



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA EVOLUCIÓN CUÁNTICA DE
UN CAMPO ESCALAR EN DISTINTOS
FONDOS NO ESTACIONARIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

YAFET ERASMO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JERÓNIMO ALONSO CORTEZ QUEZADA



MÉXICO D.F

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

“Sobre la evolución cuántica de un campo escalar
en distintos fondos no estacionarios”

Yafet Erasmo Sánchez Sánchez
Asesor: Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada

17 de mayo de 2012

Agradecimientos

La presente Tesis es un esfuerzo que no hubiera podido realizar de forma individual y me gustaría utilizar estas líneas para agradecer a todos aquellos, que de forma directa o indirecta, participaron en la elaboración.

En primer lugar quisiera agradecer y dedicar este trabajo a Dios.

En segundo lugar quiero agradecer profundamente a mi asesor de Tesis, el Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada, quien su apoyo y guía en la elaboración de este trabajo ha sido fundamental. Agradezco todo el tiempo que me brindó para enseñarme, aclararme las partes confusas, leer y corregir el texto. Además de tenerme paciencia, aconsejarme y darme ánimo procurando hacer de mí no sólo un profesionalista, sino un profesionalista integral y mejor persona.

También quisiera agradecer a mi familia. A mi padre y madre por su apoyo incondicional, el proveerme de las herramientas necesarias y confiar en mí.

Agradezco a Melba por ser el lugar que es y por nunca haberme cerrado las puertas. En particular, agradezco a Fernando, Juan y José Luis con quien pude discutir este trabajo.

Muchas gracias a todos.

Índice general

Notación	7
Introducción	9
1. Sistemas finitos	11
1.1. Formalismo Hamiltoniano	11
1.2. Cuantización	15
1.2.1. Oscilador Armónico	17
2. Sistemas de Campo	23
2.1. Campo real de Klein-Gordon	23
2.2. Cuantización	25
3. Implementabilidad Unitaria	29
3.1. Equivalencia Unitaria	29
3.2. Dinámica del campo escalar.	32
4. Evolución y unicidad en fondos no estacionarios	35
4.1. Campo escalar en un fondo FRW	35
4.2. Redefinición del sistema	38
4.3. Campo escalar en un fondo Bianchi I	40
Conclusión	43
Bibliografía	45

Notación

- $T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k}$ Tensor tipo (k, l)
- Γ Espacio fase canónico
- Z Espacio fase covariante
- Ω Estructura simpléctica en Γ
- $\tilde{\Omega}$ Estructura simpléctica en Z
- \mathcal{H} Espacio de Hilbert
- \mathcal{F} Espacio de Fock
- H Hamiltoniano
- J Estructura compleja
- h_J Espacio de frecuencias positivas asociado a la estructura compleja J para un campo escalar
- $\frac{\delta F}{\delta \phi}$ Derivada variacional de F respecto de ϕ
- $SP_t(\Gamma)$ Grupo de simplectomorfismo de evolución en Γ
- $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ Símbolo de Christoffel $\alpha\mu\nu$
- $g_{\alpha\beta}$ Componente $\alpha\beta$ de la métrica g_{ab}
- $T_{(ab)}$ parte simétrica de un tensor $(0, 2)$ T_{ab}
- $T_{[ab]}$ parte antisimétrica de un tensor $(0, 2)$ T_{ab}

Notación de índices abstractos

A lo largo del texto se utilizará *notación de índices abstractos*. En dicha notación se hace referencia a los tensores como objetos geométricos independientes de la base y se utilizan índices con letras latinas, según sea el tipo del tensor, e índices con letras griegas para las componentes; por ejemplo, un tensor tipo $(3, 2)$ se denota por T_{de}^{abc} , mientras que sus componentes se denotan por $T_{\mu\nu}^{\alpha\beta\delta}$.

Cabe aclarar que en algunas ocasiones, las componentes espaciales de ciertos tensores (en particular de la métrica) serán denotadas también con índices latinos. Cuando esto ocurra, y para evitar confusión con la notación de índices abstractos, será explícitamente mencionada la referencia a componentes espaciales del tensor.

En notación de índices abstractos la contracción $Y_{ab}u^b$, por ejemplo, denota la aplicación del vector u^b al tensor Y_{ab} (i.e., $Y_{ab}u^b = Y(\cdot, \vec{u})$), cuyo resultado es una uno-forma v_a . Análogamente, $w_b = Y_{ab}u^a$ denota la aplicación $Y(\vec{u}, \cdot)$. El dual de u^b es $u_a = g_{ab}u^b$. La contracción de un tensor, digamos T_{ab} , con su inverso, T^{ab} , da como resultado $T_{ab}T^{bc} = \delta_a^c$.

Introducción

La cuantización de un sistema, como su nombre lo indica, corresponde al proceso de construir la versión cuántica de un sistema clásico. En el caso de sistemas lineales con número finito de grados de libertad puede garantizarse (esencialmente bajo ciertos requerimientos de continuidad) que la cuantización es *única* (salvo equivalencia unitaria) gracias al teorema de Stone-von Neumann. Sin embargo, la falta de un teorema análogo para sistemas de campo (número infinito de grados de libertad) implica la búsqueda y establecimiento de criterios que permitan seleccionar, entre la infinidad de representaciones de las relaciones de conmutación canónicas (RCC) no equivalentes, una cuantización predilecta. En el caso del campo escalar en Minkowski, el requerimiento de invariancia bajo el grupo de Poincaré es el criterio físico que se impone y que basta para seleccionar *una* representación predilecta de las RCC. Cuando el campo se propaga en un fondo con menos simetrías (e.g. espacios no estacionarios) el criterio de invariancia de la teoría bajo las simetrías suele ser insuficiente para seleccionar una cuantización predilecta; en efecto, ocurre que hay una infinidad de representaciones de las RCC invariantes ante las simetrías pero no equivalentes entre sí. Adicionalmente, la dinámica puede no ser unitariamente implementable en toda una infinidad de representaciones. Para el caso de campo escalar propagándose en fondos no estacionarios, se propone en este trabajo el requerimiento de invariancia ante las simetrías (como es usual y estándar) y *la implementación unitaria de la dinámica* (criterio extra) como los criterios físicos que permiten especificar y seleccionar una cuantización predilecta para el sistema. En concreto, en el presente trabajo se da cuenta de que el criterio extra de implementación unitaria de la dinámica “elige”, en efecto, *una* teoría cuántica para los casos de (i) campo escalar propagándose en un fondo FRW y de (ii) campo escalar axial propagándose en un fondo tipo Bianchi I.

Este trabajo tiene como propósito general presentar el problema de la ambigüedad en la cuantización de sistemas de campo y cómo dichas ambigüedades pueden ser superadas a través de imponer criterios físicos. El

contenido de la tesis está organizado como sigue:

En el Capítulo 1 se introduce, en el marco de sistemas con número finito de grados de libertad, algunos aspectos fundamentales del formalismo simpléctico. Se expone lo que se entiende por la cuantización de un sistema clásico finito y se presenta el teorema de unicidad de Stone-von Neumann. El capítulo concluye con una presentación ilustrativa del oscilador armónico, que es aprovechada tanto para esclarecer conceptos y herramientas matemáticas como para introducir nuevos elementos en el formalismo de cuantización.

En el Capítulo 2 se generalizan, para el caso de sistemas con un número infinito de grados de libertad, las nociones formales introducidas en el capítulo 1; en concreto, se trata el caso de campo escalar real. En la Sección 2.2 se presenta la cuantización del campo de Klein-Gordon y se nota que en general no hay equivalencia unitaria entre las teorías cuánticas (i.e., hay una infinidad de representaciones no unitariamente equivalentes). En este capítulo se introduce la estructura compleja, J , que es el objeto matemático que codifica la ambigüedad en la cuantización del campo escalar.

En el Capítulo 3 se presenta matemáticamente y en forma rigurosa el concepto de equivalencia unitaria; en particular, se presenta en términos de transformaciones de Bogoliubov cuándo dos representaciones cuánticas del campo de Klein-Gordon son unitariamente equivalentes. Además, se especifica la condición que un simplectomorfismo debe cumplir para ser implementable unitariamente en la teoría cuántica. Este punto es central, pues dicha condición es el criterio extra que se impondrá sobre la dinámica (que es un simplectomorfismo) para seleccionar una representación predilecta: representaciones con dinámica no unitariamente implementable serán descartadas, mientras que aquellas que implementen la dinámica unitariamente (y sean invariantes ante las simetrías del fondo) serán consideradas como predilectas.

En el Capítulo 4 se consideran dos sistemas no estacionarios en los que se pone a prueba los criterios de unicidad. En la Sección 4.1 se trata el caso de campo escalar real propagándose en un fondo de Friedmann-Robertson-Walker plano, compacto (hipersuperficies de Cauchy T^3) y con contenido de radiación. En la Sección 4.3 se analiza un campo escalar axial propagándose en un espacio-tiempo tipo Bianchi I.

Finalmente se dedica el último capítulo a una breve sinopsis de lo que se hizo a lo largo de la tesis y a discutir algunos puntos; se expone el significado que la evolución unitaria tiene y su relación con la cuantización. Adicionalmente se proponen algunas líneas de investigación a futuro.

Capítulo 1

Sistemas finitos

Los sistemas físicos con un número finito de grados de libertad corresponden, en general, al estudio de sistemas de n partículas. La descripción de dichos sistemas puede llevarse a cabo, en forma completamente equivalente ya sea empleando la formulación Lagrangiana o la Hamiltoniana¹. Un aspecto importante de los sistemas finitos es que su cuantización es única (salvo equivalencia unitaria) como es enunciado en el teorema de Stone-von Neumann [1]. En este capítulo se revisará la construcción del formalismo Hamiltoniano para sistemas finitos, se introducirán los elementos de geometría simpléctica que acompañan a esta formulación y se presentará el proceso de cuantización de sistemas con Hamiltoniano cuadrático en las coordenadas canónicas conjugadas de configuración y momento. La bibliografía básica para esta parte del texto es [1], [2] y [4].

1.1. Formalismo Hamiltoniano

La configuración de un sistema clásico con un número finito n de grados de libertad es representada por un punto en una variedad n -dimensional ℓ , conocida como el espacio de configuración, cuyas coordenadas $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ son llamadas coordenadas generalizadas del sistema. El espacio fase Γ del sistema es el haz cotangente $T^*\ell$, coordinado por $\{q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n\}$, donde $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ son las componentes de los vectores cotangentes asociados a la base $\{\partial/\partial q_i\}$. El espacio Γ está equipado con la forma simpléctica canónica

$$\Omega_{ab} = \sum_{\mu=1}^n (dp_{\mu})_a \wedge (dq_{\mu})_b, \quad (1.1)$$

¹Aquí no se considerará el caso de sistemas singulares.

donde \wedge denota el producto cuña, $A_a \wedge B_b := A_a \otimes B_b - B_a \otimes A_b$. La forma simpléctica es un campo tensorial $(0, 2)$, antisimétrico y no degenerado; dado que Ω_{ab} es no degenerada existe una única inversa, Ω^{ab} , tal que $\Omega^{ab}\Omega_{bc} = \delta_c^a$. Se puede ver que ésta está dada por

$$\Omega^{ab} = \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_\mu} \right)^a \otimes \left(\frac{\partial}{\partial p_\mu} \right)^b - \left(\frac{\partial}{\partial p_\mu} \right)^a \otimes \left(\frac{\partial}{\partial q_\mu} \right)^b. \quad (1.2)$$

Dada una función suave de Γ en los reales, g , el campo Hamiltoniano en Γ asociado a g es $X_g^a = \Omega^{ab}\nabla_b g$, donde $\nabla_b g = \sum_{\mu} (\partial g / \partial q_\mu)(dq_\mu)_b + (\partial g / \partial p_\mu)(dp_\mu)_b$. Puesto que el Hamiltoniano H de un sistema es, en particular, una función del espacio fase a los reales, i.e., $H : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, entonces el campo vectorial Hamiltoniano $h^a := X_H^a$ sobre Γ asociado a H es $h^a = \Omega^{ab}\nabla_b H$; explícitamente:

$$h^a = \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial q_\mu} \right)^a - \left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial p_\mu} \right)^a. \quad (1.3)$$

Dado un estado del sistema, es decir un punto P en el espacio fase Γ , la evolución de éste es a lo largo de la curva integral de h^a que pasa a través de P . En otras palabras, puesto que el hamiltoniano H es el generador de evolución, el campo vectorial asociado h^a define el flujo de la evolución en el espacio fase Γ .

Como sabemos, las propiedades físicas medibles en los sistemas corresponden a las llamadas observables; éstas son representadas por funciones reales y suaves, i.e., $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, con $f \in C^1$. El conjunto de observables básicas (o fundamentales) de un sistema es un espacio vectorial tal que cualquier función en Γ suficientemente regular puede ser representada como (el límite de) la suma de productos de observables básicas. El espacio de observables está equipado con una estructura algebraica, conocida como el paréntesis de Poisson,

$$\{f, g\} = \Omega^{ab}\nabla_a f \nabla_b g, \quad (1.4)$$

y el conjunto de observables básicas es cerrado bajo éste.

Puesto que las coordenadas canónicas son observables, los paréntesis de Poisson entre las mismas están dados por:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0 \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (1.5)$$

El paréntesis de Poisson de las variables canónicas con el Hamiltoniano provee, justamente, las ecuaciones de Hamilton; en efecto:

$$\{q_i, H\} = \Omega^{ab} \nabla_a q_i \nabla_b H = h^a \nabla_a q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.6)$$

$$\{p_j, H\} = \Omega^{ab} \nabla_a p_j \nabla_b H = h^a \nabla_a p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (1.7)$$

Dada una función suave $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $h^a \nabla_a f$ es el cambio de f a lo largo de h^a , y como este último representa el flujo de la evolución, entonces $h^a \nabla_a f = \dot{f}$. Así que $h^a \nabla_a q_i = \dot{q}_i$ y $h^a \nabla_a p_j = \dot{p}_j$, con lo cual se llega al conjunto de ecuaciones

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (1.8)$$

Para el caso de teorías lineales, el espacio fase es un espacio vectorial $\Gamma \cong \mathbb{R}^{2n}$, donde $n \in \mathbb{N}$ son los grados de libertad del sistema. El hecho de que la variedad sea un espacio vectorial permite identificar a Γ con $T_x \Gamma$, para cualquier punto $x \in \Gamma$, y por consiguiente identificar puntos de Γ , x , con los correspondientes vectores, x^a , en el tangente. Así, la forma simpléctica Ω_{ab} define una función bilineal $\Omega : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Omega(x, y) := \Omega_{ab} x^a y^b, \quad (1.9)$$

que es conocida como estructura simpléctica. Dados cualesquiera dos puntos en Γ , $y_1 = (q_{1\mu}, p_{1\mu})$ y $y_2 = (q_{2\mu}, p_{2\mu})$ [donde $\mu = 1, \dots, n$] la forma explícita de Ω es

$$\Omega(y_1, y_2) = \sum_{\mu=1}^n [p_{1\mu} q_{2\mu} - p_{2\mu} q_{1\mu}]. \quad (1.10)$$

El espacio fase de sistemas lineales es pues un espacio vectorial simpléctico (Γ, Ω) ; es decir, un espacio vectorial en el que está definido el mapeo bilineal no degenerado y antisimétrico Ω . Dada $y' \in \Gamma$, la expresión $\Omega(y', \cdot)$ es una función lineal de Γ en \mathbb{R} . Por ejemplo, con la elección de etiqueta $y' = (0, \dots, q_i = 1, \dots, 0; 0, \dots, 0)$, se tiene que $\Omega(y', y) = -p_i$ (i.e., la función asigna a cada $y \in \Gamma$ menos su i -ésima componente en momento), mientras que con $y' = (0, \dots, 0; 0, \dots, p_i = 1, \dots, 0)$ se tiene que $\Omega(y', y) = q_i$ (i.e., la función asigna a cada $y \in \Gamma$ su i -ésima componente en configuración). Claramente una función f que sea combinación lineal de las variables canónicas, $f(y) = \sum_i a_i q_i + b_i p_i$ (con $y \in \Gamma$), puede escribirse como $f(y) = \Omega(y_f, y)$, donde $y_f = (-b_1, \dots, -b_n; a_1, \dots, a_n)$. Es decir, cualquier observable f que sea combinación lineal de las coordenadas canónicas puede expresarse como $f = \Omega(y_f, \cdot)$, con la etiqueta $y_f \in \Gamma$ correspondiente.

Dadas cualesquiera dos observables básicas con etiquetas y_1 y y_2 , $\Omega(y_1, \cdot)$ y $\Omega(y_2, \cdot)$, el paréntesis de Poisson entre éstas es

$$\{\Omega(y_1, \cdot), \Omega(y_2, \cdot)\} = -\Omega(y_1, y_2). \quad (1.11)$$

Es importante mencionar que el espacio fase canónico Γ es isomorfo al espacio de soluciones $Z = \{Y(t)\}$, donde Y es solución a las ecuaciones de movimiento Lagrangianas; por consiguiente, para el caso de sistemas lineales, el espacio de soluciones es un espacio vectorial simpléctico y puede considerarse también como el espacio fase de la teoría (*espacio fase covariante*). El isomorfismo asigna a un punto $y \in \Gamma$, la solución $Y(t)$, cuyos datos iniciales son precisamente $y \in \Gamma$ a un cierto tiempo de referencia $t = t_0$ (tiempo inicial); así, es claro que para cada elección de t_0 se tendrá un isomorfismo $I_{t_0} : \Gamma \rightarrow Z$ correspondiente. Es a través del isomorfismo que se define en Z la estructura simpléctica $\tilde{\Omega}_{t_0}$ inducida por la estructura simpléctica Ω en Γ ; a saber, $\tilde{\Omega}_{t_0}(Y_1(t), Y_2(t)) = \Omega(I_{t_0}^{-1}(Y_1(t)), I_{t_0}^{-1}(Y_2(t)))$, donde $I_{t_0}^{-1} : Z \rightarrow \Gamma$ es la inversa del isomorfismo I_{t_0} y $Y_1(t), Y_2(t) \in Z$.

La estructura simpléctica inducida en Z es independiente de la elección de tiempo de referencia que se considere para definirla; sea $g^t : \Gamma \rightarrow \Gamma$ el mapeo de evolución en el espacio fase canónico Γ , de tal suerte que si $y \in \Gamma$ es el estado del sistema a tiempo inicial t_0 , $g^t(y)$ será el estado del sistema a tiempo $t > t_0$. Se puede ver que el mapeo g^t corresponde a la composición $I_t^{-1} \circ I_{t_0}$; dada $y \in \Gamma$, $I_t^{-1} \circ I_{t_0}(y) = I_t^{-1}(Y)$, donde $Y \in Z$ es la solución con datos iniciales y al tiempo de referencia t_0 y datos iniciales y_t al tiempo de referencia t , así que $I_t^{-1}(Y) = y_t$. La traza de datos iniciales a diferentes tiempos de referencia para una misma solución es justamente la evolución en Γ , de manera que $y_t = g^t(y)$ y por tanto $g^t = I_t^{-1} \circ I_{t_0}$. La evolución es una transformación canónica, lo que significa que g^t es un simplectomorfismo; i.e., $\Omega(y_1, y_2) = \Omega(g^t(y_1), g^t(y_2)) = \Omega(y_{1t}, y_{2t})$. Puesto que

$$\Omega(y_1, y_2) = \Omega(I_{t_0}^{-1}(Y_1(t)), I_{t_0}^{-1}(Y_2(t))) = \tilde{\Omega}_{t_0}(Y_1(t), Y_2(t)), \quad (1.12)$$

$$\Omega(y_{1t}, y_{2t}) = \Omega(I_t^{-1}(Y_1(t)), I_t^{-1}(Y_2(t))) = \tilde{\Omega}_t(Y_1(t), Y_2(t)), \quad (1.13)$$

entonces de la propiedad de simplectomorfismo se sigue que

$$\tilde{\Omega}_{t_0}(Y_1(t), Y_2(t)) = \tilde{\Omega}_t(Y_1(t), Y_2(t)). \quad (1.14)$$

i.e., la estructura simpléctica en Z es, en efecto, independiente de la elección de tiempo de referencia que se considere para definirla. En consecuencia, podemos eliminar en $\tilde{\Omega}_{\bar{t}}$ el subíndice \bar{t} . Tenemos pues que $(\Gamma, \Omega) \cong (Z, \tilde{\Omega})$, con $\tilde{\Omega}$ independiente del isomorfismo I_t que se utilice en la identificación de Γ (datos iniciales) y Z (soluciones).

1.2. Cuantización

En el paso a la teoría cuántica, la estructura matemática cambia. Los estados cuánticos del sistema son representados por vectores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , las observables son operadores autoadjuntos en \mathcal{H} y la evolución dinámica es dictada por un operador unitario (en el caso de sistemas lineales de dimensionalidad finita). En el siguiente cuadro se contrastan los elementos clásicos y cuánticos para sistemas lineales finitos.

Cuadro 1.1: Comparación entre los sistemas clásicos y cuánticos finitos

Objeto	Cuántico	Clásico
Estados del sistemas	Espacio de Hilbert \mathcal{H}	Espacio vectorial simpléctico (Γ, Ω)
Observables	$\{\hat{O} \hat{O} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ autoadjunto}\}$	$\{f f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \text{ suave}\}$
Evolución/Generador	Operador unitario \hat{U}_t /Operador Hamiltoniano \hat{H}	Simplectomorfismo g^t de Γ en Γ /Flujo vectorial h^a generado por el Hamiltoniano H

Dado un sistema clásico, lo principal en el proceso de cuantización de tal sistema es determinar el espacio de Hilbert \mathcal{H} y los operadores autoadjuntos \hat{f} correspondientes a las observables clásicas f . A grandes rasgos, la idea es especificar a partir de las observables clásicas un álgebra de operadores abstractos, es decir definir de manera precisa un mapeo $\hat{\cdot} : f \rightarrow \hat{f}$, imponer la condición de cuantización de Dirac, $[\hat{f}, \hat{g}] = i\widehat{\{f, g\}}$ (aquí en unidades de $\hbar = 1$) y representar el álgebra en un espacio de Hilbert \mathcal{H} construido a partir del espacio fase de la teoría. Un problema en el procedimiento, como mostró H. Groenewold [5], es que no existe una correspondencia general entre el conmutador y el paréntesis de Poisson; i.e., que no existe un isomorfismo entre las álgebras clásica (paréntesis de Poisson) y cuántica (conmutador). Sin embargo, es posible considerar un conjunto de variables elementales (también llamadas fundamentales o básicas) clásicas, Σ , para las cuales dicho isomorfismo sí existe. Como se mencionó en el apartado anterior, el conjunto de variables fundamentales Σ es tal que:

1. Σ debe ser un espacio vectorial lo suficientemente grande para que cualquier función regular en Γ pueda obtenerse como (posiblemente el límite) de sumas y productos de los elementos de Σ . Esta condición lo que pretende es que el mayor número de observables pueda ser cuantizado sin ambigüedad.
2. Σ debe ser cerrado respecto al paréntesis de Poisson.

Con estas condiciones es posible establecer un isomorfismo lineal F que a cada $f \in \Sigma$ le asigna un $\hat{f} \in \hat{\Theta}$ (el espacio de observables cuánticas)

-i.e., establecer el mapeo “ $\hat{\cdot}$ ”- y $F(s)$, donde $s = \{f, g\} \in \Sigma$, coincide con $-i[F(f), F(g)]$ para todo $f, g \in \Sigma$ (que no es más que la condición de cuantización de Dirac).

El conjunto de observables básicas Σ en Γ es²

$$\Sigma = \text{Span}\{1, \Omega(y, \cdot)\}, \quad y \in \Gamma, \quad (1.15)$$

que de acuerdo a (1.11) es cerrado bajo el paréntesis de Poisson. Así, se tiene que

$$[\hat{\Omega}(y_1, \cdot), \hat{\Omega}(y_2, \cdot)] = -i\hat{\Omega}(y_1, y_2), \quad y_1, y_2 \in \Gamma. \quad (1.16)$$

Es importante señalar que un problema con los operadores básicos $\hat{\Omega}(y_1, \cdot)$ es que éstos son (en general) operadores no acotados. Por ejemplo, el operador de posición $\hat{\Omega}(y', \cdot) = \hat{q}_i$, con $y' = (0, \dots, 0; 0, \dots, p_i = 1, \dots, 0)$, en la representación de Schrödinger es un operador no acotado. En consecuencia, para evitar problemas de dominio, es conveniente trabajar con la versión exponencial de estos operadores; i.e., $\{\hat{W}(y) = \exp[i\hat{\Omega}(y, \cdot)]\}$. Tanto las relaciones de conmutación canónicas (1.16), como las de hermiticidad $\hat{\Omega}(y, \cdot) = \hat{\Omega}^\dagger(y, \cdot)$, son capturadas en las llamadas relaciones de Weyl

$$\hat{W}(y_1)\hat{W}(y_2) = \exp\left(\frac{i}{2}\Omega(y_1, y_2)\right)\hat{W}(y_1 + y_2), \quad (1.17)$$

$$\hat{W}^\dagger(y) = \hat{W}(-y). \quad (1.18)$$

Una característica importante de los sistemas finitos es que es posible garantizar que su representación en espacio de Hilbert es *única* (salvo equivalencia unitaria) bajo ciertas condiciones de continuidad y unitariedad. Es decir, que la ambigüedad en la representación de las relaciones de conmutación canónicas en el proceso de cuantización es eliminada al imponer ciertas condiciones sobre la representación de las relaciones de Weyl (1.17)-(1.18). Este importante resultado de unicidad para la teoría cuántica de sistemas lineales de dimensión finita es enunciado en el llamado teorema de Stone-von Neumann:

Teorema 1 (*Stone-von Neumann*): *Sea (Γ, Ω) un espacio vectorial simpléctico de dimensión finita. Sean $(\mathcal{H}, \hat{W}(y))$ y $(\mathcal{H}', \hat{W}'(y))$ dos representaciones fuertemente continuas, irreducibles y unitarias de las relaciones de Weyl. Entonces, $(\mathcal{H}, \hat{W}(y))$ y $(\mathcal{H}', \hat{W}'(y))$ son representaciones unitariamente equivalentes.*

²Análogamente, el conjunto de observables básicas en Z es $\text{Span}\{1, \tilde{\Omega}(Y(t), \cdot)\}$, $Y(t) \in Z$.

En otras palabras, si una representación de las relaciones de Weyl (1.17)-(1.18) es fuertemente continua, irreducible y unitaria, entonces es única. Conviene recordar que (A) la continuidad fuerte se refiere a que $\lim_{y \rightarrow 0} \|\hat{W}(y)h - h\| = 0, \forall h$ en el Hilbert (B) la irreducibilidad consiste en que el Hilbert \mathcal{H} y el elemento cero de éste son los únicos subespacios invariantes ante el álgebra de Weyl generada por $\hat{W}(y)$ y (C) dos representaciones $(\mathcal{H}, \hat{W}(y))$ y $(\mathcal{H}', \hat{W}'(y))$ son unitariamente equivalentes si existe un mapeo unitario entre ellas: $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}', U^{-1}\hat{W}'U = \hat{W}$. Como sabemos, dos teorías cuánticas que sean unitariamente equivalentes, son físicamente equivalentes. En efecto, si $(\mathcal{H}, \hat{W}(y))$ es unitariamente equivalente a $(\mathcal{H}', \hat{W}'(y))$, el valor de expectación de la observable \hat{W} en un cierto estado $\Psi \in \mathcal{H}$ es $\langle \Psi | \hat{W} | \Psi \rangle = \langle \Psi | U^{-1} \hat{W}' U | \Psi \rangle = \langle \Psi' | \hat{W}' | \Psi' \rangle$; es decir, la expectación de \hat{W} en el estado $\Psi \in \mathcal{H}$ es igual a la expectación del mismo operador \hat{W}' , en la representación primada, en el estado correspondiente Ψ' .

Es importante recalcar la hipótesis sobre la dimensionalidad finita del espacio fase en el teorema, pues justamente es tal hipótesis la que se pierde cuando se consideran sistemas de campo; en efecto, los sistemas de campo cuentan con espacio fase de dimensión infinita.

Por ejemplo, el espacio fase para un campo de Klein-Gordon es el espacio de datos de Cauchy para la ecuación de Klein-Gordon y es, ciertamente, de dimensión infinita. En tal sistema de campo, que es el más simple posible, no es aplicable el teorema de Stone-von Neumann y, en general, se tiene que lidiar entonces con el problema de una infinidad de representaciones no unitariamente equivalentes para las relaciones de conmutación canónicas (RCC). El problema que debe enfrentarse es el de hallar criterios físicos que permitan seleccionar una representación predilecta para las RCC; un problema que es altamente no trivial, que para el caso de espacio-tiempo plano es resuelto al imponer invariancia de Poincaré, pero que para otros fondos (e.g. no estacionarios) es un problema no resuelto en forma genérica.

1.2.1. Oscilador Armónico

Para efectos ilustrativos, en este apartado se discutirá la cuantización del oscilador armónico y de n osciladores armónicos desacoplados. Primero se presentará en forma sucinta los elementos que conforman la teoría cuántica estándar en espacio de Hilbert, cuya construcción puede consultarse en cualquier libro introductorio de Mecánica Cuántica. Posteriormente se delineará la cuantización en un formalismo dirigido a la generalización para

campos. Trataremos pues el caso de un Hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2, \quad (1.19)$$

que es el Hamiltoniano para un oscilador (el Hamiltoniano para n osciladores armónicos desacoplados es la suma de n Hamiltonianos H_i de esta forma, con frecuencias correspondientes ω_i).

En la teoría cuántica estándar, el espacio de Hilbert \mathcal{H} de la teoría es $L^2(\mathbb{R}, dq)$ y los operadores de posición y momento son representados por

$$\hat{q}\Psi = q\Psi \quad \hat{p}\Psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\Psi \quad (1.20)$$

El operador Hamiltoniano \hat{H} es la contraparte cuántica de (1.19), con q y p sustituidos por \hat{q} y \hat{p} . En lugar de observables básicas \hat{q} y \hat{p} , la teoría puede formularse considerando como los operadores fundamentales a los operadores de aniquilación y creación,

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{q} + i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\hat{p} \quad (1.21)$$

$$\hat{C} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{q} - i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\hat{p}, \quad (1.22)$$

donde el operador de creación \hat{C} es el operador adjunto de \hat{A} .

Se puede ver que en la representación de Heisenberg

$$\hat{q}_H(t) = \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \left(\hat{A}_H(t) + \hat{C}_H(t) \right), \quad (1.23)$$

donde $\hat{A}_H(t) = \exp(-i\omega t)\hat{A}$ es solución de la ecuación $d\hat{A}_H/dt = i[\hat{H}, \hat{A}_H]$, que proviene de la ecuación clásica $dA/dt = \{A, H\}$; i.e., $d\hat{A}_H/dt = \{\hat{A}_H, \hat{H}\}$, y como $[\hat{A}_H, \hat{H}] = i\{\hat{A}_H, \hat{H}\}$ entonces se sigue que $d\hat{A}_H/dt = i[\hat{H}, \hat{A}_H]$. El operador de momento en la representación de Heisenberg, \hat{p}_H , está dado por

$$\hat{p}_H(t) = \frac{d\hat{q}_H}{dt}. \quad (1.24)$$

Las ecuaciones (1.23) y (1.24), con $\hat{A}_H(t) = \exp(-i\omega t)\hat{A}$ y \hat{C} su adjunto, determinan el Hamiltoniano cuántico asociado a (1.19) -salvo por un múltiplo de la identidad-. De tal manera que podemos decir que tales ecuaciones determinan la teoría cuántica para el oscilador armónico.

La generalización para un sistema de n osciladores desacoplados con frecuencias $\omega_1, \dots, \omega_n$ es directa. En tal caso el espacio de Hilbert, \mathcal{H} , de la teoría consistirá en el producto tensorial de los espacios de Hilbert, $\mathcal{H}_1 \dots \mathcal{H}_n$, de cada oscilador individual, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ y los operadores, (\hat{A}_i, \hat{C}_i) , serán los operadores de aniquilación y creación correspondientes al i -ésimo oscilador, $i = 1, \dots, n$. Esta generalización es estrictamente válida para n finito, pues la generalización del espacio de Hilbert como un producto tensorial infinito de espacios de Hilbert es inadecuada.

A continuación nos centraremos entonces en presentar una construcción de la teoría cuántica para n osciladores desacoplados, que aunque es un tanto cuanto más elaborada tiene la ventaja de que su generalización a sistemas de campo es inmediata. Esta formulación, al igual que la tradicional que hemos descrito con anterioridad, satisfacen el teorema de Stone-von Neumann y, por tanto, son unitariamente equivalentes.

Consideremos el espacio vectorial simpléctico de soluciones a las ecuaciones de movimiento, $(Z, \tilde{\Omega})$. El primer paso para construir el espacio de Hilbert de la teoría cuántica consiste en considerar la complexificación de Z , $Z^{\mathbb{C}} = Z \otimes \mathbb{C}$, y definir la operación bilineal

$$(z_1, z_2) = -i\tilde{\Omega}(\bar{z}_1, z_2), \quad (1.25)$$

donde $\tilde{\Omega}$ es la extensión (por linealidad compleja) de $\tilde{\Omega}$ en Z a $Z^{\mathbb{C}}$.

Lo siguiente en la prescripción es determinar un subespacio h de $Z^{\mathbb{C}}$ tal que:

1. En h la operación bilineal (1.25) define un producto interno $(h_1, h_2)_h = -i\tilde{\Omega}(\bar{h}_1, h_2)$; por lo que -la completéz de- h es un espacio de Hilbert.
2. $Z^{\mathbb{C}} = h \oplus \bar{h}$, donde \bar{h} es el espacio complejo conjugado de h .
3. $\bar{h} = h^{\perp}$ donde h^{\perp} es el espacio ortogonal a h respecto al producto (1.25).

Una vez definido h , se considera el mapeo lineal, real y biyectivo $K : Z \rightarrow h$, $Ky = y^+$ donde y^+ es la proyección ortogonal de y respecto a (1.25) en h . Un cálculo directo muestra que

$$Im(Ky_1, Ky_2)_h = -Re\tilde{\Omega}(\overline{Ky_1}, Ky_2) \quad (1.26)$$

$$= -\frac{1}{2}\tilde{\Omega}(\overline{Ky_1}, Ky_2) - \frac{1}{2}\tilde{\Omega}(Ky_1, \overline{Ky_2}) \quad (1.27)$$

$$= -\frac{1}{2}\tilde{\Omega}(y_1, y_2). \quad (1.28)$$

El espacio de Hilbert de n osciladores desacoplados es $\mathcal{H} = \mathcal{F}_s(h)$, es decir, el espacio de Fock simétrico asociado a h (el Hilbert de un oscilador). De manera precisa, $\mathcal{F}_s(h) = \bigoplus_k (\bigotimes_s^k h)$, donde $\bigotimes_s^k h$ es el producto tensorial simétrico ($k = 0, \dots, n$); i.e., si $\alpha \in \bigotimes_s^k h$, entonces

$$\alpha : \underbrace{h^* \times h^* \times \dots \times h^*}_k \rightarrow \mathbb{C},$$

donde h^* es el espacio dual de h , α es k -lineal, simétrica y cumple que si $\{E_{mj}\}$ es una base de h_m^* entonces $\sum_k |\alpha(E_{1j_1}, \dots, E_{ni_n})|^2$ converge, adicionalmente se define $\bigotimes^0 h = \mathbb{C}$.

Un elemento $\Psi \in \mathcal{F}_s(h)$ es representado por

$$\Psi = (\psi, \psi^{a_1}, \dots, \psi^{a_1 \dots a_n}, \dots).$$

El operador de aniquilación $\hat{A}(\bar{\xi}_a) : \mathcal{F}_s(h) \rightarrow \mathcal{F}_s(h)$ está definido como sigue

$$\hat{A}(\bar{\xi}_a)\Psi = (\bar{\xi}_a \psi^a, \sqrt{2} \bar{\xi}_a \psi^{a_1 a_2}, \dots, \sqrt{n} \bar{\xi}_a \psi^{a_1 \dots a_n}, \dots) \quad (1.29)$$

Por el Teorema de Riesz, se puede identificar cada elemento de \bar{h} con h^* y de h con \bar{h}^* , de ahí que se abuse de la notación en la definición del operador de aniquilación y se utilice $\bar{\xi}_a$ para denotar al elemento de h^* asociado a $\bar{\xi}_a \in \bar{h}$. El operador de creación $\hat{C}(\xi^a) : \mathcal{F}_s(h) \rightarrow \mathcal{F}_s(h)$ asociado a ξ^a está definido por

$$\hat{C}(\xi^a)\Psi = (0, \psi \xi^{a_1}, \sqrt{2} \xi^{(a_1} \psi^{a_2)}, \dots, \sqrt{n} \xi^{(a_1} \psi^{a_2 \dots a_n)}, \dots) \quad (1.30)$$

Para las observables fundamentales $\tilde{\Omega}(Y, \cdot)$, $Y \in Z$, el operador cuántico correspondiente en la representación de Heisenberg es

$$\hat{\tilde{\Omega}}_H(Y, \cdot) = i\hat{A}(\overline{KY}_t) - i\hat{C}(KY_t), \quad (1.31)$$

donde Y_t es la solución cuyos datos iniciales a tiempo t coinciden con los datos iniciales de Y al tiempo inicial de referencia.

De las definiciones para los operadores de creación y aniquilación se sigue que el conmutador entre éstos es $[\hat{A}(\bar{\xi}_a), \hat{C}(\eta^a)] = \bar{\xi}_a \eta^a \hat{I}$. De esta relación es sencillo verificar que el conmutador entre las observables básicas es

$$[\hat{\tilde{\Omega}}(Y_1, \cdot), \hat{\tilde{\Omega}}(Y_2, \cdot)] = -i\tilde{\Omega}(Y_1, Y_2)\hat{I}, \quad (1.32)$$

que no es otra cosa que la condición de cuantización de Dirac.

Es importante notar que las condiciones que definen el subespacio h no son suficientemente fuertes para definir un único subespacio. Dicha libertad en la elección puede caracterizarse mediante la elección de un producto interno real μ . Veamos:

Puesto que $(KY_1, KY_2)_h = -i\tilde{\Omega}(\overline{KY_1}, KY_2)$ implica que $Re(KY_1, KY_2)_h = Im\tilde{\Omega}(\overline{KY_1}, KY_2)$, y $Im\tilde{\Omega}(\overline{KY_1}, KY_2)$ define un producto en Z ; i.e.,

$$\mu(Y_1, Y_2) := Re(KY_1, KY_2)_h = Im\tilde{\Omega}(\overline{KY_1}, KY_2) \quad (1.33)$$

es un producto interno en el espacio real Z . Entonces

$$(KY_1, KY_2)_h = \mu(Y_1, Y_2) - \frac{i}{2}\tilde{\Omega}(Y_1, Y_2); \quad (1.34)$$

es decir,

$$\mu(Y_1, Y_2) = (KY_1, KY_2)_h + \frac{i}{2}\tilde{\Omega}(Y_1, Y_2). \quad (1.35)$$

Así, un subespacio h define un producto μ en Z . Para el inverso (i.e., que un producto μ en Z defina un subespacio h con las propiedades anteriormente especificadas) puede mostrarse que un producto interno en Z que satisfaga

$$\mu(Y_1, Y_1) = \frac{1}{4} \max_{Y_2 \neq 0} \frac{[\tilde{\Omega}(Y_1, Y_2)]^2}{\mu(Y_2, Y_2)}, \quad (1.36)$$

define un h con las propiedades especificadas arriba [la condición (1.36) no especifica a μ en forma única; es decir, hay toda una familia de productos internos diferentes que cumplen con la condición (1.36) y dan lugar a diferentes subespacios h]. Podemos decir que la libertad (ambigüedad) en la elección de h puede caracterizarse por la libertad en la elección de producto interno real μ en Z . Dos productos μ y μ' diferentes [pero que satisfagan (1.36)], darán lugar a subespacios h y h' distintos. Sin embargo, como se trata de un sistema finito que cumple con las hipótesis del teorema de Stone-von Neumann, las teorías cuánticas a la Fock $\mathcal{F}(h)$ y $\mathcal{F}(h')$ son unitariamente equivalentes.

Con esto concluimos la presentación de la teoría cuántica para el sistema lineal de n osciladores desacoplados en forma general. A pesar de lo aparentemente complicado de ésta formulación, el teorema de Stone-von Neumann asegura la equivalencia unitaria con cualquier otra representación (que cumpla las hipótesis del teorema, claro está) en particular, con la estándar presentada al comienzo de este apartado. Debe enfatizarse que se ha presentado esta representación menos familiar porque, como se ha mencionado, su generalización a teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo es natural.

Capítulo 2

Sistemas de Campo

Los campos son sistemas físicos con un número infinito de grados de libertad. Mientras que los sistemas finitos son descritos por coordenadas generalizadas (q_1, q_2, \dots, q_n) , los campos son descritos por funciones del espacio-tiempo, $F(x)$. En esta sección introduciremos el campo más simple de todos; a saber, el campo escalar o de Klein-Gordon. Trataremos el caso de campo real masivo de Klein-Gordon propagándose en un fondo globalmente hiperbólico¹ y delinearemos la cuantización del sistema. La bibliografía básica para este capítulo es² [1, 2].

2.1. Campo real de Klein-Gordon

El campo clásico de Klein-Gordon (o escalar) es un campo relativista que, en el caso plano (i.e., cuando se propaga en el fondo de Minkowski), equivale a la primera cuantización de una partícula relativista libre, sin espín, que cumple el principio de correspondencia [6]. En espacios con secciones de Cauchy compactas (o con condiciones de periodicidad) el campo escalar puede entenderse como el modelo físico de un número infinito (pero numerable) de osciladores armónicos desacoplados.

¹Se dice que una subvariedad tipo espacio Σ del espacio-tiempo M es una superficie de Cauchy si el dominio de dependencia de Σ es igual a M . Un espacio-tiempo globalmente hiperbólico M es aquel que admite una superficie de Cauchy Σ . En ese caso, M tiene topología $\Sigma \times \mathbb{R}$ (la superficie de Cauchy es la componente espacial de M) y puede foliarse por una familia uniparamétrica de superficies de Cauchy Σ_t ; es decir, existe una coordenada temporal t en M tal que las superficies de t constante son una superficie de Cauchy.

²Para un estudio más general de la cuantización del campo escalar en fondos curvos puede verse, además de [1], el artículo [3].

Denotemos por ϕ al campo escalar propagándose en un espacio-tiempo globalmente hiperbólico ($M \simeq \Sigma \times \mathbb{R}, g_{ab}$). La hiperbolicidad global permite foliar al espacio-tiempo con superficies de Cauchy Σ_t , a lo largo del campo vectorial tipo tiempo $t^a = Nn^a + N^a$, donde n^a y N^a son los campos vectoriales normal y tangencial a Σ_t , respectivamente, y N es una función que depende sólo de la coordenada temporal t ; t^a es tal que $t^a \nabla_a t = 1$. A N^a se le conoce como el vector de desplazamiento, mientras que a N se le llama función de lapso. La acción del campo está dada por

$$S = \int L dt, \quad (2.1)$$

donde el Lagrangiano L es

$$L = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} [(n^a \nabla_a \phi)^2 - h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - m^2 \phi^2] N \sqrt{h} d^3x \quad (2.2)$$

con h_{ab} la métrica inducida en Σ_t y \sqrt{h} el determinante de dicha métrica. Variando la acción e imponiendo que $\delta S = 0$, se obtiene la ecuación que dicta la dinámica para el campo escalar ϕ ,

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi - m^2 \phi = 0, \quad (2.3)$$

y que se conoce como la ecuación de Klein-Gordon. El espacio fase covariante Z es el espacio de soluciones suaves a la ecuación (2.3), equipado con la estructura simpléctica

$$\tilde{\Omega}(\phi_1, \phi_2) = \int_{\Sigma_t} (\phi_2 n^a \nabla_a \phi_1 - \phi_1 n^a \nabla_a \phi_2) \sqrt{h} d^3x. \quad (2.4)$$

Por otro lado, el espacio fase canónico Γ es el espacio de datos iniciales de ϕ en Σ_t . Es decir, Γ consta de las parejas (φ, π) , donde la configuración del campo φ y el momento canónicamente conjugado π están dados por

$$\varphi = \phi|_{\Sigma_t} \quad (2.5)$$

$$\pi = \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}} = (n^a \nabla_a \phi) \sqrt{h}|_{\Sigma_t}. \quad (2.6)$$

El espacio fase Γ está equipado con la estructura simpléctica canónica

$$\Omega([\varphi_1, \pi_1], [\varphi_2, \pi_2]) = \int_{\Sigma_t} (\varphi_2 \pi_1 - \varphi_1 \pi_2) d^3x, \quad (2.7)$$

que no es otra cosa que la generalización de (1.10). El paréntesis de Poisson en Γ para las observables fundamentales es

$$\{\Omega([\varphi_1, \pi_1], \cdot), \Omega([\varphi_2, \pi_2], \cdot)\} = -\Omega([\varphi_1, \pi_1], [\varphi_2, \pi_2]). \quad (2.8)$$

Dada una superficie de Cauchy Σ_t , las relaciones (2.5)-(2.6) establecen un isomorfismo entre el espacio fase canónico Γ y el espacio fase covariante Z . Es decir, a un punto en Γ [i.e., un par (φ, π)] le corresponde una única solución $\phi \in Z$ y viceversa.

2.2. Cuantización

Vayamos ahora a la cuantización del sistema. La cuantización, como hemos dicho antes, consiste en construir un espacio de Hilbert donde se representen en forma hermítica a los operadores correspondientes a las observables básicas, y en el cuál el álgebra dada por el paréntesis de Poisson sea representada por un álgebra de conmutadores (relaciones de conmutación canónicas, RCC) según la condición de cuantización de Dirac.

Para la construcción del Hilbert, seguimos el procedimiento expuesto al final del Capítulo 1. De manera que debemos especificar primero al espacio h ; es decir, un subespacio de $Z^{\mathbb{C}}$ con las características estipuladas en la subsección 1.2.1. Para construir h se introduce un mapeo lineal $J : Z \rightarrow Z$, tal que $J^2 = -I$ y $J^\dagger = -J$, con la exigencia de que $\mu(\phi_1, \phi_2) := \tilde{\Omega}(J\phi_1, \phi_2)$, $\phi_1, \phi_2 \in Z$, sea un producto interno en Z (condición de compatibilidad de J con Ω). Al mapeo J se le conoce como *estructura compleja* y es la estructura matemática fundamental en la construcción de h (y, por tanto, del espacio de Fock de la teoría cuántica). Es importante advertir que en general hay una infinidad de estructuras complejas compatibles con Ω ; es decir, las propiedades del mapeo J y la condición de que μ sea un producto interior en Z no definen una única J . Como veremos más adelante, la libertad en la elección de J es justamente la ambigüedad en la cuantización (i.e., J codifica la ambigüedad en la cuantización -la ambigüedad en la representación de las RCC-).

Entre la infinidad de estructuras complejas J compatibles con Ω , elijamos una. Se complexifica Z , $Z^{\mathbb{C}}$, y se extiende por linealidad compleja a Ω y J . El producto extendido en $Z^{\mathbb{C}}$ es $\mu_e(\Phi_1, \Phi_2) := \tilde{\Omega}(J\overline{\Phi_1}, \Phi_2)$. La estructura compleja define subespacios

$$\Phi^+ = \frac{1}{2}(\phi - iJ\phi), \quad (2.9)$$

$$\Phi^- = \frac{1}{2}(\phi + iJ\phi), \quad (2.10)$$

de $Z^{\mathbb{C}}$, donde $\phi \in Z$, que llamaremos de frecuencias positivas y negativas, respectivamente. Nótese que dichos subespacios son espacios propios de J con valores propios $\pm i$; i.e., $J\Phi^{\pm} = \pm i\Phi^{\pm}$. Si se consideran bases ortonormales respecto a μ_e para los subespacios de frecuencias positivas y negativas, evidentemente se obtiene que los subespacios $\{\Phi^+\}$ y $\{\Phi^-\}$ son ortogonales respecto a μ_e ; además, $Z^{\mathbb{C}} = \{\Phi^+\} \oplus \{\Phi^-\}$. El espacio h asociado a J es el espacio que resulta de completar respecto a μ_e el espacio de frecuencias positivas $\{\Phi^+\}$ (i.e., cumple con todos los requerimientos especificados en la subsección 1.2.1).

El espacio de Hilbert para la teoría cuántica es el espacio de Fock simétrico asociado a h ; es decir, $\mathcal{H} = \mathcal{F}_s(h)$, que se obtiene exactamente como en la subsección 1.2.1, considerando³ $n \in \mathbb{N}$. Como h depende de la J que se elija, \mathcal{H} también; en otras palabras, el espacio de Hilbert será en general diferente para distintas elecciones de estructura compleja.

Una vez que se cuenta con el espacio de Fock, los operadores de creación y aniquilación quedan definidos (y, por supuesto, también son dependientes de la J que se haya elegido) y están dados en forma completamente análoga al caso de dimensión finita; para cada $\phi \in Z$, el operador básico (fundamental) $\widehat{\Omega}(\phi, \cdot)$ en $\mathcal{F}_s(h)$ es

$$\widehat{\Omega}(\phi, \cdot) = i\hat{A}(\overline{K\phi}) - i\hat{C}(K\phi), \quad (2.11)$$

donde $K : Z \rightarrow h$ es la proyección ortogonal respecto a μ_e de la solución $Z \ni \phi = \Phi^+ + \Phi^-$. El operador (2.11) está expresado en el cuadro de Shrödinger, en el cuadro de Heisenberg dicho operador es

$$\widehat{\Omega}_t(\phi, \cdot) = i\hat{A}(\overline{K\phi_t}) - i\hat{C}(K\phi_t) \quad (2.12)$$

con ϕ_t la solución cuyos datos iniciales a tiempo t (i.e., respecto a la superficie de Cauchy Σ_t) son iguales a los de ϕ al tiempo de referencia inicial (sobre la superficie de Cauchy Σ_{t_i}).

Es importante enfatizar la dependencia en J de la construcción. Es decir, hay tantas representaciones de las RCC como estructuras complejas compatibles con Ω puedan especificarse, puesto que de estas últimas hay una infinidad, entonces se tendrá una infinidad de representaciones de las RCC. Dadas cualesquiera dos estructuras complejas (compatibles con Ω) diferentes, J y J' , se tendrán representaciones de Fock distintas, $(\mathcal{F}_s(h_J), \hat{A}_J, \hat{C}_J)$ y $(\mathcal{F}_s(h_{J'}), \hat{A}_{J'}, \hat{C}_{J'})$, y éstas pueden o no estar relacionadas por un operador unitario. En general, y aunque haya una infinidad de representaciones

³Implícitamente se está asumiendo aquí que, o bien las superficies de Cauchy son compactas, o bien que se tienen condiciones periódicas.

de las RCC unitariamente equivalentes, también se tendrá una infinidad de representaciones de las RCC no unitariamente equivalentes; ésta es la ambigüedad en la cuantización de un campo escalar y es en este preciso sentido en que la estructura compleja codifica la ambigüedad. La elección de una teoría predilecta se traduce en el problema de elegir una J predilecta. En el caso de campo escalar propagándose en Minkowski, el requerimiento extra de invariancia de Poincaré permite seleccionar una única estructura compleja y, por consiguiente, una representación (esto significa que hay una única -salvo equivalencia unitaria- representación de las RCC invariante de Poincaré). Sin embargo, para espacios tiempos más generales, donde no hay invariancia de Poincaré, es necesario plantear criterios físicos que permitan seleccionar una estructura compleja predilecta, pues las simetrías pueden no ser suficientes para ello. Un criterio natural es imponer la implementabilidad unitaria de la dinámica; en espacio-tiempo no estacionario no todas las representaciones implementan unitariamente la dinámica, de manera que éste criterio descartaría tales representaciones y consideraría como físicamente viables sólo aquellas representaciones donde la dinámica sea unitariamente implementable (y, por tanto, se conserve la probabilidad y exista un cuadro de Schrödinger). En concreto, para seleccionar estructuras complejas predilectas se propone imponer, además de la invariancia ante las simetrías (si las hay), el criterio extra de implementabilidad unitaria. En lo que sigue discutiremos la implementabilidad unitaria y el criterio propuesto en espacios-tiempos no estacionarios muy específicos, pero antes conviene revisar bajo que condiciones -necesarias y suficientes- una transformación simpléctica es implementable unitariamente (la evolución es una transformación simpléctica).

Capítulo 3

Implementabilidad Unitaria

En este capítulo se especificarán las condiciones bajo las cuales dos teorías cuánticas del campo escalar, construidas a partir de diferentes estructuras complejas, son unitariamente equivalentes. Veremos cuando una transformación simpléctica es unitariamente implementable en el espacio de Hilbert (en este caso, en el espacio de Fock del campo escalar) y se analizará, en particular, la condición de implementabilidad unitaria de la dinámica. La bibliografía básica para este capítulo es [1], [7] y [8].

3.1. Equivalencia Unitaria

En el capítulo anterior se puntualizó que la ambigüedad en la cuantización está codificada en la estructura compleja. Es natural preguntarse entonces cómo caracterizar la equivalencia o no de las teorías a través de la estructura compleja J , que equivale a una caracterización a través del producto interior real μ .

Sean μ_1 y μ_2 dos productos en Z asociados a estructuras complejas J_1 y J_2 compatibles con Ω . Se dice que μ_1 y μ_2 definen normas equivalentes en Z si para toda $\phi \in Z$ existen constantes positivas M, N tales que:

$$M\mu_1(\phi, \phi) \leq \mu_2(\phi, \phi) \leq N\mu_1(\phi, \phi). \quad (3.1)$$

Si la condición (3.1) no se satisface, puede mostrarse que asumir una relación unitaria entre los espacios de Fock correspondientes, $\mathcal{F}(h_1)$ y $\mathcal{F}(h_2)$, lleva a contradicciones. En otras palabras, la condición de normas equivalentes es una condición necesaria para la existencia de una relación unitaria entre $\mathcal{F}(h_1)$ y $\mathcal{F}(h_2)$. Por otro lado, si μ_1 y μ_2 satisfacen (3.1), entonces toda sucesión será de Cauchy en μ_1 si y sólo si lo es en μ_2 . Así, los espacios h_1 y

h_2 serán subespacios del mismo espacio $Z_\mu^{\mathbb{C}}$ (que es $Z^{\mathbb{C}}$ completado respecto a μ_{e_1} o μ_{e_2} , indistintamente).

Como (3.1) es necesaria para la equivalencia unitaria entre representaciones, pero no suficiente, deben establecerse más condiciones. A continuación nos centraremos en especificar dichas condiciones; comencemos por suponer que la condición (3.1) se satisface y, por tanto, que h_1 y h_2 son subespacios de $Z_\mu^{\mathbb{C}}$. Sea K_i la proyección ortogonal $K_i : Z_\mu^{\mathbb{C}} \rightarrow h_i$, y \overline{K}_i la proyección ortogonal $\overline{K}_i : Z_\mu^{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{h}_i$ respecto a $\mu_{e_i}(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{h_i}$, $i = 1, 2$. Definimos $\alpha_1^2 := K_{1|h_2}$ y $\beta_1^2 := \overline{K}_{1|h_2}$, y de forma completamente análoga a α_2^1 y β_2^1 . Dados cualesquiera $\chi, \zeta \in h_2$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\chi, \zeta)_{h_2} &= -i\tilde{\Omega}(\overline{\chi}, \zeta) \\ &= -i\tilde{\Omega}(K_1\chi + \overline{K}_1\chi, K_1\zeta + \overline{K}_1\zeta) \\ &= (\alpha_1^2\chi, \alpha_1^2\zeta)_{h_1} - (\beta_1^2\chi, \beta_1^2\zeta)_{h_1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde en el segundo renglón se utilizó la identidad $K_1 + \overline{K}_1 = I$, mientras que para obtener el tercer renglón se utilizó la ortogonalidad entre los subespacios h_1 y \overline{h}_1 respecto a $\mu_{e_1}(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{h_1}$. Así, se sigue que

$$\alpha_1^{2\dagger}\alpha_1^2 - \beta_1^{2\dagger}\beta_1^2 = I. \quad (3.3)$$

Realizando cálculos muy similares se obtiene que

$$\begin{aligned} \alpha_1^{2\dagger}\overline{\beta}_1^2 &= \beta_1^{2\dagger}\overline{\alpha}_1^2, & \alpha_1^{2\dagger} &= \alpha_2^1, \\ \alpha_2^{1\dagger}\alpha_1^2 - \beta_2^{1\dagger}\beta_1^2 &= I, & \alpha_2^{1\dagger}\overline{\beta}_2^1 &= \beta_2^{1\dagger}\overline{\alpha}_2^1, & \overline{\beta}_1^{2\dagger} &= -\beta_2^1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los mapeos $\{\alpha_j^i, \beta_j^i \mid i, j = 1, 2; i \neq j\}$ con las propiedades (3.3)-(3.4) constituyen lo que se conoce como *transformación de Bogoliubov*.

El siguiente teorema establece las condiciones, *necesarias y suficientes*, para que dos teorías sean unitariamente equivalentes¹.

Teorema 2 *Dos teorías cuánticas definidas por las estructuras complejas J_1 y J_2 son unitariamente equivalentes si (a) los productos μ_1 y μ_2 asociados a J_1 y J_2 satisfacen (3.1) y (b) el mapeo antilíneal β_2^1 (equivalentemente β_1^2) cumple $\text{Tr}(\beta_2^{1\dagger}\beta_2^1) < \infty$ (equivalentemente $\text{Tr}(\beta_1^{2\dagger}\beta_1^2) < \infty$).*

Este teorema permite establecer también cuándo una transformación simpléctica es unitariamente implementable. Para esto, obsérvese que, dada una J , una transformación simpléctica g induce una estructura compleja

¹Para una prueba formal del teorema ver la sección 4.4 de [1].

$J' = gJg^{-1}$. La transformación simpléctica g será unitariamente implementable si J y J' dan lugar a representaciones de las RCC unitariamente equivalentes (i.e., si la parte antilineal de la transformación de Bogoliubov es Hilbert Schmidt -respecto a h o h' , indistintamente-).

Considérese un campo escalar en un fondo con superficies de Cauchy compactas, dada una estructura compleja J_a , el campo se separa en términos de las frecuencias positivas y negativas asociadas a dicha estructura compleja:

$$\phi(x) = \sum_k a_k f_k(x) + a_k^* f_k^*(x), \quad J_a f_k = i f_k, \quad J_a f_k^* = -i f_k^*,$$

donde (a_k, a_k^*) son coeficientes de Fourier y (f_k, f_k^*) son una base de soluciones a la ecuación de Klein-Gordon, que es ortonormal respecto al producto $\Omega(J_a[\cdot], \cdot)$. Dada otra estructura compleja, J_b , tendremos una descomposición distinta,

$$\phi(x) = \sum_k b_k g_k(x) + b_k^* g_k^*(x), \quad J_b g_k = i g_k, \quad J_b g_k^* = -i g_k^*,$$

en términos de los coeficientes de Fourier (b_k, b_k^*) y la base de soluciones (g_k, g_k^*) ortonormal respecto al producto $\Omega(J_b[\cdot], \cdot)$.

Supongamos que las bases $\{f_k\}$ y $\{g_k\}$ (que dan lugar a h_a y h_b , respectivamente) se relacionan por una transformación de Bogoliubov de la forma

$$g_k = \alpha_k f_k + \beta_{-k}^* f_{-k}^*, \quad |\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1.$$

Nótese que, entonces, las variables tipo aniquilación y creación asociadas a las diferentes estructuras complejas se relacionan por

$$a_k = \alpha_k b_k + \beta_k b_{-k}^*$$

i.e., en la teoría cuántica habrá una mezcla de operadores de creación y aniquilación al pasar de una descripción a la otra. Evidentemente, los vacíos $|0\rangle_a$ y $|0\rangle_b$ no coinciden. La condición sobre la traza de la parte antilineal de la transformación de Bogoliubov es

$$\text{Tr}(\beta^\dagger \beta) = \sum_k (\beta_k f_k, \beta_k f_k)_{h_a} = \sum_k |\beta_k|^2 < \infty.$$

Es decir, las representaciones de las RCC construidas a partir de J_a y J_b serán unitariamente equivalentes si $\{\beta_k\}$ es de cuadrado sumable. Nótese que

$$J_a g_k = i\alpha_k f_k - i\beta_{-k}^* f_{-k}^*, \quad J_b g_k = i\alpha_k f_k + i\beta_{-k}^* f_{-k}^*$$

de tal manera que

$$(J_b - J_a)g_{-k} = 2i\beta_k^* f_k^*.$$

De manera que la condición de equivalencia unitaria es, valga la redundancia, equivalente a pedir que $\mathcal{J} := (J_b - J_a)$ sea Hilbert-Schmidt, pues

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}^\dagger \mathcal{J}) = \sum_k (\mathcal{J}g_k, \mathcal{J}g_k)_{h_b} = 4 \sum_k |\beta_k|^2 < \infty.$$

Siempre que $\mathcal{J} := (J_b - J_a)$ sea Hilbert-Schmidt diremos que J_a y J_b son equivalentes (i.e., dan lugar a teorías unitariamente equivalentes).

3.2. Dinámica del campo escalar.

La dinámica de un campo escalar en un fondo globalmente hiperbólico es dictada por la ecuación de Klein-Gordon (2.3). En el espacio fase canónico, los estados evolucionan a lo largo de las curvas integrales del campo vectorial generado por el Hamiltoniano del sistema; el simplectomorfismo generado por el Hamiltoniano es el siguiente:

1. Consideremos el dato inicial $(\varphi, \pi)_{t_0} \in \Gamma$ en la superficie de Cauchy $t = t_0$. Dada la hiperbolicidad global, existe una única solución $\phi = I_{t_0}(\varphi, \pi)_{t_0}$ asociada a dicho dato inicial ($I_{t_0} : \Gamma \rightarrow Z$ es el isomorfismo entre el espacio fase canónico y covariante asociado a la superficie de Cauchy $t = t_0$).
2. Se determinan los datos de Cauchy $(\varphi, \pi)_{t_f}$ para la solución ϕ en la superficie de Cauchy $t = t_f$, donde $t_f > t_0$. La relación entre ϕ y $(\varphi, \pi)_{t_f}$ es a través del isomorfismo $I_{t_f} : \Gamma \rightarrow Z$ asociado a la superficie de Cauchy $t = t_f$; $\phi = I_{t_f}(\varphi, \pi)_{t_f}$.
3. El mapeo $t_{(t_f, t_0)} := I_{t_f}^{-1} \circ I_{t_0} : \Gamma \rightarrow \Gamma$, $(\varphi, \pi)_{t_0} \mapsto (\varphi, \pi)_{t_f}$, es la transformación finita de evolución temporal en el espacio fase canónico. Es una transformación canónica (i.e., un simplectomorfismo) y el conjunto de transformaciones finitas con parámetro t , $\{t_{(t, t_0)}\}$, conforman un grupo que se denotará por $SP_t(\Gamma)$.

En el espacio fase covariante la evolución corresponde al mapeo

$$T_{(t_f, t_0)} = I_{t_0} \circ t_{(t_f, t_0)} \circ I_{t_0}^{-1} = I_{t_0} \circ I_{t_f}^{-1} : Z \rightarrow Z.$$

Si $\tilde{\phi}$ es la evolución de ϕ (i.e., $\tilde{\phi} = T_{(t_f, t_0)}\phi$), nótese que $I_{t_0}^{-1}\tilde{\phi} = I_{t_f}^{-1}\phi$; es decir, el dato de Cauchy *evolucionado* a $t = t_f$ de la *solución inicial*

ϕ es igual al dato de Cauchy *inicial* a $t = t_0$ de la *solución evolucionada* $\tilde{\phi}$. Evidentemente, el conjunto de transformaciones canónicas $\{T_{(t,t_0)}\}$ en el espacio fase covariante conforman un grupo, al que denotaremos por $SP_t(Z)$.

Mientras que para teorías lineales en espacio fase finito la evolución siempre es unitariamente implementable, en el caso de campos, concretamente en el caso de campo escalar, las transformaciones simplécticas $\{T_{(t,t_0)}\}$ no siempre son unitariamente implementables; es decir, asociado a $T_{(t,t_0)}$ no siempre hay un operador unitario $\mathcal{U}_{(t,t_0)}$ en el espacio de Fock. Cabe señalar que la representación de Fock, como se vió con anterioridad, es la representación natural construida a partir de Z ; por otro lado, la representación natural asociada a Γ es la de Schrödinger, en tal caso la no implementabilidad unitaria significaría que no siempre hay un operador unitario $U_{(t,t_0)}$ asociado a $T_{(t,t_0)}$ en el espacio de Hilbert de funcionales de cuadrado integrable (sobre el espacio de configuración cuántico con una cierta medida gaussiana $d\mu$).

De acuerdo a la discusión de la sección 3.1, tenemos entonces que

Afirmación 1 *Dada una representación construida a partir de una cierta J , la evolución temporal será unitariamente implementable (en esa representación) si y sólo si las estructuras complejas J y la inducida por evolución, $J_T := TJT^{-1}$, son equivalentes $\forall T \in SP_t(Z)$; i.e., $(J - J_T)$ es Hilbert-Schmidt para toda $T \in SP_t(Z)$ en el Hilbert de una partícula h asociado a J (o, equivalentemente, si J y J_T generan teorías cuánticas unitariamente equivalentes para todo $T \in SP_t(Z)$).*

Capítulo 4

Evolución y unicidad en fondos no estacionarios

En este capítulo analizaremos la implementabilidad de la dinámica de un campo de Klein-Gordon propagándose en dos fondos cosmológicos concretos y veremos que el imponer el criterio de implementabilidad unitaria de la dinámica permite seleccionar *una* representación predilecta (salvo equivalencia unitaria); i.e., el criterio de implementabilidad unitaria de la dinámica es un criterio útil para eliminar la ambigüedad en la representación de las RCC. El primer caso que consideraremos será el de un campo escalar no masivo propagándose en un fondo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) con factor de escala correspondiente a radiación. En el segundo caso, se analizará un campo de Klein-Gordon masivo y axial propagándose en un fondo tipo Bianchi I. En ambos casos consideraremos superficies de Cauchy compactas T^3 (i.e., en ambos casos la topología del espacio-tiempo se considerará como $\mathbb{R}^+ \times T^3$).

4.1. Campo escalar en un fondo FRW

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) corresponde al modelo de Universo no estacionario, espacialmente homogéneo e isótropo. La homogeneidad e isotropía obedecen al llamado Principio Cosmológico, que establece que a gran escala el Universo es esencialmente homogéneo e isótropo. De particular importancia son los hechos observacionales de la radiación cósmica del fondo de microondas [9] y el corrimiento al rojo cosmológico, pues constituyen la evidencia más contundente al día de hoy para sostener el modelo de universo esencialmente homogéneo e isótropo pero no esta-

cionario¹.

Para Universo plano con topología $\mathbb{R}^+ \times T^3$ la métrica de FRW está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + a^2(t)dy^2 + a^2(t)dz^2 \quad (4.1)$$

donde $x, y, z \in [0, 2\pi]$ son las coordenadas espaciales, $t \in \mathbb{R}^+$ es la coordenada temporal y la función $a(t)$ es el factor de escala. El campo escalar no masivo en el fondo con métrica (4.1) obedece la ecuación de movimiento siguiente

$$\phi'' + 3\frac{a'}{a}\phi' - \frac{1}{a^2}\Delta\phi = 0 \quad (4.2)$$

donde prima “ ’ ” denota derivada respecto a t y Δ es el operador de Laplace-Beltrami en la variedad Riemanniana T^3 con elemento de línea $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; i.e., $\Delta = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$. El factor de escala es $a(t) = Ct^{1/2}$ (C una constante), pues estamos considerando el caso plano con radiación.

En términos del tiempo conforme

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}, \quad (4.3)$$

(4.2) queda como

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \Delta\phi = 0, \quad (4.4)$$

donde el punto “ · ” denota derivada respecto al tiempo conforme η . Como se está tratando el caso en que el factor de escala es $a(t) = Ct^{1/2}$, entonces $a(\eta) = C^2\eta/2$ y por tanto $\dot{a}/a = 1/\eta$.

Utilizando separación de variables y el hecho de que la parte espacial del fondo es compacta, las soluciones pueden escribirse en términos de series de Fourier de la siguiente manera

$$\phi = \sum_{\vec{k}} b_{\vec{k}} f_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{k}}^* f_k^*(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (4.5)$$

donde $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ con $k_i \in \mathbb{Z}$, $k = |\vec{k}|$ y $f_k(\eta)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{f}_k + \frac{2}{\eta}\dot{f}_k + k^2 f_k = 0, \quad (4.6)$$

¹De hecho, observaciones del corrimiento al rojo de supernovas tipo Ia [10] parecen establecer que la expansión del Universo es, de hecho, acelerada.

cuya solución general es

$$f_k = A_k \frac{e^{-ik\eta}}{\eta} + B_k \frac{e^{ik\eta}}{\eta}. \quad (4.7)$$

Sustituyendo en (4.5) se obtiene que ϕ puede escribirse como

$$\phi = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \frac{1}{\eta} e^{-i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a_{\vec{k}}^* \frac{1}{\eta} e^{i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad (4.8)$$

donde $a_{\vec{k}} = b_{\vec{k}} A_k + b_{-\vec{k}}^* B_k^*$. Esta descomposición del campo tiene como espacios de frecuencias positivas y negativas a los espacios generados por

$$S^+ = \left\{ \frac{1}{\eta} e^{-i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right\}, \quad S^- = \left\{ \frac{1}{\eta} e^{i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right\}. \quad (4.9)$$

Veamos ahora la evolución del sistema entre η_0 y η ; $\tilde{\phi} = T_{(\eta, \eta_0)} \phi$. Recordemos que (sección 3.2) los datos de Cauchy de la solución ϕ en la superficie de Cauchy a $\eta = \text{cte}$ coinciden con los datos de Cauchy de la solución $\tilde{\phi}$ en la superficie de Cauchy η_0 . Así tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) = \phi|_{\eta} &= \tilde{\phi}|_{\eta_0} = \tilde{\varphi}(\eta_0) \\ \pi(\eta) = \sqrt{h(\eta)} \dot{\phi}|_{\eta} &= \sqrt{h(\eta_0)} \dot{\tilde{\phi}}|_{\eta_0} = \tilde{\pi}(\eta_0) \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $h(\eta) = a^6(\eta)$ es el determinante de la métrica espacial inducida en la hipersuperficie $\eta = \text{cte}$. Escribiendo

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \frac{1}{\eta} e^{-i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a_{\vec{k}}^* \frac{1}{\eta} e^{i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \\ \tilde{\phi} &= \sum_{\vec{k}} \tilde{a}_{\vec{k}} \frac{1}{\eta} e^{-i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \tilde{a}_{\vec{k}}^* \frac{1}{\eta} e^{i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \end{aligned}$$

las condiciones (4.10) permiten establecer² que

$$\tilde{a}_{\vec{k}} = \alpha_k(\eta, \eta_0) a_{\vec{k}} + \beta_k(\eta, \eta_0) a_{-\vec{k}}^* \quad (4.11)$$

donde

$$\alpha_k(\eta, \eta_0) = \frac{\eta^3 \dot{g}_k(\eta) g_k^*(\eta_0) - \eta_0^3 \dot{g}_k^*(\eta_0) g_k(\eta)}{\eta_0^3 \{ \dot{g}_k(\eta_0) g_k^*(\eta_0) - \dot{g}_k^*(\eta_0) g_k(\eta_0) \}} \quad (4.12)$$

$$\beta_k(\eta, \eta_0) = \frac{\eta^3 \dot{g}_k^*(\eta) g_k^*(\eta_0) - \eta_0^3 \dot{g}_k^*(\eta_0) g_k^*(\eta)}{\eta_0^3 \{ \dot{g}_k(\eta_0) g_k^*(\eta_0) - \dot{g}_k^*(\eta_0) g_k(\eta_0) \}} \quad (4.13)$$

²Usando la relación de ortogonalidad $\oint e^{i(\vec{n} - \vec{m}) \cdot \vec{x}} d^3 \vec{x} = (2\pi)^3 \delta_{\vec{n}, \vec{m}}$

con $g_k(\eta) := \frac{1}{\eta} e^{-ik\eta}$. La transformación (4.11) es de Bogoliubov, los coeficientes (4.12)-(4.13) satisfacen que $|\alpha_k(\eta, \eta_0)|^2 - |\beta_k(\eta, \eta_0)|^2 = 1$ para todo η, η_0 . Explícitamente, la parte antilineal de la transformación (i.e., β_k) es (para todo $k \neq 0$)

$$\beta_k(\eta, \eta_0) = \frac{i e^{ik(\eta+\eta_0)}}{2\eta\eta_0^2} \left[i(\eta^3 - \eta_0^3) - \frac{1}{k}(\eta^2 - \eta_0^2) \right]. \quad (4.14)$$

Evidentemente $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k(\eta, \eta_0)|^2 \rightarrow \infty$ siempre que $\eta \neq \eta_0$ (para $\eta = \eta_0$ claramente $\beta_k = 0$, pues η igual a η_0 implica que no hay evolución; por consiguiente es un caso irrelevante). Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k(\eta, \eta_0)|^2 \rightarrow \infty$, con mayor razón $\sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} |\beta_k(\eta, \eta_0)|^2$ lo hará (pues en este caso se cuenta además la degeneración del operador de Laplace-Beltrami). Esta última condición es la de implementabilidad unitaria, por consiguiente concluimos que la dinámica *no* es unitariamente implementable respecto a la J asociada a S^\pm .

4.2. Redefinición del sistema

La no implementabilidad unitaria de la dinámica ocurre, de hecho, para cualquier elección de estructura compleja. Sin embargo, bien puede pasar que con otra elección de variables se pueda conseguir una implementación unitaria de la dinámica. De manera más precisa, hay dos tipos de ambigüedad en la cuantización del sistema: (a) Una vez que las variables básicas del sistema han sido seleccionadas, la ambigüedad radica en la elección de estructura compleja. (b) La selección de las variables básicas es una ambigüedad en sí, pues aunque para dos conjuntos de variables básicas distintas el sistema es clásicamente equivalente (i.e., las diferentes descripciones clásicas están conectadas por una transformación canónica), las cuantizaciones que se construyen a partir de dichos conjuntos de variables básicas pueden no ser unitariamente equivalentes pues la transformación canónica no necesariamente tiene una contraparte unitaria a nivel cuántico. Así, puede aprovecharse este hecho para buscar nuevas variables básicas que sí permitan una cuantización en la cual la dinámica sea unitariamente implementable. A eso nos avocaremos en lo que resta de esta sección, veremos como a través de una transformación dependiente del tiempo conseguimos redefinir el sistema en unas nuevas variables cuya cuantización admite una implementación unitaria de la dinámica.

Consideremos la siguiente transformación canónica dependiente del tiempo

$$\varrho := a(\eta)\phi. \quad (4.15)$$

La nueva variable básica es ahora el campo ϱ . La ecuación de movimiento para ϱ se obtiene sustituyendo $\phi = \varrho/a$ en (4.4),

$$\ddot{\varrho} - \Delta\varrho + \Pi(\eta)\varrho = 0 \quad (4.16)$$

donde

$$\Pi(\eta) = -\frac{\ddot{a}(\eta)}{a(\eta)}. \quad (4.17)$$

En adelante consideraremos $a(\eta)$ genérico (i.e., no sólo limitado al caso de radiación). Adicionalmente puede considerarse también campo masivo, en cuyo caso $\Pi(\eta) = m^2 a^2 - (\ddot{a}/a)$. La ecuación (4.16) puede interpretarse como la de un campo escalar ϱ con masa efectiva dependiente del tiempo propagándose en un espacio-tiempo plano y estático

$$ds^2 = -d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

En este sentido, podemos decir que la transformación canónica dependiente del tiempo $\varrho := a(\eta)\phi$ lleva el sistema de campo escalar en fondo no estacionario a un sistema de campo escalar en fondo estático pero sujeto a un potencial dependiente del tiempo $V(\varrho) = \Pi \varrho^2/2$.

Recientemente se ha mostrado [11] que para un campo escalar con masa dependiente del tiempo genérica (salvo por ciertas condiciones de integrabilidad) propagándose en un fondo estático plano con secciones espaciales compactas existe *una* representación de las RCC que admite una implementabilidad unitaria de la dinámica. Más aún, en [11] se muestra que si J_a y J_b son estructuras complejas que permiten implementar la dinámica unitariamente, entonces ambas teorías cuánticas son unitariamente equivalentes; es decir, se mostró que hay *una* (salvo equivalencia unitaria) estructura compleja que permite implementar unitariamente la dinámica. Posteriormente se mostró que, de hecho, no hay otro conjunto de variables que admitan una implementabilidad unitaria de la dinámica [12] Así, la implementabilidad unitaria de la dinámica fija en este caso *una* teoría cuántica predilecta. Los resultados de [11, 12] son directamente aplicables al caso particular $\Pi(\eta)$, de manera que podemos garantizar que para el campo ϱ existe una representación de las RCC que admite una implementación unitaria de la dinámica y que ésta es, además, *única* (salvo equivalencia unitaria). De hecho, es sólo en la descripción ϱ que se tiene implementabilidad unitaria de la dinámica. El resultado que hemos utilizado podemos enunciarlo en forma general como sigue:

Afirmación 2 *Si un sistema de campo escalar propagándose en un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, con secciones espaciales compactas, puede escribirse vía una transformación canónica como el sistema de un campo escalar con masa dependiente del tiempo propagándose en un fondo estático, entonces en este último sistema existe una representación de las RCC que admite una implementación unitaria de la dinámica y sólo en esta reformulación del campo ocurre esto. Es decir, hay una estructura compleja y unas variables básicas predilectas, seleccionadas por las simetrías y el criterio extra de implementabilidad unitaria de la dinámica; la teoría cuántica de campo que implementa unitariamente la dinámica y las simetrías es única (salvo equivalencia unitaria).*

4.3. Campo escalar en un fondo Bianchi I

Ahora consideraremos un campo escalar masivo y axial propagándose en un fondo tipo Bianchi I,

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(dx^1)^2 + a_2^2(t)(dx^2)^2 + a_3^2(t)(dx^3)^2 \quad (4.18)$$

donde $x^i \in [0, 2\pi]$, $i = 1, 2, 3$ y $t \in \mathbb{R}^+$. Ahora hay tres factores de escala, $\{a_i | i = 1, 2, 3\}$, en general distintos y, por consiguiente, no hay isotropía. El campo escalar ϕ tiene masa m y depende solamente de t y una de las coordenadas espaciales, digamos x^p con p igual a 1, 2 o 3. Si realizamos la transformación $\eta = \int dt/a_p$, entonces el elemento de línea puede escribirse como

$$ds^2 = a_p^2(\eta) [-d\eta^2 + (dx^p)^2] + \sum_{i \neq p} a_i^2(\eta)(dx^i)^2. \quad (4.19)$$

El campo escalar axial $\phi(\eta, x^p)$ satisface la ecuación

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \sum_{j \neq p} \frac{\dot{a}_j}{a_j} \dot{\phi} + (ma_p)^2 \phi = 0. \quad (4.20)$$

donde “ \cdot ” y “ $'$ ” denotan derivada respecto a η y x^p , respectivamente. Con la idea de explotar el resultado expuesto al final de la anterior sección, trataremos de llevar al sistema a uno de un campo escalar con masa dependiente del tiempo propagándose en un fondo estático; para ello consideremos el rescalamiento $\varrho = \phi/h$, donde h es una función que depende sólo de η . Introduciendo este rescalamiento en (4.20) se obtiene que

$$\ddot{\varrho} - \varrho'' + \left(2\frac{\dot{h}}{h} + \sum_{j \neq p} \frac{\dot{a}_j}{a_j} \right) \dot{\varrho} + \frac{1}{h} \left(\ddot{h} + \sum_{j \neq p} \frac{\dot{a}_j}{a_j} \dot{h} + (ma_p)^2 h \right) \varrho = 0. \quad (4.21)$$

Si elegimos el factor h como

$$h(\eta) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int \sum_{j \neq p} \frac{\dot{a}_j}{a_j}\right), \quad (4.22)$$

entonces tendremos que (4.21) es simplemente

$$\ddot{\varrho} - \varrho'' + \Pi(\eta)\varrho = 0, \quad (4.23)$$

$$\Pi(\eta) = \frac{\ddot{h}}{h} - \frac{1}{2} \left(\sum_{j \neq p} \frac{\dot{a}_j}{a_j} \right)^2 + (ma_p)^2. \quad (4.24)$$

Es decir, la transformación canónica dependiente del tiempo $\varrho = \phi/h$, con h dada por (4.22), nos permite escribir al sistema de campo escalar masivo y axial en un fondo tipo Bianchi I, como el de un campo escalar axial propagándose en un fondo estático con masa efectiva dependiente del tiempo, como muestran (4.23)-(4.24). Debido a la Afirmación 2 enunciada al final de la sección anterior, se tiene entonces que en la descripción ϱ (y sólo en ésta) existe *una* representación de las RCC que admite una implementación unitaria de la dinámica.

Para campo no axial la situación es más complicada y se requiere de un análisis más elaborado para determinar tanto si existe una parametrización cuya cuantización a la Fock admita una implementación unitaria de la dinámica, como para establecer si ésta es única o no (i.e., indagar si el criterio de implementación unitaria de la dinámica es suficiente para la unicidad en el caso no axial). Este caso va más allá del alcance de esta tesis y es trabajo a futuro.

Conclusión

Desde la perspectiva tradicional de cuantización en espacio de Hilbert, la evolución unitaria de los sistemas cuánticos es un requerimiento central y natural. En la presente tesis se mostró, para dos casos concretos de campo escalar en fondos no estacionarios, que la falta de unitariedad puede deberse a una “mala” elección de variables para la cuantización, y que de hecho con las variables adecuadas es posible conseguir una cuantización *única* (salvo equivalencia unitaria) del sistema donde la evolución es unitaria. Estos resultados sugieren que la condición de unitariedad en la dinámica puede imponerse como un requisito más para conseguir fijar *una* representación de las RCC en sistemas de campo donde las simetrías del espacio-tiempo sean insuficientes para seleccionar una cuantización predilecta.

La unitariedad de la dinámica, desde un punto de vista meramente formal, equivale a pedir que la evolución sea un automorfismo en el espacio de Hilbert. Es decir, que la evolución no cambie el espacio de Hilbert, sino la base con la que se describe dicho espacio. La unitariedad garantiza la conservación de la probabilidad y la equivalencia entre los cuadros de Schrödinger y Heisenberg.

El análisis realizado en este trabajo ha sido para campos de Klein-Gordon en fondos no estacionarios particulares. Así que para poder profundizar en la relación *ambigüedad en la cuantización-evolución temporal*, es necesario abordar casos más generales (e.g., no suponer campo escalar axial en Bianchi I) que abarquen fondos más genéricos, así como analizar otros campos (e.g., campos bosónicos con espín diferente de cero y campos fermiónicos). También habría que investigar casos con secciones espaciales no compactas. En general, la relación entre *dinámica unitaria* y *cuantización única* es un problema abierto.

De conseguirse una única cuantización (salvo equivalencia unitaria) para sistemas de campo vía el requisito de evolución unitaria (y posiblemente algún otro), se tendría una especie de sistemas “inerciales” cuánticos. Queriendo decir con esto que existiría un sistema de variables privilegiado donde

la dinámica se realiza unitariamente. Caso análogo con los sistemas inerciales, donde un sistema coordinado privilegiado observa que las partículas libres siguen trayectorias rectilíneas uniformes.

Para finalizar, quisiera mencionar que el Universo puede ser investigado gracias a herramientas teóricas como la teoría cuántica de campos y la relatividad general, herramientas que permiten realizar predicciones que eventualmente pueden contrastarse con datos observacionales. El desarrollo teórico y observacional nos ha conducido a hallazgos sorprendentes, como la expansión del Universo. Sin embargo, queda mucho todavía por entender, como la aparente aceleración en la expansión del Universo, la era planckiana de éste, la materia oscura, etc., retos que dan una gran vitalidad al campo de la cosmología, la teoría de campos y la gravedad cuántica. En esta tesis se ha dado un brevísimo panorama de algunas de las herramientas teóricas que se utilizan (por ejemplo) en cosmología cuántica, contribuyendo un poco en la difusión del andamiaje matemático y físico que las áreas de cosmología y gravedad cuántica abordan, materias que con suficiente ingenio y dedicación del espíritu humano tal vez algún día logren responder a la pregunta: ¿Cómo comenzó el universo?

Bibliografía

- [1] R.M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (The University of Chicago Press, 1994).
- [2] A. Corichi, J. Cortez and H. Quevedo, *Schrödinger and Fock representation for a field theory on curved spacetime*, Ann. Phys. **313**, 446 (2004).
- [3] B. Kay, *Quantum field theory in curved spacetime*, arXiv:gr-qc/0601008.
- [4] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, 1989).
- [5] H.J. Groenewold, *On the Principles of elementary quantum mechanics*, Physica **12**, 405 (1946).
- [6] S.K. Kauffmann, *Equivalence of classical Klein-Gordon field theory to correspondance-principle first quantization of the spinless relativistic free particle*, arxiv:1012.5120v1 [physics.gen-ph] (2010).
- [7] M. Reed and B. Simon, *Functional Analysis* (Academic Press 1980).
- [8] A.D. Helfner, *The Hamiltonians of Linear Quantum Fields: Existence Theory of Scalar Fields*, arxiv:9908011v3 [hep-th] (2003).
- [9] A.A. Penzias and R. W. Wilson, *A Measurement Of Excess Antenna Temperature At 4080 Mc/s*, Astrophys. J. **142**, 419 (1965).
- [10] S. Perlmutter *et al.*, *Measurements of the Cosmological Parameters Omega and Lambda from the First 7 Supernovae at $z \geq 0.35$* , Astrophys. J. **483**, 565 (1997).
- [11] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo and J.M. Velhinho, *A uniqueness criterion for the Fock quantization of scalar fields with time dependant mass*, Class. Quant. Grav. **28**, 172001 (2011).

- [12] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo and J. M. Velhinho, *Criteria for the determination of time dependent scalings in the Fock quantization of scalar fields*, arXiv:1202.6330 [gr-qc] (2012).