



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**EL SABOR Y ESPÍN DE LOS BARIONES LIGEROS.  
UNA COMPARACIÓN DE TRES MODELOS  
EFECTIVOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICO**

**P R E S E N T A :**

**MIGUEL ÁNGEL LÓPEZ RUIZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ROELOF BIJKER  
2012**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

López

Ruiz

Miguel Ángel

55 91 93 26 06

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

407056316

### 2. Datos del tutor

Dr.

Roelof

Bijker

Bijker

### 3. Datos del sinodal 1

Dr.

Luis Fernando

Urrutia

Ríos

### 4. Datos del sinodal 2

Dr.

Genaro

Toledo

Sánchez

### 5. Datos del sinodal 3

Dr.

Erick Leonardo

Patiño

Jaidar

### 6. Datos del sinodal 4

Dra.

Myriam

Mondragón

Ceballos

### 7. Datos del trabajo escrito

El sabor y espín de los bariones ligeros

Una comparación de tres modelos efectivos

100p

2012

*A mis padres  
Miguel y Patricia*

# Agradecimientos

Primeramente quisiera expresar mi gratitud a mi profesor y tutor el Dr. Roelof Bijker, pues gracias a su enseñanzas, consejos y paciencia este trabajo pudo ser terminado. Además le agradezco profundamente su apoyo, confianza y recomendación para presentar este trabajo en varias ocasiones en distintos eventos académicos.

Un sincero agradecimiento a mis sinodales: la Dra. Myriam Mondragón, el Dr. Genaro Toledo, el Dr. Luis Urrutia y el Dr. Leonardo Patiño por su tiempo y comentarios sobre esta tesis.

También quisiera agradecer al Dr. Alexis Aguilar por su ayuda y consejo sobre el análisis de datos experimentales.

Debo un especial reconocimiento a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México y a sus profesores por brindarme una educación y formación de la mejor calidad.

Gracias a Edgar, Iván, Martín, Tona y Ricardo por todos los momentos que hicieron de la experiencia universitaria una de las mejores, pero principalmente por su valiosa amistad.

A la familia Golzarri-Arroyo le agradezco abrirme las puertas de su hogar y siempre hacerme sentir como en casa.

Mi infinita gratitud a Lilian por su amor y cariño, por su comprensión, paciencia y consejos en los momentos más duros, por su amistad y confianza y por todas las risas, bromas y fuertes debates que hoy forman parte de lo que soy. *Te amo, feota.*

Muchas gracias a Daniela y Rogelio por su ayuda incondicional y por hacerme sentir que siempre puedo contar con ellos en cualquier momento.

Todo esto nunca hubiera sido posible sin el apoyo y confianza de mis padres, quienes han sido y siempre serán mi inspiración. *Este logro es de ustedes.*

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 El grupo SU(3)</b>	<b>3</b>
1.1 Transformaciones infinitesimales y generadores . . . . .	3
1.2 Diagramas de peso . . . . .	7
<b>2 El modelo de quarks</b>	<b>13</b>
2.1 Bariones . . . . .	14
2.1.1 Construcción de las funciones de onda . . . . .	16
2.2 Mesones . . . . .	20
2.2.1 Construcción de las funciones de onda . . . . .	21
<b>3 Extensiones al modelo de quarks</b>	<b>25</b>
3.1 Modelo de quarks quirales . . . . .	25
3.2 Modelo de la nube mesónica . . . . .	27
3.3 Modelo de quarks con producción de pares quark-antiquark (Unquenched constituent quark model) . . . . .	29
<b>4 Simetrías</b>	<b>35</b>
4.1 SU(2)-Isoespín . . . . .	35
4.2 SU(3)-Sabor . . . . .	38
4.3 SU(6)-Espín-Sabor . . . . .	40
<b>5 El contenido de Sabor</b>	<b>43</b>
5.1 Modelo de quarks quirales . . . . .	43
5.2 El modelo de la nube mesónica . . . . .	49
5.3 Modelo de quarks con producción de pares quark-antiquark (Unquenched constituent quark model) . . . . .	56
5.4 Fluctuaciones piónicas y la asimetría de sabor . . . . .	61

---

<b>6</b>	<b>El espín de los bariones</b>	<b>71</b>
6.1	El espín en el MCM. . . . .	72
6.2	El espín en el UCQM . . . . .	77
6.3	El espín en el $\chi$ QM . . . . .	80
	<b>Conclusiones</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Álgebra de SU(3)</b>	<b>89</b>
A.1	Reglas de conmutación . . . . .	89
A.2	Operadores escalón . . . . .	90
	<b>Referencias</b>	<b>93</b>

# Introducción

La composición de los hadrones es uno de los temas centrales de la física hadrónica y puede ser tratada en términos de grados de libertad efectivos, o a un nivel más elemental, desde el surgimiento de dichos grados de libertad a partir de la teoría fundamental de la interacción fuerte: la Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés). A pesar de los recientes avances de cálculos en la red (Lattice-QCD), resolver las ecuaciones de QCD en la región no perturbativa sigue siendo un gran problema. Como una solución alternativa, surgen modelos efectivos hadrónicos como son los modelos de solitones, quarks quirales y variantes del modelo de quarks constituyentes; que aunque son construidos para reproducir algunas propiedades de la interacción fuerte, ninguno de ellos es QCD.

A pesar del éxito del modelo de quarks constituyentes de reproducir algunas propiedades como el momento magnético del nucleón, la estructura hadrónica no es tan trivial como lo propone, en particular existe una fuerte evidencia sobre la existencia de grados de libertad exóticos adicionales a los quarks de valencia, como lo son configuraciones quark-antiquark en la función de onda de los bariones. El origen de estas configuraciones se presume no perturbativo, de lo contrario los pares quark-antiquark del mar, generados por gluones, deberían ser simétricos de sabor e invariantes de CP. Sin embargo, experimentalmente se ha observado una notable asimetría  $\bar{d}/\bar{u}$  en el mar del protón. En consecuencia, a la asimetría de sabor en el mar del nucleón se le atribuye un origen no perturbativo. Y ya que actualmente la dificultad de realizar cálculos en este régimen a primeros principios de QCD es muy grande, es a través de modelos efectivos que se trata de explicar dicho fenómeno. Por esta razón, el contenido de sabor en el mar del protón se presenta como una excelente prueba para los modelos de estructura hadrónica.

La asimetría de sabor en el protón está relacionada con la integral de Gottfried como

$$S_G = \int_0^1 \frac{F_2^p(x) - F_2^n(x)}{x} dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 [\bar{d}_p(x) - \bar{u}_p(x)] dx = \frac{1}{3} [1 - 2\mathcal{A}(p)], \quad (0.1)$$

donde  $F_2^p(x)$  y  $F_2^n(x)$  son las funciones de estructura electromagnética del protón

y el neutrón, respectivamente, y  $x$  es la variable de Bjorken que mide la fracción de momento que lleva el partón, en relación con el momento del hadrón.

Bajo la suposición de un mar de quarks simétrico en sabor, se obtiene la regla de la suma de Gottfried  $S_G = 1/3$  [1], por lo que cualquier desviación de este valor implicaría una asimetría  $\bar{d}/\bar{u}$  en el mar del nucleón y en consecuencia sería prueba de la existencia de componentes de Fock de alto orden en la función de onda del protón, como lo son configuraciones  $qqq - q\bar{q}$ . La primera evidencia de la violación de la suma de Gottfried provino de la NMC (New Muon Collaboration)[2] y posteriormente fue confirmada por experimentos de Drell-Yan [3][4]. Los resultados experimentales mostraron una mayor cantidad de antiquarks  $\bar{d}$  sobre  $\bar{u}$  en el mar del protón.

A finales de la década de los ochenta, la EMC (European Muon Collaboration), obtuvo otra evidencia de que el modelo de quarks constituyentes no era suficiente para describir la estructura hadrónica, al observar que los quarks de valencia contribuyen sólo con una pequeña fracción al espín total del protón.

Con esta motivación, en el presente trabajo, se hará una comparación de tres modelos efectivos (modelo de quarks quirales, modelo de la nube mesónica y el modelo de quarks con producción de pares quark-antiquark (Unquenched Constituent Quark Model)) para el contenido de sabor de los bariones ligeros en estado base, haciendo énfasis en la asimetría del mar de quarks, y también se analizará las contribuciones de espín que predicen cada uno de los modelos.

Para esto, primero se dará una breve introducción al grupo  $SU(3)$  con el fin de plantear las herramientas de la teoría de grupos que serán indispensables a lo largo del trabajo. Seguido a esto, se presenta una revisión del modelo de quarks constituyentes y posteriormente se introducen las bases de los tres modelos efectivos que serán utilizados en los cálculos del contenido de sabor y espín. Anterior a estos cálculos, se presentará el procedimiento seguido para la obtención de una serie de relaciones de simetría de isoespín, sabor y espín-sabor, las cuales serán indispensables para simplificar los cálculos en la obtención de resultados. Al final, se hará una comparación cuantitativa con datos numéricos obtenidos a través de una simplificación en las componentes de las funciones de onda que describen cada uno de los modelos.

# Capítulo 1

## El grupo $SU(3)$

La teoría de grupos ha mostrado ser una herramienta relevante en la física pues ya que las transformaciones de simetría que dejan invariante al sistema físico en cuestión forman un grupo, las implicaciones de dichas simetrías pueden ser deducidas sin la necesidad de un análisis dinámico y únicamente por las propiedades del grupo al que pertenecen.

En este capítulo se dará una breve introducción al grupo  $SU(3)$  y las herramientas matemáticas indispensables para el estudio realizado en este proyecto de tesis. Los resultados mostrados a continuación están basados en el trabajo realizado por Stancu en su libro de aplicaciones de la teoría de grupos a la física subnuclear [6].

### 1.1 Transformaciones infinitesimales y generadores

La representación fundamental del grupo  $SU(3)$  es una matriz especial unitaria de  $3 \times 3$  la cual se puede expresar como una transformación infinitesimal de la siguiente forma:

$$\mathbb{A} = \mathbb{1}_3 + i\rho \tag{1.1}$$

donde  $\mathbb{1}_3$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$  y  $\rho$  es una matriz de  $3 \times 3$  con entradas complejas que satisface la propiedad de hermiticidad  $\rho = \rho^\dagger$  requerida por la condición de unitariedad de  $\mathbb{A}$ . Por lo tanto, si las entradas son de la forma  $\rho_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$  entonces  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $b_{ij} = -b_{ji}$  y por ende  $b_{ii} = 0$ .

Por conveniencia se tomará una base esférica en la que las coordenadas de un punto en el espacio estarán dadas por las componentes  $x_1, x_0$  y  $x_{-1}$ , las cuales a su vez se

pueden expresar en términos de los armónicos esféricos  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ <sup>1</sup> como sigue

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) = r \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{11}(\theta, \varphi) \\ x_0 &= z = r \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{10}(\theta, \varphi) \\ x_{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) = r \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{1-1}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  es la norma del vector de posición.

La transformación infinitesimal unitaria  $\mathbb{A}$  transforma las componentes  $x_i$  a  $x'_i$  ( $i = 1, 0, -1$ ) de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_0 \\ x'_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ia_{11} & ia_{10} - b_{10} & ia_{1-1} - b_{1-1} \\ ia_{10} + b_{10} & 1 + ia_{00} & ia_{0-1} - b_{0-1} \\ ia_{1-1} + b_{1-1} & ia_{0-1} + b_{0-1} & 1 + ia_{-1-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Debido a que  $\mathbb{A}$  es una transformación de  $SU(3)$ , como ya se mencionó anteriormente  $\mathbb{A}$  es unitaria y además es una transformación especial, i.e.  $\det \mathbb{A} = 1$ . Por lo tanto, los parámetros de esta transformación infinitesimal deben satisfacer la condición

$$a_{11} + a_{00} + a_{-1-1} = 0 \quad (1.4)$$

En donde los términos de segundo orden en  $\rho_{ij}$  han sido despreciados debido al carácter infinitesimal de  $\mathbb{A}$ . De esta forma, cuando se elimina el término  $a_{-1-1}$  de la ecuación (1.3) se tienen únicamente 8 parámetros independientes.

Por otro lado, consideremos ahora una función  $F$  de las coordenadas  $x^i$ . Una transformación infinitesimal  $x^i \rightarrow x^i + dx^i$  cambia  $F$  infinitesimalmente por

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i = \delta a^\sigma u_\sigma^i \frac{\partial F}{\partial x^i} = \delta a^\sigma \hat{X}_\sigma F \quad (1.5)$$

donde los operadores

$$\hat{X}_\sigma = u_\sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.6)$$

<sup>1</sup>Los armónicos esféricos están definidos como

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \left[ \frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

donde  $P_\ell^m$  son los polinomios de Legendre asociados.

se las llama *operadores infinitesimales* o *generadores* del grupo de transformaciones y satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{X}_a, \hat{X}_b] = if_{abc}\hat{X}_c \quad (1.7)$$

A esta expresión se le conoce como el *Álgebra de Lie* asociada al grupo, la cual está completamente determinada por las constantes de estructura  $f_{abc}$ .

Es importante hacer notar que si existe una representación unitaria del álgebra (como la utilizada para  $SU(3)$ ), entonces las constantes  $f_{abc}$  son reales. Para comprobarlo, tomamos el adjunto de la ecuación (1.7) y observamos que

$$\begin{aligned} [\hat{X}_a, \hat{X}_b]^\dagger &= -if_{abc}^*\hat{X}_c \\ &= [\hat{X}_b, \hat{X}_a] = if_{bac}\hat{X}_c = -if_{abc}\hat{X}_c \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde  $f_{abc} = -f_{bac}$  debido a que  $[A, B] = -[B, A]$ . [7]

Para obtener los generadores de  $SU(3)$  tomemos la función escalar  $F = F(x_1, x_0, x_{-1})$  la cual bajo una transformación infinitesimal  $S$  cambia como

$$\begin{aligned} F(x'_1, x'_0, x'_{-1}) &= SF(x_1, x_0, x_{-1}) = F(x_1, x_0, x_{-1}) + \sum_{i=-1}^1 (x'_i - x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ &= \left[ 1 + ia_{11} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \right) + ia_{00} \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \right) \right. \\ &\quad + ia_{10} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + ia_{1-1} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\ &\quad + ia_{0-1} \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right) + b_{10} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\ &\quad \left. + b_{1-1} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + b_{0-1} \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \right] F \end{aligned} \quad (1.9)$$

Y de acuerdo con la ecuación (1.6), podemos identificar los siguientes operadores infinitesimales

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{11} &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}}, & \hat{X}_{00} &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \\
\hat{X}_{10} &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}, & \hat{Y}_{10} &= -i \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\
\hat{X}_{1-1} &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}, & \hat{Y}_{1-1} &= -i \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\
\hat{X}_{0-1} &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0}, & \hat{Y}_{0-1} &= -i \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Es fácil ver que a cada uno de estos operadores se les puede asociar una matriz y que además estas se pueden relacionar con las ocho matrices de Gell-Mann  $\lambda_i (i = 1, \dots, 8)$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{11} + \hat{X}_{00} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \sqrt{3}\lambda_8, & \hat{X}_{11} - \hat{X}_{00} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \\
\hat{X}_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1, & \hat{Y}_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \\
\hat{X}_{1-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_4, & \hat{Y}_{1-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_5 \\
\hat{X}_{0-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_6, & \hat{Y}_{0-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \lambda_7
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Estas matrices satisfacen la regla de conmutación

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c \tag{1.12}$$

donde los únicos valores distintos de cero de las constantes de estructura  $f_{abc}$  son

$$\begin{aligned}
f_{123} &= 1, \\
f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} &= \frac{1}{2} \\
f_{458} = f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

y sus permutaciones cíclicas.<sup>2</sup>

Si definimos a los generadores como

$$\hat{F}_i = \frac{1}{2}\lambda_i, \tag{1.14}$$

de la ecuación (1.12) obtenemos el álgebra de Lie de  $SU(3)$

$$[\hat{F}_a, \hat{F}_b] = if_{abc}\hat{F}_c \tag{1.15}$$

Tomando los generadores  $\hat{F}_i$  podemos escribir la transformación infinitesimal  $S$  definida en (1.9) como

$$S = 1 + i\delta\theta_i\hat{F}_i \tag{1.16}$$

La cual puede expresarse como una transformación finita al definir  $\delta\theta_i = \frac{\theta_i}{N}$ , con  $N$  un número arbitrario muy grande y luego aplicar (1.16)  $N$  veces en el límite en que  $N \rightarrow \infty$

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\theta_i}{N}\right)^N = e^{i\theta_i\hat{F}_i} \tag{1.17}$$

Esta transformación finita también es unitaria debido a que  $\theta_i$  es real y los operadores  $\hat{F}_i$  son hermitianos.

## 1.2 Diagramas de peso

Una vez encontrados los generadores del grupo, se define como *subálgebra de Cartan* al conjunto de generadores que conmutan entre sí y por ende, a cada uno de estos operadores se les llama *generadores de Cartan*.

Para  $SU(3)$  tendremos que de los generadores obtenidos, la subálgebra de Cartan la forman los operadores  $\hat{F}_8$  y  $\hat{F}_3$  que en la física de partículas elementales se asocian con los operadores de hipercarga y proyección de isoespín como

<sup>2</sup>Las constantes de estructura  $f_{abc}$  son antisimétricas ante el intercambio de dos índices.

$$\hat{F}_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{Y} \quad \hat{F}_3 = \hat{I}_3 \quad (1.18)$$

En el mismo espíritu, el resto de los generadores se asocian con los operadores escalón

$$\hat{I}_\pm = \hat{F}_1 \pm i\hat{F}_2, \quad \hat{V}_\pm = \hat{F}_4 \pm i\hat{F}_5, \quad \hat{U}_\pm = \hat{F}_6 \pm i\hat{F}_7 \quad (1.19)$$

Con estos generadores el álgebra de  $SU(3)$  (1.15) puede reescribirse como se muestra en la primera sección del Apéndice A.

Para construir el diagrama de peso de la representación fundamental habrá que definir primero lo siguiente:

Sea  $|\phi_m\rangle$  un vector del espacio de la representación que satisface las ecuaciones de eigenvalores

$$\hat{H}_i |\phi_m\rangle = m_i |\phi_m\rangle \quad (1.20)$$

donde los operadores  $\hat{H}_i$  son los generadores de Cartan; entonces el conjunto de eigenvalores  $m_1, m_2, \dots$  forman las componentes de lo que llamaremos los *vectores de peso* de  $\phi$ .

Ya que hemos definido los operadores de Cartan ( $\hat{I}_3$  y  $\hat{Y}$ ), con el fin de obtener estos vectores de peso; en el espacio tres-dimensional de la representación fundamental introducimos la base <sup>3</sup>

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

con la que se obtienen las siguientes ecuaciones de eigenvalores

$$\begin{aligned} \hat{Y} |u\rangle &= \frac{1}{3} |u\rangle, & \hat{Y} |d\rangle &= \frac{1}{3} |d\rangle, & \hat{Y} |s\rangle &= -\frac{2}{3} |s\rangle \\ \hat{I}_3 |u\rangle &= \frac{1}{2} |u\rangle, & \hat{I}_3 |d\rangle &= -\frac{1}{2} |d\rangle, & \hat{I}_3 |s\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

El conjunto de eigenvalores  $(m_1, m_2)$  asociados a un vector particular de la base constituirá un punto en el diagrama de peso. El resultado final, como se muestra en la Figura 1.1, es un triplete en el espacio  $I_3 - Y$ .

---

<sup>3</sup>Cada elemento de la base está asociado a los sabores ligeros de quarks  $u, d$  y  $s$  como se mostrará en el siguiente capítulo.

Una forma de clasificar los multipletes de  $SU(3)$  es utilizando las etiquetas  $(\lambda, \mu)$ <sup>4</sup> o también la dimensión de la representación

$$\dim_{(\lambda, \mu)} = (\lambda + 1)(\mu + 1)(\lambda + \mu + 2)/2. \quad (1.23)$$

De esta forma, podemos identificar al triplete con las etiquetas  $(1,0)$  o en términos de su dimensión como **3**.

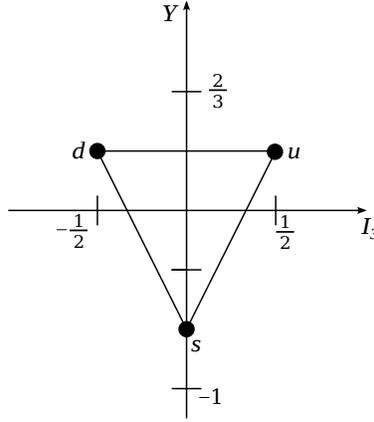


Figura 1.1: Triplete de quarks  $(1,0)$ . Diagrama de peso de la representación fundamental de  $SU(3)$ .

A la base (1.21) la identificamos como el conjunto de estados  $|(\lambda, \mu)I, I_3, Y\rangle$

$$\begin{aligned} |u\rangle &= |(1, 0)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\ |d\rangle &= |(1, 0)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\ |s\rangle &= |(1, 0)0, 0, -\frac{2}{3}\rangle. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Los operadores escalón definidos en (1.19) permiten pasar de un vector de la base a otro, i.e. se pasa de un punto del diagrama de peso hasta cubrir todos sus puntos. Utilizando la representación matricial de estos operadores aplicados sobre la base (1.21) se obtiene fácilmente que

<sup>4</sup>Las etiquetas  $(\lambda, \mu)$  están relacionadas con los diagramas de Young, pero para fines de este trabajo no se ahondará más en el tema. Sin embargo, se puede encontrar más información sobre esto en las referencias [6][7][8][9].

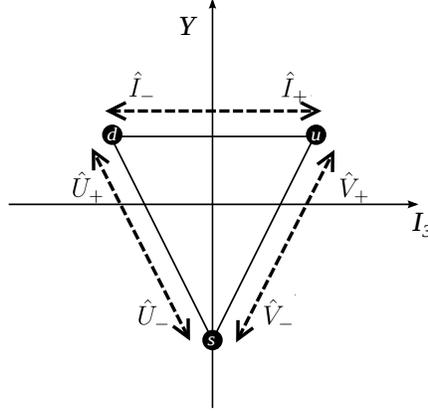


Figura 1.2: Acción de los operadores escalón en el plano  $I_3 - Y$ .

$$\begin{aligned}
 |d\rangle &= \hat{I}_- |u\rangle & |u\rangle &= \hat{I}_+ |d\rangle \\
 |s\rangle &= \hat{V}_- |u\rangle & |u\rangle &= \hat{V}_+ |s\rangle \\
 |s\rangle &= \hat{U}_- |d\rangle & |d\rangle &= \hat{U}_+ |s\rangle \\
 \hat{U}_- |u\rangle &= \hat{I}_+ |u\rangle = \hat{V}_+ |u\rangle = 0
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Como se observa en la Figura 1.2 y utilizando las relaciones de conmutación (A.1) del apéndice A se puede calcular que los operadores escalón aumentan y disminuyen los valores de  $I_3$  y  $Y$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_\pm &: \Delta I_3 = \pm 1, \quad \Delta Y = 0, \quad \Delta I = 0 \\
 \hat{V}_\pm &: \Delta I_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad \Delta Y = \pm 1, \quad |\Delta I| = \frac{1}{2} \\
 \hat{U}_\pm &: \Delta I_3 = \mp \frac{1}{2}, \quad \Delta Y = \pm 1, \quad |\Delta I| = \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

La acción de los operadores escalón sobre un vector  $|I, I_3, Y\rangle$  viene acompañada por coeficientes cuyas fórmulas generales se muestran en la segunda sección del apéndice A.

Para finalizar este capítulo sólo faltaría hablar un poco de la representación compleja conjugada de la representación fundamental de  $SU(3)$ . En la física esta es muy importante pues está asociada con la antipartícula de una partícula descrita por una representación fundamental. Como ya lo mencionamos, la base de la representación fundamental está asociada con los sabores de los tres quarks ligeros, por lo que sería

natural hablar de una representación asociada a los antiquarks y que será la representación conjugada.

Con el uso de diagramas de Young se puede mostrar que las etiquetas de la representación compleja conjugada son  $(\lambda, \mu)^* = (\mu, \lambda)$  y ya que la fórmula para la dimensión de la representación (1.23) es simétrica ante el intercambio de  $\lambda$  y  $\mu$ , entonces si se prefiere usar la dimensión ( $\mathbf{d}$ ) como etiqueta, por convención se utiliza  $\bar{\mathbf{d}}$ . Así, la representación compleja conjugada del triplete de quarks (1,0) será el antitriplete de antiquarks (0,1) o  $\bar{\mathbf{3}}$ .

El diagrama de peso de la representación conjugada (Figura 1.3) se obtiene simplemente al reflejar el diagrama de peso de la representación fundamental (Figura 1.1).

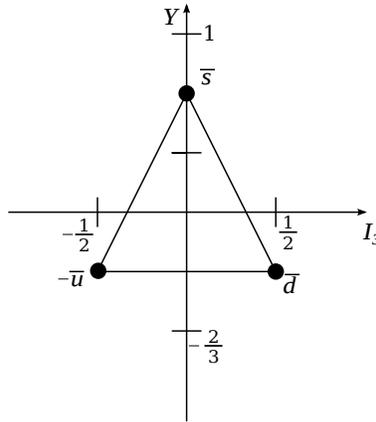


Figura 1.3: Antitriplete de antiquarks (0,1). Diagrama de peso de la representación compleja conjugada de  $SU(3)$ .

Aquí terminaremos esta pequeña introducción al grupo  $SU(3)$ . Como se verá más adelante este grupo es la base del modelo de quarks, es necesario para la construcción de las funciones de onda de los hadrones y fue fundamental en los cálculos realizados con cada uno de los modelos utilizados.



# Capítulo 2

## El modelo de quarks

A principios de la década de 1960 Gell-Mann [10] y Zweig [11] postularon por primera vez la existencia de quarks como componentes de los hadrones, al sugerir que estos últimos eran estados ligados de tres tipos (o sabores) de quarks ( $u$ ,  $d$  y  $s$ ) los cuales estaban sujetos a las reglas de simetría del grupo  $SU(3)$ . A este modelo se le conoció como el *modelo de quarks*.

Actualmente entendemos a los hadrones como estados *multiquarks* que dependen de grados de libertad internos como el color, sabor y espín así como de los grados de libertad espaciales. Estos estados se pueden clasificar utilizando únicamente principios de simetría sin la necesidad de introducir un modelo dinámico explícito. La condición principal que debe cumplir la función de onda de los estados multiquark es que sea un singlete de color.

Los grados de libertad internos serán los tres sabores ligeros  $u$ ,  $d$  y  $s$  con espín  $S = \frac{1}{2}$  y los tres posibles colores  $r$ ,  $g$  y  $b$ . Entonces, la estructura algebraica de los quarks estará formada por las álgebras de espín-sabor ( $sf$ ) y color ( $c$ ) [12]

$$\mathcal{G}_{sfc} = SU_{sf}(6) \otimes SU_c(3) \quad (2.1)$$

El álgebra de espín-sabor se puede descomponer en los grupos

$$SU_{sf}(6) \supset SU_f(3) \otimes SU_s(2), \quad (2.2)$$

en donde el álgebra de  $SU_f(3)$  describe las transformaciones unitarias entre los tres diferentes sabores (como se mostró en el capítulo anterior) y la de  $SU_s(2)$  entre los dos estados de espín de los quarks <sup>1</sup>. De la misma forma, podemos descomponer el álgebra de sabor como

---

<sup>1</sup>Ya que los quarks son fermiones con espín  $S = \frac{1}{2}$ , los dos estados posibles son las proyecciones  $S_3 = \frac{1}{2}$  ( $\uparrow$  - arriba) y  $S_3 = -\frac{1}{2}$  ( $\downarrow$  - abajo).

Tabla 2.1: Números cuánticos de los quarks y antiquarks.

	$B$	$S^P$	$I$	$I_3$	$\mathcal{S}$	$Y$	$Q$
$u$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$d$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$s$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^+$	0	0	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\bar{u}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\bar{d}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\bar{s}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^-$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$SU_f(3) \supset SU_I(2) \otimes U_Y(1), \quad (2.3)$$

donde  $I$  es el isoespín y  $Y$  la hipercarga de los quarks. Es por esta razón que en el capítulo anterior los estados de un multiplete de sabor fueron etiquetados por los números cuánticos de isoespín  $I$ , su proyección  $I_3$  y la hipercarga  $Y$  (además de las etiquetas  $(\lambda, \mu)$ ). La importancia física de estos números cuánticos radica en que la carga eléctrica puede expresarse en términos de estos a través de la fórmula de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} = I_3 + \frac{B + \mathcal{S}}{2} \quad (2.4)$$

donde  $B$  es el número bariónico y  $\mathcal{S}$  la extrañeza. En la Tabla 2.1 se presentan los números cuánticos de los quarks y sus correspondientes antiquarks.

Como ya se mencionó, se tiene como condición que los estados físicos (hadrones) tengan una función de onda que sea un singlete en el espacio de color. Para que se cumpla esto, los quarks se deben agrupar únicamente en tercias  $qqq$  (bariones), pares quark-antiquark  $q\bar{q}$  (mesones) y productos de estos.

## 2.1 Bariones

La función de onda de los bariones puede separarse de acuerdo a sus grados de libertad como

$$|\Psi\rangle_{total} = |\psi\rangle_{orb} \otimes |\phi\rangle_{sabor} \otimes |\chi\rangle_{espin} \otimes |\psi\rangle_{color} \quad (2.5)$$

Debido a la naturaleza fermiónica de los quarks, los bariones también lo son y en consecuencia su función de onda total debe ser antisimétrica ante el intercambio de cualquiera de los quarks.

Ya que los bariones deben ser un singlete de color esto implica que la función de onda en el espacio de color  $|\psi\rangle_{color}$  debe ser antisimétrica. Por otro lado, sabemos que para los bariones del estado base (sin excitaciones orbitales) el momento angular orbital relativo entre los quarks constituyentes es cero, por lo que la parte orbital  $|\psi\rangle_{orb}$  es simétrica. Si no hay momento angular orbital, entonces el momento angular total del barión estará dado únicamente por el acoplamiento de los espines de los quarks (i.e.  $J = S$ ) que resultan en los estados  $J = \frac{1}{2}$  con simetría mixta y el estado totalmente simétrico  $J = \frac{3}{2}$ .

Con respecto al sabor, ya se mencionó que los quarks vienen en tres sabores distintos ( $u, d, s$ ) que corresponden a la base de la representación fundamental del grupo  $SU(3)_f$ . Entonces para un sistema de tres quarks con tres posibles sabores se tendrá un total de 27 combinaciones las cuales se clasifican de acuerdo a sus propiedades de simetría de la siguiente forma [13]

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1}_A \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{10}_S \quad (2.6)$$

lo cual indica que se tiene un singlete  $\mathbf{1}_A$  totalmente antisimétrico, dos octetes  $\mathbf{8}_M$  con simetría mixta y un decuplete  $\mathbf{10}_S$  totalmente simétrico.

Para que la función de onda total de los bariones sea antisimétrica las funciones en el espacio de espín-sabor deben ser simétricas. De esta forma, el decuplete de sabor  $\mathbf{10}_S$  se acopla con el estado de espín  $J = \frac{3}{2}$  para formar estados completamente simétricos de espín-sabor. Estos estados corresponden al decuplete de bariones  $J^P = \frac{3}{2}^+$  cuyo diagrama de peso se muestra en la Figura 2.1.

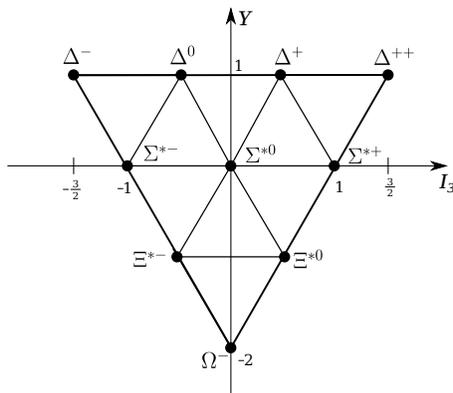


Figura 2.1: Decuplete de bariones  $J^P = \frac{3}{2}^+$ .

Cada uno de los octetes  $\mathbf{8}_M$  tiene una simetría distinta con respecto al operador  $P_{12}^2$ , uno es simétrico y el otro antisimétrico. Las funciones de onda de espín-sabor de los bariones del octete (Figura 2.2) se obtienen al multiplicar los estados de simetría mixta de espín por sus correspondientes estados de sabor también de simetría mixta como se verá más a fondo a continuación.

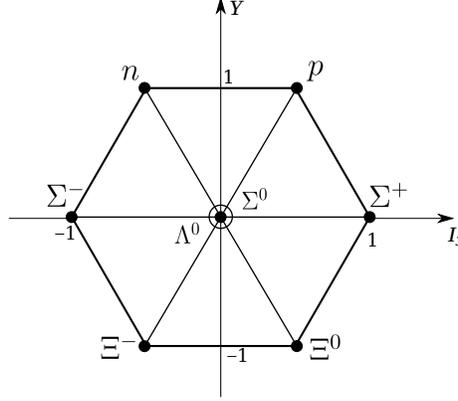


Figura 2.2: Octete de bariones  $J^P = \frac{1}{2}^+$ .

### 2.1.1 Construcción de las funciones de onda

Por simplicidad, empezaremos con las funciones de onda del decuplete. Como ya se mencionó anteriormente, a estos les corresponde el estado simétrico de espín  $J = S = \frac{3}{2}$ . La máxima proyección corresponde al estado

$$|\chi^S\rangle_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}} = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \quad (2.7)$$

en donde el superíndice  $S$  indica la simetría de la función. Aplicando el operador escalón  $\hat{S}_-^3$  en el espacio de espín, se obtienen fácilmente el resto de las proyecciones

$$\begin{aligned} |\chi^S\rangle_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ |\chi^S\rangle_{\frac{3}{2}\frac{-1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\chi^S\rangle_{\frac{3}{2}\frac{-3}{2}} &= |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

<sup>2</sup>El operador  $P_{12}$  intercambia las posiciones  $1 \leftrightarrow 2$  de los elementos de un estado.

<sup>3</sup>Totalmente análogo al operador escalón de isoespín (A.3).

Tabla 2.2: Funciones de onda de sabor de los bariones del decuplete  $J^P = \frac{3}{2}^+$ .

Barión	$ (\lambda, \mu)I, I_3, Y\rangle$	$ \phi^S\rangle$
$\Delta^{++}$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\rangle$	$ uuu\rangle$
$\Delta^+$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( uud\rangle +  udu\rangle +  duu\rangle)$
$\Delta^0$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( udd\rangle +  dud\rangle +  ddu\rangle)$
$\Delta^-$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1\rangle$	$ ddd\rangle$
$\Sigma^{*+}$	$ (3, 0)1, 1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( uus\rangle +  usu\rangle +  suu\rangle)$
$\Sigma^{*0}$	$ (3, 0)1, 0, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( uds\rangle +  dus\rangle +  usd\rangle +  sud\rangle +  sdu\rangle +  dsu\rangle)$
$\Sigma^{*-}$	$ (3, 0)1, -1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( sdd\rangle +  dsd\rangle +  dds\rangle)$
$\Xi^{*0}$	$ (3, 0)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( uss\rangle +  sus\rangle +  ssu\rangle)$
$\Xi^{*-}$	$ (3, 0)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( dds\rangle +  sds\rangle +  ssd\rangle)$
$\Omega^-$	$ (3, 0)0, 0, -2\rangle$	$ sss\rangle$

En el caso del sabor, los estados simétricos triviales son  $|uuu\rangle$ ,  $|ddd\rangle$  y  $|sss\rangle$  el resto se obtiene fácilmente al aplicar el operador de simetrización, que en forma general está definido por

$$\mathcal{S} = \frac{1}{n!} \sum_P P, \quad (2.9)$$

a un estado  $|q_1 q_2 q_3\rangle$ . Por ejemplo, si tomamos la combinación  $|uus\rangle$ , bajo  $\mathcal{S}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{123} |uus\rangle &= \frac{1}{3!} (e + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{123} + P_{132}) |uus\rangle \\ &= \frac{1}{3} (|uus\rangle + |usu\rangle + |suu\rangle) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Normalizando apropiadamente se obtiene la función de onda de sabor del hiperón<sup>4</sup>  $\Sigma^{*+}$  como se muestra en la Tabla 2.2. El resto de los estados se pueden obtener de forma análoga o con el uso de los operadores escalón (A.3)-(A.4) para miembros del mismo multiplete de isoespín, V-espín o U-espín.

<sup>4</sup>Los hiperones son bariones que contienen al menos un quark extraño.

Para obtener las funciones de onda de los bariones del octete es necesario hacer un análisis un poco más profundo debido a la mezcla de simetrías que poseen. Para poder identificar estas simetrías es útil tomar en cuenta que el movimiento relativo de los quarks constituyentes puede ser descrito en términos de las coordenadas de Jacobi, las cuales para partículas idénticas con masas iguales están definidas como

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad \vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \quad (2.11)$$

Es fácil ver que estas coordenadas son eigenestados del operador de permutaciones  $P_{12}$ , i.e. son simétricas o antisimétricas ante el intercambio de los objetos 1 y 2. Sin embargo, no son eigenestados de permutaciones asociadas con los objetos 2 y 3, pues

$$P_{23}\vec{\lambda} = -\frac{1}{2}\vec{\lambda} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\rho} \quad y \quad P_{23}\vec{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\lambda} + \frac{1}{2}\vec{\rho}. \quad (2.12)$$

Los estados que cumplan con estas simetrías son etiquetados por los correspondientes índices “ $\lambda$ ” y “ $\rho$ ”.

Por otro lado, para obtener las funciones de onda de sabor de los bariones del octete, introducimos el operador de antisimetrización

$$\mathcal{A} = \frac{1}{n!} \sum_P \delta_P P \quad (2.13)$$

donde  $\delta_P$  es la paridad de las permutaciones definida como  $\delta_P = (-1)^{n-k}$  con  $n$  el número de objetos y  $k$  el número de ciclos.

Tomamos ahora el estado  $|uud\rangle$  y aplicamos los operadores (2.9) y (2.13) para simetrizar (o antisimetrizar) con respecto a dos partículas y luego antisimetrizar (o simetrizar) con respecto a otras dos partículas, de esta forma se obtienen los estados

$$\begin{aligned} |\phi^1\rangle &= \mathcal{A}_{13}\mathcal{S}_{12}|uud\rangle = \frac{1}{4}(e - P_{13})(e + P_{12})|uud\rangle = \frac{1}{2}(|uud\rangle - |duu\rangle) \\ |\phi^2\rangle &= \mathcal{A}_{23}\mathcal{S}_{12}|uud\rangle = \frac{1}{4}(e - P_{23})(e + P_{12})|uud\rangle = \frac{1}{2}(|uud\rangle - |udu\rangle) \\ |\phi^3\rangle &= \mathcal{S}_{13}\mathcal{A}_{12}|uud\rangle = 0 \\ |\phi^4\rangle &= \mathcal{S}_{23}\mathcal{A}_{12}|uud\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Se requiere que las funciones de onda sean ortonormales y es fácil ver que  $|\phi^1\rangle$  y  $|\phi^2\rangle$  no lo son, pero si se toma la suma y resta y se normaliza adecuadamente obtenemos los estados

Tabla 2.3: Funciones de onda de sabor de los bariones del octete  $J^P = \frac{1}{2}^+$ .

Barión	$(\lambda, \mu)I, I_3, Y$	$ \phi^\lambda\rangle$	$ \phi^\rho\rangle$
p	$(1, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 uud\rangle -  udu\rangle -  duu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( udu\rangle -  duu\rangle)$
n	$(1, 1)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( udd\rangle +  dud\rangle - 2 ddu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( udd\rangle -  dud\rangle)$
$\Sigma^+$	$(1, 1)1, 1, 0$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( usu\rangle +  suu\rangle - 2 uus\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( suu\rangle -  usu\rangle)$
$\Sigma^0$	$(1, 1)1, 0, 0$	$\frac{1}{\sqrt{12}}( sdu\rangle +  sud\rangle +  usd\rangle +  dsu\rangle - 2 uds\rangle - 2 dus\rangle)$	$\frac{1}{2}( sdu\rangle +  sud\rangle -  usd\rangle -  dsu\rangle)$
$\Sigma^-$	$(1, 1)1, -1, 0$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( dsd\rangle +  sdd\rangle - 2 dds\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( sdd\rangle -  dsd\rangle)$
$\Lambda^0$	$(1, 1)0, 0, 0$	$\frac{1}{2}( sud\rangle -  sdu\rangle +  usd\rangle -  dsu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2 uds\rangle - 2 dus\rangle +  sdu\rangle -  sud\rangle +  usd\rangle -  dsu\rangle)$
$\Xi^0$	$(1, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssu\rangle -  uss\rangle -  sus\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( sus\rangle -  uss\rangle)$
$\Xi^-$	$(1, 1)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssd\rangle -  dss\rangle -  sds\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( sds\rangle -  dss\rangle)$

$$\begin{aligned}
|\phi'^1\rangle &= |\phi^1\rangle + |\phi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|uud\rangle - |udu\rangle - |duu\rangle) \\
|\phi'^2\rangle &= |\phi^1\rangle - |\phi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|udu\rangle - |duu\rangle).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Y ya que  $|\phi'^1\rangle$  y  $|\phi'^2\rangle$  tienen la misma simetría de permutaciones que  $\vec{\lambda}$  y  $\vec{\rho}$  respectivamente, etiquetamos los estados como  $|\phi'^1\rangle = |\phi^\lambda\rangle$  y  $|\phi'^2\rangle = |\phi^\rho\rangle$  los cuales corresponden a los estados de simetría mixta de sabor del protón.

En la Tabla 2.3 se muestran las funciones de onda de sabor del octete de bariones, estas se pueden obtener con el procedimiento descrito anteriormente o con el uso de los operadores escalón (A.3)-(A.4).

Por último para el singlete de sabor  $\mathbf{1}_A$  se tiene que la función de onda es

$$|(0, 0)0, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}[|uds\rangle - |dus\rangle + |dsu\rangle - |sdu\rangle + |sud\rangle - |usd\rangle]. \tag{2.16}$$

Los estados de espín se obtienen de forma análoga sustituyendo  $u \rightarrow \uparrow$  y  $d \rightarrow \downarrow$ . Entonces para  $S = \frac{1}{2}$  y  $S_3 = \frac{1}{2}$  se tiene

$$\begin{aligned}
|\chi^\lambda\rangle_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\
|\chi^\rho\rangle_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

y para  $S = \frac{1}{2}$  y  $S_3 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
|\chi^\lambda\rangle_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - 2|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle) \\
|\chi^\rho\rangle_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Por último, las funciones de onda de espín-sabor, las cuales deben ser simétricas, corresponden a la combinación lineal del producto de los estados de espín y de sabor que tienen el mismo tipo de simetría

$$|\Phi\rangle_{sf} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\chi^\rho\rangle |\phi^\rho\rangle + |\chi^\lambda\rangle |\phi^\lambda\rangle), \tag{2.19}$$

en donde el término  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  es simplemente un factor de normalización.

## 2.2 Mesones

De acuerdo con el modelo de quarks, los mesones son estados ligados de un par quark-antiquark ( $q\bar{q}$ ). Para poder construir las funciones de onda de sabor de los mesones es necesario estudiar primero el comportamiento de los antiquarks bajo operaciones de isoespín.

En el capítulo anterior se introdujo el operador  $\hat{I}_3$  como uno de los generadores de  $SU(3)_f$ , sin embargo este operador también es uno de los generadores del subgrupo de isoespín  $SU(2)_I$  junto con el resto de las proyecciones  $\hat{I}_1$  e  $\hat{I}_2$ . Ya que este grupo es una copia matemática del grupo de espín, entonces en la representación fundamental los generadores de isoespín están definidos como  $\hat{I}_i = \frac{1}{2}\hat{\tau}_i$ , donde

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

son las matrices de Pauli para isoespín [14].

Los quarks  $u$  y  $d$  forman el doblete de isoespín  $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ , de tal forma que bajo una rotación en el espacio de isoespín, por ejemplo alrededor del eje 2, se transforman como

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\tau}_2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Los antiquarks se definen mediante el operador de conjugación de carga<sup>5</sup>  $\hat{C}$  como

$$\hat{C}|u\rangle = |\bar{u}\rangle, \quad \hat{C}|d\rangle = |\bar{d}\rangle.$$

El doblete de isospín de antiquarks es de la forma  $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$ , pues  $\bar{d}$  es el estado con mayor proyección de isospín (Figura 1.3). Entonces si aplicamos el operador  $\hat{C}$  a la ecuación (2.21), se tiene que los antiquarks se transforman como

$$\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ \bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Se requiere que el doblete de antiquarks se transforme de la misma forma que el de quarks y en (2.22) es claro que esto no se cumple. Sin embargo, si se define el doblete de antiquarks como  $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$ , las rotaciones en el espacio de isospín serán iguales para quarks y antiquarks.

### 2.2.1 Construcción de las funciones de onda

Dado el espín  $S = \frac{1}{2}$  de los quarks y considerando nuevamente estados base (sin excitaciones orbitales), encontramos a los mesones en dos estados de momento angular total  $J = S = 0$  y  $J = S = 1$ . A los primeros se les denomina *pseudoescalares* y a los últimos *vectoriales*.

Las funciones de onda de espín correspondientes al triplete  $S = 1$  son

$$\begin{aligned} |\chi\rangle_{11} &= |\uparrow\uparrow\rangle, \\ |\chi\rangle_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \\ |\chi\rangle_{1-1} &= |\downarrow\downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (2.23)$$

mientras que para el singlete  $S = 0$  la función de onda es

---

<sup>5</sup>El operador de conjugación de carga convierte a una partícula en su correspondiente antipartícula al cambiar todos sus números cuánticos internos como carga, número bariónico, número leptónico, extrañeza, etc. Sin embargo deja invariante la masa, la energía, el momento y el espín [15].

$$|\chi\rangle_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (2.24)$$

Los estados quark-antiquark que se forman al combinar los 3 sabores ( $u, d$  y  $s$ ) dan lugar a 9 mesones clasificados en un octete  $\mathbf{8}$  y un singlete de sabor  $\mathbf{1}$

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \quad (2.25)$$

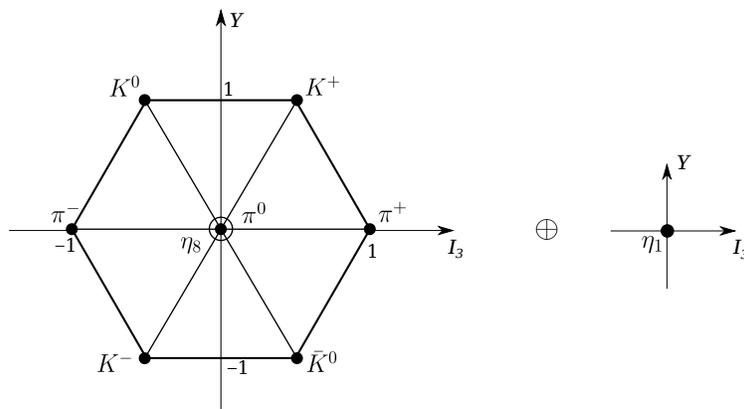


Figura 2.3: Mesones pseudoescalares  $J^P = 0^-$ .

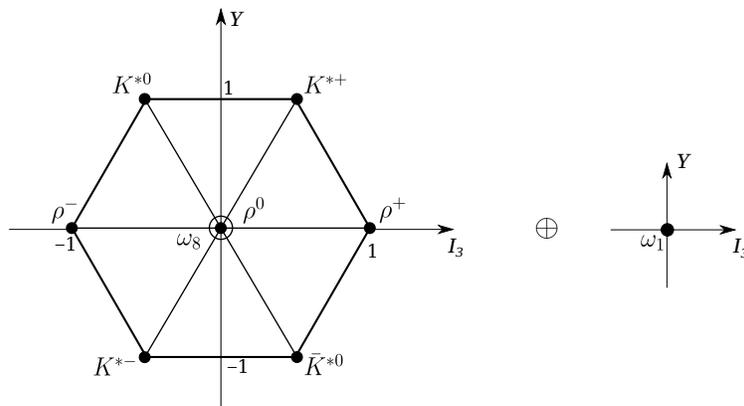


Figura 2.4: Mesones vectoriales  $J^P = 1^-$ .

A diferencia de los bariones (en particular los bariones del octete) la construcción de las funciones de onda de sabor de los mesones es mucho más simple, además de ser

las mismas para pseudoescalares y vectoriales<sup>6</sup>.

En las Figuras 2.3 y 2.4 se muestran los diagramas de peso de los octetes y singletes de los mesones pseudoescalares y vectoriales. De aquí se observa que en cada octete hay dos dobletes de isoespín, un triplete y un singlete además de un singlete de sabor.

Los dobletes de isoespín se obtienen fácilmente combinando un quark  $s$  (o  $\bar{s}$ ) con un quark  $u$  o  $d$  ( $\bar{u}$  o  $\bar{d}$ ). Los estados de sabor resultantes son<sup>7</sup>

$$\begin{aligned}
|(1, 1)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1}\rangle &= |K^+(K^{*+})\rangle = -|u\bar{s}\rangle \\
|(1, 1)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1}\rangle &= |K^0(K^{*0})\rangle = -|d\bar{s}\rangle \\
|(1, 1)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1}\rangle &= |\bar{K}^0(\bar{K}^{*0})\rangle = -|s\bar{d}\rangle \\
|(1, 1)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1}\rangle &= |K^-(K^{*-})\rangle = |s\bar{u}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Análogamente a como se hizo con el espín, el triplete se obtiene acoplando dos estados de isoespín  $I = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
|(1, 1)1, 1, 0\rangle &= |\pi^+(\rho^+)\rangle = -|u\bar{d}\rangle \\
|(1, 1)1, 0, 0\rangle &= |\pi^0(\rho^0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \\
|(1, 1)1, -1, 0\rangle &= |\pi^-(\rho^-)\rangle = |d\bar{u}\rangle
\end{aligned} \tag{2.27}$$

El mesón  $\eta_1$  es un singlete de sabor y por lo tanto corresponde a un escalar de  $SU(3)_f$  cuya función de onda es

$$|(0, 0)0, 0, 0\rangle = |\eta_1(\omega_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle). \tag{2.28}$$

Con las condiciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned}
\langle (1, 1)0, 0, 0 | (1, 1)1, 0, 0\rangle &= 0 \\
\langle (1, 1)0, 0, 0 | (0, 0)0, 0, 0\rangle &= 0
\end{aligned}$$

se obtiene el singlete de isoespín

$$|(1, 1)0, 0, 0\rangle = |\eta_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle). \tag{2.29}$$

<sup>6</sup>Esto es cierto si no se toma en cuenta la paridad- $G$ , sin embargo para fines de este trabajo esta simetría es totalmente irrelevante.

<sup>7</sup>Las funciones de onda de los mesones se obtienen usando la convención de fases de De Swart [16].

Es importante mencionar que los estados  $\eta_8$  y  $\eta_1$  no corresponden a partículas físicas, pues es la mezcla de estos dos los que corresponden a las partículas  $\eta(548)$  y  $\eta'(958)$ . Dicha mezcla está determinada por el ángulo  $\theta_P$  como sigue [17]

$$\begin{aligned}\eta(548) &= \eta_8 \cos \theta_P - \eta_1 \sin \theta_P, \\ \eta'(958) &= \eta_8 \sin \theta_P + \eta_1 \cos \theta_P.\end{aligned}\tag{2.30}$$

donde  $-24.6 \leq \theta_P \leq -11.5$ .

De igual forma se tiene que para los mesones vectoriales, las partículas físicas  $\phi(1020)$  y  $\omega(782)$  son mezclas de los estados  $\omega_8$  y  $\omega_1$

$$\begin{aligned}\phi(1020) &= \omega_8 \cos \theta_V - \omega_1 \sin \theta_V, \\ \omega(782) &= \omega_8 \sin \theta_V + \omega_1 \cos \theta_V.\end{aligned}\tag{2.31}$$

donde  $\theta_V \simeq 35^\circ$ .

Por último, debido a que el álgebra de color es matemáticamente idéntica a la de sabor, la función de onda de color correspondiente a los mesones será el singlete simétrico generado por el producto  $\mathbf{3}_c \otimes \bar{\mathbf{3}}_c = \mathbf{8}_c \oplus \mathbf{1}_c$ , el cual es de la misma forma al construido en la ecuación (2.28).

# Capítulo 3

## Extensiones al modelo de quarks

En el presente capítulo se dará una breve introducción teórica al formalismo de los modelos efectivos que serán utilizados para calcular el contenido de sabor y espín de los bariones.

### 3.1 Modelo de quarks quirales

El modelo de quarks quirales, al que denotaremos de ahora en adelante como “ $\chi$ QM”, fue establecido originalmente por Weinberg [18] en 1979 y 5 años después desarrollado por Manohar y Georgi [19] con la motivación de explicar a nivel fundamental, las fallas y aciertos del modelo de quarks. Basándose en un Lagrangiano efectivo para quarks, gluones y bosones de Goldstone, ellos demostraron cómo el éxito del modelo de quarks se puede entender en el intervalo entre las escalas de confinamiento y el rompimiento de la simetría quiral.

De acuerdo con el teorema de Goldstone [20] siempre que una simetría continua se rompe espontáneamente, se producen campos sin masa denominados bosones de Nambu-Goldstone (o simplemente bosones de Goldstone). Si en QCD se toma el caso ideal en que las masas de los tres quarks ligeros son cero, la teoría presentará una simetría global quiral de sabor  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$  la cual se rompe espontáneamente dando lugar a 8 bosones de Goldstone que resultan ser los mesones pseudoescalares<sup>1</sup>. En el  $\chi$ QM el proceso dominante consiste en la fluctuación de un quark en un quark más uno de estos bosones de Goldstone, equivalentes a pares quark-antiquark (Figura 3.1).

---

<sup>1</sup>Las masas de los mesones pseudoescalares son producto del rompimiento explícito de la simetría quiral como consecuencia de que las masas de los quarks son distintas de cero [21].

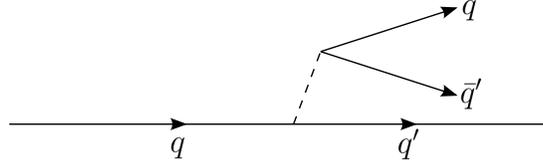


Figura 3.1: Producción de un par  $q\bar{q}$  a través de emisión de un bosón de Goldstone.

Una característica importante de este modelo es que los efectos internos de los gluones son muy pequeños en comparación con los de los bosones de Goldstone y los quarks debido a que la escala del rompimiento de la simetría quiral dada por  $\Lambda_{\chi SM} \simeq 1\text{GeV}$  es significativamente mayor a la escala de confinamiento  $\Lambda_{QCD} \simeq 100 - 300\text{MeV}$  [19].

En los bariones, esta interacción básica modifica el contenido de sabor debido a que el mar de quarks producido por las fluctuaciones en bosones de Goldstone es, a diferencia de las emisiones de gluones, dependiente del sabor.

De acuerdo con el trabajo realizado por Cheng y Li [22][23] con el  $\chi\text{QM}$ , al octete de bosones de Goldstone se le agrega el singlete de sabor  $\eta_1$ . El lagrangiano efectivo que describe la interacción entre los quarks y estos nueve bosones de Goldstone, se puede expresar como

$$\mathcal{L}_I = g_8 \sum_{i=1}^8 \bar{q} \lambda_i \phi_i q + \frac{\sqrt{2}}{3} g_1 \bar{q} \eta_1 q = g_8 \bar{q} \Phi q, \quad (3.1)$$

donde  $q = (u, d, s)$ ,  $g_1$  y  $g_8$  denotan las constantes de acoplamiento del singlete y octete de bosones de Goldstone y las  $\lambda$ 's son las matrices de Gell-Mann. Además, definiendo  $\zeta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{g_1}{g_8}$  se tiene que

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{3}} \eta_1 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{3}} \eta_1 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \eta_8 + \frac{\zeta}{\sqrt{3}} \eta_1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Es a través de esta matriz que se construyen las funciones de onda de los quarks

$$\begin{aligned}
|\psi_u\rangle &= \sqrt{1 - \frac{g_8^2}{3}(\zeta^2 + 8)}|u\rangle + g_8 \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}|u\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|u\eta_8\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}|u\eta_1\rangle + |d\pi^+\rangle + |sK^+\rangle \right] \\
|\psi_d\rangle &= \sqrt{1 - \frac{g_8^2}{3}(\zeta^2 + 8)}|d\rangle + g_8 \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}}|d\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|d\eta_8\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}|d\eta_1\rangle + |u\pi^-\rangle + |sK^0\rangle \right] \\
|\psi_s\rangle &= \sqrt{1 - \frac{g_8^2}{3}(\zeta^2 + 8)}|s\rangle + g_8 \left[ -\sqrt{\frac{2}{3}}|s\eta_8\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}|s\eta_1\rangle + |uK^-\rangle + |d\bar{K}^+\rangle \right]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

en donde el término  $1 - \frac{g_8^2}{3}(\zeta^2 + 8)$  corresponde a la probabilidad de no emisión de bosones de Goldstone. Estas funciones de onda se utilizarán más adelante para calcular el contenido de sabor de los bariones.

## 3.2 Modelo de la nube mesónica

La asimetría de sabor en el protón ha inspirado la creación de varios modelos no perturbativos que tratan de explicar el origen de este fenómeno. Uno de los principales es precisamente el modelo de la nube mesónica (o “MCM” por sus siglas en inglés). Un gran número de autores [24] ha utilizado este modelo para estudiar dicha asimetría, sin embargo se puede decir que los pioneros del modelo fueron Sullivan [25] al mostrar la contribución de los estados virtuales barión-mesón a la función de estructura del nucleón y Thomas [26], quien en un estudio del rompimiento de la simetría  $SU(3)$  en el mar del nucleón, mostró la importancia de la nube piónica en las distribuciones del mar de quarks.

De acuerdo con este modelo, un barión es visto como un núcleo de quarks, al que denominaremos “barión puro”, rodeado por una nube mesónica que es generada tras la emisión de mesones virtuales por el barión en cuestión (Figura 3.2). El barión puro es una configuración simple de quarks de valencia  $qqq$  como la descrita por el modelo de quarks constituyentes. Se asume que la distribución del mar de quarks de estos estados es simétrica, por lo tanto la asimetría de sabor es atribuida a los mesones de la nube [27].

Bajo estas suposiciones se tendrá que en general, la función de onda del protón se puede escribir como una superposición de las principales componentes de Fock. Tomando explícitamente  $N\pi$  y  $\Delta\pi$  se tiene que [28]

$$\begin{aligned}
|\psi_p\rangle = & \mathcal{N}_p \left[ |p\rangle + \int dy d^2\vec{k}_\perp \phi_{N\pi} (y, \vec{k}_\perp) \left( \sqrt{\frac{1}{3}} |p\pi^0; y, \vec{k}_\perp\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |n\pi^+; y, \vec{k}_\perp\rangle \right) \right. \\
& + \int dy d^2\vec{k}_\perp \phi_{\Delta\pi} (y, \vec{k}_\perp) \left( \sqrt{\frac{1}{2}} |\Delta^{++}\pi^-; y, \vec{k}_\perp\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\Delta^+\pi^0; y, \vec{k}_\perp\rangle \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{\frac{1}{6}} |\Delta^0\pi^+; y, \vec{k}_\perp\rangle \right) + \dots \right], \quad (3.4)
\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{N}_p$  es una constante de normalización,  $\phi(y, \vec{k}_\perp)$  son las funciones de onda del cono de luz de las correspondientes componentes de Fock  $N\pi$ ,  $\Delta\pi$ , etc.  $y$  es la fracción de momento longitudinal del mesón y  $\vec{k}_\perp$  es su momento transverso.

En una aproximación más simple, la función de onda del barión se puede expresar simplemente como una combinación lineal del estado puro más los estados barión-mesón. De esta forma, tomando transiciones de tipo  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{10} \otimes \mathbf{8}$  (i.e. bariones del octete (1,1) a bariones del decuplete (3,0) y mesones pseudoescalares (1,1)),  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$  y  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8} \otimes \mathbf{1}$  (transiciones a bariones del octete (1,1) acoplados al octete (1,1) y singulete (0,0) de mesones pseudoescalares); se tiene que la función de onda del protón es

$$\begin{aligned}
|\psi_p\rangle = & \mathcal{N}_p \left[ |p\rangle + a \left( \sqrt{\frac{1}{3}} |p\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |n\pi^+\rangle \right) + b |p\eta_8\rangle \right. \\
& + c \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^+ K^0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\Sigma^0 K^+\rangle \right) + d |\Lambda^0 K^+\rangle + e |p\eta_1\rangle \\
& + f \left( \sqrt{\frac{1}{2}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\Delta^+\pi^0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} |\Delta^0\pi^+\rangle \right) \\
& \left. + g \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^{*+} K^0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\Sigma^{*0} K^+\rangle \right) \right], \quad (3.5)
\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{N}_p$  es un factor de normalización. Los cuadrados de los coeficientes  $a, b, \dots, g$  representan la probabilidad de encontrar las configuraciones del tipo barión-mesón en el protón.

Las funciones de onda de la forma (3.5) son las que se utilizarán más adelante para el cálculo del contenido de sabor y espín en los bariones.

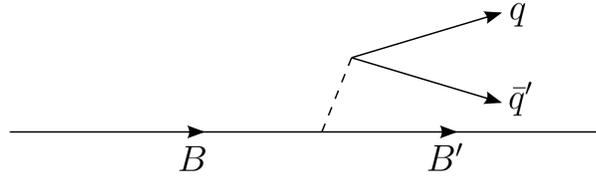


Figura 3.2: Proceso de emisión de un mesón por un barión  $B$  en el MCM.

### 3.3 Modelo de quarks con producción de pares quark-antiquark (Unquenched constituent quark model)

Este modelo está basado en un modelo de quarks constituyentes en el que pares quark-antiquark con números cuánticos del vacío son creados a través del mecanismo  ${}^3P_0$  [29] como una perturbación a nivel de quarks.

Bajo estas condiciones, las funciones de onda de los bariones consistirán en una configuración de tres quarks de orden cero más la suma de todas las componentes de Fock de mayor orden originadas por la creación de los pares quark-antiquark. Entonces a primer orden en la creación de pares, la función de onda de los bariones se puede escribir como [30]

$$|\psi_A\rangle = \mathcal{N}_A \left[ |A\rangle + \sum_{BCl} \int d\vec{k} |BC\vec{k}lJ_A\rangle \frac{\langle BC\vec{k}lJ_A | T^\dagger | A \rangle}{M_A - E_B - E_C} \right], \quad (3.6)$$

donde  $A$  es el barión,  $B$  y  $C$  los bariones y mesones intermedios con energías  $M_A$ ,  $E_B$  y  $E_C$ , respectivamente;  $\vec{k}$  y  $l$  son el momento radial relativo y el momento angular orbital de  $B$  y  $C$  y  $\vec{J}_A = \vec{J}_B + \vec{J}_C + \vec{l}$  el momento angular total.

El operador  ${}^3P_0$  de creación de pares quark-antiquark  $T^\dagger$  está definido como

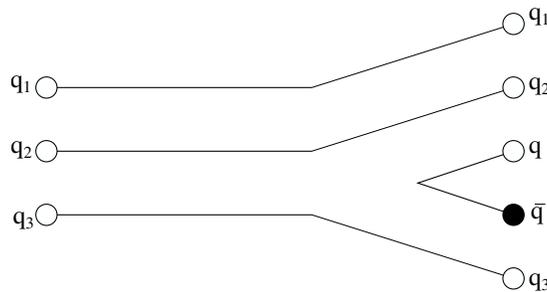


Figura 3.3: Creación de un par quark-antiquark a través del mecanismo  ${}^3P_0$ .

$$T^\dagger = -3\gamma_0 \int d\vec{p}_4 d\vec{p}_5 \delta(\vec{p}_4 + \vec{p}_5) C_{45} F_{45} e^{-r_q^2(\vec{p}_4 - \vec{p}_5)^2/6} \\ \times [\chi_{45} \times \mathcal{Y}_1(\vec{p}_4 - \vec{p}_5)]_0^{(0)} b_4^\dagger(\vec{p}_4) d_5^\dagger(\vec{p}_5), \quad (3.7)$$

con  $b_4^\dagger(\vec{p}_4)$  y  $d_5^\dagger(\vec{p}_5)$  como los operadores de creación de un quark y antiquark con momentos  $\vec{p}_4$  y  $\vec{p}_5$ . El par quark-antiquark está caracterizado por las funciones de onda  $C_{45}$ ,  $F_{45}$ ,  $\chi_{45}$ , en donde la primera corresponde a un singlete de color, la segunda a un singlete de sabor y la última al triplete de espín  $S = 1$ ; además de un armónico esférico sólido<sup>2</sup>  $\mathcal{Y}_1(\vec{p}_4 - \vec{p}_5)$  que indica que el quark y el antiquark se encuentran en una onda  $P$  relativa. El término exponencial es un factor Gaussiano de atenuación cuya anchura  $r_q$  ha sido determinada de decaimientos mesónicos a un valor aproximado de 0.25-0.35fm [31, 32, 33]. Por último, el factor  $\gamma_0$  es una constante adimensional asociada con la intensidad intrínseca de la creación del par quark-antiquark. Su valor  $\gamma_0 = 2.60$  es determinado a través de decaimientos fuertes de los bariones [34].

El interés principal es obtener explícitamente la función de onda de los bariones ligeros para así poder calcular el contenido de sabor y espín. Para esto, es crucial calcular los elementos de matriz del operador  $T^\dagger$ . Al imponer la condición de que las transiciones  $A \rightarrow BC$  sean únicamente entre estados sin excitaciones orbitales, se tiene entonces que  $L_A = L_B = L_C = 0$  lo cual implica que<sup>3</sup>  $J_A = S_A$ ,  $J_B = S_B$ ,  $J_C = S_C$  y  $J_{BC} = S_{BC}$ . Definiendo  $M_{A \rightarrow BC} = \langle BC \vec{k} l J_A | T^\dagger | A \rangle$ , de acuerdo con lo obtenido por Roberts y Silvestre-Brac con el modelo  ${}^3P_0$  [29], el elemento de matriz estará dado por

$$M_{A \rightarrow BC} = \frac{1}{3} (-1)^{2J_A} \hat{J}_A \hat{J}_B \hat{J}_C \hat{J}_{BC} \hat{l} \mathcal{F}_{A \rightarrow BC} \mathcal{R}_{A \rightarrow BC} \\ \times \left\{ \begin{array}{ccc} J_D & \frac{1}{2} & J_B \\ J_G & \frac{1}{2} & J_C \\ J_A & 1 & J_{BC} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} J_A & 0 & J_A \\ l & J_{BC} & 1 \end{array} \right\} \varepsilon(l, 0, k_0), \quad (3.8)$$

en donde el término  $\mathcal{F}_{A \rightarrow BC}$  corresponde a la contribución del sabor al elemento de matriz,  $\mathcal{R}_{A \rightarrow BC}$  es un factor de traslape que en este caso es  $\mathcal{R}_{A \rightarrow BC} = 1$ . La parte espacial es el término  $\varepsilon(l, 0, k_0)$  y el resto es la contribución del espín a la cual llamaremos  $\mathcal{S}_{A \rightarrow BC}$ . El momento angular  $J_D$  corresponde al momento angular total entre el par de

<sup>2</sup>Los armónicos esféricos sólidos están definidos como  $\mathcal{Y}_{lm}(\vec{r}) = r^l Y_{lm}(\hat{r})$ , donde  $Y_{lm}$  son los armónicos esféricos.

<sup>3</sup>Los momentos angulares totales  $\vec{J}_i$  (con  $i = A, B$  y  $C$ ) están definidos como la suma del espín  $\vec{S}_i$  más el momento angular orbital  $\vec{L}_i$ , i.e.  $\vec{J}_i = \vec{S}_i + \vec{L}_i$ .

Tabla 3.1: Contribución de espín al elemento de matriz con mesones pseudoescalares intermedios.

$(\lambda_B, \mu_B)$	$(\lambda_A, \mu_A)$	$\mathcal{S}_{A \rightarrow BC}$
$(1, 1)_\lambda$	$(1, 1)_\lambda$	$\frac{1}{18}$
$(1, 1)_\rho$	$(1, 1)_\rho$	$-\frac{1}{6}$
$(3, 0)$	$(3, 0)$	$-\frac{\sqrt{5}}{18}$
$(3, 0)$	$(1, 1)_\lambda$	$-\frac{\sqrt{2}}{9}$
$(3, 0)$	$(1, 1)_\rho$	0
$(1, 1)_\lambda$	$(3, 0)$	$\frac{1}{9}$
$(1, 1)_\rho$	$(3, 0)$	0

quarks  $q_1$  y  $q_2$  (Figura 3.3), mientras que  $J_G$  es el momento angular total del quark  $q_3$  el cual debido a la ausencia de momento angular orbital es  $J_G = \frac{1}{2}$ .

Para las transiciones entre bariones del octete  $(\lambda_A, \mu_A) = (1, 1)$  a bariones del octete  $(\lambda_B, \mu_B) = (1, 1)$  se tiene que  $J_A = J_B = \frac{1}{2}$  y suponiendo que los mesones intermedios son únicamente pseudoescalares, la contribución del espín  $\mathcal{S}_{A \rightarrow BC}$  se reduce a

$$\mathcal{S}_{A \rightarrow BC} = -\frac{1}{3}2\sqrt{2}\hat{l} \left\{ \begin{array}{ccc} J_D & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ l & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right\} \varepsilon(l, 0, k_0). \quad (3.9)$$

La conservación de paridad obliga a  $l$  a ser impar. Por otro lado, de acuerdo con las propiedades de los símbolos  $6j$  se concluye que  $l = 1$ . De la misma forma, las propiedades de los símbolos  $9j$  fijan el valor de  $J_D$  a 0 o 1. De las funciones de onda de espín (2.17), se puede observar que los 2 primeros quarks en  $\chi^\rho$  se acoplan a  $S = 0$  y a  $S = 1$  en  $\chi^\lambda$ ; por esta razón se asocia  $J_D = 0$  a las transiciones entre los octetes con simetría  $\rho$  y  $J_D = 1$  a las transiciones entre los octetes con simetría  $\lambda$ . Por lo tanto, la parte de espín del elemento de matriz del operador  $T^\dagger$  será  $\mathcal{S}_{A \rightarrow BC} = -\frac{1}{6}\varepsilon(1, 0, k_0)$  para transiciones  $(1, 1)_\rho \rightarrow (1, 1)_\rho$  y  $\mathcal{S}_{A \rightarrow BC} = \frac{1}{18}\varepsilon(1, 0, k_0)$  para transiciones  $(1, 1)_\lambda \rightarrow (1, 1)_\lambda$ .

La Tabla 3.1 muestra los valores de las contribuciones de espín para el resto de las

transiciones.

Utilizando el teorema de Wigner-Eckart [7], se calcula la contribución del sabor  $\mathcal{F}_{A \rightarrow BC}$ . Entonces, si definimos a  $T_f$  como el operador tensorial en el espacio de sabor asociado al mesón producido en el proceso  $A \rightarrow BC$  se tiene que el elemento de matriz de transición de un estado  $|(\lambda_A, \mu_A)I^A, I_3^A, Y^A\rangle$  a otro  $|(\lambda_B, \mu_B)I^B, I_3^B, Y^B\rangle$  está dado por [35]

$$\begin{aligned} & \left\langle (\lambda_B, \mu_B)I^B, I_3^B, Y^B \left| T_f^{(\lambda_C, \mu_C)I^C, I_3^C, Y^C} \right| (\lambda_A, \mu_A)I^A, I_3^A, Y^A \right\rangle = \langle I^A, I_3^A, I^C, I_3^C | I^B, I_3^B \rangle \\ & \times \sum_{\gamma} \left\langle \begin{array}{cc} (\lambda_A, \mu_A) & (\lambda_C, \mu_C) \\ I^A, Y^A & I^C, Y^C \end{array} \left| \begin{array}{c} (\lambda_B, \mu_B)_{\gamma} \\ I^B, Y^B \end{array} \right. \right\rangle \left\langle (\lambda_B, \mu_B) \left\| T_f^{(\lambda_C, \mu_C)} \right\| (\lambda_A, \mu_A) \right\rangle_{\gamma} \end{aligned} \quad (3.10)$$

El primer término en el lado derecho de la ecuación corresponde a los coeficientes de Clebsch-Gordan de isoespín asociados al acoplamiento del barión del multiplete  $(\lambda_B, \mu_B)$  con el mesón  $(\lambda_C, \mu_C)$ . El segundo término son los factores isoescalares de  $SU(3)$  que denotaremos por  $\text{ISF}_{\gamma}$ . Y el último término es el elemento de matriz reducido que depende únicamente del multiplete de sabor  $(\lambda_C, \mu_C)$  al que pertenece el mesón. La suma sobre  $\gamma$  corre sobre las diferentes multiplicidades posibles. En la Tablas 3.2 y 3.3 se muestran los elementos de matriz reducidos calculados por Bijker, Iachello y Leviatan [35].

Hasta ahora ya se tiene todo lo necesario para construir las funciones de onda de los bariones. Entonces, de acuerdo con la ecuación (3.6) y tomando únicamente transiciones de bariones (1,1) a bariones (1,1) y mesones pseudoescalares (1,1)( $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ ), la función de onda del protón es de la forma

$$\begin{aligned} |\psi_p\rangle = \mathcal{N}_p \{ & |p\rangle + \beta [ |N\pi\rangle \langle N\pi | T^{\dagger} | N\rangle + |N\eta_8\rangle \langle N\eta_8 | T^{\dagger} | N\rangle \\ & + |\Sigma K\rangle \langle \Sigma K | T^{\dagger} | N\rangle + |\Lambda^0 K\rangle \langle \Lambda^0 K | T^{\dagger} | N\rangle ] \}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $\beta = \frac{\alpha}{M_A - E_B - E_C}$  y  $\alpha$  es un parámetro obtenido del oscilador armónico (base utilizada). Más adelante se discutirá el papel que juega  $\beta$  en relación a las simetrías utilizadas.

Al hacer la expansión en coeficientes de isoespín se obtiene que

$$\begin{aligned} |\psi_p\rangle = \mathcal{N}_p \left\{ & |p\rangle + \beta \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |p\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |n\pi^+\rangle \right) \langle N\pi | T^{\dagger} | N\rangle + |p\eta_8\rangle \langle N\eta_8 | T^{\dagger} | N\rangle \right. \\ & \left. + \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^+ K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^0 K^+\rangle \right) \langle \Sigma K | T^{\dagger} | N\rangle + |\Lambda^0 K^+\rangle \langle \Lambda^0 K | T^{\dagger} | N\rangle \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tabla 3.2: Elementos de matriz reducidos de  $SU(3)_f$ .

$\langle (\lambda_B, \mu_B)    T_f^{(1,1)}    (\lambda_A, \mu_A) \rangle_\gamma$			
$(\lambda_B, \mu_B)$	$(\lambda_A, \mu_A)$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$(1, 1)_\lambda$	$(1, 1)_\lambda$	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$(1, 1)_\rho$	$(1, 1)_\rho$	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\sqrt{3}$
$(3, 0)$	$(3, 0)$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	
$(3, 0)$	$(1, 1)_\lambda$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	
$(3, 0)$	$(1, 1)_\rho$	0	
$(1, 1)_\lambda$	$(3, 0)$	$-\sqrt{\frac{10}{3}}$	
$(1, 1)_\rho$	$(3, 0)$	0	

 Tabla 3.3: Elementos de matriz reducidos de  $SU(3)_f$ .

$\langle (\lambda_B, \mu_B)    T_f^{(0,0)}    (\lambda_A, \mu_A) \rangle_\gamma$		
$(\lambda_B, \mu_B)$	$(\lambda_A, \mu_A)$	$\gamma_1$
$(1, 1)_\lambda$	$(1, 1)_\lambda$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$(1, 1)_\rho$	$(1, 1)_\rho$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$(3, 0)$	$(3, 0)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$

Recordamos que las funciones de espín-sabor están dadas por la ecuación (2.19), entonces podemos escribir el elemento de matriz  $\langle N\pi | T^\dagger | N \rangle$  como

$$\langle N\pi | T^\dagger | N \rangle = \frac{\varepsilon(1, 0, k_0)}{2} (\langle \phi^\rho \chi^\rho | T^\dagger | \phi^\rho \chi^\rho \rangle + \langle \phi^\lambda \chi^\lambda | T^\dagger | \phi^\lambda \chi^\lambda \rangle), \quad (3.13)$$

la parte de espín corresponde a los valores calculados de  $\mathcal{S}_{A \rightarrow BC}$ , por lo que

$$\langle N\pi | T^\dagger | N \rangle = \frac{\varepsilon(1, 0, k_0)}{2} \left( -\frac{1}{6} \langle \phi^\rho | T^{(1,1)} | \phi^\rho \rangle + \frac{1}{18} \langle \phi^\lambda | T^{(1,1)} | \phi^\lambda \rangle \right). \quad (3.14)$$

Tomando en cuenta que los coeficientes de isoespín ya están expresados explícitamente, usando la ecuación (3.10) y nombrando los elementos de matriz reducidos como  $\text{RME}_\gamma$  (por sus siglas en inglés) se tiene que

$$\langle N\pi | T^\dagger | N \rangle = \frac{\varepsilon(1, 0, k_0)}{2} \left[ -\frac{1}{6} (\text{ISF}_1 \times \text{RME}_1(\rho) + \text{ISF}_2 \times \text{RME}_2(\rho)) + \frac{1}{18} (\text{ISF}_1 \times \text{RME}_1(\lambda) + \text{ISF}_2 \times \text{RME}_2(\lambda)) \right]. \quad (3.15)$$

Sustituyendo los valores de los elementos de matriz reducidos de la Tabla 3.2 y los factores isoescalares [17] se llega a que

$$\langle N\pi | T^\dagger | N \rangle = -\frac{5}{18\sqrt{3}}\varepsilon(1, 0, k_0). \quad (3.16)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para cada elemento de matriz, se obtiene que la función de onda del protón en el UCQM es

$$|\psi_p\rangle = \mathcal{N}_p \left\{ |p\rangle + \beta\varepsilon(1, 0, k_0) \left[ \frac{5}{27\sqrt{2}} |n\pi^+\rangle - \frac{5}{54} |p\pi^0\rangle - \frac{1}{18\sqrt{3}} |p\eta_8\rangle + \frac{1}{27\sqrt{2}} |\Sigma^+ K^0\rangle - \frac{1}{54} |\Sigma^0 K^+\rangle + \frac{1}{6\sqrt{3}} |\Lambda^0 K^+\rangle \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Una vez construidas las funciones de onda que describe cada modelo, se puede continuar directamente con el cálculo del contenido de sabor y espín. Sin embargo, el uso de ciertas simetrías permiten relacionar estados entre sí y por lo tanto facilitar los cálculos. Con esta motivación, se hará un pequeño paréntesis en el siguiente capítulo para mostrar estas relaciones de simetría las cuales serán utilizadas posteriormente para la obtención de los resultados finales.

# Capítulo 4

## Simetrías

Como ya se había mencionado antes la estructura algebraica de los quarks está compuesta por las álgebras de espín-sabor  $SU_{sf}(6)$  y color  $SU_c(3)$ . Ya que el punto central de esta tesis es el análisis del contenido de espín y sabor en los bariones, los grados de libertad de color no se toman en cuenta y por consecuencia el álgebra de  $SU_{sf}(6)$  será la más importante.

El álgebra de espín sabor se descompone en los grupos de sabor y espín como

$$SU_{sf}(6) \supset SU_f(3) \otimes SU_s(2)$$

en donde el álgebra de sabor  $SU_f(3)$  a su vez se descompone en los grupos de isoespín e hipercarga como

$$SU_f(3) \supset SU_I(2) \otimes U_Y(1).$$

En este capítulo se presentarán relaciones de simetría que permitirán relacionar propiedades de distintos estados de acuerdo al tipo de multipletes a los que pertenecen, ya sea de isoespín, sabor o espín-sabor.

### 4.1 SU(2)-Isoespín

La idea de la simetría de isoespín surge con la observación de que en ausencia de la interacción electromagnética, la interacción fuerte no distingue entre el protón y el neutrón, de tal forma que estos estados constituyen un doblete (nucleón) del grupo de simetría de isoespín  $SU_I(2)$ . De acuerdo con el modelo de quarks constituyentes el protón y el neutrón son bariones con quarks de valencia  $uud$  y  $ddu$ , respectivamente; en este contexto la simetría de isoespín se extiende a un nivel más fundamental (nivel de quarks) y se definen ahora los quarks  $u$  y  $d$  como el doblete de  $SU_I(2)$ .

El rompimiento de esta simetría está relacionado con la diferencia de masa entre los quarks  $u$  y  $d$ , que resulta ser muy pequeña (de unos cuantos MeV) comparada con la escala de confinamiento  $\Lambda_{QCD}$ . Es por esto, que el isoespín es considerada una buena simetría y frecuentemente su rompimiento suele ser despreciado en estudios experimentales y fenomenológicos.

Los efectos del rompimiento de la simetría de isoespín resultan ser del orden de los de la interacción electromagnética, sin embargo aún no está claro si es esta interacción la responsable del rompimiento [7].

Suponiendo una simetría de  $SU_I(2)$  exacta, el valor esperado de cualquier operador como el contenido de sabor o espín, puede relacionarse entre todos los miembros de un multiplete de isoespín. Esto simplifica enormemente el trabajo pues ya que el análisis desarrollado en esta tesis es de los bariones ligeros, los 18 elementos de matriz que tendrían que calcularse directamente para cada operador, se reducen a 8 y los 10 restantes se obtienen de estos últimos a través de relaciones de simetría.

Tomemos por ejemplo el neutrón. Como el protón y el neutrón constituyen un doblete de isoespín, se puede pasar de un estado al otro a través del operador escalón (1.19)  $\hat{I}_\pm$ . De acuerdo con la fórmula (A.3) del Apéndice A se tiene que

$$|\psi_n\rangle = \hat{I}_- |\psi_p\rangle \quad \text{y} \quad |\psi_p\rangle = \hat{I}_+ |\psi_n\rangle \quad (4.1)$$

Con esto, el valor esperado de un operador cualquiera  $\hat{O}$  en el neutrón se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle &= \langle \psi_n | \hat{O} \hat{I}_- | \psi_p \rangle \\ &= \langle \psi_n | [\hat{O}, \hat{I}_-] + \hat{I}_- \hat{O} | \psi_p \rangle \\ &= \langle \psi_p | \hat{O} | \psi_p \rangle + \langle \psi_p | [\hat{I}_+, [\hat{O}, \hat{I}_-]] | \psi_p \rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ya que el operador  $\hat{I}_\pm$  depende únicamente de los números cuánticos de isoespín  $I$  e  $I_3$ , la ecuación anterior se aplica para cualquier doblete de isoespín, en particular  $\Xi^-$  y  $\Xi^{*-}$ , entonces

$$\langle \psi_{\Xi^{(*)-}} | \hat{O} | \psi_{\Xi^{(*)-}} \rangle = \langle \psi_{\Xi^{(*)0}} | \hat{O} | \psi_{\Xi^{(*)0}} \rangle + \langle \psi_{\Xi^{(*)0}} | [\hat{I}_+, [\hat{O}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Xi^{(*)0}} \rangle. \quad (4.3)$$

Haciendo el mismo procedimiento se tiene que para tripletes de isoespín ( $\Sigma$  y  $\Sigma^*$ )

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\Sigma^{(*)}0} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^{(*)}0} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^{(*)+}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^{(*)+}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi_{\Sigma^{(*)+}} | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Sigma^{(*)+}} \rangle \\
\langle \psi_{\Sigma^{(*)-}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^{(*)-}} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^{(*)0}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^{(*)0}} \rangle + \frac{1}{2} \left( \langle \psi_{\Sigma^{(*)0}} | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Sigma^{(*)0}} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \psi_{\Sigma^{(*)+}} | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Sigma^{(*)+}} \rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

El decuplete de bariones es el único que contiene un cuatriplete de isoespín ( $I = \frac{3}{2}$ ), por lo que las relaciones de simetría de los elementos de matriz entre los bariones  $\Delta$  son

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\Delta+} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Delta+} \rangle &= \langle \psi_{\Delta++} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Delta++} \rangle + \frac{1}{3} \langle \psi_{\Delta++} | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Delta++} \rangle \\
\langle \psi_{\Delta^0} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Delta^0} \rangle &= \langle \psi_{\Delta+} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Delta+} \rangle + \frac{1}{4} \left( \langle \psi_{\Delta+} | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Delta+} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \psi_{\Delta++} | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Delta++} \rangle \right) \\
\langle \psi_{\Delta-} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Delta-} \rangle &= \langle \psi_{\Delta^0} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Delta^0} \rangle + \frac{1}{3} \left( \langle \psi_{\Delta^0} | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Delta^0} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \psi_{\Delta+} | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Delta+} \rangle + \langle \psi_{\Delta++} | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Delta++} \rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

A partir de estas relaciones se puede demostrar fácilmente que en general, los elementos de matriz de un operador arbitrario  $\hat{\mathcal{O}}$  entre un estado con isoespín  $I$  y proyección  $I_3 = I - k - 1$ , se pueden expresar en términos de elementos de matriz entre estados con mayor proyección de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\langle I, I - k - 1 | \hat{\mathcal{O}} | I, I - k - 1 \rangle &= \langle I, I - k | \hat{\mathcal{O}} | I, I - k \rangle + \frac{1}{(2I - k)(k + 1)} \\
&\quad \times \sum_{i=0}^k \langle I, I - k + i | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | I, I - k + i \rangle.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

## 4.2 SU(3)-Sabor

El arreglo de los bariones en multipletes de  $SU_f(3)$  sugiere una simetría interna en el espectro hadrónico. En el límite en el que la masa del quark extraño es cero, la interacción fuerte tendría una simetría exacta de  $SU_f(3)$ , de esta forma todos los estados del octete de bariones serían degenerados al igual que los estados del decuplete.

El rompimiento de esta simetría es generado por la masa finita del quark extraño ( $m_s \approx 80 - 130\text{MeV}$ ) [17], sin embargo este rompimiento puede considerarse relativamente pequeño, pues la diferencia entre la masa del quark  $s$  con la de los quarks  $u$  y  $d$  no es muy grande comparada con la escala de confinamiento  $\Lambda_{QCD}$  [7].

Al suponer una simetría de sabor, el elemento de matriz de un operador entre un estado miembro de un multiplete de sabor, como lo son el octete y decuplete de bariones, podrá relacionarse con los demás miembros del multiplete a través de relaciones de simetría adecuadas. Si extendemos la simetría de isospín comentada en la sección anterior a una simetría de sabor, únicamente será necesario calcular directamente un elemento de matriz para cada multiplete y el resto se puede expresar en términos de estos.

Para mostrar esto, tomemos ahora el hiperón  $\Lambda^0$  que corresponde a un singlete de sabor. De acuerdo con las ecuaciones (A.4)-(A.5) del Apéndice A, la acción de los operadores  $\hat{V}_-$  y  $\hat{U}_-$  sobre los estados  $|p\rangle$  y  $|n\rangle$ , respectivamente es

$$\hat{V}_- |\psi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_{\Sigma^0}\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}} |\psi_{\Lambda^0}\rangle \quad (4.7)$$

$$\hat{U}_- |\psi_n\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_{\Sigma^0}\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}} |\psi_{\Lambda^0}\rangle,$$

por lo que

$$|\psi_{\Lambda^0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \hat{V}_- |\psi_p\rangle + \hat{U}_- |\psi_n\rangle \right), \quad (4.8)$$

además

$$\hat{V}_+ |\psi_{\Lambda^0}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} |\psi_p\rangle \quad \text{y} \quad \hat{U}_+ |\psi_{\Lambda^0}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} |\psi_n\rangle \quad (4.9)$$

Tomando en cuenta esto, y siguiendo un procedimiento similar al de la sección anterior, se obtiene que el elemento de matriz de un operador  $\mathcal{O}$  en  $\Lambda^0$  se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\Lambda^0} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Lambda^0} \rangle &= \frac{1}{6} \left[ 3 \left( \langle \psi_p | \hat{\mathcal{O}} | \psi_p \rangle + \langle \psi_n | \hat{\mathcal{O}} | \psi_n \rangle \right) \right. \\
&\quad + \langle \psi_p | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_p \rangle + \langle \psi_p | [I_+, [\hat{U}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]]] | \psi_p \rangle \\
&\quad \left. - \langle \psi_n | [I_-, [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{U}_-]]] | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | [\hat{U}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{U}_-]] | \psi_n \rangle \right]. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Como ya se obtuvieron las relaciones de simetría entre miembros del mismo multiplete de isoespín, lo único que falta es relacionar cada uno de estos multipletes entre sí.

Con el uso adecuado de los operadores escalón  $\hat{V}_\pm$  y  $\hat{U}_\pm$ , se obtienen fácilmente las siguientes relaciones para los bariones del octete

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\Sigma^+} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^+} \rangle &= \langle \psi_p | \hat{\mathcal{O}} | \psi_p \rangle + \langle \psi_p | [\hat{U}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{U}_-]] | \psi_p \rangle \\
\langle \psi_{\Xi^0} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Xi^0} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^+} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^+} \rangle + \langle \psi_{\Sigma^+} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Sigma^+} \rangle. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Ya que la acción de los operadores escalón  $\hat{V}_\pm$  y  $\hat{U}_\pm$  depende de las etiquetas  $(\lambda, \mu)$ , i.e. del multiplete de sabor al que pertenecen los estados, a diferencia de las relaciones de simetría de isoespín obtenidas anteriormente, en este caso serán diferentes para el octete y el decuplete. Entonces las relaciones correspondientes entre bariones del decuplete son

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\Sigma^{*+}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle &= \langle \psi_{\Delta^{*+}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Delta^{*+}} \rangle + \frac{1}{3} \langle \psi_{\Delta^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Delta^{*+}} \rangle \\
\langle \psi_{\Xi^{*0}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Xi^{*0}} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^{*+}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle + \frac{1}{4} \left( \langle \psi_{\Sigma^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle \right. \\
&\quad \left. \langle \psi_{\Delta^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Delta^{*+}} \rangle \right) \\
\langle \psi_{\Omega^-} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Omega^-} \rangle &= \langle \psi_{\Xi^{*0}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Xi^{*0}} \rangle + \frac{1}{3} \left( \langle \psi_{\Xi^{*0}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Xi^{*0}} \rangle \right. \\
&\quad \left. \langle \psi_{\Sigma^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle + \langle \psi_{\Delta^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Delta^{*+}} \rangle \right). \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Vale la pena recalcar que las relaciones obtenidas son únicamente entre estados con máxima proyección de isoespín, pues el resto de los estados se puede obtener con las relaciones (4.3)-(4.5).

### 4.3 SU(6)-Espín-Sabor

Al extender la simetría de sabor  $SU_f(3)$  a una simetría de espín sabor  $SU_{sf}(6)$ , con el fin de establecer una relación entre los estados del octete de bariones con los del decuplete, se deben definir nuevos operadores de escalón que permitan pasar de un estado a otro. Definimos dichos operadores como

$$\hat{T}_- = d_{\downarrow}^{\dagger} u_{\uparrow} \quad , \quad \hat{T}_+ = u_{\uparrow}^{\dagger} d_{\downarrow} \quad (4.13)$$

en donde  $d_{\downarrow}^{\dagger}$  y  $u_{\uparrow}^{\dagger}$  son los operadores de creación de un quark  $d$  con proyección de espín  $S_3 = -\frac{1}{2}$  y de un quark  $u$  con proyección de espín  $\frac{1}{2}$ , respectivamente. Por otro lado,  $u_{\uparrow}$  y  $d_{\downarrow}$  son operadores de aniquilación de un quark  $u$  con proyección de espín  $S_3 = \frac{1}{2}$  y de un quark  $d$  con proyección de espín  $-\frac{1}{2}$ .

Para obtener las relaciones entre los estados  $|\psi_{p, \frac{1}{2}}\rangle$  (protón con proyección de espín  $S_3 = \frac{1}{2}$ ) y  $|\psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}}\rangle$  (Barión  $\Delta^{++}$  con proyección de espín  $S_3 = \frac{3}{2}$ ), se observa primero que la acción de los operadores  $\hat{T}_+$  y  $\hat{T}_-$  sobre estos estados es

$$\begin{aligned} \hat{T}_- |\psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}}\rangle &= \sqrt{2} |\psi_{p, \frac{1}{2}}\rangle + |\psi_{\Delta^+, \frac{1}{2}}\rangle, \\ \hat{T}_+ |\psi_{p, \frac{1}{2}}\rangle &= \sqrt{2} |\psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}}\rangle \end{aligned} \quad (4.14)$$

y

$$\hat{T}_+ |\psi_{\Delta^+, \frac{1}{2}}\rangle = |\psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}}\rangle.$$

Utilizando estos nuevos operadores, los operadores de escalón de isoespín  $I_{\pm}$  y espín  $S_{\pm}$  y siguiendo el mismo procedimiento de las dos secciones anteriores se obtiene que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{p,\frac{1}{2}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{p,\frac{1}{2}} \rangle &= \langle \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} \rangle \\
&+ \frac{1}{2} \langle \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} | [\hat{T}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{T}_-]] | \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} \rangle \\
&- \frac{1}{6} \left( \langle \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} | [\hat{S}_+, [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{T}_-]]] | \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} \rangle \right. \\
&+ \langle \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} | [[[\hat{T}_+, \hat{\mathcal{O}}], \hat{I}_-], \hat{S}_-] | \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} \rangle \quad (4.15) \\
&- \langle \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} | [\hat{S}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{S}_-]] | \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} \rangle \\
&- \left. \langle \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} \rangle \right) \\
&+ \frac{1}{18} \langle \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} | [\hat{S}_+ [[\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]], \hat{S}_-]] | \psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}} \rangle.
\end{aligned}$$

De esta forma, usando además cualquiera de las relaciones obtenidas anteriormente, se pueden expresar los elementos de matriz de cualquier estado, ya sea del octete o decuplete, en términos del elemento de matriz de  $|\psi_{\Delta^{++},\frac{3}{2}}\rangle$ .



# Capítulo 5

## El contenido de Sabor

En este capítulo se presentará el procedimiento utilizado para el cálculo del contenido de sabor en el marco de los tres modelos efectivos introducidos en el Capítulo 3.

### 5.1 Modelo de quarks quirales

Como ya se mencionó anteriormente, el proceso dominante en el  $\chi$ QM consiste en la fluctuación de un quark en un quark más un bosón de Goldstone ( $q \rightarrow q' + GB \rightarrow q' + (q\bar{q}')$ ). La probabilidad de transición para este proceso está dada por el elemento de matriz<sup>1</sup>

$$P(q \rightarrow q') = \langle \psi_q | q'^{\dagger} q' | \psi_q \rangle, \quad (5.1)$$

en donde  $|\psi_q\rangle$  puede ser cualquiera de las funciones de onda (3.3),  $q'^{\dagger} q'$  es un operador de número de quarks o antiquarks para cualquiera de los 3 sabores ligeros  $u, d$  o  $s$ .

Tomemos por ejemplo la función de onda

$$|\psi_u\rangle = \sqrt{1 - \frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 8)} |u\rangle + g_8 \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} |u\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |u\eta_8\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{3}} |u\eta_1\rangle + |d\pi^+\rangle + |sK^+\rangle \right]. \quad (5.2)$$

Al expresar explícitamente las funciones de onda de sabor de los mesones (2.26)-(2.28) y (2.29), se obtiene

---

<sup>1</sup>Para facilitar la notación, la probabilidad de transición del proceso  $q \rightarrow q' + GB$  se define como  $P(q \rightarrow q')$ .

$$\begin{aligned}
|\psi_u\rangle &= \sqrt{1 - \frac{g_8^2}{3}(\zeta^2 + 8)} |u\rangle + g_8 \left[ \frac{1}{2} (|u(u\bar{u})\rangle - |u(d\bar{d})\rangle) + \frac{1}{6} (|u(u\bar{u})\rangle + |u(d\bar{d})\rangle - 2|u(s\bar{s})\rangle) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{3} (|u(u\bar{u})\rangle + |u(d\bar{d})\rangle + |u(s\bar{s})\rangle) - |d(u\bar{d})\rangle - |s(u\bar{s})\rangle \right].
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Utilizando esta función de onda, el elemento de matriz  $\langle \psi_u | \bar{u}^\dagger \bar{u} | \psi_u \rangle$  se puede calcular fácilmente obteniendo que la probabilidad de encontrar un antiquark  $\bar{u}$  en un quark  $u$  está dada por la probabilidad de transición

$$P(u \rightarrow \bar{u}) = \frac{g_8^2}{9} (\zeta^2 + 4\zeta + 4). \tag{5.4}$$

Si se sigue el mismo procedimiento para cada una de las transiciones posibles  $q \rightarrow q' + GB$ , se obtiene que las probabilidades asociadas a dichas fluctuaciones son

$$\begin{aligned}
P(u \rightarrow u) &= P(d \rightarrow d) = P(s \rightarrow s) &= 1 + \frac{g_8^2}{9} (\zeta^2 + 4\zeta + 4) \\
P(u \rightarrow \bar{u}) &= P(d \rightarrow \bar{d}) = P(s \rightarrow \bar{s}) &= \frac{g_8^2}{9} (\zeta^2 + 4\zeta + 4) \\
P(u \rightarrow d) &= P(u \rightarrow s) = P(u \rightarrow \bar{d}) = P(u \rightarrow \bar{s}) &= \frac{g_8^2}{9} (\zeta^2 - 2\zeta + 10) \\
P(d \rightarrow u) &= P(d \rightarrow s) = P(d \rightarrow \bar{u}) = P(d \rightarrow \bar{s}) &= \frac{g_8^2}{9} (\zeta^2 - 2\zeta + 10) \\
P(s \rightarrow u) &= P(s \rightarrow d) = P(s \rightarrow \bar{u}) = P(s \rightarrow \bar{d}) &= \frac{g_8^2}{9} (\zeta^2 - 2\zeta + 10),
\end{aligned} \tag{5.5}$$

las cuales están sujetas a la condición de normalización

$$\sum_{q'} (P(q \rightarrow q') - P(q \rightarrow \bar{q}')) = 1. \tag{5.6}$$

Para calcular el contenido de sabor del mar de quarks de un barión bastará con sumar las probabilidades de transición de sus quarks de valencia en el elemento de sabor deseado. Por ejemplo, de acuerdo con el modelo de quarks, el protón es un estado formado por dos quarks  $u$  y un quark  $d$ , entonces el contenido de  $\bar{u}$  en el mar de quarks del protón será

$$P_p(\bar{u}) = 2P(u \rightarrow \bar{u}) + P(d \rightarrow \bar{u}) = \frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 2\zeta + 6). \tag{5.7}$$

Tabla 5.1: Relaciones de simetría de  $SU(3)_f$  para el contenido de sabor del octete de bariones.

Barión	$P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$P(\bar{s})$
$n$	$P_p(\bar{d})$	$P_p(\bar{u})$	$P_p(\bar{s})$
$\Sigma^+$	$P_p(\bar{u})$	$P_p(\bar{s})$	$P_p(\bar{d})$
$\Sigma^0$	$\frac{1}{2}(P_p(\bar{u}) + P_p(\bar{s}))$	$\frac{1}{2}(P_p(\bar{u}) + P_p(\bar{s}))$	$P_p(\bar{d})$
$\Sigma^-$	$P_p(\bar{s})$	$P_p(\bar{u})$	$P_p(\bar{d})$
$\Lambda^0$	$\frac{1}{6}(P_p(\bar{u}) + 4P_p(\bar{d}) + P_p(\bar{s}))$	$\frac{1}{6}(P_p(\bar{u}) + 4P_p(\bar{d}) + P_p(\bar{s}))$	$\frac{1}{3}(2P_p(\bar{u}) - P_p(\bar{d}) + 2P_p(\bar{s}))$
$\Xi^0$	$P_p(\bar{d})$	$P_p(\bar{s})$	$P_p(\bar{u})$
$\Xi^-$	$P_p(\bar{s})$	$P_p(\bar{d})$	$P_p(\bar{u})$

Al suponer una simetría de sabor  $SU_f(3)$ , el contenido de sabor para el resto de los bariones se puede calcular a través de las relaciones de simetría obtenidas en el capítulo anterior.

De acuerdo con la ecuación (4.3) el elemento de matriz de un operador  $\hat{\mathcal{O}}$  en el neutrón, puede expresarse en términos de elementos de matriz del protón como

$$\langle \psi_n | \hat{\mathcal{O}} | \psi_n \rangle = \langle \psi_p | \hat{\mathcal{O}} | \psi_p \rangle + \langle \psi_p | [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] | \psi_p \rangle. \quad (5.8)$$

Para el contenido de  $\bar{u}$  en el neutrón, se toma entonces  $\hat{\mathcal{O}} = \bar{u}^\dagger \bar{u}$  y se definen los operadores escalón de isoespín  $\hat{I}_\pm$  en términos de operadores de creación y aniquilación de la siguiente forma

$$\hat{I}_+ = u^\dagger d - \bar{d}^\dagger \bar{u} \quad \text{e} \quad \hat{I}_- = d^\dagger u - \bar{u}^\dagger \bar{d}. \quad (5.9)$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (5.8) y recordando que los operadores de creación y aniquilación cumplen con la regla de conmutación

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_\ell] = a_i^\dagger a_\ell - a_k^\dagger a_j \quad (5.10)$$

se obtiene directamente que

$$P_n(\bar{u}) = \langle \psi_n | \bar{u}^\dagger \bar{u} | \psi_n \rangle = \langle \psi_p | \bar{d}^\dagger \bar{d} | \psi_p \rangle = P_p(\bar{d}). \quad (5.11)$$

Tabla 5.2: Relaciones de simetría de  $SU(3)_f$  para el contenido de sabor del decuplete de bariones.

Barión	$P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$P(\bar{s})$
$\Delta^{++}$	$P_{\Omega^-}(\bar{s})$	$P_{\Omega^-}(\bar{u})$	$P_{\Omega^-}(\bar{u})$
$\Delta^+$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{s}) + P_{\Omega^-}(\bar{u}))$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{u}) + P_{\Omega^-}(\bar{s}))$	$P_{\Omega^-}(\bar{u})$
$\Delta^0$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{u}) + P_{\Omega^-}(\bar{s}))$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{s}) + P_{\Omega^-}(\bar{u}))$	$P_{\Omega^-}(\bar{u})$
$\Delta^-$	$P_{\Omega^-}(\bar{u})$	$P_{\Omega^-}(\bar{s})$	$P_{\Omega^-}(\bar{u})$
$\Sigma^{*+}$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{s}) + P_{\Omega^-}(\bar{u}))$	$P_{\Omega^-}(\bar{u})$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{u}) + P_{\Omega^-}(\bar{s}))$
$\Sigma^{*0}$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{u}) + P_{\Omega^-}(\bar{s}))$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{u}) + P_{\Omega^-}(\bar{s}))$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{u}) + P_{\Omega^-}(\bar{s}))$
$\Sigma^{*-}$	$P_{\Omega^-}(\bar{u})$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{s}) + P_{\Omega^-}(\bar{u}))$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{u}) + P_{\Omega^-}(\bar{s}))$
$\Xi^{*0}$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{u}) + P_{\Omega^-}(\bar{s}))$	$P_{\Omega^-}(\bar{u})$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{s}) + P_{\Omega^-}(\bar{u}))$
$\Xi^{*-}$	$P_{\Omega^-}(\bar{u})$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{u}) + P_{\Omega^-}(\bar{s}))$	$\frac{1}{3}(2P_{\Omega^-}(\bar{s}) + P_{\Omega^-}(\bar{u}))$

Al definir al resto de los operadores escalón de  $SU(3)$  en términos de operadores de creación y aniquilación como

$$\begin{aligned} \hat{U}_+ &= d^\dagger s - \bar{s}^\dagger \bar{d} \quad , \quad \hat{U}_- = s^\dagger d - \bar{d}^\dagger \bar{s} \quad , \\ \hat{V}_+ &= u^\dagger s - \bar{s}^\dagger \bar{u} \quad , \quad \hat{V}_- = s^\dagger u - \bar{u}^\dagger \bar{s} \quad , \end{aligned} \quad (5.12)$$

se obtienen relaciones similares para el resto de los bariones. En la Tabla 5.1 se muestra el contenido de sabor del mar de quarks del octete de bariones en términos del contenido de sabor del mar de quarks del protón. De igual forma, la Tabla 5.2 muestra el contenido de sabor del mar de quarks del decuplete de bariones en términos del contenido de sabor del hiperón  $\Omega^-$ . Estas relaciones son completamente análogas para los quarks y bastará con sustituir  $\bar{q}$  por  $q$  para cada uno de los sabores de quarks.

En ambas tablas se puede observar que para el octete de bariones se tienen tres términos independientes ( $P_p(\bar{u})$ ,  $P_p(\bar{d})$  y  $P_p(\bar{s})$ ), mientras que para el decuplete de bariones sólo hay dos ( $P_{\Omega^-}(\bar{u})$  y  $P_{\Omega^-}(\bar{s})$ ), pues en este caso  $P_{\Omega^-}(\bar{u}) = P_{\Omega^-}(\bar{d})$ .

Tabla 5.3: Contenido de antiquarks del octete y decuplete de bariones en el  $\chi$ QM.

Dec	Oct	$P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$P(\bar{s})$
$\Delta^{++}$		$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 4\zeta + 4)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$
$\Delta^+$	p	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 2\zeta + 6)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 8)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$
$\Delta^0$	n	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 8)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 2\zeta + 6)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$
$\Delta^-$		$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 4\zeta + 4)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$
$\Sigma^{*+}$	$\Sigma^+$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 2\zeta + 6)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 8)$
$\Sigma^{*0}$	$\Sigma^0, \Lambda^0$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 8)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 8)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 8)$
$\Sigma^{*-}$	$\Sigma^-$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 2\zeta + 6)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 8)$
$\Xi^{*0}$	$\Xi^0$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 8)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 2\zeta + 6)$
$\Xi^{*-}$	$\Xi^-$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 8)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 2\zeta + 6)$
$\Omega^-$		$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 - 2\zeta + 10)$	$\frac{g_8^2}{3} (\zeta^2 + 4\zeta + 4)$

Lo importante de estas relaciones de simetría es que son independientes de la forma de la función de onda y por lo tanto pueden usarse en cualquier modelo siempre y cuando se establezca una simetría de sabor con los debidos acoplamientos de  $SU(3)$ .

Si se calcula explícitamente todo el contenido de sabor del protón, de tal forma que se tengan expresiones similares a lo obtenido en la ecuación (5.7), usando las relaciones de las Tablas 5.1 y 5.2; se obtienen las expresiones del contenido de sabor del mar de quarks de los bariones en términos de los parámetros  $g_8$  y  $\zeta$  (Tabla 5.3).

Para recuperar las propiedades del modelo de quarks constituyentes se debe imponer la siguiente condición

$$P_B(q) - P_B(\bar{q}) = n_{val}(q) \quad (5.13)$$

donde  $n_{val}(q)$  es el número de quarks de valencia de sabor  $q$  en el barión  $B$ . Esta condición siempre es válida sin importar el tipo de simetría que se esté utilizando. Tomando en cuenta esto, las expresiones para el contenido de quarks se obtienen directamente al sumar el número de quarks de valencia del estado correspondiente a las expresiones de la Tabla 5.3. De esta forma, se obtiene que en general el contenido de quarks en los bariones estará dado por las expresiones mostradas en la Tabla 5.4.

Cada una de las probabilidades  $P(\bar{q})$  corresponden a las calculadas para cada barión

Tabla 5.4: Expresiones para el contenido de quarks de los bariones en términos de su contenido de antiquarks.

Dec	Oct	$P(u)$	$P(d)$	$P(s)$
$\Delta^{++}$		$3 + P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$P(\bar{s})$
$\Delta^+$	p	$2 + P(\bar{u})$	$1 + P(\bar{d})$	$P(\bar{s})$
$\Delta^0$	n	$1 + P(\bar{u})$	$2 + P(\bar{d})$	$P(\bar{s})$
$\Delta^-$		$P(\bar{u})$	$3 + P(\bar{d})$	$P(\bar{s})$
$\Sigma^{*+}$	$\Sigma^+$	$2 + P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$1 + P(\bar{s})$
$\Sigma^{*0}$	$\Sigma^0, \Lambda^0$	$1 + P(\bar{u})$	$1 + P(\bar{d})$	$1 + P(\bar{s})$
$\Sigma^{*-}$	$\Sigma^-$	$P(\bar{u})$	$2 + P(\bar{d})$	$1 + P(\bar{s})$
$\Xi^{*0}$	$\Xi^0$	$1 + P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$2 + P(\bar{s})$
$\Xi^{*-}$	$\Xi^-$	$P(\bar{u})$	$1 + P(\bar{d})$	$2 + P(\bar{s})$
$\Omega^-$		$P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$3 + P(\bar{s})$

y por lo tanto no son necesariamente iguales, sin embargo las expresiones de la Tabla 5.4 se escribieron de esta forma para simplificar la notación.

## 5.2 El modelo de la nube mesónica

En el Capítulo 3 se introdujo que la forma de la función de onda del protón descrita por el MCM está dada por

$$\begin{aligned}
|\psi_p\rangle = & \mathcal{N}_p \left[ |p\rangle + a \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |p\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |n\pi^+\rangle \right) + b |p\eta_8\rangle \right. \\
& + c \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^+ K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^0 K^+\rangle \right) + d |\Lambda^0 K^+\rangle + e |p\eta_1\rangle \\
& + f \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta^+\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta^0\pi^+\rangle \right) \\
& \left. + g \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^{*+} K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^{*0} K^+\rangle \right) \right]
\end{aligned}$$

con  $\mathcal{N}_p = (1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2)^{-\frac{1}{2}}$  como un factor de normalización.

Esta función de onda incluye acoplamiento del tipo  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ ,  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8} \otimes \mathbf{1}$  y  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{10} \otimes \mathbf{8}$ .

Si se substituyen explícitamente las funciones de onda de sabor de los mesones, de tal forma que la función de onda del protón quede expresada en términos de estados del tipo  $|Bq\bar{q}'\rangle$  (Barión-quark-antiquark), factorizando los términos adecuados se obtiene

$$\begin{aligned}
|\psi_p\rangle = & \mathcal{N}_p \left[ |p\rangle + \left( \frac{a + b + \sqrt{2}e}{\sqrt{6}} \right) |pu\bar{u}\rangle + \left( \frac{b - a + \sqrt{2}e}{\sqrt{6}} \right) |pd\bar{d}\rangle \right. \\
& + \left( \frac{e - \sqrt{2}b}{\sqrt{3}} \right) |ps\bar{s}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} a |nud\bar{d}\rangle + c \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^0 u\bar{s}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^+ d\bar{s}\rangle \right) \\
& - d |\Lambda^0 u\bar{s}\rangle + f \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta^{++} d\bar{u}\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta^+ u\bar{u}\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta^+ d\bar{d}\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta^0 u\bar{d}\rangle \right) \\
& \left. + g \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^{*0} u\bar{s}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^{*+} d\bar{s}\rangle \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.14}$$

De forma similar como se hizo en la sección anterior, el contenido de sabor corresponde a elementos de matriz de operadores del tipo  $q^\dagger q$ , sin embargo para el MCM los estados utilizados para calcular dicho elemento de matriz serán las funciones de onda de los bariones.

Tomemos por ejemplo el operador  $\bar{u}^\dagger \bar{u}$ , usando la expresión (5.14) de la función de onda del protón, se obtiene fácilmente que el contenido de antiquarks  $\bar{u}$  en el mar de quarks del protón está dado por

$$\begin{aligned} P_p(\bar{u}) = \langle \psi_p | \bar{u}^\dagger \bar{u} | \psi_p \rangle &= \mathcal{N}_p^2 \left[ \left( \frac{a + b + \sqrt{2}e}{\sqrt{6}} \right)^2 + \frac{f^2}{2} + \frac{f^2}{6} \right] \\ &= \mathcal{N}_p^2 \left( \frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{6} + \frac{e^2}{3} + \frac{2}{3}f^2 + \frac{ab}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}ae + \frac{\sqrt{2}}{3}be \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

que corresponde a la suma de las amplitudes al cuadrado de los términos  $|pu\bar{u}\rangle$ ,  $|\Delta^{++}d\bar{u}\rangle$  y  $|\Delta^+u\bar{u}\rangle$ .

En el mismo contexto, las funciones de onda del resto de los bariones del octete son las siguientes:

$$\begin{aligned} |\psi_{\Sigma^+}\rangle &= \mathcal{N}_{\Sigma^+} \left[ |\Sigma^+\rangle + a |p\bar{K}^0\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}} (|\Sigma^+\pi^0\rangle - |\Sigma^0\pi^+\rangle) + c |\Lambda^0\pi^+\rangle + d |\Sigma^+\eta_8\rangle \right. \\ &\quad \left. + e |\Xi^0 K^+\rangle + f |\Sigma^+\eta_1\rangle + g \left( \frac{\sqrt{3}}{2} |\Delta^{++}K^-\rangle - \frac{1}{2} |\Delta^+\bar{K}^0\rangle \right) \right. \\ &\quad \left. + h \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Sigma^{*+}\pi^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\Sigma^{*0}\pi^+\rangle \right) + i |\Sigma^{*+}\eta_8\rangle + j |\Xi^{*0}K^+\rangle \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
|\psi_{\Lambda^0}\rangle &= \mathcal{N}_{\Lambda^0} \left[ |\Lambda^0\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}} (|pK^-\rangle - |n\bar{K}^0\rangle) + \frac{b}{\sqrt{3}} (|\Sigma^+\pi^-\rangle - |\Sigma^0\pi^0\rangle + |\Sigma^-\pi^+\rangle) \right. \\
&\quad + c |\Lambda^0\eta_8\rangle + \frac{d}{\sqrt{2}} (|\Xi^0K^0\rangle - |\Xi^-K^+\rangle) + e |\Lambda^0\eta_1\rangle \\
&\quad + f \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^{*+}\pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^{*0}\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^{*-}\pi^+\rangle \right) \\
&\quad \left. + g \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Xi^{*0}K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\Xi^{*-}K^+\rangle \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
|\psi_{\Xi^0}\rangle &= \mathcal{N}_{\Xi^0} \left[ |\Xi^0\rangle + a \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^+K^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^0\bar{K}^0\rangle \right) + b |\Lambda^0\bar{K}^0\rangle \right. \\
&\quad + c \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Xi^0\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Xi^-\pi^+\rangle \right) + d |\Xi^0\eta^8\rangle + e |\Xi^0\eta_1\rangle \\
&\quad + f \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^{*+}K^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^{*-}\bar{K}^0\rangle \right) \\
&\quad \left. + g \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Xi^{*0}\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Xi^{*-}\pi^+\rangle \right) + h |\Xi^{*0}\eta_8\rangle + i |\Omega^-K^+\rangle \right].
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Notamos que sólo se han tomado los estados con máxima proyección de isoespín, pues como ya se comentó en el capítulo anterior, esta es una buena simetría y los efectos de su rompimiento son de tal orden que generalmente se consideran despreciables.

Al seguir un procedimiento completamente análogo para el resto de estados del octete, se obtienen las expresiones para el contenido de sabor en el mar de quarks de cada barión (Tabla 5.5). Los factores de normalización  $\mathcal{N}_A^2$  correspondientes a cada estado se muestran en la Tabla 5.6.

Tabla 5.5: Contenido de antiquarks en el octete de bariones.

Barión ( $A$ )	$P(\bar{u})/\mathcal{N}_A^2$	$P(\bar{d})/\mathcal{N}_A^2$	$P(\bar{s})/\mathcal{N}_A^2$
$p$	$\frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{6} + \frac{e^2}{3} + \frac{2}{3}f^2$ $+\frac{ab}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}ae + \frac{\sqrt{2}}{3}be$	$\frac{5}{6}a^2 + \frac{b^2}{6} + \frac{e^2}{3} + \frac{f^2}{3}$ $-\frac{ab}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}ae + \frac{\sqrt{2}}{3}be$	$\frac{2}{3}b^2 + \frac{e^2}{3} + c^2 + d^2 + g^2$ $-\frac{2\sqrt{2}}{3}be$
$\Sigma^+$	$\frac{b^2}{4} + \frac{d^2}{6} + \frac{f^2}{3} + \frac{3}{4}g^2$ $+\frac{h^2}{4} + \frac{i^2}{6} + \frac{bd}{\sqrt{6}} + \frac{bf}{\sqrt{3}}$ $+\frac{\sqrt{2}}{3}df + \frac{hi}{\sqrt{6}}$	$a^2 + \frac{3}{4}b^2 + c^2 + \frac{d^2}{6} + \frac{f^2}{3}$ $+\frac{g^2}{4} + \frac{3}{4}h^2 + \frac{i^2}{6} - \frac{bd}{\sqrt{6}}$ $-\frac{bf}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}df - \frac{hi}{\sqrt{6}}$	$\frac{2}{3}d^2 + \frac{f^2}{3} + e^2 + \frac{2}{3}i^2 + j^2$ $-\frac{2\sqrt{2}}{3}df$
$\Lambda^0$	$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{6} + \frac{e^2}{3} + \frac{f^2}{2}$ $+\frac{\sqrt{2}}{3}ce$	$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{6} + \frac{e^2}{3} + \frac{f^2}{2}$ $+\frac{\sqrt{2}}{3}ce$	$\frac{2}{3}c^2 + d^2 + \frac{e^2}{3} + g^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}ce$
$\Xi^0$	$\frac{2}{3}a^2 + \frac{c^2}{6} + \frac{d^2}{6} + \frac{e^2}{3}$ $+\frac{2}{3}f^2 + \frac{g^2}{6} + \frac{h^2}{6} + \frac{cd}{3}$ $+\frac{\sqrt{2}}{3}ce + \frac{\sqrt{2}}{3}de + \frac{gh}{3}$	$\frac{a^2}{3} + b^2 + \frac{5}{6}c^2 + \frac{d^2}{6} + \frac{e^2}{3}$ $+\frac{f^2}{3} + \frac{5g^2}{6} + \frac{h^2}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}ce$ $-\frac{cd}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}de - \frac{gh}{3}$	$\frac{2}{3}d^2 + \frac{e^2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}de$ $+\frac{2}{3}h^2 + i^2$

Tabla 5.6: Factores de normalización de los estados del octete en el MCM.

$ \psi_A\rangle$	$\mathcal{N}_A^2$
$ \psi_p\rangle$	$(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2)^{-1}$
$ \psi_{\Sigma^+}\rangle$	$(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 + j^2)^{-1}$
$ \psi_{\Lambda^0}\rangle$	$(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2)^{-1}$
$ \psi_{\Xi^0}\rangle$	$(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2)^{-1}$

En el caso del decuplete de bariones se toman las funciones de onda que incluyen todos los procesos del tipo  $\mathbf{10} \rightarrow \mathbf{10} \otimes \mathbf{8}$ ,  $\mathbf{10} \rightarrow \mathbf{10} \otimes \mathbf{1}$  y  $\mathbf{10} \rightarrow \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ . Tomando nuevamente los estados de máxima proyección de isospín, se tiene que sus correspondientes funciones de onda son

$$\begin{aligned}
|\psi_{\Delta^{++}}\rangle = & \mathcal{N}_{\Delta^{++}} \left[ |\Delta^{++}\rangle + a \left( \sqrt{\frac{3}{5}} |\Delta^{++}\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} |\Delta^+\pi^+\rangle \right) + b |\Delta^{++}\eta_8\rangle \right. \\
& \left. c |\Sigma^{*+}K^+\rangle + d |\Delta^{++}\eta_1\rangle + e |p\pi^+\rangle + f |\Sigma^+K^+\rangle \right] \quad (5.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\psi_{\Sigma^{*+}}\rangle = & \mathcal{N}_{\Sigma^{*+}} \left[ |\Sigma^{*+}\rangle + a \left( \frac{\sqrt{3}}{2} |\Delta^{++}K^-\rangle - \frac{1}{2} |\Delta^+\bar{K}^0\rangle \right) \right. \\
& + \frac{b}{\sqrt{2}} (|\Sigma^{*+}\pi^0\rangle - |\Sigma^{*0}\pi^+\rangle) + c |\Sigma^{*+}\eta_8\rangle + d |\Xi^{*0}K^+\rangle \\
& + e |\Sigma^{*+}\eta_1\rangle + f |p\bar{K}^0\rangle + \frac{g}{\sqrt{2}} (|\Sigma^+\pi^0\rangle - |\Sigma^0\pi^+\rangle) \\
& \left. + h |\Lambda^0\pi^+\rangle + i |\Sigma^+\eta_8\rangle + j |\Xi^0K^+\rangle \right] \quad (5.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\psi_{\Xi^*0}\rangle &= \mathcal{N}_{\Xi^*0} \left[ |\Xi^{*0}\rangle + a \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^{*+} K^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^{*0} \bar{K}^0\rangle \right) \right. \\
&\quad + b \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Xi^{*-} \pi^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Xi^{*0} \pi^0\rangle \right) + c |\Xi^{*0} \eta_8\rangle + d |\Omega^- K^+\rangle \\
&\quad + e |\Xi^{*0} \eta_1\rangle + f \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^+ K^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^0 \bar{K}^0\rangle \right) + g |\Lambda^0 \bar{K}^0\rangle \\
&\quad \left. + h \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Xi^0 \pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Xi^- \pi^+\rangle \right) + i |\Xi^0 \eta_8\rangle \right]
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
|\psi_{\Omega^-}\rangle &= \mathcal{N}_{\Omega^-} \left[ |\Omega^-\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}} (|\Xi^{*0} K^-\rangle - |\Xi^{*-} \bar{K}^0\rangle) \right. \\
&\quad \left. + b |\Omega^- \eta_8\rangle + c |\Omega^- \eta_1\rangle + \frac{d}{\sqrt{2}} (|\Xi^0 K^-\rangle - |\Xi^- \bar{K}^0\rangle) \right].
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Siguiendo un procedimiento idéntico al utilizado anteriormente para el octete de bariones y tomando los adecuados factores de normalización (Tabla 5.7) se obtienen las expresiones para el contenido de sabor del mar de quarks en los bariones del decuplete (Tabla 5.8).

Tabla 5.7: Factores de normalización de los estados del decuplete en el MCM.

$ \psi_A\rangle$	$\mathcal{N}_A^2$
$ \psi_{\Delta^{++}}\rangle$	$(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)^{-1}$
$ \psi_{\Sigma^{*+}}\rangle$	$(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 + j^2)^{-1}$
$ \psi_{\Xi^*0}\rangle$	$(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + i^2)^{-1}$
$ \psi_{\Omega^-}\rangle$	$(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}$

Como se mencionó en la sección anterior, el contenido de quarks, tanto para el octete como el decuplete de bariones, se obtiene usando las expresiones de la Tabla 5.4.

Es indispensable mencionar que para simplificar la notación (una vez más), los resultados obtenidos se expresaron en términos de coeficientes del tipo  $a, b, c, \dots$ , etc. Sin embargo, al restringirse únicamente a una simetría de isoespín  $SU_I(2)$ , estos coeficientes no son necesariamente los mismos para cada estado.

Tabla 5.8: Contenido de antiquarks en el decuplete de bariones.

Barión (A)	$P(\bar{u})/\mathcal{N}_A^2$	$P(\bar{d})/\mathcal{N}_A^2$	$P(\bar{s})/\mathcal{N}_A^2$
$\Delta^{++}$	$\frac{3}{10}a^2 + \frac{b^2}{6} + \frac{d^2}{3} + \frac{ab}{\sqrt{5}}$ $+ \sqrt{\frac{2}{5}}ad + \frac{\sqrt{2}}{3}bd$	$\frac{7}{10}a^2 + \frac{b^2}{6} + \frac{d^2}{3} + e^2 - \frac{ab}{\sqrt{5}}$ $- \sqrt{\frac{2}{5}}ad + \frac{\sqrt{2}}{3}bd$	$\frac{2}{3}b^2 + \frac{d^2}{3} + c^2 + f^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}bd$
$\Sigma^{*+}$	$\frac{3}{4}a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{6} + \frac{e^2}{3} + \frac{g^2}{4}$ $+ \frac{i^2}{6} + \frac{gi}{\sqrt{6}} + \frac{bc}{\sqrt{6}} + \frac{be}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}ce$	$\frac{a^2}{4} + \frac{3}{4}b^2 + \frac{c^2}{6} + \frac{e^2}{3} + f^2$ $+ \frac{3}{4}g^2 + h^2 + \frac{i^2}{6} - \frac{bc}{\sqrt{6}} - \frac{be}{\sqrt{3}}$ $+ \frac{\sqrt{2}}{3}ce - \frac{gi}{\sqrt{6}}$	$\frac{2}{3}c^2 + d^2 + \frac{e^2}{3} + \frac{2}{3}i^2$ $+ j^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}ce$
$\Xi^{*0}$	$\frac{2}{3}a^2 + \frac{b^2}{6} + \frac{c^2}{6} + \frac{e^2}{3} + \frac{2}{3}f^2$ $+ \frac{h^2}{6} + \frac{i^2}{6} + \frac{bc}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}be$ $+ \frac{\sqrt{2}}{3}ce + \frac{hi}{3}$	$\frac{a^2}{3} + \frac{5}{6}b^2 + \frac{c^2}{6} + \frac{e^2}{3} + \frac{f^2}{3}$ $+ g^2 + \frac{5}{6}h^2 + \frac{i^2}{6} - \frac{bc}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}be$ $+ \frac{\sqrt{2}}{3}ce - \frac{hi}{3}$	$\frac{2}{3}c^2 + d^2 + \frac{e^2}{3} + \frac{2}{3}i^2$ $- \frac{2\sqrt{2}}{3}ce$
$\Omega^-$	$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{6} + \frac{c^2}{3} + \frac{d^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}bc$	$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{6} + \frac{c^2}{3} + \frac{d^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}bc$	$\frac{2}{3}b^2 + \frac{c^2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}bc$

### 5.3 Modelo de quarks con producción de pares quark-antiquark (Unquenched constituent quark model)

De acuerdo con lo establecido en el Capítulo 3, la función de onda de los bariones descrita por el modelo de quarks con producción de pares quark-antiquark (o UCQM por sus siglas en inglés) está dada por la ecuación (3.6)

$$|\psi_A\rangle = \mathcal{N}_p \left[ |A\rangle + \sum_{BCI} \int d\vec{k} |BC\vec{k}lJ_A\rangle \frac{\langle BC\vec{k}lJ_A | T^\dagger | A \rangle}{M_A - E_B - E_C} \right].$$

Al suponer una simetría de cerradura, i.e. que todos los estados tanto mesones como bariones sean degenerados, el término  $M_A - E_B - E_C$  es constante y puede factorizarse de la función de onda como  $\beta = \frac{\alpha}{M_A - E_B - E_C}$ ; donde  $\alpha$ , repetimos nuevamente, es un parámetro de la base del oscilador armónico. Con estas suposiciones y tomando procesos del tipo  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ ,  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8} \otimes \mathbf{1}$  y  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{10} \otimes \mathbf{8}$ , cuyos acoplamientos son únicamente a mesones pseudoescalares, la función de onda del protón estará dada por

$$\begin{aligned} |\psi_p\rangle = & \mathcal{N}_p \left\{ |p\rangle + \beta \left[ \frac{5}{6\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |p\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |n\pi^+\rangle \right) + \frac{1}{6\sqrt{3}} |p\eta_8\rangle \right. \right. \\ & - \frac{1}{6\sqrt{3}} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^+ K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^0 K^-\rangle \right) - \frac{1}{2\sqrt{3}} |\Lambda^0 K^+\rangle + \frac{1}{3\sqrt{6}} |p\eta_1\rangle \\ & + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta^+\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta^0\pi^+\rangle \right) \\ & \left. \left. - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^{*+} K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^{*0} K^+\rangle \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

en donde el factor de normalización es  $\mathcal{N}_p = (1 + \frac{13}{18}\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Además, notamos que a diferencia con lo obtenido en (3.17), el parámetro  $\beta$  ha sido redefinido como  $-\beta\varepsilon(1, 0, k_0)/3$ .

Esta función de onda es muy similar a la descrita por el MCM (Ecuación (3.5)) por lo que los coeficientes de ambos modelos se pueden relacionar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a = \frac{5}{6\sqrt{3}}\beta, \quad b = \frac{\beta}{6\sqrt{3}}, \quad c = -\frac{\beta}{6\sqrt{3}}, \quad d = -\frac{\beta}{2\sqrt{3}} \\ e = \frac{\beta}{3\sqrt{6}}, \quad f = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\beta \quad \text{y} \quad g = -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\beta. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Si sustituimos estos coeficientes en las expresiones de la Tabla 5.5, tendremos que el contenido de antiquarks en el mar del protón estará dado por las siguientes expresiones

$$P_p(\bar{u}) = \mathcal{N}_p^2 \frac{8}{27} \beta^2 \quad , \quad P_p(\bar{d}) = \mathcal{N}_p^2 \frac{7}{27} \beta^2 \quad , \quad P_p(\bar{s}) = \mathcal{N}_p^2 \frac{\beta^2}{6}. \quad (5.25)$$

Uno de los principales objetivos de este estudio es encontrar las correspondencias entre los tres modelos presentados. El hecho de que el UCQM y el MCM tengan los mismos grados de libertad, ha permitido establecer una correspondencia uno a uno dada por las expresiones (5.24). Por otro lado, para encontrar la correspondencia entre el  $\chi$ QM y el UCQM observamos que de las expresiones (5.25) y las de la Tabla 5.3 se tiene que para el protón

$$P_p(\bar{u}) - P_p(\bar{s}) = \frac{4g_8^2}{3} (\zeta - 1) = \mathcal{N}_p^2 \frac{7}{54} \beta^2. \quad (5.26)$$

Al comparar este resultado con las expresiones para  $P_p(\bar{d})$  se obtiene fácilmente la ecuación cuadrática  $\zeta^2 - 8\zeta + 16 = 0$ , cuya solución es  $\zeta = 4$ . Para encontrar la relación entre los parámetros  $g_8$  y  $\beta$ , los cuales son característicos de cada modelo, bastará con sustituir el valor de  $\zeta$  en cualquiera de las expresiones  $P_p(\bar{q})$ , lo que resulta en tres relaciones distintas entre  $g_8$  y  $\beta$  que hacen imposible establecer una correspondencia entre ambos modelos.

Al extender el análisis incluyendo acoplamientos con mesones vectoriales, la función de onda del nucleón<sup>2</sup> quedará de la siguiente forma

---

<sup>2</sup>Por simplicidad se escribe la función de onda del nucleón en lugar de la del protón para evitar los coeficientes de Clebsch-Gordan de isoespín. De esta forma, la relación entre los coeficientes del UCQM y los del MCM se puede llevar a cabo de una manera más directa.

$$\begin{aligned}
|\psi_N\rangle = \mathcal{N}_p & \left\{ |N\rangle + \beta \left[ \frac{1}{6\sqrt{3}} [5|N\pi\rangle + |N\eta_8\rangle - |\Sigma K\rangle - 3|\Lambda K\rangle] \right. \right. \\
& + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} [2|\Delta\pi\rangle - |\Sigma^* K\rangle] + \frac{1}{3\sqrt{6}} |N\eta_1\rangle \left. \right] \\
& + \beta \left[ \frac{1}{18} [-7|N\rho\rangle + |N\omega_8\rangle + 5|\Sigma K^*\rangle + 3|\Lambda K^*\rangle] \right. \\
& + \frac{\sqrt{2}}{9} [2|\Delta\rho\rangle - |\Sigma^* K^*\rangle] + \frac{1}{9\sqrt{2}} |N\omega_1\rangle \left. \right]_{J_{BC}=\frac{1}{2}} \\
& + \beta \left[ \frac{\sqrt{2}}{9} [-4|N\rho\rangle - 2|N\omega_8\rangle - |\Sigma K^*\rangle + 3|\Lambda K^*\rangle] \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sqrt{10}}{9} [2|\Delta\rho\rangle - |\Sigma^* K^*\rangle] - \frac{4}{9} |N\omega_1\rangle \right]_{J_{BC}=\frac{3}{2}} \right\}, \tag{5.27}
\end{aligned}$$

con  $\mathcal{N}_p = (1 + \frac{8}{3}\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Consecuentemente, el contenido de antiquarks en el mar del protón estará determinado por las nuevas expresiones

$$P_p(\bar{u}) = \mathcal{N}_p^2 \frac{10}{9} \beta^2, \quad P_p(\bar{d}) = \mathcal{N}_p^2 \frac{8}{9} \beta^2, \quad P_p(\bar{s}) = \mathcal{N}_p^2 \frac{2}{3} \beta^2, \tag{5.28}$$

las cuales sí permiten establecer una correspondencia uno a uno entre el  $\chi$ QM y el UCQM. Al realizar el mismo procedimiento descrito anteriormente, se obtiene nuevamente que  $\zeta = 4$  y que la relación de correspondencia entre ambos modelos está dada por la expresión

$$g_8^2 = \frac{\beta^2}{3(3 + 8\beta^2)}. \tag{5.29}$$

El contenido de sabor en el mar de quarks del resto de los bariones del octete, se obtiene aplicando las relaciones de simetría de sabor calculadas en el capítulo anterior. Por otro lado, para los bariones del decuplete se sigue un procedimiento totalmente análogo partiendo de la función de onda del hiperón  $\Omega^-$

$$\begin{aligned}
 |\psi_\Omega\rangle = & \mathcal{N}_{\Omega^-} \left\{ |\Omega\rangle + \beta \left[ -\frac{2}{3\sqrt{3}} |\Xi\bar{K}\rangle - \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} |\Omega\eta_8\rangle + \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}} |\Omega\eta_1\rangle + \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} |\Xi^*\bar{K}\rangle \right] \right. \\
 & + \beta \left[ -\frac{2}{9} |\Xi\bar{K}^*\rangle - \frac{\sqrt{2}}{9} |\Omega\omega_8\rangle + \frac{1}{9} |\Omega\omega_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{9} |\Xi^*\bar{K}^*\rangle \right]_{J_{BC}=\frac{1}{2}} \\
 & + \beta \left[ \frac{2\sqrt{5}}{9} |\Xi\bar{K}^*\rangle - \frac{1}{9} |\Omega\omega_8\rangle + \frac{1}{9\sqrt{2}} |\Omega\omega_1\rangle + \frac{1}{9} |\Xi^*\bar{K}^*\rangle \right]_{J_{BC}=\frac{3}{2}} \\
 & \left. + \beta \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} |\Omega\omega_8\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Omega\omega_1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Xi^*\bar{K}^*\rangle + \right]_{J_{BC}=\frac{5}{2}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Las expresiones finales para el contenido de antiquarks en el mar de los bariones ligeros se muestran en la Tabla 5.9. Nuevamente, el contenido de quarks se obtiene a partir de estas expresiones utilizando las ecuaciones de la Tabla 5.4.

Tabla 5.9: Contenido de antiquarks del decuplete y octete de bariones en el UCQM en el límite de cerradura.

Dec	Oct	$P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$P(\bar{s})$
$\Delta^{++}$		$\frac{4}{3}\beta^2$	$\frac{2}{3}\beta^2$	$\frac{2}{3}\beta^2$
$\Delta^+$	$p$	$\frac{10}{9}\beta^2$	$\frac{8}{9}\beta^2$	$\frac{2}{3}\beta^2$
$\Delta^0$	$n$	$\frac{8}{9}\beta^2$	$\frac{10}{9}\beta^2$	$\frac{2}{3}\beta^2$
$\Delta^-$		$\frac{2}{3}\beta^2$	$\frac{4}{3}\beta^2$	$\frac{2}{3}\beta^2$
$\Sigma^{*+}$	$\Sigma^+$	$\frac{10}{9}\beta^2$	$\frac{2}{3}\beta^2$	$\frac{8}{9}\beta^2$
$\Sigma^{*0}$	$\Sigma^0, \Lambda^0$	$\frac{8}{9}\beta^2$	$\frac{8}{9}\beta^2$	$\frac{8}{9}\beta^2$
$\Sigma^{*-}$	$\Sigma^-$	$\frac{2}{3}\beta^2$	$\frac{10}{9}\beta^2$	$\frac{8}{9}\beta^2$
$\Xi^{*0}$	$\Xi^0$	$\frac{8}{9}\beta^2$	$\frac{2}{3}\beta^2$	$\frac{10}{9}\beta^2$
$\Xi^{*-}$	$\Xi^-$	$\frac{2}{3}\beta^2$	$\frac{8}{9}\beta^2$	$\frac{10}{9}\beta^2$
$\Omega^-$		$\frac{2}{3}\beta^2$	$\frac{2}{3}\beta^2$	$\frac{4}{3}\beta^2$

## 5.4 Fluctuaciones piónicas y la asimetría de sabor

Por cuestiones dinámicas, las fluctuaciones piónicas en la función de onda de los bariones son las principales componentes que contribuyen a la asimetría de sabor ( $P(\bar{d}) - P(\bar{u})$ ) en el mar de quarks.

Al restringirse únicamente a estas componentes, en el MCM la función de onda del protón (3.5) se reduce a

$$|\psi_p\rangle = \mathcal{N}_p \left[ |p\rangle + a_p \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |p\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |p\pi^+\rangle \right) + b_p \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta^+\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta^0\pi^+\rangle \right) \right], \quad (5.31)$$

donde  $\mathcal{N}_p = (1 + a_p^2 + b_p^2)^{-\frac{1}{2}}$  y con la cual se obtiene que el contenido de antiquarks en el mar del protón está dado por las expresiones

$$P_p(\bar{u}) = \frac{a_p^2 + 4b_p^2}{6(1 + a_p^2 + b_p^2)}, \quad P_p(\bar{d}) = \frac{5a_p^2 + 2b_p^2}{6(1 + a_p^2 + b_p^2)}. \quad (5.32)$$

De acuerdo con el trabajo realizado por Chang y Peng [36], al combinar los resultados experimentales de la asimetría de sabor en el mar del protón obtenida en un experimento Drell-Yan [4] y el contenido de extrañeza medido en un experimento de dispersión inelástica profunda [37]; utilizando el modelo BHPS (Brodsky-Hoyer-Peterson-Sakai) [38], ellos obtuvieron que el contenido de  $\bar{u}$  y  $\bar{d}$  en el protón es

$$P_p(\bar{u}) = 0.176 \quad , \quad P_p(\bar{d}) = 0.294, \quad (5.33)$$

que implican una asimetría de sabor  $\mathcal{A}(p) = P_p(\bar{d}) - P_p(\bar{u}) = 0.118$ .

Al comparar estas cantidades con las expresiones (5.32) se encuentra que

$$a_p^2 = 0.518 \quad , \quad b_p^2 = 0.368. \quad (5.34)$$

Como ya se mencionó anteriormente, los parámetros de las funciones de onda del resto de los bariones no son necesariamente iguales. Sin embargo, para encontrar una correspondencia entre ellos se puede suponer que dichos parámetros están determinados por los acoplamientos  $g_1$  y  $g_2$  para procesos del tipo  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$  y  $g$  para procesos  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{10} \otimes \mathbf{8}$ , de tal forma que para el protón

$$a_p = \frac{3}{2\sqrt{5}}g_1 + \frac{g_2}{2} \quad \text{y} \quad b_p = -\frac{2}{\sqrt{5}}g, \quad (5.35)$$

cuyos coeficientes corresponden a los factores isoescalares de  $SU(3)$  [17].

Los acoplamientos  $g_1$  y  $g_2$  pueden relacionarse con los acoplamientos  $F$  y  $D$  que aparecen en el lagrangiano de interacción

$$\mathcal{L} = -\sqrt{2}DT r (\{\bar{B}, B\} M) + \sqrt{2}F ([\bar{B}, B] M), \quad (5.36)$$

donde  $B$  es la matriz del octete de bariones,  $\bar{B}$  su matriz adjunta y  $M$  la matriz del octete de mesones; de la siguiente forma

$$D = \frac{\sqrt{30}}{40}g_1 \quad , \quad F = \frac{\sqrt{6}}{24}g_2. \quad (5.37)$$

Por otro lado, el modelo de quarks constituyentes establece que  $F/D = 2/3$ . Bajo estas hipótesis se obtiene que los acoplamientos  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g$  son

$$g_1^2 = 0.413 \quad , \quad g_2^2 = 0.334 \quad \text{y} \quad g^2 = 0.461. \quad (5.38)$$

De igual forma, al restringirse únicamente a fluctuaciones piónicas, las funciones de onda del resto de los bariones del octete<sup>3</sup> se reducen a

$$\begin{aligned} |\psi_{\Sigma^+}\rangle &= \mathcal{N}_{\Sigma^+} \left[ |\Sigma^+\rangle + \frac{a_{\Sigma^+}}{\sqrt{2}} (|\Sigma^+\pi^0\rangle - |\Sigma^0\pi^+\rangle) + b_{\Sigma^+} |\Lambda^0\pi^+\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_{\Sigma^+}}{\sqrt{2}} (|\Sigma^{*+}\pi^0\rangle - |\Sigma^{*0}\pi^+\rangle) \right], \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} |\psi_{\Lambda^0}\rangle &= \mathcal{N}_{\Lambda^0} \left[ |\Lambda^0\rangle + \frac{a_{\Lambda^0}}{\sqrt{3}} (|\Sigma^+\pi^-\rangle - |\Sigma^0\pi^0\rangle + |\Sigma^0\pi^+\rangle) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_{\Lambda^0}}{\sqrt{3}} (|\Sigma^{*+}\pi^-\rangle - |\Sigma^{*0}\pi^0\rangle + |\Sigma^{*-}\pi^+\rangle) \right], \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} |\psi_{\Xi^0}\rangle &= \mathcal{N}_{\Xi^0} \left[ |\Xi^0\rangle + a_{\Xi^0} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Xi^0\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Xi^-\pi^+\rangle \right) \right. \\ &\quad \left. + b_{\Xi^0} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Xi^{*0}\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Xi^{*-}\pi^+\rangle \right) \right], \end{aligned} \quad (5.41)$$

cuyos factores de normalización se presentan en la Tabla 5.10.

Utilizando estas funciones de onda, se calcula el contenido de antiquarks en el mar dado por las expresiones siguientes:

---

<sup>3</sup>Tomando únicamente los estados con máxima proyección de isoespín.

Tabla 5.10: Factores de normalización para funciones de onda restringidas a fluctuaciones piónicas en el MCM.

$ \psi_A\rangle$	$\mathcal{N}_A^2$
$ \psi_p\rangle$	$(1 + a_p^2 + b_p^2)^{-1}$
$ \psi_{\Sigma^+}\rangle$	$(1 + a_{\Sigma^+}^2 + b_{\Sigma^+}^2 + c_{\Sigma^+}^2)^{-1}$
$ \psi_{\Lambda^0}\rangle$	$(1 + a_{\Lambda^0}^2 + b_{\Lambda^0}^2)^{-1}$
$ \psi_{\Xi^0}\rangle$	$(1 + a_{\Xi^0}^2 + b_{\Xi^0}^2)^{-1}$

$$\begin{aligned}
P_{\Sigma^+}(\bar{u}) &= \frac{a_{\Sigma^+}^2 + c_{\Sigma^+}^2}{4(1 + a_{\Sigma^+}^2 + b_{\Sigma^+}^2 + c_{\Sigma^+}^2)} \quad , \quad P_{\Sigma^+}(\bar{d}) = \frac{3a_{\Sigma^+}^2 + 4b_{\Sigma^+}^2 + 3c_{\Sigma^+}^2}{4(1 + a_{\Sigma^+}^2 + b_{\Sigma^+}^2 + c_{\Sigma^+}^2)} \quad , \\
P_{\Lambda^0}(\bar{u}) &= \frac{a_{\Lambda^0}^2 + b_{\Lambda^0}^2}{2(1 + a_{\Lambda^0}^2 + b_{\Lambda^0}^2)} \quad , \quad P_{\Lambda^0}(\bar{d}) = \frac{a_{\Lambda^0}^2 + b_{\Lambda^0}^2}{2(1 + a_{\Lambda^0}^2 + b_{\Lambda^0}^2)} \quad , \\
P_{\Xi^0}(\bar{u}) &= \frac{a_{\Xi^0}^2 + b_{\Xi^0}^2}{6(1 + a_{\Xi^0}^2 + b_{\Xi^0}^2)} \quad , \quad P_{\Xi^0}(\bar{d}) = \frac{5(a_{\Xi^0}^2 + b_{\Xi^0}^2)}{6(1 + a_{\Xi^0}^2 + b_{\Xi^0}^2)} \quad .
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Al expresar los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  en términos de los acoplamientos  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g$ , sustituyendo los valores (5.38) se encuentran sus valores numéricos los cuales se muestran en la Tabla 5.11.

Tabla 5.11: Valores numéricos de los parámetros del MCM.

$ \psi_A\rangle$	$a^2$	$b^2$	$c^2$
$\psi_p$	0.518	0.368	
$\psi_{\Sigma^+}$	0.223	0.082	0.061
$\psi_{\Lambda^0}$	0.248	0.277	
$\psi_{\Xi^0}$	0.02	0.092	

Finalmente, con toda esta información y haciendo uso de la simetría de isospín se calcula numéricamente la asimetría de sabor en el mar de quarks de todos los bariones del octete (Tabla 5.12).

Tabla 5.12: Asimetría de sabor  $\mathcal{A} = P(\bar{d}) - P(\bar{u})$  del octete de bariones en el MCM.

Barión	$P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$\mathcal{A}$
$p$	0.176	0.294	0.118
$n$	0.294	0.176	-0.118
$\Sigma^+$	0.052	0.216	0.164
$\Sigma^0$	0.134	0.134	0
$\Sigma^-$	0.216	0.052	-0.164
$\Lambda^0$	0.172	0.172	0
$\Xi^0$	0.017	0.084	0.067
$\Xi^-$	0.084	0.017	-0.067

Debido a que no hay información experimental sobre la asimetría de sabor en ninguno de los bariones del decuplete, los parámetros de sus funciones de onda no pueden ser determinados y por lo tanto no se puede obtener un valor numérico en esta aproximación.

En el UCQM, tomando en cuenta únicamente fluctuaciones en piones, la función de onda del protón es de la forma

$$\begin{aligned}
|\psi_p\rangle = \mathcal{N}_p & \left[ |p\rangle + \frac{5}{6\sqrt{3}}\beta_8 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |p\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |p\pi^+\rangle \right) \right. \\
& \left. + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\beta_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta^+\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta^0\pi^+\rangle \right) \right], \tag{5.43}
\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{N}_p = \left(1 + \frac{25}{108}\beta_8^2 + \frac{8}{27}\beta_{10}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ . Notamos que en este caso no se ha tomado el límite de cerradura y por lo tanto se tienen dos parámetros distintos para acoplamientos  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$  y  $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{10} \otimes \mathbf{8}$ .

Como esta función de onda es de la misma forma que la construida con el MCM, podemos establecer una relación entre sus parámetros de tal forma que

$$a_p^2 = \frac{25}{108}\beta_8^2 \quad , \quad b_p^2 = \frac{8}{27}\beta_{10}^2 \tag{5.44}$$

y en consecuencia

$$\beta_8^2 = 2.238 \quad \text{y} \quad \beta_{10}^2 = 1.243. \quad (5.45)$$

Al suponer una simetría de sabor, los parámetros  $\beta_8$  y  $\beta_{10}$  serán comunes en las funciones de onda del resto de los bariones del octete. Siguiendo el procedimiento descrito en el Capítulo 3, las funciones de onda de los estados de máxima proyección de isoespín del octete de bariones serán

$$\begin{aligned} |\psi_{\Sigma^+}\rangle = \mathcal{N}_{\Sigma^+} \left\{ |\Sigma^+\rangle + \beta_8 \left[ \frac{2}{9} (|\Sigma^+\pi^0\rangle - |\Sigma^0\pi^+\rangle) + \frac{1}{3\sqrt{3}} |\Lambda^0\pi^+\rangle \right] \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{9} \beta_{10} (|\Sigma^{*+}\pi^0\rangle - |\Sigma^{*0}\pi^+\rangle) \right\}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} |\psi_{\Lambda^0}\rangle = \mathcal{N}_{\Lambda^0} \left[ |\Lambda^0\rangle - \frac{\beta_8}{3\sqrt{3}} (|\Sigma^+\pi^-\rangle - |\Sigma^0\pi^0\rangle - |\Sigma^0\pi^+\rangle) \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \beta_{10} (|\Sigma^{*+}\pi^-\rangle - |\Sigma^{*0}\pi^0\rangle + |\Sigma^{*-}\pi^+\rangle) \right], \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} |\psi_{\Xi^0}\rangle = \mathcal{N}_{\Xi^0} \left[ |\Xi^0\rangle - \frac{\beta_8}{6\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Xi^0\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Xi^-\pi^+\rangle \right) \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \beta_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Xi^{*0}\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Xi^{*-}\pi^+\rangle \right) \right], \end{aligned} \quad (5.48)$$

cuyos factores de normalización están contenidos en la Tabla 5.13.

Debido a la similitud entre las funciones de onda del MCM y el UCQM, el contenido de sabor puede ser obtenido a través de las expresiones analíticas (5.32) y (5.42), identificando adecuadamente la relación entre los parámetros de cada modelo para cada una de las funciones de onda, como se hizo en (5.44). Al sustituir los valores (5.45) se obtienen las predicciones numéricas del UCQM para la asimetría de sabor en el mar de quarks (Tabla 5.14), las cuales resultan ser exactamente las mismas que lo obtenido con el MCM y por lo tanto demuestra que la correspondencia uno a uno establecida con el protón, se respeta perfectamente para el resto de los bariones del octete.

Tabla 5.13: Factores de normalización para funciones de onda restringidas a fluctuaciones piónicas en el UCQM.

$ \psi_A\rangle$	$\mathcal{N}_A^2$
$ \psi_p\rangle$	$\left(1 + \frac{25}{108}\beta_8^2 + \frac{8}{27}\beta_{10}^2\right)^{-1}$
$ \psi_{\Sigma^+}\rangle$	$\left(1 + \frac{11}{81}\beta_8^2 + \frac{4}{81}\beta_{10}^2\right)^{-1}$
$ \psi_{\Lambda^0}\rangle$	$\left(1 + \frac{\beta_8^2}{9} + \frac{2}{9}\beta_{10}^2\right)^{-1}$
$ \psi_{\Xi^0}\rangle$	$\left(1 + \frac{\beta_8^2}{108} + \frac{2}{27}\beta_{10}^2\right)^{-1}$

Tabla 5.14: Asimetría de sabor  $\mathcal{A} = P(\bar{d}) - P(\bar{u})$  del octete de bariones en el UCQM.

Barión	$P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$\mathcal{A}$
$p$	0.176	0.294	0.118
$n$	0.294	0.176	-0.118
$\Sigma^+$	0.052	0.216	0.164
$\Sigma^0$	0.134	0.134	0
$\Sigma^-$	0.216	0.052	-0.164
$\Lambda^0$	0.172	0.172	0
$\Xi^0$	0.017	0.084	0.067
$\Xi^-$	0.084	0.017	-0.067

Por último, para el  $\chi$ QM se tiene que de las ecuaciones (3.3), al tomar en cuenta únicamente las componentes piónicas, las funciones de onda de los quarks se reducen a

$$\begin{aligned} |\psi_u\rangle &= \sqrt{1 - \frac{3}{2}g_8^2} |u\rangle + g_8 \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} |u\pi^0\rangle + |d\pi^+\rangle \right] \\ |\psi_d\rangle &= \sqrt{1 - \frac{3}{2}g_8^2} |u\rangle + g_8 \left[ |u\pi^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |d\pi^0\rangle \right] \\ |\psi_s\rangle &= |s\rangle, \end{aligned} \tag{5.49}$$

con las cuales se obtienen las probabilidades de fluctuación

$$P(u \rightarrow \bar{u}) = P(d \rightarrow \bar{d}) = \frac{g_8^2}{4}, \quad P(u \rightarrow \bar{d}) = P(d \rightarrow \bar{u}) = \frac{3}{4}g_8^2. \tag{5.50}$$

Por lo tanto, se tiene que el contenido de antiquarks en el mar del protón está determinado por las expresiones

$$\begin{aligned} P_p(\bar{u}) &= 2P(u \rightarrow \bar{u}) + P(d \rightarrow \bar{u}) = \frac{5}{4}g_8^2 \\ P_p(\bar{d}) &= 2P(u \rightarrow \bar{d}) + P(d \rightarrow \bar{d}) = \frac{7}{4}g_8^2. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Y para el resto de los bariones del octete (con máxima proyección de isospín) por las siguientes

$$\begin{aligned} P_{\Sigma^+}(\bar{u}) &= \frac{g_8^2}{2}, \quad P_{\Sigma^+}(\bar{d}) = \frac{3}{2}g_8^2, \\ P_{\Lambda^0}(\bar{u}) &= g_8^2, \quad P_{\Lambda^0}(\bar{d}) = g_8^2, \\ P_{\Xi^0}(\bar{u}) &= \frac{g_8^2}{4}, \quad P_{\Xi^0}(\bar{d}) = \frac{3}{4}g_8^2. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Para fijar el valor del parámetro  $g_8$ , se toma el valor de la asimetría de sabor del protón  $\mathcal{A}(p) = 0.118$ , obteniendo que  $g_8^2 = 0.236$ . Sustituyendo este valor en las ecuaciones (5.51) y (5.52) se encuentran los valores numéricos de las predicciones del  $\chi$ QM para la asimetría de sabor en el mar de quarks de los bariones del octete, los cuales se muestran en la Tabla 5.15.

Tabla 5.15: Asimetría de sabor  $\mathcal{A} = P(\bar{d}) - P(\bar{u})$  del octete de bariones en el  $\chi$ QM.

Barión	$P(\bar{u})$	$P(\bar{d})$	$\mathcal{A}$
$p$	0.295	0.413	0.118
$n$	0.413	0.295	-0.118
$\Sigma^+$	0.118	0.354	0.236
$\Sigma^0$	0.236	0.236	0
$\Sigma^-$	0.354	0.118	-0.236
$\Lambda^0$	0.236	0.236	0
$\Xi^0$	0.059	0.177	0.118
$\Xi^-$	0.177	0.059	-0.118

Los elementos utilizados para determinar los parámetros de cada modelo fueron los resultados experimentales que se tienen disponibles para el protón. Si los tres modelos son consistentes uno a uno, todos deben reproducir los mismos resultados para el resto de los bariones del octete, lo cual fue el caso entre el MCM y el UCQM. Sin embargo, como se puede apreciar en la Tabla 5.16, las predicciones del  $\chi$ QM no son consistentes con aquellas de los otros modelos.

Al comparar lo obtenido para la asimetría de sabor de los hiperones  $\Sigma^+$  y  $\Xi^0$  en relación a lo establecido por el protón, se tiene que en el MCM y el UCQM

$$\frac{\mathcal{A}(\Sigma^+)}{\mathcal{A}(p)} \approx 1.4 \quad \text{y} \quad \frac{\mathcal{A}(\Xi^0)}{\mathcal{A}(p)} \approx 0.6, \quad (5.53)$$

mientras que en el  $\chi$ QM

$$\frac{\mathcal{A}(\Sigma^+)}{\mathcal{A}(p)} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{\mathcal{A}(\Xi^0)}{\mathcal{A}(p)} = 1. \quad (5.54)$$

Y por lo tanto, se encuentran discrepancias del 30% y 40% entre estos modelos, para las predicciones de la asimetría de sabor relativas a la del protón.

Desafortunadamente, la falta de evidencia experimental para el resto de los bariones limita los elementos de comparación y por lo tanto impide determinar consistentemente la eficiencia de los modelos.

Tabla 5.16: Comparación de las predicciones de asimetría de sabor  $\mathcal{A} = P(\bar{d}) - P(\bar{u})$  para el octete de bariones entre los modelos MCM, UCQM y  $\chi$ QM.

Barión	MCM	UCQM	$\chi$ QM
$p$	0.118	0.118	0.118
$n$	-0.118	-0.118	-0.118
$\Sigma^+$	0.164	0.164	0.236
$\Sigma^0$	0	0	0
$\Sigma^-$	-0.164	-0.164	-0.236
$\Lambda^0$	0	0	0
$\Xi^0$	0.067	0.067	0.118
$\Xi^-$	-0.067	-0.067	-0.118



# Capítulo 6

## El espín de los bariones

De acuerdo con el modelo de quarks constituyentes, los bariones son estados formados únicamente por tres quarks de valencia, los cuales en ausencia de momento angular orbital relativo se pueden acoplar a un espín total de  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{3}{2}$ . En este contexto, el espín de los bariones sería generado únicamente por dichos quarks. Sin embargo, las observaciones de la EMC (European Muon Collaboration) indicaron que la contribución del espín de los quarks de valencia es tan sólo una pequeña fracción del espín total del protón [5] y posteriormente se mostró que esta contribución es de aproximadamente un tercio del espín del protón [39][40]. Lo cual deja abierta la incógnita de quienes son los responsables del espín faltante.

La cromodinámica cuántica (QCD) establece que el espín total del protón puede descomponerse en contribuciones de quarks y gluones, por lo tanto al escoger el protón longitudinalmente polarizado en la dirección 3, se tiene que [41]:

$$\frac{\Delta\Sigma}{2} + \ell_3^{q\bar{q}} + J_3^G = \frac{1}{2}, \quad (6.1)$$

donde  $\Delta\Sigma/2 = \Sigma(\Delta q + \Delta\bar{q})/2 = S_3^{q\bar{q}}$  es el espín total de los quarks y antiquarks (de valencia y del mar), con  $\Delta q \equiv P(q_\uparrow) - P(q_\downarrow)$  y  $\Delta\bar{q} \equiv P(\bar{q}_\uparrow) - P(\bar{q}_\downarrow)$  y  $P(q_{\uparrow,\downarrow}(\bar{q}_{\uparrow,\downarrow}))$  la probabilidad de encontrar quarks(antiquarks) con helicidad positiva o negativa, respectivamente<sup>1</sup>;  $\ell_3^{q\bar{q}}$  es el momento angular orbital entre ellos y  $J_3^G = S_3^G + \ell_3^G$  el momento angular de los gluones.

Recientes experimentos de las colaboraciones COMPASS y HERMES, encontraron que la contribución gluónica al espín del protón es significativamente pequeña y prácticamente despreciable [42], descartando la posibilidad de que el espín faltante sea generado por

---

<sup>1</sup>La helicidad positiva implica un espín paralelo al del protón, mientras que la negativa un espín antiparalelo.

los gluones y por lo tanto debe ser atribuido a otros mecanismos, como por ejemplo el momento angular del mar de quarks.

## 6.1 El espín en el MCM.

Como se mencionó anteriormente, el proceso dominante en el MCM es la fluctuación de un barión  $A$  en otro barión  $B$  más un mesón  $C$ . Los términos  $|BC\rangle$  en la función de onda son los responsables de generar el mar de quarks y por lo tanto es necesario determinar la cantidad de momento angular que aportan al espín total del barión físico. El momento angular total de estas componentes estará dado por

$$\vec{J}_{BC} = \vec{J}_B + \vec{J}_C + \vec{\ell}, \quad (6.2)$$

donde  $\vec{J}_B$  y  $\vec{J}_C$  son los momentos angulares del barión  $B$  y el mesón  $C$ , respectivamente, y  $\vec{\ell}$  el momento angular orbital entre  $B$  y  $C$ . Bajo la suposición de que  $B$  y  $C$  son estados base y además tomando en cuenta sólo mesones pseudoescalares, se tiene que  $\vec{J}_C = \vec{S}_C = 0$  y  $\vec{J}_B = \vec{S}_B = \frac{1}{2}$  para los bariones del octete y  $\frac{3}{2}$  para los del decuplete.

La conservación de paridad  $P_A = P_B P_C (-1)^\ell$ , determina que el momento angular orbital  $\vec{\ell}$  debe ser impar; sin embargo si el estado físico  $A$  pertenece al octete de bariones, entonces  $\vec{\ell} = 1$ .

Por lo tanto, al desarrollar las componentes de momento angular de los términos  $|BC\rangle$  se tiene que

$$\begin{aligned} |BC\rangle_{S_B=\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} |B_\uparrow C\rangle_{\ell_3=0} - \sqrt{\frac{2}{3}} |B_\downarrow C\rangle_{\ell_3=1}, \\ |BC\rangle_{S_B=\frac{3}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} |B_{\frac{3}{2}} C\rangle_{\ell_3=-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} |B_{\frac{1}{2}} C\rangle_{\ell_3=0} + \frac{1}{\sqrt{6}} |B_{-\frac{1}{2}} C\rangle_{\ell_3=1}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Sin pérdida de generalidad, como en la ecuación (6.1), se puede suponer una polarización arbitraria para el estado  $A$ . Tomando igualmente la dirección del eje 3 se tiene entonces que la contribución de momento angular orbital de las componentes  $|BC\rangle$  es

$$\langle BC | \ell_3 | BC \rangle_{S_B=\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad \langle BC | \ell_3 | BC \rangle_{S_B=\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}. \quad (6.4)$$

En la última sección del capítulo anterior, se consideraron únicamente las componentes piónicas en la función de onda de los bariones. Esto permitió determinar los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  y así obtener resultados numéricos.

Bajo estas condiciones, al desarrollar los acoplamientos de momento angular de las componentes  $|BC\rangle$  en la función de onda del protón (5.31) con proyección de espín  $S_3 = \frac{1}{2} = \uparrow$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
|\psi_{p\uparrow}\rangle = & \mathcal{N}_p \left[ |p\uparrow\rangle + \frac{a_p}{3} (|p\uparrow\pi^0\rangle_{\ell_3=0} - \sqrt{2}|p\downarrow\pi^0\rangle_{\ell_3=1} - \sqrt{2}|n\uparrow\pi^+\rangle_{\ell_3=0} \right. \\
& + 2|n\downarrow\pi^+\rangle_{\ell_3=1}) + b_p \left( \frac{1}{2} \left| \Delta_{\frac{3}{2}}^{++}\pi^- \right\rangle_{\ell_3=-1} - \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \Delta_{\frac{1}{2}}^{++}\pi^- \right\rangle_{\ell_3=0} \right. \\
& + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left| \Delta_{-\frac{1}{2}}^{++}\pi^- \right\rangle_{\ell_3=1} - \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \Delta_{\frac{3}{2}}^{+\pi^0} \right\rangle_{\ell_3=-1} + \frac{1}{3} \left| \Delta_{\frac{1}{2}}^{+\pi^0} \right\rangle_{\ell_3=0} \\
& - \frac{1}{3\sqrt{2}} \left| \Delta_{-\frac{1}{2}}^{+\pi^0} \right\rangle_{\ell_3=1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left| \Delta_{\frac{3}{2}}^0\pi^+ \right\rangle_{\ell_3=-1} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \left| \Delta_{\frac{1}{2}}^0\pi^+ \right\rangle_{\ell_3=0} \\
& \left. + \frac{1}{6} \left| \Delta_{-\frac{1}{2}}^0\pi^+ \right\rangle_{\ell_3=1} \right]. \tag{6.5}
\end{aligned}$$

El modelo de quarks constituyentes establece que la función de onda de espín-sabor de los mesones es general de la forma

$$|\chi\rangle_C |\phi\rangle_C \propto \frac{(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)}{\sqrt{2}} q\bar{q}'. \tag{6.6}$$

Esto implica que la contribución de los mesones  $C$  al espín total del estado  $A$  es cero pues

$$\Delta q(C) = P_C(q\uparrow) - P_C(q\downarrow) = 0 \quad \text{y} \quad \Delta \bar{q}'(C) = P_C(\bar{q}'\uparrow) - P_C(\bar{q}'\downarrow) = 0, \tag{6.7}$$

por lo tanto en las componentes  $|BC\rangle$ , sólo los bariones contribuyen al espín total del estado físico. Para calcular estas contribuciones, se sigue un procedimiento similar al utilizado para el contenido de sabor, haciendo énfasis en que en los elementos de matriz aparecerán términos cruzados que aunque se anulen en  $\Delta\Sigma$ , su contribución a cada  $\Delta q$  es considerable.

Por ejemplo, de (6.5) tomemos los términos

$$\frac{a_p}{3} |p\uparrow\pi^0\rangle_{\ell_3=0} + \frac{b_p}{3} \left| \Delta_{\frac{1}{2}}^{+\pi^0} \right\rangle_{\ell_3=0} = |\Phi(\pi^0)\rangle_{\ell_3=0}.$$

Para un operador arbitrario  $\hat{O}$  se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(\pi^0) | \hat{\mathcal{O}} | \Phi(\pi^0) \rangle_{\ell_3=0} &= \frac{a_p^2}{9} \langle p_\uparrow \pi^0 | \hat{\mathcal{O}} | p_\uparrow \pi^0 \rangle_{\ell_3=0} + \frac{b_p^2}{9} \langle \Delta_{\frac{1}{2}}^+ \pi^0 | \hat{\mathcal{O}} | \Delta_{\frac{1}{2}}^+ \pi^0 \rangle_{\ell_3=0} \\
&+ \frac{2}{9} a_p b_p \langle p_\uparrow \pi^0 | \hat{\mathcal{O}} | \Delta_{\frac{1}{2}}^+ \pi^0 \rangle_{\ell_3=0}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Tomando las funciones de onda de espín-sabor del modelo de quarks presentadas en el Capítulo 2

$$\begin{aligned}
\left| \Delta_{\frac{1}{2}}^+ \right\rangle &= \frac{1}{3} [(|uud\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle) (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)] \\
|p_\uparrow\rangle &= \frac{1}{3\sqrt{2}} [(2|udu\rangle - |duu\rangle - |uud\rangle) |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + (-|udu\rangle + 2|duu\rangle - |uud\rangle) |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \\
&+ (2|uud\rangle - |udu\rangle - |duu\rangle) |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle],
\end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(\pi^0) | \Delta u | \Phi(\pi^0) \rangle_{\ell_3=0} &= \frac{4}{27} a_p^2 + \frac{2}{27} b_p^2 + \frac{4\sqrt{2}}{27} a_p b_p \\
\langle \Phi(\pi^0) | \Delta d | \Phi(\pi^0) \rangle_{\ell_3=0} &= -\frac{a_p^2}{27} + \frac{b_p^2}{27} - \frac{4\sqrt{2}}{27} a_p b_p.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Al calcular el resto de los elementos de matriz, se encuentra que para el protón, las contribuciones de espín por parte de los quarks están determinadas por las expresiones

$$\begin{aligned}
\Delta u(p_\uparrow) &= \mathcal{N}_p^2 \left[ \frac{4}{3} - \frac{2}{27} a_p^2 + \frac{35}{27} b_p^2 + \frac{16\sqrt{2}}{27} a_p b_p \right] \\
\Delta d(p_\uparrow) &= \mathcal{N}_p^2 \left[ -\frac{1}{3} - \frac{7}{27} a_p^2 + \frac{10}{27} b_p^2 - \frac{16\sqrt{2}}{27} a_p b_p \right].
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Para el resto de los bariones del octete se sigue el mismo procedimiento. Las expresiones resultantes son las que se muestran en la Tabla 6.1.

Como ya se comentó, la contribución de los mesones al espín es cero lo cual implica que los antiquarks del mar tampoco tienen contribución de ningún tipo. Tomando en cuenta esto y bajo la suposición de que la contribución de momento angular de

los gluones es despreciable, de (6.1) se tiene que el espín de los bariones  $J_A$  estará determinado por

$$J_A = \frac{\Delta\Sigma}{2} + \Delta\ell, \quad (6.11)$$

donde  $\Delta\ell$  es el momento angular orbital de los quarks del mar. La Tabla 6.2 contiene las expresiones analíticas de la contribución total de espín de los quarks ( $\Delta\Sigma/2$ ) y la contribución de momento angular orbital ( $\Delta\ell$ ) en función de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Tabla 6.1: Contribución de los quarks al espín total de los bariones del octete en el MCM.

Barión (A)	$\Delta u/\mathcal{N}_A^2$	$\Delta d/\mathcal{N}_A^2$	$\Delta s/\mathcal{N}_A^2$
$p_{\uparrow}$	$\frac{4}{3} - \frac{2}{27}a_p^2 + \frac{35}{27}b_p^2 + \frac{16\sqrt{2}}{27}a_p b_p$	$-\frac{1}{3} - \frac{7}{27}a_p^2 + \frac{10}{27}b_p^2 - \frac{16\sqrt{2}}{27}a_p b_p$	0
$\Sigma_{\uparrow}^+$	$\frac{4}{3} - \frac{a_{\Sigma^+}^2}{3} + \frac{5}{6}c_{\Sigma^+}^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}a_{\Sigma^+}c_{\Sigma^+}$ $+ \frac{2}{3\sqrt{6}}a_{\Sigma^+}b_{\Sigma^+} + \frac{4}{3\sqrt{3}}b_{\Sigma^+}c_{\Sigma^+}$	$-\frac{a_{\Sigma^+}^2}{9} + \frac{5}{18}c_{\Sigma^+}^2 + \frac{2\sqrt{2}}{9}a_{\Sigma^+}c_{\Sigma^+}$ $-\frac{2}{3\sqrt{6}}a_{\Sigma^+}b_{\Sigma^+} - \frac{4}{3\sqrt{3}}b_{\Sigma^+}c_{\Sigma^+}$	$-\frac{1}{3} + \frac{a_{\Sigma^+}^2}{9} - \frac{b_{\Sigma^+}^2}{3}$ $+\frac{5}{9}c_{\Sigma^+}^2 - \frac{8\sqrt{2}}{9}a_{\Sigma^+}c_{\Sigma^+}$
$\Lambda_{\uparrow}^0$	$-\frac{2}{9}a_{\Lambda^0}^2 + \frac{29}{54}b_{\Lambda^0}^2 + \frac{4\sqrt{2}}{9}a_{\Lambda^0}b_{\Lambda^0}$	$-\frac{2}{9}a_{\Lambda^0}^2 + \frac{29}{54}b_{\Lambda^0}^2 + \frac{4\sqrt{2}}{9}a_{\Lambda^0}b_{\Lambda^0}$	$1 + \frac{a_{\Lambda^0}^2}{9} + \frac{16}{27}b_{\Lambda^0}^2$ $-\frac{8\sqrt{2}}{9}a_{\Lambda^0}b_{\Lambda^0}$
$\Xi_{\uparrow}^0$	$-\frac{1}{3} + \frac{a_{\Xi^0}^2}{27} + \frac{5}{27}b_{\Xi^0}^2 + \frac{8\sqrt{2}}{27}a_{\Xi^0}b_{\Xi^0}$	$\frac{2}{27}a_{\Xi^0}^2 + \frac{10}{27}b_{\Xi^0}^2 + \frac{16\sqrt{2}}{27}a_{\Xi^0}b_{\Xi^0}$	$\frac{4}{3} - \frac{4}{9}a_{\Xi^0}^2 + \frac{10}{9}b_{\Xi^0}^2$ $-\frac{8\sqrt{2}}{9}a_{\Xi^0}b_{\Xi^0}$

Tabla 6.2: Contribución total de los quarks al espín ( $\Delta\Sigma/2$ ) y momento angular orbital  $\Delta\ell$  en el MCM.

Barión	$\Delta\Sigma/2\mathcal{N}_A^2$	$\Delta\ell/\mathcal{N}_A^2$
$p_\uparrow$	$\frac{1}{2} - \frac{a_p^2}{6} + \frac{5}{6}b_p^2$	$\frac{2}{3}a_p^2 - \frac{b_p^2}{3}$
$\Sigma_\uparrow^+$	$\frac{1}{2} - \frac{a_{\Sigma^+}^2}{6} - \frac{b_{\Sigma^+}^2}{6} + \frac{5}{6}c_{\Sigma^+}^2$	$\frac{2}{3}a_{\Sigma^+}^2 + \frac{2}{3}b_{\Sigma^+}^2 - \frac{c_{\Sigma^+}^2}{3}$
$\Lambda_\uparrow^0$	$\frac{1}{2} - \frac{a_{\Lambda^0}^2}{6} + \frac{5}{6}b_{\Lambda^0}^2$	$\frac{2}{3}a_{\Lambda^0}^2 - \frac{b_{\Lambda^0}^2}{3}$
$\Xi_\uparrow^0$	$\frac{1}{2} - \frac{a_{\Xi^0}^2}{6} + \frac{5}{6}b_{\Xi^0}^2$	$\frac{2}{3}a_{\Xi^0}^2 - \frac{b_{\Xi^0}^2}{3}$

La contribución de espín de los quarks  $\Delta\Sigma$  se puede descomponer en las componentes de quarks de valencia y del mar de quarks como

$$\Delta\Sigma = \Delta\Sigma_{val} + \Delta\Sigma_{mar}. \quad (6.12)$$

Sustituyendo los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  (Tabla 5.11), se obtienen resultados numéricos para cada una de estas contribuciones, mostradas en la Tabla 6.8.

## 6.2 El espín en el UCQM

De igual forma como se hizo con el MCM, asumiendo únicamente fluctuaciones piónicas, se toma la función de onda del protón construida con el UCQM y se desarrollan explícitamente los acoplamientos de momento angular, de tal forma que la ecuación (5.43) queda como

$$\begin{aligned}
|\psi_{p\uparrow}\rangle = & \mathcal{N}_p \left[ |p\uparrow\rangle + \frac{5}{6\sqrt{3}}\beta_8 (|p\uparrow\pi^0\rangle_{\ell_3=0} - \sqrt{2}|p\downarrow\pi^0\rangle_{\ell_3=1} - \sqrt{2}|n\uparrow\pi^+\rangle_{\ell_3=0} \right. \\
& + 2|n\downarrow\pi^+\rangle_{\ell_3=1}) + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\beta_{10} \left( \frac{1}{2}|\Delta_{\frac{3}{2}}^{++}\pi^-\rangle_{\ell_3=-1} - \frac{1}{\sqrt{6}}|\Delta_{\frac{1}{2}}^{++}\pi^-\rangle_{\ell_3=0} \right. \\
& + \frac{1}{2\sqrt{3}}|\Delta_{-\frac{1}{2}}^{++}\pi^-\rangle_{\ell_3=1} - \frac{1}{\sqrt{6}}|\Delta_{\frac{3}{2}}^{+\pi^0}\rangle_{\ell_3=-1} + \frac{1}{3}|\Delta_{\frac{1}{2}}^{+\pi^0}\rangle_{\ell_3=0} \\
& - \frac{1}{3\sqrt{2}}|\Delta_{-\frac{1}{2}}^{+\pi^0}\rangle_{\ell_3=1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}|\Delta_{\frac{3}{2}}^0\pi^+\rangle_{\ell_3=-1} - \frac{1}{3\sqrt{2}}|\Delta_{\frac{1}{2}}^0\pi^+\rangle_{\ell_3=0} \\
& \left. \left. + \frac{1}{6}|\Delta_{-\frac{1}{2}}^0\pi^+\rangle_{\ell_3=1} \right) \right], \tag{6.13}
\end{aligned}$$

con la cual, siguiendo el mismo procedimiento que en el MCM, se encuentra que la aportación de los quarks al espín total del protón está dado por las expresiones

$$\begin{aligned}
\Delta u(p\uparrow) &= \mathcal{N}_p^2 \left[ \frac{4}{3} - \frac{25}{1458}\beta_8^2 + \frac{35}{81}\beta_{10}^2 + \frac{160}{729}\beta_8\beta_{10} \right] \\
\Delta d(p\uparrow) &= \mathcal{N}_p^2 \left[ -\frac{1}{3} - \frac{175}{2916}\beta_8^2 + \frac{80}{729}\beta_{10}^2 - \frac{160}{729}\beta_8\beta_{10} \right]. \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Las expresiones para el resto de los bariones del octete se obtienen de forma análoga y se muestran en la Tabla 6.3.

Por otro lado, de acuerdo a las ecuaciones (6.4), se tiene que la contribución de momento angular entre los quarks del mar es

$$\Delta\ell(p\uparrow) = \mathcal{N}_p^2 \left[ \frac{25}{162}\beta_8^2 - \frac{8}{81}\beta_{10}^2 \right]. \tag{6.15}$$

La contribución total de los quarks al espín  $\Delta\Sigma/2$  y la componente de momento angular orbital  $\Delta\ell$  para cada uno de los bariones del octete (estados con máxima proyección de isoespín) se muestran en la Tabla 6.4.

Tabla 6.3: Contribución de los quarks al espín total de los bariones del octete en el UCQM.

Barión (A)	$\Delta u/\mathcal{N}_A^2$	$\Delta d/\mathcal{N}_A^2$	$\Delta s/\mathcal{N}_A^2$
$p_{\uparrow}$	$\frac{4}{3} - \frac{25}{1458}\beta_8^2 + \frac{280}{729}\beta_{10}^2 + \frac{160}{729}\beta_8\beta_{10}$	$-\frac{1}{3} - \frac{175}{2916}\beta_8^2 + \frac{80}{729}\beta_{10}^2 - \frac{160}{729}\beta_8\beta_{10}$	0
$\Sigma_{\uparrow}^+$	$\frac{4}{3} - \frac{4}{243}\beta_8^2 + \frac{10}{243}\beta_{10}^2 + \frac{8}{81}\beta_8\beta_{10}$	$-\frac{20}{729}\beta_8^2 + \frac{10}{729}\beta_{10}^2 - \frac{8}{729}\beta_8\beta_{10}$	$-\frac{1}{3} - \frac{\beta_8^2}{729} + \frac{20}{729}\beta_{10}^2 - \frac{64}{729}\beta_8\beta_{10}$
$\Lambda_{\uparrow}^0$	$-\frac{2}{81}\beta_8^2 + \frac{29}{243}\beta_{10}^2 - \frac{8}{81}\beta_8\beta_{10}$	$-\frac{2}{81}\beta_8^2 + \frac{29}{243}\beta_{10}^2 - \frac{8}{81}\beta_8\beta_{10}$	$1 + \frac{\beta_8^2}{81} + \frac{32}{243}\beta_{10}^2 - \frac{16}{81}\beta_8\beta_{10}$
$\Xi_{\uparrow}^0$	$-\frac{1}{3} + \frac{\beta_8^2}{2916} + \frac{10}{729}\beta_{10}^2 - \frac{8}{729}\beta_8\beta_{10}$	$\frac{\beta_8^2}{1458} + \frac{20}{729}\beta_{10}^2 - \frac{16}{729}\beta_8\beta_{10}$	$\frac{4}{3} - \frac{\beta_8^2}{243} + \frac{20}{243}\beta_{10}^2 + \frac{8}{243}\beta_8\beta_{10}$

Tabla 6.4: Contribución total de los quarks al espín ( $\Delta\Sigma/2$ ) y momento angular orbital  $\Delta\ell$  en el UCQM.

Barión	$\Delta\Sigma/2\mathcal{N}_A^2$	$\Delta\ell/\mathcal{N}_A^2$
$p_\uparrow$	$\frac{1}{2} - \frac{25}{648}\beta_8^2 + \frac{20}{81}\beta_{10}^2$	$\frac{25}{162}\beta_8^2 - \frac{8}{81}\beta_{10}^2$
$\Sigma_\uparrow^+$	$\frac{1}{2} - \frac{11}{486}\beta_8^2 + \frac{10}{243}\beta_{10}^2$	$\frac{22}{243}\beta_8^2 - \frac{4}{243}\beta_{10}^2$
$\Lambda_\uparrow^0$	$\frac{1}{2} - \frac{\beta_8^2}{54} + \frac{5}{27}\beta_{10}^2$	$\frac{2}{27}\beta_8^2 - \frac{2}{27}\beta_{10}^2$
$\Xi_\uparrow^0$	$\frac{1}{2} - \frac{\beta_8^2}{648} + \frac{10}{162}\beta_{10}^2$	$\frac{\beta_8^2}{162} - \frac{2}{81}\beta_{10}^2$

Al sustituir los valores  $\beta_8^2 = 2.238$  y  $\beta_{10}^2 = 1.243$ , calculados en la sección anterior; se encuentran valores numéricos de las contribuciones de espín tanto de los quarks de valencia como los del mar y las contribuciones de momento angular orbital relativo (Tabla (6.8)).

### 6.3 El espín en el $\chi$ QM

En el  $\chi$ QM, al limitarse nuevamente a fluctuaciones piónicas, se tiene que las funciones de onda de espín-sabor de los quarks son

$$\begin{aligned}
|\psi_{u_\uparrow\downarrow}\rangle &= \sqrt{1 - \frac{3}{2}g_8^2} |u_\uparrow\downarrow\rangle + g_8 \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} |u_\uparrow\downarrow\pi^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |u_\uparrow\downarrow\pi^0\rangle \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} |d_\downarrow\uparrow\pi^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |d_\uparrow\downarrow\pi^+\rangle \right] \otimes \left( \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right)_\pi
\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}
|\psi_{d_\uparrow\downarrow}\rangle &= \sqrt{1 - \frac{3}{2}g_8^2} |d_\uparrow\downarrow\rangle + g_8 \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}} |d_\uparrow\downarrow\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |d_\uparrow\downarrow\pi^0\rangle \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} |u_\uparrow\downarrow\pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |u_\uparrow\downarrow\pi^-\rangle \right] \otimes \left( \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right)_\pi
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$|\psi_{s_{\uparrow\downarrow}}\rangle = |s_{\uparrow\downarrow}\rangle, \quad (6.18)$$

donde  $\left(\frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}\right)_\pi$  es la función de onda de espín de los piones.

Al tomar la función de onda  $|\psi_{u_{\uparrow\downarrow}}\rangle$  y expresar explícitamente los estados de espín-sabor de los piones, se tiene que

$$\begin{aligned} |\psi_{u_{\uparrow\downarrow}}\rangle = & \sqrt{1 - \frac{3}{2}g_8^2} |u_{\uparrow\downarrow}\rangle + \frac{g_8}{\sqrt{6}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|u_{\uparrow\downarrow}(u_{\uparrow}\bar{u}_{\downarrow})\rangle - |u_{\uparrow\downarrow}(u_{\downarrow}\bar{u}_{\uparrow})\rangle \right. \\ & - |u_{\uparrow\downarrow}(d_{\uparrow}\bar{d}_{\downarrow})\rangle + |u_{\uparrow\downarrow}(d_{\downarrow}\bar{d}_{\uparrow})\rangle) + \frac{1}{2} (-|u_{\uparrow\downarrow}(u_{\uparrow}\bar{u}_{\downarrow})\rangle + |u_{\uparrow\downarrow}(u_{\downarrow}\bar{u}_{\uparrow})\rangle \\ & + |u_{\uparrow\downarrow}(d_{\uparrow}\bar{d}_{\downarrow})\rangle - |u_{\uparrow\downarrow}(d_{\downarrow}\bar{d}_{\uparrow})\rangle) + \sqrt{2} (-|d_{\uparrow\downarrow}(u_{\uparrow}\bar{d}_{\downarrow})\rangle + |d_{\uparrow\downarrow}(u_{\downarrow}\bar{d}_{\uparrow})\rangle) \\ & \left. + |d_{\uparrow\downarrow}(u_{\uparrow}\bar{d}_{\downarrow})\rangle - |d_{\uparrow\downarrow}(u_{\downarrow}\bar{d}_{\uparrow})\rangle \right], \end{aligned} \quad (6.19)$$

y por lo tanto se puede calcular que las probabilidades de transición sin cambio de helicidad están dadas por

$$P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow u_{\uparrow\downarrow}) = 1 - \frac{17}{24}g_8^2, \quad P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow d_{\uparrow\downarrow}) = \frac{11}{24}g_8^2, \quad P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow s_{\uparrow\downarrow}) = 0 \quad (6.20)$$

y las probabilidades de transición con cambio de helicidad por

$$P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow u_{\downarrow\uparrow}) = \frac{23}{24}g_8^2, \quad P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow d_{\downarrow\uparrow}) = \frac{19}{24}g_8^2, \quad P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow s_{\downarrow\uparrow}) = 0. \quad (6.21)$$

Repitiendo el procedimiento para  $|\psi_{d_{\uparrow\downarrow}}\rangle$  se encuentran las relaciones

Tabla 6.5: Espín de quarks de valencia en el modelo de quarks constituyentes.

Barión	$P(u_{\uparrow})$	$P(u_{\downarrow})$	$P(d_{\uparrow})$	$P(d_{\downarrow})$	$P(s_{\uparrow})$	$P(s_{\downarrow})$
$p_{\uparrow}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
$\Sigma_{\uparrow}^+$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\Lambda_{\uparrow}^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
$\Xi_{\uparrow}^0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow u_{\uparrow\downarrow}) &= P(d_{\uparrow\downarrow} \rightarrow d_{\uparrow\downarrow}) = 1 - \frac{17}{24}g_8^2, \\
P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow d_{\uparrow\downarrow}) &= P(d_{\uparrow\downarrow} \rightarrow u_{\uparrow\downarrow}) = \frac{11}{24}g_8^2, \\
P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow u_{\downarrow\uparrow}) &= P(d_{\uparrow\downarrow} \rightarrow d_{\downarrow\uparrow}) = \frac{23}{24}g_8^2, \\
P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow d_{\downarrow\uparrow}) &= P(d_{\uparrow\downarrow} \rightarrow u_{\downarrow\uparrow}) = \frac{19}{24}g_8^2,
\end{aligned} \tag{6.22}$$

$$P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow s_{\uparrow\downarrow}) = P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow s_{\downarrow\uparrow}) = P(d_{\uparrow\downarrow} \rightarrow s_{\uparrow\downarrow}) = P(u_{\uparrow\downarrow} \rightarrow s_{\downarrow\uparrow}) = 0,$$

$$P(s_{\uparrow\downarrow} \rightarrow s_{\uparrow\downarrow}) = 1 \quad , \quad P(s_{\uparrow\downarrow} \rightarrow s_{\downarrow\uparrow}) = 0.$$

En la Tabla 6.5 se muestra el contenido de espín-sabor que determina el modelo de quarks constituyentes. En el contexto del  $\chi$ QM, las contribuciones de espín-sabor de cada quark  $q_{\uparrow\downarrow}$  están definidas como  $P(q_{\uparrow\downarrow}) \equiv P(q_{\uparrow\downarrow} \rightarrow q'_{\uparrow}) - P(q_{\uparrow\downarrow} \rightarrow q'_{\downarrow})$ . Tomando los resultados indicados para el protón y haciendo uso de las relaciones encontradas para las probabilidades de transición se tiene que

Tabla 6.6: Contribución de los quarks al espín total de los bariones en  $\chi$ QM.

Barión	$\Delta u$	$\Delta d$	$\Delta s$
$p_{\uparrow}$	$\frac{4}{3} - \frac{19}{9}g_8^2$	$-\frac{1}{3} + \frac{g_8^2}{9}$	0
$\Sigma_{\uparrow}^+$	$\frac{4}{3} - \frac{20}{9}g_8^2$	$-\frac{4}{9}g_8^2$	$-\frac{1}{3}$
$\Lambda_{\uparrow}^0$	0	0	1
$\Xi_{\uparrow}^0$	$-\frac{1}{3} + \frac{5}{9}g_8^2$	$\frac{g_8^2}{9}$	$\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}
\Delta u(p_{\uparrow}) &= \frac{4}{3} (P(u_{\uparrow} \rightarrow u_{\uparrow}) - P(u_{\uparrow} \rightarrow u_{\downarrow})) + \frac{1}{3} (P(d_{\downarrow} \rightarrow u_{\uparrow}) - P(d_{\uparrow} \rightarrow u_{\uparrow})) \\
&= \frac{4}{3} - \frac{19}{9}g_8^2, \\
\Delta d(p_{\uparrow}) &= \frac{4}{3} (P(u_{\uparrow} \rightarrow d_{\uparrow}) - P(u_{\downarrow} \rightarrow d_{\uparrow})) + \frac{1}{3} (P(d_{\uparrow} \rightarrow d_{\downarrow}) - P(d_{\uparrow} \rightarrow d_{\uparrow})) \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{g_8^2}{9}.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Al seguir el mismo procedimiento para el resto de los bariones, obtienen las expresiones mostradas en la Tabla 6.6 de la contribución de los quarks al espín total.

El cálculo de la contribución del momento angular orbital se hace tomando únicamente las componentes de la función de onda que tienen cambio de helicidad y aplicando un procedimiento análogo al anterior. En la Tabla 6.7 se muestran las expresiones obtenidas además de la contribución total de los quarks.

Para obtener resultados numéricos a partir de las expresiones encontradas, bastará con sustituir el valor  $g_8^2 = 0.236$  obtenido a través de la asimetría de sabor. De esta forma, se encuentra por ejemplo que la contribución de los quarks al espín del protón es

$$\frac{\Delta\Sigma}{2} = \frac{1}{2} - g_8^2 = 0.264. \tag{6.24}$$

Y a partir de este resultado se extraen los valores de la contribución del mar de quarks  $\Delta\Sigma_{mar} = -0.059$  y la de los quarks de valencia  $\Delta\Sigma_{val} = 0.323$ .

Tabla 6.7: Contribución total de los quarks al espín ( $\Delta\Sigma/2$ ) y momento angular orbital  $\Delta\ell$  en el  $\chi$ QM.

Barión	$\Delta\Sigma/2$	$\Delta\ell$
$p_{\uparrow}$	$\frac{1}{2} - g_8^2$	$g_8^2$
$\Sigma_{\uparrow}^+$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}g_8^2$	$\frac{4}{3}g_8^2$
$\Lambda_{\uparrow}^0$	$\frac{1}{2}$	0
$\Xi_{\uparrow}^0$	$\frac{1}{2} + \frac{g_8^2}{3}$	$-\frac{g_8^2}{3}$

Finalmente, en la Tabla 6.8 se muestran los resultados numéricos de cada una de las contribuciones  $\Delta\Sigma_{val}$ ,  $\Delta\Sigma_{mar}$  y  $\Delta\ell$  para todo el octete de bariones.

El método utilizado para determinar el valor de los parámetros sólo permitió encontrar su magnitud, sin embargo hay una ambigüedad en cuanto a su signo. Este hecho es irrelevante al calcular la contribución total de los quarks  $\Delta\Sigma$  o en el momento angular orbital relativo  $\Delta\ell$ . No obstante, si se quiere calcular numéricamente la aportación de los quarks para cada sabor, los términos cruzados en las expresiones analíticas dependen fuertemente del signo de los parámetros. Por esta razón, el análisis numérico se hizo sólo para  $\Delta\Sigma$  y  $\Delta\ell$ , en consecuencia no es necesario expresar el resto de los bariones, pues entre todos los estados de un multiplete de isospín,  $\Delta\Sigma$  y  $\Delta\ell$  son iguales.

Respecto a los resultados obtenidos, en la Tabla 6.8 se observa que los modelos MCM y UCQM presentan nuevamente una correspondencia uno a uno, lo cual no es ninguna sorpresa, pues además de que ambos comparten los mismos grados de libertad, se puede demostrar que la equivalencia entre ellos se determina a nivel de función de onda cuando se toma la simetría de sabor y el cociente  $F/D = 2/3$ , establecido por el modelo de quarks constituyentes. En consecuencia, aunque se haya utilizado únicamente el protón como punto de comparación entre los modelos, los parámetros de ambos siempre serán equivalentes en las funciones de onda del resto de los bariones del octete.

Con estos modelos, se obtiene que la contribución de los quarks de valencia al espín total del protón es poco mayor de la mitad, mientras que el resto es aportado por el mar de quarks y su momento angular orbital relativo en partes casi iguales.

Tabla 6.8: Comparación de las predicciones de  $(\Delta\Sigma/2)$  y  $\Delta\ell$  entre el MCM, UCQM y  $\chi$ QM.

		MCM			UCQM			$\chi$ QM		
		Valencia	Mar	Total	Valencia	Mar	Total	Valencia	Mar	Total
$p_{\uparrow}$	$\Delta\Sigma/2$	0.265	0.116	0.382	0.265	0.116	0.382	0.323	-0.059	0.264
	$\Delta\ell$	0.000	0.118	0.118	0.000	0.118	0.118	0.000	0.236	0.236
$\Sigma_{\uparrow}^{+}$	$\Delta\Sigma/2$	0.366	0.000	0.366	0.366	0.000	0.366	0.264	-0.079	0.185
	$\Delta\ell$	0.000	0.135	0.135	0.000	0.135	0.135	0.000	0.315	0.315
$\Lambda_{\uparrow}^0$	$\Delta\Sigma/2$	0.328	0.124	0.452	0.328	0.124	0.452	0.5	0	0.5
	$\Delta\ell$	0.000	0.048	0.048	0.000	0.048	0.048	0.000	0.000	0.000
$\Xi_{\uparrow}^0$	$\Delta\Sigma/2$	0.449	0.066	0.515	0.449	0.066	0.515	0.559	0.020	0.579
	$\Delta\ell$	0.000	-0.015	-0.015	0.000	-0.015	-0.015	0.000	-0.079	-0.079

Las predicciones para el resto de los bariones resultan ser un tanto interesantes, pues se encuentra que en cada uno de los estados, la distribución del espín es muy distinta entre ellos. Por ejemplo, para el hiperón  $\Sigma^+$ , se encontró que la contribución del espín total del mar de quarks es cero, y por lo tanto las únicas contribuciones son las de los quarks de valencia y el momento angular orbital relativo entre los quarks del mar. Por otro lado, para  $\Xi^0$  se encontró que las contribuciones del mar de quarks y su momento angular relativo son muy pequeñas en comparación con la de los quarks de valencia.

En el  $\chi$ QM los resultados fueron completamente distintos. Primeramente, para el protón se obtuvo que la contribución del mar de quarks es mucho menor que lo predicho con los modelos MCM y UCQM, y por lo tanto es compensada con una contribución orbital que es el doble de lo obtenido con los otros modelos. Para el hiperón  $\Sigma^+$ , también se calcula una contribución orbital mucho mayor (más del doble), sin embargo el término  $\Delta\Sigma$  correspondiente al mar, aunque no es cero, tiene un valor relativamente pequeño.

Por otro lado, mientras que el  $\chi$ QM determina que la estructura de espín del barión  $\Lambda^0$  está constituida al 100% por los quarks de valencia, los resultados del MCM y el UCQM predicen contribuciones significativas del mar y su momento angular orbital.

Por último, los resultados obtenidos para el hiperón  $\Xi^0$  son los que presentan menor diferencia entre los modelos; al determinar consistentemente que los quarks de valencia son los principales contribuyentes al espín total del barión.



# Conclusiones

A lo largo de este trabajo se presentó un estudio comparativo entre los tres modelos efectivos: modelo de quarks quirales ( $\chi$ QM), modelo de la nube mesónica (MCM) y el modelo de quarks con creación de pares quark-antiquark (UCQM) en el que se analizó el contenido de sabor y espín de los bariones ligeros en estado base.

Con respecto al sabor, se tuvo como motivación principal calcular la asimetría de sabor en el mar de quarks, la cual no puede ser descrita ni por el modelo de quarks constituyentes ni por métodos perturbativos de QCD. De aquí la necesidad de utilizar modelos efectivos basados en grados de libertad del tipo mesón-barión, como los son el MCM y el UCQM, o el  $\chi$ QM en el que las fluctuaciones a bosones de Nambu-Goldstone se llevan a cabo a nivel de quarks.

A pesar de que las funciones de onda construidas con el MCM estaban basadas en una aproximación muy simple del modelo; al suponer únicamente una simetría de isoespín, las expresiones analíticas obtenidas para el contenido de sabor dependían de una gran cantidad de parámetros los cuales no podían ser determinados con la información disponible. Por esta misma razón en el análisis inicial realizado con el UCQM, aunque se tomaron todas las componentes permitidas (de estados base), se tuvo que tomar un límite de cerradura que implicaba la degeneración de los estados, tanto del octete como del decuplete, permitiendo así expresar el contenido de sabor como función de un sólo parámetro y así establecer una correspondencia con los parámetros del  $\chi$ QM.

Con la finalidad de obtener datos numéricos y poder comparar cuantitativamente las predicciones de cada modelo; se tomaron en cuenta únicamente las componentes relacionadas a las fluctuaciones piónicas, y así poder determinar los parámetros característicos de cada modelo a través de la información experimental disponible para el protón. Los resultados obtenidos permitieron establecer una correspondencia uno a uno con las predicciones de los modelos MCM y UCQM, sin embargo al comparar los resultados de la asimetría de sabor de los hiperones  $\Sigma^+$  y  $\Xi^0$ , relativa a la del protón, se observó una discrepancia de aproximadamente del 30% y 40% con las predicciones del  $\chi$ QM.

La ausencia de información experimental para el resto de los bariones impide determinar la eficiencia de los modelos y es por esto que es de gran interés realizar experimentos que puedan medir las propiedades del mar de quarks de los bariones como el sugerido por Alberg, Falter y Henley[43], al usar procesos Drell-Yan en producción dileptónica inducida por hiperones con haces de  $\Sigma^\pm$  en protones,  $\Sigma^\pm p \rightarrow \ell^+ \ell^- + X$ .

En el análisis del espín, también se restringieron las funciones de onda a las componentes piónicas con el propósito de obtener nuevamente resultados numéricos utilizando los parámetros calculados en la sección del contenido de sabor. Nuevamente se encontró una correspondencia entre las predicciones de los modelos MCM y UCQM la cual, como se mencionó al final del Capítulo 6, se establece desde la construcción de la función de onda al tomar el cociente  $F/D = 2/3$ .

Con el MCM y el UCQM, se obtuvo que los quarks de valencia contribuyen con aproximadamente la mitad del espín total del protón mientras que el espín total del mar de quarks y su momento angular orbital relativo, aportan el resto en partes casi iguales. Esto difiere un poco con los resultados experimentales[39][40] que muestran que la contribución de los quarks de valencia es de alrededor un tercio el espín del protón. Esta discrepancia puede ser atribuida a que el cálculo fue realizado únicamente con las componentes piónicas. Un análisis más completo tomando en cuenta todos los mesones pseudoescalares y vectoriales podría producir un resultado más cercano al experimental.

Los resultados obtenidos con el  $\chi$ QM fueron muy distintos a las predicciones de los otros modelos. Las grandes discrepancias entre ellos fueron principalmente en algunas contribuciones orbitales que resultaron ser de más del doble de lo que el MCM o el UCQM establecieron. En el caso del barión  $\Lambda^0$ , el  $\chi$ QM determinó que el espín total era generado al 100% por quarks de valencia, mientras que con el MCM y el UCQM se obtuvieron contribuciones significantes del mar de quarks y su momento angular relativo.

Para finalizar, se hace nuevamente incapié en la importancia de la evidencia experimental para determinar la precisión de los modelos. Pues aunque muchos puedan reproducir los resultados experimentales del protón, las predicciones para el resto de los bariones difieren considerablemente. Y mientras no existan más elementos de comparación, no se podrá realizar una selección adecuada de los modelos.

# Apéndice A

## Álgebra de SU(3)

### A.1 Reglas de conmutación

En notación de partículas elementales, los generadores de SU(3) satisfacen las siguientes reglas de conmutación [6]

$$\begin{aligned} [\hat{Y}, \hat{I}_3] &= 0 \\ [\hat{Y}, \hat{I}_\pm] &= 0, \quad [\hat{Y}, \hat{U}_\pm] = \pm \hat{U}_\pm, \quad [\hat{Y}, \hat{V}_\pm] = \pm \hat{V}_\pm \\ [\hat{I}_3, \hat{I}_\pm] &= \pm \hat{I}_\pm, \quad [\hat{I}_3, \hat{U}_\pm] = \mp \frac{1}{2} \hat{U}_\pm, \quad [\hat{I}_3, \hat{V}_\pm] = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm, \\ [\hat{I}_+, \hat{I}_-] &= 2\hat{I}_3, \quad [\hat{U}_+, \hat{U}_-] = \frac{3}{2} \hat{Y} - \hat{I}_3, \quad [\hat{V}_+, \hat{V}_-] = \frac{3}{2} \hat{Y} + \hat{I}_3 \\ [\hat{U}_+, \hat{V}_-] &= \hat{I}_-, \quad [\hat{I}_-, \hat{V}_+] = \hat{U}_+, \quad [\hat{I}_+, \hat{U}_+] = \hat{V}_+ \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$[\hat{U}_+, \hat{V}_+] = [\hat{U}_+, \hat{I}_-] = [\hat{V}_+, \hat{I}_+] = 0$$

El resto de los conmutadores se pueden calcular tomando en cuenta que

$$\left(\hat{I}_+\right)^\dagger = \hat{I}_-, \quad \left(\hat{U}_+\right)^\dagger = \hat{U}_-, \quad \left(\hat{V}_+\right)^\dagger = \hat{V}_- \tag{A.2}$$

## A.2 Operadores escalón

A continuación se presentan las fórmulas de la acción de los operadores escalón  $\hat{I}_\pm, \hat{V}_\pm$  y  $\hat{U}_\pm$  sobre un vector base  $|I, I_3, Y\rangle$  de una representación irreducible  $(\lambda, \mu)$  [6]

$$\hat{I}_\pm |I, I_3, Y\rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3 \pm 1)} |I, I_3 \pm 1, Y\rangle \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{V}_\pm |I, I_3, Y\rangle = a_\pm \left| I + \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle + b_\pm \left| I - \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{U}_\pm |I, I_3, Y\rangle = c_\pm \left| I + \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle + d_\pm \left| I - \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle \quad (\text{A.5})$$

donde

$$a_\pm = \left\{ \frac{(I + I_3 + 1) \left[ \frac{1}{3}(\lambda - \mu) + I + \frac{1}{2}Y + 1 \right] \left[ \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu) + I + \frac{1}{2}Y + 2 \right] \left[ \frac{1}{3}(2\lambda + \mu) - I - \frac{1}{2}Y \right]}{2(I+1)(2I+1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.6})$$

y

$$b_\pm = \left\{ \frac{(I - I_3) \left[ \frac{1}{3}(\mu - \lambda) + I - \frac{1}{2}Y \right] \left[ \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu) - I + \frac{1}{2}Y + 1 \right] \left[ \frac{1}{3}(2\lambda + \mu) + I - \frac{1}{2}Y + 1 \right]}{2I(2I+1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.7})$$

Los coeficientes  $a_\pm, b_\pm, c_\pm$  y  $d_\pm$  están relacionados entre sí y cada uno puede ser expresado en términos de los demás. Para encontrar dicha correspondencia se observa primero que estos coeficientes son elementos de matriz de los operadores  $\hat{V}_\pm$  y  $\hat{U}_\pm$  por lo que

$$\begin{aligned}
a_{\pm}(I, I_3, Y) &= \left\langle I + \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{V}_{\pm} \right| I, I_3, Y \right\rangle \\
b_{\pm}(I, I_3, Y) &= \left\langle I - \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{V}_{\pm} \right| I, I_3, Y \right\rangle \\
c_{\pm}(I, I_3, Y) &= \left\langle I + \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{U}_{\pm} \right| I, I_3, Y \right\rangle \\
d_{\pm}(I, I_3, Y) &= \left\langle I - \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{U}_{\pm} \right| I, I_3, Y \right\rangle
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Usando la ecuación (1.19) se obtiene entonces que los coeficientes están relacionados de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
a_{-}(I, I_3, Y) &= b_{+}(I + \frac{1}{2}, I_3 - \frac{1}{2}, Y - 1) \\
b_{-}(I, I_3, Y) &= a_{+}(I - \frac{1}{2}, I_3 - \frac{1}{2}, Y - 1) \\
c_{+}(I, I_3, Y) &= \left[ (I + \frac{1}{2})(I + \frac{3}{2}) - (I_3 + \frac{1}{2})(I_3 - \frac{1}{2}) \right]^{\frac{1}{2}} a_{+}(I, I_3, Y) \\
&\quad - [I(I + 1) - I_3(I_3 - 1)]^{\frac{1}{2}} a_{+}(I, I_3 - 1, Y) \\
d_{+}(I, I_3, Y) &= \left[ (I + \frac{1}{2})(I - \frac{1}{2}) - (I_3 + \frac{1}{2})(I_3 - \frac{1}{2}) \right]^{\frac{1}{2}} b_{+}(I, I_3, Y) \\
&\quad - [I(I + 1) - I_3(I_3 - 1)]^{\frac{1}{2}} b_{+}(I, I_3 - 1, Y) \\
c_{-}(I, I_3, Y) &= d_{+}(I + \frac{1}{2}, I_3 + \frac{1}{2}, Y - 1) \\
d_{-}(I, I_3, Y) &= c_{+}(I - \frac{1}{2}, I_3 + \frac{1}{2}, Y - 1)
\end{aligned} \tag{A.9}$$



# Referencias

- [1] K. Gottfried, Phys. Rev. Lett. **18**, 1174 (1967).
- [2] P. Amaudruz *et al.*, Phys. Rev. Lett. **66**, 2712 (1991); M. Arneodo *et al.*, Nucl. Phys. B **487**, 3 (1997).
- [3] A. Baldit *et al.*, Phys. Lett. B **332**, 244 (1994).
- [4] E.A Hawker *et al.* (E866/NuSea Collaboration), Phys. Rev. Lett. **80**, 3715 (1998); J.C. Peng *et al.*, Phys. Rev. D **58**, 092004 (1998); R.S. Towell *et al.*, Phys. Rev. D **64**, 052002 (2001).
- [5] J. Ashman *et al.*, Phys. Lett. B **206**, 364 (1998).
- [6] Fl. Stancu, *Group Theory in Subnuclear Physics*, (Oxford University Press, 1996).
- [7] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, (Westview Press, 1999).
- [8] T.P. Cheng and L.F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, (Oxford University Press, 1988).
- [9] K. Huang, *Quarks, leptons and gauge fields*, (Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2nd Edition, 1992).
- [10] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [11] G. Zweig, *An SU(3) Model of Strong Interaction Symmetry and its Breaking*, CERN Rept. No. 8182/TH401 (1964).
- [12] R. Bijker, *Quark models of the nucleon*, Lecture notes: “VII Escuela Mexicana de Física Nuclear”, (2011).
- [13] F.E. Close, *An Introduction to Quarks and Partons*, (Academic Press. 1982).

- 
- [14] F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, (John Wiley & Sons, 1986).
- [15] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, (2<sup>nd</sup> Revised Edition. WILEY-VCH. 2010).
- [16] J.J. de Swart, Rev. Mod. Phys. D **35**, 916 (1963).
- [17] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G **37**, 075021 (2010).
- [18] S. Weinberg, Physica A **96**, 327 (1979).
- [19] A. Manohar and H. Georgi, Nucl. Phys. B **234**, 189 (1984).
- [20] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*. (2<sup>nd</sup> Edition. Princeton University Press. 2010).
- [21] S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **27**, 277 (2003), [arXiv:hep-ph/0210398v1].
- [22] T.P. Cheng and L.F. Li, Phys. Rev. Lett. **74**, 2872 (1995).
- [23] T.P. Cheng and L.F. Li, Phys. Rev. D **57**, 344 (1998).
- [24] J.P. Speth and A.W. Thomas, Adv. Nucl. Phys. **24**, 83 (1998).
- [25] J.D. Sullivan, Phys. Rev. D **5**, 1732(1972).
- [26] A.W. Thomas, Phys. Lett. B **126**, 97 (1983).
- [27] G.T. Garvey and J.C. Peng, Prog.Part.Nucl.Phys. **47**, 203-243 (2001).
- [28] A.Szczurek and H.Holtmann, Prog.Part.Nucl.Phys. **36**, 141-149 (1996).
- [29] W. Roberts and B. Silvestre-Brac, Few-Body Syst. **11**, 171 (1992).
- [30] R. Bijker and E. Santopinto, Phys. Rev. C **80**, 065210 (2009).
- [31] P. Geiger and N. Isgur, Phys. Rev. Lett. **67**, 1066 (1991); Phys. Rev. D **44**, 799 (1991); **47**, 5050 (1993).
- [32] P. Geiger and N. Isgur, Phys. Rev. D **55**, 299 (1997).
- [33] B. Silvestre-Brac and C. Gignoux, Phys. Rev. D **43**, 3699 (1991).
- [34] S. Capstick and W. Roberts, Phys. Rev. D **49**, 4570 (1994).

- 
- [35] R. Bijker, F. Iachello and A. Leviatan, Phys. Rev. D **55**, 2862 (1997).
- [36] W.C. Chang and J.C. Peng, Phys. Rev. Lett. **106**, 252002 (2011).
- [37] A. Airapetian *et al.* (HERMES Collaboration), Phys. Lett. B **666**, 446 (2008).
- [38] S.J. Brodsky, P. Hoyer, C. Peterson, and N. Sakai, Phys. Lett. B **93**, 451 (1980);  
S.J. Brodsky, C. Peterson, and N. Sakai, Phys. Rev. D **23**, 2745 (1981).
- [39] A. Airapetian *et al.*, Phys. Rev. D **75**, 012007 (2007).
- [40] V.Y. Alexakhin *et al.*, Phys. Lett. B **647**, 8 (2007).
- [41] B.W. Filippone and X. Ji, Adv. Nucl. Phys. **26**, 1 (2001), [arXiv:hep-ph/0101224v1].
- [42] F. Bradamante, Prog. Part. Nucl. Phys. **61**, 229 (2008).
- [43] M.A. Alberg, T. Falter and E.M. Henley, Nucl. Phys. A **644**, 93 (1998).