



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCIÓN TIPO MYCIELSKI PARA
HIPERGRÁFICAS ASOCIADAS CON COLORACIONES
FRACCIONALES

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS
PRESENTA:

JOHANA LUVIANO FLORES*

TUTOR:
LUIS MONTEJANO

CO-TUTOR:
DEBORAH OLIVEROS





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre, a Cris y a mis hermanos.

Agradecimientos

Tres pasiones simples, pero avasalladoramente fuertes, han gobernado mi vida: la vehemencia por el amor, la búsqueda del conocimiento y una insoportable piedad por la humanidad sufriente. Estas pasiones, como grandes vendavales, me han impulsado hacia atrás y hacia delante, por diversos senderos, sobre un profundo océano de angustia, al borde de la desesperación.

He buscado el amor, primero, porque conduce al éxtasis, un éxtasis tan grande que con frecuencia hubiera sacrificado el resto de mi vida por unas cuantas horas de esta alegría. Lo he buscado, además, porque alivia la soledad, esa terrible soledad en la cual una escalofriante conciencia mira sobre el filo del mundo hacia el fondo infinito del abismo inerte. Lo he buscado, finalmente, porque en la unión del amor he visto, en una miniatura mística, la prefiguración del cielo que han imaginado santos y poetas. Esto es lo que busqué, y aunque pudiera parecer sobradamente bueno para la vida humana, esto es al fin lo que he hallado.

Con igual pasión he buscado el conocimiento. He deseado entender los corazones de los hombres. He deseado saber por qué brillan las estrellas. Y he tratado de aprehender el poder pitagórico por el cual el número es superior al azar. Algo de esto, no mucho, he conseguido.

El amor y el conocimiento me llevaron, hasta donde les fue posible, hacia los cielos; pero la piedad siempre me devolvió a tierra. Ecos de llantos de pena reverberan en mi corazón. Niños hambrientos, víctimas torturadas por opresores, ancianos desamparados, odiosa carga para sus hijos, y el mundo entero de soledad, pobreza y dolor hacen de la vida humana una burla de lo que debería ser. Anhele aliviar el mal, pero no puedo, y sufro también.

Esta ha sido mi vida. He descubierto que merece vivirse y con gusto la volvería a vivir si se me ofreciera la oportunidad.

RUSSELL, Bertrand

Agradezco a CONACYT por el apoyo económico brindado durante el programa de doctorado.

Quiero agradecer de manera muy especial a una gran mujer que siempre me apoyo en los momentos más difíciles, jamás dejó de confiar en mí. Su amor, paciencia y alegría me han sacado siempre adelante. Gracias *mamá (María Magdalena Flores mendoza)* por estar a mi lado. A ti madre sabiendo que no existiría una forma de agradecer una vida de sacrificio y esfuerzo, quiero que sientas que el objetivo logrado también es tuyo y que la fuerza que me ayudo a conseguirlo fue tu apoyo.

También doy las gracias a mi hermana *Ana Leydi*, ella y Dios saben mejor que nadie todo lo que le tengo que agradecer. Claro que no puedo dejar de agradecer a mis otros dos hermanos (Juan Carlos y Guadalupe), como también a mis sobrinos (*Adriel y Kimberly*) y

a mi cuñado (*Juan Carlos*). Doy las gracias a mi tía *Petra*, una mujer que para mi es un ejemplo, a mis demás tías y tíos (*Cruz, Fidel, Francisco, Hugo, Israel, Joel, Juan, Miguel, Natividad y Tomasa*), a mis primos, sobrinos y demás familiares.

Quiero agradecer a mi esposo por el amor brindado aún con la distancia.

Hay momentos en la vida que damos gracias a Dios por poner en nuestro camino personas muy significativas e importantes, una de estas personas es la *Dra. Larissa Sbitneva* que desde el momento que conocí nunca dejo de apoyarme (académicamente y personalmente) y demostrarme su cariño y así como también por ser una persona tan especial conmigo. También doy las gracias a Dios por mis amigos (*Carolina, Marilis, Mariana, Berenice, Alfredo, German, ..., etc.*) que siempre han estado a mi lado a pesar de la distancia.

Quiero agradecer al *Dr. Luis Montejano Peimbert* por haber aceptado dirigir mi tesis, por la excepcional guía y confianza que siempre me ha brindado para entender la profundidad de los conceptos de esta teoría, que sin su dirección me hubiera sido imposible concretizar estos conocimientos. Agradezco a las Doctoras *Deborah Oliveros* y *Amanda Montejano* por el gran equipo de trabajo que formamos y su apoyo incondicional.

En memoria de mis abuelos, del *Dr. Lev Sabinin* y de mi primo *Enrique Reyes*.

Agradezco a la *Dra. Hortensia Galeana* por todo su apoyo durante la revisión de mi trabajo. Doy las gracias al *Dr. Juan Jose Montellano* por sus grandes observaciones en la revisión de la tesis. En general, agradezco a los Doctores *Amanda Montejano, Deborah Oliveros, Hortensia Galeana, Juan Jose Montellano y Miguel Pizaña* por aceptar ser mis sinodales.

Por último quiero expresar mi agradecimiento al *Ing. Clemente Bautista* y demás profesores.

México, D.F.
Mayo, 2012

JOHANA LUVIANO FLORES

Índice general

Agradecimientos	ii
Introducción	vi
1. Preliminares	1
1.1. Definiciones básicas	1
1.2. Homomorfismos	4
1.3. Conjuntos independientes	7
1.4. Matriz de independencia	9
1.5. Hipergráficas de Kneser	10
1.6. Herramientas básicas	12
2. Coloraciones en gráficas	17
2.1. Coloraciones propias	17
2.2. Coloración fraccional	19
2.3. Clan fraccional	24
2.4. Resultados	25
3. Coloraciones en hipergráficas	29
3.1. Coloración	29
3.1.1. Coloración débil	29
3.1.2. Coloración fuerte	31
3.1.3. Algunos resultados para coloraciones débiles (fuertes)	32
3.2. Coloración fraccional	33
3.2.1. (a, b) -coloración débil	34
3.2.2. (a, b) -coloración fuerte	34
3.2.3. Coloraciones vía r -hipergráficas de Kneser débiles (fuertes)	35
3.2.4. Cubiertas por conjuntos independientes débiles (fuertes)	37
3.2.5. Coloración fraccional débil	37
3.2.6. Coloración fraccional fuerte	38
3.3. Clan fraccional	41
3.3.1. Clan fraccional débil	41
3.3.2. Clan fraccional fuerte	42

4. Construcciones tipo Mycielski para r-hipergráficas	46
4.1. Construcción de Mycielski.	46
4.2. Construcción tipo Mycielski $\mu(G^r)$ para r -hipergráficas.	48
4.2.1. Conjuntos independientes máximos débiles de $\mu(G^r)$	51
4.2.2. Resultado	53
4.3. Construcción generalizada de Mycielski para r -hipergráficas.	57
4.3.1. Conjuntos independientes máximos fuertes de $\tilde{\mu}(G^r)$	60
4.3.2. Resultado	62
5. r-hipergráficas con número cromático acotado por una función de su número de clan	71

Introducción

Uno de los conceptos fundamentales en la teoría de gráficas es la coloración de los vértices de una gráfica, concepto que nació a raíz del problema planteado por Francis Guthrie en 1852, donde se pregunta si cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa geográfico, de tal manera que países vecinos (es decir, países que comparten frontera) reciban distinto color. Este problema también conocido como la conjetura de los cuatro colores, fue demostrado en 1976, más de 150 años después de su planteamiento [16], [11]. Desde entonces, una gran cantidad de investigación se ha desarrollado dentro de la así llamada, *Teoría de coloraciones en gráficas*, resultando esta, ser una de las áreas más estudiadas y aplicadas de la teoría de gráficas. En 1972, Karp incluye las coloraciones en gráficas en la primera lista de problemas conocidos como NP-completos, lo que motiva el desarrollo de algoritmos heurísticos de las coloraciones. Cuando se fraccionalizan algunas definiciones de la teoría de gráficas, se origina la teoría de gráficas fraccional que ha sido estudiada durante la última década y ha servido para obtener varios resultados elegantes y profundos (completos o parciales), ampliándose el número de aplicaciones. Más aún, esta teoría ha ayudado a comprender mejor algunos problemas complicados de la teoría de gráficas.

Varios de los resultados fraccionales se pueden estudiar como problemas primales y sus duales en Programación Lineal Entera. Por ejemplo, el número cromático y número de clan de una gráfica resultan ser las soluciones enteras de un problema primal y su dual respectivamente, y al considerar las soluciones racionales del problema primal y su dual se obtiene el número cromático fraccional y el número de clan fraccional respectivamente.

Dada una gráfica G , una *coloración propia* de G , es una asignación de un color a cada vértice de la gráfica de tal manera que vértices adyacentes reciben diferentes colores. El *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, es el mínimo número de colores necesarios para obtener una coloración propia de G . Otro parámetro importante de una gráfica y que está relacionado con el número cromático es el *número de clan* de G , $\omega(G)$, definido como el máximo número de vértices de una subgráfica completa de G . Claramente, cualquier coloración propia de G , asigna un color diferente a cada vértice de los clanes de G . Así, $\omega(G) \leq \chi(G)$, y si la gráfica G contiene un clan arbitrariamente grande entonces tiene número cromático arbitrariamente grande.

Existen varias formas de generalizar el concepto de coloración para r -hipergráficas (hipergráficas con todas sus aristas de tamaño r). Una de ellas llamada *coloración débil* que consiste en asignar un color a cada vértice de G^r con la condición que no contenga aristas monocromáticas y si todas las aristas son heterocromáticas, se le llama *coloración fuerte*. De

esta manera, el *número cromático débil* $\chi(G^r)$ y el *número cromático fuerte* $\chi^s(G^r)$ de G^r , se define como el mínimo número de colores necesarios para colorear una r -hipergráfica débilmente o fuertemente respectivamente. Claramente cada coloración fuerte es una coloración débil, así $\chi(G^r) \leq \chi^s(G^r)$ para toda r -hipergráfica G^r .

Naturalmente, el *número de clan* de G^r , $\omega(G^r)$, es el máximo número de vértices de una r -subhipergráfica completa de G^r .

Sin embargo, la desigualdad $\omega(G) \leq \chi(G)$, no funciona como era de esperarse para el número cromático débil de r -hipergráficas (véase el Ejemplo 3.2). Aunque, si se tiene para el caso fuerte, esto es, $\omega(G^r) \leq \chi^s(G^r)$.

Una pregunta interesante sobre el número cromático de una gráfica primero, y en general de una r -hipergráfica es la siguiente:

¿Para que el número cromático de G^r sea k es necesario que G^r contenga alguna r -subhipergráfica completa de tamaño k ?

La respuesta a esta pregunta es negativa, de hecho se sabe que existen gráficas con cuello y número cromático arbitrariamente grande,

Teorema (Paul Erdős,[17]). *Para cualesquiera enteros positivos s y k , existe una gráfica con cuello $\geq s$ y número cromático $\geq k$.*

Este resultado se demostró utilizando el método probabilístico para gráficas y más tarde por P. Erdős y A. Hajnal [18] para hipergráficas. Pocos años después, Lovás [13] proporciona una prueba constructiva bastante complicada de este hecho y Nešetřil con Rödl [10] sugieren una más simple poco después. Ambas construcciones son recursivas y funcionan para gráficas y r -hipergráficas al mismo tiempo. Previo al Teorema antes mencionado, en [9], Mycielski propone una construcción de gráficas libres de triángulos con número cromático arbitrariamente grande. Usando esta construcción se demuestra que la diferencia entre el número de clan y el número cromático de una gráfica puede ser arbitrariamente grande.

Así, como una coloración de una gráfica es la asignación de un color a cada vértice de la gráfica de manera que vértices adyacentes tengan diferente color, se puede asignar a cada vértice un conjunto de b -colores de tal forma que vértices adyacentes tengan conjuntos disjuntos de colores y preguntarse por el mínimo número de colores $\chi_b(G)$ necesarios para colorear dicha gráfica. De esta manera, el número cromático fraccional $\chi_f(G)$, se define a grosso modo como el límite de la función $\chi_b(G)$ cuando $b \rightarrow \infty$ (ver definición formal en la Sección 3.2).

Este concepto ha sido ampliamente estudiado en [5], dentro del área de programación lineal entera y se dice que el número cromático fraccional de una gráfica G , es la relajación real de su número cromático. Así mismo, las versiones fraccionales de los números cromáticos débil y fuerte de una r -hipergráfica son las relajaciones reales de los problemas enteros correspondientes (ver definición formal en la Sección 3.2).

En el caso de gráficas

$$\omega(G) \leq \chi_f(G) \leq \chi(G) \tag{0.1}$$

En 1995, Larsen, Propp, y Ullman [15] usaron la construcción de Mycielski para mostrar que al igual que la distancia entre χ y ω , ambas distancias en (0.1) pueden ser arbitrariamente grandes.

En este trabajo demostraremos que las diferencias en una desigualdad análoga a (0.1) pueden ser también arbitrariamente grande al considerar r -hipergráficas, tanto para el número cromático débil como para el fuerte. Para cumplir este objetivo, daremos dos construcciones de familias de r -hipergráficas sin r -subhipergráficas de orden $r + 1$. Es preciso señalar que para coloraciones fuertes, la construcción de Mycielski se puede generalizar de manera directa, y la prueba en [15] puede ser imitada. Sin embargo, para coloraciones débiles, la misma construcción no se puede generalizar directamente. En consecuencia, daremos una construcción alternativa, inspirada en la construcción de Mycielski.

Una vez demostrado que el número cromático débil y fuerte, y el número cromático fraccional débil y fuerte de una r -hipergráfica no está acotado por una función en términos de su número de clan; resulta interesante también encontrar familias de r -hipergráficas con la propiedad contraria, es decir, familias de r -hipergráficas con número cromático (fraccional) acotado por una función en términos del número de clan. Para $r = 2$, el caso de gráficas, hay varios trabajos que tratan este problema [1, 2, 8, 14]. En este trabajo, prohibiendo ciertas r -subhipergráficas completas inducidas, encontraremos una familia de r -hipergráficas con la propiedad que el número cromático está acotado por una función del número de clan. Tal familia surge de planos afines de dimensión $r - 2$ en un espacio euclidiano de dimensión $d \geq r - 2$.

En el Capítulo 1, se presentan algunos conceptos elementales de la teoría de hipergráficas que serán utilizados posteriormente, como son: hipergráfica, r -hipergráfica, subhipergráficas, homomorfismos de r -hipergráficas, etc. y daremos algunos ejemplos y resultados de dichas definiciones. Más aún, introduciremos la matriz de independencia y la r -hipergráfica de Kneser tanto la versión débil como la fuerte y algunos ejemplos. Además, se mencionan algunas definiciones y resultados de cálculo y programación lineal entera que usaremos en el transcurso de este trabajo.

En los Capítulos 2 y 3, analizaremos con cuidado las definiciones de coloración propia y coloración fraccional tanto para gráficas como para r -hipergráficas. Daremos también algunos resultados, cotas inferiores y superiores. Así como algunos ejemplos que ilustrarán algunas definiciones y resultados.

En el Capítulo 4, inspirados en la construcción de Mycielski daremos la construcción de dos familias de r -hipergráficas sin r -subhipergráficas completas K_{r+1}^r y con número cromático arbitrariamente grande. Probaremos el resultado principal de este trabajo en el sentido de Larsen, Propp y Ullman discutido anteriormente.

Finalmente, en el Capítulo 5 daremos algunos ejemplos de familias de r -hipergráficas que tienen número cromático acotado. Estas familias se obtienen en la geometría discreta y son familias de intervalos o planos afines en posición general, se mencionan algunas propiedades de estas familias considerando sus hipergráficas asociadas y se ilustran dichas definiciones con ejemplos. Para concluir el capítulo, obtendremos algunos resultados que garantizan que estas hipergráficas tienen número cromático acotado superiormente por una función que depende

del número de clan de la r -hipergráfica y se mencionarán algunas conjeturas.

Capítulo 1

Preliminares

En este Capítulo analizaremos algunas nociones básicas de hipergráficas, e introducimos algunos ejemplos que usaremos para ilustrar algunas definiciones y resultados. Más aún, discutimos funciones entre hipergráficas, como son los homomorfismos, los isomorfismos y los automorfismos.

1.1.–Definiciones básicas

Definición 1.1. Una *hipergráfica* \mathbf{G} es una pareja $\mathbf{G} = (V(\mathbf{G}), E(\mathbf{G}))$, donde $V(\mathbf{G})$ es un conjunto de elementos, llamados vértices, y $E(\mathbf{G})$ es un conjunto de subconjuntos no vacíos de $V(\mathbf{G})$, llamados aristas.

Es decir, $E(\mathbf{G})$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(V(\mathbf{G})) \setminus \{\emptyset\}$, donde $\mathcal{P}(V(\mathbf{G}))$ es el *conjunto potencia* de $V(\mathbf{G})$. Un vértice u es *incidente* con una arista e si $u \in e$, dos vértices u y v son *vértices adyacentes* si existe una arista e tal que $u, v \in e$ y las aristas e_1 y e_2 son *aristas adyacentes* si $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$. Para cada vértice $u \in V(\mathbf{G})$ el *grado* del vértice u , $\deg(u)$, es el número de aristas diferentes incidentes a u . Si $\deg(u) = 0$, se llama a u un *vértice aislado*.

Si para todo $e \in E(\mathbf{G})$ se tiene que $|e| = r$, entonces diremos que \mathbf{G} es una *hipergráfica r -uniforme* (o simplemente una *r -hipergráfica*), y la denotamos por G^r . En el caso $r = 2$, una 2-hipergráfica G^2 es simplemente una gráfica y la denotaremos por G .

En este trabajo vamos a considerar r -hipergráficas finitas, esto es, hipergráficas con conjuntos de vértices y aristas finitos. Por ser las aristas subconjuntos de cardinalidad r no existen lazos, al menos que $r = 1$ pero en este trabajo nos enfocamos en $r \geq 2$.

El número de vértices de G^r es el *orden* de la r -hipergráfica y el número de aristas de G^r es el *tamaño* de la r -hipergráfica y los denotaremos por $|V(G^r)|$ y $|E(G^r)|$ respectivamente.

Ejemplo 1.1. Sea $r = 3$, consideremos la 3-hipergráfica G^3 , donde

$$V(G^3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

y

$$E(G^3) = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\}, \{v_1, v_6, v_7\}, \{v_2, v_5, v_7\}, \{v_3, v_4, v_7\}\}$$

como se muestra en la figura siguiente

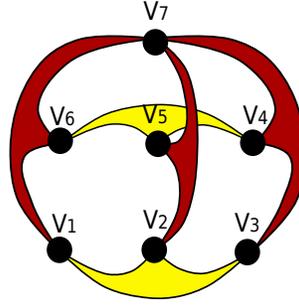


Figura 1.1: Una 3-hipergráfica

Definición 1.2. Sean G^r y H^r dos r -hipergráficas, decimos que H^r es una r -subhipergráfica de G^r si $V(H^r) \subseteq V(G^r)$ y $E(H^r) \subseteq E(G^r)$.

Definición 1.3. Dado $S \subseteq V(G^r)$, la r -subhipergráfica inducida de G^r por S , $G^r[S]$, es la r -hipergráfica con conjunto de vértices $V(G^r[S]) = S$ y conjunto de aristas $E(G^r[S]) = \{e \in E(G^r) \mid e \subseteq S\}$.

Definición 1.4. La r -hipergráfica complemento de G^r , $\overline{G^r}$, es la r -hipergráfica con $V(\overline{G^r}) = V(G^r)$ y $E(\overline{G^r}) = \{e \subseteq V(G^r) \mid e \notin E(G^r) \text{ y } |e| = r\}$.

Definición 1.5. Una r -hipergráfica G^r , se dice que es k -regular, si cada vértice $u \in V(G^r)$ tiene grado k ($\deg(u) = k, \forall u \in V(G^r)$).

Definición 1.6. La r -hipergráfica completa con n vértices, denotada por K_n^r , es la r -hipergráfica con n -vértices y todos los $e \subseteq V(K_n^r)$ con $|e| = r$.

Definición 1.7. Un *clan* de una r -hipergráfica G^r es un subconjunto $S \subseteq V(G^r)$ tal que $G^r[S]$ es una r -subhipergráfica completa (maximal) de G^r . El *número de clan* de G^r

$$\omega(G^r) := \text{máx}\{|S| \text{ tal que } S \text{ es un clan de } G^r\}.$$

Ejemplo 1.2. Consideremos la siguiente 3-hipergráfica, G^3 ,

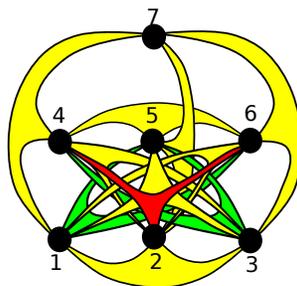


Figura 1.2: Una 3-hipergráfica

donde, $V(G^3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y

$$E(G^3) = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 6, 7\}\}.$$

La siguiente 3-hipergráfica, H^3 , es una 3-subhipergráfica de G^3

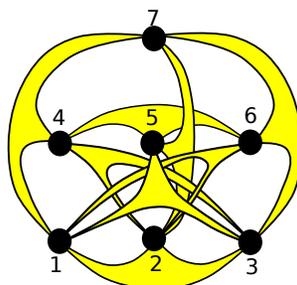


Figura 1.3: Una 3-subhipergráfica

Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la 3-subhipergráfica inducida de G^3 por S , $G^3[S]$, es la siguiente

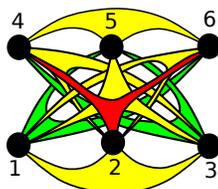
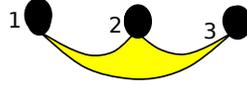


Figura 1.4: $G^3[S]$ es 3-subhipergráfica inducida de G^3 por S

Si consideramos el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$, éste conjunto resulta ser un clan de G^3 .

Figura 1.5: $G^3[S]$

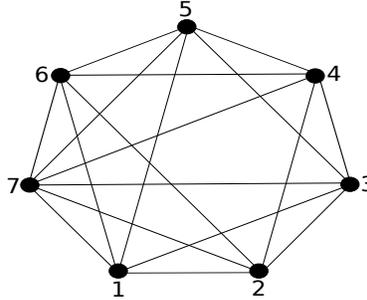
y es un clan maximal, de hecho todos los clanes maximales de G^3 tienen 3-vértices, por lo tanto $\omega(G^3) = 3$.

Definición 1.8. La *gráfica primal* de una r -hipergráfica G^r es la gráfica,

$$G'(G^r) = (V(G'(G^r)), E(G'(G^r))),$$

donde $V(G'(G^r)) = V(G^r)$ y $E(G'(G^r)) = \{\{u, v\} \subseteq V(G'(G^r)) \mid \exists e \in E(G^r) \text{ con } \{u, v\} \subseteq e \text{ y } |\{u, v\}| = 2\}$.

Ejemplo 1.3. Considérese la 3-hipergráfica G^3 del ejemplo 1.2, su gráfica primal esta dada como se muestra en la siguientes figura

Figura 1.6: $G'(G^3)$

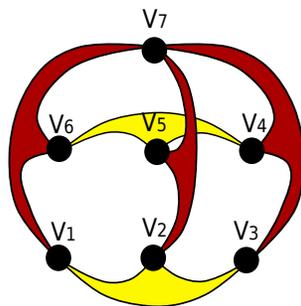
1.2.– Homomorfismos

Consideremos dos r -hipergráficas G^r y H^r . Un *homomorfismo* de G^r en H^r es una función

$$\phi : V(G^r) \rightarrow V(H^r),$$

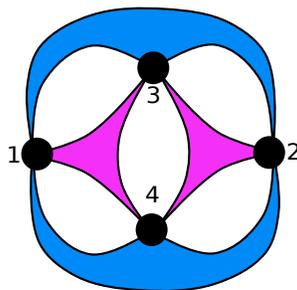
tal que para cada $e \in E(G^r)$ se tiene que $\{\phi(u) \mid u \in e\} \in E(H^r)$.

Ejemplo 1.4. Sea G^3 la 3-hipergráfica del ejemplo 1.1, donde $V(G^3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y $E(G^3) = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\}, \{v_1, v_6, v_7\}, \{v_2, v_5, v_7\}, \{v_3, v_4, v_7\}\}$.



Sea H^3 la siguiente 3–hipergráfica, donde

$$V(H^3) = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{y} \quad E(H^3) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$



Definimos la función $\phi : V(G^3) \rightarrow V(H^3)$ como

$$\phi(v_1) = 1, \quad \phi(v_2) = 2, \quad \phi(v_3) = 3, \quad \phi(v_4) = 2, \quad \phi(v_5) = 1, \quad \phi(v_6) = 3, \quad \phi(v_7) = 4,$$

Claramente ϕ es un homomorfismo.

Lema 1.1. Sean m y n números enteros positivos. Un homomorfismo de r –hipergráficas completas $\varphi : K_m^r \rightarrow K_n^r$ existen si y sólo si $m \leq n$.

DEMOSTRACIÓN. Como un homomorfismo de r –hipergráficas preserva adyacencias se sigue que $\varphi : K_m^r \rightarrow K_n^r$ existe si y sólo si $m \leq n$. ■

Un homomorfismo biyectivo de r –hipergráficas cuyo inverso es también un homomorfismo de r –hipergráficas se llama un *isomorfismo de r –hipergráficas*. Si un isomorfismo entre dos r –hipergráficas existe, entonces las r –hipergráficas se llaman *isomorfas* y escribimos $G^r \simeq H^r$. Un isomorfismo de G^r en G^r se llama un *automorfismo de G^r* . Denotaremos por $\text{Aut}(G^r)$ el conjunto de todos los automorfismos de G^r .

Ejemplo 1.5. *Considérense las siguientes dos 3–hipergráficas, G^3 y H^3 , donde las figuras 1.7 y 1.8 determinan los conjuntos de vértices y los conjuntos de aristas.*

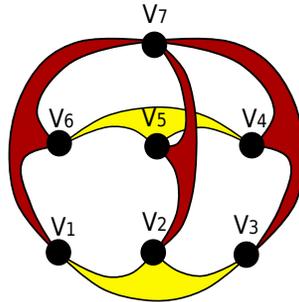


Figura 1.7: G^3

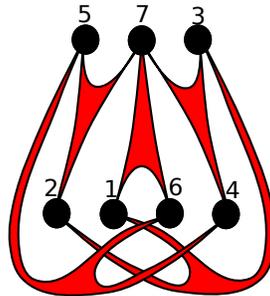
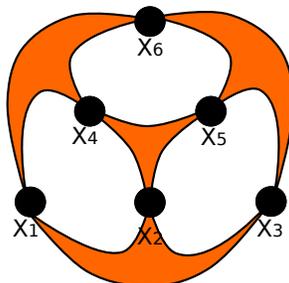


Figura 1.8: H^3

El homomorfismo $\varphi : G^3 \rightarrow H^3$, definido como $\varphi(v_i) = i$ para cada vértices $v_i \in V(G^3)$, resulta ser un isomorfismo de las 3–hipergráficas G^3 y H^3 .

Definición 1.9. Una r –hipergráfica G^r es *vértice–transitiva* si para cada par de vértices u y v existe un automorfismo ϕ sobre G^r tal que $u = \phi(v)$.

Ejemplo 1.6. *El siguiente es un ejemplo de 3–hipergráfica vértice–transitiva.*



Observación 1.1: Si una gráfica es vértice-transitiva, entonces todos sus vértices tienen el mismo grado. Esto sucede también para r -hipergráficas.

1.3.–Conjuntos independientes

Dada una gráfica $G = (V(G), E(G))$, un subconjunto $J \subseteq V(G)$ se llama un *conjunto independiente* de G si no contiene vértices adyacentes, es decir, si para cada $e \in E(G)$ se tiene que $e \not\subseteq J$. En esta Sección vamos a generalizar esta definición para r -hipergráficas.

Considérese una r -hipergráfica G^r . Si $r \geq 3$, resulta posible dar dos definiciones que generalizan el concepto de conjunto independiente.

Definición 1.10. Conjunto independiente débil

Un *conjunto independiente débil* de G^r es un subconjunto J del conjunto de vértices de G^r , tal que J no contiene ninguna arista de G^r , esto es, para cada $e \in E(G^r)$ se tiene que $e \not\subseteq J$.

Denotaremos por $\mathcal{J}(G^r)$ el conjunto de todos los conjuntos independientes débiles de G^r y el *número de independencia débil* de G^r , $\alpha(G^r)$, es la cardinalidad del conjunto independiente débil más grande de G^r , es decir,

$$\alpha(G^r) := \max \{|J| \text{ tal que } J \in \mathcal{J}(G^r)\}.$$

Definición 1.11. Conjunto independiente fuerte

Un *conjunto independiente fuerte* de G^r es un subconjunto J del conjunto de vértices de G^r , tal que J contiene a lo más un vértice de cada arista de G^r , esto es, para cada $e \in E(G^r)$ se tiene que $|e \cap J| \leq 1$.

Denotaremos por $\mathcal{J}^s(G^r)$ el conjunto de todos los conjuntos independientes fuertes de G^r y el *número de independencia fuerte* de G^r , $\alpha^s(G^r)$, es la cardinalidad del conjunto independiente fuerte máximo de G^r , es decir,

$$\alpha^s(G^r) := \max \{|J| \text{ tal que } J \in \mathcal{J}^s(G^r)\}.$$

Ejemplo 1.7. Considerando la 3-hipergráfica H^3 del ejemplo 1.6

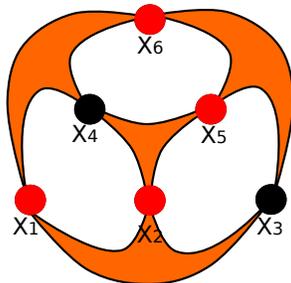


Figura 1.9: $J_1 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ y $J_2 = \{x_3, x_4\} \in \mathcal{J}(H^3)$.

tenemos que el número de independencia débil de H^3 ,

$$\alpha(H^3) = \text{máx } \{|J| \text{ tal que } J \in \mathcal{J}(H^3)\} = |J_1| = 4.$$

Ejemplo 1.8. Si consideramos otra vez la 3-hipergráfica H^3 ,

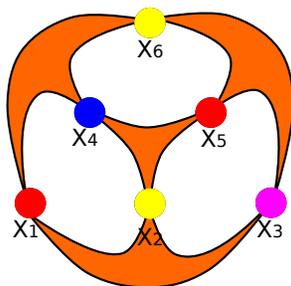


Figura 1.10: $J_1^s = \{x_1, x_5\}$, $J_2^s = \{x_2, x_6\}$, $J_3^s = \{x_3\}$ y $J_4^s = \{x_4\} \in \mathcal{J}^s(H^3)$.

se tiene que el número de independencia fuerte de H^3 ,

$$\alpha^s(H^3) = \text{máx } \{|J| \text{ tal que } J \in \mathcal{J}^s(H^3)\} = |J_1^s| = |J_2^s| = 2.$$

Definición 1.12. Dada una r -hipergráfica G^r . Una colección \mathcal{A} de subconjuntos de $V(G^r)$ se llama una *cubierta* de G^r si

$$\bigcup_{a \in \mathcal{A}} a = V(G^r).$$

Si todos los elementos de la colección \mathcal{A} son conjuntos independientes débiles (respectivamente conjuntos independientes fuertes) se tiene una *cubierta débil* (respectivamente una *cubierta fuerte*) de G^r .

1.4.–Matriz de independencia

Dada una r -hipergráfica G^r , definimos la *matriz de independencia* $B(G^r) = [B_{ij}]$, donde $1 \leq i \leq |V(G^r)|$ y $1 \leq j \leq |\mathcal{J}(G^r)|$ de la siguiente manera

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } u_i \in J_j; \\ 0, & \text{de lo contrario,} \end{cases}$$

donde $J_i \in \mathcal{J}(G^r)$ y $u_i \in V(G^r)$.

Si $\mathcal{J}(G^r)$ es el conjunto de conjuntos independientes débiles, la matriz de independencia se llama *matriz de independencia débil* y la denotaremos simplemente por $B(G^r)$. Análogamente si, $\mathcal{J}^s(G^r)$ es el conjunto de conjuntos independientes fuertes, la matriz de independencia se llama *matriz de independencia fuerte* y la denotaremos por $B^s(G^r)$.

Ejemplo 1.9. *Considérese la siguiente 3-hipergráfica*

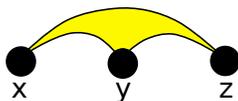


Figura 1.11: G^3

Observemos que el conjunto de conjuntos independientes débiles de G^3 está dado por

$$\mathcal{J}(G^3) = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\},$$

entonces la matriz de independencia débil de G^3 está dada como sigue:

$$B(G^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, si consideramos el conjunto de conjuntos independientes fuertes de G^3 ,

$$\mathcal{J}^s(G^3) = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\},$$

se sigue que la matriz de independencia fuerte de G^3 es como sigue:

$$B^s(G^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5.–Hipergráficas de Kneser

A continuación daremos la definición de gráfica de Kneser.

Definición 1.13. Sean a, b números enteros positivos, $a \geq 2b$. La *gráfica de Kneser* $KG_{a:b}$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los subconjuntos con b elementos (b -subconjuntos) del conjunto $\{1, 2, \dots, a\}$, y el conjunto de aristas es el conjunto de todos los pares de b -elementos ajenos.

Ejemplo 1.10. Sean $a = 5$ y $b = 2$. Entonces la gráfica de Kneser $KG_{5:2}$, esta dada como sigue

$$V(KG_{5:2}) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$$

y

$$E(KG_{5:2}) = \{\{A, B\} \mid A, B \in V(KG_{5:2}) \text{ y } A \cap B = \emptyset\}.$$

Se muestra en la siguiente figura como es esta gráfica

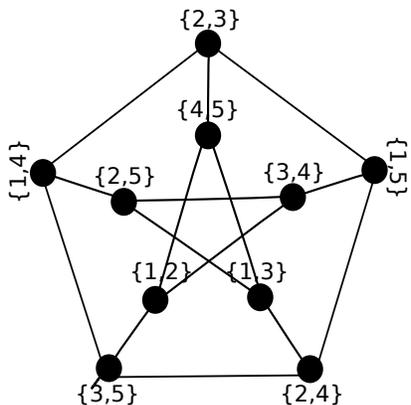


Figura 1.12: gráfica de Kneser

Resulta ser la gráfica de Petersen.

A continuación vamos a definir las r -hipergráficas de Kneser y daremos algunos ejemplos.

Definición 1.14. Sean a, b, r enteros positivos tal que $r \geq 2$ y $a \geq rb$. La r -hipergráfica de Kneser débil $KG_{a:b}^r$ es la r -hipergráfica, donde el conjunto de vértices es

$$V(KG_{a:b}^r) = \{A \mid A \subseteq [a] \text{ y } |A| = b\};$$

es decir, el conjunto de todos los b -subconjuntos de un conjunto de tamaño a ,

$$|V(KG_{a:b}^r)| = \binom{a}{b}$$

y el conjunto de aristas es

$$E(KG_{a,b}^r) = \{\{A_1, \dots, A_r\} \mid A_i \in V(KG_{a,b}^r) \text{ y } A_1 \cap \dots \cap A_r = \emptyset\}.$$

Diremos que una r -hipergráfica de Kneser débil es una r -hipergráfica de Kneser fuerte si, para cada arista $e = \{A_1, \dots, A_r\}$ de la r -hipergráfica de Kneser débil se tiene que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para cada $i \neq j \in \{1, \dots, r\}$ y la denotaremos por $K^s G_{a,b}^r$.

En el caso $r = 2$, se obtiene la gráfica de Kneser clásica, es decir, $KG_{a,b} = K^s G_{a,b}^2 = KG_{a,b}^2$.

Ejemplo 1.11. Sean $a = 3$, $b = 2$, y $r = 3$, entonces la 3-hipergráfica de Kneser débil, $KG_{3,2}^3$, tiene como conjunto de vértices

$$V(KG_{3,2}^3) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

y como conjunto de aristas

$$E(KG_{3,2}^3) = \{\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}\}$$

ya que $\{1, 2\} \cap \{1, 3\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$, estos conjuntos se ilustran en la siguiente figura

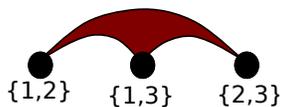


Figura 1.13: 3-hipergráfica de Kneser débil

Para la 3-hipergráfica de Kneser fuerte, $K^s G_{3,2}^3$, su conjunto de vértices es

$$V(K^s G_{3,2}^3) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

y su conjunto de aristas es

$$E(K^s G_{3,2}^3) = \emptyset,$$

debido a que el único conjunto de 3-vértices en esta 3-hipergráfica de Kneser fuerte es $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ y cada dos elementos de este conjunto tienen intersección no vacía.

Ejemplo 1.12. Sean $a = 7$, $b = 1$, y $r = 6$, el conjunto de vértices de la 6-hipergráfica de Kneser débil es

$$V(KG_{7,1}^6) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}\}$$

y su conjunto de aristas es

$$E(KG_{7,1}^6) = \{\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\} \mid A_i \in V(KG_{7,1}^6) \text{ y } A_i \neq A_j \forall i \neq j\}.$$

Observemos que el siguiente homomorfismo $\varphi : KG_{7,1}^6 \rightarrow K_7^6$ dado como sigue:

$$\varphi(\{i\}) = i, \quad \forall i \in \{1, \dots, 7\}$$

es un isomorfismo.

En general, resulta que tanto la r -hipergráfica de Kneser débil $KG_{n,1}^r$ como la fuerte $K^s G_{n,1}^r$ son isomorfas a la r -hipergráfica completa K_n^r . Así, $K_n^r \simeq KG_{n,1}^r \simeq K^s G_{n,1}^r$.

1.6.–Herramientas básicas

En esta Sección enunciaremos algunos resultados que serán muy útiles en el transcurso de este trabajo.

Definición 1.15. Una función $\nu : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *subaditiva* si para cada $a, b \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $\nu(a + b) \leq \nu(a) + \nu(b)$.

Lema 1.2 (Lema de Subaditividad de Michael Fekete [5]). Supóngase que ν es una función subaditiva y que $\nu(n) \geq 0$ para todo n . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{n} = \inf \left\{ \frac{\nu(n)}{n} \right\},$$

para todo número entero positivo n .

DEMOSTRACIÓN. Sea $x = \limsup \frac{\nu(k)}{k}$ y sea n un número entero positivo fijo. Sea m cualquier entero $m > n$ (grande). Dividimos m por n y escribimos $m = qn + r$ con $0 \leq r < n$. Notemos que por la subaditividad, $\nu(m) \leq q\nu(n) + \nu(r)$. Dividiendo por m se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\nu(m)}{m} &\leq \frac{q\nu(n) + \nu(r)}{qn + r} \\ &\leq \frac{q\nu(n) + \nu(r)}{qn} \\ &\leq \frac{\nu(n)}{n} + \frac{\nu(r)}{qn} \end{aligned}$$

Elegimos una sucesión de m 's que tienda a infinito para que $\frac{\nu(m)}{m} \rightarrow x$. Notemos que $\frac{\nu(r)}{qn} \rightarrow 0$ ya que $\nu(r)$ esta acotada y n es fijo pero $q \rightarrow \infty$. Así se tiene $x \leq \frac{\nu(n)}{n}$ para cualquier n . Esto implica $\liminf \frac{\nu(n)}{n} \geq x = \limsup \frac{\nu(n)}{n}$, así $\lim \frac{\nu(n)}{n} = x$ y $\lim \frac{\nu(n)}{n} = \inf \left\{ \frac{\nu(n)}{n} \right\}$. ■

A continuación daremos algunas definiciones y resultados de Programación Lineal.

Definición 1.16. Sean A una matriz de $n \times m$, b una matriz de $n \times 1$, y c una matriz de $m \times 1$. Todas ellas fijas y con entradas en los reales. A los vectores columnas x y y de tamaño m y n respectivamente, que satisfacen lo siguiente:

$$(P_1) \quad \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \quad (D_1) \quad \begin{array}{l} A^t y \geq c \\ y \geq 0 \end{array}$$

se les llamará *puntos factibles*, de esta manera definimos los siguientes problemas:

■ *Problema primal*

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx } c^t x & \\ Ax & \leq b \\ x & \geq 0. \end{array}$$

■ *Problema dual*

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín } b^t y & \\ A^t y & \geq c \\ y & \geq 0. \end{array}$$

Observación 1.2:

1. \hat{x} es solución del problema primal si

$$\hat{x} = \text{máx } c^t x \quad \text{para cada punto factible } x \text{ (} x \text{ satisface } (P_1)\text{)}.$$

2. \hat{y} es solución del problema dual si

$$\hat{y} = \text{mín } b^t y \quad \text{para cada punto factible } y \text{ (} y \text{ satisface } (D_1)\text{)}.$$

Teorema 1.3. *La dualidad es simétrica, es decir, el dual de (D) es (P).*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar este teorema tomaremos el problema:

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín } b^t y & \\ A^t y & \geq c \\ y & \geq 0 \end{array}$$

y lo transformaremos para escribirlo en forma “primal”, es decir, como un problema de maximización, con restricciones de tipo \leq , y positividad en las variables. Esto es, (D) es equivalente a:

$$(\tilde{D}) \quad \begin{array}{ll} \text{máx } (-b^t)y & \\ (-A^t)y & \leq -c \\ y & \geq 0 \end{array}$$

El problema dual asociado a (\tilde{D}) , según la definición anterior, es:

$$\begin{array}{rcl} -\text{mín } (-c^t)x & & \\ (-A)x & \geq & -b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

que a su vez es equivalente a:

$$(P) \quad \begin{array}{rcl} \text{máx } c^t x & & \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

que es entonces el dual de (D) . ■

Observación 1.3: El teorema precedente muestra que el dual de un problema dual es el primal y por definición el dual del primal es el dual, es decir, ambos problemas son mutuamente duales. A continuación veremos que dado cualquier problema primal su dual siempre existe aunque no necesariamente es único, en el sentido que un mismo problema puede escribirse en más de una forma.

Sin embargo para obtener una mejor noción de dualidad se requiere que las variables de un problema pertenezcan a un espacio cuya dimensión sea igual al número de restricciones del dual (por restricciones entendemos las ecuaciones o inecuaciones lineales, sin incluir las condiciones de signo de las variables).

Teorema 1.4 (Teorema de Dualidad Débil). Sea

$$(P) \quad \begin{array}{rcl} \text{máx } c^t x & & \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

un problema primal y

$$(D) \quad \begin{array}{rcl} \text{mín } b^t y & & \\ A^t y & \geq & c \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

su dual. Consideremos también x e y , puntos factibles de (P) y (D) respectivamente. Entonces se cumple

$$c^t x \leq b^t y$$

es decir, la función objetivo del problema dual acota (en este caso, superiormente) a la del primal.

DEMOSTRACIÓN. Si multiplicamos por x^t (≥ 0) la inecuación $A^t y \geq c$, se obtiene que $x^t A^t y \geq x^t c$, de donde $c^t x \leq (Ax)^t y$, pues $y \geq 0$. ■

Corolario 1.5. Sean \tilde{x} e \tilde{y} puntos factibles para (P) y (D) . Si $c^t\tilde{x} = b^t\tilde{y}$, entonces \tilde{x} e \tilde{y} son óptimos respectivos.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa del Teorema de Dualidad Débil: $b^t\tilde{y} = c^t\tilde{x} \leq b^ty$ para cada y punto factible de (D) , es decir, \tilde{y} es óptimo de (D) . $c^t\tilde{x} = b^t\tilde{y} \geq c^tx$ para cada x punto factible de (P) , es decir, \tilde{x} es óptimo de (P) . ■

Teorema 1.6 (Teorema de Dualidad Fuerte). Consideremos la pareja primal–dual

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx } c^tx & \\ Ax & \leq b \\ x & \geq 0 \end{array}$$

y

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín } b^ty & \\ A^ty & \geq c \\ y & \geq 0. \end{array}$$

Entonces

- a).– Si \tilde{z} (valor mínimo de (P)) es finito, entonces \tilde{w} (valor máximo de (D)) también lo es y se cumple $\tilde{z} = \tilde{w}$.
- b).– Si \tilde{w} es finito, entonces \tilde{z} también lo es y se tiene que $\tilde{w} = \tilde{z}$.
- c).– Si (P) es no acotado, entonces (D) es infactible.
- d).– Si (D) es no acotado, entonces (P) es infactible.

DEMOSTRACIÓN.

- a) Dado que \tilde{z} es finito, existe un \tilde{x} solución óptima factible básica de (P) . Entonces existe también B ; submatriz de $A = [B, N]$; tal que $\tilde{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix}$. Además, el óptimo de los costos reducidos de las variables no básicas es positivo, es decir para $\pi = B_{c_B}^t$ se tiene

$$c_N^t - \pi^t N \geq 0$$

lo que implica

$$N^t \pi \leq c_N.$$

Probaremos que π es solución óptima factible básica de (D) , con lo cual, $\tilde{w} = b^t\pi$ será finito. En efecto, π es factible para (D) , pues

$$A^t\pi = \begin{pmatrix} B^t \\ N^t \end{pmatrix} B^{-t}c_B = \begin{pmatrix} c_B \\ N^t\pi \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = c$$

y π es óptimo para (D) , pues

$$\tilde{w} = b^t \pi = b^t B^{-t} c_B = (c_B^t \ c_N^t) \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = c^t \tilde{x} = \tilde{z}$$

y por el Teorema de dualidad débil, π es óptimo.

b) Análogo.

c) Sabemos que (P) es no acotado. Supongamos entonces que existe \bar{y} tal que $A^t \bar{y} \leq c$ (esto es la factibilidad del dual). Por el Teorema de dualidad débil, $b^t \bar{y} \leq c^t x$; para cada x punto primal-factible. Esto dice que (P) es acotado. Contradicción.

d) Análogo.



Coloraciones en gráficas

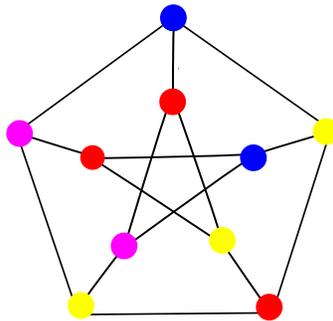
En este Capítulo veremos las definiciones de coloración propia, coloración fraccional, clán fraccional de una gráfica G . Daremos también algunos ejemplos y resultados básicos de dichas definiciones.

2.1.–Coloraciones propias

Sea G una gráfica simple. Una coloración propia o buena coloración de G es una asignación de colores a los vértices de G de tal manera que vértices adyacentes tengan diferentes colores. Dicho de otra manera

Definición 2.1. Dado $S \subset \mathbb{N}$ un conjunto de colores y dada una gráfica $G = (V(G), E(G))$, una *coloración* de G es una función $c : V(G) \rightarrow S$. La coloración se llama una *coloración propia* si para cada $\{u, v\} \in E(G)$ se tiene que $c(u) \neq c(v)$. Si la cardinalidad de S es k y c es sobreyectiva, entonces diremos que c es una k -coloración propia de G .

Ejemplo 2.1. En la siguiente figura, se muestra una 4-coloración propia de la gráfica de Petersen



En término de homomorfismos de gráficas, una k -coloración propia puede verse como un homomorfismo de G en K_k (donde, K_k es la gráfica completa con k -vértices). Si consideramos la imagen inversa de un vértice en K_k , es decir, el conjunto de todos los vértices en G con un

cierto color, siempre tendremos un conjunto independiente. Este conjunto independiente se llama la *clase cromática* asociada con la coloración propia. Así, una k -coloración propia de una gráfica G puede pensarse como una partición del conjunto de vértices de G en conjuntos independientes.

Definición 2.2. El mínimo número k para el cual G tiene una k -coloración propia, se llama el *número cromático* de G y se denota por $\chi(G)$. Equivalentemente, el número cromático es el menor número de conjuntos independientes que se requieren para cubrir los vértices de G .

Ejemplo 2.2. Supóngase que G es una gráfica bipartita y que $E(G) \neq \emptyset$. Por definición existe una partición de los vértices de G en dos conjuntos V_1 y V_2 (no vacíos) de forma que cada arista de G tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2 . Así, V_1 y V_2 son conjuntos independientes y por lo tanto, $\chi(G) = 2$.

Ejemplo 2.3. Sea G la gráfica de Petersen con $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$ como se muestra en la figura 2.1. Considérense los siguientes conjuntos independientes: $I_1 = \{1, 4, 8, 9\}$, $I_2 = \{2, 6, 10\}$ y $I_3 = \{3, 5, 7\}$. Estos conjuntos son disjuntos dos a dos, claramente la unión de todos estos conjuntos es el conjunto de vértices de G . Por lo tanto $\{I_1, I_2, I_3\}$ es una cubierta de G . Asignaremos una coloración propia para G como sigue: coloreamos los vértices del conjunto I_1 de rojo, los vértices del conjunto I_2 de azul y los vértices del conjunto I_3 de amarillo, entonces G admite una 3-coloración propia como se muestra en la figura

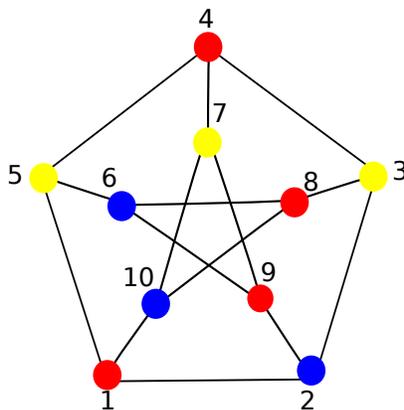


Figura 2.1: Una 3-coloración propia de la gráfica de Petersen

Nótese que no existe una cubierta de G con sólo dos conjuntos independientes. En el caso de existir, G sería bipartita. Contradicción, debido a que la gráfica de Petersen no es bipartita, ya que contiene ciclos impares. Por lo tanto, el número cromático de G , $\chi(G) = 3$.

Como sabemos un homomorfismo de gráficas $\phi : G \rightarrow H$ preserva adyacencias. Por lo tanto, para m y n números enteros positivos, existe un homomorfismo $\phi : K_m \rightarrow K_n$, si y sólo si $m \leq n$. Así, el número cromático de G , $\chi(G)$, es el mínimo entero positivo k tal que existe un homomorfismo $\phi : G \rightarrow K_k$.

Para cualquier k -coloración propia de G se tiene que $\chi(G) \leq k$. Como cualquier gráfica finita con n vértices puede ser coloreada con n colores, se sigue que $\chi(G)$ está bien definido para gráficas finitas.

Toda coloración propia de una gráfica G , asigna diferentes colores a todos los vértices de cada clan de G , así

$$\omega(G) \leq \chi(G), \quad (2.1)$$

Observemos que si $\chi(G) = k$, cada clase cromática

$$I_i = \{u \in V(G) \mid u \text{ recibe el color } i\}$$

es un conjunto independiente para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^k I_i.$$

Como $\alpha(G)$ es el número de independencia de G , entonces

$$|I_i| \leq \alpha(G).$$

Por lo tanto,

$$|V(G)| = \left| \bigcup_{i=1}^k I_i \right| \leq k\alpha(G).$$

Se sigue entonces que

$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \chi(G). \quad (2.2)$$

2.2.–Coloración fraccional

El concepto de coloración fraccional en gráficas, es un concepto en una rama nueva de la teoría de gráficas conocida como *teoría de gráficas fraccional*, y es una generalización de una coloración propia en gráficas.

Así, como en una coloración propia en gráficas a cada vértice de la gráfica se le asigna un color y a vértices adyacentes se les deben asignar diferentes colores, en una coloración fraccional a cada vértice se le asignan b -colores y a vértices adyacentes se les deben asignar conjuntos ajenos de colores, esto es, si dos vértices son unidos por una arista, entonces ellos no deben tener ningún color en común.

En esta Sección, daremos 4 diferentes formas de definir el número cromático fraccional de una gráfica G (2.4, 2.5, 2.6 y 2.7) y demostramos que son equivalentes.

Definición 2.3. Dada una gráfica G , y a, b números enteros con $0 < b \leq a$, decimos que una función

$$f : V(G) \rightarrow \{B \mid B \subseteq \{1, \dots, a\} \text{ y } |B| = b\};$$

es una (a, b) -coloración propia si para cada arista $\{u, v\} \in E(G)$ se tiene que $f(u) \cap f(v) = \emptyset$.

Notemos que una $(n, 1)$ -coloración propia es una n -coloración propia.

Ejemplo 2.4. Sea G la siguiente gráfica, donde el dibujo determina el conjunto de vértices y el conjunto de aristas.

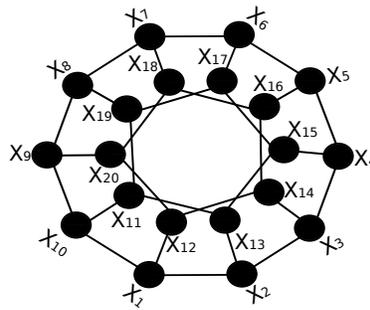


Figura 2.2: Una G

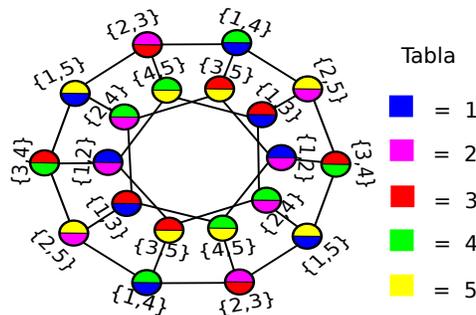
La función

$$f : V(G) \rightarrow \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\},$$

definida como

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_6) = \{1, 4\}, & \quad f(x_2) = f(x_7) = \{2, 3\}, & \quad f(x_3) = f(x_8) = \{1, 5\}, \\ f(x_4) = f(x_9) = \{3, 4\}, & \quad f(x_5) = f(x_{10}) = \{2, 5\}, & \quad f(x_{11}) = f(x_{16}) = \{1, 3\}, \\ f(x_{12}) = f(x_{17}) = \{3, 5\}, & \quad f(x_{13}) = f(x_{18}) = \{4, 5\}, & \quad f(x_{14}) = f(x_{19}) = \{2, 4\}, \\ f(x_{15}) = f(x_{20}) = \{1, 2\}, & \end{aligned}$$

es una $(5, 2)$ -coloración propia de G . En la siguiente figura ilustramos dicha coloración



El b -número cromático de G se define como

$$\chi_b(G) = \text{mín} \{a \mid G \text{ tiene una } (a, b)\text{-coloración propia}\}$$

Definición 2.4. El número cromático fraccional de G , $\chi_f(G)$, es

$$\chi_f(G) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\chi_b(G)}{b}.$$

Ejemplo 2.5. Observe que si K_n es la gráfica completa de orden n , se tiene que

$$\chi_b(K_n) = n \cdot b.$$

Por lo tanto, $\chi_f(K_n) = n$.

Proposición 2.1. Por definición $\chi_b(G)$ es una función no negativa y además es subaditiva, esto es, $\chi_{b+c}(G) \leq \chi_b(G) + \chi_c(G)$ para cada b y c enteros positivos. Ya que si $\chi_b(G) = a_1$ y $\chi_c(G) = a_2$, implica que existe una función

$$f_1 : V(G) \rightarrow \{B \mid B \subseteq \{1, \dots, a_1\} \text{ y } |B| = b\}$$

que es una (a_1, b) -coloración propia de G y otra función

$$f_2 : V(G) \rightarrow \{B \mid B \subseteq \{1', \dots, a_2\} \text{ y } |B| = c\}$$

que es una (a_2, c) -coloración propia de G . Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{1, \dots, a_1\} \cap \{1', \dots, a_2\} = \emptyset$, definimos una función

$$f : V(G) \rightarrow \{B \mid B \subseteq \{1, \dots, a_1, 1', \dots, a_2\} \text{ y } |B| = b + c\}$$

para cada $u \in V(G)$, tenemos que $f(u) = f_1(u) + f_2(u)$, como f_1 y f_2 son (a_1, b) y (a_2, c) coloraciones propias de G respectivamente, entonces f es una $(a_1 + a_2, b + c)$ -coloración propia de G . Por lo tanto, se da la desigualdad.

Usando el Lema de subaditividad de Fekete 1.2 resulta que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\chi_b(G)}{b} = \inf_b \left\{ \frac{\chi_b(G)}{b} \right\}.$$

A continuación, consideramos gráficas de Kneser $KG_{a:b}$. Se sabe que una n -coloración propia de una gráfica G se puede ver como un homomorfismo de G a la gráfica completa K_n . Así, una (a, b) -coloración propia de G se puede definir como un homomorfismo de G en $KG_{a:b}$. Lo que da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.5. El número $\chi_f^*(G)$, se define como

$$\chi_f^*(G) = \inf_{(a,b)} \frac{a}{b},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los pares (a, b) tal que existe un homomorfismo de gráficas de G a $KG_{a:b}$.

Ahora considerando clases cromáticas fraccionales podemos formular la siguiente definición

Definición 2.6. Sea G una gráfica. El número, $\tilde{\chi}_f(G)$, se define como

$$\tilde{\chi}_f(G) = \inf_{(a,b)} \frac{a}{b},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos las cubiertas por conjuntos independientes 1.12 de a elementos J_1, \dots, J_a tal que cada vértice es cubierto al menos b veces, esto es, $|\{i \mid v \in J_i\}| \geq b$, para cada $v \in V(G)$.

Claramente, haciendo los conjuntos independientes más pequeños (si es necesario), podemos siempre cubrir cada vértice por exactamente b conjuntos independientes.

Finalmente recordemos que $\mathcal{J}(G)$ denota el conjunto de todos los conjuntos independientes de $V(G)$, y para cada $u \in V(G)$, $\mathcal{J}(G, u)$ denota el conjunto de todos los conjuntos independientes que contienen a u .

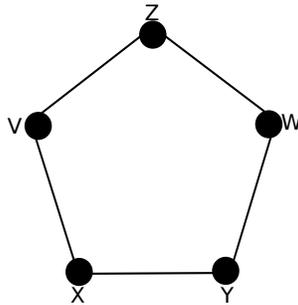
Definición 2.7. Una función $f : \mathcal{J}(G) \rightarrow [0, 1]$ tal que, $\sum_{J \in \mathcal{J}(G, u)} f(J) \geq 1$ para cada $u \in V(G)$, es llamada una *coloración fraccional*, y definimos el *peso* de la función

$$p(f) = \sum_{J \in \mathcal{J}(G)} f(J).$$

El número, $\hat{\chi}_f(G)$, es

$$\hat{\chi}_f(G) = \min\{p(f) \mid f \text{ es una coloración fraccional de } G\}.$$

Ejemplo 2.6. Sea $G = C_5$, el dibujo determina el conjunto de vértices y el conjunto de aristas



Entonces,

$$\mathcal{J}(C_5) = \{\{v\}, \{w\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{w, x\}, \{w, v\}, \{v, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$$

Sea

$$f : \mathcal{J}(C_5) \rightarrow [0, 1]$$

definida como:

$$f(v) = f(w) = f(x) = f(y) = f(z) = 0$$

y

$$f(\{w, x\}) = f(\{w, v\}) = f(\{v, y\}) = f(\{x, z\}) = f(\{y, z\}) = \frac{1}{2},$$

esta función es una coloración fraccional de C_5 con peso $p(f) = \frac{5}{2}$.

Teorema 2.2. Sea G una gráfica, entonces

$$\chi_f(G) = \chi_f^*(G) = \tilde{\chi}_f(G) = \hat{\chi}_f(G).$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este resultado es bien conocida y puede encontrarse en [4]. En este trabajo generalizamos este mismo resultado para r -hipergráficas, mismo que no se encuentra en la literatura pero es completamente análogo. De esta manera, incluimos la demostración de este Teorema en el Capítulo 3. ■

Resulta útil tener en cuenta todas estas definiciones anteriores como veremos posteriormente. Más aún, la utilidad de las diferentes formas de definir el número cromático fraccional, es que al considerar la definición usando conjuntos independientes llegamos a un método de cálculo utilizando herramientas de programación lineal. Esto es, una coloración fraccional en gráficas puede también ser vista como una relajación de Programación Lineal Entera. En efecto, los problemas de coloración fraccional son mucho más susceptibles a un enfoque de programación lineal que los problemas de coloración tradicional.

Con este fin, vamos a construir una matriz que representa una coloración fraccional.

Para una gráfica G , definimos una matriz $B(G) = [B_{ij}]$, con columnas indexadas por $V(G)$ y filas indexadas por $\mathcal{J}(G)$. Cada fila es esencialmente la función característica de los correspondientes conjuntos independientes, con entradas igual a 1 sobre las columnas correspondientes a vértices en el conjunto independiente, y 0 en cualquier otro caso. Esto es, $B_{ij} = 1$ si $u_i \in J_j$ y $B_{ij} = 0$ si $u_i \notin J_j$.

Ahora, consideremos el f de tamaño $|\mathcal{J}(G)|$ y con entradas dadas por la coloración fraccional f de G . Denotemos por $\mathbf{1}$ el vector columna de tamaño n que tiene todas sus entradas iguales a 1, la desigualdad $B(G) \cdot f \geq \mathbf{1}$ expresa la condición que

$$\sum_{J \in \mathcal{J}(G, u)} f(J) \geq 1$$

para cada $u \in V(G)$.

En esta representación algebraica de una coloración fraccional, el problema de determinar el número cromático fraccional se convierte en un problema de Programación Lineal. Las entradas del vector f son un conjunto de variables, uno para cada conjunto independiente de G , nos gustaria minimizar la suma de las variables (el peso de la coloración fraccional) sujeta a un conjunto de restricciones, estas son, que cada entrada en el vector $B(G) \cdot f \geq 1$, y que cada variable este en el intervalo $[0, 1]$. Esto equivale a la minimización de una función lineal dentro de un poliedro convexo en un espacio de dimensión m definidas por un número de

desigualdades lineales, donde $m = |\mathcal{J}(G)|$. Este mínimo se tiene en un vértice del poliedro. Dado que cada hiperplano que forma parte de una cara del poliedro es determinado por una ecuación lineal con coeficientes enteros, entonces cada vértice tiene coordenadas racionales, por lo que nuestra coloración fraccional óptima en efecto, toma valores racionales, como se había prometido.

El número cromático usual, se puede calcular con el mismo programa lineal, al pedir que los valores de la matriz f esten en el conjunto $\{0, 1\}$. Esto es equivalente a cubrir el conjunto de vértices por conjuntos independientes que sólo pueden tener peso 1 o 0. Aunque los algoritmos de tiempo polinomial existen para el cálculo de las soluciones óptimas para programas lineales, este no es el caso de programas enteros o programas de 0, 1. De hecho, muchos de estos problemas se ha demostrado que son NP -duros. En este sentido, el número cromático fraccional es más fácil de calcular que el número cromático.

2.3.–Clan fraccional

Al considerar Programación Lineal, existe una definición dual de la definición de número cromático fraccional, la cual maximiza la suma de los elementos de un vector columna g de tamaño n , sujeto a la condición que $g^t \cdot B(G) \leq \bar{\mathbf{1}}^t$, donde $\bar{\mathbf{1}}$ es el vector columna de tamaño $|\mathcal{J}(G)|$ con todas sus entradas iguales a 1. Podemos plantear este problema de maximización de la siguiente manera.

Sea

$$g : V(G) \rightarrow [0, 1],$$

una función con la propiedad que, para cada conjunto independiente J en $\mathcal{J}(G)$,

$$\sum_{u \in J} g(u) \leq 1,$$

tal función se llama *clan fraccional*, es el concepto dual de una coloración fraccional. Como con coloraciones fraccionales, definimos el *peso de un clan fraccional* como

$$p(g) = \sum_{u \in V(G)} g(u).$$

Definición 2.8. El *número de clan fraccional* de una gráfica G , $\omega_f(G)$, es

$$\omega_f(G) = \text{máx} \{p(g) \mid g \text{ es un clan fraccional de } G\}.$$

Por lo que se mencionó anteriormente, una coloración fraccional es una relajación de la idea de una coloración entera, nos gustaría entender un clan fraccional como la relajación del concepto de un clan entero a los números racionales (o reales).

Para comprender un clan (definido en el Capítulo 1) como un clan fraccional, consideremos una gráfica G y supongamos que el número de clan de G , $\omega(G)$, es k . Entonces G contiene una subgráfica completa K_k de orden k . Definimos una función $g : V(G) \rightarrow [0, 1]$

que toma el valor de 1 en cada vértice de K_k y el valor de 0 en todos los demás vértices. Para cada conjunto independiente J de G , se tiene que

$$\sum_{u \in J} g(u) \leq 1,$$

de hecho es 1 o 0. Por lo tanto esta función es un clan fraccional de G con peso k . Entonces $\omega(G) = k = p(g) \leq \omega_f(G)$. Se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.3. *Sea G cualquier gráfica con número de clan $\omega(G) = k$, entonces*

$$k = \omega(G) \leq \omega_f(G).$$

2.4.–Resultados

A continuación vamos a dar algunas cotas para el número cromático fraccional de una gráfica G dada.

Sea $\chi(G)$ el número cromático de una gráfica G , observe que si $\chi(G) = k$, entonces G admite una $(k, 1)$ -coloración propia y para cualquier entero positivo b se obtiene una (bk, b) -coloración propia inducida por la $(k, 1)$ -coloración propia reemplazando cada color $i \in \{1, \dots, k\}$ por b -colores diferentes. Por lo tanto $\chi_f(G) \leq \chi(G)$, o en términos de homomorfismos, podemos simplemente notar la existencia de un homomorfismo $\varphi : K_k \rightarrow K_{bk:b}$ (como sigue: $\varphi(i) = j$, donde $j \equiv i \pmod{k}$).

A continuación vamos a obtener una cota inferior para el número cromático fraccional. Notemos que si una gráfica G contiene una subgráfica completa K_k de orden k , entonces tiene una (a, b) -coloración propia si tiene al menos $k \cdot b$ colores, en otras palabras, $\omega(G) \leq \chi_f(G)$.

Recordemos que $\alpha(G)$ denota el número de independencia de G , esto es,

$$\alpha(G) = \max \{|J| \text{ tal que } J \in \mathcal{I}(G)\},$$

podemos obtener otra cota inferior considerando el número de independencia de la gráfica. Como a cada color i en una (a, b) -coloración propia le corresponde un conjunto independiente J_i de vértices (clase cromática fraccional), tenemos

$$|V(G)| \cdot b = \bigcup_{i=1}^a J_i \leq \bigcup_{i=1}^a \alpha(G) \leq \alpha(G) \cdot a,$$

o

$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \chi_f(G).$$

Los siguientes resultados son conocidos en la literatura (ver [4], [6]) y sin embargo aunque las demostraciones son análogas no se conocen para el caso de r -hipergráficas, por consiguiente las daremos en el Capítulo 3.

Lema 2.4. Si H es una subgráfica de G , se tiene que $\chi_f(H) \leq \chi_f(G)$.

Lema 2.5. Para cualquier gráfica G , el número cromático fraccional $\chi_f(G)$ y el número de clan fraccional $\omega_f(G)$ no cambian si consideramos sólo los conjuntos independientes maximales $\mathcal{I}(G)$ en lugar de todos los conjuntos independientes de la gráfica.

Lema 2.6. Sea G cualquier gráfica, entonces

$$\omega_f(G) = \chi_f(G).$$

Lema 2.7. Para cualquier gráfica G ,

$$\omega_f(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$$

Lema 2.8. Si G es vértice transitiva, entonces

$$\omega_f(G) = \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$$

y para cada $u \in V(G)$ se tiene que $g(u) = \alpha(G)^{-1} \cdot 1$ es un clan fraccional con peso $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.

Por todo lo mencionado anteriormente, se tienen las siguientes desigualdades,

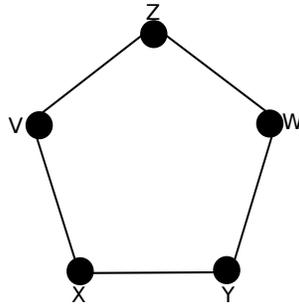
$$\omega(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi(G),$$

y M. Larsen, J. Propp and D. H. Ullman en [15], probaron que las diferencias

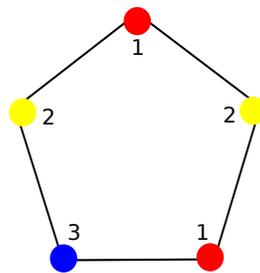
$$\chi(G) - \omega(G), \quad \chi_f(G) - \omega(G), \quad \chi(G) - \chi_f(G)$$

pueden ser arbitrariamente grandes, en este trabajo daremos este resultado para r -hipergráficas.

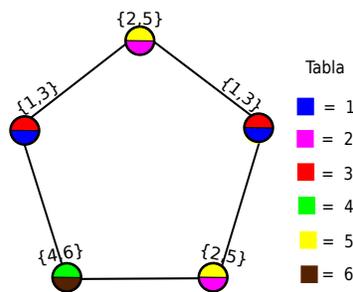
Ejemplo 2.7. Sea $G = C_5$, donde el dibujo determina el conjunto de vértices y el conjunto de aristas



El número cromático de C_5 , $\chi(C_5) = 3$, en la figura se muestra una 3-coloración propia



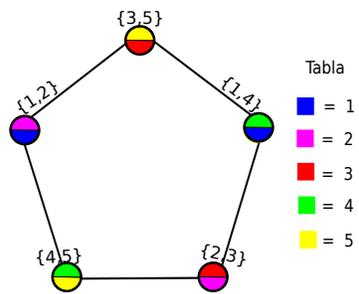
Consideremos la $(2, 6)$ -coloración propia de C_5 inducida por la 3-coloración propia anterior.



A continuación veremos que esta $(2, 6)$ -coloración propia no es óptima y probaremos que $\chi_f(C_5) = 5/2$. Comenzaremos definiendo una función $g : V(C_5) \rightarrow [0, 1]$, donde $g(u) = 1/2$ para cada $u \in V(C_5)$. Los conjuntos independientes maximales de C_5 son de tamaño a lo más 2. Por lo tanto la suma de las imágenes en cada conjunto independiente de C_5 es a lo más 1 y como para cada $u \in V(C_5)$ se tiene que $g(u) = 1/2 \geq 0$, se sigue que g es un clan fraccional de C_5 con pesos $p(g) = 5/2$. En el ejemplo 2.6 dimos una coloración fraccional f de C_5 con peso $p(f) = 5/2$. Entonces $5/2 \leq \omega_f(C_5) = \chi_f(C_5) \leq 5/2$. Por lo tanto se tiene que

$$\chi_f(C_5) = \frac{5}{2}.$$

Como se muestra en la siguiente figura



Coloraciones en hipergráficas

En este Capítulo, vamos a generalizar las definiciones del Capítulo anterior: coloración propia, coloración fraccional, clán fraccional para r -hipergráficas e introduciremos algunos ejemplos y resultados importantes de estas generalizaciones.

3.1.–Coloración

La generalización del concepto de coloración de gráficas a r -hipergráficas puede pensarse de dos maneras como veremos a continuación y que en el caso $r = 2$, estas definiciones coinciden con la definición de coloración propia para gráficas.

3.1.1. Coloración débil

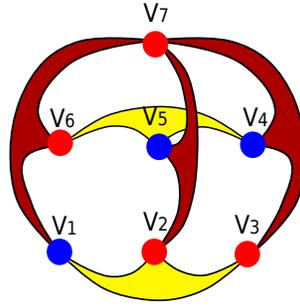
Definición 3.1. Dado $k \in \mathbb{N}$ y dada una r -hipergráfica G^r , una k -coloración de G^r es una asignación de un color a cada vértice de G^r de un conjunto de “ k ” colores, es decir, es una función $c : V(G^r) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Una k -coloración es una k -coloración débil si la r -hipergráfica no tiene aristas monocromáticas (aristas con todos los vértices del mismo color).

En otras palabras, una k -coloración débil de G^r satisface que para cada $\{u_1, \dots, u_r\} = e \in E(G^r)$ existe $u_i \neq u_j \in e$ tal que $c(u_i) \neq c(u_j)$. Esto es, al menos un vértice de cada arista tiene diferente imagen. Si consideramos la imagen inversa de cada elemento de $\{1, \dots, k\}$, es decir, el conjunto de todos los vértices en G^r de un color, es claro que este conjunto siempre es un conjunto independiente débil. Este conjunto independiente débil se llama *clase cromática débil* asociada con la coloración débil. Por lo tanto, una k -coloración débil es una partición del conjunto de vértices de G^r por conjuntos independientes débiles.

Definición 3.2. El *número cromático débil* es el mínimo entero positivo k tal que existe una k -coloración débil de G^r y se denota por $\chi(G^r)$.

Equivalentemente, el número cromático débil es el menor número de conjuntos independientes débiles es el menor número de conjuntos independientes débil que se requieren para cubrir los vértices de G^r .

Ejemplo 3.1. Considerando la 3-hipergráfica del Ejemplo 1.1, tenemos que

Figura 3.1: $\chi(G^3) = 2$

Ejemplo 3.2. Consideremos la r -hipergráfica completa K_p^r para $p \geq r$ con

$$V(K_p^r) = \{u_1, \dots, u_p\}$$

y

$$E(K_p^r) = \{e \mid e \in V(K_p^r) \text{ y } |e| = r\}.$$

Vamos a colorear los vértices de K_p^r de la siguiente manera. A los primeros $(r-1)$ -vértices u_1, u_2, \dots, u_{r-1} les asignamos el color 1, a los siguientes $(r-1)$ -vértices el color 2 y así sucesivamente coloreamos todos los vértices de la r -hipergráfica. De esta manera, existe una $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(k-1)(r-1) + 1 \leq p \leq k(r-1), \quad (3.1)$$

y por lo tanto, una función

$$c : V(K_p^r) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\},$$

donde

$$c(u_{(j-1)(r-1)+1}) = c(u_{(j-1)(r-1)+2}) = \dots = c(u_{j(r-1)}) = j \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq k.$$

Claramente c es una coloración débil ya que no existen r -vértices que tengan el mismo color, esto es, G^r no tiene aristas monocromáticas. Más aún por la manera de colorear los vértices, el mínimo número de colores que se necesitan son k -colores.

Por la ecuación (3.1) existe una $t \in [1, r-1]$ tal que

$$p = (k-1)(r-1) + t, \quad (3.2)$$

despejando k de la ecuación anterior tenemos que

$$k = \frac{p}{r-1} + \frac{r-1-t}{r-1},$$

como $1 \leq t \leq r-1$, entonces $0 \leq r-1-t \leq r-2$ y de aquí

$$0 \leq \frac{r-1-t}{r-1} < 1.$$

Por lo tanto,

$$\chi(K_p^r) = \lceil \frac{p}{r-1} \rceil = k,$$

donde $\lceil \frac{p}{r-1} \rceil = \min \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{p}{r-1} \leq x\}$.

Claramente, para $r = 2$, se tiene que el número cromático de una 2–hipergráfica completa (gráfica completa) $K_p^2 = K_p$ es $\chi(K_p) = \lceil \frac{p}{2-1} \rceil$ igual a su número de vértices, como se sabe en la teoría de gráficas.

Ahora si $\chi(G^r) = k$, considerando homomorfismos de r –hipergráficas, tenemos que una k –coloración débil da lugar a un homomorfismo de G^r en K_p^r , para algún p que cumple que $k = \lceil \frac{p}{r-1} \rceil$.

3.1.2. Coloración fuerte

Definición 3.3. Dado $k \in \mathbb{N}$ y dada una r –hipergráfica G^r , una k –coloración de G^r es como antes una asignación de un color a cada vértice de G^r de un conjunto de “ k ” colores, es decir, es una función $c : V(G^r) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Una k –coloración de G^r se llama una k –coloración fuerte si se tiene que todas las aristas son heterocromáticas (aristas con todos los vértices de diferente color).

Así, una k –coloración fuerte satisface que para cada arista $\{u_1, \dots, u_r\} = e \in E(G^r)$

$$c(u_i) \neq c(u_j), \quad \forall i \neq j$$

esto es, todos los vértices tienen diferente imagen.

De esta manera, si consideramos la imagen inversa de un elemento de $\{1, \dots, k\}$, tenemos que este conjunto siempre es un conjunto independiente fuerte. Este conjunto independiente fuerte se llama *clase cromática fuerte* asociada con la coloración fuerte. Se sigue entonces, que una k coloración fuerte es una partición de los vértices de G^r en conjuntos independientes fuertes.

Definición 3.4. El *número cromático fuerte* de G^r es el mínimo entero positivo k tal que existe una k –coloración fuerte de G^r y se denota por $\chi^s(G^r)$.

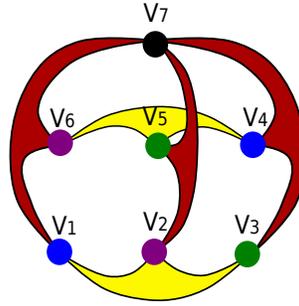
En otras palabras, el número cromático fuerte, es el menor número de conjuntos independientes fuertes que se necesitan para cubrir los vértices de G^r .

Como todo conjunto independiente fuerte de G^r es un conjunto independiente débil de G^r , se tiene que $\chi(G^r) \leq \chi^s(G^r)$ para toda r –hipergráfica G^r .

Ejemplo 3.3. Si consideramos la 3–hipergráfica del Ejemplo 1.1, tenemos que

$$\chi^s(G^3) = 4,$$

como se muestra en la figura



Ejemplo 3.4. Note que para p número entero positivo con $p \geq r$, la r -hipergráfica completa K_p^r satisface

$$\chi^s(K_p^r) = p.$$

Ahora considerando homomorfismos de r -hipergráficas. Si $\chi^s(G^r) = k$, entonces tenemos que una k -coloración fuerte es un homomorfismo de G^r en K_k^r .

El siguiente Lema, afirma que el número cromático fuerte de G^r es el número cromático de su gráfica primal $G'(G^r)$ mencionada en la Definición 1.8

Lema 3.1. Sea G^r una r -hipergráfica, entonces $\chi^s(G^r) = \chi(G'(G^r))$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\chi^s(G^r) = k$. Sea c una k -coloración fuerte de G^r . Construimos una k -coloración para $G'(G^r)$ asignándole a cada vértice $u \in V(G'(G^r))$ el color que le asigna la k -coloración fuerte. Esta k -coloración es propia ya que si existen dos vértices adyacentes u, v con el mismo color, debe existir una arista $e \in E(G^r)$ tal que $\{u, v\} \subseteq e$, se tendría que la arista e no es heterocromática, contradiciendo que c es una k -coloración fuerte. De manera análoga se demuestra que si $\chi(G'(G^r)) = k$, entonces $\chi^s(G^r) = k$. Por lo tanto, $\chi^s(G^r) = \chi(G'(G^r))$. ■

Observación 3.1: Todo conjunto independiente fuerte de G^r es un conjunto independiente de $G'(G^r)$.

3.1.3. Algunos resultados para coloraciones débiles (fuertes)

Tanto para coloraciones débiles, como fuertes de r -hipergráficas se tienen los siguientes resultados:

Proposición 3.2. Si H^r es una r -subhipergráfica de G^r y $\chi(G^r) = k$, entonces $\chi(H^r) \leq k$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\chi(G^r) = k$, entonces existe una k -coloración débil de G^r y claramente, la misma coloración es una k -coloración débil de H^r . Por lo tanto, $\chi(H^r) \leq k$. ■

Proposición 3.3. *Si existe un homomorfismo de r -hipergráficas $\varphi : H^r \rightarrow G^r$, entonces $\chi(H^r) \leq \chi(G^r)$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el caso de coloración débil (el caso de coloración fuerte es análogo). Si $\chi(G^r) = k$, entonces existe un homomorfismo de hipergráficas $\phi : G^r \rightarrow K_p^r$ para algún p que cumple que $k = \lceil \frac{p}{r-1} \rceil$. Consideremos la composición $\phi \circ \varphi : H^r \rightarrow K_p^r$, concluimos que H^r puede ser coloreada con k colores también. ■

Para ambas coloraciones, note que el número cromático débil (respectivamente fuerte) esta acotado superiormente por $|V(G^r)|$.

Observación 3.2: *En gráficas resulta claro, que una cota inferior del número cromático de una gráfica G , $\chi(G)$, es el número de clan de la gráfica $\omega(G)$, es decir, $\omega(G) \leq \chi(G)$. Pero en el caso de hipergráficas no se generaliza este hecho. Consideremos el caso $r = 3$ y la 3-hipergráfica del Ejemplo 3.1, claramente $\omega(G^3) = 3$ mientras que $\chi(G^3) = 2$.*

Sea G^r una r -hipergráfica con $\omega(G^r) = k$, entonces existe un homomorfismo $\varphi : K_k^r \rightarrow G^r$ y por la Proposición 3.3 se tiene que $\chi(K_k^r) \leq \chi(G^r)$ cota inferior para el número cromático débil (respectivamente fuerte).

También, como cada clase cromática débil (respectivamente fuerte) es un conjunto independiente, tenemos que

$$\frac{|V(G^r)|}{\alpha(G^r)} \leq \chi(G^r),$$

para coloración débil y

$$\frac{|V(G^r)|}{\alpha^s(G^r)} \leq \chi^s(G^r),$$

para coloración fuerte.

Donde la igualdad se tiene si y sólo si cada clase cromática débil (respectivamente fuerte) en la coloración óptima es igual al número de independencia de la r -hipergráfica.

3.2.–Coloración fraccional

Como en el caso de las gráficas, en esta Sección daremos 4 maneras distintas pero equivalentes de definir el número cromático fraccional de una r -hipergráfica G^r . La primera de ellas es una (a, b) -coloración débil (respectivamente fuerte) de G^r . Esta definición es muy ilustrativa, pero calcular el número cromático fraccional usando esta definición, resulta difícil. La segunda definición es considerando homomorfismos de r -hipergráficas en r -hipergráficas de

Kneser débil (respectivamente fuerte). La tercera definición es considerando cubiertas por conjuntos independientes débiles (respectivamente fuertes) de una r -hipergráfica. Por último la cuarta definición, es en términos de conjuntos independientes débiles (respectivamente fuertes) de G^r . Esta última definición, resulta práctica para calcular el número cromático fraccional y puede verse en el conexto de Programación Lineal Entera. Para finalizar daremos un resultado donde se demuestra que las 4 definiciones son equivalentes.

Así como en el caso de gráficas, una (a, b) -coloración de una hipergráfica G^r , es una asignación de un conjunto de b -colores a cada vértice de la hipergráfica de un conjunto de a -colores, tal que la intersección de los conjuntos de colores de los vértices de una arista es vacío.

3.2.1. (a, b) -coloración débil

Definición 3.5. Sea G^r una r -hipergráfica, sean a, b dos enteros positivos con $0 < b \leq a$. Una (a, b) -coloración débil de G^r es una función

$$\varphi : V(G^r) \rightarrow \{A \mid A \subseteq \{1, \dots, a\} \text{ y } |A| = b\},$$

tal que para cada arista $\{u_1, \dots, u_r\} = e \in E(G^r)$ se cumple que

$$\varphi(u_1) \cap \dots \cap \varphi(u_r) = \emptyset.$$

Así, una k -coloración débil es equivalente a una $(k, 1)$ -coloración débil.

El b -número cromático débil de G^r como

$$\chi_b(G^r) = \text{mín } \{a \mid \exists \text{ una } (a, b)\text{-coloración débil de } G^r\}.$$

Definición 3.6. El número cromático fraccional débil de G^r se define como

$$\chi_f(G^r) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\chi_b(G^r)}{b}. \quad (3.3)$$

3.2.2. (a, b) -coloración fuerte

Definición 3.7. Sea G^r una r -hipergráfica y sean a, b dos enteros positivos con $0 < b \leq a$. Una (a, b) -coloración fuerte de G^r es una función

$$\varphi : V(G^r) \rightarrow \{A \mid A \subseteq \{1, \dots, a\} \text{ y } |A| = b\},$$

tal que para cada arista $\{u_1, \dots, u_r\} = e \in E(G^r)$ se tiene que

$$\varphi(u_i) \cap \varphi(u_j) = \emptyset,$$

para todo $i \neq j \in \{1, \dots, r\}$.

Por lo tanto, una k -coloración fuerte es equivalente a una $(k, 1)$ -coloración fuerte.

Definimos el b -número cromático fuerte de G^r como

$$\chi_b^s(G^r) = \min \{a \mid \exists \text{ una } (a, b)\text{-coloración fuerte de } G^r\}.$$

Definición 3.8. El número cromático fraccional fuerte de G^r se define como

$$\chi_f^s(G^r) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\chi_b^s(G^r)}{b} \quad (3.4)$$

Proposición 3.4. Las funciones χ_b y χ_b^s son subaditivas.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar que χ_b es subaditiva, esto es, que para cada b y c enteros positivos se cumple que

$$\chi_{b+c} \leq \chi_b + \chi_c.$$

Supongamos que $\chi_b(G^r) = a_1$ y que $\chi_c(G^r) = a_2$, entonces G^r tiene una (a_1, b) -coloración débil y una (a_2, c) -coloración débil. Si coloreamos cada uno de los vértices de G^r con los respectivos $(b+c)$ -colores que les asignan las (a_1, b) y (a_2, c) coloraciones débiles; como ambas coloraciones son débiles, entonces G^r admite una $(a_1 + a_2, b+c)$ -coloración débil. Por lo tanto,

$$\chi_{b+c} \leq \chi_b + \chi_c,$$

se sigue de aquí que χ_b es una función subaditiva.

La subaditividad de χ_b^s se demuestra de una forma muy similar a la de χ_b . ■

Usando el Lema de subaditividad de Fekete 1.2, y que ambas funciones χ_b y χ_b^s son subaditivas y no-negativas, se tiene entonces, que el número cromático fraccional débil de G^r esta dado como sigue

$$\chi_f(G^r) = \inf \left\{ \frac{\chi_b(G^r)}{b} \right\},$$

y el número cromático fraccional fuerte de G^r esta dado como sigue

$$\chi_f^s(G^r) = \inf \left\{ \frac{\chi_b^s(G^r)}{b} \right\}.$$

3.2.3. Coloraciones vía r -hipergráficas de Kneser débiles (fuertes)

Recordemos que la r -hipergráfica de Kneser se define: para a, b, r enteros positivos tal que $r \geq 2$ y $a \geq rb$. La r -hipergráfica de Kneser débil $KG_{a,b}^r$ es la r -hipergráfica, donde el conjunto de vértices

$$V(KG_{a,b}^r) = \{A \mid A \subseteq [a] \text{ y } |A| = b\};$$

es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de tamaño b de un conjunto con a -elementos, y el conjunto de aristas

$$E(KG_{a,b}^r) = \{\{A_1, \dots, A_r\} \mid A_i \in V(KG_{a,b}^r) \text{ y } A_1 \cap \dots \cap A_r = \emptyset\}.$$

Si cada arista $e = \{A_1, \dots, A_r\}$ de la r -hipergráfica de Kneser débil cumple además que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para cada $i \neq j \in \{1, \dots, r\}$, entonces se le llama r -hipergráfica de Kneser fuerte y se denota por $K^s G_{a,b}^r$.

Proposición 3.5. *Toda (a, b) -coloración de G^r es una (a, b) -coloración débil (fuerte) de G^r si y sólo si existe un homomorfismo $h : G^r \rightarrow KG_{a,b}^r$ ($h^s : G^r \rightarrow K^s G_{a,b}^r$).*

DEMOSTRACIÓN. Si G^r tiene una (a, b) -coloración débil, entonces existe una función

$$\varphi : V(G^r) \rightarrow \{A \mid A \subseteq \{1, \dots, a\} \text{ y } |A| = b\},$$

tal que para cada arista $\{u_1, \dots, u_r\} = e \in E(G^r)$ se cumple que

$$\varphi(u_1) \cap \dots \cap \varphi(u_r) = \emptyset.$$

Defínase

$$h : G^r \rightarrow KG_{a,b}^r$$

como $h(v) = \varphi(v)$ para cada vértice $v \in V(G^r)$, y como $h(e) = \{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r)\}$ para cada arista $e = \{v_1, \dots, v_r\} \in E(G^r)$. Por la definición de φ , se tiene que $\varphi(v_1) \cap \dots \cap \varphi(v_r) = \emptyset$. Por lo tanto, h es un homomorfismo de G^r en $KG_{a,b}^r$.

Dado un homomorfismo $h : G^r \rightarrow KG_{a,b}^r$, consideremos

$$\varphi : V(G^r) \rightarrow \{A \mid A \subseteq \{1, \dots, a\} \text{ y } |A| = b\},$$

como $\varphi(v) = h(v)$ para cada vértice de G^r . Para cada arista $e = \{v_1, \dots, v_r\} \in E(G^r)$ se tiene que $h(e)$ es una arista de $KG_{a,b}^r$ y $h(v_1) \cap \dots \cap h(v_r) = \emptyset$ ya que h es un homomorfismo, entonces $\varphi(v_1) \cap \dots \cap \varphi(v_r) = \emptyset$. Por lo tanto, φ define una (a, b) -coloración débil.

Si G^r tiene una (a, b) -coloración fuerte el resultado es completamente análogo. ■

De esta manera podemos dar las siguientes dos definiciones.

Definición 3.9. Sea G^r una r -hipergráfica. El número, $\chi_f^*(G^r)$, es

$$\chi_f^*(G^r) = \inf_{(a,b)} \frac{a}{b},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los pares (a, b) tal que existe un homomorfismo de r -hipergráficas de G^r a $KG_{a,b}^r$.

Definición 3.10. Sea G^r una r -hipergráfica. El número, $\chi_f^{s*}(G^r)$, es

$$\chi_f^{s*}(G^r) = \inf_{(a,b)} \frac{a}{b},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los pares (a, b) tal que existe un homomorfismo de r -hipergráficas de G^r a $K^s G_{a,b}^r$.

3.2.4. Cubiertas por conjuntos independientes débiles (fuertes)

Una cubierta débil de una r -hipergráfica G^r como se mencionó en el Capítulo 1, es una colección \mathcal{A} de conjuntos independientes débiles de G^r tal que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = V(G^r)$. Si todos los elementos de la colección \mathcal{A} son conjuntos independientes fuertes de G^r , se tiene una cubierta fuerte.

De esta manera para una r -hipergráfica G^r introducimos las siguientes dos definiciones:

Definición 3.11. El número, $\tilde{\chi}_f(G^r)$, se define como

$$\tilde{\chi}_f(G^r) = \inf_{(a,b)} \frac{a}{b},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las cubiertas débiles de a elementos, J_1, \dots, J_a tal que cada vértice es cubierto al menos b veces, esto es, $|\{i \mid v \in J_i\}| \geq b$, para cada $v \in V(G^r)$.

Definición 3.12. El número, $\tilde{\chi}_f^s(G^r)$, se define como

$$\tilde{\chi}_f^s(G^r) = \inf_{(a,b)} \frac{a}{b},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las cubiertas fuertes de a elementos, J_1, \dots, J_a tal que cada vértice es cubierto al menos b veces, esto es, $|\{i \mid v \in J_i\}| \geq b$, para cada $v \in V(G^r)$.

Siempre se puede encontrar una cubierta débil (respectivamente fuerte) de G^r , tal que cada vértice sea cubierto por exactamente b conjuntos independientes débiles (respectivamente fuertes).

3.2.5. Coloración fraccional débil

Recordemos que un conjunto independiente débil J de G^r , es un subconjunto de $V(G^r)$ tal que para toda $e \in E(G^r)$ se tiene que $e \not\subseteq J$, y que un conjunto independiente maximal débil I de G^r es un conjunto independiente débil que no contiene propiamente ningún conjunto independiente débil.

Más aún recordemos que $\mathcal{J}(G^r)$ denota el conjunto de todos los conjuntos independientes débiles de G^r , $\mathcal{J}(G^r, u)$ el conjunto de todos los conjuntos independientes débiles que contienen al vértice u , $\mathcal{I}(G^r)$ el conjunto de todos los conjuntos independientes maximales débiles de G^r y $\mathcal{I}(G^r, u)$ el conjunto de todos los conjuntos independientes maximales débiles que contienen al vértice u .

Definición 3.13. Una *coloración fraccional débil* de G^r es una función

$$f : \mathcal{J}(G^r) \rightarrow [0, 1]$$

tal que para cada $u \in V(G^r)$ se tiene que

$$\sum_{J \in \mathcal{J}(G^r, u)} f(J) \geq 1.$$

El *peso* de una coloración fraccional f es

$$p(f) = \sum_{J \in \mathcal{J}(G^r)} f(J).$$

Definición 3.14. Definimos el número, $\tilde{\chi}_f(G^r)$, como

$$\tilde{\chi}_f(G^r) = \min \{p(f) \mid f \text{ es una coloración fraccional débil de } G^r\}.$$

En Programación Lineal Entera, lo anterior se traduce a considerar la matriz de independencia débil $B(G^r) = [b_{ij}]$ que se definió en el Capítulo 1, haciendo uso de ella, podemos redefinir el número $\tilde{\chi}_f(G^r)$ de una r -hipergráfica G^r de la siguiente manera

$$\tilde{\chi}_f(G^r) = \min\{\bar{\mathbf{1}}^t \cdot f\},$$

donde f es una matriz $m \times 1$ con entradas dadas por la coloración fraccional débil f de G^r , $\bar{\mathbf{1}}$ es la matriz $m \times 1$ que tiene todas sus entradas iguales a 1, y m es el número de conjuntos independientes débiles de G^r .

3.2.6. Coloración fraccional fuerte

Recordemos también que un conjunto independiente débil J de G^r , se llama un conjunto independiente fuerte si para toda $e \in E(G^r)$ se cumple que $|e \cap J| \leq 1$ y que un conjunto independiente maximal fuerte I de G^r es un conjunto independiente fuerte que no contiene propiamente ningún conjunto independiente fuerte.

Así mismo, $\mathcal{J}^s(G^r)$ denota el conjunto de todos los conjuntos independientes fuertes de G^r , $\mathcal{J}^s(G^r, u)$ el conjunto de todos los conjuntos independientes fuertes que contienen al vértice u , $\mathcal{I}^s(G^r)$ el conjunto de todos los conjuntos independientes maximales fuertes de G^r y $\mathcal{I}^s(G^r, u)$ el conjunto de todos los conjuntos independientes maximales fuertes que contienen al vértice u .

Definición 3.15. Una *coloración fraccional fuerte* de G^r es una función

$$f : \mathcal{J}^s(G^r) \rightarrow [0, 1]$$

tal que para cada $u \in V(G^r)$ se tiene que

$$\sum_{J \in \mathcal{J}^s(G^r, u)} f(J) \geq 1.$$

El *peso* de una coloración fraccional fuerte f es

$$p(f) = \sum_{J \in \mathcal{J}^s(G^r)} f(J).$$

Definición 3.16. Definimos el número, $\tilde{\chi}_f^s(G^r)$, como

$$\tilde{\chi}_f^s(G^r) = \min \{p(f) \mid f \text{ es una coloración fraccional fuerte de } G^r\}.$$

Así, el número cromático fraccional fuerte en Programación Lineal Entera, $\tilde{\chi}_f^s(G^r) = \min \{\bar{\mathbf{1}}^t \cdot f\}$, donde f es una matriz $m \times 1$ con entradas dadas por la coloración fraccional fuerte f de G^r , $\bar{\mathbf{1}}$ es la matriz $m \times 1$ que tiene todas sus entradas iguales a 1, y m es el número de conjuntos independientes fuertes de G^r .

Teorema 3.6. *Sea G^r una r -hipergráfica. Entonces*

- i).- $\chi_f(G^r) = \chi_f^*(G^r) = \tilde{\chi}_f(G^r) = \check{\chi}_f(G^r)$;
- ii).- $\chi_f^s(G^r) = \chi_f^{*s}(G^r) = \tilde{\chi}_f^s(G^r) = \check{\chi}_f^s(G^r)$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar sólomente el caso del número cromático fraccional débil, el caso para el número cromático fraccional fuerte se prueba de una forma análoga.

- a).- La igualdad $\chi_f(G^r) = \chi_f^*(G^r)$, se obtiene claramente de la Observación 3.5.
- b).- Dado un homomorfismo ψ de G^r en $KG_{a,b}^r$, se tiene que para cada $1 \leq i \leq a$, $I_i = \psi^{-1}(i) \subseteq V(G^r)$ es un conjunto independiente débil y cada vértice es cubierto por al menos b conjuntos independientes. Por lo tanto $\chi_f^*(G^r) = \tilde{\chi}_f(G^r)$.
- c).- Dada una cubierta débil $\mathcal{A} = \{I_1, \dots, I_a\}$ tal que cada vértice es cubierto por al menos b conjuntos independientes débiles, definimos

$$f : \mathcal{J}(G^r) \rightarrow [0, 1]$$

como sigue

$$f(I) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & \text{si } I \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Como cada vértice es cubierto por al menos b conjuntos independientes débiles se tiene que

$$\sum_{J \in \mathcal{J}(G^r, u)} f(J) \geq 1, \quad \forall u \in V(G^r).$$

Por lo tanto f es una coloración fraccional débil de G^r y $\tilde{\chi}_f(G^r) = \check{\chi}_f(G^r)$.

- d).- Supongamos que G^r tiene una (a, b) -coloración débil, entonces existe una función

$$\varphi : V(G^r) \rightarrow \{A \mid A \subseteq \{1, \dots, a\} \text{ y } |A| = b\},$$

tal que para cada arista $\{u_1, \dots, u_r\} = e \in E(G^r)$ se cumple que

$$\varphi(u_1) \cap \dots \cap \varphi(u_r) = \emptyset.$$

Además, $\chi_f(G^r) \leq \frac{a}{b}$. Para cada $1 \leq i \leq a$, definimos lo siguiente

$$J_i = \{u \in V(G^r) \mid \varphi(u) = i\},$$

cada uno de los J_i es un conjunto independiente débil por la definición de (a, b) -coloración débil. Sea

$$f : \mathcal{J}(G^r) \rightarrow [0, 1],$$

la función que a cada conjunto independiente débil J_i le asigna el valor de $1/b$ y a los demás conjuntos independientes débiles les asigna el valor de 0. Como a cada $u \in V(G^r)$, la (a, b) -coloración débil le asigna b -colores, entonces

$$\sum_{J \in \mathcal{J}(G^r, u)} f(J) \geq 1,$$

y entonces f es una coloración fraccional débil con peso $p(f) = \frac{a}{b}$. Por lo tanto, dada una (a, b) -coloración débil, se induce una coloración fraccional con peso $\frac{a}{b}$. Así,

$$\chi_f(G^r) \leq \check{\chi}_f(G^r).$$

Supongamos ahora que G^r tiene una coloración fraccional f , la cual es racional. Sea $f : \mathcal{J}(G^r) \rightarrow [0, 1]$, tal que para cada $u \in V(G^r)$ se cumple

$$\sum_{J \in \mathcal{J}(G^r, u)} f(J) \geq 1,$$

con $p(f) = \frac{a}{b}$.

Como G^r es una gráfica finita, se tiene que $\mathcal{J}(G^r)$ es un conjunto finito. Consideremos el siguiente conjunto

$$F = \{f(J) \mid J \in \mathcal{J}(G^r)\},$$

como $\mathcal{J}(G^r)$ es un conjunto finito, entonces $|F| < \infty$. Ya que F es un conjunto de números racionales y $\sum_{J \in \mathcal{J}(G^r)} f(J) = \frac{a}{b}$, sea b es el mínimo común denominador de los números racionales del conjunto F . Para cada conjunto independiente débil J se tiene que $f(J) = \frac{m_J}{b}$, donde $m_J \in \{0, 1, 2, 3, \dots, a\}$, a cada uno de los vértices del conjunto J le asignamos m_J colores. Si $J_i \neq J_j$ con $i \neq j$, entonces los m_{J_i} colores son diferentes de los m_{J_j} colores. Como

$$\sum_{J \in \mathcal{J}(G^r, u)} f(J) \geq 1,$$

entonces a cada vértice le podemos asignar al menos b colores diferentes. Se sigue que G^r tiene una (a, b) -coloración débil. Por lo tanto, dada una coloración fraccional se induce una (a, b) -coloración débil. Así,

$$\chi_f(G^r) \geq \check{\chi}_f(G^r).$$

Por lo tanto,

$$\chi_f(G^r) = \check{\chi}_f(G^r).$$

■

Considerando la gráfica primal $\mathbf{G}'(G^r)$ de una r -hipergráfica G^r , el siguiente resultado afirma que el número cromático fraccional fuerte de G^r es el número cromático fraccional de $\mathbf{G}'(G^r)$.

Lema 3.7. *Para cada r -hipergráfica G^r , se tiene que*

$$\chi_f^s(G^r) = \chi_f(\mathbf{G}'(G^r)).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\chi_f^s(G^r) = \frac{a}{b}$, entonces existe una (a, b) -coloración fuerte de G^r . Le asignamos a cada vértice de $\mathbf{G}'(G^r)$ los b -colores asignados por la (a, b) -coloración fuerte. Esta (a, b) -coloración es propia. Por lo tanto, $\chi_f(\mathbf{G}'(G^r)) \leq \chi_f^s(G^r)$. Por otro lado si suponemos que $\chi_f(\mathbf{G}'(G^r)) = \frac{c}{d}$, entonces $\mathbf{G}'(G^r)$ tiene una (c, d) -coloración propia. Asignamos a cada vértice de G^r los d -colores asignados por la (c, d) -coloración propia. Esta (c, d) -coloración es fuerte. Por lo tanto, $\chi_f^s(G^r) \geq \chi_f(\mathbf{G}'(G^r))$. ■

3.3.–Clan fraccional

En esta Sección consideramos la relajación real del problema entero (número de clan de una r -hipergráfica).

3.3.1. Clan fraccional débil

Definición 3.17. Sea G^r una r -hipergráfica. Un *clan fraccional débil* de G^r es una función

$$g : V(G^r) \rightarrow [0, 1],$$

tal que para cada $J \in \mathcal{J}(G^r)$, se tiene

$$\sum_{u \in J} g(u) \leq 1.$$

El *peso* de un clan fraccional g esta dado por

$$q(g) = \sum_{u \in V(G^r)} g(u).$$

Definición 3.18. El *número de clan fraccional débil* de una r -hipergráfica G^r se define y denota como

$$\omega_f(G^r) = \max \{q(g) \mid g \text{ es un clan fraccional débil de } G^r\}.$$

El número de clan fraccional débil en Programación Lineal Entera se define considerando la matriz de independencia débil $B(G^r) = [b_{ij}]$, en este caso el número de clan fraccional débil de una r -hipergráfica G^r esta dado por

$$\omega_f(G^r) = \max \{g^t \cdot \mathbf{1}\},$$

donde g es una matriz $n \times 1$ con entradas dadas por el clan fraccional débil g de G^r , y $\mathbf{1}$ es la matriz $n \times 1$ con todas sus entradas iguales a 1, con $n = |V(G^r)|$.

3.3.2. Clan fraccional fuerte

Definición 3.19. Sea G^r una r -hipergráfica. Un *clan fraccional fuerte* de G^r es una función

$$g : V(G^r) \rightarrow [0, 1],$$

tal que para cada $J \in \mathcal{J}^s(G^r)$, se tiene

$$\sum_{u \in J} g(u) \leq 1.$$

El *peso* de un clan fraccional fuerte g esta dado por

$$q(g) = \sum_{u \in V(G^r)} g(u).$$

Definición 3.20. El *número de clan fraccional fuerte* de una r -hipergráfica G^r se define y denota como

$$\omega_f^s(G^r) = \text{máx} \{q(g) \mid g \text{ es un clan fraccional fuerte de } G^r\}.$$

Así, el número de clan fraccional fuerte en Programación Lineal Entera, se define considerando la matriz de independencia fuerte $B^s(G^r) = [b_{ij}]$. En este caso, el número de clan fraccional fuerte de una r -hipergráfica G^r esta dado por

$$\omega_f^s(G^r) = \text{máx} \{g^t \cdot \mathbf{1}\},$$

donde g es una matriz $n \times 1$ con entradas dadas por el clan fraccional fuerte g de G^r , y $\mathbf{1}$ es la matriz $n \times 1$ con todas sus entradas iguales a 1, con $n = |V(G^r)|$.

Lema 3.8. Para cualquier r -hipergráfica G^r , el número cromático fraccional débil $\chi_f(G^r)$ (respectivamente fuerte $\chi_f^s(G^r)$), y el número de clan fraccional débil $\omega_f(G^r)$ (respectivamente fuerte $\omega_f^s(G^r)$) no cambian si consideramos sólo los conjuntos independientes maximales débiles $\mathcal{I}(G^r)$ (respectivamente fuertes $I^s(G^r)$), en lugar de todos los conjuntos independientes débiles (respectivamente fuertes) de la r -hipergráfica G^r .

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \mathcal{J}(G^r) \rightarrow [0, 1]$ una coloración fraccional de G^r . Vamos a construir una nueva coloración fraccional $f' : \mathcal{I}(G^r) \rightarrow [0, 1]$. Supongamos que $\mathcal{I}(G^r) = \{I_1, \dots, I_l\}$

$$f'(I_1) = \sum_{J \subset I_1, J \in \mathcal{J}(G^r)} f(J) + f(I_1);$$

$$f'(I_2) = \sum_{J \subset I_2 \setminus I_1, J \in \mathcal{J}(G^r)} f(J) + f(I_2);$$

$$f'(I_3) = \sum_{J \subset I_3 \setminus (I_1 \cup I_2), J \in \mathcal{J}(G^r)} f(J) + f(I_3);$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ f'(I_l) &= \sum_{J \subset I_l \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_{l-1}), J \in \mathcal{J}(G^r)} f(J) + f(I_l). \end{aligned}$$

Para cada $u \in V(G^r)$ se tiene que

$$\sum_{I \in \mathcal{I}(G^r, u)} f'(I) = \sum_{J \in \mathcal{J}(G^r, u)} f(J) \geq 1,$$

y

$$\sum_{I \in \mathcal{I}(G^r)} f'(I) = \sum_{J \in \mathcal{J}(G^r)} f(J) \geq 1.$$

Por lo tanto, $\chi_f(G^r)$ se puede redefinir considerando el conjunto de conjuntos independientes maximales de G^r .

Por otro lado, al definir un clan fraccional $g : V(G^r) \rightarrow [0, 1]$ basta con probar la desigualdad

$$\sum_{u \in I} g(u) \leq 1,$$

para conjuntos independientes maximales, ya que para cualquier otro conjunto independiente de G^r se tendría la desigualdad.

Por lo tanto, $\omega_f(G^r)$ se puede definir considerando el conjunto $\mathcal{I}(G^r)$. ■

Lema 3.9. *Sea G^r cualquier r -hipergráfica, entonces*

$$\omega_f(G^r) = \chi_f(G^r) \quad y \quad \omega_f^s(G^r) = \chi_f^s(G^r).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea f una coloración fraccional y sea g un clan fraccional de G^r . Entonces

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{1}}^t \cdot f - g^t \cdot \mathbf{1} &= \bar{\mathbf{1}}^t \cdot f - g^t \cdot B(G^r) \cdot f + g^t \cdot B(G^r) \cdot f - g^t \cdot \mathbf{1} \\ &= (\bar{\mathbf{1}}^t - g^t \cdot B(G^r)) \cdot f + g^t (B(G^r) \cdot f - \mathbf{1}). \end{aligned}$$

Como g es un clan fraccional de G^r , entonces

$$g^t \cdot B(G^r) \leq \bar{\mathbf{1}}^t \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{1}}^t - g^t \cdot B(G^r) \geq 0.$$

Considerando también que f es una coloración fraccional de G^r se tiene que

$$B(G^r) \cdot f \geq \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad B(G^r) \cdot f - \mathbf{1} \geq 0.$$

Se sigue que $\bar{\mathbf{1}}^t \cdot f - g^t \cdot \mathbf{1} \geq 0$, entonces $\bar{\mathbf{1}}^t \cdot f \geq g^t \cdot \mathbf{1}$, debido a que f y g fueron tomados de manera arbitraria se tiene que $\omega_f(G^r) \leq \chi_f(G^r)$.

La otra desigualdad del Lema se demuestra usando el Teorema 1.6. ■

Lema 3.10. *Para cualquier r -hipergráfica G^r*

$$\omega_f(G^r) \geq \frac{|V(G^r)|}{\alpha(G^r)}.$$

Más aún, si G^r es una r -hipergráfica vértice-transitiva, se obtiene la desigualdad.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : V(G^r) \rightarrow [0, 1]$ una función tal que $f(u) = \frac{1}{\alpha(G^r)}$. Se tiene que $1 \leq \alpha(G^r) \leq |V(G^r)|$, entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\alpha(G^r)} \leq 1$. Tenemos que g es un clan fraccional de G^r usando que

$$\sum_{u \in J} g(u) = \sum_{u \in J} \frac{1}{\alpha(G^r)} \leq 1; \forall J \in \mathcal{J}(G^r),$$

debido a que cada conjunto independiente J de G^r tiene a lo más $\alpha(G^r)$ elementos, se tiene que

$$\omega_f(G^r) \geq \frac{|V(G^r)|}{\alpha(G^r)}.$$

Supongamos que G^r es una r -hipergráfica vértice-transitiva. Sea $g : V(G^r) \rightarrow [0, 1]$ un clan fraccional no-cero de G^r . Sea $\gamma \in \text{Aut}(G^r)$, definimos la función g^γ de la siguiente manera;

$$g^\gamma(u) = g(\gamma(u)),$$

para cada $u \in V(G^r)$.

Como γ es un automorfismo de G^r se tiene que $\gamma(u) \in V(G^r)$, entonces $g(\gamma(u)) \in [0, 1]$ ya que g es un clan fraccional de G^r . Se sigue que

$$g^\gamma : V(G^r) \rightarrow [0, 1].$$

Tómese $J \in \mathcal{J}(G^r)$, entonces

$$\sum_{u \in J} g^\gamma(u) = \sum_{u \in J} g(\gamma(u)) \leq 1,$$

debido a que g es un clan fraccional de G^r . Por lo tanto, g^γ es un clan fraccional de G^r con el mismo peso de g .

Defínase ahora

$$\tilde{g} := \frac{1}{|\text{Aut}(G^r)|} \sum_{\gamma \in \text{Aut}(G^r)} g^\gamma,$$

como cada g^γ es un clan fraccional de G^r , entonces \tilde{g} es un clan fraccional de G^r y con el mismo peso de g .

Si G^r es vértice-transitiva, entonces

$$\tilde{g}(u) = \frac{1}{|\text{Aut}(G^r)|} \sum_{\gamma \in \text{Aut}(G^r)} g^\gamma(u) \quad \forall u \in V(G^r),$$

entonces

$$\tilde{g} = C \quad \forall u \in V(G^r).$$

Por lo tanto, \tilde{g} es un clan fraccional de G^r con valor constante C .

Se tiene que si $C > \frac{1}{\alpha(G^r)}$, entonces existe un conjunto independiente J con $|J| = \alpha(G^r)$ tal que

$$\sum_{u \in J} \tilde{g}(u) = \sum_{u \in J} C = \alpha(G^r) \cdot C > 1,$$

contradiciendo el hecho que \tilde{g} es un clan fraccional de G^r . Por lo que

$$C \leq \frac{1}{\alpha(G^r)}.$$

Entonces

$$\sum_{u \in V(G^r)} \tilde{g}(u) \leq \sum_{u \in V(G^r)} \frac{1}{\alpha(G^r)} = \frac{|V(G^r)|}{\alpha(G^r)}.$$

Por lo tanto,

$$\omega_f(G^r) = \frac{|V(G^r)|}{\alpha(G^r)}$$

■

Construcciones tipo Mycielski para r -hipergráficas

Comenzamos este Capítulo recordando la construcción de Mycielski para gráficas que sirvió de inspiración para obtener nuestras construcciones para r -hipergráficas.

Dada una gráfica G , cualquier coloración propia de G asigna a los vértices de cada clan de G diferentes colores. Entonces si una gráfica G contiene un clan arbitrariamente grande, necesariamente tiene número cromático arbitrariamente grande. Por lo tanto, si una gráfica G contiene una subgráfica completa de tamaño n , se tiene que el número cromático de G es mayor o igual a n .

Una pregunta interesante sobre el número cromático de una gráfica G es la siguiente:

¿Para que el número cromático de G^r sea k es necesario que G^r contenga alguna r -subhipergráfica completa de tamaño k ?

Resulta que la respuesta a esta pregunta es negativa, de hecho, en 1955 Mycielski dió una construcción de gráficas libres de triángulos con número cromático arbitrariamente grande.

4.1.—Construcción de Mycielski.

Sea G una gráfica con $V(G) = \{v_1, \dots, v_m\}$, defínase la siguiente gráfica

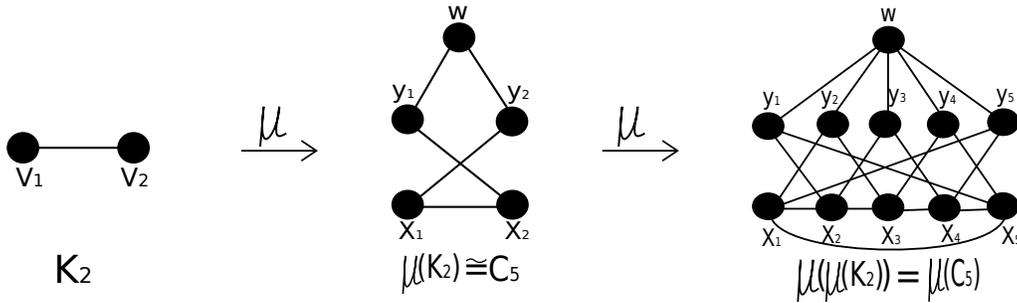
$$\mu(G) = (V(\mu(G)), E(\mu(G))),$$

donde $V(\mu(G)) = \{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, w\}$ y

$$E(\mu(G)) = \{\{x_i, x_j\} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G)\} \cup \{\{x_i, y_j\} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G)\} \cup \{\{y_i, w\}\}$$

para cada i y $j \in \{1, \dots, m\}$.

Ejemplo 4.1. Sea $G = K_2$,



Considerando la construcción de Mycielski se obtuvo el siguiente Teorema ([9], [15]).

Teorema 4.1. Supongamos que G tiene al menos una arista. Entonces

- $\omega(\mu(G)) = \omega(G)$, donde $\omega(\mu(G))$ y $\omega(G)$ son los números de clan de $\mu(G)$ y de G respectivamente;
- $\chi(\mu(G)) = \chi(G) + 1$, donde $\chi(\mu(G))$ y $\chi(G)$ son los números cromáticos de $\mu(G)$ y de G respectivamente.
- $\chi_f(\mu(G)) = \chi_f(G) + \frac{1}{\chi_f(G)}$, donde $\chi_f(\mu(G))$ y $\chi_f(G)$ son los números cromáticos fraccionales de $\mu(G)$ y de G respectivamente.

DEMOSTRACIÓN.

- Como G es una subgráfica inducida de $\mu(G)$, $\omega(G) \leq \omega(\mu(G))$. Para mostrar la otra desigualdad, notemos primero que el vértice w no está en un clan de tamaño mayor que 2. Supongamos que $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}, y_{j_1}, \dots, y_{j_s}\}$ es un clan de tamaño $t + s$ de $\mu(G)$, esto es, cada subconjunto de dos elementos distintos de A es una arista de $\mu(G)$. Entonces $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_t}, v_{j_1}, \dots, v_{j_s}\}$ es un clan de tamaño $t + s$ de G y por lo tanto, $\omega(G) \geq \omega(\mu(G))$.
- Si $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ es una coloración propia de G , entonces definimos una coloración $\tilde{c} : V(\mu(G)) \rightarrow \{1, \dots, k, k + 1\}$ de $\mu(G)$ como $\tilde{c}(x_i) = \tilde{c}(y_i) = c(v_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, |V(G)|\}$, y $\tilde{c}(w) = k + 1$. Esta es una coloración propia de $\mu(G)$, ya que si existe una arista $e \in \mu(G)$ monocromática, $w \notin e$, ya que por definición, el color de w es diferente al color asignado a todos los demás vértices. Así, $e = \{x_i, x_j\}$ o $e = \{x_i, y_j\}$, entonces la arista $\{v_i, v_j\}$ de G es monocromática, contradiciendo que c es una coloración propia de G . Por lo tanto, $\chi(\mu(G)) \leq \chi(G) + 1$.

Sea \tilde{c} cualquier coloración propia de $\mu(G)$, definimos una coloración c de G como

$$c(v_i) = \begin{cases} \tilde{c}(x_i), & \text{si } \tilde{c}(x_i) \neq \tilde{c}(w); \\ \tilde{c}(y_i), & \text{si } \tilde{c}(x_i) = \tilde{c}(w). \end{cases}$$

Esta es una coloración propia de G la cual no usa el color de $\tilde{c}(w)$. Así, G se puede colorear con menos colores de los que se necesitan para colorear $\mu(G)$. Por lo tanto, $\chi(\mu(G)) \geq \chi(G) + 1$.

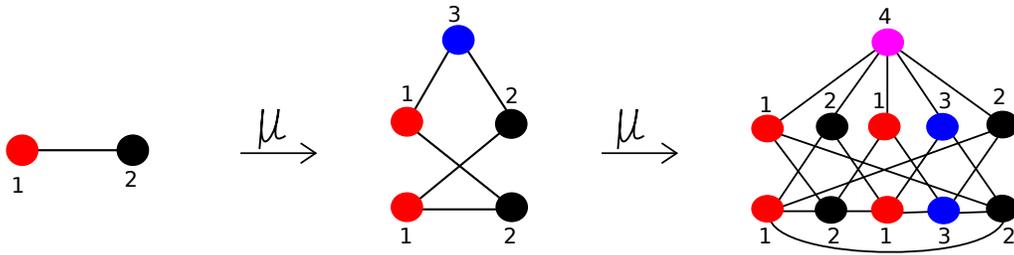
c) La demostración se dará en la Sección 4.3. ■

Ejemplo 4.2. *Considérese $G = K_2$ como en el Ejemplo 4.1. Se tiene que*

$$\omega(\mu(\mu(K_2))) = \omega(\mu(K_2)) = \omega(K_2) = 2,$$

$$\chi(\mu(\mu(K_2))) = \chi(\mu(K_2)) + 1 = (\chi(K_2) + 1) + 1 = 4,$$

como se muestra en la figura



Además

$$\chi_f(\mu(\mu(K_2))) = \chi_f(\mu(K_2)) + \frac{1}{\chi_f(\mu(K_2))} = \left(\chi_f(K_2) + \frac{1}{\chi_f(K_2)}\right) + \frac{1}{\chi_f(K_2) + \frac{1}{\chi_f(K_2)}} = \frac{29}{10}.$$

Utilizando esta construcción recursivamente notemos que el Teorema 4.1 implica que $\chi(\mu^n(K_2)) = n + 2$ y por construcción la gráfica $\mu^n(K_2)$ es libre de triángulos.

4.2.–Construcción tipo Mycielski $\mu(G^r)$ para r -hipergráficas.

En esta Sección asumiremos que $r \geq 3$. Inspirados en la construcción de Mycielski, construimos r -hipergráficas que no contienen r -subhipergráficas inducidas de orden $r + 1$ y que tienen número cromático débil arbitrariamente grande.

Definición 4.1. Sea G^r una r -hipergráfica de orden n , con conjunto de vértices $V(G^r) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y conjunto de aristas $E(G^r)$.

Definimos una r -hipergráfica $\mu(G^r) = (V(\mu(G^r)), E(\mu(G^r)))$, con conjunto de vértices

$$V(\mu(G^r)) = V' \cup \{w\},$$

donde $V' = V(G^r) \times \{1, \dots, r - 1\}$. Esto es, los vértices de $\mu(G^r)$ son de la forma

$$\{(v_i, t) \mid v_i \in V(G^r), 1 \leq t \leq r - 1\} \cup \{w\},$$

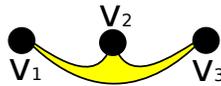
y conjunto de aristas

$$E(\mu(G^r)) = \{ \{(u_1, t_1), \dots, (u_r, t_r)\} \mid \{u_1, \dots, u_r\} \in E(G^r) \} \cup \{ \{(v_i, 1), \dots, (v_i, r-1), w\} \},$$

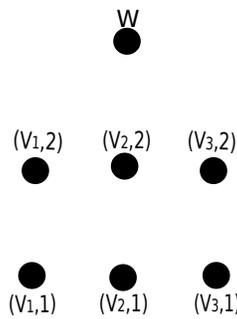
donde $u_j, v_i \in V(G^r)$, $1 \leq t_j \leq r-1$.

Ilustraremos la definición con el siguiente ejemplo

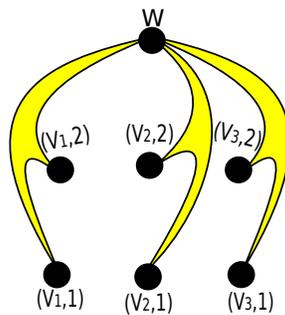
Ejemplo 4.3. Sea $G^3 = K_3^3$ con $V(K_3^3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E(K_3^3) = \{\{v_1, v_2, v_3\}\}$ como se muestra en la figura



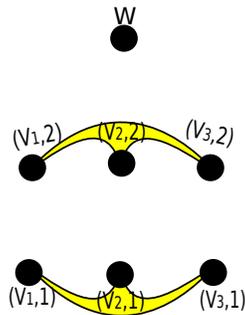
El conjunto de vértices de $\mu(K_3^3)$ es

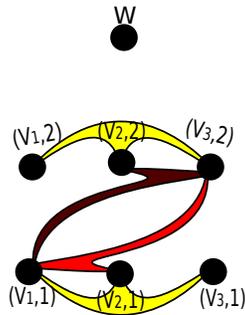


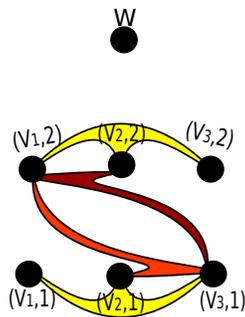
el conjunto de aristas de $\mu(K_3^3)$ de la forma $\{(v_i, 1), (v_i, 2), w\}$ es



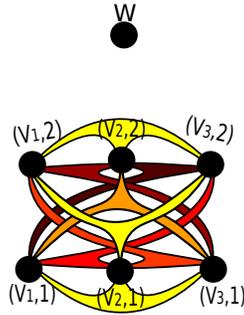
el conjunto de aristas de $\mu(K_3^3)$ de la forma $\{(u_1, t_1), (u_2, t_2), (u_3, t_3)\}$ es

$$\{(v_1, 1), (v_2, 1), (v_3, 1)\}, \{(v_1, 2), (v_2, 2), (v_3, 2)\},$$


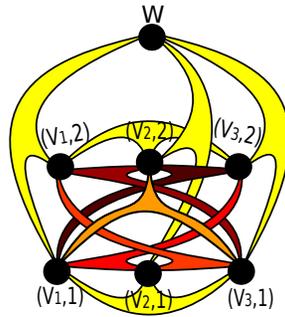
$$\{(v_1, 1), (v_2, 1), (v_3, 2)\}, \{(v_1, 1), (v_2, 2), (v_3, 2)\},$$


$$\{(v_1, 2), (v_2, 1), (v_3, 1)\}, \{(v_1, 2), (v_2, 2), (v_3, 1)\},$$


$$\{(v_1, 1), (v_2, 2), (v_3, 1)\}, \{(v_1, 2), (v_2, 1), (v_3, 2)\},$$



Entonces $\mu(K_3^3)$ es



A diferencia de la construcción de Mycielski, en esta construcción ningún “piso” de $\mu(G^r)$ es un conjunto independiente débil, a menos que $E(G^r) = \emptyset$. En efecto, para cada $t \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ fijo, el conjunto $\{(v, t) \mid v \in V(G^r)\}$ es una copia de G^r .

4.2.1. Conjuntos independientes máximos débiles de $\mu(G^r)$.

Sea G^r una r -hipergráfica y sea $\mu(G^r)$ la r -hipergráfica asociada a G^r como en la Sección anterior. En esta Sección estudiaremos el conjunto $\mathcal{I}(\mu(G^r))$ de todos los conjuntos independientes máximos débiles de $\mu(G^r)$.

Consideremos la función proyección

$$\pi_1 : V(\mu(G^r)) \setminus \{w\} \rightarrow V(G^r) \quad \text{como} \quad \pi_1((v_i, t)) = v_i,$$

entonces el conjunto de aristas de $\mu(G^r)$ se puede ver como

$$E(\mu(G^r)) = E_1 \cup E_2,$$

donde

$$E_1 = \{\{(u_1, t_1), \dots, (u_r, t_r)\} \subseteq V(\mu(G^r)) \setminus \{w\} \mid \pi_1(\{(u_1, t_1), \dots, (u_r, t_r)\}) \in E(G^r)\}$$

y

$$E_2 = \{\{(v_i, 1), \dots, (v_i, r-1), w\}\}.$$

Obsérvese que un conjunto $J \subseteq V(\mu(G^r))$ es un *conjunto independiente débil* si para todo $e \in E(\mu(G^r))$ se cumple que $e \not\subseteq J$ y es un *conjunto independiente maximal débil* si no contiene propiamente ningún conjunto independiente débil de $\mu(G^r)$.

Así, para cada conjunto independiente maximal débil $I = \{u_1, \dots, u_s\}$ de G^r ; existen dos tipos de conjuntos independientes maximales débiles de $\mu(G^r)$. El primer tipo, es el conjunto $L_I = I \times \{1, 2, \dots, r-1\}$. El segundo tipo, es el conjunto \mathcal{K}_I obtenido de L_I removiendo s vértices, cada uno con una base diferente, y añadiendo el vértice w . Más precisamente, sea $\mathcal{S}(L_I)$ el conjunto de todos los s -subconjuntos de L_I cuya proyección es I ; esto es,

$$\mathcal{S}(L_I) = \{S \mid S \subseteq L_I, |S| = s \text{ y } \pi_1(S) = I\}.$$

Entonces

$$\mathcal{K}_I = \{\{w\} \cup (L_I \setminus S) \mid S \in \mathcal{S}(L_I)\}.$$

Lema 4.2. *Para cada r -hipergráfica G^r , se tiene que*

$$\mathcal{I}(\mu(G^r)) = \{\{L_I\} \cup \mathcal{K}_I \mid I \in \mathcal{I}(G^r)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{J} := \{\{L_I\} \cup \mathcal{K}_I \mid I \in \mathcal{I}(G^r)\}$. Demostremos primero que cada $J \in \mathcal{J}$ es un conjunto independiente maximal débil de $\mu(G^r)$. Después demostraremos que no existe conjunto independiente maximal débil de $\mu(G^r)$ que no este en \mathcal{J} .

Sea $J = L_I$ para algún $I \in \mathcal{I}(G^r)$. Como $\pi_1(J) = I$ es un conjunto independiente maximal débil de G^r , ninguna arista de E_1 esta contenida en J . Como $w \notin J$, ninguna arista de E_2 esta contenida en J . Así, J es un conjunto independiente débil. Además, para cada $v \in V \setminus J$, se tiene que $J \cup \{v\}$ contiene al menos una arista de $\mu(G^r)$, ya que si $v = w$, entonces s aristas de E_2 se forman (una para cada base $u_i \in I$) y si $v \neq w$, entonces $v = (u, t)$ para algún $u \in V(G^r) \setminus I$ y $t \in \{1, \dots, r-1\}$. Como I es un conjunto independiente maximal débil de G^r , entonces $\pi_1(J \cup \{v\}) = I \cup \{u\}$ contiene al menos una arista de G^r . Así, $J \cup \{v\}$ contiene una arista en E_1 , lo cual confirma que J es un conjunto independiente maximal débil.

Supongamos que $J \in \mathcal{K}_I$ para algún conjunto independiente maximal débil I de G^r , entonces existe $S \in \mathcal{S}(L_I)$ tal que $J = \{w\} \cup (L_I \setminus S)$. Para demostrar que J es un conjunto independiente supóngase lo contrario, esto es, supongamos que existe $e \in E(\mu(G^r))$ tal que $e \subseteq J$. Si $w \in e$, entonces existe $u \in I$ tal que $e = \{(u, 1), \dots, (u, r-1), w\}$ que resulta contradictorio, debido a que existe $1 \leq s \leq r-1$ tal que $(u, s) \in S$. Se sigue que $e = \{(u_{i_1}, t_1), \dots, (u_{i_r-1}, t_r)\}$ con $u_{i_j} \in I$ y $t_i \in \{1, \dots, r-1\}$, entonces $\pi_1(e) \subseteq I$ tenemos una contradicción. Por lo tanto, J es un conjunto independiente débil de $\mu(G^r)$. Ahora para mostrar que J es maximal supongamos que no lo es, entonces existe un vértice $(v, t) \in V(\mu(G^r)) \setminus J$ tal que $J \cup \{(v, t)\}$ es un conjunto independiente débil de $\mu(G^r)$. Si $\{(v, t)\} \in S$, entonces $J \cup \{(v, t)\}$ no es independiente. Así, $v \in V(G^r) \setminus I$, como I es maximal, existen vértices $u_{i_1}, \dots, u_{i_{r-1}} \in I$ tal que $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_{r-1}}, v\} \in E(G^r)$ y existe $S_1 \in \mathcal{S}(L_I)$ con $S_1 \neq S$, y $\pi_1(S_1) = I$ y $S_1 \subset J$, tal que $\pi_1^{-1}(e) \subset S_1$. Por lo tanto, J es un conjunto independiente maximal débil de $\mu(G^r)$.

Ahora probaremos que para cualquier $D \in \mathcal{I}(\mu(G^r))$ se cumple que $D \in \mathcal{J}$.

Caso 1. $w \notin D$. Debido a que D es un conjunto independiente maximal débil de $\mu(G^r)$ se sigue que $\pi_1(D)$ es un conjunto independiente maximal débil de G^r , ya que para cualquier $v \in V(G^r) \setminus \pi_1(D)$ se tiene que $D \cup \{(v, t)\}$ contiene al menos una arista en E_2 . Así, $\pi_1(D \cup \{(v, t)\}) = \pi_1(D) \cup \{v\}$ contiene al menos una arista. Como $\pi_1(D)$ es un conjunto independiente maximal débil de G^r , entonces $D = L_{\pi_1(D)}$ (i.e. $D = \pi_1(D) \times \{1, \dots, r-1\}$). Supóngase que para algún $v \in \pi_1(D)$ y $t \in \{1, \dots, r-1\}$ se tiene que $(v, t) \notin D$. Entonces $D \cup \{(v, t)\}$ debe contener al menos una arista en E_1 , contradiciendo que $\pi_1(D \cup \{(v, t)\}) = \pi_1(D)$. Por lo tanto, $D = L_{\pi_1(D)} \in \mathcal{J}$.

Caso 2. $w \in D$. Como en el caso anterior se puede mostrar que $\pi_1(D)$ es un conjunto independiente maximal débil. Además, para cada $v \in \pi_1(D)$ existe al menos un $t_i \in \{1, \dots, r-1\}$ tal que $(v, t_i) \notin D$ ya que de lo contrario D tendría una arista en E_2 . Supongamos que para algún $v \in \pi_1(D)$ existen $t \neq t' \in \{1, \dots, r-1\}$, tal que (v, t) y (v, t') no pertenecen a D . Entonces $D \cup \{(v, t)\}$ debe contener al menos una arista e de $\mu(G^r)$. Pero $e \notin E_1$ ya que $\pi_1(D \cup \{(v, t)\}) = \pi_1(D)$ es un conjunto independiente débil, y $e \notin E_2$ ya que $(v, t') \notin D$. Por lo tanto, $D = \{L_{\pi_1(D)} \setminus S \mid S \in \mathcal{S}(L_{\pi_1(D)})\} \cup \{w\} \in \mathcal{K}_{\pi_1(D)} \subseteq \mathcal{J}$. ■

4.2.2. Resultado

A continuación presentamos el teorema principal de este trabajo, utilizando la construcción tipo Mycielski $\mu(G^r)$ para r -hipergráficas. El siguiente Teorema muestra que el número cromático débil y el número cromático fraccional débil de una r -hipergráfica no están acotados superiormente por una función en términos de su número de clan.

Teorema 4.3. *Supóngase que $G^r = (V(G^r), E(G^r))$ es una r -hipergráfica con $r \geq 3$ y $E(G^r) \neq \emptyset$, entonces las siguiente afirmaciones se cumplen:*

- a).- $\omega(\mu(G^r)) = \omega(G^r)$;
- b).- $\chi(\mu(G^r)) = \chi(G^r) + 1$;
- c).- $\chi_f(\mu(G^r)) = \chi_f(G^r) + \frac{1}{r-1}$.

DEMOSTRACIÓN.

- a).- Como $\mu(G^r)$ contiene una copia de G^r , $\omega(G^r) \leq \omega(\mu(G^r))$. Supongamos que $\mu(G^r)$ contiene una r -subhipergráfica completa K_k^r para algún $k > \omega(G^r)$. Claramente $w \notin V(K_k^r)$, ya que todas las aristas que contienen a w se intersectan solamente en w . Entonces $V(K_k^r) \subseteq V'$. Como cada r -subconjunto de $V(K_k^r)$ es una arista en E_2 , entonces para cada par de vértices diferentes (u_{i_1}, t_{i_1}) y (u_{j_1}, t_{j_1}) en $V(K_k^r)$ se tiene que $\pi_1((u_{i_1}, t_{i_1})) \neq \pi_1((u_{j_1}, t_{j_1}))$. Así, $\pi_1(K_k^r)$ es una r -subhipergráfica completa de orden k en G^r , y por lo tanto se tiene una contradicción.

b).- Supongamos que $\chi(G^r) = k$. Primero vamos a mostrar una $(k+1)$ -coloración débil de $\mu(G^r)$, y después demostraremos que no existe k -coloración débil de $\mu(G^r)$.

Sea $c : V(G^r) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ una k -coloración débil de G^r , definimos una $(k+1)$ -coloración $\tilde{c} : V(\mu(G^r)) \rightarrow \{1, 2, \dots, k, k+1\}$ de $\mu(G^r)$ como $\tilde{c}((u_i, t_i)) = c(u_i)$ para todo $1 \leq t_i \leq r-1$, $u_i \in V(G^r)$, y $\tilde{c}(w) = k+1$. Esta $(k+1)$ -coloración de $\mu(G^r)$ es débil.

- 1.- No existe ninguna arista monocromática que contenga al vértice w , ya que a w se le asignó un color diferente de los k colores dados a los demás vértices de $\mu(G^r)$.
- 2.- Si $\{(u_{i_1}, j_1), (u_{i_2}, j_2), \dots, (u_{i_r}, j_r)\}$ es una arista monocromática de $\mu(G^r)$ entonces $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}\}$ es una arista monocromática de G^r , lo que contradice el hecho que c es una coloración débil de G^r . Por consiguiente,

$$k \leq \chi(\mu(G^r)) \leq k+1.$$

Ahora asumimos que $\mu(G^r)$ admite una k -coloración débil ($c : V(\mu(G^r)) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$). Sin pérdida de generalidad, sea $c(w) = k$. Consideremos $A = \{(u_1, 1), \dots, (u_s, 1)\}$, el conjunto de vértices de color k en $V(G^r) \times \{1\} \subseteq V'$ ($A \neq \emptyset$, de lo contrario G^r admite una $(k-1)$ -coloración débil). Para cada $(u_i, 1) \in A$ considere la arista $e_i = \{(u_i, 1), \dots, (u_i, r-1), w\} \in E_2$. Como la coloración es débil, entonces al menos un vértice de e_i , digamos (u_i, t_i) , tiene un color, k_i , diferente de k . De esta manera, para cada uno de estos i , con $1 \leq i \leq s$, cambiaremos el color k asignado a $(u_i, 1)$ por el color k_i . Si al hacer tal cambio no hay aristas monocromáticas en $V(G^r) \times \{1\}$, entonces G^r admite una $(k-1)$ -coloración débil, lo cual da una contradicción. Entonces supongamos que el cambio da una arista monocromática $e \subseteq V(G^r) \times \{1\}$ de color l . Como la coloración original fué débil, entonces $e \cap A \neq \emptyset$, y $\tilde{e} = e \setminus (e \cap A) \neq \emptyset$. Pero entonces, notemos que el conjunto $\tilde{e} \cup \{(u_i, t_i) \mid (u_i, 1) \in e \cap A \text{ y } c((u_i, t_i)) = l\}$ es una arista monocromática de la coloración original, contradiciendo que $\mu(G^r)$ admite una k -coloración débil. Por lo tanto, $\chi(\mu(G^r)) = k+1$.

c).- Supongamos que $\chi_f(G^r) = \frac{a}{b}$ para algunos enteros positivos a y b con $a > b$. Demostraremos que $\chi_f(\mu(G^r)) = \frac{a}{b} + \frac{1}{r-1}$ exhibiendo; primero, una $(a(r-1) + b, b(r-1))$ -coloración de $\mu(G^r)$, y después un clan fraccional de $\mu(G^r)$ con peso $\frac{a}{b} + \frac{1}{r-1}$.

Sea $A = \{1, 2, \dots, a\}$ y $f : V(G^r) \rightarrow \{B \mid B \subseteq A \text{ y } |B| = b\}$ una (a, b) -coloración débil de G^r , donde $f(v) = \{v^1, v^2, \dots, v^b\}$.

Para poder dar una $(a(r-1) + b, b(r-1))$ -coloración débil de $\mu(G^r)$, definiremos dos funciones auxiliares. Primero consideramos, para cada color $i \in A$, un nuevo conjunto de $(r-1)$ -colores. Sean estos, i_1, i_2, \dots, i_{r-1} , y sea

$$\tilde{A} = \{1_1, 1_2, \dots, 1_{r-1}, 2_1, 2_2, \dots, 2_{r-1}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_{r-1}\}.$$

(1) Sea $\tilde{f} : V(G^r) \rightarrow \{B \mid B \subseteq \tilde{A} \text{ y } |B| = b(r-1)\}$ definida como

$$\tilde{f}(v) = \{(v^1)_1, (v^2)_1, \dots, (v^b)_1, (v^1)_2, (v^2)_2, \dots, (v^b)_2, \dots, (v^1)_{r-1}, (v^2)_{r-1}, \dots, (v^b)_{r-1}\}.$$

- (2) Sea \tilde{B} un nuevo conjunto de b colores $\tilde{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_b\}$. Para un $u \in V(G^r)$ fijo, definimos la función $\sigma_u: A \rightarrow (A \setminus \{u^1, \dots, u^b\}) \cup \tilde{B}$ como la función que cambia colores u^i en A a uno nuevo en B . Esto es,

$$\sigma_u(i) = \begin{cases} b_i & \text{if } i = u^i \\ i & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Ahora definiremos $\hat{f}: V(\mu(G^r)) \rightarrow \{B \mid B \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B} \text{ y } |B| = b(r-1)\}$. Comenzamos escogiendo un vértice arbitrario pero fijo u de $V(G^r)$.

$$\hat{f}(w) = \tilde{f}(u),$$

$$\hat{f}(v, t) = \{(v^1)_1, \dots, (v^b)_1, \dots, (v^1)_{t-1}, \dots, (v^b)_{t-1}, \sigma_u(v^1), \dots, \sigma_u(v^b), \dots, (v^1)_{r-1}, \dots, (v^b)_{r-1}\}.$$

Así, la función \hat{f} asigna al vértice w de $\mu(G^r)$ precisamente el $b(r-1)$ -conjunto dado por $\tilde{f}(u)$. A un vértice $(v, t) \in V'$ la función \hat{f} le asigna el $b(r-1)$ -conjunto dado por $\tilde{f}(v)$ donde cada color con sub-índice t , $(v^i)_t$, es remplazado por el color $\sigma_u(v^i)$.

Para verificar que esta coloración da una coloración débil de $\mu(G^r)$ consideraremos los dos tipos de aristas de $\mu(G^r)$; E_1 y E_2 . En cualquiera de los casos, el hecho que G^r tiene una (a, b) -coloración débil y la definición de \hat{f} , principalmente la inclusión de $\sigma_u(v^i)$ para $i = 1, \dots, b$ en posición $t, t+1, \dots, t+(b-1)$ respectivamente, implica que es imposible $\bigcap_{i=1}^r \hat{f}(e_i) \neq \emptyset$ para cada vértice de una arista $\{e_1, e_2, \dots, e_r\} \in E(\mu(G^r))$.

El siguiente paso será dar un clan fraccional \tilde{g} de $\mu(G^r)$ con peso $\frac{a}{b} + \frac{1}{r-1}$.

Comenzamos con un clan fraccional g de G^r con peso $\frac{a}{b}$. Esto es, $g: V(G^r) \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\sum_{u \in I} g(u) \leq 1 \text{ para cada } I \in \mathcal{I}(G^r), \quad (4.1)$$

y

$$\sum_{u \in V(G^r)} g(u) = \frac{a}{b}. \quad (4.2)$$

Definimos $\tilde{g}: V(\mu(G^r)) \rightarrow [0, 1]$ como:

$$\tilde{g}(w) = \frac{1}{r-1}; \quad \tilde{g}(v, t) = \frac{g(v)}{r-1}.$$

Usando (4.2), se puede verificar facilmente que el peso de \tilde{g} es $\frac{a}{b} + \frac{1}{r-1}$.

De acuerdo al Lema 4.2, necesitamos observar que \tilde{g} es un clan fraccional de $\mu(G^r)$. Consideramos dos casos.

Si $J = L_I$ para algún $I \in \mathcal{I}(G^r)$, entonces $J = I \times \{1, \dots, r-1\}$. Por definición y usando (4.1) obtenemos que

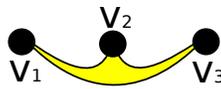
$$\sum_{(u,t) \in J} \tilde{g}(u, t) = (r-1) \sum_{u \in I} \frac{g(u)}{r-1} \leq 1.$$

Si $J \in \mathcal{K}_I$ para algún $I \in \mathcal{I}(G^r)$, entonces $J = \{w\} \cup L_I \setminus S$ para algún $S \in \mathcal{S}(L_I)$. Otra vez, por definición y usando (4.1) se tiene que

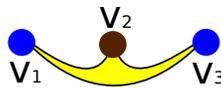
$$\sum_{v \in J} \tilde{g}(v) = \tilde{g}(w) + \sum_{(u,t) \in J \setminus w} \tilde{g}(u,t) = \frac{1}{r-1} + (r-2) \sum_{u \in I} \frac{g(u)}{r-1} \leq \frac{1}{r-1} + \frac{r-2}{r-1} = 1.$$

Entonces \tilde{g} es un clan fraccional de $\mu(G^r)$ con peso $\frac{a}{b} + \frac{1}{r-1}$ y considerando la existencia de una $(a(r-1) + b, b(r-1))$ -coloración débil de $\mu(G^r)$, esto da que $\chi_f(\mu(G^r)) = \chi_f(G^r) + \frac{1}{r-1}$. ■

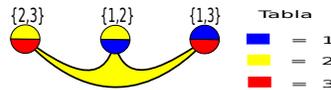
Ejemplo 4.4. Sea $G^3 = K_3^3$ una 3-hipergráfica del Ejemplo 4.3 donde $V(K_3^3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E(K_3^3) = \{\{v_1, v_2, v_3\}\}$,



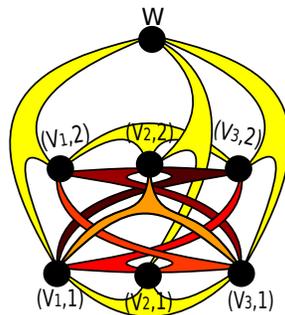
entonces $\chi(K_3^3) = 2$,



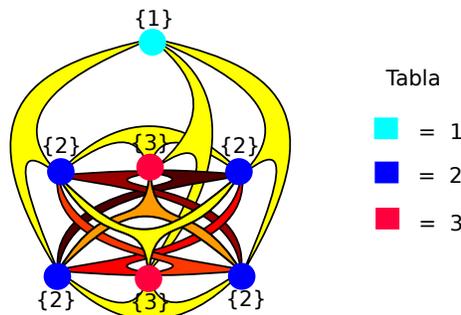
y $\chi_f(K_3^3) = \frac{3}{2}$.



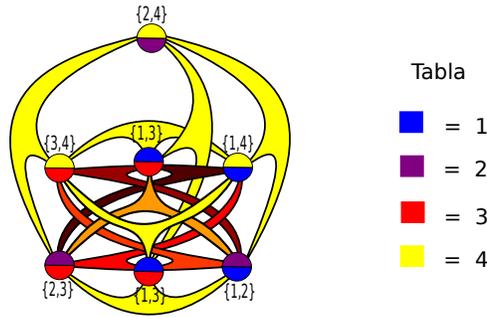
Tenemos que $\mu(K_3^3)$ es



donde $\chi(\mu(K_3^3)) = 3$



$$y \chi_f(\mu(G^r)) = \frac{4}{2}.$$



4.3.– Construcción generalizada de Mycielski para r -hipergráficas.

En esta sección vamos a dar una construcción de una familia de r -hipergráficas que no contienen r -subhipergráficas completas de orden $r + 1$. Esta construcción es una generalización de la construcción de Mycielski.

Sea G^r una r -hipergráfica de orden n , con conjunto de vértices $V(G^r) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y conjunto de aristas $E(G^r)$. Definimos $\tilde{\mu}(G^r)$ como sigue:

$$\tilde{\mu}(G^r) = (V(\tilde{\mu}(G^r)), E(\tilde{\mu}(G^r))).$$

i) El conjunto de vértices de $\tilde{\mu}(G^r)$ es

$$V(\tilde{\mu}(G^r)) = V' \cup \{w\},$$

donde $V' = V(G^r) \times \{1, 2, \dots, r\}$. Esto es, $V' = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$ con $V_t = \{(v, t) \mid v \in V(G^r)\}$ para cada $t \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Entonces, definimos la función proyección

$$\pi_1 : V(\tilde{\mu}(G^r)) \setminus \{w\} \rightarrow V(G^r) \quad \text{como} \quad \pi_1((v_i, t)) = v_i.$$

ii) El conjunto de aristas de $\tilde{\mu}(G^r)$ es

$$E(\tilde{\mu}(G^r)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4,$$

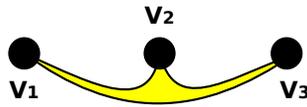
donde

$$\begin{aligned} E_1 &= \{A \mid A \subseteq V_1, |A| = r \text{ y } \pi_1(A) \in E(G^r)\}; \\ E_2 &= \{A \mid A = \{(u_1, t_1), \dots, (u_r, t_r)\} \subset V', \pi_1(A) \in E(G^r) \text{ y } t_i \neq t_j \forall i \neq j\}; \\ E_3 &= \{A \cup \{w\} \mid A = \{(u_2, t_2), \dots, (u_r, t_r)\} \subset V' \setminus V_1, |\pi_1(A)| = r - 1, \\ &\quad \pi_1(A) \subset e \text{ para alguna } e \in E(G^r) \text{ y } t_i \neq t_j \forall i \neq j\} \text{ y} \\ E_4 &= \{(u, 2), (u, 3), \dots, (u, r), w \mid \deg(u) = 0\}. \end{aligned}$$

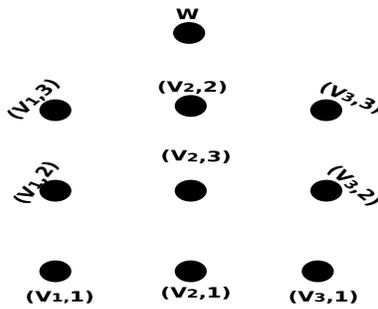
Observación 4.1: Si en la construcción anterior consideramos $r = 2$ tenemos la construcción de Mycielski. Además para todo $2 \leq j \leq r$ se tiene que $V(G^r) \times \{j\}$ es un conjunto independiente fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$ por construcción.

Consideremos el siguiente ejemplo

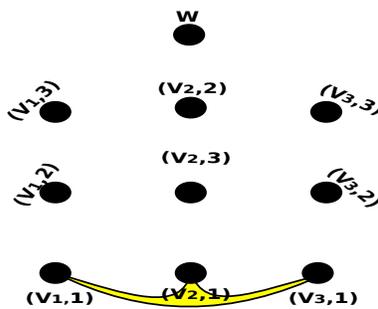
Ejemplo 4.5. Consideremos la 3-hipergráfica del Ejemplo 4.3 donde $V(K_3^3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E(K_3^3) = \{\{v_1, v_2, v_3\}\}$ como se muestra en la siguiente figura



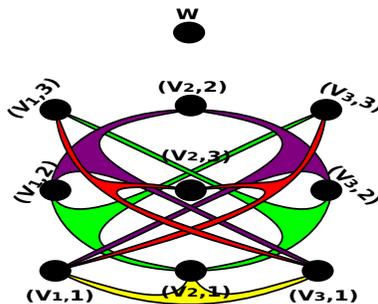
El conjunto de vértices de $\tilde{\mu}(K_3^3)$ es



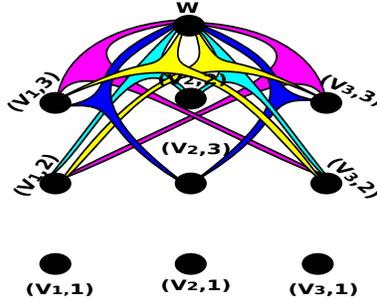
el conjunto de aristas en E_1 de $\tilde{\mu}(K_3^3)$ es



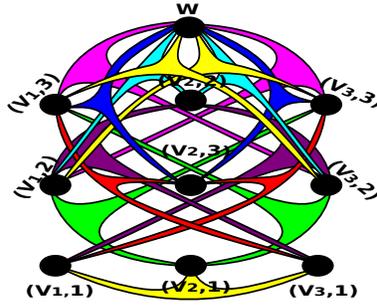
el conjunto de aristas en E_2 de $\tilde{\mu}(K_3^3)$ es



el conjunto de aristas en E_3 de $\tilde{\mu}(K_3^3)$ es



el conjunto de aristas en E_4 de $\tilde{\mu}(K_3^3)$ es el conjunto vacío y por lo tanto, $\tilde{\mu}(K_3^3)$ es



4.3.1. Conjuntos independientes maximales fuertes de $\tilde{\mu}(G^r)$.

Sea G^r una r -hipergráfica y sea $\tilde{\mu}(G^r)$ la r -hipergráfica asociada a G^r como en la Sección anterior. En esta Sección estudiaremos el conjunto $\mathcal{I}(\tilde{\mu}(G^r))$ de todos los conjuntos independientes maximales fuertes de $\tilde{\mu}(G^r)$.

Recordemos que un conjunto $J \subseteq V(\tilde{\mu}(G^r))$ es un *conjunto independiente fuerte* si para todo $e \subseteq E(\tilde{\mu}(G^r))$ se cumple que $|e \cap J| \leq 1$ y es un *conjunto independiente maximal fuerte* si no contiene propiamente ningún conjunto independiente fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$.

Lema 4.4. Para cada r -hipergráfica G^r , se tiene que

$$\mathcal{I}(\tilde{\mu}(G^r)) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C},$$

donde $\mathcal{A} = \{I \times \{1, \dots, r\} \mid I \in \mathcal{I}(G^r)\}$, $\mathcal{B} = \{I \times \{1\} \cup \{w\} \mid I \in \mathcal{I}(G^r)\}$ y $\mathcal{C} = \{V(G^r) \times \{t_i\} \mid 2 \leq t_i \leq r\}$.

DEMOSTRACIÓN. Primero probaremos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}(\tilde{\mu}(G^r))$.

1. Comenzemos demostrando que $\mathcal{A} = \{I \times \{1, \dots, r\} \mid I \in \mathcal{I}(G^r)\}$ son conjuntos independientes maximales fuertes de $\tilde{\mu}(G^r)$. Sea $J \in \mathcal{A}$, entonces existe $I \in \mathcal{I}(G^r)$ tal que $J = I \times \{1, \dots, r\}$.

J es un conjunto independiente fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$, ya que si existe $e \in E(\tilde{\mu}(G^r))$ tal que $|e \cap J| \geq 2$, entonces $|\pi_1(e) \cap \pi_1(J)| = |\pi_1(e) \cap I| \geq 2$ contradiciendo el hecho que I es un conjunto independiente fuerte de G^r .

Ahora mostraremos que J es un conjunto independiente maximal fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$. Supongamos lo contrario, esto es, que existe $x \in \tilde{\mu}(G^r) \setminus J$ tal que $J \cup \{x\}$ es un conjunto independiente fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$.

Supongamos que $x = w$. Si existe un vértice $u \in I$ con $\deg(u) = 0$, entonces $e = \{(u, 2), \dots, (u, r), w\} \subseteq J \cup \{w\}$ es arista de $\tilde{\mu}(G^r)$ (en E_4). Para cada vértice $u \in I$, se tiene que $\deg(u) \geq 1$ por lo que existe al menos una arista $e \in E(G^r)$ tal que $u \in e$. Entonces, existe una arista de $\tilde{\mu}(G^r)$ (en E_3) que contiene a w y al vértice (u_i, t_i) para algún $(u_i, t_i) \in J$ por la construcción de $\tilde{\mu}(G^r)$. Por lo tanto, si $x = w$ se tiene que $J \cup \{x\}$ no es un conjunto independiente fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$.

Supongamos que $x = (u_i, t_i)$, claramente $\pi_1(x) \in V(G^r) \setminus I$ ya que de lo contrario $x \in J$. Como I es un conjunto independiente maximal fuerte, se tiene que $I \cup \{\pi_1(x)\}$ no es un conjunto independiente fuerte de G^r . Entonces existe al menos una arista de G^r que contiene a u y a $\pi_1(x)$ para algún $u \in I$, se sigue entonces que existe al menos una arista de $\tilde{\mu}(G^r)$ (en E_1 o E_2) que contiene a (u_i, t_i) y x para algún $(u_i, t_i) \in J$. Así, $J \cup \{x\}$ no es un conjunto independiente fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$.

Por lo tanto, J es un conjunto independiente maximal fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$.

2. Ahora, demostremos que los elementos de $\mathcal{B} = \{I \times \{1\} \cup \{w\} \mid I \in \mathcal{I}(G^r)\}$ son conjuntos independientes maximales fuertes de $\tilde{\mu}(G^r)$. Sea $J \in \mathcal{B}$, entonces existe $I \in \mathcal{I}(G^r)$ tal que $J = I \times \{1\} \cup \{w\}$.

Mostremos que J es un conjunto independiente fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$. Supongamos que existe $e \in E(\tilde{\mu}(G^r))$ tal que $|e \cap J| \geq 2$. Como I es independiente fuerte $|e \cap I \times \{1\}| \leq 1$, entonces la arista e contiene un vértice en $I \times \{1\}$ y contiene a w , por construcción de $\tilde{\mu}(G^r)$ esto es imposible.

Ahora, vamos a demostrar que J es un conjunto independiente maximal fuerte. Supongamos que existe $x \in V(\tilde{\mu}(G^r)) \setminus J$ tal que $J \cup \{x\}$ es un conjunto independiente fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$.

Supongamos que $x = (u_i, t_i)$ para algún $u_i \in I$ y algún $2 \leq t_i \leq r$. Si $\deg(u_i) = 0$, entonces existe una arista de $\tilde{\mu}(G^r)$ (en E_4) que contiene a $x = (u_i, t_i)$ y a w . Si $\deg(u_i) \geq 1$, entonces existe una arista de G^r que contiene a u_i de aquí se sigue la existencia de una arista de $\tilde{\mu}(G^r)$ (en E_3) que contiene a $x = (u_i, t_i)$ y a w . Entonces $\pi_1(x) \notin I$.

Supongamos que $x = (v, t_i)$ para algún $v \in V(G^r) \setminus I$ y algún $1 \leq t_i \leq r$. Como I es un conjunto independiente maximal fuerte de G^r existe al menos una arista de $E(G^r)$ que contiene a v y a algún $u_i \in I$, entonces existe al menos una arista de $\tilde{\mu}(G^r)$ (en E_3) que contiene a $x = (v, t_i)$ y a w .

Por lo tanto, J es un conjunto independiente maximal fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$.

3. Finalmente probaremos que $\mathcal{C} = \{V(G^r) \times \{t_i\} \mid 2 \leq t_i \leq r\}$ son conjuntos independientes maximales fuertes de $\tilde{\mu}(G^r)$. Sea $J \in \mathcal{C}$, entonces $J = V(G^r) \times \{t_i\}$ para algún $2 \leq t_i \leq r$ y por construcción este es un conjunto independiente maximal fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$.

Sólo resta mostrar ahora que $\mathcal{I}(\tilde{\mu}(G^r)) \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

Para todo $I \in \mathcal{I}(\tilde{\mu}(G^r))$, se tiene que $\pi_1(I)$ es un conjunto independiente maximal fuerte de G^r . Por lo tanto, $(I = \pi_1(I) \times \{1, \dots, r\})$ o $(I = \pi_1(I) \times \{1\} \cup \{w\})$ o $(I = \pi_1(I) \times \{t_i\})$ para $\pi_1(I) = V(G^r)$ y algún $2 \leq t_i \leq r$. Lo que concluye la demostración. ■

4.3.2. Resultado

A continuación vamos a demostrar que el número cromático fuerte y número cromático fraccional fuerte de una r -hipergráfica tampoco están acotados superiormente por una función de su número de clan. Utilizaremos la construcción generalizada de Mycielski $\tilde{\mu}(G^r)$ para r -hipergráficas.

Teorema 4.5. *Supóngase que $G^r = (V(G^r), E(G^r))$ es una r -hipergráfica con $r \geq 2$ y $E(G^r) \neq \emptyset$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- a).- $\omega(\tilde{\mu}(G^r)) = \omega(G^r)$;
- b).- $\chi^s(\tilde{\mu}(G^r)) = \chi^s(G^r) + 1$;
- c).- $\chi_f^s(\tilde{\mu}(G^r)) = \chi_f^s(G^r) + \frac{r-1}{\chi_f^s(G^r)}$.

DEMOSTRACIÓN.

- a).- Supongamos que G^r no contiene a K_{r+1}^r , vamos a demostrar que $\tilde{\mu}(G^r)$ no contiene a K_{r+1}^r . Supóngase lo contrario, esto es, que $\tilde{\mu}(G^r)$ si contiene algún K_{r+1}^r , entonces

1. Si $w \in V(K_{r+1}^r)$, se tiene que los r -vértices restantes están contenidos en $V(G^r) \times \{2, \dots, r\}$ contradicción, ya que no existe aristas en $G^r \times \{2, \dots, r\}$ por la definición de $\tilde{\mu}(G^r)$.
2. Como G^r no contiene a K_{r+1}^r y cada $V(G^r) \times \{j\}$ para $1 < j \leq r$ es un conjunto independiente, entonces $K_{r+1}^r \not\subseteq G^r \times \{i\}$ para toda $1 \leq i \leq r$.
3. Sea $V(K_{r+1}^r) = \{(u_1, \sigma_1), \dots, (u_{r+1}, \sigma_{r+1})\}$ como K_{r+1}^r es una r -hipergráfica de $\tilde{\mu}(G^r)$ entonces cada r -subconjunto de $V(K_{r+1}^r)$ es una arista de K_{r+1}^r si y sólo si cada r -subconjunto de $\{u_1, \dots, u_{r+1}\}$ es una arista de K_{r+1}^r si y sólo si K_{r+1}^r es una r -subhipergráfica de G^r , se tiene una contradicción.

Por lo tanto, $\tilde{\mu}(G^r)$ no contiene a K_{r+1}^r .

b).- Supongamos que $\chi^s(G^r) = k$, por demostrar que $\chi^s(\tilde{\mu}(G^r)) = k + 1$. Como $E(G^r) \neq \emptyset$, entonces $k \geq r$.

1. Primero mostraremos que $\chi^s(\tilde{\mu}G^r) \leq k + 1$. Como $\chi^s(G^r) = k$, existe una k -coloración fuerte $c : V(G^r) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ de G^r . Defínase una $(k + 1)$ -coloración \tilde{c} de $\tilde{\mu}(G^r)$ de la siguiente manera:

$$\tilde{c} : V(\tilde{\mu}(G^r)) \rightarrow \{1, 2, \dots, k, k + 1\},$$

para cada vértice $u_i \in V(G^r)$ y $1 \leq t_i \leq r$. Si $\deg(u_i) = 0$, entonces $\tilde{c}((u_i, t_i)) = t_i$. Si $\deg(u_i) > 0$, entonces $\tilde{c}((u_i, t_i)) = c(u_i)$ y $\tilde{c}(w) = k + 1$. Esta $(k + 1)$ -coloración de $\tilde{\mu}(G^r)$ es una $(k + 1)$ -coloración fuerte ya que de lo contrario, existe una arista $e \in E(\tilde{\mu}(G^r))$ con al menos dos de sus vértices con el mismo color asignados por la coloración \tilde{c} . Como \tilde{c} asignó un color diferente a w que a todos los demás colores asignados al resto de los vértices, entonces $e \neq \{(u_i, 2), \dots, (u_i, r), w\}$ si $\deg(u_i) = 0$ por definición de \tilde{c} y como $e \neq \{(u_1, t_1), \dots, (u_{r-1}, t_{r-1}), w\}$ para alguna arista $\{u_1, \dots, u_r\}$ ya que c es una coloración fuerte de G^r . Si $w \notin e$, como $\pi_1(e) \in E(G^r)$ y c es una coloración fuerte, entonces \tilde{c} asignó diferentes colores a todos los vértices de e . Así, \tilde{c} es una $(k + 1)$ -coloración fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$.

Por lo tanto,

$$k \leq \chi^s(\tilde{\mu}(G^r)) \leq k + 1.$$

2. Ahora vamos a mostrar que $\tilde{\mu}(G^r)$ no acepta una k -coloración fuerte. Supongamos que $\tilde{\mu}(G^r)$ tiene una k -coloración fuerte la cual restringida a $G^r \times \{1\}$ es fuerte debido a que por hipótesis $\chi^s(\tilde{\mu}(G^r)) = k$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que la k -coloración fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$ asigna a w el color k de los k -colores de $\{1, \dots, k\}$.

Sea $A = \{(u_1, 1), \dots, (u_t, 1)\}$ el conjunto de vértices en $G^r \times \{1\}$ que reciben el color k por la k -coloración fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$.

$A \neq \emptyset$ ya que de lo contrario G^r tiene una $(k - 1)$ -coloración fuerte.

Para cada $1 \leq i \leq t$ vamos a cambiar el color de $(u_i, 1)$ de la siguiente manera:

- i) Si existe $e \in E(\tilde{\mu}(G^r))$ tal que $\{(u_i, r), w\} \subseteq e$, entonces (u_i, r) tiene asignado un color diferente a w ya que la k -coloración es fuerte. Entonces asignamos al vértice $(u_i, 1)$ el color del vértice asignado a (u_i, r) .
- ii) Si para todo $e \in E(\tilde{\mu}(G^r))$ se tiene que $\{(u_i, r), w\} \not\subseteq e$ entonces u_i es un vértice aislado y podemos cambiar el color k asignado a $(u_i, 1)$ por cualquiera de los $(k - 1)$ -colores restantes.

De *i)* y *ii)* tenemos construida una $(k - 1)$ -coloración fuerte para G^r , contradiciendo la hipótesis de que $\chi^s(G^r) = k$.

Por lo tanto,

$$\chi^s(\tilde{\mu}(G^r)) = k + 1.$$

c.-) Supongamos que $\chi_f^s(G^r) = \frac{a}{b}$ para algunos enteros positivos a y b con $b \leq a$. Demostraremos que $\chi_f^s(\tilde{\mu}(G^r)) = \frac{a}{b} + \frac{b(r-1)}{a}$ exhibiendo primero, una $(a^2 + (r-1)b^2, a \cdot b)$ -coloración de $\tilde{\mu}(G^r)$, y después un clan fraccional de $\tilde{\mu}(G^r)$ con peso $\frac{a}{b} + \frac{b(r-1)}{a}$.

Sea $A = \{1, 2, \dots, a\}$ y $f : V(G^r) \rightarrow \{B \mid B \subseteq A \text{ y } |B| = b\}$ una (a, b) -coloración fuerte de G^r , donde $f(v) = \{v^1, v^2, \dots, v^b\}$.

Para poder dar una $(a^2 + (r-1)b^2, a \cdot b)$ -coloración fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$, vamos asignarle a cada color $i \in A$ un conjunto de a -colores distintos, sean estos, $i_1, i_2, \dots, i_b, i_{b+1}, \dots, i_a$. Se obtiene un conjunto de a^2 -colores diferentes

$$\tilde{A} = \{1_1, 1_2, \dots, 1_b, 1_{b+1}, \dots, 1_a, 2_1, 2_2, \dots, 2_b, 2_{b+1}, \dots, 2_a, \dots, a_1, a_2, \dots, a_b, a_{b+1}, a_a\}.$$

Considérese $\tilde{B} = \{\bar{2}_1, \dots, \bar{2}_{b^2}, \bar{3}_1, \dots, \bar{3}_{b^2}, \dots, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{b^2}\}$ un conjunto de $(r-1)b^2$ -colores diferentes con $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset$.

Defínase $\tilde{f} : V(\tilde{\mu}(G^r)) \rightarrow \{B \mid B \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B} \text{ y } |B| = a \cdot b\}$ como

$$\tilde{f}(w) = \{1_1, \dots, 1_b, 2_1, \dots, 2_b, \dots, a_1, \dots, a_b\};$$

$$\tilde{f}((v, 1)) = \{v_1^1, \dots, v_a^1, v_1^2, \dots, v_a^2, \dots, v_1^b, \dots, v_a^b\};$$

$$\tilde{f}((v, \bar{j})) = \{v_{b+1}^1, \dots, v_a^1, v_{b+1}^2, \dots, v_a^2, \dots, v_{b+1}^b, \dots, v_a^b, \bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{b^2}\};$$

para cada $v \in V(G^r)$, $2 \leq \bar{j} \leq r$ con $f(v) = \{v^1, \dots, v^b\}$.

Observación 4.2: La función \tilde{f} es una $(a^2 + (r-1)b^2, a \cdot b)$ -coloración de $\tilde{\mu}(G^r)$.

Vamos a demostrar que esta $(a^2 + (r-1)b^2, a \cdot b)$ -coloración es una $(a^2 + (r-1)b^2, a \cdot b)$ -coloración fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$. Supóngase que existe una aristas e de $\tilde{\mu}(G^r)$ que no es heterocromática.

1. Si $e \in E_1$, entonces $e = \{(u_1, 1), \dots, (u_r, 1)\}$ donde $\pi_1(e) \in E(G^r)$, ya que e no es heterocromática, existen al menos dos vértices diferentes $(u_i, 1), (u_j, 1) \in e$ tal que $\tilde{f}((u_i, 1)) \cap \tilde{f}((u_j, 1)) \neq \emptyset$ por la definición de \tilde{f} se sigue que $f(u_i) \cap f(u_j) \neq \emptyset$ contradiciendo el hecho que f es una (a, b) -coloración fuerte de G^r .
2. Si $e \in E_2$, entonces $e = \{(u_1, t_1), \dots, (u_r, t_r)\}$ con $\pi_1(e) \in E(G^r)$ y $t_i \neq t_j$ para cada $i \neq j$, debido a que e no es heterocromática, existen al menos dos vértices distintos $(u, t), (v, s) \in e$ tal que $\tilde{f}((u, t)) \cap \tilde{f}((v, s)) \neq \emptyset$. Si $t, s \neq 1$, entonces

$$\{u_{b+1}^1, \dots, u_a^1, \dots, u_{b+1}^b, \dots, u_a^b, t_1, \dots, t_{b^2}\} \cap \{v_{b+1}^1, \dots, v_a^1, \dots, u_{b+1}^b, \dots, v_a^b, s_1, \dots, s_{b^2}\} \neq \emptyset$$

como $t \neq s$, entonces $\{t_1, \dots, t_{b^2}\} \cap \{s_1, \dots, s_{b^2}\} = \emptyset$, entonces $f(u) \cap f(v) \neq \emptyset$ lo que contradice que f sea una (a, b) -coloración fuerte de G^r . Ahora, sin pérdida de generalidad supongamos que $t = 1$, entonces

$$\{u_1^1, \dots, u_a^1, \dots, u_1^b, \dots, u_a^b\} \cap \{v_{b+1}^1, \dots, v_a^1, \dots, u_{b+1}^b, \dots, v_a^b, s_1, \dots, s_{b^2}\} \neq \emptyset,$$

entonces $f(u) \cap f(v) \neq \emptyset$ que contradice que f sea una (a, b) -coloración fuerte de G^r .

3. Si $e \in E_3$, entonces $e = \{(u_2, t_2), \dots, (u_r, t_r), w\}$ donde $|\pi_1(e)| = r - 1$, $\pi_1(e) \subset e \in E(G^r)$ y $t_i \neq t_j \in \{2, \dots, r\}$. Por la definición de \tilde{f} se sigue que e es heterocromática.
4. Si $e \in E_4$, entonces $e = \{(u, 2), \dots, (u, r), w\}$ donde $\deg(u) = 0$, por la definición de \tilde{f} se tiene que e es heterocromática.

Por lo tanto,

$$\chi_b^s(\tilde{\mu}(G^r)) \leq \chi_f^s(G^r) + \frac{r-1}{\chi_f^s(G^r)}.$$

El siguiente paso será dar un clan fraccional \tilde{g} de $\tilde{\mu}(G^r)$ con peso $\frac{a}{b} + \frac{(r-1)b^2}{a \cdot b}$.

Sea $g : V(G^r) \rightarrow [0, 1]$ un clan fraccional fuerte de G^r , tal que

$$\sum_{u \in V(G^r)} g(u) = \omega_f^s(G^r).$$

Definimos una función $g' : V(\tilde{\mu}(G^r)) \rightarrow [0, 1]$ como sigue:

$$\begin{aligned} g'(w) &= \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}; \\ g'((u, 1)) &= \left(1 - \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}\right)g(u); \\ g'((u, j)) &= \frac{1}{\omega_f^s(G^r)}g(u) \quad \text{para } 2 < j \leq r. \end{aligned}$$

Ahora mostraremos que g' es un clan fraccional fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$. Por el Lema 4.4, se tienen que probar tres casos para los conjuntos independientes fuertes de $\tilde{\mu}(G^r)$

Caso 1) Sea $I_1 \in \mathcal{A} = \{I \times \{1, \dots, r\} \mid I \in \mathcal{I}^s(G^r)\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in I_1} g'(v) &= \sum_{(u,1) \in I \times \{1\}} g'((u, 1)) + \sum_{(u,j) \in I \times \{2, \dots, r\}} g'((u, j)) \\ &= \sum_{u \in I} \left(1 - \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}\right)g(u) + (r-1) \sum_{u \in I} \frac{1}{\omega_f^s(G^r)}g(u) \\ &= \left(1 - \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}\right) \sum_{u \in I} g(u) + (r-1) \frac{1}{\omega_f^s(G^r)} \sum_{u \in I} g(u) \\ &\leq \left(1 - \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}\right) + \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Caso 2) Sea $I_1 \in \mathcal{B} = \{I \times \{1\} \cup \{w\} \mid I \in \mathcal{I}^s(G^r)\}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in I_1} g'(v) &= \sum_{(u,1) \in I \times \{1\}} g'((u,1)) + g'(w) \\
&= \sum_{u \in I} \left(1 - \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}\right) g(u) + \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)} \\
&= \left(1 - \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}\right) \sum_{u \in I} g(u) + \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)} \\
&\leq \left(1 - \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}\right) + \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Caso 3) Sea $I_1 \in \mathcal{C} = \{V(G^r) \times \{t_i\} \cup \mid 2 \leq t_i \leq r\}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in I_1} g'(v) &= \sum_{(u,t_i) \in V(G^r) \times \{t_i\}} g'((u,1)) \\
&= \left(\frac{1}{\omega_f^s(G^r)}\right) \sum_{u \in V(G^r)} g(u) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto g' es un clan fraccional fuerte de $\tilde{\mu}(G^r)$ con peso

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V(\tilde{\mu}(G^r))} g'(v) &= \sum_{(u,j) \in V(G^r) \times \{1, \dots, r\}} g'((u,j)) + g'(w) \\
&= \sum_{(u,1) \in V(G^r) \times \{1\}} g'((u,1)) + \sum_{(u,j) \in V(G^r) \times \{2, \dots, r\}} g'((u,j)) + g'(w) \\
&= \sum_{u \in V(G^r) \times \{1\}} \left(1 - \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}\right) g(u) + (r-1) \sum_{u \in V(G^r)} \frac{1}{\omega_f^s(G^r)} g(u) + g'(w) \\
&= \left(1 - \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}\right) \sum_{u \in V(G^r)} g(u) + (r-1) \frac{1}{\omega_f^s(G^r)} \sum_{u \in V(G^r)} g(u) + g'(w) \\
&= \left(1 - \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}\right) \omega_f^s(G^r) + (r-1) \frac{1}{\omega_f^s(G^r)} \omega_f^s(G^r) + \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)} \\
&= \omega_f^s(G^r) + \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}.
\end{aligned}$$

Entonces,

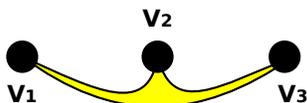
$$\chi_f^s(\tilde{\mu}(G^r)) = \omega_f^s(\tilde{\mu}(G^r)) \geq \omega_f^s(G^r) + \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)}.$$

Por lo tanto,

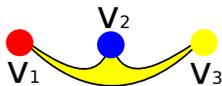
$$\chi_f^s(G^r) + \frac{r-1}{\chi_f^s(G^r)} = \omega_f^s(G^r) + \frac{r-1}{\omega_f^s(G^r)} \leq \omega_f^s(\tilde{\mu}(G^r)) = \chi_f^s(\tilde{\mu}(G^r)) \leq \chi_f^s(G^r) + \frac{r-1}{\chi_f^s(G^r)}.$$

■

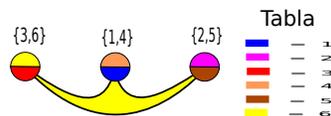
Ejemplo 4.6. Consideremos la 3-hipergráfica del Ejemplo 4.5 donde $V(K_3^3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E(K_3^3) = \{\{v_1, v_2, v_3\}\}$,



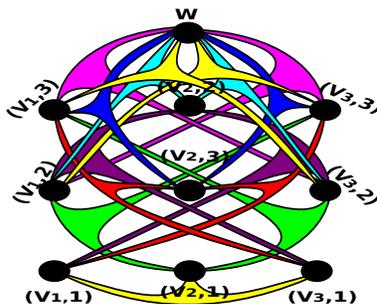
entonces $\chi^s(K_3^3) = 3$



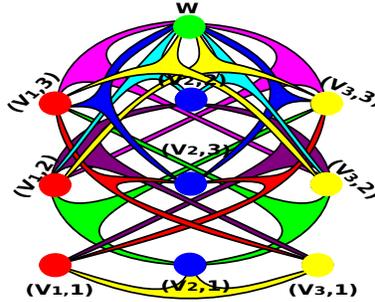
y $\chi_f^s(K_3^3) = 3$



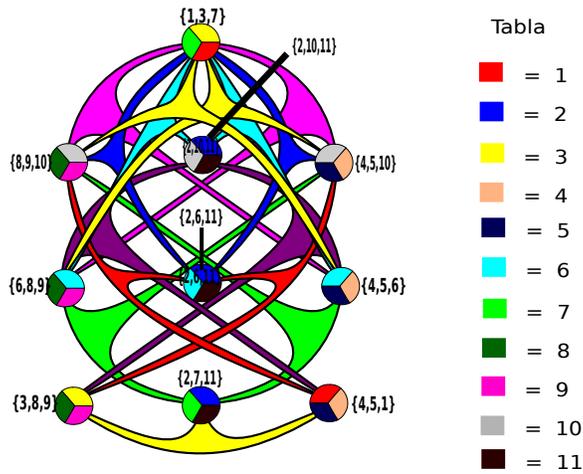
Además se tiene que $\tilde{\mu}(K_3^3)$ es



con $\chi^s(\tilde{\mu}(K_3^3)) = 4$



y $\chi_f^s(\tilde{\mu}(K_3^3)) = \frac{11}{3}$.



A continuación consideramos la gráfica prima $G'(G^r)$ de una r -hipergráfica G^r .

Lema 4.6. Sea $\mu(G'(G^r))$ la gráfica asociada a $G'(G^r)$ por la construcción de Mycielski. Entonces

- 1) $\chi^s(\tilde{\mu}(G^r)) = \chi(\mu(G'(G^r)))$
- 2) $\chi_f^s(\tilde{\mu}(G^r)) = \chi_f(\mu(G'(G^r))) + \frac{r-2}{\chi_f(G'(G^r))}$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Por el Lema 3.1 y los Teoremas (4.1, 4.5) se tiene que

$$\chi^s(\tilde{\mu}(G^r)) = \chi^s(G^r) + 1 = \chi(G'(G^r)) + 1 = \chi(\mu(G'(G^r))).$$

2. Por el Lema 3.1 y los Teoremas (4.1, 4.5) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \chi_f^s(\tilde{\mu}(G^r)) &= \chi_f^s(G^r) + \frac{r-1}{\chi_f^s(G^r)} \\
 &= \chi_f(G'(G^r)) + \frac{r-1}{\chi_f(G'(G^r))} \\
 &= \chi_f(G'(G^r)) + \frac{1}{\chi_f(G'(G^r))} + \frac{r-2}{\chi_f(G'(G^r))} \\
 &= \chi_f(\mu(G'(G^r))) + \frac{r-2}{\chi_f(G'(G^r))}.
 \end{aligned}$$

■

Sea G_r la r -hipergráfica completa con r vértices, K_r^r , para $r \geq 3$. Definimos recursivamente $G_n = \mu^{n-1}(G^r)$ para $n \geq r$ y $n \in \mathbb{Z}$.

El Teorema 4.3 muestra que $\omega(G_n) = \omega(K_r^r) = r$ y que el número cromático débil de G_n , $\chi(G_n)$, es $n+1$ (este resultado fué conocido por Mycielski para gráficas en 1955 [9]). El Teorema también muestra que el número cromático fraccional débil de G_n , $\chi_f(G_n)$, es igual a a_n donde $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{r-1}$. Esta sucesión tiende a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$.

El Teorema 4.5 muestra que $\omega(G_n) = \omega(K_r^r) = r$, que el número cromático fuerte de G_n , $\chi^s(G_n)$, es $n+r-1$ y que el número cromático fraccional fuerte de G_n , $\chi_f^s(G_n)$, es igual a a_n donde $a_1 = r$, $a_{n+1} = a_n + \frac{r-1}{a_n}$. Esta sucesión también tiende a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$.

Considerando la construcción recursiva de G_n obtenemos ls siguientes corolarios.

Corolario 4.7.

$$\chi(G_n) - \chi_f(G_n) \rightarrow \infty,$$

$$\chi_f(G_n) - \omega(G_n) \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\chi(G_n)}{\chi_f(G_n)} \rightarrow \infty,$$

y

$$\frac{\chi_f(G_n)}{\omega(G_n)} \rightarrow \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que

$$\chi(G_n) - \chi_f(G_n) = \frac{3r-2-r^2}{r-1} + \frac{n(r-2)}{r-1},$$

esta sucesión tiende a infinito cuando $n \rightarrow \infty$ ya que r es fijo.

También tenemos que

$$\chi_f(G_n) - \omega(G_n) = \frac{n - r(r-1)}{r-1},$$

tiende a infinito cuando $n \rightarrow \infty$ por ser r fijo.

Además $\chi(G_n) - \chi_f(G_n) \rightarrow \infty$, ya que $\chi(G_n)$ crece más rápido que $\chi_f(G_n)$ y por lo tanto,

$$\frac{\chi(G_n)}{\chi_f(G_n)} \rightarrow \infty$$

Por un razonamiento análogo se tiene que $\frac{\chi_f(G_n)}{\omega(G_n)} \rightarrow \infty$. ■

Corolario 4.8.

$$\chi^s(G_n) - \chi_f^s(G_n) \rightarrow \infty,$$

$$\chi_f^s(G_n) - \omega(G_n) \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\chi^s(G_n)}{\chi_f^s(G_n)} \rightarrow \infty,$$

y

$$\frac{\chi_f^s(G_n)}{\omega(G_n)} \rightarrow \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Análogo a la demostración del Corolario previo. ■

r –hipergráficas con número cromático acotado por una función de su número de clan

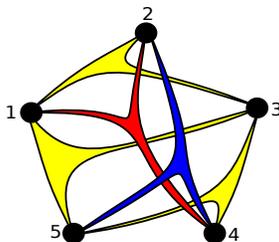
Sabemos que el número cromático de una gráfica puede ser k sin que esta contenga subgráficas completas de tamaño k . Hecho que se generalizó para r –hipergráficas en el Capítulo 4. Ahora vamos a describir una familia de r –hipergráficas con número cromático débil acotado superiormente por una función de su número de clan. Daremos algunas definiciones y resultados que utilizaremos para dar cotas del número de perforaciones (piercing number) de ciertas familias de r –planos asociados a familias de r –hipergráficas.

Definición 5.1. Una r –hipergráfica G^r se llama *libre de arista–vértice (edge-vertex free)* si dada $e \in E(G^r)$ y $v \in V(G^r)$ con $v \notin e$, al menos dos de los subconjuntos de tamaño r de $e \cup \{v\}$ pertenece a $E(G^r)$.

Ejemplo 5.1. Considérese la 3–hipergráfica G^3 , donde

$$V(G^3) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{y} \quad E(G^3) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$$

como se muestra en la siguiente figura



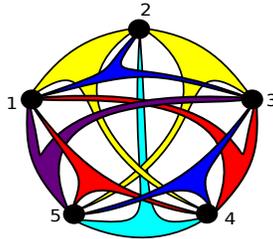
Se tiene que G^3 es libre de arista–vértice.

Definición 5.2. De manera similar, una r –hipergráfica G^r se llama *libre de arista–vértice fuerte (strong edge-vertex free)* si para cada $e \in E(G^r)$ y $v \in V(G^r)$ con $v \notin e$, todos excepto posiblemente uno de los subconjuntos de tamaño r de $e \cup \{v\}$ pertenece a $E(G^r)$.

Ejemplo 5.2. *Considérese la 3-hipergráfica H^3 , donde $V(H^3) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y*

$$E(H^3) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$$

como se muestra en la siguiente figura



Se tiene que H^3 es libre de arista-vértice fuerte.

Por otro lado, si consideramos la 3-hipergráfica del Ejemplo 5.4 esta no es libre de arista-vértice fuerte ya que si consideramos la arista $e = \{1, 2, 3\}$ y el vértice $u = 4$ de G^3 , de los 4 subconjuntos de 3-vértices del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ solamente 2 de estos subconjuntos son aristas de G^3 .

Teorema 5.1. *Sea G^r una r -hipergráfica libre de arista-vértice fuerte con $r > 1$. Entonces*

$$\chi(G^r) \leq \binom{\omega(G^r)}{r-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un subconjunto W de $r+1$ vértices de G^r . Como G^r es libre de arista-vértice fuerte, entonces, tenemos que si dos subconjuntos diferentes de tamaño r de W no pertenecen a $E(G^r)$, entonces W es un subconjunto independiente de $V(G^r)$, es decir, cada subconjunto de tamaño r de W no pertenece a $E(G^r)$. Esto implica inmediatamente que si U y V son subconjuntos independientes de $V(G^r)$ y $|U \cap V| \geq r-1$, entonces $U \cup V$ es un subconjunto independiente de $V(G^r)$. En particular, tenemos que para cualesquiera subconjuntos $S \subset V(G^r)$ de tamaño $r-1$, hay un único subconjunto independiente maximal $I(S)$ que contiene a S .

Sea $n = \omega(G^r)$ y sean $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V(G^r)$ los vértices de la r -subhipergráfica completa de G^r . Es decir, cualquier subconjunto de tamaño r de $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una arista de G^r . Para cualquier subconjunto $S \subset \{v_1, \dots, v_n\}$ de tamaño $r-1$, consideremos el conjunto independiente $I(S)$. Primero notemos que la colección $\{I(S) | S \subset \{v_1, \dots, v_n\} \text{ y } |S| = r-1\}$ es una cubierta de $V(G^r)$, de conjuntos independientes. Esto es así, porque si $v_0 \in V(G^r) - \{v_1, \dots, v_n\}$, entonces, por la maximalidad de $\omega(G^r)$, $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ no son los vértices de una subhipergráfica completa de G^r , por lo que existe un subconjunto $S_0 \subset \{v_1, \dots, v_n\}$ con $|S_0| = r-1$ tal que $S_0 \cup \{v_0\}$ no es arista de G^r . Por lo tanto, $v_0 \in I(S_0)$. La prueba del Teorema concluye observando que la colección $\{I(S) | S \subset \{v_1, \dots, v_n\} \text{ y } |S| = r-1\}$ tiene $\binom{n}{r-1}$ elementos. ■

Conjetura: Sea G^r una r -hipergráfica libre de arista-vértice, $r > 1$. Entonces el número cromático $\chi(G^r)$ es acotado por una función del número de clan $\omega(G^r)$.

Conjetura: Sea G^r una r -hipergráfica libre de arista-vértice fuerte, $r > 1$. Entonces

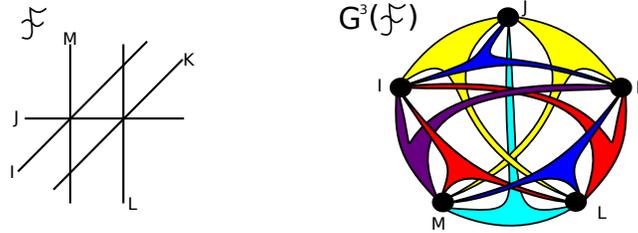
$$\chi(G^r) \leq \omega(G^r).$$

Definición 5.3. Sea \mathcal{F} una familia de intervalos en \mathbb{R}^d . La 3-hipergráfica $G^3(\mathcal{F})$ asociada con \mathcal{F} tiene como conjunto de vértices los elementos de \mathcal{F} , y tres intervalos I, J, K de \mathcal{F} dan lugar a una arista de $G^3(\mathcal{F})$ si y sólo si $I \cap J \cap K = \emptyset$, es decir, $V(G^3(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ y $E(G^3(\mathcal{F})) = \{\{I, J, K\} \mid \{I, J, K\} \subseteq V(G^3(\mathcal{F})) \text{ y } I \cap J \cap K = \emptyset\}$.

Ejemplo 5.3. Dada una familia $\mathcal{F} = \{I, J, K, L, M\}$ de intervalos en \mathbb{R}^d , la 3-hipergráfica asociada con \mathcal{F} es $G^3(\mathcal{F}) = (V(G^3(\mathcal{F})), E(G^3(\mathcal{F})))$, donde $V(G^3(\mathcal{F})) = \{I, J, K, L, M\}$ y

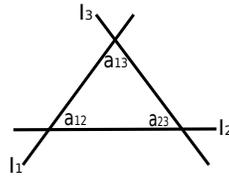
$$E(G^3(\mathcal{F})) = \{\{J, L, M\}, \{J, K, M\}, \{I, J, L\}, \{I, K, L\}, \{I, J, K\}, \{I, K, M\}, \{I, L, M\}, \{K, L, M\}\}$$

como se muestra en la siguiente figura



Lema 5.2. Para cualquier familia \mathcal{F} de intervalos en \mathbb{R}^d la 3-hipergráfica $G^3(\mathcal{F})$ es libre de arista-vértice.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{I_1, I_2, I_3\} \in E(G^3(\mathcal{F}))$, es decir, $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset$. Supóngase que existe $I_0 \in \mathcal{F}$ con $I_0 \notin \{I_1, I_2, I_3\}$ y cada una de las tripletas $\{I_0, I_1, I_2\}$, $\{I_0, I_1, I_3\}$ y $\{I_0, I_2, I_3\}$ no son aristas de $G^3(\mathcal{F})$, esto es, $I_0 \cap I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, $I_0 \cap I_1 \cap I_3 \neq \emptyset$ y $I_0 \cap I_2 \cap I_3 \neq \emptyset$. Esto implica que existen tres puntos distintos $a_{12} \in I_0 \cap I_1 \cap I_2$, $a_{13} \in I_0 \cap I_1 \cap I_3$ y $a_{23} \in I_0 \cap I_2 \cap I_3$, entonces estos puntos pertenecen a I_0 , es decir, son colineales, lo cual produce una contradicción ya que si $a_{12} \in I_1 \cap I_2$, $a_{13} \in I_1 \cap I_3$, $a_{23} \in I_2 \cap I_3$ y como $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset$ los tres puntos no pueden ser colineales como se muestra en la figura



■

Uno de los resultados clásicos de la Geometría Discreta es el Teorema de Helly, que dice lo siguiente: “dada \mathcal{F} una familia finita de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d , si cada $d + 1$ elementos de \mathcal{F} se intersecan, entonces todos los elementos de \mathcal{F} se intersecan”. Este resultado también es cierto para familias infinitas, siempre y cuando los conjuntos convexos sean acotados (sin embargo en nuestro trabajo consideramos sólo familias finitas de conjuntos convexos).

En particular, este Teorema de Helly diría que en una familia \mathcal{F} de conjuntos convexos en el plano, si cada 3 elementos de \mathcal{F} se intersecan, entonces por el Teorema de Helly se sigue que la intersección de todos los elementos de \mathcal{F} es no vacía.

Definición 5.4. Una familia de conjuntos se llama n -perforable si existe un conjunto de n puntos de tal manera que cada elemento de la familia contiene al menos uno de los puntos. El mínimo número n para el cual la familia es n -perforable se llama el *número de perforaciones* y se denota por $\pi(\mathcal{F})$.

En el caso de una familia de conjuntos convexos que cumplen que cada $d + 1$ -conjuntos de ellos se intersecan, por Helly esto querrá decir que $\pi(\mathcal{F}) = 1$, es decir, que es 1-perforable.

Definición 5.5. Una familia de conjuntos satisface la (p, q) -propiedad si para cada p elementos de la familia, q de ellos tienen intersección no vacía o son 1-perforables.

Por ejemplo si ocurre que para cada 4 elementos de \mathcal{F} , existen 3 que se intersecan, decimos que \mathcal{F} satisface la propiedad $(4, 3)$. El número de perforaciones y (p, q) -propiedad son ampliamente estudiados en la Geometría Discreta y hay muchos problemas interesantes que involucran a estos dos parámetros, para más referencias, véase [12, 7].

Considérese la siguiente pregunta

¿Existirá una constante $\pi(\mathcal{F})$ tal que para cualquier familia \mathcal{F} de conjuntos convexos en \mathbb{R}^2 que satisface la propiedad $(4, 3)$ hay a lo más $\pi(\mathcal{F})$ puntos tal que cada elemento de \mathcal{F} contiene al menos uno de ellos?

Este es el primer caso no trivial y más simple del problema conocido como el problema de perforación (piercing number), el cual consiste en encontrar la constante $\pi(\mathcal{F})$ para cualquier familia \mathcal{F} de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d que cumpla la propiedad (p, q) . Este problema fué planteado por Hadwiger y Debrunner, y permaneció abierto por mucho tiempo, hasta que D. J. Kleitman, A. Gyárfás y G. Tóth dieron el siguiente resultado en 2001.

Teorema 5.3. Sea \mathcal{F} una familia finita de conjuntos convexos en \mathbb{R}^2 que satisface la propiedad (4,3), entonces

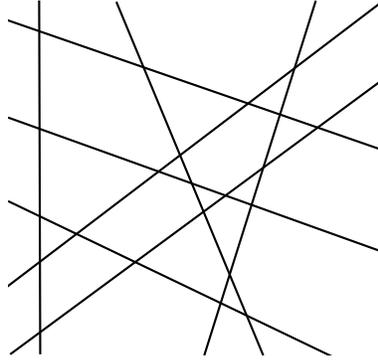
$$\pi(\mathcal{F}) \leq 13.$$

Sin embargo, se conjetura que el resultado anterior se puede mejorar a:

$$\pi(\mathcal{F}) \leq 3.$$

Una familia \mathcal{F} de planos afines de dimensión r en \mathbb{R}^d , $r < d$, se dice que está en *posición general*, si dados tres elementos de \mathcal{F} , la dimensión de su intersección es menor que $r - 1$. En particular, si la familia \mathcal{F} de planos afines de dimensión r en \mathbb{R}^d está en posición general, entonces la intersección de n elementos de \mathcal{F} tiene dimensión menor que $r - n + 2$.

Ejemplo 5.4. Sea \mathcal{F} la familia de líneas afines en \mathbb{R}^2 como se ve en la siguiente figura. Esta



familia esta en posición general.

Ahora, considérese la $(r+2)$ -hipergráfica $G^{r+2}(\mathcal{F})$ asociada a la familia \mathcal{F} de planos afines de dimensión r en \mathbb{R}^d donde, $V(G^{r+2}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ y

$$E(G^{r+2}(\mathcal{F})) = \{ \{ \Pi_1, \dots, \Pi_{r+2} \} \mid \{ \Pi_1, \dots, \Pi_{r+2} \} \subseteq V(G^{r+2}(\mathcal{F})) \text{ y } \bigcap_{i=1}^{r+2} \Pi_i = \emptyset \}.$$

El siguiente Lema muestra que \mathcal{F} induce una $r+2$ -hipergráfica libre arista-vértice fuerte y relaciona el número de perforaciones con el número cromático de $G^{r+2}(\mathcal{F})$.

Lema 5.4. Para cualquier familia \mathcal{F} de planos afines de dimensión r en \mathbb{R}^d en posición general, la $(r+2)$ -hipergráfica $G^{r+2}(\mathcal{F})$ es libre arista-vértice fuerte. Además, si $d = r+1$, el número cromático de $G^{r+2}(\mathcal{F})$ es el número de perforaciones de \mathcal{F} .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{ \Pi_1, \dots, \Pi_{r+2} \} \subset \mathcal{F}$ tal que $\{ \Pi_1, \dots, \Pi_{r+2} \}$ no se intersecan, esto es, $\{ \Pi_1, \dots, \Pi_{r+2} \} \in E(G^{r+2}(\mathcal{F}))$. Sea $\Pi_0 \in \mathcal{F}$ con $\Pi_0 \notin \{ \Pi_1, \dots, \Pi_{r+2} \}$. Supóngase que existen dos subconjuntos distintos $S_1, S_2 \subset \{ \Pi_1, \dots, \Pi_{r+2} \}$, cada uno de tamaño $r+1$ tal que $S_i \cup \{ \Pi_0 \}$ no es una arista de $G^{r+2}(\mathcal{F})$, $i = 1, 2$. Vamos a mostrar que esto no es posible, entonces la $(r+2)$ -hipergráfica es libre de arista-vértice fuerte.

Sea $S_1 = \{\Pi_{i_1}, \dots, \Pi_{i_r}, \Pi_{i_{r+1}}\}$ y sea $S_2 = \{\Pi_{i_1}, \dots, \Pi_{i_r}, \Pi_{i_{r+2}}\}$ existe un punto $p_1 \in (\Pi_0 \cap (\bigcap_{l=i_1}^{i_r} \Pi_l) \cap \Pi_{i_{r+1}})$ y un punto $p_2 \in (\Pi_0 \cap (\bigcap_{l=i_1}^{i_r} \Pi_l) \cap \Pi_{i_{r+2}})$.

Claramente $p_1 \neq p_2$, de lo contrario $\{\Pi_1, \dots, \Pi_{r+2}\}$ se intersecan. Entonces la dimensión de la intersección de los planos afines $\{\Pi_0, \Pi_{i_1}, \dots, \Pi_{i_r}\}$ es mayor que uno, lo que contradice el hecho de que la familia \mathcal{F} se encuentre en posición general.

Finalmente, si $d = r + 1$, observamos que el número cromático de $G^{r+2}(\mathcal{F})$ es el número de perforaciones de \mathcal{F} , ya que si $A \subseteq \mathcal{F}$ se tiene que $\bigcap_{I \in A} I \neq \emptyset$ si y sólo si A es un conjunto independiente de vértices de la $(r + 2)$ -hipergráfica $G^{r+2}(\mathcal{F})$. ■

Por supuesto, no todas las $(r + 2)$ -hipergráficas libres de arista-vértice fuertes provienen de una familia de planos afines de dimensión r en \mathbb{R}^d .

El Teorema de Helly sobre la intersección de conjuntos convexos se refiere a familias 1-perforables que cumplen la $(n, n + 1)$ -propiedad, por lo tanto, es natural preguntarse cuál es el número de perforaciones de las familias que satisfacen la (p, q) -propiedad. El siguiente Corolario trata esta pregunta para familias de planos afines de dimensión r en \mathbb{R}^{r+1} .

Corolario 5.5. *Para cualquier familia \mathcal{F} de planos afines de dimensión r en \mathbb{R}^{r+1} en posición general con la propiedad $(p + 1, r + 2)$, el número de perforaciones $\pi(\mathcal{F})$ satisface la siguiente desigualdad*

$$\pi(\mathcal{F}) \leq \binom{p}{r + 1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Notar que si \mathcal{F} satisface la $(p + 1, r + 2)$ -propiedad, entonces, para cada $(p + 1)$ -elementos de \mathcal{F} podemos elegir $r + 2$ de ellos, los cuales se intersecan. Esto implica inmediatamente que $\omega(G^{r+2}(\mathcal{F})) \leq p$. Supóngase que $\omega(G^{r+2}(\mathcal{F})) > p$, entonces $G^{r+2}(\mathcal{F})$ contiene una $(r + 2)$ -subhipergráfica completa de tamaño $> p$ pero $\{I_1, \dots, I_{r+2}\} \in E(G^{r+2}(\mathcal{F}))$ si y sólo si $I_1 \cap \dots \cap I_{r+2} = \emptyset$ como \mathcal{F} satisface la $(p + 1, r + 2)$ -propiedad no existe ninguna $(r + 2)$ -subhipergráfica completa de tamaño $p + 1$.

Por el Lema 5.4, $G^{r+2}(\mathcal{F})$ es una $(r + 2)$ -hipergráfica libre de arista-vértice fuerte y como $d = r + 1$ se obtiene $\pi(\mathcal{F}) = \chi(G^{r+2}(\mathcal{F}))$. Entonces, por el Teorema 5.1, $\pi(\mathcal{F}) \leq \binom{p}{r+1}$. ■

Concluimos este trabajo con la propuesta de las siguiente conjetura

Conjetura: Para cualquier familia \mathcal{F} de planos afines de dimensión r en \mathbb{R}^d en posición general con la propiedad $(p + 1, r + 2)$, el número de perforación $\pi(\mathcal{F})$ es menor o igual que p .

Bibliografía

- [1] A. Gyárfás, Problems from the world surrounding perfect graphs. *Zastosow. Mat.* 19, 413–431 (1987).
- [2] B. Randerath and I. Schiermeyer, Vertex Colouring and Forbidden Subgraphs: A Survey, *Graphs and Combinatorics* (2004) 20:1–40.
- [3] C. Berge, *Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets*, North-Holland Mathematical Library. Vol. 45 (1989).
- [4] Demitry Kozlov, *Combinatorial Algebraic Topology*, Springer Verlag, 2008.
- [5] Edward R. Scheinerman and Daniel H. Ullman, *Fractional Graph Theory A Rational Approach to the Theory of Graphs*, John Wiley and Sons, 2008.
- [6] C. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics 207, Springer Verlag, 2001.
- [7] H. Hadwiger and H. Debrunner, Kombinatorische Geometrie in der Ebene, *Monographies de l'Enseignement Mathématique*, No. 2, Geneva, 1960.
- [8] H. Kierstead and S. Penrice, Radius two trees specify v -bounded classes. *J. Graph Theory* 18, 119–129 (1994).
- [9] J. Mycielski, Sur le coloriage des graphes, *Colloq. Math.* 3: (1955) 161–162.
- [10] J. Nešetřil and V. Rödl, A short proof of the existence of highly chromatic hypergraphs without short cycles. *J. Combin. Theory Ser. B* 27 (1979) 225–227.
- [11] K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable, *Bull. Amer. Math. Soc.* 82: (1976) 711–712.
- [12] L. Danzer, B. Grünbaum and V. Klee, Helly's theorem and its relatives, *Proc. Symposia in Pure Math.* Vol. VII (Convexity) (1963), 101–180.
- [13] L. Lovás, On chromatic number of finite set-systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 19, (1968) 59–67.
- [14] M. Chudnovsky and P. Seymour, Claw-free Graphs VI. Coloring claw-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Ser B*, Vol. 100 (2010), 560–572

- [15] M. Larsen, J. Propp and D. H. Ullman, The fractional chromatic number of Mycielski graphs, *J. Graph Theory* 19 (1995). 411–416.
- [16] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, A new proof of the four color theorem, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 2: (1996) 17–25.
- [17] P. Erdős, Graph theory and probability, *Canad. J. Math.* 11 (1959), 34–38.
- [18] P. Erdős and A. Hajnal, On chromatic number of graphs and set systems, *Acta Math. Acad. Sei. Hungar.* 17 (1966), 61–69.

Índice alfabético

- (a, b) -coloración propia de G , 20
- (a, b) -coloración fuerte, 34
- (p, q) -propiedad, 74
- b -número cromático , 21
- b -número cromático débil, 34
- b -número cromático fuerte, 35
- k -coloración débil, 29
- k -coloración de G^r , 29, 31
- k -coloración fuerte, 31
- n -perforable, 74
- r -hipergráfica k -regular, 2
- r -hipergráfica, 1
- r -hipergráfica complemento, 2
- r -hipergráfica completa con n -vértices, 2
- r -hipergráfica de Kneser débil, 10
- r -hipergráfica de Kneser fuerte, 11
- r -hipergráfica vértice-transitiva, 6
- r -subhipergráfica, 2
- r -subhipergráfica inducida , 2

- aristas adyacentes, 1
- automorfismo de r -hipergráficas, 5

- clan de una r -hipergráfica, 2
- clan fraccional débil, 41
- clan fraccional de G , 24
- clan fraccional fuerte, 42
- clase cromática, 18
- clase cromática débil, 29
- clase cromática fuerte, 31
- coloración fraccional débil, 37
- coloración fraccional fuerte, 38
- coloración de G , 17
- coloración propia, 17
- conjunto independiente de G , 7
- conjunto independiente débil, 7

- conjunto independiente fuerte, 7
- conjunto potencia, 1
- cubierta débil de G^r , 8
- cubierta de G^r , 8
- cubierta fuerte de G^r , 8

- función subaditiva , 12

- gráfica de Kneser , 10
- gráfica primal, 4
- grado de un vértice, 1

- hipergráfica r -uniforme, 1
- hipergráfica, 1
- homomorfismo de r -hipergráficas, 4

- isomorfias, 5
- isomorfismo de r -hipergráficas, 5

- libre de arista-vértice (edge-vertex free), 71
- libre de arista-vértice (strong edge-vertex free), 71

- matriz de independencia, 9
- matriz de independencia débil, 9
- matriz de independencia fuerte, 9

- número cromático de G , 18
- número cromático fraccional de G , 21
- número cromático débil, 29
- número de independencia débil, 7
- número cromático fraccional débil, 34
- número cromático fraccional fuerte, 35
- número cromático fuerte, 31
- número de clan, 2
- número de clan fraccional débil, 41
- número de clan fraccional fuerte, 42
- número de independencia fuerte, 7

número de perforaciones, 74

orden de una r -hipergráfica, 1

peso de un clan fraccional, 24

peso de un clan fraccional débil, 41

peso de un clan fraccional fuerte, 42

peso de una coloración fraccional débil, 38

peso de una coloración fraccional fuerte, 38

posición general, 75

problema dual, 13

problema primal, 13

puntos factibles, 12

tamaño de una r -hipergráfica, 1

vértice aislado, 1

vértice incidente, 1

vértices adyacentes, 1