UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COMÓNADAS Y AUTÓMATAS CELULARES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

DIEGO FERNÁNDEZ SUMANO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FAVIO EZEQUIEL MIRANDA PEREA

2012

Hoja de datos del jurado

1. Nombre del alumno
   Fernández
   Sumano
   Diego
   53 38 81 98
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   408001467

2. Datos del tutor
   Dr.
   Favio Ezequiel
   Miranda
   Perea

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejía

4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Francisco
   Hernández
   Quiroz

5. Datos del sinodal 3
   Dra.
   Diana
   Avella
   Alamios

6. Datos del sinodal 4
   Dra.
   Edith Corina
   Sáenz
   Valadez

Índice general

Introducción

El término autómata celular se refiere a una retícula de procesadores idénticos que computan en paralelo la información que reciben desde los procesadores cercanos. Estas máquinas abstractas suelen considerarse como un sistema dinámico discreto, distribuido espacialmente. Pero en este trabajo se tomará la versión más general, haciendo de lado la parte discreta y aprovechando la teoría de categorías para sustituir las pruebas usualmente largas de los teoremas de caracterización y reversibilidad de los autómatas celulares. Los procesadores, llamados células, usualmente se representan como los elementos de un grupo para estudiar sus propiedades. Sin embargo, para trasladar a los autómatas celulares a la teoría de categorías y probar los teoremas seleccionados, se pedirá únicamente que las células sean elementos de un monoide.

Los autómatas celulares se han utilizado para el procesamiento de imágenes [20], diseño de circuitos combinacionales [6], criptografía [21] y modelado de sistemas físicos [19], entre otros.

Por su parte, la teoría de categorías permite abstraer las construcciones de distintas ramas de las matemáticas para trabajar de manera más general, fijándose únicamente en las relaciones que tienen entre sí las estructuras, sin fijarse en sus elementos.

La idea de utilizar teoría de categorías para representar autómatas celulares surge con el trabajo de Capobianco y Uustalu [8] quienes identifican a estos autómatas con funciones dependientes de un contexto, de su vecindad. Este tipo de funciones se han analizado utilizando el concepto de *comónada,* ver [14], en analogía con el uso de *mónadas* por parte de Moggi [17] para analizar funciones independientes del contexto en el área de la programación funcional.

En el primer capítulo se presenta la definición usual de autómatas celulares. En el capítulo dos se dan las definiciones de teoría de categorías necesarias, prestando especial atención a los conceptos de funtores adjuntos y a las categorías de coKleisli y coEilenberg-Moore, derivadas del concepto de comónada. Utilizando los dos primeros capítulos, se construye la categoría de autómatas celulares y se demuestran los teoremas de Curtis-Hedlund y el principio de reversibilidad en su versión dada por Ceccherini-Silberstein y Coornaert en [11] y [10].

Existe otro tipo de autómata celular, llamado no uniforme (o no homogéneo), el cual permite que cada célula del autómata sea diferente, contrario a los autómatas celulares clásicos, los cuales tenían copias de una misma célula conectadas entre sí. En el capítulo 4 se dará la definición de un autómata celular no uniforme y como aportación original de este trabajo, se presenta cómo pasar de un autómata celular uniforme a un autómata celular no uniforme y de regreso. Idea basada en el comentario sobre la posibilidad de ver a un autómata celular clásico, como uno no uniforme que ignora la información sobre la celda en que se encuentra [8].

Capítulo 1

Autómatas Celulares

En este capítulo se presenta la aproximación inicial a los autómatas celulares y la versión más usual para trabajarlos (antes del modelo categórico).

En la sección 1.2 se dará la definición tradicional de autómata celular y más adelante, en la misma sección, utilizaremos la versión dada por Ceccherini-Silberstein y Coornaert en [10], la cual identifica a los autómatas celulares con el comportamiento global que inducen.

Se desarrollará un ejemplo de autómata celular a la par que se dan las definiciones, con el fin de esclarecerlas.

1.1. Algo de Historia

La aparición de los autómatas celulares se remonta a 1940 como un modelo de un sistema auto-reproductivo dado por Von Neumann [18]. El problema con el que trabajaba era la creación de una máquina que tuviera el poder de procesamiento del cerebro humano. Aunque no logró una máquina con las características deseadas, concluyó que una de las principales ventajas de los sistemas biológicos que le interesaban era la auto-reproducción de sus partes.

La representación actual en forma de rejilla aparece en 1950 por Stanislaw M. Ulam, con quien Von Neumann discutió su trabajo sobre autómatas en la década anterior [5].

Previo al modelo de Ulam, Von Neumann decide que el autómata que debe construir debe ser un constructor de autómatas. Para esto necesita de tres autómatas principales:

1. El autómata A, cuyo propósito es leer la información sobre un autómata X, contenida en una cadena $\phi(X)$, consumirla e ir construyendo al autómata X, a manera de una máquina de Turing que va leyendo cada carácter, pero en vez de borrar e imprimir, únicamente consume el carácter y construye un pedazo de X.

2. El autómata B debe leer y consumir la cadena $\phi(X)$ y producir dos copias de esta.

3. Finalmente el autómata C debe coordinar a los otros dos para que al recibir una cadena, esta sea procesada primero por B y luego una de las réplicas sea consumida para crear al autómata X, por A. Así termina con un autómata X y su información $\phi(X)$.

Así el autómata $(A + B + C) + \phi(A + B + C)$ sería capaz de la auto-reproducción.

Ya con el modelo de rejilla, Von Neumann construye un autómata celular capaz de realizar cómputo universal, pero éste resulta tremendamente complicado. Más tarde, en 1968, Codd [12] da un autómata con la misma capacidad, pero con reglas y vecindad más sencillas.

Los autómatas celulares se vuelven populares en 1970 a partir de la presentación del *juego de la vida* de John Horton Conway [13].

1.2. Formalización

Un ejemplo introductorio conveniente es el juego de la vida de Conway. Éste consta de una rejilla infinita de cuadrados llamada universo, en la que cada celda representa una célula que está en uno de dos estados: viva o muerta. Se define la vecindad de una celda como las ocho celdas adyacentes (las cuales tocan en al menos un punto a la celda original). La configuración es una asignación de estados a las celdas. Cada célula se encuentra en uno y sólo un estado. Cada célula recibe como información el estado de las celdas vecinas y cambia su estado mediante la siguiente regla de transición:

1. Dada una configuración c de la rejilla, si la célula g está muerta, entonces pasa a estar viva si y sólo si tiene exactamente 3 células vecinas vivas.

2. Si la célula g está viva, entonces sigue viva si tiene exactamente 2 o 3 células adyacentes vivas, de lo contrario muere por soledad (si tiene menos de 2) o por ahogamiento (si tiene más de 3).

Ejemplo. 1.2.1. *Suponiendo que se quiere determinar únicamente el estado de la celda del centro en la figura 1.1, la célula en la cuadrícula de la izquierda está en el estado 0 (muerta) y pasa al estado 1 (viva), a la derecha. Por otro lado, la célula del centro en la figura 1.2 está viva y pasa a estar muerta por ahogamiento.*

0	1	1
0	0	0
0	0	1

0	1	1
0	1	0
0	0	1

Figura 1.1: Transición Muerta a Viva

1	1	1
0	1	0
1	0	1

1	1	1
0	0	0
1	0	1

Figura 1.2: Transición Viva a Muerta

Formalmente, se considera al universo como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y la vecindad que se usará para determinar el siguiente estado de $(0,0)$ es $N = \{-1, 0, 1\}^2 \subset \mathbb{Z}^2$. El conjunto de estados, llamado alfabeto, es $\{0, 1\}$. Una configuración es una función $c : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ que asigna a cada célula del universo, un estado del alfabeto. Su restricción a N, denotada $c \restriction_N$, se llama configuración local. El conjunto de todas las configuraciones del universo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en el alfabeto $\{0, 1\}$ se denota $\{0, 1\}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ y se le llama espacio de funciones. La regla de transición que describe el cambio de estado de la célula $(0, 0)$ en el juego de la vida es una función $t : \{0, 1\}^N \to \{0, 1\}$ definida como:

$$t(c \restriction_N) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \begin{cases} \Sigma_{n \in N} c(n) = 3 \\ \text{o} \\ \Sigma_{n \in N} c(n) = 4 \text{ y } c((0,0)) = 1 \end{cases} \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nótese que se toma a $(0, 0)$ como elemento de su vecindad.

Esto se generaliza en la siguiente definición.

Definición. 1.2.2. *Dados un monoide G (el universo o rejilla), un conjunto no vacío A (el alfabeto o conjunto de estados) y una vecindad $N \subseteq G$ del neutro e del monoide. Una regla de transición es una función $t : A^N \to A$.*

Con esto se puede dar la definición tradicional de autómata celular.

Definición. 1.2.3. *Un autómata celular sobre un universo G es una terna $< A, N, t >$, donde A es un conjunto de estados, $N \subseteq G$ una vecindad del neutro de G y $t : A^N \to A$ una regla de transición.*

Para trabajar un autómata celular como una función que defina cómo cambiar el estado de todas las células del universo y no únicamente de una, se necesita una función que indique cómo aplicar la regla de transición a cada célula y su vecindad. Primero se define una función cuyo dominio expande al de la regla de transición.

Definición. 1.2.4. *Toda regla de transición induce una función $k : A^G \to A$ llamada comportamiento local definida por:*

$$k(c) = t(c \restriction_N).$$

Esto indica únicamente que para determinar el estado de la célula g es necesario fijarse sólo en un subconjunto de la rejilla.

En el juego de la vida, el comportamiento local es una función $k : \{0,1\}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \to \{0,1\}$, donde:

$$k(c) = t(c \restriction_N)$$

No es conveniente dar una regla de transición distinta para cada célula, pues se perdería la uniformidad que brinda tener al mismo autómata en todas las celdas. Entonces, para no definir una regla nueva para cada vecindad, se traslada todo el universo hasta que la vecindad de la célula a evaluar coincida con la vecindad de la celda para la cual fue definida la transición. La traslación define una nueva configuración por cada célula que se quiera evaluar, en donde la célula para la cual se define la vecindad y la transición, toman los valores de la célula a evaluar y su vecindad correspondiente.

Definición. 1.2.5. *Dada una configuración y una célula $x \in G$, una función de traslación es una función $\triangleright : A^G \times G \to A^G$ tal que*

$$\triangleright (c, x)(y) = c(x \cdot_G y)$$

La operación $\cdot_G$ del monoide, es la que permite trasladar la vecindad del neutro hasta la vecindad de cada punto x. Si el universo G fuera un grupo, la regla de transición se puede definir para cualquier elemento G, pues la existencia de inversos permite trasladar primero hasta la vecindad del neutro y después hasta la vecindad necesaria. Al no requerir la presencia de inversos para todos los elementos del monoide, es necesario que se de la regla de transición para el neutro de G.

Para cada x y c, la imagen de $\triangleright$ es una nueva configuración $c \triangleright x$ la cual asigna el estado de x en c, a la célula para la cual se definió t.

De aquí en adelante, en vez de escribir $\triangleright (c, x)$, el operador $\triangleright$ se utiliza de manera infija para fijar la atención en la configuración $c \triangleright x$ que define por cada punto x.

Ejemplo. 1.2.6. *En el juego de la vida, si (z_1, z_2) tiene el estado 1 bajo la configuración c, se tiene que:*

$$(c \triangleright (z_1, z_2))((0,0)) = c((z_1, z_2) + (0,0)) = c((z_1, z_2)) = 1$$

La siguiente proposición es importante para caracterizar a los autómatas celulares en el capítulo 3.

Proposición. 1.2.7. *La función $\triangleright$: $A^G \times G \to A^G$ es una acción derecha de G sobre A^G (ver apéndice B).*

Demostración. Sean $c \in A^G$ y $x, y \in G$. Entonces, se tiene que:

$$(c \triangleright e_G)(y) = c(e_G \cdot_G y) = c(y)$$

Por otro lado.

$$(c \triangleright (x \cdot_G y))(z) = c((x \cdot_G y) \cdot_G z))$$

Y.

$$((c \triangleright x) \triangleright y))(z)) = (c \triangleright x)(y \cdot_G z) = c(x \cdot_G (y \cdot_G z)) = c((x \cdot_G y) \cdot_G z))$$

□

Con lo anterior ya es posible definir una función que indique cómo cambia el estado de todas las células del universo G.

Definición. 1.2.8. *Dado un comportamiento local $k : A^G \to A$, un comportamiento global es una función $\kappa^\dagger : A^G \to A^G$ tal que $k^\dagger(c)(x) = k(c \triangleright x)$. Teniendo la siguiente igualdad:*

$$k^\dagger(c)(x) = k(c \triangleright x) = t((c \triangleright x) \restriction_N)$$

Así, el juego de la vida queda expresado por el siguiente comportamiento global:

$$k^{\dagger}(c)(g) = t((c \triangleright g) \restriction_N) = \begin{cases} 1 & \text{si} \begin{cases} \Sigma_{n \in N}(c \triangleright g)(n) = 3 \\ \text{o} \\ \Sigma_{n \in N}(c \triangleright g)(n) = 4 \text{ y } (c \triangleright g)((0,0)) = 1 \end{cases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Considerando nuevamente la Figura 1.1 la celda del centro es (z_1, z_2), se tiene que $(c \triangleright x)[N] = c[N_{(z_1,z_2)}]$, donde N es la vecindad de $(0,0)$, $N_{(z_1,z_2)}$ la de (z_1, z_2) y $[\cdot]$ denota la imagen directa de un conjunto bajo una función. Así, si c asigna a $N_{(z_1,z_2)}$ los valores correspondientes a la Figura 1.1, entonces:

$$k^{\dagger}(c)((z_1, z_2)) = t((c \triangleright (z_1, z_2)) \restriction_N)$$

En adelante, se identificará a un autómata celular con su comportamiento global.

El libro *Cellular automata and Groups* [10] presenta una definición parecida, donde el universo es un grupo y el comportamiento global es una función que, para determinar la siguiente configuración, traslada la vecindad de cada punto g a la vecindad del neutro de G, utilizando a g^{-1}.

La definición 1.2.8, dada por Capobianco y Uustalu [8], únicamente requiere que el universo sea un monoide, lo cual es suficiente para tener autómatas celulares y abstraerlos a una construcción en la teoría de categorías, como se verá en el capítulo 3.

En el siguiente ejemplo de autómata celular se dan la regla de transición, el comportamiento local y el comportamiento global. Además, muestra cómo se pueden utilizar los autómatas celulares en la física.

Ejemplo. 1.2.9 (El Operador Laplaciano Discreto)**.** *Sean $G = \mathbb{Z}$ y $A = \mathbb{R}$ el universo y el alfabeto, respectivamente. Se toma la vecindad $S = \{-1, 0, 1\}$ y se da la regla de transición como:*

$$\tau(c \restriction_S) = 2 \cdot c \restriction_S (0) - c \restriction_S (-1) - c \restriction_S (1)$$

Con esto, el comportamiento global resulta ser:

$$\Delta(c)(z) = 2 \cdot (c \triangleright z) \restriction_S (0) - (c \triangleright z) \restriction_S (-1) - (c \triangleright z) \restriction_S (1)$$

Identificar a los comportamientos globales con los autómatas celulares permite, junto con las definiciones que se presentan en el siguiente capítulo, trabajar a los autómatas celulares como una categoría.

Capítulo 2

Teoría de Categorías

En este capítulo se presentan algunas definiciones y conceptos esenciales de teoría de categorías que se utilizarán para abstraer el concepto de autómata celular. Para un tratamiento más extensivo se sugiere ver [3] y [1].

Las comónadas, que son la principal herramienta de este texto, se presentan en la sección 2.2. Pero para poder aprovechar esta construcción se necesitan los conceptos de adjunción, curry y uncurry, los cuales se definen y analizan al final de la sección 2.1.

2.1. Algunas Definiciones Básicas

Definición. 2.1.1. *Una categoría $\mathscr{C}$ consta de:*

1. *Una colección de objetos $|\mathscr{C}|$ (también escrito $ob(\mathscr{C})$).*

2. *Una colección de flechas, llamadas morfismos $hom(\mathscr{C})$, entre los objetos. La familia de morfismos entre dos objetos $A, B \in |\mathscr{C}|$ debe ser un conjunto y se denota $hom_{\mathscr{C}}[A, B]$.*

3. *Para estos morfismos existe un operador binario $\circ$, llamado composición, que cumple lo siguiente:*

   a) *Si $f \in hom_{\mathscr{C}}[A, B]$ y $g \in hom_{\mathscr{C}}[B, C]$, entonces existe $h \in hom_{\mathscr{C}}[A, C]$ tal que $h = f \circ g$.*

   b) *Para todo $X \in |\mathscr{C}|$ existe un morfismo $id_X : X \to X$ llamado identidad en X, tal que para todo morfismo $f : A \to B$ se cumple que:*

$$id_B \circ f = f = f \circ id_A.$$

c) *Si* $f \in hom_{\mathscr{C}}[A,B]$, $g \in hom_{\mathscr{C}}[B,C]$ *y* $h \in hom_{\mathscr{C}}[C,D]$ *entonces:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Es decir, el operador $\circ$ *es asociativo.*

En teoría de categorías se suelen utilizar diagramas para representar ciertas relaciones entre los morfismos y los objetos. Por ejemplo, en la definición anterior, los axiomas para los morfismos quedan expresados de la siguiente manera:

1. Si $f \in hom_{\mathscr{C}}[A,B]$ y $g \in hom_{\mathscr{C}}[B,C]$, entonces existe $h \in hom_{\mathscr{C}[A,C]}$, denotada $g \circ f$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f=h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

2. Para todo $X \in |\mathscr{C}|$ existe un morfismo, llamado identidad, $id_X : X \to X$ tal que para todo morfismo $f : A \to B$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[d, "id_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

3. Si $f \in hom_{\mathscr{C}[A,B]}$, $g \in hom_C[B,C]$ y $h \in hom_{\mathscr{C}}[C,D]$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

Ejemplo. 2.1.2. *La categoría* $\mathcal{SET}$ *tiene por objetos a los conjuntos y sus morfismos son funciones entre conjuntos.*

Ejemplo. 2.1.3. *La categoría $\mathcal{AUT}$ tiene por objetos a los autómatas clásicos (deterministas, secuenciales, Moore), esto es, séxtuplas $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \gamma)$ donde: Q es el conjunto de estados, Σ y Γ los conjuntos de estados de entrada y salida, respectivamente, $\delta : \Sigma \times Q \to Q$ la regla de transición, q_0 el estado inicial y $y : Q \to \Gamma$ la salida. Un morfismo entre autómatas $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \gamma)$ y $(Q', \Sigma', \Gamma', \delta', q'_0, \gamma')$ es una terna $(f_Q, f_\Sigma, f_\Gamma)$ de funciones $f_Q : Q \to Q'$, $f_\Sigma : \Sigma \to \Sigma'$ y $f_\Gamma : \Gamma \to \Gamma'$, tal que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Preservan transición:* $\delta'(f_\Sigma(\sigma), f_Q(q)) = f_Q(\delta(\sigma, q))$
2. *Preservan las salidas:* $f_\Gamma(\gamma(q)) = \gamma'(f_Q(q))$
3. *Preservan el estado inicial:* $f_Q(q_0) = q'_0$

Ejemplo. 2.1.4. *En la categoría $\mathcal{GRP}$ los objetos son los grupos y las flechas son los homomorfismos de grupos.*

En teoría de categorías se busca generalizar varios conceptos usuales en las matemáticas. La siguiente definición es un ejemplo de esto.

Definición. 2.1.5. *Un morfismo $f : A \to B$ se dice que es mono, si para cualesquiera dos morfismos $g : B \to C$y $h : B \to C$, si $f \circ g = f \circ h$ entonces $g = h$. Se dice que es epi, si para cualesqueira dos morfismos $g : C \to B$ y $h : C \to B$ tal que $f \circ g = id_B$. Se dice que es iso, si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$.*

Los conceptos de monomorfismo y epimorfismo generalizan a los de función inyectiva y suprayectiva, respectivamente.

En la teoría de categorías es muy importante el concepto de dualidad. La categoría dual u opuesta de una categoría $\mathscr{C}$, denotada $\mathscr{C}^{op}$, es una categoría que tiene los mismos objetos pero voltea las flechas. Es decir, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $f : A \to B \in hom(\mathscr{C})$
2. $f^{op} : B \to A \in hom(\mathscr{C}^{op})$.

Cuando se refiere al dual de una definición, se agrega el prefijo "co". Por ejempo mónada y comónada, conceptos que se verán en la siguiente sección.

Para más sobre dualidad, ver [1].

Para pasar de una categoría a otra, se utiliza el concepto de funtor.

Definición. 2.1.6. *Un funtor entre las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ es una correspondencia $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tal que:*

1. *Para todo $A \in |\mathscr{C}|$ existe $F(A) \in |\mathscr{D}|$*
2. *Para toda $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$, existe $F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathscr{D}$ tal que:*
   a) $F(id_A) = id_{F(A)}$
   b) *Para todo $f \in hom_{\mathscr{C}}[A, B]$ y $g \in hom_{\mathscr{C}}[B, C]$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$*

Los funtores pueden clasificarse en aquellos que voltean las flechas y los que no lo hacen, de la siguiente manera.

Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor, entonces:

1. Si $f : A \to B$ implica que $F(f) : F(A) \to F(B)$, entonces F se dice que es covariante.
2. Cuando $F(f) : F(B) \to F(A)$, si $f : A \to B$, entonces se dice que F es contravariante.

A menos que se indique lo contrario, se supondrá que los funtores descritos en el texto son covariantes.

Ejemplo. 2.1.7. *Entre $\mathcal{GRP}$ y $\mathcal{SET}$ existe el funtor olvidadizo, definido como $F(< G, +_G, e_G >) = G$ para todo $< G, +_G, e_G > \in |\mathcal{GRP}|$ y $F(h) = h$ para todo $h \in hom(\mathcal{G})$.*

Los funtores son correspondencias entre categorías y existen también corresponencias entre funtores. Estas últimas son llamadas transformaciones naturales y son de mucha importancia para este texto.

Definición. 2.1.8. *Si $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son categorías y $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores, entonces una transformación natural η entre F y G, denotada $\eta : F \to G$, asocia a cada $X \in |\mathscr{C}|$ un morfismo $\eta_X : F(X) \to G(X)$ (la componente en X de η), tal que para todo morfismo $f : X \to Y$ se tiene que $\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Observación. 2.1.9. *Para cualquier funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, se puede definir la transformación natural identidad $Id : F \to F$ como $Id_X(F(X)) = id_X F(X)$, donde $id_X : F(X) \to F(X)$ es el morfimo identidad de $F(X)$ el cual existe pues $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son categorías y F un funtor.*

La siguiente definición es una generalización del producto cartesiano entre conjuntos.

Definición. 2.1.10. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ y objetos X_1, X_2 en $\mathscr{C}$. Un producto de X_1 y X_2 en $\mathscr{C}$ es una pareja formada por un objeto $X_1 \times X_2$ de la categoría y un par de morfimos $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ y $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ en $\mathscr{C}$ tales que para todo objeto Y y flechas $f_1 : Y \to X_1$ y $f_2 : Y \to X_2$ existe un único morfismo $f : Y \to X_1 \times X_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

Si para cuales quiera dos objetos en una categoría existe el producto de estos, entonces se dice que la categoría tiene productos binarios.

Ejemplo. 2.1.11. *$\mathcal{GRP}$ es una categoría con productos binarios. El producto en esta categoría corresponde al concepto de producto directo, donde los elementos del producto de dos grupos G_1 y G_2 son pares ordenados (a_1, a_2) con $a_i \in G_i$, neutro (e_1, e_2) donde e_i es el neutro de cada G_i y la operación binaria $\circ_{G_1 \times G_2}$ entre dos elementos del producto (a_1, a_2) y (b_1, b_2) se define entrada a entrada como:*

$$(a_1, a_2) \circ_{G_1 \times G_2} (b_1, b_2) = (a_1 \circ_{G_1} b_1, a_2 \circ_{G_2} b_2,)$$

Se puede definir el producto para una familia de objetos de la categoría generalizando la definición anterior, de la siguiente manera.

Definición. 2.1.12. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ y una familia $\mathbb{X}$ de objetos en $\mathscr{C}$, un producto de $\mathbb{X}$ en $\mathscr{C}$ es una pareja formada por un objeto $\prod_{X_i \in \mathbb{X}} X_i$ de la categoría y una familia de morfimos $\pi_i : \prod_{X_i \in \mathbb{X}} X_i \to X_i$ en $\mathscr{C}$ tales que para todo objeto Y y familia de flechas $\mathbb{F}$ donde cada flecha $f_i : Y \to X_i$ es un morfismo de la categoría, existe un único morfismo $f : Y \to \prod_{X_i \in \mathbb{X}} X_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta, para cada i:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, dotted, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \prod_{X_i \in \mathbb{X}} X_i \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Si para cualquier familia finita de objetos en la categoría, existe un producto, entonces se dice que la categoría tiene productos finitos.

Existen dos funtores que son indispensables para definir la categoría de autómatas celulares. El primero es el funtor producto, el cual asigna a cada objeto de la categoría el producto con un objeto fijo y se define a continuación. El segundo es el funtor exponencial, que se define más adelante.

Definición. 2.1.13. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos binarios y Y un objeto fijo de la categoría. El funtor producto $(\_) \times Y = L : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ se define como:*

1. *En los objetos $LA = A \times Y$.*
2. *Y para cada morfismo $f : Z \to W$, $Lf = < f, id_Y >$ donde id_Y es el morfismo identidad para Y y $< f, id_Y >: Z \times Y \to W \times Y$ aplica el morfismo f a la primera entrada y id_Y a la segunda.*

La siguiente definición es una generalización del concepto de espacio de funciones de un conjunto Y en otro Z, denotado Z^Y. Los morfismos que se utilizan serán de gran importancia para el análisis de los autómatas celulares como una categoría.

Definición. 2.1.14. *Se dice que un objeto Y en una categoría $\mathscr{C}$ con productos finitos es un exponente si para todo objeto Z en la categoría, existen el objeto Z^Y (llamado exponencial) y el morfismo evaluación $ev_Z : (Z^Y \times Y) \to Z$, los cuales cumplen que para todo objeto X y morfismo $g : (X \times Y) \to Z$, existe un único morfismo $\hat{g} : X \to Z^Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[d, dotted, "\hat{g} \times id_Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Z^Y \times Y \arrow[r, "ev_Z"'] & Z \end{tikzcd}$$

Intuitivamente, el morfismo evaluación toma una función de Y en Z y la evalúa para un elemento de Y.

En ciencias de la computación, a $\hat{g}$ se le conoce como el curry de g. El nombre viene de Haskell Curry, quien la redescubrió (después de Moses Schönfinkel), como una manera de llevar a una función $g : X \times Y \to Z$, la cual toma algo de tipo $X \times Y$ y devuelve algo de tipo Z, en una función que tome algo de tipo X y devuelva algo de tipo $Y \to Z$.

Existe también el concepto de decurrificación (uncurry). Este permite asociar a un morfismo $f : X \to Z^Y$, con una flecha $\bar{f} : X \times Y \to Z$.

El siguiente funtor es el segundo necesario al utilizar categorías para trabajar con autómatas celulares.

Definición. 2.1.15. *Si para un objeto Y en una categoría $\mathscr{C}$, existe Z^Y para todo Z, se define el funtor exponencial $R : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, de la siguiente manera:*

1. *Para todo objeto A de la categoría, $RA = A^Y$*
2. *Para los morfismos se elige un elemento $c \in A^Y$, entonces el funtor R se define como $Rf(c)(y) = f(ev(c, y))$.*

Para demostrar el teorema de Curtis-Hedlund en el capítulo 3, se necesita saber si, en el caso de que una flecha haga conmutar un diagrama, entonces el diagrama resultante de currificar (o decurrificar) a la flecha conmuta.

El concepto de adjunción permite demostrar una versión generalizada del teorema de Curry-Howard, el cual asegura la existencia de una biyección entre $Hom_{\mathcal{SET}}[A \times B, C]$ y $Hom_{\mathcal{SET}}[A, C^B]$. Y con esto demostrar que, al currificar o decurrificar flechas en diagramas conmutativos, se obtendrán otros diagramas conmutativos.

Definición. 2.1.16. *Una adjunción está dada por*

1. *Un par de categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$.*
2. *Un par $<L,R>$ de funtores $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, llamados adjunto izquierdo y adjunto derecho, respectivamente.*
3. *Una transformación natural $\epsilon : (LG) \to Id_D$ tal que para cada $g : L(X) \to Y$ en D, existe una única $\hat{g} : X \to R(Y)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} L(X) \arrow[d, dotted, "L\hat{g}"'] \arrow[dr, "g"] & \\ L(R(Y)) \arrow[r, "\epsilon_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

A ϵ se le llama counidad de la adjunción.

El siguiente teorema da un ejemplo de funtores adjuntos y es esta propiedad entre los dos la que permite la abstracción de los autómatas celulares a la teoría de categorías.

Teorema. 2.1.17. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos finitos y con un objeto Y tal que para todo objeto Z existe Z^Y. Sean $(\_)^Y : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ el funtor exponencial y $(\_) \times Y = L$ el funtor producto, definidos en los objetos por $RZ = Z^Y$ y $LZ = Z \times Y$. Los funtores R y L son adjuntos.*

Demostración. Sea Y un exponente en $\mathscr{C}$, se define ϵ como $\epsilon_Z = ev_Z$. Entonces, por definición de objeto exponencial, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
L(X) = X \times Y \arrow[d, dotted, "\hat{g} \times id_Y = L(\hat{g})"'] \arrow[dr, "g"] & \\
L(R(Z)) = Z^Y \times Y \arrow[r, "ev_Z = \epsilon_Z"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Por lo que ϵ es co-unidad y por tanto, L y R son adjuntos. □

El siguiente teorema es esencial para la demostración del teorema de Curtis-Hedlind en el capítulo 3, utilizando teoría de categorías.

Teorema. 2.1.18. *Dados un par de funtores adjuntos $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, si $X \in |\mathscr{C}|$ y $Y \in |\mathscr{D}|$ entonces existe una biyección:*

$$\Phi_{X,Y} : Hom_{\mathscr{D}}[LX, Y] \cong Hom_{\mathscr{C}}[X, RY]$$

Demostración. Sea $\theta : hom_{\mathscr{C}}[X, RY] \to hom_{\mathscr{D}}[LX, Y]$ donde $\theta(\hat{g}) = \epsilon_Y \circ L\hat{g}$ donde $\hat{g} : X \to R(Y)$ y $\epsilon : LR \to id_D$ es la co-unidad de la adjunción. Esto define un morfismo $\epsilon_Y \circ L\hat{g}$ en $hom_{\mathscr{D}}[LX, Y]$. Se tiene que θ es biyectivo por la siguiente razón:

Si $g \in hom_{\mathscr{D}}[LX, Y]$, por definición de co-unidad, existe una única $\hat{g} \in hom_{\mathscr{C}}[X, RY]$ para cada g, lo cual indica que θ es suprayectivo.

Por otro lado, ese morfismo es único, por lo que θ es inyectiva. Por lo tanto θ es biyectivo.

□

En la siguiente sección se definen los conceptos de comónada y categoría de coKleisli y de coEilenberg-Moore, las cuales se derivan de los conceptos de comónada y funtores adjuntos. Estas dos categorías se utilizan para definir las categorías de comportamientos locales y comportamientos globales.

2.2. Comónadas

Las comónadas han sido utilizadas para tratar lenguajes computacionales dependientes del contexto [7], extendiendo el uso de categorías en los lenguajes computacionales partiendo de la idea de Moggi [17], quien utilizó al dual de las comónadas, las mónadas, para trabajar a las funciones independientes del contexto.

La idea de utilizar mónadas es, a grandes rasgos, la siguiente: cuando se quiere agregar algo al codominio de una función, como un índice, o para convertir una función parcial en total pero teniendo la certeza de que el comportamiento de la función original se conserve, se utiliza el concepto de mónada.

Por ejmplo: si se tiene una función que regresa valores de un tipo (computacional) B y se quiere agregar la posibilidad de que regrese más valores, como la salida *error*, pero no se desea alterar la estructura de B ni redefinir la función para cada uno de sus casos, entonces se recurre a una mónada, la cual, en este ejemplo, transforma al tipo B en el tipo $B \times \{error\}$ e indica cómo debe trabajar ahora la función. En programación funcional esto permite mantener la "pureza" del lenguaje, al no utilizar un programa para indicar la aparición de un error donde no se tenía definida la función.

En el caso dual, cuando se quiere agregar algo al dominio, como en los autómatas celulares donde se tiene una función que toma una celda y regresa un estado de acuerdo a los valores de su vecindad (dependiendo del contexto), es necesaria una comónada.

La transformación del dominio original al nuevo es realizada por un funtor. Y para que las flechas en la categoría del contradominio del funtor se comporten como flechas de la categoría original, se utilizan dos transformaciones naturales que permiten definir la nueva composición y el nuevo morfismo identidad.

Definición. 2.2.1. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ (llamada categoría base), una comónada $\mathbb{D} =< D, \epsilon, \delta >$ es una terna donde $D : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ es un endofuntor (un funtor de la categoría en sí misma) y $\epsilon_A : DA \to A$ y $\delta_A : DA \to D^2A$ son transformaciones naturales tales que:*

1. $\epsilon_{DA} \circ \delta_A = D\epsilon_A \circ \delta_A = id_{DA}$
2. $\delta_{DA} \circ \delta_A = D\delta_A \circ \delta_A$

Es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, equal] & DD \arrow[d, "\epsilon D"] \\
DD \arrow[r, "D\epsilon"'] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & DD \arrow[d, "\delta D"] \\
DD \arrow[r, "D\delta"'] & DDD
\end{tikzcd}
$$

A ϵ se le llama co-unidad y a δ se le llama comultiplicación.

Ejemplo. 2.2.2. *Dado G un grupo fijo, la terna $\mathbb{D} =< D, \epsilon, \delta >$, defnida como sigue, es una comónada:*

1. *El funtor $D : \mathcal{GRP} \to \mathcal{GRP}$ el funtor producto: $\_ \times G$.*
2. *La counidad $\epsilon_A = A \times G \to A$ se define como $\epsilon_A(a, g) = a$.*
3. *La comultiplicación $\delta_A = A \times G \to (A \times G) \times G$ se define como $\delta_A(a, g) = ((a, g), g)$.*

Equivalentemente, se puede dar la siguiente definición de comónada.

Definición. 2.2.3. *Dada una categoría $\mathscr{C}$, una comónada está dada por:*

1. *Un funtor $D : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$.*
2. *Una transformación natural $\epsilon : D \to id_{\mathscr{C}}$.*
3. *Para cada morfismo $k : DA \to B$, un morfismo $k^\dagger : DA \to DB$ que cumple:*
   a) *Para cada morfismo $k : DA \to B$, $\epsilon_B \circ k^\dagger = k$*
   b) *Para todo A en los objetos de $\mathscr{C}$, $(\epsilon_A)^\dagger = id_{DA}$.*
   c) *Para todo par de morfismos $k : DA \to B$ y $l : DB \to C$, $(l \circ k^\dagger)^\dagger = l^\dagger \circ k^\dagger$*

La equivalencia entre ambas definiciones de comónada se debe a lo siguiente. A partir de δ se define $(\_)^\dagger$ como $k^\dagger = Dk \circ \delta_A$ y a partir de $(\_)^\dagger$, se define $\delta_A = (id_{DA})^\dagger$.

A partir de una comónada se definen dos categorías, la categoría de coKleisli y la categoría de coEilenberg-Moore, las cuales se usarán para trasladar a categorías el concepto de autómata celular.

Definición. 2.2.4. *Sea $\mathbb{D} =< D, \epsilon, \delta >$ una comónada en la categoría $\mathscr{C}$. La categoría de coKleisli de $\mathscr{C}$, denotada $coKl(\mathbb{D})$, tiene los mismos objetos que la categoría base $\mathscr{C}$ y cada morfismo $f : X \to Y$ en $coKl(\mathbb{D})$ es un morfismo $g : DX \to Y$ en $\mathscr{C}$. Esto es:*

1. $Obj(coKl(\mathbb{D})) = Obj(\mathscr{C})$
2. $Hom_{coKl(\mathbb{D})}(X, Y) = Hom_{\mathscr{C}}(DX, Y)$

Los morfismos en $coKl(\mathbb{D})$ cumplen lo siguiente:

1. *Para $f : DX \to Y$ y $g : DY \to Z$, la composición está dada por $g \circ_M f = g \circ Df \circ \delta_X = g \circ f^\dagger$.*
2. *La identidad en $coKl(\mathbb{D})$ está dada por $id_X = \epsilon_X$.*

Ejemplo. 2.2.5. *Dada la comónada $\mathbb{D}$ definida en el ejemplo 2.2.2, la categoría de coKleisli asociada a la comónada, tiene por morfismo identidad a la counidad $\epsilon_A(a, g) = a = id_A$ para cada objeto A. Y la composición $\bullet$ de dos morfismos f y h, se define como $f \bullet h(a, g) = f(h(a, g), g)$.*

Las categorías de coKleisli y de coEilenberg-Moore (vista más adelante) surgen como una construcción para encontrar funtores adjuntos que definan una comónada para un funtor D. El primer funtor para la categoría de coKleisli es $R : C \to coKL(D)$ con $RA = A$ y $Rf = f \circ \epsilon_A$ y el segundo $L : coKL(D) \to C$ con $LA = DA$ y $Lk = k^\dagger$, es decir $Lk = Dk \circ \delta_A$.

Para definir la categoría de coEilenberg-Moore es necesario primero el concepto de coálgebra.

Definición. 2.2.6. *Una coálgebra para una comónada $\mathbb{D}$ es un par (A, u) donde $A \in |\mathscr{C}|$ y $u : A \to DA$ tal que:*

$$\epsilon_A \circ u = id_A \ y \ \delta_A \circ u = Du \circ u$$

Esto es, u hace conmutar a los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, equal] & DA \arrow[d, "\epsilon_A"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & DA \arrow[d, "\delta_A"] \\ DA \arrow[r, "Du"'] & D(DA) \end{tikzcd}$$

Ejemplo. 2.2.7. *Sea $\mathbb{D}$ la comónada definida en el ejemplo 2.2.2. Una coálgebra para D es un par (A, u), donde $u : A \to A \times G$ como $u(a) = (u_0(a), u_1(a))$. Dado que $\epsilon_A \circ u(a) = id_A(a)$ se tiene que $u_0(a) = a$, pues $id_A(a) = \epsilon_A(u_0(a), u_1(a)) = u_0(a)$. Además $\delta_A \circ u = Du \circ u$ implica que $((a, u_1(a)), u_1(a)) = (u(a), u_1(a))$ por lo que no se tienen restricciones para definir u_1.*

Es importante observar que la definición usual de coálgebra para un funtor D es solamente un par $< A, u >$ donde A es un objeto de la categoría y $u : A \to DA$. La definición dada aquí corresponde a la que utilizan Capobianco y Uustalu en [8], misma que figura en el libro *Toposes, Triples and Theories* [3].

Definición. 2.2.8. *Un morfismo entre coálgebras (A, u) y (B, v) es una flecha $f : A \to B$ tal que $Df \circ u = v \circ f$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & DA \arrow[d, "Df"] \\ B \arrow[r, "v"'] & DB \end{tikzcd}$$

Ejemplo. 2.2.9. Un morfismo entre coálgebras (A, u) y (B, v) *para la comónada definida en el ejemplo 2.2.2,* es una flecha $f : A \to B$ tal que:

$$(f(a), u_1(a)) = (f(a), v_1(f(a)))$$

Definición. 2.2.10. *Dada una comónada $\mathbb{D} =< D, \epsilon, \delta >$, la categoría de coEilenberg-Moore, denotada $coEM(\mathbb{D})$tiene por objetos a las coálgebras de $\mathbb{D}$ y por flechas morfismos de coálgebras para D. La comónada define dos funtores adjuntos. El primer funtor, $R : \mathscr{C} \to coEM(\mathbb{D})$ es tal que $RA = (DA, \delta_A)$ y $Rf = Df$ y su adjunto $L : coEM(\mathbb{D}) \to \mathscr{C}$, $L(A, u) = A$ y $Lf = f$.*

Tanto la unidad como la composición se heredan de $\mathscr{C}$.

El funtor L es un funtor olvidadizo y por tanto R, al ser su adjunto derecho, nos devuelve coálgebras colibres.

Definición. 2.2.11. *Una coálgebra colibre para un funtor $D : C \to C$ es una coálgebra (DB, δ_B) tal que para toda coálgebra (A, u) y morfismo $k : A \to B$ en $hom_C[A, B]$, existe un único $f : A \to DB$ tal que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, dotted, "f"] \\ B & DB \arrow[l, "\epsilon_B"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, dotted, "f"'] & DA \arrow[d, dotted, "Df"] \\ DB \arrow[r, "\delta_B"'] & D(DB) \end{tikzcd}$$

La definición de coálgebra colibre será muy util para encontrar la manera de trasladar autómatas celulares uniformes a no uniformes, en la sección 4.2.

Ejemplo. 2.2.12. *La categoría de coEilenberg-Moore para la comónada $\mathbb{D}$ definida en el ejemplo 2.2.2, es aquella que tiene por objetos a las coálgebras de D y por morfismos a las flechas entre coálgebras, definidos en los ejemplos 2.2.7 y 2.2.9 de coálgebra y flechas de coálgebras, respectivamente.*

La categoría de coKleisli es isomorfa a la categoría de coálgebras colibres para la comónada $\mathbb{D}$. Para probar esto, primero se da la definición de subcategoría.

Definición. 2.2.13. *Dada una categoría $\mathscr{C}$, una subcategoría $\mathscr{S}$ de $\mathscr{C}$ está dada por:*

1. *Una subcolección de objetos de $\mathscr{C}$*
2. *Una subcolección de morfismos de $\mathscr{C}$ tal que:*
   a) *Para todo morfismo f en $hom[\mathscr{S}]$, el dominio y codominio de f están en $|\mathscr{S}|$.*
   b) *Para todo objeto A de $\mathscr{S}$, el morfismo identidad de A está en los morfismos de $\mathscr{S}$.*
   c) *La composición de dos morfismos en $hom[\mathscr{S}]$, está en $hom[\mathscr{S}]$.*

Ejemplo. 2.2.14. *Las coálgebras colibres y los morfismos entre éstas forman una subcategoría en $coEM(\mathbb{D})$.*

Ahora se define la noción de inmersión dada en [1]. La idea es tener una subcategoría en el codominio de un funtor, isomorfa a la categoría del dominio.

Definición. 2.2.15. *Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una inmersión si:*

1. *Para toda familia de morfismos $hom_{\mathscr{C}}[A, B]$, la correspondencia $F_{A,B} : hom_{\mathscr{C}}[A, B] \to hom_{\mathscr{D}}[F(A), F(B)]$ es inyectiva.*
2. *F es inyectivo en los objetos.*

A continuación se da la inmersión de la categoría de coKleisli en la categoría de coEilenberg-Moore.

Proposición. 2.2.16. *La categoría $coKl(D)$ se sumerge en $coEM(D)$ como la subcategoría de coálgebras colibres.*

Demostración. Se define el funtor $\psi : coKl(D) \to coEM(D)$ de la siguiente manera:

1. En los objetos, $\psi(A) = (DA, \delta_A)$.
2. En los morfismos, $\psi(k)$ está dado por la composición:

$$DA \xrightarrow{\delta_A} DDA \xrightarrow{Dk} DB$$

Es decir $\psi(k) = k^{\dagger}$.

Dado que $\psi(k) = k^{\dagger}$ y $\epsilon \circ k^{\dagger} = k$, se tiene que $\psi(k) = \psi(l)$, entonces:

$$k = \epsilon \circ \psi(k) = \epsilon \circ \psi(l) = l$$

Por lo que $\psi_{A,B}$ es inyectivo para todos A,B y $hom_{coKl(\mathbb{D})}[A, B]$.

Y, por la definición de coálgebra colibre, a cada objeto A le corresponde una coálgebra colibre $< A^G, \delta_A >$, por lo que es inyectivo para los objetos.
Por lo tanto ψ es una inmersión.

$\square$

Nótese que al correstringir ψ a su imagen, se tiene que es un isomorfismo. Por lo que las categorías de coKleisli y de coálgebras colibres para la comónada $\mathbb{D}$ son isomorfas.

Ahora ya se tienen las herramientas de teoría de categorías necesarias para hacer crear la categoría de autómatas celulares.

En el siguiente capítulo se dará una construcción directa de la categoría de autómatas celulares, la cual falla en una de las propiedades para ser categoría. Entonces se utiliza la categoría de cokleisli para definir la categoría de comportamientos locales y utilizar la inmersión ψ para obtener la categoría de comportamientos globales.

Capítulo 3

La categoría de autómatas celulares

Volviendo a los autómatas celulares, primero se relajará la definición de comportamiento local y se mostrará la necesidad de utilizar la categoría de coKleisli para hacer de éstos una categoría. Más adelante, en la sección 3.2 se utiliza la adjunción de los funtores exponencial y producto definidos en la sección 2.1, para caracterizar a los autómatas celulares mediante el teorema de Curtis-Hedlund.

La definición de comportamiento local se puede modificar para permitir alfabetos diferentes en el dominio y en el contradominio. Esto es, ahora los comportamientos locales serán funciones $k : A^G \to B$, con A y B conjuntos no vacíos.

Se necesita ahora una categoría donde los alfabetos sean objetos y el universo sea un objeto exponencial. En $\mathcal{SET}$ existe A^G, para todos G y A objetos de la categoría, pues es el espacio de funciones de G en A. Sin embargo, no todas las flechas entre configuraciones en A^G y estados en B son relevantes para los autómatas celulares, como se verá en el teorema de Curtis-Hedlund en la sección 3.2, se puede caracterizar a los autómatas celulares con las funciones uniformemente continuas [11].

Entonces la categoría base para definir la categoría de autómatas celulares será $\mathcal{UNIF}$, la categoría que tiene por objetos a los espacios uniformes y por flechas a las funciones uniformemente continuas [11].

Los espacios uniformes generalizan el concepto de que un par de puntos estén tan cerca como otro par de puntos, lo cual permite generalizar la continuidad uniforme en espacios métricos. Para su definición formal véase el apéndice A.

3.1. La categoría de Autómatas Celulares

La categoría de comportamientos locales debe tener por objetos a los alfabetos, al universo G y a los espacios de configuraciones A^G y como flechas a los comportamientos locales. Para ser una categoría se necesita que exista la composición de morfismos y un morfismo identidad para cada objeto de la categoría. Con el fin de tener una composición $\bullet$, se utiliza la extensión de coKleisli (como en la definición de comónada) de modo que componer $f : A^G \to B$ y $g : B^G \to C$ se define como $g \bullet f = g \circ f^\dagger$ y así $g \bullet f : A^G \dagger C$.

Sin embargo, surge un problema al definir el morfismo identidad para los objetos. Pues si las flechas son únicamente comportamientos locales, ni los alfabetos ni el monoide tendrían identidad, pues no son objetos exponenciales.

Para solucionar este problema sin tener que agregar flechas que no sean comportamientos locales, se utiliza una comónada.

Proposición. 3.1.1. *La terna $\mathbb{D} =< D, \epsilon, \delta >$, donde:*

1. *El funtor $D : \mathcal{UNIF} \to \mathcal{UNIF}$ se define como:*

$$DA = A^G \text{ y } Df = f^G$$

Dado que en $\mathcal{UNIF}$ $A^G \cong \prod_{|G|} A$ donde $\prod_{|G|} A$ denota al producto cartesiano generalizado y ,como se muestra en el apéndice 1, A^G y f^G están en $\mathcal{UNIF}$.

2. *Las correspondencias ϵ y δ se definen como:*

$$\epsilon_A(c) = c(e_G) \text{ y } \delta_A(c)(x) = c \rhd_A x$$

donde $\rhd_A$ es la traslación de configuración.

Es una comónada.

Demostración. Primero se demuestra que ϵ y δ son transformaciones naturales.

Sean $f : A \to B$ y $c_A \in A^G$, entonces, por definición de Df y ϵ:

$$\epsilon_B(Df(c_A)) = \epsilon_B(f^G(c_A)) = (f \circ c_A)(e_G) = f(c_A(e_G))$$

$$f(\epsilon_A(c_A)) = f(c_A(e_G))$$

Además, por definición de Df:

$$(\delta_B \circ Df)(c_A) = \delta(f^G(c_A))$$

$$(DDf(\delta_A(c_A)) = (f^G)^G(\delta_A(c_A)) = f^G \circ (\delta_A(c_A))$$

Aplicando las ecuaciones a un punto de G, se tiene que:

$$(\delta(f^G(c_A))(x) = (f^G(c_A)) \triangleright x$$

$$(f^G \circ \delta_A(c_A))(x) = (f^G(\delta_A(c_A)(x))) = f^G(c_A \triangleright x)$$

Finalmente, por la definición de $\triangleright$ y f^G, para toda $y \in G$ se tiene que:

$$(f^G(c_A \triangleright x))(y) = ((f \circ c_A) \triangleright x)(y) = (f \circ c_A)(x \cdot y)$$

$$(f^G(c_A \triangleright x))(y) = (f \circ (c_A \triangleright x))(y) = f((c_A \triangleright x)(y)) = f(c_A \triangleright (x \cdot y)) = (f \circ c_A)(x \cdot y)$$

Por lo tanto:

$$(DDf(\delta)) = \delta(Df)$$

Por lo tanto, ϵ y δ son transformaciones naturales.

Ahora hay que mostrar que se cumplen las propiedades de comónada.

Sean $c \in A^G$ y $x, y, z \in G$.

$$\epsilon_{DA}(\delta_A(c))(x) = \delta_A(c)(e_G)(x) = (c \triangleright e_G)(x) = c(e_G \cdot_G x) = c(x)$$

$$D\epsilon_A(d_A(c))(x) = \epsilon_A(\delta_A(c)(x)) = \delta_A(c)(x)(e_G) = c(x \cdot_G e_G) = c(x)$$

Por otro lado

$$\delta_{DA}(\delta_A(c))(x)(y)(z) = \delta_A(c)(x \cdot_G y)(z) = c((x \cdot_G y) \cdot_G z)$$

$$D\delta_A(\delta_A(c))(x)(y)(z) = \delta_A(\delta_A(c)(x))(y)(z) = \delta_A(c)(x)(y \cdot_G z) = c(x \cdot_G (y \cdot_G z))$$

Por tanto

$$\epsilon_{DA} \circ \delta_A = D\epsilon_A \circ \delta_A$$

$$\delta_{DA} \circ \delta_A = D\delta_A \circ \delta_A$$

Se concluye entonces que $\mathbb{D}$ es una comónada. □

Con esto ya se puede dar la definición de categoría de comportamientos locales, de la siguiente manera.

Definición. 3.1.2. *Dada la comónada $\mathbb{D}$ definida en la proposición anterior, la categoría de comportamientos locales es la categoría de coKleisli asociada a $\mathbb{D}$. Es decir:*

$$ob(coKl(\mathbb{D})) = ob(\mathcal{UNIF})$$

$$hom_{coKl(\mathbb{D})}[A, B] = hom_{\mathcal{UNIF}}[A^G, B]$$

Así, la identidad resulta ser ϵ_A. Y la composición está dada por $g \bullet f = g \circ f^\dagger$, donde $f^\dagger$ es la extensión de coKleisli de f.

El funtor $\psi : coKl(\mathbb{D}) \to coEM(\mathbb{D})$, visto en la proposición 2.2.16, define flechas $f^G : A^G \to B^G$, a partir de flechas $f : A \to B$ y como ψ, restringido a las coálgebras colibres, es una correspondencia biyectiva, se tiene que toda coálgebra colibre en $coEM(\mathbb{D})$ es la imagen de algun objeto en $coKl(\mathbb{D})$ y cada morfismo de coálgebras, proviene de una flecha en $coKl(\mathbb{D})$.

Por tanto, los autómatas celulares son los morfismos entre coálgebras colibres en $coEM(\mathbb{D})$.

Definición. 3.1.3 (Categoría de Autómatas Celulares)**.** *Dada la comónada $\mathbb{D}$, la categoría de comportamientos globales (autómatas celulares), es la subcategoría de coálgebras colibres en la categoría de coEilenberg-Moore asociada a $\mathbb{D}$. Es decir, la imagen de la categoría de comportamientos locales $coKl(\mathbb{D})$ bajo la inmersión ψ en $coEM(\mathbb{D})$.*

Con esto se ha mostrado cómo utilizar el concepto de comónada para abstraer a los autómatas celulares, en la siguiente sección se muestra su conveniencia al probar los teoremas de Curtis-Hedlund y el principio de reversibilidad.

3.2. El Teorema de Curtis-Hedlund

En esta sección se presenta una generalización del teorema de Curtis-Hedlind, dada por Ceccherini-Silberstein y Coornaert [11] y se da la demostración del mismo dada por Capobianco y Uustalu [8], la cual utiliza teoría de categorías para reducir la prueba usualmente larga, a un corolario de la propiedad de funtores adjuntos descrita en la proposición 2.1.17.

El teorema de Curtis-Hedlund, en su versión original, se limita a caracterizar autómatas celulares cuyos alfabetos son finitos de la siguiente manera.

Teorema. 3.2.1 (Curtis-Hedlund)**.** *Sean A un conjunto finito, G un monoide, A^G, B^G equipados con la topología prodiscreta y un morfismo $f : A^G \to B^G$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es un autómata celular.*

2. *f es continua y G-equivariante.*

Se dice que una función es G-equivariante si conmuta con la acción del monoide G sobre los alfabetos (ver apéndice B).

Cuando se permiten alfabetos finitos el teorema original es falso en general, ya que no toda función continua sobre alfabetos infinitos es un comportamiento global.

El siguiente ejemplo, dado para grupos por Ceccherini-Silberstein y Wells [10], muestra una función continua que no es un autómata celular.

Ejemplo. 3.2.2. *Sean G un monoide infinito, $A = G$ y $\tau : A^G \to A^G$ tal que $\tau(x)(g) = x(g \cdot x(g))$.*

τ es G-equivariante, pues

$$\tau \circ \rhd (x, g)(h) = \tau(x \rhd g)(h) = x \rhd g(h) = x(g \cdot_G (h \cdot_G x(g \cdot_G h)))$$

$$\rhd (\tau(x), g)(h) = \tau(x) \rhd g(h) = \tau(x)(g \cdot_G h) = x((g \cdot_G h) \cdot_G x(g \cdot_G h))$$

Por lo tanto

$$\tau \circ \rhd (c, x) = \rhd (\tau(c), x)$$

Para ver que τ es continua sean $x \in A^G$ y $K \subseteq G$ con K finito. Hay que encontrar $F \subset G$ finito, tal que si $y \in A^G$ y $y \in V(x, F)$, donde $V(x, F)$

es una vecindad de x en la topología prodiscreta (ver apéndice A), entonces $\tau(y) \in V(\tau(x), K)$. Sea $F = K \cup \{k \cdot_G x(k) : k \in K\}$. Si $y \in V(x, F)$, entonces, por la definición de $V(x, F)$, se tiene que

$$\tau(x)(k) = x(k \cdot_G x(k)) = y(k \cdot_G x(k)) = y(k \cdot y(k)) = \tau(y)(k)$$

Por lo tanto $\tau(y) \in V(\tau(x), K)$, es decir, τ es continua.

Sin embargo τ no es un autómata celular, pues si se consideran $g, g_0 \in G$ fijos y $x, y \in G^G$ tales que:

$$x(h) = \begin{cases} g \;\; si \;\; h = e_G \\ g_0 \;\; si \;\; h = g \\ e_G \;\; en \;\; otro \;\; caso \end{cases} \qquad y(h) = \begin{cases} g \;\; si \;\; h = e_G \\ e_G \;\; en \;\; otro \;\; caso \end{cases}$$

Se tiene que $x \restriction_{G \setminus g} = y \restriction_{G \setminus g}$. Sea $F \subset G$ finito tal que $g \notin F$, entonces $x \restriction_F = y \restriction_F$, pero:

$$\tau(x)(e_G) = x(x(1)) = x(g) = g_0$$

$$\tau(y)(e_G) = y(y(1)) = x(g) = e_G$$

Por tanto $\tau(x)(e_G) \neq \tau(y)(e_G)$ pese a que $x \restriction_F = y \restriction_F$. Entonces como G es infinito, siempre se pueden encontrar $g \in G$ y $x, y \in G^G$ tal que esto suceda. Luego, no existe una regla de transición que defina al comportamiento local, que a su vez defina a τ. Luego entonces, τ no es un autómata celular.

$\square$

Es necesario pedirle una condición extra a las funciones para que se comporten adecuadamente. Esta es que su continuidad no dependa de cada elemento en G. Es decir, que sean uniformemente continuas.

Por tanto se utilizarán la categoría $\mathcal{UNIF}$ y el concepto de topología prodiscreta descrito en el apéndice A.

Teorema. 3.2.3 (Teorema de Curtis-Hedlund Generalizado). *Sean A un conjunto, G un monoide, A^G, B^G equipados con la topología prodiscreta y un morfismo $f : A^G \to B^G$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es un autómata celular.*

2. *f es uniformemente continua y G-equivariante.*

Demostración. Nótese que, por definicion, δ_A decurrificada es $\rhd_A$. Por lo que la conmutatividad de cualquiera de los siguientes diagramas, implica la del otro.

$$\begin{tikzcd} A^G \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "f"'] & (A^G)^G \arrow[d, "f^G"] \\ B^G \arrow[r, "\delta_B"'] & (B^G)^G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A^G \times G \arrow[r, "\rhd_A"] \arrow[d, "f\times G"'] & (A^G) \arrow[d, "f"] \\ B^G \times G \arrow[r, "\rhd_B"'] & (B^G) \end{tikzcd}$$

Esta conmutatividad condicionada se debe a la propiedad de los funtores adjuntos $(\_)^G$ y $(\_) \times G$ descrita en el teorema 2.1.17.

$\Rightarrow$]Dado que la flecha f está en $UNIF$ por lo que es uniformemente contínua. Únicamente hay que demostrar que es G-equivariante.

Si f es un autómata celular, entonces hace conmutar al primer diagrama por ser morfismo de coálgebras. Entonces f conmuta con $\rhd_A$ y $\rhd_B$, pues $(\_)^G$ y $(\_) \times G$ son adjuntos y δ es la currificación de $\rhd$, por tanto conmuta el segundo diagrama. Se tiene que $\rhd_A$ y $\rhd_B$ son acciones de G sobre A y B respectivamente, como se vio en la sección 1.2. Por tanto f es G-equivariante.

La decurrificación de δ permite demostrar 1) $\Rightarrow$ 2). Y la currificación de $\rhd$ permitirá la demostración de 2) $\Rightarrow$ 1).

$\Leftarrow$] Si f hace conmutar al segundo diagrama y f es una flecha en $\mathcal{UNIF}$, entonces f conmuta con δ_A y δ_B. Entonces, por la adjunción $< (\_)^G, (\_)\times G >$, f es un morfismo de coálgebras colibres, por tanto es un comportamiento global, es decir, un autómata celular.

Por lo tanto, f es un autómata celular si y sólo si es una función uniformemente continua y G-equivariante.

$\square$

Gracias a algunas propiedades de funtores adjuntos, se dió la caracterización de los autómatas celulares como funciones uniformemente continuas y G-equivariantes. En la siguiente sección se prueba el principio de reversibilidad, directamente de las propiedades de coálgebra.

3.3. Principio de reversibilidad

Se dice que un autómata celular f es reversible, si es una función biyectiva y su inversa es un autómata celular.

El siguiente teorema muestra que basta con pedir que la inversa de f sea uniformemente continua. El que la inversa sea autómata celular se sigue del hecho de que f es un morfismo de coálgebras colibres.

Teorema. 3.3.1. *Un comportamiento global $f : A^G \to B^G$ es reversible si tiene una función inversa y ésta es una función uniformemente continua.*

Demostración. Si f^{-1} es una flecha en $\mathcal{UNIF}$ entonces, por definición de inversa, se tiene que los extremos del siguiente diagrama conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
 & DA \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "f"'] & D(DA) \arrow[r, equal] \arrow[d, "Df"] & D(DA) \\
DB \arrow[ur, "f^{-1}"] \arrow[r, equal] & DB \arrow[r, "\delta_B"'] & D(DB) \arrow[ur, "Df^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Por otro lado, el cuadrado del centro conmuta, pues f es un morfismo de coálgebras. Así, se tiene que el diagrama externo conmuta, con lo que se tiene la definición de morfismo de coálgebras para la flecha f^{-1}.

Como f es un autómata celular, entonces f es un morfismo de coálgebras colibres, por lo que $< DA, \delta_A >$ y $< DB, \delta_B >$ son colibres.

Por tanto f^{-1} es un autómata celular. Por tanto f es reversible. $\square$

Es importante notar que la demostración del teorema anterior no utiliza que D sea el funtor exponencial o que f sea un autómata celular, es necesario únicamente que f sea un morfismo de coálgebras colibres.

En el siguiente capítulo se define el concepto de autómata celular y se construyen las categorías de comportamientos locales y globales como se hizo en este capítulo, pero utilizando otro funtor.

Capítulo 4

Autómatas celulares no uniformes

En este capítulo se presenta el concepto de *autómata celular no uniforme*, o dependiente del contexto, dado por Cattaneo *et al.* en [9]. Se muestra cómo aprovechar las construcciones utilizadas en el capítulo 3 para trabajar con este tipo de autómata celular, adaptando la definición de comportamiento local y el funtor utilizado para poder trabajar con categorías de coKleisli y coEilenberg-Moore.

Un autómata celular no uniforme es un autómata celular cuyo comportamiento local depende del punto que se esté evaluando. Es decir, cada célula puede tener una regla de transición distinta.

Ejemplo. 4.0.2. *Sean* $\{1,0\}$*el alfabeto y* $\mathbb{Z}$ *el universo, se define el autómata celular no uniforme* $H : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ *como*

$$H(c)(z) = \begin{cases} c(z) \text{ si } z = 0 \\ c(z-1) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

En el ejemplo anterior, se necesitan dos reglas de transición $t_i : \{1,0\} \to \mathbb{Z}$, una para la célula 0 y otra para todas las demás. Por cada regla de transición se tiene un comportamiento local k_i. Sin embargo se quiere una única función para las reglas de transición utilizadas, por lo que se utiliza un comportamiento local no uniforme.

Definición. 4.0.3. *Dado un conjunto de reglas de transición* $\{t_i | t_i : A^{N_i} \to B, i \in G\}$*, un comportamiento local es una función* $k : A^G \times G \to B$*, donde* $k(c,g) = t_g(c \restriction_N)$*.*

El segundo argumento del dominio indica el punto a evaluar y permite al comportamiento local elegir una regla de transición.

El siguiente ejemplo es una simplificación del modelo propuesto por Berjak y Hearne [7] , para simular el comportamiento de un incendio en una zona donde hay elementos inflamables y no inflamables.

Ejemplo. 4.0.4. *Sean* $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *el universo, con* $F, A \subseteq G$, $\{0,1,2\} \times \{0,1,...,m\}$ *el alfabeto y* $\pi_1 : \{0,1,2\} \times \{0,1,...,m\} \to \{0,1,2\}$ *la proyección canónica* $\pi_1(\langle a,b\rangle) = a$. *Se definen las siguientes vecindades y reglas de transición:*

1. $N_F = \{0,1\}^2, t_F(c \restriction_{N_F}) = \begin{cases} \langle 0,0\rangle \text{ } si \text{ } \Sigma_{y\in N_F}\pi_1(y) = 0 \\ \langle 1,n+1\rangle \text{ } si \text{ } \Sigma_{y\in N_F}\pi_1(y) > 0 \text{ } y \text{ } n < m \\ \langle 2,m\rangle en \text{ } otro \text{ } caso \end{cases}$

2. $N_A = \{< 0,0 >\}$ *y* $t_A(c \restriction_{N_A}) =< 0,0 >$

La primera vecindad y regla corresponden a una celda que se puede incendiar o ya se incendió. Donde 0 *en la primera entrada de la imagen significa que no se está quemando ni se ha quemado. El* 1 *representa que se está quemando. Y el* 2 *significa que ya se quemó. La segunda entrada indica cuánto tiempo estuvo incendiándose. La segunda regla de transición, corresponde a las celdas que no se pueden incendiar, como una roca.*

Así, el comportamiento local es el siguiente:

$$k(c,x) = \begin{cases} t_F(c \restriction_{N_F}) \text{ } si \text{ } x \in F \\ t_A(c|N_A) \text{ } si \text{ } x \in A \end{cases}$$

Este comportamiento local recibe una configuración, como el comportamiento local clásico, pero se necesita información adicional para determinar qué regla de transición se utilizará para determinar el siguiente estado.

Utilizando comónadas, se puede trabajar con estos autómatas celulares como se ha hecho con los autómatas celulares uniformes.

Si D es el funtor para autómatas celulares clásicos, se tiene que las definiciónes dadas para la comónada quedan de la siguiente manera al curryficarlas:

1. $Df(c) = \lambda y.c(y)$
2. $\delta(c) = \lambda y.(c \triangleright y)$

Aquí y más adelante, usamos la notación de abstracción lambda $\lambda y.a$, la cual denota a la función $y \mapsto a$.

El funtor D para autómatas celulares clásicos no alcanza para definir a estos nuevos autómatas, por lo que para que se pueda obtener la categoría de los autómatas celulares no uniformes, se debe usar un nuevo funtor.

Definición. 4.0.5. *El funtor $D' : \mathcal{UNIF} \to \mathcal{UNIF}$ para autómatas celulares no uniformes se define de la siguiente manera.*

1. *$D'A = A^G \times G$ para los objetos*

2. *$D'f = f^G \times G$ para los morfismos, esto es $D'f(c,x) = (\lambda y.f(c(y)), x)$, pues $D'f : A^G \times G \to B^G \times G$. Equivalentemente $D'f(c,x) = (Df(c), x)$.*

También hay que modificar a la comultiplicación y la counidad para que funcionen con el nuevo funtor.

Definición. 4.0.6. *Las transformaciones naturales, counidad y comultiplicación, para formar la comónada para autómatas celulares no uniformes son:*

1. *La counidad $\epsilon'_A : A^G \times G \to A$ está definida por $\epsilon'_A(c,x) = c(x)$.*

2. *La comultiplicación $\delta'_A : A^G \times G \to (A^G \times G)^G \times G$ está definida por $\delta'_A(c,x) = (\lambda y.(c,y), x)$.*

Teorema. 4.0.7. *La terna $< D', \epsilon', \delta' >= \mathbb{D}'$ es una comónada.*

Demostración. Si $(c,x) \in A^G \times G$ entonces

$$\epsilon'_{D'A}(\delta'_A(c,x)) = \epsilon'_{D'A}(\lambda y.(c,y), x) = (c,x)$$

$$D'\epsilon'(\delta_A(c,x)) = D'\epsilon'(\lambda y.(c,y), x) = (\lambda z.\epsilon'(\lambda y.(c,y))(z), x) = (\lambda z.\epsilon'(c,z), x) = (\lambda z.c(z), x)$$

Y, como $(c,x) = (\lambda z.c(z), x)$, se tiene que

$$\epsilon'_{D'A}(\delta'_A(c,x)) = D'\epsilon'(\delta_A(c,x))$$

Por lo que la primera condición de comónada se cumple. Además

$$\delta'_{D'A}(\delta'_A(c,x)) = \delta'_{D'A}(\lambda y.(c,y), x) = (\lambda z.(\lambda y.(c,y), z), x)$$

Y

$$D'\delta'_A(\delta'_A(c,x)) = D'\delta'_A(\lambda y.(c,y),x) = ((\lambda z.\delta'_A(\lambda y.(c,y)(z)),x) = \\ (\lambda z.\delta_A(c,z),x) = (\lambda z.(\lambda w.(c,w),z),x)$$

Por lo que

$$\delta'_{D'A}(\delta(c,x)) = D'\delta'_A(\delta_A(c,x))$$

Por lo tanto $< D', \epsilon', \delta' >$ es una comónada. □

Con esto se puede dar ya la definición de comportamiento global no uniforme, utilizando la extensión de coKleisli.

Definición. 4.0.8. *Dado un comportamiento local no uniforme $l : A^G \times G \to B$, un comportamiento global (autómata celular) no uniforme $l^\dagger : A^G \times G \to B^G \times G$ está dado por:*

$$l^\dagger(c,x) = Dl \circ \delta_A(c,x) = D'l(\delta(c,x)) = D'l(\lambda y.(c,y),x) = (\lambda y.l(c,y),x).$$

Al igual que para los autómatas celulares clásicos, el comportamiento global no uniforme coincide con la extención de coKleisli del comportamiento local no uniforme.

De esta manera se da la definición de las categorías de comportamientos locales y de comportamientos globales no uniformes, análogamente a como se hizo en el capítulo 3 para autómatas uniformes.

Definición. 4.0.9. *La categoría de comportamientos locales no uniformes es la categoría de coKleisli asociada a la comónada $\mathbb{D}'$.*

Por lo que la categoría de comportamentos globales resulta ser la siguiente.

Definición. 4.0.10. *La categoría de comportamientos globales no uniformes (o autómatas celulares no uniformes) es la imagen de la inmersión $\psi' : coKl(\mathbb{D}') \to coEM(\mathbb{D}')$, definido en la proposición 2.2.16. Es decir, la subcategoría de coálgebras colibres para la comónada $\mathbb{D}'$.*

En la siguiente sección se explora la relación entre los autómatas uniformes y no uniformes. En especial, utilizar comportamientos globales uniformes para trabajar con los no uniformes.

4.1. Morfismos Entre Uniformes y No Uniformes

La manera anterior de ver a los autómatas no uniformes, puede resultar obscura a la hora de evaluar los comportamientos globales. Para mejorar esta situación, se pueden utilizar las siguientes herramientas para utilizar autómatas celulares uniformes para su evaluación.

Definición. 4.1.1. *Sean $\mathbb{D} =< D, \epsilon, \delta >$ y $\mathbb{D}' =< D', \epsilon', \delta' >$ comónadas en una categoría C. Un morfismo de comónadas es una transformación natural $\tau : D' \to D$ tal que $\epsilon \circ \tau = \epsilon'$ y $\delta \circ \tau = \tau^2 \circ \delta'$. Esto es:*

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "\epsilon"] & \\ D \arrow[r, "\epsilon"'] & Id_{\mathscr{C}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D' \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\tau"'] & D'D' \arrow[d, "\tau^2"] \\ D \arrow[r, "\delta"'] & DD \end{tikzcd}$$

Es decir, τ asocia a las counidades y a las comultiplicaciones con sus respectivas transformaciones en cada comónada.

Las comónadas y los morfismos de comónadas forman una categoría. La prueba para mónadas y morfismos de mónadas puede ser encontrada en [22].

Notación. La transformación natural τ^2 aplicada a $D'D'A$ se define como:

$$\tau^2_{D'D'A} = \tau_{D'DA} \circ D'\tau_{D'A} = D\tau_{D'A} \circ \tau_{D'D'A}.$$

La utilidad de definir a los autómatas celulares utilizando la traslación $\triangleright$ se hizo evidente al demostrar el teorema de Curtis-Hedlund utilizando propiedades de funtores adjuntos. Pero la traslación es también un morfismo de comónadas, lo cual permitirá tener morfismos entre tipos de autómatas celulares.

Proposición. 4.1.2. *La traslación $\triangleright$ es un morfismo entre las comónadas $\mathbb{D}'$ y $\mathbb{D}$ dadas en la proposición 3.1.1 y el teorema 4.0.7, respectivamente.*

Demostración. $\epsilon(\triangleright (c)(x)) = \epsilon(c \triangleright x) = (c \triangleright x)(e_G) = c(x) = \epsilon'(c)(x)$

Además

$$\delta(\triangleright (c)(x))(y) = \triangleright (c \triangleright x)(y) = (c \triangleright x) \triangleright y$$

Por otro lado

$$\triangleright (\triangleright (\delta'(c, x), y)) = \triangleright (\triangleright ((\lambda z.(c, z), x), y) = \triangleright (c \triangleright x, y) = (c \triangleright x) \triangleright y$$

Por lo tanto

$$\delta(\rhd (c)(x))(y) = \rhd (\rhd (\delta'(c,x)))(y) \quad \text{y} \quad \epsilon(\rhd (c)(x)) = \epsilon'(c)(x).$$

□

En este texto son de interés los funtores entre las categorías de coKleisli y entre las categorías de coEilenberg-Moore de distintas comónadas generados a partir de los morfismos de comónadas, los cuales se obtienen como se muestra a continuación.

Teorema. 4.1.3. *Todo morfismo de comónadas $\tau :< D', \epsilon', \delta' > \to < D, \epsilon, \delta >$ define dos funtores:*

1. *Un funtor $K_\tau : coKl(D) \to cokl(D')$ donde $K_\tau A = A$, $K_\tau f = f \circ \tau$.*
2. *Un funtor $E_\tau : coEM(D') \to coEM(D)$ donde $E_\tau < A, u > = < A, \tau \circ u >$ y $E_\tau f = f$.*

Demostración. En efecto, K_τ es funtor, pues, por definición de composición en la categoría de coKleisli se tiene que:

$$K_\tau(g \bullet f) = g \bullet f \circ \tau_A = g \circ Df \circ \delta_A \circ \tau_A$$

Además, por ser τ morfismo de comónadas y una transformación natural:

$$g \circ Df \circ \delta_A \circ \tau_A = g \circ Df \circ \tau_A^2 \circ \delta'_A = g \circ D'f \circ D\tau_A \circ \tau_{D'A} \circ \delta'_A = g \circ D\tau_B \circ D'f \circ \tau_{D'A} \circ \delta'_A$$

Lo cual es la definición de la composición en la categoría de coKleisli para la segunda comónada, de los morfismos $g \circ D\tau_B$ y $D'f \circ \tau_{D'A}$. Así:

$$g \circ D\tau_B \circ D'f \circ \tau_{D'A} \circ \delta'_A = (g \circ \tau_B) \bullet (f \circ \tau_A) = K_\tau(g) \bullet K_\tau(f)$$

Y E_τ lo es, pues los siguientes cuadrados (y por tanto el diagrama completo) conmutan por definición de morfismo de coálgebras:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & D'A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "D'f"'] & DA \arrow[d, "Df"] \\ B \arrow[r, "v"] & D'B \arrow[r, "\tau_B"] & DB \end{tikzcd}$$

Además, $K_\tau(\epsilon) = \epsilon\tau = \epsilon'$ por definición de τ. Y E_τ es la identidad en los morfismos. Entonces K_τ y E_τ preservan morfismo identidad.

$\square$

Así, por la existencia de la inmersión ψ de la categoría de coKleisli en la categoría de coEilenberg-Moore, se tendría ya una manera de evaluar a los autómatas celulares no uniformes en un punto, como autómatas celulares clásicos si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} cokl(D) \arrow[r, "K_\triangleright"] \arrow[d, "\psi"'] & coKl(D') \arrow[d, "\psi'"] \\ coEM(D) & coEM(D') \arrow[l, "E_\triangleright"] \end{tikzcd}$$

Sin embargo, esto es falso en general. Pues el funtor $E_\triangleright$ no manda coálgebras colibres en colibres. Por ejemplo $E_\triangleright < A^G \times G, \delta_A > = < A^G \times G, \triangleright_A \circ \delta_A >$, sin embargo $A^G \times G \neq DA = A^G$.

Del diagrama anterior se puede rescatar el siguiente:

$$\begin{tikzcd} coKl(D) \arrow[r, "K_\triangleright"] \arrow[dr, "\psi' \circ K_\triangleright"'] & coKl(D') \arrow[d, "\psi'"] \\ & coEM(D') \end{tikzcd}$$

Esto muestra que se tienen autómatas celulares no uniformes para los cuales, evaluar en una configuración y un punto, es lo mismo que evaluar un autómata celular clásico en la configuración trasladada por el punto.

Surge la pregunta ¿Se puede ver toda evaluación de un no uniforme en un punto determinado, como un autómata uniforme correspondiente a ese punto?

Como aportación original de este trabajo, se da respuesta a la pregunta anterior, buscando un camino desde la categoría de autómatas celulares no uniformes, hasta la categoría de comportamientos locales uniformes.

Para resolver el problema, la idea básica será utilizar un punto $x \in G$ para evaluar al autómata no uniforme, pero en vez de proceder como anteriormente, se mandará al autómata celular no uniforme a un autómata uniforme indexado por el punto x.

Teorema. 4.1.4. *La terna* $\mathbb{D}^x =< D^x, \epsilon^x, \delta^x >$ *donde:*

1. *El funtor* $D^x : \mathcal{UNIF} \to \mathcal{UNIF}$ *está definido por* $D^x A = A^G \times \{x\}$ $D^x f = f^G \times \{x\}$ *con* $D^x f = (\lambda y.f(c(y)), x)$.
2. ϵ^x*, definida como* $\epsilon^x(c, x) = c(e_G)$.
3. δ^x*, donde* $\delta^x(c, x) = (\lambda y.(c \rhd y, x), x)$.

Es una comónada.

Demostración. Dado que:

1. Por la proposición A.0.16 del apéndice A, $A^G \cong A^G \times \{x\}$.
2. La counidad $\epsilon(c) = \epsilon^x(c, x)$.
3. La comultiplicación $\delta^x(c, x) = ((\delta(c), x), x)$, pues $\delta(c) = \lambda y.(c \rhd y)$.

Se tiene que el que $< D^x, \epsilon^x, \delta^x >$ sea una comónada, es un corolario de la proposicón 3.1.3.

□

Ahora se necesita la transformación natural que mande al funtor D', correspondiente a los autómatas celulares no uniformes, al funtor D^x de los autómatas celulares uniformes e indexados.

Proposición. 4.1.5. *La correspondencia* $i_x : \mathbb{D}' \to \mathbb{D}^x$ *definida como* $i_x(c, y) = (c \rhd y, x)$*, es un morfismo de comónadas.*

Demostración. Se tiene que:

$$\epsilon^x(i_x(c, y)) = \epsilon^x(c \rhd y, x) = (c \rhd y)(1) = c(y \cdot_G e_G) = c(y) = \epsilon'_A(c, y)$$

Por otro lado:

$$\delta^x_{D^xA}(i_{xD'A}(c,y)) = \delta_{D^xA}(c \rhd y, x) = (\lambda w.(c \rhd y \rhd w, x), x)$$

Y

$$i_x{}^2(\delta'_{D'A}(c,y)) = i_x{}^2(\lambda z.(c,z), y) = D^x i_{xD'A} \circ i_{xD'D'A}(\lambda z.(c,z), y)$$

Por definición de morfimos de comónadas:

$$D^x i_{xD'A} \circ i_{xD'D'A}(\lambda z.(c,z), y) = D^x i_{xD'A} \circ i_{xD'D'A}(\lambda z.(c,z) \rhd y, x) = \\ ((\lambda u.i_{xD'A}(\lambda z.(c,z) \rhd y)(u), x), x) = ((\lambda u.(c \rhd y \rhd u), x), x)$$

Por lo que $i_x{}^2(\delta'_{D'A}(c,y)) = \delta^x_{D^xA}(i_{xD'A}(c,y))$.

Por lo tanto, i_x es un morfismo de comónadas. □

Con esto, se obtiene un morfismo $E_i : coEM(\mathbb{D}') \to coEM(\mathbb{D}^x)$ definido en los objetos como $E_i(A,u) = (A, i_x \circ u)$.

Fijando la atención en las coálgebras colibres, se tiene que $E_i(A^G \times G, \delta'_A) = (A^G \times G, i_x \circ \delta'_A)$.

Ahora sólo falta encontrar una categoría que se comporte como $coEM(\mathbb{D}^x)$ pero donde la coálgebra $< A^G \times G, i_x \circ d_A >$ sea colibre.

Sea $D^X : \mathcal{UNIF} \to \mathcal{UNIF}$ un funtor tal que $D^X A = A^G \times G$ y $D^X f = f^G \times Id_G$ con $D^X f(c,y) = D^x f(c,x)$. Es decir, $D^X f$ ve a todos los elementos de G, como x

Del teorema 4.1.4, se tiene lo siguiente.

Corolario. 4.1.6. *$< D^X, \epsilon^X, \delta^X >$, con $\epsilon^X_A(c,y) = \epsilon^x_A(c,x)$ y $\delta^X(c,y) = \delta^x(c,x)$ forman una comónada.*

Ahora se tiene a la comónada $< D^x, \epsilon^x, \delta^x >$, disfrazada de $< D^X, \epsilon^X, \delta^X >$. Pero en $< D^X, \epsilon^X, \delta^X >$, las coálgebras en la imagen de E_{I_x} son colibres, con $I_x(c,y) = i_x(c,y)$ pero con $I_x : A^G \times G \to A^G \times G$. Por lo que existe una biyección entre $\mathbb{D}^x$ y $\mathbb{D}^X$.

Además, se debe notar que $< D^x, \epsilon^x, \delta^x > \cong < D, \epsilon, \delta >$, por la manera en que se definieron la comultiplicación y la counidad para D^x y que $D^x f(c,x) = (\lambda y.f(c(y)), x) = (Df(c), x)$.

Con esto, se puede tener el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & coEM(\mathbb{D}') \arrow[dl, "\xi\circ E_{I_x}"'] \arrow[d, "E_{I_x}"] \\
coEM(\mathbb{D}) \cong coEM(\mathbb{D}^x) & coEM(\mathbb{D}^x) \arrow[l, "\xi"]
\end{tikzcd}$$

Donde ξ es la biyección entre $coEM(\mathbb{D}^x)$ y $coEM(\mathbb{D}^X)$.

Lo cual muestra que para cada autómata celular no uniforme y una célula, existe un autómata celular uniforme que determina el siguiente estado de la célula. Juntando los diagramas para pasar de uniformes a no uniformes, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
coKl(\mathbb{D}) \arrow[rr, "K_{\triangleright}"] & & coKl(\mathbb{D}') \arrow[d, "\psi'"] \\
coEM(\mathbb{D}) \cong coEM(\mathbb{D}^x) \arrow[u, "\phi^{-1}"] & & coEM(\mathbb{D}') \arrow[dl, "I_x"'] \\
 & coEM(\mathbb{D}^X) \arrow[ul, "\xi"] &
\end{tikzcd}$$

Donde ϕ es la restricción de ψ en el codominio, a las coálgebras colibres.

Por lo tanto, estudiar propiedades de los autómatas celulares no uniformes puede traducirse al estudio de un conjunto de autómatas celulares clásicos por cada no uniforme.

Con este último resultado se cumplen los objetivos de este texto, los cuales eran introducir al lector al tratamiento de los autómatas celulares como morfismos de una categoría y mostrar cómo esta forma de trabajarlos se pueda aprovechar para crear la categoría cuyas flechas son autómatas celulares no uniformes y utilizar los morfismos entre comónadas para encontrar una manera transformar autómatas celulares uniformes en no uniformes y viceversa.

Conclusiones.

El uso de teoría de categorías es muy importante en la computación teórica para estudiar diversas características de los lenguajes de programación y representar tipos de datos, en especial autómatas clásicos. Con este texto se tenía la intención de presentar la manera de extender el uso de la teoría de categorías para estudiar un tipo de máquina abstracto no clásica: los autómatas celulares.

Se presentó una categoría cuyos morfismos son comportamientos globales, los cuales se identificaron con autómatas celulares. Para construirla fue necesario el uso de una comónada. Primero se presentó el problema que surge al tratar de definir la categoría de comportamientos locales si únicamente se desea tener como flechas a las funciones cuyo dominio es un espacio de funciones y su contradominio no necesariamente lo es, pues no todos los objetos tendrían su morfismo identidad. Es por eso que se utilizó la categorá de coKleisli, donde se puede definir un morfismo identidad para cada objeto que además sea un comportamiento local. Más adelante se aprovechó la inmersión que existe de la categoría de coKeisli en la categoría de coEilenberg-Moore para definir una categoría cuyos morfismos fueran comportamientos globales, de manera análoga a la manera tradicional para definir estos comportamientos a partir de los comportamientos locales.

A partir de la categoría definida para autómatas celulares, se utilizaron las propiedades de funtores adjuntos para dar una caracterización de autómatas celulares como funciones uniformemente continuas. Se identificó a los autómatas celulares como morfismos entre coálgebras colibres y a partir de eso se demostró de manera inmediata un teorema sobre autómatas celulares reversibles.

También se utilizaron las construcciones para autómatas celulares clásicos para dar una categoría donde las flechas fueran autómatas celulares no uniformes. Mostrando otra ventaja de utilizar la teoría de categorías y principalmente los conceptos de comónada, adjunción y transformación natural.

Una vez introducidos los autómatas celulares a la teoría de categorías, se espera, por un lado, seguir traduciendo las propiedades de los autómatas celulares a la teoría de categorías y así aprovechar su relación con la programación funcional para ampliar el uso computacional de los autómatas celulares. También se espera agregar resultados utilizando la generalidad de la teoría de categorías.

En particular, se espera aprovechar los morfismos de comónadas para adaptar los teoremas para autómatas celulares clásicos a los autómatas celulares no uniformes. Como trabajo a futuro es deseable verificar si se puede dar una versión del teorema de Curtis-Hedlund utilizando las coálgebras para la comónada de comportamientos globales no uniformes.

Apéndice A

Espacios Uniformes

A continuación se listan algunas definiciones y resultados sobre espacios uniformes y la topología que generan. Para un tratamiento más amplio sobre estos espacios se recomienda ver [15].

Definición. A.0.7. *Un espacio uniforme es un conjunto X equipado con una colección Φ de relaciones binarias, llamada estructura uniforme, que satisfacen:*

1. *Si $U \in \Phi$ entonces $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq U$. Es decir contiene a la diagonal.*
2. *Si $U \in \Phi$, entonces $U^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in U\}$ está en Φ.*
3. *Si $U \in \Phi$ y $U \subseteq V \subseteq X \times X$, entonces $V \in \Phi$*
4. *Si $U, V \in \Phi$, entonces $U \cap V \in \Phi$.*
5. *Si $U \in \Phi$, entonces existe $V \in \Phi$ tal que $V \circ V \subseteq U$*

A los elementos de Φ se les llama entornos (entourages en inglés).

No todos los espacios topológicos son exponenciables. Una topología que sí permite tener objetos exponenciales es la generada por la uniformidad, esta topología está dada como sigue.

Proposición. A.0.8. *Toda uniformidad Φ sobre un conjunto X induce una topología τ_Φ, de la siguiente manera: $A \subseteq X$ es abierto en τ_Φ si y sólo si, para todo $x \in A$, existe $U \in \Phi$ tal que $\{y \in A | (x, y) \in U\} \subseteq A$.*

Demostración. Ver [15] □

Corolario. A.0.9. *El conjunto* $\{x\} \subseteq X$ *es abierto en* τ_Φ.

Definición. A.0.10. *Una función* $f : A \to B$ *entre espacios uniformes es uniformemente continua si para todo* $V \in \Phi_B$, *existe* $U \in \Phi_A$ *tal que* $(f \times f)(U) \subseteq V$.

Observación. A.0.11. *Toda función uniformemente continua en la topología inducida por las* $\Phi's$ *es continua* [15].

Definición. A.0.12. *La estructura uniforme discreta en un conjunto* X *es la estructura uniforme cuyos entornos son todos aquellos que contienen a* Δ.

Observación. A.0.13. . *La estructura uniforme discreta en un conjunto* X *es la estructura uniforme más grande en* X *respecto a la contención.*

La siguiente definición es la que permite exponenciar objetos en $\mathcal{UNIF}$, aprovechando que en este caso $\prod_G A \cong A^G$.

Definición. A.0.14. . *Dada una familia* $\{A_i\}_{i\in I}$ *de espacios uniformes, la estructura uniforme prodiscreta en el producto* $\prod_{i\in I} A_i$ *es la estructura uniforme inducida por cada* A_i. *Es decir,* $U \in \Phi_{\prod A_i}$ *si y sólo si* $U = \pi_i^{-1}(U_i)$ *para alguna* $i \in I$, *donde* $U_i \in \Phi_{A_i}$. *O lo que es lo mismo, es la estructura uniforme más pequeña respecto a la contención, para la cual las proyecciones* π_i *son uniformemente continuas* [22].

Observación. A.0.15. *Si* $x \in A^G$, *una vecindad de* x *es un conjunto de la forma*

$$V(x,N) = \{y \in A^G : x \restriction_N = y \restriction_N\} \qquad (N \subseteq G,\ |N| \leqslant \omega)$$

Esto se debe a que $\pi_i^{-1}(g) = \{x \in A^G : x(i) = g\ \}$ es abierto en la topología asociada a la uniformidad de A^G y $V(x,N) = \cap \pi_i^{-1}$.

Proposición. A.0.16. *Si* A *es un espacio uniforme, entonces* $A \times \{x\}$ *lo es.*

Demostración. Sea Φ_A la estructura uniforme de A, como $\{x\} \times \{x\}$ es la estructura uniforme de $\{x\}$, se tiene que $\Phi_A \times \{\{x\} \times \{x\}\}$ es una estructura uniforme para A. □

Apéndice B

Acción y G-equivarianza

Definición. B.0.17. *Si $(G, \cdot)$ es un monoide y A un conjunto, una acción derecha de G en A es una función $\triangleright\colon A \times G \to A$ tal que para todo $a \in A$ y $g, h \in G$*

1. $a \triangleright (g \cdot h) = (a \triangleright g) \triangleright h$
2. $a \triangleright e_G = a$

Se dice que A es un G-conjunto.

Existe una categoría cuyos objetos son G-conjuntos y cuyos morfismos se definen como sigue.

Definición. B.0.18. *Una función $f : A \to B$ entre dos G-conjuntos es un morfismo de G-conjuntos si conmuta con la acción de G sobre los conjuntos, es decir:*

$$f(a \triangleright g) = f(a) \triangleright g$$

Equivalentemente, f es un G-equivariante si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \times G \arrow[r, "\triangleright"] \arrow[d, "<f, id_G>"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \times G \arrow[r, "\triangleright"] & B
\end{tikzcd}$$

Se dice que f es G-equivariante.

Bibliografía

[1] Jiří Adámek, Horst Herrlich, George E. Strecker. Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats. http://katmat.math.uni-bremen.de/acc (2004).

[2] Andrea Asperti y Giuseppe Longo. Categories Types and Structures. The MIT Press (August 23, 1991).

[3] Michael Barr y Charles Wells.Toposes, Triples and Theories v1.1. www.cwru.edu/artsci/math/wells/pub/ttt.html (2002).

[4] Stephen G Berjak, John W Hearne. An improved cellular automaton model for simulating fire in a spatially heterogeneous Savanna system. School of Mathematics, Statistics and Information Technology, University of Natal. Received 14 February 2001; received in revised form 11 July 2001; accepted 30 July 2001.

[5] William A Beyer, Peter H. Sellers, Michael S. Waterman. Stanislaw M. Ulam's Contributions to Theorical Theory. Letters in Mathematical Physics 10, 231-242 (1985).

[6] Michal Bidlo and Zdenek Vasicek. Comparison of the Uniform and Non-Uniform Cellular Automata-Based Approach to the Development of Combinational Circuits . Faculty of Information Technology . Brno University of Technology. NASA/ESA Conference on Adaptive Hardware and Systems (2009).

[7] Stephen Brookes y Shai Geva. Computational Comonads and Ontentional Semantics. In Aplications of Categories in Computer Science LMS Lecture Notes 177. Cambridge University Press (1992).

[8] Silvio Capobianco y Tarmo Uustalu. A categorical outlook on cellular automata.Institute of Cybernetics at Tallinn University of Technology.

[9] G. Cattaneo, A. Dennunzio, E. Formenti, and J. Provillard. Non-uniform Cellular Automata. In Proc. Third International Con-

ference on Language and Automata Theory and Applications, LATA2009, Tarragona, Spain (2009).

[10] Ceccherini-Silberstein Tulio and Coornaert Michel. Cellular Automata and Groups.Springer Monographs in Mathematics (2010). Springer.

[11] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert: A generalization of the Curtis-Hedlund Theorem. Comput. Sci. 400, 225-229 (2008)

[12] Edgar F. Codd. Cellular Automata. Academic Press, New York(1968).

[13] Martin Gardner. Mathematical Games. The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". Scientific American 223 (1970).

[14] Hasuo, I., Jacobs, B., and Uustalu, T. (2007) Categorical views on computations on trees. In Arge, L., Cachin, C., Jurdzinski, T., and Tarlecki, A., eds., Proc. of 34th Int. Coll. On Automata, Languages and Programming, ICALP 2007 (Wroc law, July 2007), Lect. Notes in Comput. Sci. 4596, 619-630. Springer.

[15] J.R. Isbell. Uniform Spaces. American Mathematical Society (1964).

[16] Saunders Mac Lane. Categories for the Working Mathematician. Springer; 2nd edition. (September 25, 1998)

[17] Moggi, E. Notions of computation and monads. Inform. and Comput. 93(1), 55-92. (1991)

[18] John Von Neumann, edited and completed by Arthur W. Burks. Theory of Self-Reproducing Automata.University of Illinois Press (1966).

[19] Mark Andrew Smith. Cellular Automata Methods in Mathematical Physics. Massachusetts Institute of Technology (1994)

[20] Christopher D. Thomas . Evolution of Cellular Automata for Image Processing. School of Computer Science. University of Birmingham (2000).

[21] Marco Tomassini and Mathieu Perrenoud . Nonuniform Cellular Automata for Cryptography. Computer Science Institute. University of Lausanne.Complex Systems v12, 71-81 (2000).

[22] J. Climent Vidal y J. Soliveres Tur. On the Morphisms and Deformations of Monads and Adjoints and their relationship. Universidad de Valencia, Departamento de Logica y Filosofía de la Ciencia.www.uv.es/~jkliment/Documentos/Monadas.pc.pdf (2005).