciable como el par $(M, \mathcal{C}^\infty(M))$. Estas dos definiciones son equivalentes (cf. [6, cap. 7]). De hecho, en el enfoque "algebraico" el objeto importante es un álgebra a partir de la cual se construye la variedad (cf. [6, caps. 2-4]). Éste es el enfoque de la geometría no conmutativa ([4, sec. 1.3]), donde las propiedades topológicas y geométricas del espacio se estudian a partir de las propiedades estructurales del álgebra. En este trabajo usaremos un enfoque mixto entre el enfoque local y el algebraico.

La meta a largo plazo de este trabajo es continuar con el estudio de estructuras geométricas en supervariedades, utilizando el enfoque clásico desarrollado a lo largo de nuestro estudio. Creemos que este enfoque presenta la gran ventaja de replantear la teoría en términos muy accesibles, propiedad muy útil para iniciar el estudio de estos objetos y también para tomarlo como punto de partida en investigaciones geométricas.

Esquema de contenido

El primer capítulo sienta las bases algebraicas para el estudio de la supergeometría: superespacios vectoriales y superálgebras asociativas. Estudiamos el espacio de superderivaciones de una superálgebra y, particularmente, la estructura $\mathbb{Z}_2$-graduada del álgebra exterior de un espacio vectorial de dimensión finita. Finalmente estudiamos el álgebra tensorial de un superespacio vectorial y las dos superálgebras relevantes para la geometría: la exterior y la simétrica.

En el capítulo dos empezamos el estudio de las supervariedades y sus transformaciones. Definimos una categoría adecuada para la supergeometría y de hecho probamos en el teorema 2.16 que el enfoque usual–donde la categoría de supervariedades consiste de gavillas y morfismos de gavillas–es equivalente al enfoque de este trabajo. También introducimos una clase más restringida de supervariedades (que llamamos supervariedades $\mathbb{Z}$-graduadas). Así mismo, estudiamos el superhaz tangente y damos una descripción algebraica de este objeto caracterizándolo como el espacio de superderivaciones del álgebra de estructura de una supervariedad; después de lo cual construimos las aplicaciones supertangentes entre estos espacios; estas aplicaciones están muy relacionadas con las supervariedades $\mathbb{Z}$-graduadas.

El último capítulo sienta las bases, dado el enfoque de este trabajo, para el estudio de la supergeometría diferencial. Esto incluye el estudio de superformas diferenciales, para las cuales extendemos el producto cuña y la derivada exterior; y el de las superconexiones afines. También introducimos las supermétricas riemannianas pares, basados en un trabajo extenso sobre el tema ([3]) y probamos la existencia y unicidad de la superconexión de Levi-Civita. Por último extendemos las simetrías del tensor de curvatura superriemanniano.

El apéndice contiene un tratamiento breve y conciso de los conceptos importantes de la teoría de operadores diferenciales lineales en los cuales se basa el enfoque geométrico de este trabajo.

Capítulo 1

Superálgebra lineal

En este capítulo definiremos los objetos algebraicos fundamentales de este trabajo: superespacios vectoriales y superálgebras asociativas. Todos los espacios vectoriales considerados son reales y de dimensión finita, a menos que se especifique lo contrario.

§1.1. Superespacios vectoriales

1.1 Definición. Un **superespacio vectorial** es un espacio vectorial V con una $\mathbb{Z}_2$-graduación $V = V_0 \oplus V_1$ tal que el espacio de endomorfismos tiene también una $\mathbb{Z}_2$-graduación $\mathbf{End}(V) = \mathrm{End}^0(V) \oplus \mathrm{End}^1(V)$, donde

$$\mathrm{End}^0(V) = \mathrm{End}(V_0) \oplus \mathrm{End}(V_1) \text{ y } \mathrm{End}^1(V) = \mathrm{Hom}(V_0, V_1) \oplus \mathrm{Hom}(V_1, V_0).$$

A los elementos de V_0 se les llama **elementos pares** y a los de V_1, **elementos impares**. Si la dimensión de los dos sumandos es finita, $\dim V_0 = n$ y $\dim V_1 = m$, decimos que el superespacio tiene **dimensión par** n y **dimensión impar** m. La **superdimensión** de V se denota por $(n|m)$. La función que a un elemento de V_j le asigna la clase $j \in \mathbb{Z}_2$ es la llamada **paridad** del elemento, denotada por $|a|$. Notemos que solamente está definida en el conjunto $(V_0 \cup V_1) - \{0\}$; a los elementos de este conjunto se les llama **elementos homogéneos**.

1.2 Ejemplo. Cualquier espacio vectorial V es un superespacio si definimos $V_0 = V$ y $V_1 = \{0\}$.

1.3 Ejemplo. Sea $\mathbb{C}$ el campo complejo considerado como un espacio vectorial real. La descomposición $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ le da al campo complejo una estructura de superespacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de superdimensión $(1|1)$.

1.4 Ejemplo (El superespacio $\mathbb{R}^{m|n}$)**.** La suma directa de los espacios vectoriales $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, considerado como un superespacio vectorial, se denota por $\mathbb{R}^{m|n}$.

1.5 Ejemplo. Si V y W son superespacios vectoriales, entonces $V \oplus W$ también lo es, y $(V \oplus W)_l = V_l \oplus W_l$, $l \in \mathbb{Z}_2$.

1.6 Observación. Si V es un superespacio vectorial, su dual también lo es y $V^* = V_0^* \oplus V_1^*$.

Definamos ahora la categoría de superespacios.

1.7 Definición. La categoría SVect de superespacios vectoriales tiene como objetos a todos los espacios $V = V_0 \oplus V_1$ $\mathbb{Z}_2$-graduados y como morfismos a todas las transformaciones lineales de la forma

$$T = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} \\ T_{10} & T_{11} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

donde $T_{ij} : V_i \to W_j$. A los morfismos que preservan la graduación, i.e. $T(V_i) \subseteq W_i$ se les llama **morfismos pares** y a aquellos que invierten la graduación, i.e. $T(V_i) \subseteq W_{i+1}$ se les llama **morfismos impares**.

En esta categoría, el espacio de morfismos $\mathbf{Hom}(V, W)$ tiene una descomposición de superespacio vectorial $\mathrm{Hom}^0(V, W) \oplus \mathrm{Hom}^1(V, W)$, donde $\mathrm{Hom}^0(V, W)$ es el espacio de morfismos pares y $\mathrm{Hom}^1(V, W)$ el de morfismos impares.

1.8 Observación. Si $V = V_0 \oplus V_1$ es un superespacio vectorial de superdimensión $(n|m)$; sean $v_1, \dots v_n$ una base de V_0 y $w_1, \dots w_m$ una base de V_1. Entonces todo elemento $v \in V$ se puede escribir como combinación lineal de los v_i y los w_j; en otras palabras, una base de V es equivalente a un sistema de coordenadas lineales (i.e. una base de V^*) $x_1, \dots x_m, \xi_1, \dots \xi_m$.

Una $\mathbb{Z}_2$-graduación en un espacio vectorial es equivalente a lo siguiente:

1.9 Proposición. *Un espacio vectorial es $\mathbb{Z}_2$-graduado si y sólo si existe un automorfismo lineal $T \in GL(V)$ tal que $T^2 = \mathrm{id}_V$.*

Demostración. Si $V = V_0 \oplus V_1$, definimos $T(v) = (-1)^{|v|}v$ en elementos homogéneos. Entonces T es diagonalizable puesto que sus valores propios son 1 y -1 y tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{V_0} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_{V_1} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $T^2 = \mathrm{id}_V$.

Si T es un automorfismo lineal tal que $T^2 = \mathrm{id}_V$ entonces su polinomio mínimo es $(x-1)(x+1)$ y es por lo tanto diagonalizable. Los espacios propios de V con respecto a T son $V^{\pm} := \{v \in V \mid T(v) = \pm v\}$. Esto da una descomposición $V^+ \oplus V^-$.

La descomposición de $\mathrm{End}\, V$ está dada por

$$\mathrm{End}^+ V = \{A \in \mathrm{End}\, V \mid T \circ A = A \circ T\} \text{ y } \mathrm{End}^- V = \{A \in \mathrm{End}\, V \mid T \circ A = -A \circ T\}.$$

Esto prueba que T induce una estructura $\mathbb{Z}_2$-graduada en V. □

§1.2. Superálgebras

Notemos que además de su estructura como superespacio vectorial, el espacio de endomorfismos $\mathbf{End}(V)$ tiene una multiplicación dada por la composición de transformaciones. Esta estructura multiplicativa también es $\mathbb{Z}_2$-graduada. Esta álgebra es un ejemplo de una superálgebra.

1.10 Definición. Una **superálgebra** A es un álgebra sobre $\mathbb{R}$ tal que el espacio vectorial A es un superespacio vectorial, i.e. $A = A_0 \oplus A_1$ y la multiplicación es $\mathbb{Z}_2$-graduada, i.e.: $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$. El álgebra es **superconmutativa** si para elementos homogéneos a y b de A se tiene $ab = (-1)^{|a||b|}ba$.

1.11 Observación. Si $A = A_0 \oplus A_1$ es una superálgebra, entonces A_0 es un álgebra y A_1 es un A_0-bimódulo.

1.12 Ejemplo. Como ya mencionamos, el álgebra de endomorfimos de un superespacio vectorial es una superálgebra.

1.13 Ejemplo. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. El álgebra exterior $\bigwedge V$ es un álgebra superconmutativa: si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces

$$\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r} | 1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n, 1 \leq r \leq n\}$$

es una base de $\bigwedge V$ y $v_i \wedge v_j = -v_j \wedge v_i$, y $\bigwedge^k(V) \wedge \bigwedge^r(V) \subseteq \bigwedge^{k+r}(V)$, con $k, r \in \mathbb{Z}_2$. La descomposición como espacio graduado es $(\bigwedge V)_0 = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \bigwedge^{2k} V$ y $(\bigwedge V)_1 = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \bigwedge^{2k+1} V$, donde $\bigwedge^r V$ denota las formas de grado r.

El ejemplo anterior es fundamental en la teoría de supervariedades, ya que el álgebra de estructura de una súpervariedad es localmente isomorfa al álgebra de secciones de un haz exterior sobre una variedad diferenciable M (definición 2.6).

1.14 Ejemplo. Si A es un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada (i.e. $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ y $A_n \cdot A_m \subseteq A_{n+m}$), se puede construir una superálgebra $\tilde{A}$ de la siguiente manera: si $A^+ := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_{2n}$ y $A^- := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_{2n+1}$, entonces $\tilde{A} := A = A^+ \oplus A^-$ y la multplicación $\mathbb{Z}$-graduada induce una multplicación $\mathbb{Z}_2$-graduada en $\tilde{A}$. Si A es conmutativa y se define la multiplicación en $\tilde{A}$ como $ab = (-1)^{|a||b|}ba$, con a y b homogéneos, entonces $\tilde{A}$ es superconmutativa.

Este ejemplo hace notar la diferencia entre álgebras superconmutativas y superálgebras conmutativas.

1.15 Ejemplo. Sea (V, g) un espacio con producto interno g, i.e. $g \in \operatorname{Sym}^2 V^*$. El **álgebra de Clifford** de (V, g) es el cociente

$$Cl(V) := \bigotimes V / \langle x \otimes y + y \otimes x - 2g(x, y)1 | x, y \in V \rangle ,$$

donde $\bigotimes V$ denota el álgebra tensorial de V y 1 es la unidad de esta álgebra. El álgebra tensorial de V es $\mathbb{Z}$-graduada, por lo que es posible hacer la construcción del ejemplo anterior. Notemos que el ideal mediante el cual se construye el álgebra de Clifford no es $\mathbb{Z}$-graduado, pero sí $\mathbb{Z}_2$-graduado; esto es: si x tiene grado k y y tiene grado r, entonces $x \otimes y$ y $y \otimes x$ tienen grado $k + r$, tanto en $\mathbb{Z}$ como en $\mathbb{Z}_2$; así, la clase de $x \otimes y$ tiene grado $k + r \mod 2$ en $Cl(V)$.

Las superálgebras tienen una caracterización muy útil:

1.16 Proposición. *Un álgebra A es una superálgebra si y sólo si existe un automorfismo de álgebras γ tal que $\gamma^2 = \mathrm{id}_A$.*

Demostración. En este caso γ es el automorfismo lineal de la proposición 1.9. Si a y b son elementos de A entonces

$$\gamma(ab) = (-1)^{|ab|}ab = (-1)^{|a|}a(-1)^{|b|}b = \gamma(a)\gamma(b).$$

Por lo tanto, γ es un automorfismo de álgebras.

Por otro lado, si γ es un automorfismo de álgebras tal que $\gamma^2 = \mathrm{id}_A$ entonces su polinomio mínimo es $(x-1)(x+1)$, que tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$ y son no nulas; por lo tanto, γ es invertible. Si se definen los subespacios $A_r = \{a \in A | \gamma(a) = (-1)^r a; r \in \mathbb{Z}_2\}$, entonces $A = A_0 \oplus A_1$. Si $x \in A_0 \cup A_1$, definimos $|x|$ como el valor propio asociado a x. Para ver que la multiplicación es graduada, observemos que

$$(-1)^{|ab|}ab = \gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b) = (-1)^{|a|}a(-1)^{|b|}b = (-1)^{|a||b|}ab,$$

lo cual implica $A_r A_s \subseteq A_{r+s}$, con r y s elementos de $\mathbb{Z}_2$. □

Entre las transformaciones lineales de un álgebra A hay que destacar las derivaciones, pues relacionan la estructura lineal de A con su estructura multiplicativa mediante la regla de Leibniz.

1.17 Definición. Sea A un álgebra. Una **derivación** de A es una transformación lineal $D : A \to A$ que cumple la *regla de Leibniz*:

$$D(ab) = D(a)b + bD(a),$$

para cualquier par de elementos a y b de A. El espacio de derivaciones se denota por $\mathrm{der}(A)$.

Las derivaciones de un álgebra asociativa A con el corchete $[D, \widetilde{D}] = D\widetilde{D} - \widetilde{D}D$ forman un álgebra de Lie y de hecho es el álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(A)$, los automorfismos de A como álgebra asociativa.

1.18 Lema. *Sean A un álgebra asociativa de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y*

$$\mathrm{Aut}(A) := \{F \in GL(A) | F(ab) = F(a)F(b)\}$$

el grupo de automorfismos A. Entonces $\mathrm{der}(A) = \mathfrak{aut}(A)$, donde $\mathfrak{aut}(A)$ es el álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(A)$.

Demostración. Primeramente, notemos que $\mathrm{Aut}(A)$ es un subgrupo de $GL(A)$. Sea $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{Aut}(A)$ una curva tal que $\gamma(0) = \mathrm{id}_A$. Entonces, para todo $a, b \in A$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (\gamma(t))(ab) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \Big(\gamma(t)(a)\gamma(t)(b)\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\gamma(t)(a)\gamma(t)(b) - ab\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\gamma(t)(a)\gamma(t)(b) + \gamma(t)(a)b - \gamma(t)(a)b - ab\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\gamma(t)(a)(\gamma(t)(b) - b) + (\gamma(t)(a) - a)b\Big) \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 (a)\right) b + a\left(\left.\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 (b)\right);
\end{aligned}$$

esto es: la derivada de una familia uniparamétrica de automorfismos de A es una derivación en A. $\square$

Si el álgebra A es graduada, las derivaciones que preservan la graduación son importantes.

1.19 Definición. Sea A un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada (resp. $\mathbb{Z}_2$-graduada) y D una derivación en A. Los espacios

$$\begin{aligned} \operatorname{der}_{\mathbb{Z}}(A) &:= \{D \in \operatorname{der}(A) | D(A_n) \subseteq V_n, n \in \mathbb{Z}\} \\ \operatorname{der}_{\mathbb{Z}_2}(A) &:= \{D \in \operatorname{der}(A) | D(A_n) \subseteq V_n, n \in \mathbb{Z}_2\} \end{aligned}$$

son, respectivamente, las derivaciones que preservan la $\mathbb{Z}$-graduación y las que preservan la $\mathbb{Z}_2$-graduación.

Si A es una superálgebra, entonces el espacio de derivaciones tiene también una descomposición $\operatorname{der}^+ A \oplus \operatorname{der}^- A$.

1.20 Definición. Sea A una superálgebra. Los espacios

$$\begin{aligned} \operatorname{der}^+(A) &:= \left\{D \in \operatorname{der}(A) | D(A^{\pm}) \subseteq (A^{\pm})\right\} \\ \operatorname{der}^-(A) &:= \left\{D \in \operatorname{der}(A) | D(A^{\pm}) \subseteq (A^{\mp})\right\} \end{aligned}$$

son los subespacios de **derivaciones pares** y **derivaciones impares** o **antiderivaciones**, respectivamente. El **espacio de superderivaciones** de A es $\mathbf{der}(A) = \operatorname{der}^+(A) \oplus \operatorname{der}^-(A)$.

1.21 Observación. Los espacios $\operatorname{der}_{\mathbb{Z}_2}(A)$ y $\operatorname{der}^+(A)$ son iguales. Esto es

$$\mathbf{der}(A) = \operatorname{der}_{\mathbb{Z}_2}(A) \oplus \operatorname{der}^-(A).$$

§1.3. Álgebras exteriores

Las súper álgebras relevantes en el estudio de las súper variedades son súper conmutativas, finitamente generadas y libres. Esto es, son álgebras exteriores de espacios vectoriales de dimensión finita. Por ello es importante estudiarlas con más detalle.

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita m, vimos en el ejemplo 1.13 que su álgebra exterior es un álgebra superconmutativa.

Denotemos por $\bigwedge^{\geq 1} V$ el subespacio de multivectores de grado mayor o igual que 1. Este espacio es un ideal de $\bigwedge V$, ya que esta álgebra está generada por los elementos de V, los cuales tienen grado 1. Para $p \geq 2$ definimos $\bigwedge^{\geq p} V := (\bigwedge^{\geq 1} V)^p$; esto es, el subespacio generado por formas de grado al menos p. Estos espacios son también ideales y de hecho forman una filtración del álgebra exterior

$$\bigwedge V = \bigwedge^{\geq 0} V \supseteq \bigwedge^{\geq 1} V \supseteq \cdots \supseteq \bigwedge^{\geq m} V. \tag{1.2}$$

Notemos que si $\omega \notin \bigwedge^{\geq 1} V$, entonces ω es invertible, ya que su parte de grado 0 es no nula y por lo tanto invertible (ya que es un número real). Así mismo, si ω es invertible entonces no es nilpotente y por lo tanto no está en el ideal $\bigwedge^{\geq 1} V$.

1.22 Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita m y $\bigwedge V$ su álgebra exterior. Entonces $\bigwedge^{\geq 1} V$ es el único ideal maximal de $\bigwedge V$.*

Demostración. Como todo elemento de $\bigwedge^{\geq 1} V$ es nilpotente, obtenemos que $\bigwedge V / \bigwedge^{\geq 1} V \cong \mathbb{R}$, por lo cual este ideal es maximal. Si I es un ideal (maximal o no) de $\bigwedge V$ tal que $I \not\subset \bigwedge^{\geq 1} V$, entonces I contiene elementos invertibles y por lo tanto no es un ideal propio. Así, todo ideal propio está contenido en $\bigwedge^{\geq 1} V$, que es maximal. En particular, cualquier otro ideal maximal I de $\bigwedge V$ coincide con $\bigwedge^{\geq 1} V$. □

1.23 Proposición. *Una forma ω está en el ideal $\bigwedge^{\geq 1} V$ si y sólo si existe un entero positivo r y una forma η en el subespacio $\bigwedge^{r} V$ tal que $\omega \wedge \eta = 0$.*

Demostración. Basta probar la proposición para elementos homogéneos, ya que toda forma es suma de componentes homogéneas.

Si ω es homogéneo, digamos $\omega \in \bigwedge^{k} V$, entonces cualquier forma η en $\bigwedge^{m-k+1} V$ cumple que $\omega \wedge \eta = 0$. Por lo tanto, $r \geq m - k + 1$ en este caso.

Si r y η satisfacen que $\eta \in \bigwedge^{r} V$ y $\eta \wedge \omega = 0$, entonces ω es una forma de grado mayor o igual que $m - r + 1$. □

Usando la notación del ejemplo 1.14, denotamos por $\bigwedge^{+} V$ y $\bigwedge^{-} V$ los subespacios de formas pares e impares, respectivamente; así mismo, la notación $\bigwedge^{\geq p, \pm} V$ denota el espacio de formas de grado al menos p que son también elementos de $\bigwedge^{\pm} V$.

1.24 Definición. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $A = \bigwedge V$ su álgebra exterior. El mapeo $\varepsilon : \bigwedge V \to \bigwedge V / \bigwedge^{\geq 1} V$ dado por $\varepsilon(\omega) = \omega + \bigwedge^{\geq 1} V$ se llama **mapeo de aumentación**.

1.25 Nota. Si $\omega \in \bigwedge^{\geq 1} V$ entonces $\varepsilon(\omega) = 0$ y por lo tanto $\bigwedge^{\geq 1} V = \ker \varepsilon$. Esto quiere decir que un elemento α de un álgebra exterior es invertible si y sólo si $\varepsilon(\alpha) \neq 0$. Además, ε es un homomorfismo unital de álgebras y es suprayectivo.

1.3.1. Derivaciones

Ahora estudiaremos el espacio de derivaciones de un álgebra exterior. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita m. Trabajaremos con el álgebra exterior del espacio dual de V, $\bigwedge V^*$.

1.26 Lema. *Sean D y $\widetilde{D}$ derivaciones en el álgebra $\bigwedge V^*$. Si $D|_{V^*} = \widetilde{D}|_{V^*}$ entonces $D = \widetilde{D}$.*

Esto es, toda derivación en un álgebra exterior está determinada por su acción en los generadores.

Demostración. Sea $F := D - \widetilde{D}$, y sean α y β elementos arbitrarios de V^*. Como F también es una derivación, entonces

$$\begin{aligned} F(\alpha \wedge \beta) &= F(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge F(\beta) = (D - \widetilde{D})(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (D - \widetilde{D})(\beta) \\ &= D(\alpha) \wedge \beta - \widetilde{D}(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge D(\beta) - \alpha \wedge \widetilde{D}(\beta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que $D|_{V^*} = \widetilde{D}|_{V^*}$. Como V^* genera $\bigwedge V^*$ como álgebra, tenemos que $D = \widetilde{D}$. □

Recordemos que si $\alpha \in \bigotimes V^*$ y $v \in V$ se define $v \lrcorner \alpha$ como el tensor cuyo primer argumento es v.

1.27 Lema. *Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V y $\{dv_1, \ldots, dv_m\}$ la base dual asociada. Si $F : V^* \to \bigwedge^- V^*$ es lineal y*

$$D_F := \sum_{\mu=1}^{m} F(dv_\mu) \wedge (v_\mu \lrcorner)$$

entonces D_F está definida en todo $\bigwedge V^*$ y es una derivación.

Demostración. Basta probar el lema para α y β elementos de V^*. Lo primero que hay que notar es que $v_\mu \lrcorner$ es una antiderivación, ya que si w es cualquier vector en V, tenemos

$$\begin{aligned} (v_\mu) \lrcorner (\alpha \wedge \beta)(w) &:= (\alpha \wedge \beta)(v, w) = \alpha(v_\mu)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v_\mu) \\ &= \big((v_\mu \lrcorner \alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge (v_\mu \lrcorner \beta)\big)(w). \end{aligned}$$

Al insertar este desarrollo en $D_F(\alpha \wedge \beta)$ obtenemos

$$\begin{aligned} D_F(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{\mu=1}^{m} \Big(F(dv_\mu) \wedge (v_\mu \lrcorner \alpha) \wedge \beta - F(dv_\mu) \wedge \alpha \wedge (v_\mu \lrcorner \beta)\Big) \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} \Big(F(dv_\mu) \wedge (v_\mu \lrcorner \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge F(dv_\mu) \wedge (v_\mu \lrcorner \beta)\Big) \\ &= D_F(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge D_F(\beta) \\ &= F(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge F(\beta). \end{aligned}$$

Esto prueba que D_F extiende F a toda el álgebra $\bigwedge V^*$ (ya que V^* genera esta álgebra) y que es una derivación. $\square$

1.28 Corolario. *Si $F = \mathrm{id}_{V^*}$ entonces $N := D_F$ es el operador $N|_{\bigwedge^k V^*} = k\,\mathrm{id}_{\bigwedge^k V^*}$ y se le llama* ***operador de números****.*

Demostración. Si $\omega = dv_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dv_{\alpha_k}$ es una k-forma básica, entonces

$$\begin{aligned} N(\omega) &= \sum_{\mu=1}^{m} dv_\mu \wedge (v_\mu \lrcorner)\omega = \sum_{\mu=1}^{m} dv_\mu \wedge (v_\mu \lrcorner)(dv_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dv_{\alpha_k}) \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} dv_\mu \wedge \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu (dv_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \delta_{\alpha_\nu \mu} \wedge \cdots \wedge dv_{\alpha_k}). \end{aligned}$$

En esta última suma solamente aparecen los sumandos con índice ν_μ tales que $\alpha_{\nu_\mu} = \mu$ y no aparecen términos dv_μ, por lo tanto

$$\begin{aligned} N(\omega) &= \sum_{\mu=1}^{m} dv_\mu \wedge (-1)^{\nu_\mu} dv_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dv_{\alpha_k} \\ &= \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\nu_\mu + \nu_\mu} dv_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dv_\mu \wedge \cdots \wedge dv_{\alpha_k} \\ &= k\omega; \end{aligned}$$

la segunda igualdad es cierta porque dv_μ aparece en el lugar ν_μ en el producto $dv_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dv_\mu \wedge \cdots \wedge dv_{\alpha_k}$; la tercera igualdad es cierta porque en la segunda suma aparecen todos los índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ y solamente para esos índices el producto es distinto de cero. Como toda k-forma es combinación lineal de las formas $dv_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dv_{\alpha_k}$, obtenemos la igualdad propuesta. □

1.29 Teorema. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita m y $A = \bigwedge V^*$ el álgebra exterior de su espacio dual. Entonces*

$$\operatorname{der}(A) \cong V \otimes \bigwedge\nolimits^- V^* \oplus \bigwedge\nolimits^- V^* / \left(\bigwedge\nolimits^- V^* \cap \bigwedge\nolimits^m V^* \right), \tag{1.3}$$

donde $\bigwedge^- V$ es el espacio de formas impares (ejemplo 1.14).

Demostración. Sea D una derivación en A y sea $F = D|_{V^*}$. Entonces $F = F^+ + F^-$, donde $F^\pm : V^* \to \bigwedge^\pm V^*$.

Si se define D_{F^-} como en el lema 1.27, entonces $D_{F^-}(dv_\mu) = F^-(dv_\mu)$. Si α es cualquier elemento de V^*, entonces $0 = D_{F^-}(\alpha \wedge \alpha) = \alpha \wedge F^-(\alpha) + F^-(\alpha) \wedge \alpha$. Por lo tanto, la derivación D_{F^-} es un elemento de $V \otimes \bigwedge^- V^*$.

Examinemos ahora F^+. Si D_{F^+} es una derivación, tenemos que $D_{F^+}(\alpha \wedge \alpha) = F^+(\alpha) \wedge \alpha + \alpha \wedge F^+(\alpha) = 2\alpha \wedge F^+(\alpha) = 0$, ya que $F^+(\alpha) \in \bigwedge^+ V^*$. Si β es también un elemento de V^*, entonces tenemos la siguiente identidad de polarización:

$$0 = (\alpha + \beta) \wedge F^+(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \wedge F^+(\alpha - \beta),$$

lo cual implica la igualdad

$$\alpha \wedge F^+(\beta) = -\beta \wedge F^+(\alpha). \tag{1.4}$$

Para probar (1.3) calculamos

$$\begin{aligned}
(m - N)F^+(\alpha) &= \sum_{\mu=1}^m v_\mu \lrcorner \big(dv_\mu \wedge F^+(\alpha)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^m v_\mu \lrcorner \big(F^+(dv_\mu) \wedge \alpha\big) \qquad \text{(por la igualdad (1.4))} \\
&= \sum_{\mu=1}^m v_\mu \lrcorner \big(-\alpha \wedge F^+(dv_\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^m -\alpha(v_\mu) \wedge F^+(dv_\mu) + \alpha \wedge (v_\mu \lrcorner F^+(dv_\mu)) \\
&= -F^+(\alpha) + \alpha \wedge \sum_{\mu=1}^m (v_\mu \lrcorner F^+(dv_\mu)).
\end{aligned}$$

Si definimos $\eta := -\sum_{\mu=1}^m (v_\mu \lrcorner F^+(dv_\mu))$, entonces vemos que η es una forma de grado impar. La ecuación final es

$$F^+(\alpha) = (m - N + 1)^{-1} \eta \wedge \alpha. \tag{1.5}$$

Esto es, F^+ el producto cuña con una forma de grado impar. Esto prueba que toda derivación que manda los generadores en formas de grado par, es el producto cuña con una forma de grado impar. La restricción sobre el grado de η viene naturalmente de la definición, ya que $v \lrcorner \phi$ no puede ser una forma de grado maximal para ningún $v \in V$ y ningún $\phi \in A$.

Por otro lado, si ω es una forma de grado impar, entonces

$$F(\alpha) := \frac{1}{2}[\alpha, \omega] = \frac{1}{2}(\alpha \wedge \omega - \omega \wedge \alpha)$$

es una derivación en A que coincide con el producto cuña con ω en formas impares y es cero en formas pares. $\square$

El espacio de derivaciones graduadas es importante en el estudio de súper variedades ya que con este espacio y su complemento podemos definir los súper campos vectoriales, que corresponden a derivaciones en el álgebra de súper funciones.

1.30 Corolario. *Si* $A = \bigwedge V^*$ *entonces*

$$\begin{aligned} \mathrm{der}_{\mathbb{Z}_2}(A) &\cong V \otimes {\bigwedge}^- V^* \\ \mathrm{der}_{\mathbb{Z}}(A) &\cong V \otimes V^* \end{aligned}$$

1.31 Proposición. *Si A es una súper álgebra entonces* $\mathrm{der}_{\mathbb{Z}_2}(A) = \mathrm{der}^+(A)$.

1.32 Teorema. *El espacio de súper derivaciones de $\bigwedge V^*$ es isomorfo a $V \otimes \bigwedge V^*$.*

1.3.2. Morfismos

Sea ahora W un espacio vectorial de dimensión n. Estudiaremos el espacio de morfismos de álgebras súper conmutativas que preservan la unidad entre $\bigwedge V^*$ y $\bigwedge W^*$.

1.33 Definición. Sean A y B álgebras con unidad. Un **homomorfismo unital de álgebras** es una aplicación lineal $F : A \to B$ tal que $F(ab) = F(a)F(b)$ y $F(1) = 1$.

Si A y B son álgebras exteriores entonces, al igual que en el caso de las derivaciones, un tal morfismo está determinado por su acción en los generadores.

1.34 Lema. *Sean $F, \widetilde{F} : \bigwedge V^* \to \bigwedge W^*$ homomorfismos de álgebras súper conmutativas con 1. Si $F|_{V^*} = \widetilde{F}|_{V^*}$, entonces $F = \widetilde{F}$*

Demostración. Consideremos el homomorfismo $G = F - \widetilde{F}$ restringido a V^*. Entonces

$$\begin{aligned} G(a \wedge b) &= G(a) \wedge G(b) = F(a) \wedge F(b) - F(a) \wedge \widetilde{F}(b) \\ &- \widetilde{F}(a) \wedge F(b) + \widetilde{F}(a) \wedge \widetilde{F}(b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como todo elemento $\omega \in \bigwedge V^*$ es combinación lineal de monomios en los elementos de V^*, de la igualdad anterior se concluye que $G = 0$ y por lo tanto que $F = \widetilde{F}$. $\square$

1.35 Proposición. *El espacio* $\boldsymbol{Hom}(\bigwedge V^*, \bigwedge W^*)$ *de súper homomorfismos unitales entre las álgebras* $\bigwedge V^*$ *y* $\bigwedge W^*$ *es isomorfo a* $V \otimes \bigwedge^{\geq 1} W^*$ *y su descomposición como súper espacio vectorial está dada por* $\boldsymbol{Hom}^{\pm}(\bigwedge V^*, \bigwedge W^*) \cong V \otimes \bigwedge^{\geq 1, \pm} W^*$

Demostración. Si F es un homomorfismo par, entonces $F_1 := F|_V$ es una transformación lineal $F_1 : V \to \bigwedge^{\geq 1,-} W^*$, ya que los generadores son elementos impares. Si F es impar, entonces $F_1 : V \to \bigwedge^{\geq 2,+} W^*$. □

1.36 Observación. El espacio de homomorfismos pares $\mathbf{Hom}^+(\bigwedge V^*, \bigwedge W^*)$ consiste de los morfismos que preservan la $\mathbb{Z}_2$-graduación.

1.37 Corolario. *El espacio de morfismos* $\mathbb{Z}$*-graudados* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigwedge V^*, \bigwedge W^*)$ *es isomorfo a* $V \otimes W^*$*.*

1.38 Observación. Los morfismos de álgebras exteriores preservan la filtración (1.2); esto se debe a que si $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ es un elemento homogéneo, entonces un morfismo ϕ satisface $\phi(\omega) = \phi(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \phi(\alpha_k)$, donde los α_μ son generadores.

Demostración. Si $\phi : \bigwedge V^* \to \bigwedge W^*$ es un morfismo unital y ω está en el ideal $\bigwedge^{\geq 1} V^*$ entonces existe un entero positivo r y una forma η en el subespacio $\bigwedge^r V^*$ tal que $\omega \wedge \eta = 0$, por la proposición 1.23. Por lo tanto, obtenemos $0 = \phi(0) = \phi(\omega) \wedge \phi(\eta)$. Esto es, $\phi(\omega)$ es nilpotente. Por lo tanto, $\phi(\omega) \in \bigwedge^{\geq 1} W^*$. □

§1.4. Superálgebras tensoriales

Para espacios vectoriales, el producto tensorial es una construcción universal a través de la cual se factorizan mapeos multilineales. Tomando cocientes por ideales adecuados del álgebra tensorial de un espacio vectorial V, denotada por $\bigotimes V$, se construyen las álgebras exterior y simétrica de un espacio vectorial, las cuales son también construcciones universales y a través de las cuales se factorizan mapeos alternantes y simétricos, respectivamente (cf. [7, caps. 1-2]).

La categoría de superespacios vectoriales también tiene definido un producto tensorial y las construcciones algebraicas siguen siendo válidas, pero en este caso hay que tomar en cuenta la *regla de signos* que explicamos a continuación. Para más detalles, consultar [10, sec. 3.1].

Para espacios vectoriales, existen isomorfismos canónicos

$$(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U), \quad \text{y} \quad V \otimes W \cong W \otimes V.$$

Estos isomorfismos también son válidos en la categoría de superespacios vectoriales, pero el segundo involucra la siguiente

1.39 Regla de signos. *Si* U *y* V *son superespacios vectoriales y* $u \in U$*,* $v \in V$ *elementos homogéneos, entonces el mapeo* $C_{U,V} : U \otimes V \to V \otimes U$ *dado por* $C_{U,V}(u \otimes v) = (-1)^{|u||v|} v \otimes u$ *es un isomorfismo.*

Hay que notar que $C_{U,V} \circ C_{V,U} = \mathrm{id}_{U\otimes V}$.

En el caso $U = V$, el isomorfismo $C_{V,V} : \bigotimes^2 V \to \bigotimes^2 V$ que manda $u\otimes v$ en $(-1)^{|u||v|}v\otimes u$ nos permite definir las álgebras exterior y simétricas $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Para esto necesitamos la siguiente

1.40 Definición. Sea A un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Un ideal $I \subset A$ es **homogéneo** si para todo $a \in I$, con $a = a_0 + a_1$, se tiene que a_0 y a_1 también están en I.

Esto es: un ideal homogéneo es un subespacio $\mathbb{Z}_2$-graduado de A tal que $I_r = I \cap A_r$, con $r \in \mathbb{Z}_2$.

Cuando el espacio vectorial V sea claro, denotaremos el isomorfismo $C_{V,V}$ solamente por C.

1.41 Lema. *Si I es un ideal homogéneo de la superálgebra A entonces A/I es una superálgebra y $(A/I)_r = A_r/I_r$*

Demostración. Si $I_r = I \cap A_r$ entonces para cualesquiera a y b elementos homogéneos de A, tenemos que $(a+I)(b+I) = ab+I$. Sea γ el automorfismo de estructura de A (proposición 1.16). Entonces $\gamma(ab + I) = \gamma(a + I)\gamma(b + I) = (-1)^{|a||b|}ab + I$, ya que $-I = I$ y $aI = I$ para todo a en A; como I es homogéneo, $\gamma|_I$ es el automorfismo estructural del subespacio $I = I_0 \oplus I_1$. Esto quiere decir que $\widetilde{\gamma} : A/I \to A/I$ es un automorfismo involutivo, y por lo tanto A/I es una súper álgebra.

La descomposición de superespacio viene del hecho de que I es homogéneo, ya que si $a+I$ tiene la descomposición $a_0+a_1+I_0\oplus I_1$, entonces a_r+I_r ($r \in \mathbb{Z}_2$) es la descomposición homogénea de $a + I$, la cual es un elemento del subespacio A_r/I_r. □

1.42 Proposición. *Los ideales*

$$I_{Sym} = \langle x \otimes y - C(x \otimes y) \,|\, x, y \in V\rangle \quad e \quad I_{Alt} = \langle x \otimes y + C(x \otimes y) \,|\, x, y \in V\rangle$$

de $\bigotimes V$ son homogéneos.

Demostración. Denotemos por $I^{\pm}$ al ideal generado por elementos de la forma $x\otimes y\pm C(x\otimes y)$ para ahorrar espacio. Un elemento w de $I^{\pm}$ es de la forma

$$w = \sum a_J\big(x \otimes y \pm C(x \otimes y)\big),$$

donde la suma es finita y los a_J son elementos de $\bigotimes V$. Como todo v en V tiene la descomposición $v = v_0 + v_1$, obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} w &= \sum a_J\Big((x_0 + x_1) \otimes (y_0 + y_1) \pm C\big((x_0 + x_1) \otimes (y_0 + y_1)\big)\Big) \\ &= \sum a_J^0\Big((x_0 \otimes y_0) + (x_1 \otimes y_1) \pm C\big((x_0 \otimes y_0) + (x_1 \otimes y_1)\big)\Big) \\ &+ \sum a_J^1\Big((x_0 \otimes y_1 + x_1 \otimes y_0) \pm C\big((x_0 \otimes y_1 + x_1 \otimes y_0)\big)\Big), \end{aligned}$$

donde a_J^0 y a_J^1 denotan la parte par e impar, respectivamente, de a_J. Notemos que la segunda suma solamente involucra elementos pares y la tercera, solamente elementos impares. Como cada suma generada por elementos $x \otimes y$ cuyos productos son de la misma paridad, esto implica que $I^{\pm}$ son ideales homogéneos. □

1.43 Corolario. *Los cocientes de* $\bigotimes V$ *por* I_{Sym} *e* I_{Alt} *son superálgebras.*

1.44 Definición. Las superálgebras exterior y simétrica de un superespacio vectorial V son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \operatorname{Sym} V &:= \bigotimes V/I_{Sym} \\ \bigwedge V &:= \bigotimes V/I_{Alt} \end{aligned}$$

1.4.1. Acción torcida de S_k

Si σ es una permituación del conjunto $\{1,\ldots,k\}$ y $A \subset \{1,\ldots,k\}$, entonces en general no sucede que $\sigma(A) = A$. Sin embargo, tanto A como $\sigma(A)$ son subonjuntos de $\mathbb{Z}_+$ y por lo tanto podemos ordenarlos de manera ascendente $A = \{a_1,\ldots,a_r\}$ y $\sigma(A) = \{b_1,\ldots,b_r\}$ tales que $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ y $b_1 < \cdots < b_r$.

1.45 Definición. Sea $\sigma \in S_k$ y $A \subset \{1,\ldots,k\}$. La **signatura de σ relativa a** A se define mediante

$$\operatorname{sgn}^A(\sigma) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_r) \end{pmatrix};$$

esto es, $\operatorname{sgn}^A(\sigma)$ es la signatura de la permutación que ordena de manera ascendente los elementos de $\sigma(A)$.

Haremos uso de las signaturas relativas para obtener los signos correctos de la acción torcida de S_k en las potencias tensoriales del superespacio vectorial V. Sea $\bigotimes^k V$ la k-ésima potencia tensorial del superespacio V. La acción torcida de S_k está dada por

$$\begin{gathered} S_k \times \bigotimes^k V \to \bigotimes^k V \\ (\sigma, v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \mapsto \operatorname{sgn}^A(\sigma)(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}) \end{gathered}$$

donde $A \subset \{1,\ldots,k\}$ es el conjunto de índices $\{a_1,\ldots,a_r\}$ tales que $v_{a_1},\ldots,v_{a_r}$ son vectores impares en la expansión $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$. Denotaremos la signatura de σ asociada con esta acción torcida por $\operatorname{sgn}^-(\sigma)$.

1.46 Observación. La acción torcida de $S_2 = \mathbb{Z}_2$ en $\bigotimes^2 V$ es equivalente al isomorfismo C.

Como en la proposición 1.42, denotemos nuevamente por $I^\pm$ al ideal simétrico (I^-) y al ideal alternante (I^+) de la superálgebra $\bigotimes V$, mientras que $I_k^\pm$ denotará el subespacio $(I^\pm)^k$. Notemos que un elemento de $I_k^\pm$ se puede escribir como

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \pm (-1)^{|v_\mu||v_{\mu+1}|} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{\mu+1} \otimes v_\mu \otimes \cdots \otimes v_k \tag{1.6}$$

donde cada uno de los v_ν es homogéneo. Esto es equivalente a la acción torcida de la transposición $(\mu\mu+1)$ en $\bigotimes^k V$. Como S_k está generado por transposiciones, tenemos que un elemento de $I_k^\pm$ se puede escribir como

$$(\operatorname{id} \pm \sigma)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k), \tag{1.7}$$

ya que tanto id como σ actúan como transformaciones linales; por eso id $\pm\sigma$ está bien definido.

1.47 Proposición. *Las superálgebras exterior y simétrica de un superespacio vectorial V son*

$$\bigwedge V \cong \bigwedge V_0 \otimes \operatorname{Sym} V_1 \tag{1.8}$$

$$\operatorname{Sym} V \cong \operatorname{Sym} V_0 \otimes \bigwedge V_1 \tag{1.9}$$

respectivamente.

Demostración. Observemos que un elemento homogéneo del álgebra tensorial de V es de la forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$, donde todos los v_μ son de la misma paridad. Si todos los v_μ son pares, entonces al pasar al cociente por el ideal I_{Sym} obtenemos la definición usual del álgebra simétrica de V_0, ya que $\operatorname{sgn}^- \sigma$ en este caso es 0 porque no hay elementos impares; por otro lado, si todos los v_μ son impares, entonces $\operatorname{sgn}^- \sigma = \operatorname{sgn} \sigma$ ya que todos los elementos permutados son impares y esto es la definición del álgebra exterior de V_1. El caso del álgebra exterior es análogo. □

Capítulo 2

Supervariedades

En este capítulo plantearemos nuestro enfoque para estudiar las supervariedades. En contraste con el enfoque usual, estudiaremos estos objetos desde el punto de vista de la geometría diferencial clásica. También probaremos que ambos enfoques son equivalentes (teorema 2.16).

Estudiaremos una familia de objetos similares, que llamamos supervariedades $\mathbb{Z}$-graduadas (sección 2.3) y veremos que sus morfismos están ligados a la superdiferencial de una aplicación supersuave entre dos supervariedades. Por último, estudiaremos las superderivaciones de las superfunciones y caracterizaremos el superhaz tangente de una supervariedad como el espacio de estos operadores. Para los conceptos necesarios de geometría diferencial clásica que utilizaremos a lo largo de éste y el próximo capítulo, nos remitimos al apéndice.

§2.1. Supervariedades vectoriales

La estructura de superespacio vectorial de $V = V_0 \oplus V_1$ y su estructura de supervariedad son distintas, pero igual que el caso de un espacio vectorial real, la estructura lineal está incluida en la estructura de este espacio como variedad diferenciable, porque las funciones lineales en un espacio vectorial son diferenciables.

Al elegir una base $\{x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ de V (tal que $\{x_1, \ldots, x_m\}$ es una base de V_0 y $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ es una base de V_1), una superfunción supersuave en V es una expresión de la forma

$$f(x, \xi) = \sum_I f_I(x, \xi)\xi^I = f_0(x) + f_1(x)\xi_1 + \cdots f_m(x)\xi_m + f_{12}(x)\xi_1\xi_2 + \cdots \tag{2.1}$$

donde las f_I son funciones suaves en V. Como vimos en la observación 1.8, las coordenadas $(\xi_1, \ldots \xi_n)$ son elementos de $V_1^* \subset \mathcal{C}^\infty(V_1)$. Esto quiere decir que la expresión (2.1) es un elemento de $\mathcal{C}^\infty(V) \otimes \bigwedge V_1^*$

Así, para obtener la estructura de supervariedad en V, necesitamos los siguientes objetos:

- el haz trivial de álgebras superconmutativas $V_0 \times \bigwedge(V_1)^*$;
- para cada abierto $U \subseteq V_0$, el espacio de secciones $\Gamma(U \times \bigwedge(V_1)^*) \cong \mathcal{C}^\infty(U, \bigwedge(V_1)^*))$;
- si $U \subseteq \widetilde{U} \subseteq V$ son conjuntos abiertos, un mapeo $\Gamma(\widetilde{U}, \bigwedge(V_1)^*)) \to \Gamma(U, \bigwedge(V_1)^*)$ tal que $f \mapsto f|_U$.

Esto no es otra cosa que la definición de una gavilla de álgebras exteriores sobre V_0 (cf. [9, sec. 2.2]). Notemos que definir una tal gavilla sobre $\mathbb{R}^n$ y utilizar el álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \bigwedge(\mathbb{R}^m)^*)$ son equivalentes, ya que la gavilla en cuestión es localmente libre y de rango constante, por lo cual una gavilla de álgebras exteriores y el haz producto $\mathbb{R}^n \times \bigwedge(\mathbb{R}^m)^*$ son equivalentes. Con más precisión:

2.1 Definición. La **supervariedad vectorial** $\mathbb{R}^{m|n}$ es el espacio anillado $(\mathbb{R}^m | \bigwedge(\mathbb{R}^n)^*)$ y la gavilla de estructura es $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \bigwedge(\mathbb{R}^n)^*)$.

Además, por lo que hemos dicho hasta ahora, obtenemos la siguiente equivalencia:

2.2 Proposición. *El espacio anillado que define la supervariedad $V_0 \oplus V_1$ es equivalente al haz trivial de álgebras superconmutativas $V_0 \times \bigwedge(V_1)^*$.*

Intuitivamente, una supervariedad debe ser localmente equivalente a $\mathbb{R}^{n|m}$. En la siguiente sección haremos precisa esta noción de equivalencia local, notando que una gavilla localmente libre de álgebras con rango constante es equivalente a un haz de álgebras sobre una variedad diferenciable.

2.1.1. Morfismos

Recordemos que un morfismo entre espacios anillados $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ consiste de una función continua $f : X \to Y$ y, para todo abierto $U \subseteq Y$, una aplicación $f^\# : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_{f^{-1}(U)}$ que es a su vez un morfismo de anillos (cf [10, sec. 4.1]). En nuestro caso, la apilcación $f^\#$ debe ser un morfismo de álgebras superconmutativas. En particular, $f^\#$ debe ser $\mathbb{Z}_2$-graduado. Esto significa que un morfismo $F : \mathbb{R}^{m|p} \to \mathbb{R}^{n|q}$ consiste de una aplicación suave $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y una apliación inducida $f^\# : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \bigwedge(\mathbb{R}^q)^*) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \bigwedge(\mathbb{R}^p)^*)$ tal que

$$f^\#(\alpha \wedge \beta) = f^\#(\alpha) \wedge f^\#(\beta)$$

para $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \bigwedge(\mathbb{R}^q)^*)$. La apliación $f^\#$ no es arbitraria, sino que está ligada a la aplicación f de la manera que explicamos a continuación.

2.3 Proposición. *Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación suave, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \overline{f} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned} \tag{2.2}$$

es un homomorfismo unital de álgebras conmutativas.

Demostración. Si h y g son funciones suaves en $\mathbb{R}^n$, entonces $\overline{f}(gh) = (gh) \circ f$. Si x es un punto en $\mathbb{R}^m$, entonces $f(x)$ es un punto en $\mathbb{R}^n$ y obtenemos $\big((gh) \circ f\big)(x) = \big(gh\big)(f(x)) = g(f(x))h(f(x)) = \big((g \circ f)(h \circ f)\big)(x)$; por lo tanto $\overline{f}(gh) = \overline{f}(g)\overline{f}(h)$. Análogamente, obtenemos $\overline{f}(g + h) = \overline{f}(g) + \overline{f}(h)$.

Si $\mathbf{1}$ denota la función constante de valor 1, entonces $\overline{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \circ f = \mathbf{1}$, y por lo tanto $\overline{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, la función constante 1 en $\mathbb{R}^m$. $\square$

En el caso de las supervariedades $\mathbb{R}^{m|p}$ y $\mathbb{R}^{n|q}$ denotemos por ahora, abusando de la notación, los haces de álgebras correspondientes solamente como $\bigwedge(\mathbb{R}^p)^*$ y $\bigwedge(\mathbb{R}^q)^*$, respectivamente. El morfismo asociado $f^\# : \Gamma(\bigwedge(\mathbb{R}^q)^*) \to \Gamma(\bigwedge(\mathbb{R}^p)^*)$ es entonces un homomorfismo de álgebras superconmutativas con unidad (i.e. $f^\#(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ y $f^\#(\alpha \wedge \beta) = f^\#(\alpha) \wedge f^\#(\beta)$).

Recordemos (definición 1.24) que existe un homomorfismo unital de superálgebras $\varepsilon : \Gamma(\bigwedge(\mathbb{R}^q)^*) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ donde $F \mapsto F_0$ en la expansión (2.1). Como el álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una superálgebra con parte nilpotente nula, los homomorfismos $\overline{f}$ y $f^\#$ satisfacen el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\bigwedge(\mathbb{R}^q)^*) \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[d, "f^\#"] & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \arrow[l, bend right, "\iota"'] \arrow[d, "\overline{f}"] \\ \Gamma(\bigwedge(\mathbb{R}^p)^*) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \arrow[l, bend left, "\iota"] \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

donde ι denota la inclusión correspodiente. Si g es una función suave en $\mathbb{R}^n$ y η una sección de $\bigwedge(\mathbb{R}^q)^*$, entonces

$$[f^\#, g](\eta) := f^\#(g\eta) - (g \circ f)f^\#(\eta) \tag{2.4}$$

es una sección bien definida de $\bigwedge(\mathbb{R}^p)^*$. Recordemos que $f^\#$ es también un homomorfismo de álgebras superconmutativas, por lo tanto la ecuación anterior es equivalente a

$$\begin{aligned} [f^\#, g](\eta) &= f^\#(g)f^\#(\eta) - (g \circ f)f^\#(\eta) \\ &= \left(f^\#(g) - g \circ f\right) f^\#(\eta). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Como además $f^\#$ es $\mathbb{Z}_2$-graduado, tenemos que $f^\#(g)$ es una sección de grado par del haz $\bigwedge(\mathbb{R}^p)^*$. En vista del diagrama (2.3), obtenemos las igualdades

$$\varepsilon(f^\#(g)) = g \circ f = \varepsilon(g \circ f) = \overline{f}(g);$$

esto es, el factor $f^\#(g) - g \circ f$ en la ecuación (2.5) es una sección de grado mayor o igual que 2 del haz $\bigwedge(\mathbb{R}^p)^*$. Al iterar el conmutador definido en la ecuación (2.4), de la ecuación (2.5) obtenemos que si $k := \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ (parte entera de $\frac{q}{2}$), entonces $f^\#$ es un operador diferencial a lo largo de f de grado menor o igual que k (ver la definición A.16 de este concepto). Resumiendo la construcción anterior, obtenemos

2.4 Proposición. *Sean $(\mathbb{R}^m|\bigwedge(\mathbb{R}^p)^*)$ y $(\mathbb{R}^n|\bigwedge(\mathbb{R}^q)^*)$ supervariedades. Un morfismo $\Phi : (\mathbb{R}^m|\bigwedge(\mathbb{R}^p)^*) \to (\mathbb{R}^n|\bigwedge(\mathbb{R}^q)^*)$ de espacios anillados es equivalente a un par $(f|F)$, donde $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación suave y $F : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \bigwedge(\mathbb{R}^q)^*) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \bigwedge(\mathbb{R}^p)^*)$ es un operador diferencial a lo largo de f.*

Es importante notar que aunque el homomorfismo $\overline{f}$ introducido en la proposición 2.3 está únicamente determinado por la aplicación suave f, la construcción anterior solamente nos garantiza que el término $\varepsilon(f^\#(g))$ es igual a $\overline{f}(g)$ para toda función suave g; esto no implica, sin embargo, que el operador diferencial $f^\#$ esté únicamente determinado por f. Por ello adoptamos la siguiente definición de un morfismo entre supervariedades vectoriales:

2.5 Definición. Una **aplicación superdiferenciable** $\Phi : (\mathbb{R}^m|\bigwedge(\mathbb{R}^p)^*) \to (\mathbb{R}^n|\bigwedge(\mathbb{R}^q)^*)$ es un par $(f|F)$, tal que $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación suave y $F : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \bigwedge(\mathbb{R}^q)^*) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \bigwedge(\mathbb{R}^p)^*)$ es un operador diferencial a lo largo de f de orden menor o igual que $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$.

§2.2. Supervariedades

Usualmente se define una **supervariedad de superdimensión** $(n|m)$ como un par $(X|\mathcal{O}_X)$, donde X es una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathcal{O}_X$ es una gavilla de álgebras superconmutativas localmente libre de rango m. Esto es, para todo punto $p \in M$ existe un abierto $U \subset M$ tal que $\mathcal{O}_U \cong U \times \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada isomorfa a $\bigwedge(\mathbb{R}^m)^*$ (ver, por ejemplo, [10, sección 4.2]).

Como notamos en la proposición 2.2, una gavilla de este tipo y un haz trivial de álgebras son equivalentes sobre $\mathbb{R}^n$. Como toda variedad diferenciable tiene un atlas maximal tal que todos los abiertos del atlas son contraíbles (cf. [2, lema 7.1]), probaremos la equivalencia entre el enfoque álgebraico (espacios anillados) y el enfoque geométrico (i.e. estudiar una variedad diferenciable con un haz de álgebras).

Si $\pi : E \to M$ es un haz vectorial sobre una variedad diferenciable M, entonces el espacio de secciones $\Gamma(E)$ es naturalmente un módulo sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$: una sección $s \in \Gamma(E)$ es tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$; esto quiere decir que $s(p) \in \pi^{-1}(p)$ y por lo tanto, si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ entonces $f(p) \cdot s(p) \in \pi^{-1}(p)$. Como esto se puede hacer para todo punto $p \in M$, tenemos bien definida una multiplicación $f \cdot s$, donde $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $s \in \Gamma(E)$. Como la dimensión de la fibra no cambia, i.e. $\dim \pi^{-1}(p) = \dim \pi^{-1}(q)$, para todo par $p, q \in M$, tenemos que hay una correspondencia entre $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulos localmente libres y haces vectoriales sobre M. De hecho, el resultado es válido para $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulos proyectivos (sumandos de módulos libres; cf. [4, secs. 2.3 y 2.4]).

En nuestro caso, los $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulos tienen también la estructura de álgebras súperconmutativas localmente libres, i.e. son localmente isomorfas a álgebras exteriores. Así, las gavillas localmente libres de álgebras súperconmutativas corresponden a haces de álgebras superconmutativas sobre una variedad diferenciable M. En vista de esta correspondencia, la definición que usaremos será la siguiente:

2.6 Definición. Una **supervariedad de dimensión $(\mathbf{m}|\mathbf{n})$** es un par $(M|\mathcal{R}M)$, donde M es una variedad diferenciable de dimensión m y $\mathcal{R}M$ es un haz de álgebras superconmutativas de rango n sobre M.

2.7 Ejemplo. Sea M una variedad suave de dimensión n. El álgebra de formas diferenciales, $\Gamma\left(\bigwedge T^*M\right)$ es naturalmente una superálgebra; de esta manera obtenemos la supervariedad $(M|\Gamma\left(\bigwedge T^*M\right))$ de superdimensión $(n|n)$.

2.8 Ejemplo. Si E es un haz vectorial de rango r sobre M, entonces el haz exterior dual $\bigwedge E^*$ es también un haz vectorial. El espacio de secciones de este último, al igual que el ejemplo anterior, es un álgebra superconmutativa y por lo tanto también obtenemos una supervariedad $(M|\Gamma\left(\bigwedge E^*\right))$ de superdimensión $(m|r)$.

2.9 Nota. Si $(M|\mathcal{R}M)$ es una supervariedad de superdimensión $(m|n)$ y p un punto de M, la fibra $\mathcal{R}_pM$ es un álgebra superconmutativa libre. Como tal, tiene un único ideal maximal (por la proposición 1.22) que denotaremos por $\mathcal{R}_p^{\geq 1}M$. Con más precisión, tenemos

$$\mathcal{R}_p^{\geq 1}M := \{\eta \in \Gamma(\mathcal{R}M) | \varepsilon(\eta(p)) = 0\}\,.$$

Como este ideal existe en cada punto, podemos formar el haz de ideales nilpotentes, cuyas secciones están caracterizadas por ser, justamente, superfunciones nilpotentes.

2.10 Definición. El **haz nilpotente** de una supervariedad $(M|\mathcal{R}M)$ es el haz vectorial

$$\mathcal{R}^{\geq 1}M := \bigsqcup_{p\in M} \mathcal{R}_p^{\geq 1}M$$

A partir de este ideal se construye la filtración de la superálgebra $\mathcal{R}_pM$

$$\mathcal{R}_pM := \mathcal{R}_p^{\geq 0}M \supset \mathcal{R}_p^{\geq 1}M \supset \mathcal{R}_p^{\geq 2}M \supset \cdots \supset \mathcal{R}_p^{\geq n}M \supset \{0\}\,, \tag{2.6}$$

donde definimos $\mathcal{R}_p^{\geq r}M := \left(\mathcal{R}_p^{\geq 1}M\right)^r$ y n es la dimensión impar de $(M|\mathcal{R}M)$. Esto quiere decir que

$$\mathcal{R}_pM = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{R}_p^{\geq k}M$$

y además $\mathcal{R}_p^{\geq k}M \cdot \mathcal{R}_p^{\geq l}M \subseteq \mathcal{R}_p^{\geq k+l}M$. Como esto se puede hacer fibra por fibra, obtenemos un haz

$$\mathcal{R}^{\geq k}M = \sqcup_{p\in M}\mathcal{R}_p^{\geq k}M$$

y automáticamente obtenemos también la siguiente

2.11 Proposición. *El álgebra $\Gamma\left(\mathcal{R}M\right)$ es un álgebra filtrada por la cadena de subespacios*

$$\Gamma\left(\mathcal{R}M\right) := \Gamma\left(\mathcal{R}^{\geq 0}M\right) \supset \Gamma\left(\mathcal{R}^{\geq 1}M\right) \supset \cdots \supset \Gamma\left(\mathcal{R}^{\geq n}M\right) \supset \{0\}\,, \tag{2.7}$$

2.2.1. Morfismos

Ahora estudiaremos las aplicaciones supersuaves entre supervariedades. Bajo el enfoque algebraico, estas aplicaciones son morfismos de gavillas

$$F : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N).$$

Como estas gavillas son las gavillas de secciones de un haz de álgebras sobre las variedades correspondientes, basándonos en la proposición 2.4, usaremos la siguiente

2.12 Definición. Una **aplicación supersuave** $F : (M|\mathcal{R}M) \to (N|\mathcal{R}N)$ es un par $F = (\phi|\Phi)$ tal que $\phi : M \to N$ es una aplicación suave y $\Phi : \Gamma(\mathcal{R}N) \to \Gamma(\mathcal{R}M)$ es un homomorfismo de álgebras superconmutativas y un operador diferencial a lo largo de ϕ.

Los morfismos entre supervariedades $(\phi|\Phi)$ son localizables. Esto quiere decir que si p es un punto de M entonces $\Phi_{\phi(p)} : \mathcal{R}_{\phi(p)}N \to \mathcal{R}_pM$ es un homomorfismo unital de álgebras superconmutativas. Por la observación 1.38, sabemos que $\Phi_{\phi(p)}$ preserva el ideal maximal $\mathcal{R}_{\phi(p)}^{\geq 1}N$. Como los homomorfismos son $\mathbb{Z}_2$-graduados también preservan el ideal $\Gamma(\mathcal{R}^{\geq 1}M)$ de todas las secciones nilpotentes.

2.13 Proposición. *Sea $(M|\mathcal{R}M)$ una supervariedad compacta (i.e. M es una variedad compacta). Entonces $I \subset \Gamma(\mathcal{R}M)$ es un ideal maximal si y sólo si es de la forma $I = \mathcal{R}_p^{\geq 1}M$ para algún punto p de M.*

Demostración. Si $I = \mathcal{R}_p^{\geq 1}M$, sabemos que es un ideal maximal de $\mathcal{R}_pM$ por la proposición 1.22. Es también un ideal maximal de $\Gamma(\mathcal{R}M)$ puesto que el cociente es $\mathbb{R}$.

Si I es maximal, supongamos que $I \neq \mathcal{R}_p^{\geq 1}M$ para todo punto p. Para cada punto p elegimos un elemento η_p de I. Entonces la función $h_p := \varepsilon(\eta_p)$ no se anula en alguna vecindad abierta U_p de p. Tenemos que $\{U_p\}_{p\in M}$ es una cubierta abierta de M. De la compacidad de M tenemos que existen $p_1, \ldots, p_n$ puntos de M tales que los conjuntos $U_{p_1}, \ldots, U_{p_n}$ cubren M. Tomemos una partición de la unidad asociada $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha=1}^n$, donde $U_\alpha = U_{p_\alpha}$. Si definimos $h_\alpha := \phi_\alpha h_{p_\alpha}$ y $h := h_1 + \cdots + h_n$ entonces h es una función bien definida en M. Cada $h_{p_\alpha} = \varepsilon(\eta_{p_\alpha})$ es un elemento de I; como h es una suma finita de elementos de I que no se anula en todo M, obtenemos que h es un elemento invertible de $\mathcal{C}^\infty(M) \subset \Gamma(\mathcal{R}M)$ y por lo tanto el ideal I no es propio, pues contiene un elemento invertible. Tenemos una contradicción, puesto que habíamos supuesto que I es maximal. □

2.14 Corolario. *Sean $(M|\mathcal{R}M)$ y $(N|\mathcal{R}N)$ supervariedades. Si $\Phi : \Gamma(\mathcal{R}N) \to \Gamma(\mathcal{R}M)$ es un homomorfismo unital de superálgebras y N es una variedad compacta, entonces existe una única aplicación suave $\phi : M \to N$ tal que Φ es un operador diferencial a lo largo de ϕ.*

Demostración. Sea $p \in M$ y denotemos por ev_p el homomorfismo de álgebras $\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que evalúa una función en el punto p. Este homomorfismo es suprayectivo ya que para todo número real λ tenemos que la función constante λ está en el conjunto $\mathrm{ev}_p^{-1}(\lambda)$. Recordemos (ver [5, Teorema 2.6]) que si $\rho : A \to B$ es un homomorfismo suprayectivo de anillos y B es un campo, entonces $\ker \rho$ es un ideal maximal de A. Tenemos entonces la siguiente sucesión (no exacta):

$$\Gamma(\mathcal{R}N) \xrightarrow{\Phi} \Gamma(\mathcal{R}M) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{\mathrm{ev}_p} \mathbb{R} \tag{2.8}$$

La aplicación $\Psi_p := \mathrm{ev}_p \circ \varepsilon \circ \Phi$ es un homomorfismo de álgebras superconmutativas. Entonces $\ker \Psi_p$ es un ideal maximal en $\Gamma(\mathcal{R}N)$, por lo cual es de la forma $\mathcal{R}_q^{\geq 1}N$ para algún punto q de N. Si hacemos $\phi(p) = q$ obtenemos una función bien definida en M.

Sea q el rango de $\mathcal{R}N$ (i.e. la dimensión impar de $(N|\mathcal{R}N)$). Si definimos el conmutador $[\Phi, f]$ como en la fórmula (2.4), para cualquier función suave f en N, entonces de la fórmula (2.5) obtenemos que $[\ldots[[\Phi, f], f_1], \ldots, f_k] = 0$ para $k \leq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ y $f_1, \ldots, f_k$ funciones suaves en N. □

Cabe destacar que si N no es compacta, entonces hay ideales maximales que no corresponden a puntos. Por ejemplo, el ideal maximal generado por $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones de soporte compacto, no corresponde a ningún punto x en $\mathbb{R}^n$. Esto significa que para variedades compactas, un morfismo $(\phi|\Phi)$ entre supervariedades queda determinado de manera única con el homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado Φ; por eso adoptamos la definición 2.12 para los morfismos entre supervariedades. A continuación probaremos que nuestra definición y la definición algebraica de aplicación supersuave son equivalentes.

2.15 Lema. *Sean M y $\widetilde{M}$ variedades diferenciables, $\mathcal{C}_M^\infty$ y $\mathcal{C}_{\widetilde{M}}^\infty$ las gavillas de funciones suaves sobre M y N respectivamente y sea $\phi : \widetilde{M} \to M$ una aplicación continua. Si $\Phi : \mathcal{C}_M^\infty \to \phi_*\mathcal{C}_{\widetilde{M}}^\infty$ es un morfismo unital de gavillas de álgebras conmutativas entonces ϕ es suave y Φ coincide con el morfismo $\overline{\phi}$ dado por $\overline{\phi}(f) = f \circ \phi$.*

Demostración. Consideremos un abierto $U \subset M$ y una función suave h en U. Sea $x \in \phi^{-1}(U)$ y sea V una vecindad abierta de $\phi(h(x)) \in \mathbb{R}$. Tenemos que $h^{-1}(U) \subset M$ es abierto en M y en la topología relativa de U como subespacio de M. El morfismo de restricción $\mathrm{res}^U_{h^{-1}(V)}$ de la gavilla $\mathcal{C}^\infty$ induce el morfismo

$$\Phi_{h^{-1}(V)} : \mathcal{C}^\infty(h^{-1}(V)) \to \mathcal{C}^\infty(\phi^{-1}(h^{-1}(V))).$$

Al aplicar este morfismo a la función $h - h(\phi(x))\mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ es la función idénticamente 1 en M, obtenemos

$$f := \Phi_{h^{-1}(V)}(h - h(\phi(x))\mathbf{1}) = \Phi_{h^{-1}(V)}(h) - \Phi_{h^{-1}(V)}(h)(x)\mathbf{1}, \tag{2.9}$$

que es una función suave en $(h \circ \phi)^{-1}(V)$. La función f no es invertible en este abierto ya que $h(\phi(x)) \in V$ y por lo tanto $x \in \phi^{-1}(h^{-1}(V))$, lo cual implica que $f(x) = 0$. Esto implica, por la ecuación (2.9), que $\Phi_{h^{-1}(V)}(h) = h \circ \phi$, ya que para toda vecindad de $h(x)$ en $\mathbb{R}$ tenemos que $\Phi_U(h)(x) \in V$.

Sean $x_1, \ldots, x_m$ coordenadas locales en el abierto U. De lo anterior obtenemos que

$$\Phi_U(x_\mu) = x_\mu \circ \phi$$

es suave para todo $\mu \in \{1, \ldots, m\}$. Ésta es justamente la definición de una aplicación suave; por lo tanto, la aplicación $\phi : \widetilde{M} \to M$ es suave. $\square$

2.16 Teorema. *Sean $\mathcal{O}_N$ y $\mathcal{O}_M$ las gavillas de superfunciones de las supervariedades $(N|\mathcal{R}N)$ y $(N|\mathcal{R}N)$ respectivamente, y sea $\Phi : \mathcal{O}_N \to \phi_*\mathcal{O}_M$ un homomorfismo de gavillas de superálgebras sobre la aplicación continua $\phi : M \to N$. Entonces ϕ es suave y Φ es un operador diferencial a lo largo de ϕ.*

Demostración. Sean $U \subset N$ un abierto y $\eta \in \mathcal{O}_U = \Gamma(\mathcal{R}U)$. La función $h := \varepsilon(\eta)$ es suave en U y $\varepsilon(\Phi(h))$ es también una función suave en $\phi^{-1}(U)$, ya que $\phi_*\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{\phi^{-1}(U)}$. El lema anterior nos garantiza que ϕ es una aplicación suave y que $\varepsilon(\Phi(h)) = \overline{\phi}(h) = h \circ \phi$. Con esto obtenemos el siguiente diagrama conmutativo, análogo al diagrama (2.3):

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\mathcal{R}N) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "f^\#"] & \Gamma(\mathcal{R}M) \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \mathcal{C}^\infty(N) \arrow[r, "\overline{\phi}"] & \mathcal{C}^\infty(M) \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

En vista de este diagrama, si f es una función suave cualquiera en N obtenemos que $\Phi(f) - f \circ \phi \in \Gamma(\mathcal{R}^{\geq 2}M)^+$ y por lo tanto, Φ es un operador diferencial a lo largo de ϕ. $\square$

Este teorema prueba que el enfoque algebraico y nuestro enfoque geométrico son equivalentes. En vista de este hecho definimos nuestra catgoría de estudio:

2.17 Definición. La categoría **SMfld** tiene como objetos todas las supervariedades y como morfismos todas las aplicaciones superdiferenciables en el sentido de la definición 2.12

§2.3. Supervariedades $\mathbb{Z}$-graduadas

Si $\pi : E \to M$ es un haz vectorial diferenciable sobre la variedad M, entonces podemos construir la supervariedad $\widetilde{\pi} : \bigwedge E^* \to M$. Más aún, si $\xi : F \to N$ es un haz vectorial suave sobre N y $\phi : E \to V$ es un morfismo de haces vectoriales, entonces existe una función diferenciable $f : M \to N$ tal que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & F \arrow[d, "\xi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

y tal que $\phi_p : E_p \to F_{f(p)}$ es una aplicación lineal. Esto induce un morfismo de haces exteriores $\wedge\phi^* : \phi^*(\bigwedge F^*) \to \bigwedge E^*$ (cf. A.15). Este morfismo es $\mathbb{Z}$-graduado y por lo tanto también es $\mathbb{Z}_2$-graduado. Si denotamos los elementos de F^* por α, entonces cualquier elemento $\eta \in \Gamma(\bigwedge F^*)$ se puede escribir como $\eta = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$. El morfismo $\wedge\phi^*$ es el levantamiento del homomorfismo dual $\phi^* : F^* \to E^*$ y en particular si g es una función suave en N, tenemos que $\phi^*(g) = g \circ f$. Si definimos $[\wedge\phi^*, g]$ como en la fórmula (2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} [\wedge\phi^*, g](\eta) &= \wedge\phi^*(g\eta) - (g \circ f) \wedge\phi^*(\eta) \\ &= \wedge\phi^*(g\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) - (g \circ f) \wedge\phi^*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \\ &= (g \circ f)(\phi^*(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \phi^*(\alpha_k)) - (g \circ f)\phi^*(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \phi^*(\alpha_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\wedge\phi^*$ es un operador diferencial de orden 0 a lo largo de f. Resumiendo, obtenemos

2.18 Lema. *Sean $\pi : E \to M$ y $\xi : F \to N$ haces vectoriales y $(M|\bigwedge E^*)$, $(F|\bigwedge F^*)$ las supervariedades asociadas, entonces el levantamiento $\wedge\phi^* : \bigwedge F^* \to \bigwedge E^*$ de un morfismo de haces vectoriales $\phi : E \to F$ es un operador diferencial de orden* 0 *a lo largo de la aplicación suave $f : M \to N$ asociada a ϕ.*

2.19 Corolario. *Un morfismo del tipo descrito en el lema anterior, es un morfismo unital $\mathbb{Z}$-graduado entre las superálgebras $\Gamma(\bigwedge F^*)$ y $\Gamma(\bigwedge E^*)$, y por lo tanto es un morfismo entre las supervariedades asociadas.*

2.20 Definición. Sean $(M|\mathcal{R}M)$ una supervariedad y p un punto de M. El espacio de **codirecciones impares** de $(M|\mathcal{R}M)$ en el punto p es el espacio vectorial

$$\mathbf{S}_p^*M := \mathcal{R}_p^{\geq 1}M/\mathcal{R}_p^{\geq 2}M.$$

El haz vectorial $\mathbf{S}^*M := \bigsqcup_{p\in M} \mathbf{S}_p^*M$ es el **haz de codirecciones impares** de la supervariedad $(M|\mathcal{R}M)$. El haz vectorial dual $\mathbf{S}M$ es el **haz de direcciones impares**.

Por construcción, este haz vectorial define la supervariedad $(M|\mathcal{R}M) \cong (M|\bigwedge \mathbf{S}^*M)$. De hecho, toda supervariedad es equivalente a una supervariedad de este tipo, como se demuestra en [1, Teorema 3.1]. Denotarmos estos objetos como $(M|\mathbf{S}M)$, ya que la supervariedad $(M|\bigwedge \mathbf{S}^*M)$ queda determinada por su haz de direcciones impares.

Sin embargo, los morfismos entre estas supervariedades son levantamientos de morfismos entre los haces haces vectoriales asociados, i.e. son morfismos $\mathbb{Z}$-graduados. Como ya vimos, estos morfismos son operadores diferenciales de orden 0.

2.21 Definición. La categoría $\mathbf{SMfld}_{\mathbb{Z}}$ tiene como objetos todas las supervariedades de la forma $(M|\mathbf{S}M)$ y como morfismos las aplicaciones $\wedge\phi^*$ asociadas a morfismos de haces vectoriales.

2.22 Proposición. *Sea $(\phi|\Phi) : (M|\mathcal{R}M) \to (N|\mathcal{R}N)$ una aplicación supersuave. Entonces Φ induce un morfismo de haces vectoriales $F : \mathbf{S}M \to \mathbf{S}N$.*

Demostración. Como el homomorfismo de álgebras superconmutativas

$$\Phi : \Gamma(\mathcal{R}N) \to \Gamma(\mathcal{R}M)$$

preserva la filtración (2.7) (proposición 2.24) del haz de álgebras, donde

$$\mathcal{R}^{\geq r}N := \bigsqcup_{p\in N} \mathcal{R}_p^{\geq r}N,$$

entonces

$$\Phi(\mathcal{R}^{\geq 1}N/\mathcal{R}^{\geq 2}N) = \Phi(\mathbf{S}^*N) \subseteq \mathbf{S}^*M$$

. Si denotamos por $\widetilde{\Phi}$ el morfismo inducido entre los haces de codirecciones impares por el homomorfismo Φ, entonces $F = (\widetilde{\Phi})^*$. □

Si $(M|\mathbf{S}M)$ es una supervariedad $\mathbb{Z}$-graduada y $r := \dim \mathbf{S}_pM$, entonces su álgebra de superfunciones tiene también una filtración

$$\bigwedge \mathbf{S}M := \bigwedge^{\geq 0} \mathbf{S}M \supset \bigwedge^{\geq 1} \mathbf{S}M \supset \cdots \supset \bigwedge^{\geq r} \mathbf{S}M \supset \{0\} \tag{2.11}$$

y de hecho también una $\mathbb{Z}$-graduación

$$\bigwedge \mathbf{S}M = \bigoplus_{k=0}^{r} \bigwedge^{k} \mathbf{S}M, \tag{2.12}$$

tal que $\bigwedge^k \mathbf{S}M := \mathcal{R}^{\geq k}M/\mathcal{R}^{\geq k+1}M$. De la proposición 2.22 obtenemos el siguiente

2.23 Corolario. *La aplicación $F : \mathbf{S}M \to \mathbf{S}N$ se extiende a aplicaciones $\bigwedge^k F : \bigwedge^k \mathbf{S}M \to \bigwedge^k \mathbf{S}N$ para todo $k \geq 2$.*

Demostración. La aplicación F es un morfismo de haces y, por la propiedad universal del haz exterior, se levanta de manera única a cada una de las componentes $\bigwedge^k \mathbf{S}M \to \bigwedge^k \mathbf{S}N$. □

Con este resultado podemos probar que los morfismos entre supervariedades no solamente preservan la estructura $\mathbb{Z}_2$-graduada de las superálgebras $\Gamma(\mathcal{R}N)$ y $\Gamma(\mathcal{R}M)$ sino que también preservan la filtración (2.7):

2.24 Proposición. *Sean $(M|\mathcal{R}M)$ y $(N|\mathcal{R}N)$ supervariedades. Si*

$$(\phi|\Phi) : (M|\mathcal{R}M) \to (N|\mathcal{R}N)$$

es una aplicación supersuave entonces $\Phi(\Gamma\left(\mathcal{R}^{\geq k}N\right)) \subseteq \Gamma\left(\mathcal{R}^{\geq k}M\right)$ para todo entero $k \geq 0$.

Demostración. Esto es solamente la observación 1.38 aplicada a cada fibra $\mathcal{R}_pM$, utilizando la construcción del haz de codirecciones impares. □

2.25 Observación. El resultado anterior implica que las aplicaciones supersuaves, dado que preservan la filtración (2.7), preservan también los cocientes $\Gamma\left(\mathcal{R}^{\geq k}M/\mathcal{R}^{\geq k+1}M\right)$ para todo $k \geq 1$.

Es importante notar que si $(M|\mathcal{R}M)$ es una supervariedad entonces podemos asociarle una supervariedad $\mathbb{Z}$-graduada utilizando el haz de codirecciones impares. Si $(\phi|\Phi)$: $(M|\mathcal{R}M) \to (N|\mathcal{R}N)$ es una aplicación supersuave entonces obtenemos una aplicación $(\phi|F) : (M|\mathbf{S}M) \to (N|\mathbf{S}N)$ tal que F coincide con la diferencial de Φ; más aun, la aplicación F se levanta automáticamente a una aplicación $\bigwedge F$ entre las secciones de los haces exteriores respectivos y el par $(\phi|\bigwedge F)$ es una aplicación supersuave $\mathbb{Z}$-graduada; es decir, obtenemos un operador diferencial de orden 0. Sin embargo, los morfismos entre supervariedades son de un tipo más general ya que son operadores de orden no necesariamente 0.

§2.4. El superhaz tangente

Si $(\phi|\Phi) : (M|\mathcal{R}M) \to (N|\mathcal{R}N)$ es una aplicación súper suave, queremos definir la diferencial $(\phi|\Phi)_* : T(M|\mathcal{R}M) \to T(N|\mathcal{R}N)$ entre los haces tangentes de las súper variedades. Para hacerlo, veamos las propiedades del haz tangente y las aplicaciones inducidas en el caso de variedades suaves.

Si $\phi : M \to N$ es una aplicación suave entre variedades diferenciables, entonces existen levantamientos $\phi_* : TM \to \phi^*(TN)$ y $\phi^* : \phi^*(T^*N) \to T^*M$ entre los haces tangente y cotangente respectivamente, donde $\phi^*(TN)$ y $\phi^*(T^*N)$ denotan los haces jalados (ver definición A.15). La aplicación ϕ_* es la derivada de ϕ; esto es, si X_p es un vector tangente en T_pM, entonces

$$\begin{aligned} \phi_{*,p} : T_pM &\to T_{\phi(p)}N \\ X_p &\mapsto D\phi_p(X)_{\phi(p)} \end{aligned}$$

es una aplicación lineal entre espacios tangentes.

Notemos que $\Gamma(TM)$ es el espacio de derivaciones del álgebra $\mathcal{C}^\infty(M)$: si X es un campo vectorial, y f y g son funciones suaves en M entonces

$$X(fg) = X(f)g + fX(g);$$

esto es, $\mathrm{der}(\mathcal{C}^\infty(M)) = \Gamma(TM)$. Si f y g son funciones suaves en M y X es un campo vectorial, el conmutador $[X,f](g)$ nos da

$$[X,f](g) = X(fg) - fX(g) = X(f)g, \tag{2.13}$$

y si h es otra función suave obtenemos

$$[[X, f], h](g) = 0, \tag{2.14}$$

lo que quiere decir que X es un operador diferencial de orden 1. Por lo tanto, el símbolo principal de X con la función f evaluado en la función g es $X(f)g$.

2.4.1. Derivaciones del álgebra de superfunciones

Sea $(M|\mathcal{R}M)$ una súper variedad de súper dimensión $(m|n)$ y p un punto en M. El álgebra $\mathcal{R}_pM$ es súper conmutativa y libre de rango n; por lo tanto es isomorfa a $\bigwedge \mathbf{S}_p^*M$, el álgebra exterior del espacio de codirecciones impares. Por el teorema 1.29, tenemos que su espacio de súper derivaciones es isomorfo a $\mathbf{S}_pM \otimes \bigwedge \mathbf{S}_p^*M$.

2.26 Definición. El **haz de derivaciones puntales** de una súper variedad $(M|\mathcal{R}M)$ es

$$\mathbf{der}(\mathcal{R}M) := \bigsqcup_{p\in M} \mathbf{der}(\mathcal{R}_pM) \tag{2.15}$$

Estas derivaciones son endomorfismos lineales del haz $\mathcal{R}M$.

2.27 Proposición. *Si $\mathcal{X}$ una sección de $\mathbf{der}(\mathcal{R}M)$, entonces $\mathcal{X}$ es un operador diferencial de orden* 0.

Demostración. La fibra sobre el punto $p \in M$ de $\mathbf{der}(\mathcal{R}M)$ actúa en el álgebra $\mathcal{R}_pM$. Si f una función suave en M y $\eta_p \in \mathcal{R}_pM$ entonces $\mathcal{X}_p(f(p)\eta_p) = f(p)\mathcal{X}_p(\eta_p)$, donde $\eta_p \in \mathcal{R}_pM$. Esto significa que en cada fibra tenemos una aplicación $\mathbb{R}$-lineal; esta aplicación se extiende a una sección de $\mathbf{der}(\mathcal{R}M)$ que es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal. Esto es, si η es una súper función, $\mathcal{X}(f\eta) = f\mathcal{X}(\eta)$. Por lo tanto, $[\mathcal{X}, f](\eta) = 0$. $\square$

Motivados por la discusión al inicio de esta sección, definiremos el haz tangente como un haz de operadores diferenciales de orden menor o igual que 1 en las secciones de $\mathcal{R}M$. A pesar de que no daremos una descripción explícita de este haz como súper variedad, veremos que como haz de $\mathcal{R}M$-módulos el haz tangente está descrito por una sucesión exacta corta cuyo significado algebraico es claro.

Sean $\mathcal{X}$ una superderivación del álgebra $\Gamma(\mathcal{R}M)$, ρ una sección de $\mathcal{R}M$ y f una función suave en M. Nuestro propósito es describir un haz vectorial $\mathbf{Der}(\mathcal{R}M)$ cuyas secciones sean las superderivaciones del álgebra $\Gamma(\mathcal{R}M)$. Para ello, notemos que $\Gamma(\mathcal{R}M) = \mathcal{C}^\infty(M) \oplus \Gamma(\mathcal{R}^{\geq 1}M)$; por lo tanto, $\mathcal{X}(f) = X(f) + \eta$, donde X es un campo vectorial en M y η es una sección de $\mathcal{R}M$.

Eligamos ahora un abierto $U \subset M$ tal que $\mathcal{R}U \cong U \times \bigwedge \mathbf{S}^*$, donde $\mathbf{S}^*$ es un espacio vectorial de dimensión n. Notemos que en este abierto existen secciones $\xi_1, \ldots, \xi_n$ que generan el espacio $\Gamma(U \times \bigwedge \mathbf{S}^*) = \mathcal{C}^\infty(U, \bigwedge \mathbf{S}^*)$. Las superderivaciones de este espacio son funciones suaves en U con valores en $\mathbf{der}(\bigwedge \mathbf{S}^*) \cong \mathbf{S} \otimes \bigwedge \mathbf{S}^*$. Esto implica que una tal superderivación D es de la forma $X + F$, donde X es un campo vectorial en U y F es una derivación del álgebra exterior. Por lo tanto, tenemos la descomposición

$$\mathbf{der}(\Gamma(\mathcal{R}U)) \cong \Gamma\left((TU \oplus \mathbf{S}U) \otimes \bigwedge \mathbf{S}^*U\right),$$

donde $\mathbf{S}U = U \times \mathbf{S}$ y TU es el haz tangente del abierto U. El haz $\mathbf{S}U \otimes \bigwedge \mathbf{S}^*U$ es de hecho el haz $\mathbf{der}(\bigwedge \mathbf{S}^*U)$. Por lo tanto, al elegir generadores locales en el abierto U obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbf{der}(\bigwedge \mathbf{S}^*U) \longrightarrow \mathbf{Der}(\mathcal{R}U) \longrightarrow TU \otimes \mathcal{R}U \longrightarrow 0 \tag{2.16}$$

que se escinde.

Para extender esta descripción del haz de derivaciones de $\Gamma(\mathcal{R}M)$ necesitamos el siguiente concepto:

2.28 Definición. Sea $\mathcal{R}M$ un haz de superálgebras sobre M. Una **conexión de superálgebras en el haz** $\mathcal{R}M$ es una conexión lineal ∇ en $\mathcal{R}M$ tal que si ω y η son secciones de $\mathcal{R}M$ entonces

$$\nabla_X(\omega\eta) = \nabla_X(\omega)\eta + \omega\nabla_X(\eta),$$

para todo campo vectorial X en M, y tal que $\nabla_X(\gamma) \equiv 0$ donde γ es el automorfismo de estructura de $\Gamma(\mathcal{R}M)$.

Esto es, para cada campo vectorial X en M obtenemos una superderivación par del álgebra $\Gamma(\mathcal{R}M)$.

Una conexión lineal se llama **localmente plana** si para todo punto p en M existe un abierto U que contiene a M tal que su tensor de curvatura R^∇ es idénticamente cero en el abierto U. Una tal conexión es equivalente a la elección de generadores locales en una trivialización del haz sobre el abierto U. Para probar esta afirmación, recordemos que un haz vectorial trivial $U \times W$ de rango k (i.e. $\dim W = k$) tiene una conexión canónica, la conexión trivial $\nabla^{\mathbf{0}}$, tal que si $\rho : U \to W$ es cualquier función constante, entonces $\nabla^{\mathbf{0}}(\rho) = 0$. Toda otra sección de $U \times W$ es una función suave $\eta : U \to W$ es, puntualmente, un elemento de W: $\eta(p) \in W$. Al elegir una base $\{w_1, \dots w_r\}$ de W, tenemos que cada función suave η es de la forma $\eta = \eta_1 w_1 + \cdots + \eta_r w_r$ donde $\eta_1, \dots, \eta_r$ son funciones suaves en U. Entonces, $\nabla^{\mathbf{0}}_X(\eta) = X(\eta_1)w_1 + \cdots + X(\eta_r)w_r$. Por lo tanto, si $U \subset M$ es un abierto trivializante de un haz vectorial WM entonces al elegir secciones generadoras sobre U obtenemos automáticamente la conexión plana $\nabla^{\mathbf{0}}$ en $WU \cong U \times W$. Es por eso que la sucesión exacta (2.16) se escinde.

2.29 Teorema. *Sea* $\boldsymbol{Der}(\mathcal{R}M)$ *el haz vectorial cuyas secciones son las superderivaciones del álgebra* $\Gamma(\mathcal{R}M)$. *Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta de haces vectoriales:*

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{der}(\mathcal{R}M) \xhookrightarrow{\iota} \boldsymbol{Der}(\mathcal{R}M) \xrightarrow{\sigma} TM \otimes \mathcal{R}M \longrightarrow 0 \tag{2.17}$$

donde ι *es la inclusión y* σ *es el símbolo principal.*

Demostración. Sea ∇ una conexión de álgebras en $\mathcal{R}M$. La inclusión de $\mathbf{der}(\mathcal{R}M)$ en $\mathbf{Der}(\mathcal{R}M)$ está dada de la siguiente manera: si $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathbf{der}(\mathcal{R}M))$ y $\mathcal{Y} \in \Gamma(\mathbf{der}(\mathcal{R}M))$ es tal que $\mathcal{Y}_p = \mathcal{X}_p$ entonces, por las propiedades de los operadores diferenciales (proposición A.14) tenemos que $\mathcal{Y}$ factoriza por el espacio $\mathrm{Jet}^1(\mathcal{R}M)$, esto es

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Jet}^1_p(\mathcal{R}M) \arrow[r, "\mathcal{Y}_p"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_p"'] & \mathcal{R}_pM \\ \mathcal{R}_pM \arrow[ur, "\mathcal{X}_p"'] & \end{tikzcd}$$

para todo punto p en M. Los operadores en $\mathbf{der}(\mathcal{R}M)$ se caracterizan por la propiedad siguiente: si η y ψ son secciones de $\mathcal{R}M$ entonces

$$\mathcal{X}_p(\mathrm{jet}^1_p(\eta\psi)) = \mathcal{X}_p(\mathrm{jet}^1_p\,\eta)\psi_p + (-1)^{|\mathcal{X}||\eta|}\eta_p\mathcal{X}_p(\psi_p). \tag{2.18}$$

Usando la conexión ∇ en $\mathcal{R}M$, obtenemos la identificación

$$\mathrm{Jet}^1(\mathcal{R}M) \underset{\nabla}{\cong} \mathrm{Sym}^{\leq 1}(T^*M)\otimes \mathbf{End}(\mathcal{R}M),$$

y la inclusión ι está dada por la cadena de inclusiones

$$\mathbf{der}(\mathcal{R}M) \subset \mathbf{End}(\mathcal{R}M) \subset \mathrm{Sym}^{\leq 1}(T^*M)\otimes \mathbf{End}(\mathcal{R}M).$$

Como ya vimos, las secciones de $\mathbf{der}(\mathcal{R}M)$ son operadores diferenciales de orden 0 y por lo tanto su símbolo principal es nulo. Esto prueba que $\mathrm{Im}(\iota) = \ker(\sigma)$.

Ahora probaremos que σ es suprayectiva. Sea $X\otimes r$ una sección de $TM\otimes \mathbf{Zend}(\mathcal{R}M) = TM\otimes\mathcal{R}M$. Definimos un mapeo $g : \Gamma\,(TM\otimes\mathcal{R}M) \to \Gamma\,(\mathbf{Der}(\mathcal{R}M))$ dado por $g(X\otimes r) = r\nabla_X$; sean ahora $\eta,\psi\in\Gamma\,(\mathcal{R}M)$ y calculamos

$$g(X\otimes r)(\eta\psi) = r(\nabla_X(\eta)\psi + (-1)^{|\nabla_X||\eta|}\eta\nabla_X(\psi)) \tag{2.19}$$

lo cual prueba que en efecto $g(X\otimes r)$ es una superderivación ya que ∇_X lo es. El símbolo principal del operador $r\nabla_X$ es

$$\begin{aligned}\sigma(r\nabla_X; f)(\eta) &= [r\nabla_X; f](\eta)\\ &= r\nabla_X(f\eta) - fr\nabla_X(\eta)\\ &= rX(f)\eta + rf\nabla_X(\eta) - fr\nabla_X(\eta)\\ &= rX(f)\eta \qquad\qquad (\text{porque } fr = rf)\\ &= X\otimes r(f\otimes\eta)\end{aligned} \tag{2.20}$$

lo cual prueba que $\sigma\circ g = \mathrm{id}_{TM\otimes\mathcal{R}M}$ y por lo tanto, σ es sobre. □

2.30 Observación. La descomposición $\mathbf{Der}(\mathcal{R}M) \cong \mathbf{der}(\mathcal{R}M)\oplus(TM\otimes\mathcal{R}M)$, al igual que la descomposición local $\mathbf{Der}\,\mathcal{R}U \cong (TU\oplus\mathbf{S}U)\otimes\mathcal{R}M$, depende de la elección de generadores y de una conexión de álgebras ∇ en el haz $\mathcal{R}M$ y por lo tanto no es natural.

Ahora mostraremos la estructura de superálgebra de Lie en el espacio $\Gamma\,(\mathbf{Der}(\mathcal{R}M))$. Si $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son superderivaciones homogéneas, definimos el **supercorchete de Lie** de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ como

$$[\![\mathcal{X},\mathcal{Y}]\!] = \mathcal{X}\mathcal{Y} - (-1)^{|\mathcal{X}|\mathcal{Y}||}[\![\mathcal{Y},\mathcal{X}]\!] \tag{2.21}$$

2.31 Proposición. *El espacio* $\Gamma\,(\boldsymbol{Der}(\mathcal{R}M))$ *equipado con el supercorchete* (2.21) *es una superálgebra de Lie; esto es, se satisfacen las siguientes igualdades*

$$[\![\mathcal{X},\mathcal{X}]\!] = 0 \qquad \textit{(superalternancia)}$$

y

$$(-1)^{|\mathcal{X}||\mathcal{Z}|}[\![[\![\mathcal{X},\mathcal{Y}]\!],\mathcal{Z}]\!] + (-1)^{|\mathcal{Y}||\mathcal{Z}|}[\![[\![\mathcal{Z},\mathcal{X}]\!],\mathcal{Y}]\!] + (-1)^{|\mathcal{Y}||\mathcal{X}|}[\![[\![\mathcal{Y},\mathcal{Z}]\!],\mathcal{X}]\!] = 0 \tag{2.22}$$

llamada la superidentidad de Jacobi*; donde $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ son superderivaciones.*

2.4.2. La diferencial y la codiferencial de una superfunción

Con nuestra descripción del haz tangente de una supervariedad $(M|\mathcal{R}M)$ definiremos ahora la diferencial de una aplicación $(\phi|\Phi) : (M|\mathcal{R}M) \to (N|\mathcal{R}M)$. Veremos que además de la extensión de la diferencial F_* de una aplicación $F : M \to N$ entre variedades suaves, tenemos una aplicación adicional asociada a ϕ que denominamos diferencial auxiliar.

Como ya vimos, el haz de superderivaciones $\mathbf{Der}(\mathcal{R}M)$ está generado por el haz $TM \oplus \mathbf{S}M$. Vimos también en la proposición 2.22 que para todo morfismo de supervariedades $\mathbb{Z}$-graduadas existe un morfismo $F : \mathbf{S}M \to \mathbf{S}N$ de haces vectoriales dado por $F = (\widetilde{\Phi})^*$. La diferencial de una superfunción está compuesta por la diferencial de la aplicación ϕ y el morfismo F, esto es

$$\begin{aligned}(\phi|\Phi)_* : TM \oplus \mathbf{S}M &\to \phi^*(TN \oplus \mathbf{S}N)\\ X \oplus \sigma &\mapsto \phi_*(X) \oplus F(\sigma)\end{aligned}$$

Esta aplicación es una transformación lineal en cada fibra y por lo tanto es un morfismo de haces vectoriales. Cabe destacar que esta transformación no puede extenderse a todo $\mathbf{Der}(\mathcal{R}M)$ ya que la aplicación Φ es un operador diferencial no necesariamente de orden 0.

2.32 Definición. Sea $(\phi|\Phi) : (M|\mathcal{R}M) \to (N|\mathcal{R}N)$ una aplicación supersuave. La **diferencial de** $(\phi|\Phi)$ se define como

$$\begin{aligned}(\phi|\Phi)_* = \phi_* \oplus F : \Gamma\left(TM \oplus \mathbf{S}M\right) &\to \Gamma\left(\phi^*(TN \oplus \mathbf{S}N)\right)\\ X \oplus \sigma &\mapsto \phi_*(X) \oplus F(\sigma),\end{aligned}$$

donde F es la aplicación dual de $\widetilde{\Phi} : \mathbf{S}^*N \to \phi^*\mathbf{S}^*M$ descrita en la proposición 2.22.

Al igual que en el caso clásico, la superdiferencial es multiplicativa:

2.33 Proposición. *Sean $(\phi|\Phi) : (M|\mathcal{R}M) \to (N|\mathcal{R}N)$ y $(\psi|\Psi) : (N|\mathcal{R}N) \to (K|\mathcal{R}K)$ aplicaciones supersuaves. La superdiferencial de $(\psi|\Psi) \circ (\phi|\Phi)$ es $(\psi|\Psi)_* \circ (\phi|\Phi)_*$.*

Demostración. Notemos primeramente que $(\psi|\Psi) \circ (\phi|\Phi) = (\psi \circ \phi|\Phi \circ \Psi)$. Sean $F = (\widetilde{\Phi})^*$ y $G = (\widetilde{\Psi})$ las aplicaciones asociadas a Φ y a Ψ en la proposición 2.22; esto es,

$$\begin{aligned}F : \Gamma\left(\mathbf{S}M\right) &\to \Gamma\left(\mathbf{S}N\right)\\ G : \Gamma\left(\mathbf{S}N\right) &\to \Gamma\left(\mathbf{S}K\right).\end{aligned}$$

Por definición, tenemos que $(\phi|\Phi)_* = \phi_* \oplus F$ y $(\psi|\Psi)_* = \psi_* \oplus G$; por lo tanto

$$[(\psi|\Psi) \circ (\phi|\Phi)]_* = (\psi \circ \phi|\Phi \circ \Psi)_* = (\psi \circ \psi)_* \oplus G \circ F = (\psi|\Psi)_* \circ (\phi|\Psi)_* \qquad \square$$

2.34 Nota. Consideremos nuevamente las supervariedades $\mathbb{Z}$-graduadas y sus morfismos. La proposición anterior implica que la asignación $(M|\mathcal{R}M) \longrightarrow (M|\mathbf{S}M)$ es un funtor $\mathcal{F} : \mathbf{SMfld} \to \mathbf{SMfld}_{\mathbb{Z}}$. En particular, observamos que los morfismos entre supervariedades $\mathbb{Z}$-graduadas son las aplicaciones superdiferenciales de los correspondientes morfismos entre supervariedades.

2.4.3. La diferencial auxiliar

Recordemos que la aplicación F está definida como el dual de la aplicación $\widetilde{\Phi}$ en el cociente $\mathcal{R}^{\geq 1}N/\mathcal{R}^{\geq 2}N$, la cual está bien definida ya que Φ preserva el ideal $\Gamma(\mathcal{R}^{\geq 1}N)$ y por lo tanto también preserva la filtración (2.6).

Sea ahora f una función suave en N y recordemos que $\mathcal{C}^\infty(N) = \ker(\varepsilon) \subset \Gamma(\mathcal{R}M)$, y que $\Phi(f)$ es una sección par. También se estableció que $\Phi(f) - f \circ \phi$ es una sección del haz $\mathcal{R}^{+,\geq 2}M$. Si consideramos la clase de $\Phi(f) + f \circ \phi$ en el cociente $\Gamma\left(\mathcal{R}^{+,\geq 2}M/\mathcal{R}^{+,\geq 4}M\right) = \Gamma\left(\bigwedge^2 \mathbf{S}^*M\right)$ tenemos la siguiente

2.35 Proposición. *La aplicación* $[\Phi, f] : \mathcal{C}^\infty(N) \to \Gamma\left(\bigwedge^2 \mathbf{S}^*M\right)$ *es una derivación a lo largo de* ϕ. *Esto es*

$$[\Phi, fg] = [\Phi, f] \cdot (g \circ \phi) + (f \circ \phi) \cdot [\Phi, g] \tag{2.23}$$

para todo par de funciones suaves f *y* g *en* N, *y donde definimos* $[\Phi, f] := [\Phi, f](\mathbf{1})$ *con* $\mathbf{1}$ *la sección idénticamente* 1.

Demostración. El conmutador de Φ con fg está dado por

$$[\Phi, fg] = \Phi(fg) - (fg) \circ \phi = \Phi(f)\Phi(g) - (f \circ \phi)(g \circ \phi).$$

La segunda igualdad es cierta porque Φ es un homomorfismo de superálgebras. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi(f)\Phi(g) - (f \circ \phi)(g \circ \phi) &= \Phi(f)\Phi(g) + \Phi(f)(g \circ \phi) - \Phi(f)(g \circ \phi) \\ +(f \circ \phi)(g \circ \phi) &= \Phi(f)\big(\Phi(g) - g \circ \phi\big) + (\Phi(f) - f \circ \phi)(g \circ \phi) \\ &= ([\Phi, f] + f \circ \phi)([\Phi, g]) + ([\Phi, f])(g \circ \phi) \\ &= [\Phi, f][\Phi, g] + [\Phi, g](f \circ \phi) + ([\Phi, f])(g \circ \phi); \end{aligned}$$

notemos ahora que $[\Phi, f]$ y $[\Phi, g]$ son secciones de $\Gamma\left(\mathcal{R}^{+,\geq 2}M\right)$ y por lo tanto su producto es una sección de $\Gamma\left(\mathcal{R}^{+,\geq 4}M\right)$. Esto significa que

$$[\Phi, f][\Phi, g] + [\Phi, g](f \circ \phi) + ([\Phi, f])(g \circ \phi) \equiv [\Phi, g](f \circ \phi) + ([\Phi, f])(g \circ \phi) \mod \Gamma\left(\mathcal{R}^{+,\geq 4}M\right)$$

y por lo tanto Φ es una derivación cuando toma valores en el cociente $\Gamma\left(\bigwedge^2 \mathbf{S}^*M\right)$. □

2.36 Corolario. *La aplicación* $\Phi : \mathcal{C}^\infty(N) \to \Gamma\left(\bigwedge^2 \mathbf{S}^*M\right)$ *es un operador diferencial de orden* 1 *y por lo tanto factoriza a través del haz cotangente de* N *mediante*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(N) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "d"'] & \Gamma\left(\bigwedge^2 \mathbf{S}^*M\right) \\ \Gamma\left(T^*N\right) \arrow[ur, "\Phi^d"'] & \end{tikzcd}$$

donde d *es la derivada exterior.*

2.37 Definición. Sea $(\phi|\Phi) : (M|\mathcal{R}M) \to (N|\mathcal{R}N$ una aplicación supersuave. La **codiferencial auxiliar** de esta aplicación es el mapeo

$$(\phi|\Phi)^! : \Gamma\left(T^*M\right) \to \Gamma\left(\bigwedge^2 \mathbf{S}M\right)$$

dado por $(\phi|\Phi)^!(df) = \Phi(f) - f \circ \phi + \mathcal{R}^{\geq 3}M$.

Capítulo 3

Supergeometría diferencial

En este capítulo estudiaremos objetos que permiten estudiar la geometría de supervariedades más a fondo. En la primera sección definimos las superformas diferenciales en una supervariedad. Veremos que, salvo los signos adecuados, el comportamiento combinatorio y diferencial de estos objetos es idéntico al de las formas diferenciales clásicas. Después, estudiaremos las superconexiones en el superhaz tangente (o superconexiones afines) y probaremos extensiones de resultados clásicos. Por último, veremos que el Lema Fundamental de la Geometría Riemanniana (la existencia y unicidad de la conexión de Levi-Civita) se extiende para el caso de métricas superriemannianas pares.

§3.1. Superformas diferenciales

En esta sección definiremos las superformas diferenciales en una supervariedad $(M|\mathcal{R}M)$, así como el producto cuña y la derivada exterior en el espacio de superformas.

Recordemos que el haz dual del haz tangente es el haz $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}\left(\Gamma\left(TM\right), \mathcal{C}^\infty(M)\right)$ de morfismos $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineales entre el haz tangente y el álgebra de funciones suaves. En el caso de supervariedades, el superhaz tangente corresponde al haz de superderivaciones $T(M|\mathcal{R}M) \cong \mathbf{Der}(\mathcal{R}M)$. Por lo tanto, definimos el superhaz cotangente como el haz vectorial

$$T^*(M|\mathcal{R}M) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{R}M}(\mathbf{Der}(\mathcal{R}M), \mathcal{R}M)$$

de superhomomorfismos lineales entre los superespacios $\Gamma\left(\mathbf{Der}(\mathcal{R}M)\right)$ y $\mathcal{R}M$. Al igual que en el caso de variedades suaves, tenemos una aplicación

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle : T(M|\mathcal{R}M) \times_M T^*(M|\mathcal{R}M) &\to \mathcal{R}M \\ (\mathcal{X}, \alpha) &\mapsto \alpha(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

que denominamos **emparejamiento canónico**; el haz $T(M|\mathcal{R}M) \times_M T^*(M|\mathcal{R}M)$ es simplemente el haz vectorial sobre M donde $X \in \mathbf{Der}_p(\mathcal{R}M)$ y $\alpha \in \mathbf{Der}_p^*(\mathcal{R}M)$.

Recordemos que una k-forma diferencial β en una variedad suave M es una sección de $\bigwedge^k T^*M$; esto es, β es una aplicación k-multilineal sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$ y alternante en sus argumentos. De la misma manera, una superforma diferencial Ω es una sección de $\bigwedge^k T^*(M|\mathcal{R}M)$.

Si ω es una k-forma diferencial en una variedad suave M y σ es una permutación de $\{1, \dots, k\}$ entonces, para $X_1, \dots, X_k$ campos vectoriales en M tenemos que

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\omega(X_1 \dots, X_k)$$

donde $\operatorname{sgn}(\sigma)$ denota la signatura de la permutación σ. Como una superforma diferencial Ω debe ser $\Gamma(\mathcal{R}M)$-supermultilineal (esto es, lineal y graduada), utilizaremos las signaturas relativas de una permutación $\sigma \in S_k$ (cf. sección 1.4.1).

3.1 Definición. Una **superforma diferencial de grado** k en una supervariedad $(M|\mathcal{R}M)$ es una aplicación k-multilineal sobre $\mathbb{R}$

$$\Omega : \Gamma(T(M|\mathcal{R}M)) \times \cdots \times \Gamma(T(M|\mathcal{R}M)) \to \Gamma(\mathcal{R}M)$$

tal que es $\Gamma(\mathcal{R}M)$-supermultilineal, en el sentido que para toda superfunción f y cualesquiera k superderivaciones $X_1, \dots, X_k$ tenemos que

$$\Omega(X_1, X_2, \dots, fX_l, \dots, X_k) = (-1)^{|f|(|X_1|+\cdots+|X_{l-1}|)} f\Omega(X_1, X_2, \dots, X_l, \dots, X_k),$$

y además es superalternante:

$$\Omega(X_{\tau^{-1}(1)}, \dots, X_{\tau^{-1}(k)}) = \frac{\operatorname{sgn}(\tau)}{\operatorname{sgn}^-(\tau)}\Omega(X_1, \dots, X_k)$$

para toda permutación τ.

Al igual que en el caso de las variedades suaves, el espacio de superformas diferenciales tiene también un producto y una derivada exterior, compatibles con la estructura graduada de $\Gamma(\mathcal{R}M)$

Si Ω y Λ son superformas diferenciales de grados k y l respectivamente, definimos su superproducto cuña como

$$\begin{aligned}\Omega \wedge \Lambda(X_1, \dots, X_k, X_{k+1} \dots, X_{k+l}) = \\ \sum_{\sigma \in S_{k+l}/S_k \times S_l} \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)}{\operatorname{sgn}^-(\sigma)} \Omega(X_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, X_{\sigma^{-1}(k)}) \Lambda(X_{\sigma^{-1}(k+1)}, \dots, X_{\sigma^{-1}(k+l)})\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $S_{k+l}/S_k \times S_l$ es el grupo de permutaciones que no preservan los conjuntos $\{1, \dots, l\}$ y su complemento, ya que los elementos del producto directo $S_k \times S_l$ los preservan.

La derivada exterior está dada de la misma manera que en el caso de formas diferenciales en variedades suaves: si Ω es una k-superforma, entonces

$$\begin{aligned} d\Omega(X_0, \dots, X_k) := & \sum_{\sigma \in S_{k+1}/S_1 \times S_k} \frac{\operatorname{sgn} \sigma}{\operatorname{sgn}^- \sigma} X_{\sigma^{-1}(0)} \Omega(X_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, X_{\sigma^{-1}(1)}) \\ & - \sum_{\sigma \in S_{k+1}/S_2 \times S_{k-1}} \frac{\operatorname{sgn} \sigma}{\operatorname{sgn}^- \sigma} \Omega([\![X_{\sigma^{-1}(0)}, X_{\sigma^{-1}(1)}]\!], X_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, X_{\sigma^{-1}(k)}) \end{aligned}$$

donde el signo $\widehat{X_\mu}$ significa que la superderivación X_μ se omite. En particular, si f es una superfunción y X una superderivación, tenemos el resultado clásico $df(X) = X(f)$.

§3.2. Superconexiones afines

3.2 Definición. Una **superconexión afín** es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$\nabla : \Gamma\left(T(M|\mathcal{R}M)\right) \times \Gamma\left(T(M|\mathcal{R}M)\right) \to \Gamma\left(T(M|\mathcal{R}M)\right)$$

tal que si X y Y son superderivaciones y f es una superfunción entonces

$$\begin{aligned}\nabla_{fX}(Y) &= f\nabla_X(Y)\\ \nabla_X(fY) &= X(f)Y + (-1)^{|f||X|} f\nabla_X(Y)\end{aligned}$$

Notemos que nos estamos restringiendo al caso de superconexiones pares. Esto es, aplicaciones que preservan la $\mathbb{Z}_2$-graduación.

3.3 Proposición. *Sean ∇ y $\widetilde{\nabla}$ superconexiones afines en la supervariedad $(M|\mathcal{R}M)$ y sea X una superderivación en $(M|\mathcal{R}M)$. La aplicación*

$$(\nabla - \widetilde{\nabla})_X : \Gamma\left(T(M|\mathcal{R}M)\right) \to \Gamma\left(T(M|\mathcal{R}M)\right)$$

es $\Gamma\left(\mathcal{R}M\right)$-superlineal.

Demostración. Sea Y una superderivación y consideremos una superfunción arbitraria η. Si definimos $A(X,Y) = (\nabla - \widetilde{\nabla})_X(Y)$, calculamos

$$\begin{aligned}A(X,\eta Y) = (\nabla - \widetilde{\nabla})_X(\eta Y) = \nabla_X(\eta Y) - \widetilde{\nabla}_X(\eta Y) &= X(\eta)Y + (-1)^{|\eta||X|}\eta\nabla_X Y\\ &- X(\eta)Y - (-1)^{|\eta||X|}\widetilde{\nabla}_X Y\\ &= (-1)^{|\eta||X|}\eta(\nabla - \widetilde{\nabla})_X(Y)\end{aligned}$$

por lo que la aplicación $(\nabla - \widetilde{\nabla})_X$ es $\Gamma\left(\mathcal{R}M\right)$-superlineal. $\square$

Consideremos ahora el superespacio

$$\Gamma\left(\bigwedge^k T^*(M|\mathcal{R}M) \otimes T(M|\mathcal{R}M)\right)$$

de k-superformas diferenciales con valores en el superhaz tangente. Estas aplicaciones son k-supermultilineales y superalternantes en $\Gamma\left(T(M|\mathcal{R}M)\right)$ y a cada k superderivaciones le asocian una superderivación. Al elegir una superconexión afín en $(M|\mathcal{R}M)$, este superesacio tiene una derivada exterior definida de la siguiente manera:

3.4 Definición. Sea A una sección de $\bigwedge^k T^*(M|\mathcal{R}M) \otimes T(M|\mathcal{R}M)$ y sea ∇ una superconexión afín en $(M|\mathcal{R}M)$. La **derivada exterior torcida** de A respecto a ∇ está dada por

$$\begin{aligned}d^\nabla A(X_0,\ldots,X_k) := &\sum_{\sigma\in S_{k+1}/S_1\times S_k} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{\operatorname{sgn}^-\sigma}\nabla_{X_{\sigma^{-1}(0)}} A(X_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,X_{\sigma^{-1}(1)})\\ &- \sum_{\sigma\in S_{k+1}/S_2\times S_{k-1}} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{\operatorname{sgn}^-\sigma} A(\llbracket X_{\sigma^{-1}(0)}, X_{\sigma^{-1}(1)}\rrbracket, X_{\sigma^{-1}(2)},\ldots,X_{\sigma^{-1}(k)})\end{aligned} \tag{3.2}$$

Observemos que las 0-formas son solamente las secciones de $T(M|\mathcal{R}M)$.

Asociado al superhaz tangente, tenemos el espacio de superendomorfismos

$$\Gamma(\mathbf{End}(T(M|\mathcal{R}M)).$$

Estas aplicaciones, al igual que los endomorfismos clásicos de haces vectoriales, son aplicaciones superlineales sobre las superfunciones; esto es, si F es un endomorfismo de $T((M|\mathcal{R}M))$ y X es una superderivación en $(M|\mathcal{R}M)$ entonces

$$F(\eta X) = (-1)^{|\eta||F|}\eta F(X), \tag{3.3}$$

para cualquier superfunción η. Si ∇ es una superconexión afín en $(M|\mathcal{R}M)$, entonces tenemos una superconexión en el superhaz de superendomorfismos, que denotamos por $\mathbf{End}(\nabla)$, definida por

$$(\mathbf{End}\,\nabla_X F)(Y) = \nabla_X(FY) - (-1)^{|X||F|}F(\nabla_X Y). \tag{3.4}$$

3.5 Nota. Esta definición fuerza al endomorfismo $\mathbf{End}(\nabla)_X F$ a ser $\Gamma\,(\mathcal{R}M)$-lineal, ya que (en el caso totalmente par)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{End}\,\nabla_X F)(\eta Y) &= \nabla_X(\eta FY) - F(\nabla_X(\eta Y)) \\
&= X(\eta)FY + \eta\nabla_X(FY) - F(X(\eta)Y + \eta\nabla_X Y) \\
&= X(\eta)FY + \eta\nabla_X(FY) - X(\eta)FY - \eta F(\nabla_X Y) \\
&= \eta(\nabla_X(F(Y)) - \eta F(\nabla_X Y) \\
&= \eta(\mathbf{End}\,\nabla_X F)Y.
\end{aligned}$$

El caso impar es análogo.

La definición 3.4 de la derivada exterior toricda se extiende también a la superconexión $\mathbf{End}(\nabla)$, y la denotamos por $d^{\mathbf{End}\,\nabla}$.

3.6 Definición. Sea ∇ una superconexión afín y sean X y Y superderivaciones. La **curvatura** de ∇ es el supertensor

$$R^{\nabla}_{X,Y} = [\![\nabla_X, \nabla_Y]\!] - \nabla_{[\![X,Y]\!]}.$$

La **torsión** de ∇ es el supertensor $T^{\nabla}(X,Y) = \nabla_X Y - (-1)^{|X||Y|}\nabla_Y X - [\![X,Y]\!]$.

3.7 Proposición. *La curvatura R^{∇} es una 2-superforma con valores en $\boldsymbol{End}(T(M|\mathcal{R}M))$.*

Demostración. De la definición 3.4 obtenemos que $d^{\nabla}\circ d^{\nabla}Z(X,Y) = R^{\nabla}_{X,Y}Z$ y por lo tanto R^{∇} es una 2-superforma con valores en $\mathbf{End}(T(M|\mathcal{R}M))$. □

Para el siguiente resultado, necesitaremos un operador combinatorio. Si A es una aplicación k-multilineal sobre algún espacio vectorial W, definimos

$$\mathfrak{S}_k(A)(w_1,\ldots,w_k) := \sum_{\sigma\in S_k} A(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)}); \tag{3.5}$$

a este operador lo denomimanos **suma cíclica**. Por ejemplo, la identidad de Jacobi para el supercorchete de Lie es equivalente a la ecuación

$$\mathfrak{S}_3\big((-1)^{|X||Z|}[\![[\![X,Y]\!],Z]\!]\big) = 0$$

Definimos también el operador $R^\nabla(X,Y,Z)$ por la ecuación

$$R^\nabla(X,Y,Z) = R^\nabla_{X,Y}(Z).$$

Concentraremos nuestro estudio en superconexiones libres de torsión; esto es, superconexiones tales que $T^\nabla \equiv 0$.

3.8 Proposición (Primera identidad de Bianchi)**.** *Sea* ∇ *una superconexión afín en* $(M|\mathcal{R}M)$ *libre de torsión (i.e.* $T^\nabla \equiv 0$*) y sean* X, Y, Z *superderivaciones. Entonces*

$$\mathfrak{S}_3((-1)^{|X||Z|}R(X,Y,Z)) = 0 \tag{3.6}$$

Demostración. Recordemos que el operador de curvatura está dado por

$$R^\nabla_{X,Y} = [\![\nabla_X, \nabla_Y]\!] - \nabla_{[\![X,Y]\!]}.$$

Al calcular la suma cíclica de $(-1)^{|X||Z|}R^\nabla_{X,Y}Z$ obtenemos

$$\mathfrak{S}_3\big((-1)^{|X||Z|}([\![\nabla_X, \nabla_Y]\!](Z) - \nabla_{[\![X,Y]\!]}Z)\big) = \mathfrak{S}_3\big((-1)^{|X||Z|}[\![[\![X,Y]\!],Z]\!]\big) = 0,$$

ya que la última suma cíclica es la identidad de Jacobi. □

3.9 Proposición (Segunda identidad de Bianchi)**.** *Sea* ∇ *una superconexión afín libre de torsión en la supervariedad* $(M|\mathcal{R}M)$*. Entonces*

$$d^{\boldsymbol{End}(\nabla)}R^\nabla = 0 \tag{3.7}$$

Demostración. Por la definición de la derivada exterior torcida, tenemos

$$\begin{aligned} d^{\mathbf{End}(\nabla)}R^\nabla(X,Y,Z) &= \mathfrak{S}_3((-1)^{|X||Z|}\,\mathbf{End}(\nabla)_X R^\nabla_{Y.Z}) - \mathfrak{S}_3((-1)^{|X||Z|}R^\nabla_{[\![X,Y]\!],Z}) \\ &= \mathfrak{S}_3((-1)^{|X||Z|}[\![\nabla_X, R^\nabla_{Y,Z}]\!]) - \mathfrak{S}_3(R^\nabla_{[\![X,Y]\!],Z}) \\ &= \mathfrak{S}_3((-1)^{|X||Z|}[\![\nabla_X, [\![\nabla_Y, \nabla_Z]\!]]\!]) \\ &\quad + \mathfrak{S}_3((-1)^{|X||Z|}[\![\nabla_{[\![X,Y]\!]}, \nabla_Z]\!]) - \mathfrak{S}_3((-1)^{|X||Z|}[\![\nabla_{[\![X,Y]\!]}, \nabla_Z]\!]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

§3.3. La superconexión de Levi-Civita

En esta última sección estudiaremos los fundamentos de la supergeometría riemanniana. Probaremos la existencia y unicidad de la superconexión de Levi-Civita para métricas pares, y también probaremos que las simetrías usuales del tensor de curvatura clásico se extienden, salvo signos, al supertensor de curvatura. Nuestra referencia principal es [3].

3.10 Definición. Sea $(M|\mathcal{R}M)$ una supervariedad. Una **supermétrica riemanniana** es una sección γ del haz $\mathrm{Sym}^2(T(M|\mathcal{R}M))$ que es no degenerada; esto es, si $X \neq 0$ es una superderivación, entonces existe una superderivación Y tal que $\gamma(X,Y) \neq 0$.

El hecho de que γ es supersimétrica se traduce en la siguiente ecuación: si X y Y son derivaciones homogéneas, entonces $\gamma(X,Y) = (-1)^{|X||Y|}\gamma(Y,X)$. Una métrica es **par** si $\gamma(X,Y) = 0$ cuando X y Y sean homogéneos de distinta paridad.

Si $V = V_0 \oplus V_1$ es un superespacio vectorial, un superproducto escalar par γ es la suma de un producto escalar no degenerado g (posiblemente con signatura) en V_0 y una forma ω alternante en V_1; en particular, esto fuerza al subespacio V_1 a ser de dimensión par (cf. [3, sección 4.1]). Esto implica, en el caso de una supervariedad $(M|\mathcal{R}M)$, que una supermétrica γ fuerza al haz $\mathcal{R}M$ a ser de rango par; así mismo, γ induce una métrica pseudorriemanniana en TM.

3.11 Definición. Sea γ una supermétrica riemanniana par y ∇ una superconexión afín. La conexión ∇ es **compatible con la métrica** γ si

$$X(\gamma(Y,Z)) = \gamma(\nabla_X Y, Z) + (-1)^{|Y||X|}\gamma(Y, \nabla_X Z)$$

para cualesquiera superderivaciones X, Y y Z.

3.12 Teorema. *Sea γ una supermétrica riemanniana par en la supervariedad $(M|\mathcal{R}M)$. Existe una única superconexión libre de torsión y compatible con γ en $(M|\mathcal{R}M)$.*

Demostración. La conexión en cuestión está dada por la fórmula

$$\begin{aligned} 2\gamma(\nabla_X Y, Z) = {} & X(\gamma(Y,Z)) - (-1)^{|Z|(|X|+|Y|)}Z(\gamma(X,Y)) + (-1)^{|X|(|Y|+|Z|)}Y(\gamma(Z,X)) \\ & + \gamma([\![X,Y]\!],Z) - (-1)^{|Y|(|Z|+|X|)}\gamma([\![Y,Z]\!],X) \\ & + (-1)^{|Z|(|Y|+|X|)}\gamma([\![Z,X]\!],Y). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Primeramente observemos que

$$\begin{aligned} & X(\gamma(Y,Z)) + (-1)^{|X|(|Y|+|Z|)}Y(\gamma(Z,X)) - (-1)^{|Z|(|X|+|Y|)}Z(\gamma(X,Y)) \\ & = \gamma(\nabla_X Y - (-1)^{|X||Y|}\nabla_Y X, Z) + (-1)^{|Y||Z|}\gamma(\nabla_X Z - (-1)^{|Z||X|}\nabla_Z X, Y) \\ & + (-1)^{|X|(|Y|+|Z|)}\gamma(\nabla_Y Z - (-1)^{|Y||Z|})\nabla_Z Y, X) \\ & = \gamma([\![X,Y]\!],Z) + (-1)^{|Y||Z|}\gamma([\![X,Z]\!],Y) + (-1)^{|X|(|Y|+|Z|)}\gamma([\![Y,Z]\!],X). \end{aligned}$$

Usando la expresión (3.8), obtenemos que el último término del desarrollo anterior es igual a

$$2\gamma(\nabla_X Y, Z) - X(\gamma(Y,Z)) + (-1)^{|Z|(|X|+|Y|)}Z(\gamma(Y,X)) + (-1)^{|X|(|Y|+|Z|)}Y(\gamma(Z,X))$$

De esta manera, si definimos ∇ usando la ecuación (3.8), obtenemos la unicidad. Despejando el término $X\gamma(Y,Z)$ y sustituyendo los términos correspondientes a $Z\gamma(X,Y)$ y $Y\gamma(Z,X)$ vemos que la fórmula en efecto define una conexión libre de torsión y compatible con γ. □

3.13 Definición. La **superconexión de Levi-Civita** de la supermétrica γ es la conexión del teorema 3.12.

El supertensor de curvatura de la superconexión de Levi-Civita está dada de la misma manera que en la definición 3.6.

3.14 Proposición. *El supertensor* $\gamma(R_{X,Y}Z, W)$ *es supersimétrico por pares, esto es*

$$\gamma(R_{X,Y}Z, W) = (-1)^{(|X|+|Y|)(|Z|+|W|)}\gamma(R_{Z,W}X, Y) \tag{3.9}$$

Demostración. Este resultado es consecuencia de la proposición 3.7 y de la primera identidad de Bianchi. □

Apéndice A

Operadores diferenciales lineales

En este apéndice haremos un breve resumen de los conceptos y las técnicas geométricas y diferenciales usadas a lo largo del trabajo.

§A.1. Conceptos fundamentales

A.1 Definición. Sea M una variedad suave y sean $\pi : E \to M$ y $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to M$ haces vectoriales sobre M. Un **operador diferencial lineal** entre E y $\widetilde{E}$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $D : \Gamma(E) \to \Gamma(\widetilde{E})$ que es *local*; esto es, si $U \subset M$ es abierto, y η y *psi* son secciones de E tales que $\eta|_U = \psi|_U$ entonces $D(\eta|_U) = D(\psi|_U)$.

La condición de localidad fuerza a D a ser un homomorfismo de gavillas.

Si f es una función suave en M y η es una sección de E entonces se define el conmutador

$$[D, f](\eta) := D(f\eta) - fD(\eta) \tag{A.1}$$

Al iterar el conmutador con más funciones suaves, es posible que exista un número entero $k > 0$ tal que el conmutador con $k + 1$ funciones sea nulo.

A.2 Definición. El operador D es de orden k, con k un entero positivo, si para cualesquiera $k + 1$ funciones suaves en M, $f_1, \ldots, f_{k+1}$ se tiene que

$$[\ldots[[D, f_1], f_2], \ldots, f_{k+1}] = 0$$

A continuación daremos una fórmula para calcular el conmutador iterado de D y k funciones suaves en M. El resultado importante que se desprende de esta fórmula es que el resultado del conmutador iterado no depende del orden en que se insertan las funciones suaves.

A.3 Lema. *Sea $\{f_1, \ldots f_k\}$ un conjunto de funciones suaves en M con $k > 1$ y definamos $K := \{1, \ldots, k\}$. El conmutador iterado de D y estas k funciones está dado por*

$$[\ldots[[D, f_1], f_2], \ldots, f_k](\eta) = \sum_{A \subseteq K} (-1)^{\#(A)} f_A D(f_{K-A}\eta), \tag{A.2}$$

donde η es una sección de E, $\#(A)$ denota la cardinalidad de A y definimos

$$f_A = \begin{cases} \prod_{a\in A} f_a, & A \neq \emptyset \\ 1, & A = \emptyset \end{cases}$$

Demostración. Por inducción sobre k. Si $k=2$ entonces calculamos

$$\begin{aligned}[[D,f_1],f_2](\eta) &= [D,f_1](f_2\eta) - f_2[D,f_1](\eta) \\ &= D(f_1f_2\eta) - f_1D(f_2\eta) - f_2D(f_1\eta) + f_1f_2D(\eta) \\ &= \sum_{A\subseteq\{1,2\}} (-1)^{\#(A)} f_A D(f_{\{1,2\}-A}\eta).\end{aligned}$$

Supongamos que la fórmula (A.2) es válida para todos los enteros l menores que k. Sea $L := \{1,\dots,k-1\}$. Calculamos ahora

$$\begin{aligned}[[\cdots[[D,f_1],f_2],\dots,f_{k-1}],f_k](\eta) &= \sum_{A\subseteq L}(-1)^{\#(A)} f_A D(f_{L-A}f_k\eta) \\ &\quad - \sum_{A\subseteq L}(-1)^{\#(A)} f_A f_k D(f_{L-A}\eta)\end{aligned}$$

Si $A \subseteq L$ es no vacío y escribimos $A = \{\mu_1,\dots\mu_r\}$ y $L - A = \{\nu_1,\dots\nu_s\}$, entonces la fórmula anterior toma la forma

$$\begin{aligned}[[\cdots[[D,f_1],f_2],\dots,f_{k-1}],f_k](\eta) &= \sum_{r+s=k-1} (-1)^r f_{\mu_1}\cdots f_{\mu_r} D(f_{\nu_1}\cdots f_{\nu_s}f_k\eta) \\ &\quad - \sum_{r+s=k-1} (-1)^r f_{\mu_1}\cdots f_{\mu_r} f_k D(f_{\nu_1}\cdots f_{\nu_s}\eta) \\ &\quad - f_kD(f_1\cdots f_{k-1}\eta) + D(f_1\cdots f_k\eta) \\ &= \sum_{A\subseteq K}(-1)^{\#(A)} f_A D(f_{K-A}\eta),\end{aligned} \tag{A.3}$$

donde $K := \{1,\dots,k\}$, ya que $-(-1)^{k-1}D(f_1\cdots f_k\eta) = (-1)^kD(f_1\cdots f_k\eta)$. □

A.4 Proposición. *Si $f_1,\dots,f_k$ son funciones suaves en M entonces*

$$[\cdots[[D,f_1],f_2],\dots,f_k] = [\dots[[D,f_{\sigma(1)}],f_{\sigma(2)}],\dots,f_{\sigma(k)}]$$

para toda permutación $\sigma \in S_k$.

Demostración. Si $\sigma \in S_k$ y $A \subseteq K$ entonces $\#(\sigma(A)) = \#(A)$ y σ actúa transitivamente en subconjuntos de cardinalidad dada. Por lo tanto, la fórmula (A.2) queda invariante bajo permutaciones del conjunto $\{f_1,\dots f_k\}$. □

En vista de esta proposición, escribiremos $[D;f_1,\dots,f_k]$ para el conmutador iterado del operador D con las funciones $f_1,\dots,f_k$.

A.5 Definición. Sea $D : \Gamma(E) \to \Gamma(\widetilde{E})$ un operador diferencial de orden k y sean $f_1,\dots,f_k$ funciones suaves en M. El **símbolo principal** de D evaluado en las funciones $f_1,\dots,f_k$ es

$$\sigma(D;f_1,\dots,f_k) := [D;f_1,\dots,f_k]$$

§A.2. Jets de secciones

Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} M$ un haz fibrado suave. Si $U \subset M$ es un abierto tal que $\mathcal{F}|_U$ es trivial, i.e. $\mathcal{F}|_U \cong U \times F$ (donde F es la fibra típica del haz), entonces una sección ψ sobre U es una función suave $\psi : U \to F$.

A.6 Definición. Sean ψ y η secciones locales sobre U del haz $\mathcal{F}$ y k un entero no negativo. Las secciones ψ y η están en **contacto de orden** k **en el punto** p **en** M si

$$\partial_p^\mu(\eta) = \partial_p^\mu(\psi), \quad \mu \leq k$$

en algún (y por lo tanto, en todo) sistema de coordenadas locales en U. Denotamos esta relación por $\psi \sim_{k,p} \eta$.

Notemos que, en particular, $\partial_p^0(\eta) = \partial_p^0(\psi)$. Esto es, $\psi(p) = \eta(p)$. A partir de esta relación de equivalencia, obtenemos la definición de jets de secciones locales:

A.7 Definición. Para un punto p en M el conjunto de clases de equivalencia de contacto hasta orden k,

$$\mathrm{Jet}_p^k(\mathcal{F}) = \Gamma\left(\mathcal{F}|_U\right) / \sim_{k,p}$$

es el **espacio de** k**-jets en el punto** p. Denotamos la clase de equivalencia de ψ en este conjunto por $\mathrm{jet}_p^k(\psi)$. El **haz de** k**-jets** del haz fibrado $\mathcal{F}$ es

$$\mathrm{Jet}^k(\mathcal{F}) := \bigsqcup_{p \in M} \mathrm{Jet}_p^k(\mathcal{F})$$

Notemos que el haz $\mathrm{Jet}^k(\mathcal{F})$ tiene un mapeo natural $\mathrm{ev} : \mathrm{Jet}^k(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ dado por $\mathrm{ev}(\mathrm{jet}_p^k(\psi)) = \psi(p)$.

Si $\mathcal{F}$ es un haz vectorial $E \to M$ (resp. un haz de álgebras), entonces $\mathrm{Jet}^k(\mathcal{E})$ es también un haz vectorial (resp. un haz de álgebras) con la suma definida por $\mathrm{jet}_p^k(\eta + \psi) = \mathrm{jet}_p^k(\eta) + \mathrm{jet}_p^k(\psi)$ (y el producto definido análogamente: $\mathrm{jet}_p^k(\eta\psi) = \mathrm{jet}_p^k(\eta)\,\mathrm{jet}_p^k(\psi)$ para cada punto p).

Si M es una variedad suave, definimos el ideal I_p como el ideal de funciones que se anulan en el punto p; es decir

$$I_p := \langle f \in \mathcal{C}^\infty(M) | f(p) = 0 \rangle. \tag{A.4}$$

Las potencias de este ideal nos permiten caracterizar el haz de k-jets de un haz vectorial. Recordemos que $I_p^n = \langle f_1 \cdots f_n | f_\mu \in I_p \rangle$, es decir sus elementos son sumas de productos de n funciones en I_p.

A.8 Lema (Fórmula de Taylor con residuo)**.** *Sea $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ suave. El polinomio de Taylor de grado k de h alrededor del 0 está dada por la fórmula*

$$\begin{aligned} h(x^1, \ldots, x^m) \;&=\; \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_r=1}^{m} x^{\mu_1} \ldots x^{\mu_r} \frac{\partial^r h}{\partial x^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_r}}(0, \ldots, 0) \\ &+\; \frac{1}{k!} \sum_{\mu_0,\ldots,\mu_k=1}^{m} x^{\mu_0} \ldots x^{\mu_k} \int_0^1 \frac{\partial^{k+1} h}{\partial x^{\mu_0} \ldots \partial x^{\mu_k}}(tx^1, \ldots, tx^m)\,(1-t)^k\, dt \end{aligned}$$

A.9 Proposición. *Sean E un haz vectorial sobre M y p un punto de M. Entonces* $\mathrm{Jet}_p^k(E) \cong \Gamma(E)/I_p^{k+1}\Gamma(E)$.

Demostración. Sean $x_1, \ldots, x_m$ coordenadas alrededor de p. Si $f_1 \cdots f_{k+1}\eta$ es un elemento de $I_p^{k+1}\Gamma(E)$ entonces la relación de contacto hasta orden k implica que

$$\left.\frac{\partial^l}{\partial x_{\mu_1} \cdots \partial x_{\mu_l}}\right|_p (f_1 \cdots f_{k+1}\eta) = 0,$$

para todo $l \leq k$, ya que tomar l derivadas parciales de $k+1$ funciones suaves implica que al menos una de las funciones aparece en el desarrollo de la regla generalizada de Leibniz sin derivar, y esta función es 0 en p. Esto significa que $\mathrm{jet}_p^k(f_1 \cdots f_{k+1}\eta) = 0$ para cualesquiera $f_1, \ldots, f_k$ funciones en I_p^{k+1}. Si definimos $\psi : \Gamma(E)/I_p^{k+1}\Gamma(E) \to \mathrm{Jet}_p^k(E)$, por $\psi(\eta + I_p^{k+1}\Gamma(E)) = \mathrm{jet}_p^k(\eta)$ entonces, en vista de las observaciones anteriores, ψ está bien definida y es sobreyectiva por construcción. Para probar que ψ es inyectiva observemos que al escoger una trivialización de E sobre un abierto U, entonces una sección η es esencialmente una función suave $\eta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, donde n es el rango de E y m es la dimensión de M; por lo tanto, por la fórmula de Taylor, tenemos que $\psi(\eta + I_p^{k+1}) = 0$ si y sólo si su polinomio de Taylor alrededor de p es nulo y por lo tanto $\mathrm{jet}_p^k(\eta) = 0$, ya que $\mathrm{jet}_p^k(\eta)$ es independiente de la elección de coordenadas locales. Por lo tanto, ψ es un isomorfismo. $\square$

Usando la expresión de $\mathrm{jet}_p^k(\eta)$ en coordenadas locales obtenemos el siguiente:

A.10 Corolario. *El operador* $\mathrm{jet}^k : E \to \mathrm{Jet}^k(E)$ *es un operador diferencial de orden k.*

Ahora probaremos un isomorfismo más para el haz $\mathrm{Jet}^k(E)$. A diferencia del isomorfismo anterior, el siguiente isomorfismo no es canónico.

A.11 Definición. Sea D una conexión en el haz E y sea ∇ una conexión libre de torsión en TM. Las **derivadas covariantes iteradas** de una sección $\eta \in \Gamma(E)$ están dadas recursivamente por $D^0\eta = \eta$ y

$$D^{k+1}_{X_0,\ldots,X_k} = D_{X_0}\left(D^k_{X_1,\ldots,X_k}\eta\right) - \sum_{\mu=1}^{k} D^k_{X_1,\ldots,\nabla_{X_0}X_\mu,\ldots X_k}\eta$$

para cualesquiera campos vectoriales $X_0, \ldots, X_k$ en M.

Claramente, las derivadas covariantes iteradas dependen del orden en que tomemos los campos vectoriales $X_0, \ldots, X_l$; sin embargo, mediante la fórmula

$$J^{\nabla,D,l}_{X_1\cdots X_l}(\eta) = \frac{1}{l!}\sum_{\sigma\in S_l} D^l_{X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(l)}}(\eta) \tag{A.5}$$

obtenemos un operador simétrico en $\bigotimes^l TM$ y por lo tanto, una sección de $\mathrm{Sym}^l\, T^*M \otimes E$. El siguiente resultado es inmediato al usar la fórmula de Taylor para conexiones D en E y ∇ en TM con ∇ libre de torsión:

A.12 Proposición. *Sea E un haz vectorial y sean ∇ y D conexiones en TM y E respectivamente donde ∇ es libre de torsión. Entonces* $\operatorname{Jet}^k E \cong \operatorname{Sym}^{\leq k} T^*M \otimes E$ *como haces vectoriales, mediante la aplicación* $\operatorname{jet}^k \eta \mapsto J^{\nabla,D,0}(\eta) + J^{\nabla,D,1}(\eta) + \cdots + J^{\nabla,D,k}(\eta)$.

Notemos que los conmutadores iterados de D son también operadores diferenciales; esto es, si $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ es un operador de orden k entonces $[D; f_1, \ldots, f_l] : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ es un operador diferencial de orden $k - l$, con $0 \leq l \leq k$. La proposición anterior nos permite asociar (de manera no canónica) un polinomio de grado k en campos vectoriales a un operador diferencial de orden k.

A.13 Definición. Sea $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un operador diferencial de orden k. El **símbolo total** de D es el polinomio asociado $\sigma^{\text{total}}(D) \in \Gamma\left(\operatorname{Sym}^{\leq k} T^*M \otimes E\right)$.

Utilizando el símbolo total del operador D obtenemos el siguiente resultado:

A.14 Proposición. *Si $D : \Gamma(E) \to \Gamma(\widetilde{E})$ un operador diferencial de orden $k \geq 0$ entonces D induce un morfismo de haces vectoriales $\widehat{D} : \operatorname{Jet}^k(E) \to \widetilde{E}$*

Demostración. El morfismo está dado por $\eta \mapsto \sigma^{\text{total}}(D, \cdot)(\eta)$, donde el segundo argumento del símbolo total es una forma simétrica en las diferenciales de l funciones suaves para $l \leq k$. □

A.15 Definición. Sean M y N variedades suaves, $\pi : E \to N$ un haz vectorial y $f : M \to N$ una aplicación suave. El **haz jalado** o **pullback** de E bajo f es el haz vectorial definido sobre M por

$$f^*E := \{(p, e) \in M \times E | \pi(e) = f(p)\}$$

A.16 Definición. Sean $\pi : E \to M$ y $\xi : F \to N$ haces vectoriales sobre las variedades suaves M y N y sea $\phi : M \to N$ una aplicación suave. Un **operador diferencial a lo largo de** ϕ es una apliación $\mathbb{R}$-lineal $D : \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ tal que si h es una función suave en N entonces el conmutador está definido por

$$[D, h](\eta) := D(h\eta) - (h \circ \phi)D(\eta)$$

para toda sección η de F. El operador tiene orden $k \geq 0$ si $[[\ldots[D, f_1], f_2], \ldots, f_{k+1}] = 0$ para cualesquiera $k + 1$ funciones suaves $f_1, \ldots, f_{k+1}$ en N.

Notemos que para un operador a lo largo de una aplicación suave, la definición del conmutador iterado es escencialmente la misma dada por la fórmula de la proposición A.4 salvo que las funciones suaves en este caso van acompañadas de la aplicación ϕ, al igual que todo lo que hemos dicho sobre operadores diferenciales y sus símbolos total y principal.

Bibliografía

[1] Marjorie Batchelor. The structure of supermanifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 253:329–338, Sept. 1979.

[2] Theodor Bröcker and Klaus Jänich. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[3] Oliver Goertsches. Riemannian supergeometry. *Mathematische Zeitschrift*, 260:557–593, 2008. 10.1007/s00209-007-0288-z.

[4] José M. Gracia-Bondía, Joseph C. Várilly, and Héctor Figueroa. *Elements of noncommutative geometry*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

[5] Nathan Jacobson. *Basic Algebra I*. Dover Publications, 2 edition, 2009.

[6] Jet Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[7] D. G. Northcott. *Multilinear algebra*. Cambridge University Press, 1984.

[8] Alice Rogers. *Supermanifolds*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. Theory and applications.

[9] Kenji Ueno. *Algebraic geometry. 1*, volume 185 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[10] V. S. Varadarajan. *Supersymmetry for mathematicians: an introduction*, volume 11 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2004.