



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

GEODÉSICAS EN EL ESPACIO FASE  
GEOMETROTERMODINÁMICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:

EDGAR ANTONIO VALDÉS PORRAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS



MÉXICO, DISTRITO FEDERAL

MARZO, 2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Geodésicas en el espacio fase geometrotermodinámico

por

Edgar Antonio Valdés Porras

Tesis presentada para obtener el grado de

FÍSICO

en la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

México, Distrito Federal. Marzo, 2012

*Un gigante me tomó entre sus manos.  
Tomé una daga y desgarre el cuello.  
Un frijol abatió sobre mi mano.  
Puse tierra sobre él.*

# Agradecimientos

Al gigante y a la daga.  
Al frijol y a la tierra.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN106110-3 Geometrotermodinámica. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

# Prólogo

El más importante conjunto para los físicos no es un conjunto de objetos, es un conjunto de posibilidades: el espacio de configuración de un sistema. Este espacio es el conjunto de posibles eventos instantáneos. Un físico siempre está en la premura de introducir coordenadas en su espacio, es decir funciones con un valor numérico. Si el conjunto de estas funciones permite asignar coordenadas a los puntos de un conjunto de manera única, entonces podemos suponer que este conjunto cae en un espacio  $\mathbb{R}^n$ . ¿Cuál es la importancia del espacio  $\mathbb{R}^n$  para los físicos? En principio, los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  pueden formar figuras, cuyas características, como la medición de distancias, ángulos y volúmenes, son parte natural de ellas. Estas características son las herramientas básicas que en Física se utilizan para entender los fenómenos naturales.

Del formalismo en un lenguaje de teoría de conjuntos, nos vemos forzados a no decir nada superfluo sobre todo aquello que pueda ser expresable mediante conjuntos. Georg Cantor definió un conjunto como cualquier colección a un todo de objetos definidos y separados pertenecientes a nuestra intuición o pensamiento. Esta es la mejor forma en la cual podemos explicar el uso de un lenguaje formal como la mejor manera de percibir y explicar al universo. Debemos de entender que el formalismo nos puede brindar nuevas ideas sobre la realidad. En un contexto histórico podemos encontrar que físicamente hay vestigios de una simplificación de un hecho observable que corresponden a un tiempo en que, el formalismo, no tenía las herramientas para discutir las ideas sobre conjuntos que no fuesen más allá de números y vectores. El objetivo que tenemos, ahora, es conocer las teorías matemáticas que nos lleve a entender los fenómenos físicos de forma nimia.

## **Primera gran idea matemática: Linealidad**

Imaginemos que tenemos un fenómeno físico atrapado, es decir que conocemos todas sus características a un tiempo dado o en otras palabras, que conocemos el punto del espacio fase que lo describe, ¿cuál es la posibilidad más sencilla que podemos asignarle a un futuro estado de este fenómeno para la cual algo de él lo distinga de su estado anterior? La respuesta a esta pregunta puede traer complicaciones enormes porque su precisión no es cándida. En principio podríamos arriesgarnos intentar resolverla y después preguntarnos si esta solución es la más sencilla. Supongamos que el segundo estado sea tal que se pueda considerar como la respuesta a una perturbación lineal y pequeña. Esta respuesta a pequeñas perturbaciones lineales es un principio de la ciencia natural que cae en la base de un vasto número de modelos matemáticos, los cuales se pueden traducir en la definición de una función diferenciable. Sencillez entonces es equivalente a rango de aplicación, dado que nuestro modelo, función diferenciable, nos ayuda a describir un gran número de estados de posibilidades.

Nuestro espacio lo podemos transformar (o disminuir, o extender) en un espacio lineal, que es una idealización de tener la mayor cantidad de posibles estados de perturbaciones pequeñas, o descrito alegóricamente como una cadena de pequeños sucesos fuertemente relacionados. Llegamos entonces al ideal en el cuál sobre el espacio de posibilidades (espacio de fase) le hemos asociado una estructura de entrelazamiento entre los posibles sucesos dentro de él. Los elementos de estas cadenas, llamadas espacios vectoriales, son conocidos como vectores. En una discusión más elaborada requeriría distinguir la naturaleza de los vectores entre puramente matemática o como propiedad física. Las relaciones entre los vectores son los instrumentos que utilizamos para analizar la naturaleza física de nuestra construcción.

En este punto no es necesario el introducir coordenadas; es solamente necesario mantener en mente que los vectores pueden ser relacionados entre sí utilizando multiplicación por números reales o que la suma entre ellos nos dará un vector. Estas dos propiedades son de naturaleza matemática, pero su asociación con las ideas físicas es coherente si asociamos un sistema de coordenadas, cuyas relaciones sean las propias de un fenómeno físico; que nos regresa a nuestra idea de pequeñas perturbaciones de un fenómeno físico.

La dimensión asociada a un espacio vectorial es el número de funciones coordenadas independientes sobre él. Las funciones coordenadas son las diferentes formas de asignar coordenadas a los elementos del espacio. La dimensión no depende de la elección de funciones coordenadas, esto es un resultado profundo en el sentido de que establece una primera conexión entre algo que es continuo y algo que es discreto: un entero. La dimensión del espacio, aparece por primera vez no como el número de objetos en un conjunto, sino como la medida del tamaño de una entidad continua.

Un mapeo lineal u operador lineal es la idealización de una respuesta lineal a una perturbación arbitraria que, visto desde la alegoría sobre cadenas de sucesos, vendría a ser una recomposición de una cadena en la cual ninguno de sus eslabones se fractura al momento de crearla. Interpretamos que la respuesta al operador puede ser medida por los elementos del mismo espacio entendidos estos como perturbaciones. A manera abstracta, un mapeo, es una función entre espacios vectoriales que toma la suma de vectores como a la suma de sus imágenes, y el producto por escalar al producto de su imagen por ese mismo número.

Una importante clase de mapeos lineales de un  $n$  espacio ( $n$  es la dimensión) en él mismo consiste de las dilataciones en  $n$  direcciones independientes. Estas dilataciones conforman un conjunto de coeficientes de dilatación para el operador lineal y son llamadas su espectro, término homónimo a una característica de los fenómenos físicos que refleja una enlace importante.

### **Segunda gran idea matemática: La medición en un espacio lineal**

No es obvio cuál de las propiedades físicas de la medición será la más útil en las teorías matemáticas y sus aplicaciones. De hecho, la noción matemática que está conectada con las ideas clásicas de medición forma un concepto complejo. Podemos nombrar de manera inmediata algunos de estos conceptos: longitud, ángulo, área; producto escalar y movimiento.

El concepto de espacio vectorial no contiene en él mismo nada que nos permita medir cualquier cosa de manera única. Los vectores no tienen longitud, no existe una medida natural de un ángulo entre dos vectores. De tal forma que para la formulación matemática de medición debemos de introducir conceptos geométricos. Utilizando jerga matemático: equiparemos al espacio con estructura adicional.

El primer concepto geométrico asociado a la medición de un espacio es la esfera unitaria del

espacio: el conjunto de vectores a los que se les asigna longitud unitaria. Esta definición está basada en la capacidad que tenemos de multiplicar por escalar a los vectores, cuya interpretación geométrica la podemos ver como un aumento en su magnitud. Si algún vector distinto de cero cae en la esfera unitaria después de ser multiplicado por un número  $a$ , podemos escribir la longitud del vector, que será  $a^{-1}$ ; por lo tanto hemos determinado  $a$  de manera única. La distancia entre dos vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  puede ser definida como la longitud de su diferencia  $|\vec{x} - \vec{y}|$ . Un vector distinto de cero tiene longitud distinta de cero y la desigualdad del triángulo se cumple:  $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ . Si adicionalmente tenemos una condición que garantice la existencia del límite de Cauchy para todas las secuencias, entonces tendremos un espacio de Banach.

Un espacio arbitrario de Banach no es suficientemente simétrico para ser considerado la correcta generalización de la esfera unitaria del espacio. Existen dos métodos diferentes para obtener la simetría necesaria:

- pedir que la  $n$  esfera se transforme en ella misma bajo un  $\frac{n(n-1)}{2}$  grupo continuo. Esto es una generalización de la idea de que los cuerpos rígidos pueden rotar.
- pedir que cualquiera de los dos vectores en el espacio tengan un producto escalar  $(\vec{x}, \vec{y})$ , es decir una función lineal con respecto de cada argumento, de tal manera que  $|\vec{x}|^2 = (\vec{x}, \vec{x})$  para toda  $\vec{x}$ . Esto es una generalización de la idea de que se puede medir el ángulo entre dos vectores de cualquier forma que no varíe bajo rotaciones del par de vectores.

La clave para entender estas ideas está contenida en dos palabras: invariancia y transformación. Tanto las transformaciones continuas en la esfera unitaria, como la idea del producto escalar nos llevan a un espacio euclidiano para dimensiones arbitrarias. En estos espacios de gran dimensión, diremos que son del tipo euclidiano si algunas condiciones extras son impuestas a la estructura. Primero, la esfera unitaria en el espacio euclidiano generalizado tendrá, si tomamos una descripción de coordenadas para él mismo, como definición la ecuación  $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$ . Las

rotaciones son mapeos lineales de la esfera unitaria en sí misma; estos mapeos forman un grupo que es denotado como  $O(n)$ . Segundo, en un espacio euclidiano el producto punto toma dos vectores reales y es simétrico:  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ . Además se cumple una importante desigualdad  $\frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{|\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2} \leq 1$ . En el espacio real este es un número real y por lo tanto existe un ángulo  $\theta$  para el cual se cumple que  $\cos \theta = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$ . El lado derecho solo toma valores entre cero y uno, y notamos que hay una propiedad física con la misma cualidad: la probabilidad. En un caso general, determinamos que dos vectores son ortogonales si  $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ .

Si abandonamos las propiedades que definen al espacio como Euclidiano, entonces el concepto de producto punto nos lleva a varias nuevas clases de geometría. Otra condición que podemos abandonar es la simetría de los vectores y remplazarla por:  $(\vec{x}, \vec{y}) = -(\vec{y}, \vec{x})$ . Con esta nueva restricción, todo vector en este tipo de espacio es ortogonal a él mismo. Esta geometría, es llamada geometría simpléctica.

En matemáticas es difícil encontrar un concepto más clásico que el de la integral. Cada cierto tiempo hay variantes del mismo, y la física requiere más innovaciones sobre él. La definición de una integral del tipo de Riemann es matemáticamente razonable para funciones que no varían de manera muy rápida, tales como las continuas. En casi todos los modelos físicos, al ser utilizados



para estudiar fenómenos más específicos, son el resultado de la promediar, figurativamente, espacios más pequeños. En relación con la física, la carga puede ser medida por la integración de su densidad hasta que la escala de sus portadores llega a la de los electrones. La densidad de carga en un portador elemental es infinito, mientras que fuera de él es cero. De tal forma que debemos de construir un aparato de integración para este tipo de funciones.

Tenemos que comenzar desde el principio para dar una idea de integración sobre espacios generalizados. Más aún, la integración la debemos de poder definir en algún tipo de espacio adecuado. En mundo euclidiano, tenemos a las integrales de tipo de Riemann. Nuestra definición de integral debería de ser compatible con el tipo de integrales de Riemann. Además debemos de ser capaces de dar una definición precisa en términos de los conceptos de espacios vectoriales para la medición de un volumen. Supongamos que tenemos  $n$  vectores ortogonales  $\vec{e}_1$  hasta  $\vec{e}_n$  de longitud unitaria. El  $n$  cubo generado por ellos es el conjunto de vectores del tipo  $\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ , donde  $0 \leq x_i \leq 1$ . De esta manera podemos asignar a la unidad como la medición del volumen de este cubo. Al trasladar este cubo a lo largo de un vector, su volumen no varía; si tomamos un cubo cual longitud de lado sea  $a$ , su volumen estará dado por  $a^n$ . Con la definición formal de volumen para un cubo podemos construir la definición de volumen para cualquier  $n$  figura utilizando un proceso de integración de Riemann. Este proceso consiste en tratar de localizar la mayor cantidad de cubos dentro del espacio dado y sumar sus volúmenes. El problema para nuestra construcción lo tendremos en la frontera de nuestra  $n$  figura, donde será difícil asignar cubos que no salgan de ella. Sin embargo, si a esta frontera le pedimos que no sea demasiado complicada, podemos encontrar la manera en la cual al hacer divisiones más pequeñas de un cubo, de tal manera que el error del llenado por cubos que no cubren a la frontera puede ser disminuido. Esta es la idea básica de integración a la Riemann. ¿Cuál es el interés físico sobre la integración? Supongamos que tenemos alguna substancia que es caracterizada por su densidad  $f(x)$ . La cantidad total de esta substancia será aproximadamente igual a la suma de las mediciones de la densidad en cada pequeño cubo asignado al espacio donde está contenida, de tal manera que la integral nos producirá el volumen de la porción del espacio donde está la substancia y por lo tanto también su densidad.

Hasta el momento hemos construido conceptos de medición de poco interés en la física, dado que hemos restringido las cualidades de nuestros fenómenos modelados. Una propiedad matemática de los volúmenes es aquella que nos dice que la concentración de volumen para un sólido multidimensional está cerca de su superficie<sup>1</sup>. Esta característica nos permite deducir comportamientos globales de un sistema a partir de sus componentes. Es decir estamos definiendo lo que son variables macroscópicas. La propiedad asintótica de los volúmenes multidimensionales forman el arsenal geométrico para la física estadística. La naturaleza construye toda la variedad de fenómenos en el universo de pequeños ladrillos constitutivos. Cada ladrillo tiene un tipo de identificación es decir, pertenecen a una clase. Cuando utilizamos estadística para comprender su funcionamiento colectivo, utilizamos el concepto matemático de punto en un espacio fase de dimensionalidad casi infinita. Las observaciones macroscópicas nos permiten

---

<sup>1</sup>La construcción comienza con una línea de longitud unital, acotada de tal forma que tomemos 0.9 de la longitud de la misma y el resto lo pongamos equitativamente en ambos extremos de la línea. Esto representa un 10% del volumen total en la "frontera de la línea". Si hacemos esta construcción para esferas de longitud unitaria en más alta dimensión (tomamos radios de .9) vemos que progresivamente la cantidad de volumen está concentrada en la frontera de la misma.

indicar la región que contiene a ese punto a cualquier tiempo; entre más largo el volumen de esa región, más probable es observar la posibilidad de encontrar un estado en particular en ella.

### **Tercera gran idea matemática: La no linealidad y la curvatura**

La idea de linealidad extrapola los pequeños incrementos. La idea de curvatura extrapola la desviación de un objeto geométrico de un objeto que tiene características lineales.

La primera noción de no linealidad la ganamos cuando nos preguntamos: ¿qué tan lejos está una superficie irregular de ser una superficie plana cerca de un punto en el cuál ambas son tangentes? Imaginemos que el espacio tangente es horizontal al punto, podemos entonces distinguir direcciones mutuamente ortogonales en él; la velocidad con la que cambia la dirección de una superficie define lo que es el radio de curvatura. Existen tantos radios de curvatura como dimensiones en la superficie.

Para describir la desviación utilizamos un molde externo; este círculo de ideas es natural y útil, aunque en la mayoría de las teorías físicas necesitamos una descripción más fina de curvatura. Este concepto es el de curvatura intrínseca. Construimos la curvatura intrínseca, primero en un subespacio, en el cual, para cada par de puntos cercanos damos la distancia entre ellos. La geometría del subespacio, con el concepto de distancia, debería de ser Euclidiano a escalas pequeñas, más aún, para escalas grandes, existen algunas características de la curvatura que la hacen diferente de la geometría Euclidiana.

Las características de la geometría intrínseca se pueden explicar si estudiamos el comportamiento de las líneas de menor distancia entre dos puntos: las geodésicas. La longitud de una de estas curvas es medida por una integral que se construye al dividir la curva en pequeños segmentos que son medidos. Si un vector en la variedad (espacio) se mueve a lo largo de una curva geodésica de tal forma que su ángulo con respecto a la curva permanece constante, este vector describirá una movimiento llamado transición paralela. Podemos definir la transición paralela a lo largo de cualquier curva: tomando una curva, construimos un polígono de línea compuesta por pequeñas geodésicas, el vector es entonces trasladado a lo largo de estas geodésicas.

¿Qué pasa cuando un vector es transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada? Lo que podemos llegar a descubrir es que el vector rota un pequeño ángulo comparado con su posición original. Este ángulo es proporcional al área de la curva. Más aún, el coeficiente de proporcionalidad depende de:

- El lugar del espacio, caracterizado por un punto, en cuya vecindad se define la curva.
- La dirección del volumen barrido por el vector al moverse

Este coeficiente es conocido como el tensor de curvatura de Riemann y depende tanto del punto como de la dirección del vector. Para un plano euclidiano plano, el tensor de curvatura es idénticamente cero. De aquí vemos que el concepto más importante para comprender la geometría de una variedad es el transporte paralelo.

Para muchas teorías físicas, se necesita un concepto de curvatura que es más general que la curvatura de Riemann. Para definir la curvatura de Riemann utilizamos transporte paralelo de un vector.

Supongamos que tenemos dos espacios,  $E$  y  $M$ ; y una función  $f : E \rightarrow M$ , donde a cada punto  $m \in M$ , le asignamos un sistema físico cuyos estados internos están dados por  $f^{-1}(m)$ . Una conexión es una regla para trasladar sistemas a lo largo de curvas sobre  $M$ . Es decir, si

conocemos alguna pieza de una curva en un sistema en  $M$ , más los grados de libertad internos de cada punto de la curva, entonces, al utilizar translación paralela, lo que estaremos haciendo será leer la historia contenida en esta curva. Esta idea conecta a la geometría con la física. Tenemos entonces un espacio de definición para una clase de fenómenos,  $M$ , y la cantidad de posibilidades del mismo a través de  $f^{-1}$ , más aún, podemos conocer la historia de varios puntos al trasladarnos paralelamente por geodésicas que los conectan; donde la conexión es un ingrediente extra que nos señala cuales de estas geodésicas establecen una relación, es decir describe la evolución del sistema.

Un campo gravitacional es la conexión de un espacio de grados internos de libertad de un giroscopio. Un campo electromagnético es la conexión del espacio de grados internos de libertad de un electrón clásico. Un campo de Yang-Mills, que es el grupo  $SU(3)$ , es la conexión en el espacio de grados internos de los colores de un quark.

Esta construcción geométrica parece ser universal en el sentido de ser un esquema matemático para la descripción del mundo en el cuál un pequeño número de interacciones básicas son consideradas. Por ejemplo, la materia en el espacio-tiempo esta descrita por una sección transversal de este haz fibrado  $E \rightarrow M$ , indicando el estado en el cual se encuentra la materia a cada momento. Un campo es descrito por la conexión en la fibra. La materia afecta a la conexión, imponiendo restricciones sobre su curvatura, y la conexión afecta la materia, forzando la translación paralela a lo largo de líneas del espacio. Las ecuaciones de Einstein, Maxwell-Dirac y Yang-Mills son expresiones concebida por estas ideas.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sobre los formalismos matemáticos de la termodinámica . . . . .	1
1.2. Sobre la geometrotermodinámica (GTD) . . . . .	2
1.3. Sobre este trabajo . . . . .	3
1.4. Sobre la estructura de este trabajo . . . . .	3
<b>2. Geometrotermodinámica</b>	<b>5</b>
2.1. Espacio de fase . . . . .	5
2.1.1. Estructura de contacto y la independencia de las variables físicas . . . . .	5
2.1.2. Invariancia de Legendre . . . . .	7
2.1.3. Estructura Riemanniana, la métrica $G$ y la invariancia de Legendre . . . . .	9
2.2. Espacio de estados de equilibrio . . . . .	11
2.2.1. El espacio de estados de equilibrio como una variedad y la primera ley de la termodinámica . . . . .	12
2.2.2. El espacio de estados de equilibrio y la ecuación fundamental . . . . .	13
2.2.3. El espacio de estados de equilibrio, la métrica $g$ y la invariancia de Legendre . . . . .	14
2.3. Algunos ejemplos . . . . .	15
2.3.1. Sistemas con dos grados de libertad . . . . .	16
2.3.2. El gas ideal como sistema termodinámico con dos grados de libertad . . . . .	22
2.3.3. Agujero negro de Reissner-Nordström como sistema termodinámico con dos grados de libertad . . . . .	25
2.4. Referencias . . . . .	27

<b>3. Propiedades geométricas del Espacio Fase Geometrotermodinámico</b>	<b>28</b>
3.1. Curvatura . . . . .	29
3.2. Ecuaciones Geodésicas . . . . .	30
3.2.1. Análisis para la ecuación geodésica $\Phi$ . . . . .	30
3.2.2. Análisis para las ecuaciones geodésicas $I_c$ . . . . .	32
3.2.3. Análisis para las ecuaciones geodésicas $E_c$ . . . . .	35
3.2.4. Soluciones para las ecuaciones geodésicas . . . . .	38
3.2.5. Gráficas para las geodésicas . . . . .	41
3.3. Primeras integrales . . . . .	43
3.3.1. Primera integral relacionada con el parámetro $\Phi$ . . . . .	43
3.3.2. Primeras integrales relacionados con las ecuaciones de Euler-Lagrange para $E_c$ y $I_c$ . . . . .	44
3.4. Interpretación de las primeras integrales . . . . .	46
3.4.1. Interpretación para la primera integral relacionada con el parámetro $\Phi$ . . . . .	46
3.4.2. Longitud de un vector termodinámico asociado a una geodésica en el espacio fase termodinámico . . . . .	47
3.5. Aplicación a un sistema con dos grados de libertad . . . . .	48
<b>4. Conclusiones</b>	<b>52</b>
<b>A. Elementos de Geometría Diferencial</b>	<b>56</b>
A.1. La variedad topológica y la parametrización global . . . . .	57
A.2. La variedad diferencial y la parametrización local . . . . .	60
A.3. Los difeomorfismos entre variedades diferenciales . . . . .	62
A.4. Los vectores y covectores tangentes . . . . .	63
A.4.1. Vectores Tangentes . . . . .	65
A.4.2. Covectores Tangentes . . . . .	66
A.5. Los difeomorfismos y sus diferenciales . . . . .	68
A.6. El teorema de la función implícita, las inmersiones, las sumersiones y los encajes . . . . .	70
A.6.1. El teorema de la función implícita . . . . .	71
A.6.2. Las inmersiones y las variedades inmersas . . . . .	71

A.6.3. Los encajes y las variedades encajadas . . . . .	72
A.6.4. Las sumersiones . . . . .	72
A.7. Los campos vectoriales . . . . .	72
A.7.1. Las curvas integrales . . . . .	75
A.7.2. Los Flujos globales y los campos vectoriales completos . . . . .	76
A.7.3. El paréntesis de Lie-Jacobi . . . . .	77
A.8. Las formas diferenciales . . . . .	78
A.9. Unas Operaciones entre campos vectoriales y formas diferenciales . . . . .	80
A.9.1. La contracción o el producto interior . . . . .	80
A.9.2. Multiplicación Exterior . . . . .	80
A.9.3. La derivada de Lie para campos vectoriales . . . . .	81
A.9.4. La derivada de Lie para formas diferenciales . . . . .	81
A.9.5. La derivada Exterior . . . . .	83
A.9.6. Las identidades de Élie Cartan . . . . .	84
A.10. Los mapeos entre variedades y sus relaciones con los campos vectoriales y las formas diferenciales . . . . .	85
A.11. Integración sobre variedades diferenciales . . . . .	86
A.11.1. Integración de formas diferenciales en un espacio Euclidiano . . . . .	86
A.11.2. Integración de formas diferenciales sobre variedades . . . . .	87
A.11.3. Orientación . . . . .	87
A.11.4. Integración sobre variedades compactas . . . . .	88
A.11.5. El teorema de Stokes . . . . .	89
A.11.6. Propiedades de la integral sobre formas de volumen . . . . .	90
A.11.7. Cálculos de integrales sobre variedades compactas . . . . .	90
A.12. Las variedades integrales y el teorema de Frobenius . . . . .	93
A.12.1. Distribuciones tangenciales . . . . .	93
A.12.2. Involución . . . . .	94
A.12.3. Involución y formas diferenciales . . . . .	95
A.12.4. Involución e Ideales . . . . .	96
A.12.5. El teorema de Frobenius . . . . .	96

A.13.El teorema de Darboux . . . . .	97
A.14.Referencias . . . . .	98
<b>B. Elementos de Geometría de Riemann</b>	<b>100</b>
B.1. Los problemas de variaciones homogéneos y ordinarios en la definición de una métrica de Riemann . . . . .	101
B.2. La conexión afín . . . . .	102
B.3. El transporte paralelo y la conexión afín . . . . .	104
B.4. Las líneas auto-paralelas . . . . .	106
B.5. El tensor de torsión y el tensor de curvatura . . . . .	106
B.6. Intermedio: Del dialecto físico . . . . .	107
B.7. El producto interno y el Lagrangiano . . . . .	108
B.8. La métrica de Riemann . . . . .	110
B.9. Escribiendo en términos de la métrica de Riemann . . . . .	111
B.9.1. Los vectores base del espacio tangente a un punto y la métrica de Riemann	112
B.9.2. Subir y bajar índices con la métrica de Riemann . . . . .	113
B.9.3. Relación entre los componentes covariantes y contravariantes de la métrica de Riemann . . . . .	114
B.9.4. Los coeficientes de la conexión y la métrica de Riemann . . . . .	115
B.9.5. Los vectores base del espacio tangente a un punto y los coeficientes de la conexión afín . . . . .	115
B.9.6. Relación entre la torsión y la derivada covariante . . . . .	117
B.9.7. Relación entre la curvatura y la derivada covariante . . . . .	117
B.10.Las Geodésicas y la conexión de Levi-Civita . . . . .	118
B.11.Las Geodésicas y la primera variación . . . . .	119
B.12.Referencias . . . . .	121
<b>C. Elementos de Termodinámica</b>	<b>122</b>
C.1. Conceptos fundamentales . . . . .	122
C.1.1. Sistemas y parámetros termodinámicos . . . . .	123

C.1.2. Equilibrio termodinámico, la ecuación de estado para un sistema y su interpretación geométrica . . . . .	123
C.1.3. Las transformaciones termodinámicas, los procesos cuasi-estáticos y los procesos reversibles . . . . .	124
C.1.4. El Trabajo y el Calor . . . . .	124
C.1.5. La capacidad calorífica como medida del calor . . . . .	124
C.1.6. Variables Intensivas y Extensivas . . . . .	125
C.1.7. Axiomas, postulados y leyes termodinámicas . . . . .	125
C.1.8. La primera ley de la termodinámica . . . . .	126
C.1.9. La segunda ley de la termodinámica . . . . .	127
C.1.10. La entropía . . . . .	127
C.1.11. Potenciales termodinámicos . . . . .	127
C.2. Sistemas generales . . . . .	128
C.3. La Termodinámica y la Física . . . . .	129
C.4. Referencias . . . . .	130



# Capítulo 1

## Introducción

Este primer capítulo tiene como intención mostrar la motivación que nos llevo a estudiar el formalismo de la geometrotermodinámica. Comenzaremos dando una introducción histórica de los diferentes trabajos que se han realizado para interpretar de manera geométrica la termodinámica. Presentaremos un resumen del formalismo GTD con el propósito de ser utilizado como una referencia rápida para entender las ideas del mismo. Este capítulo termina con un resumen de los resultados encontrados y de la organización de los capítulos posteriores.

### 1.1. Sobre los formalismos matemáticos de la termodinámica

El uso de la geometría en termodinámica comienza con Gibbs(Gibbs [1873]). Gibbs presentó a la primera ley de la termodinámica, en lo que hoy conocemos, como una forma diferencial. Esto le permitió interpretar a los estados de equilibrio de un sistema termodinámico como una superficie. Carathéodory interpretó las leyes de la termodinámica en una forma axiomática utilizando lo que son las formas de Pfaff(Caratheodory [1909]). En su trabajo utilizó el concepto de proceso adiabático como guía para su formulación axiomática. En 1973 Hermann mostró que las leyes empíricas de los fenómenos termodinámicos podrían ser descritas de una forma matemática y concisa (Hermann [1973]). Propuso un esquema de definición en un marco geométrico para la termodinámica clásica; siendo un espacio de fase termodinámico con una estructura de contacto. Estos mismos estudios fueron extendidos por R. Mrugala. Casi al mismo tiempo (1975), una segunda estructura geométrica en la forma de una métrica Riemanniana en el espacio de

estados termodinámicos fue introducida en la teoría por Weinhold (Weinhold [1975]). En 1979 Ruppeiner utilizó una métrica distinta a la de Weinhold como el punto de partida para una nueva teoría de fluctuaciones termodinámicas (Ruppeiner [1979]). En 1983 Salamon y Berry mostraron la conexión entre la geometría y la disipación (Salamon *et al.* [1983]). Un nuevo enfoque fue presentado por H. Quevedo, donde las transformaciones de Legendre son asociadas tanto a la estructura de contacto como a la métrica (Quevedo [2007]). En esta propuesta, una métrica es inducida en el espacio de estados de equilibrio termodinámicos utilizando un pullback de la métrica del espacio de fase termodinámico; donde tanto la 1-forma de Gibbs, asociada a la estructura de contacto; como la métrica del espacio fase son invariantes ante transformaciones de Legendre.

## 1.2. Sobre la geometrotermodinámica (GTD)

La Geometrotermodinámica (GTD) es un conjunto de objetos matemáticos que nos permiten estudiar los fenómenos termodinámicos desde un punto de vista geométrico. El primer componente de la GTD es una variedad a la cual denominamos el espacio fase  $\mathcal{T}$ . Además, en  $\mathcal{T}$  se encuentra la forma diferencial de Gibbs, la cual es invariante con respecto a transformaciones de Legendre. La variedad  $\mathcal{T}$  es a su vez una variedad de contacto y una variedad de Riemann. Una encaje de este espacio fase es denominado como el espacio de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$ . El encaje, induce una estructura métrica sobre el espacio de estados de equilibrio a partir de la métrica que le da la estructura de Riemann al espacio fase. Dicha métrica es también invariante frente a transformaciones de Legendre. **Sobre el espacio  $\mathcal{E}$  se ha logrado identificar sus geodésicas como procesos cuasi-estáticos y a la curvatura como la interacción termodinámica.**

La GTD es la unificación de ambas estructuras, y nos permite **tratar la termodinámica en un lenguaje geométrico** tanto a nivel del espacio fase como en del espacio de estados de equilibrio. De tal manera que la GTD representa una formulación geométrica invariante de la termodinámica. Matemáticamente los espacios  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{T}$  se relacionan utilizando el encaje  $\varphi$ . La relación que se forman con el pullback y el push-forward (ver apéndices) son mostrados en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{\varphi} & T \\
\downarrow & & \downarrow \\
T_{\mathcal{E}} & \xrightarrow{\varphi_*} & T_{\mathcal{T}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
T_{\mathcal{E}}^* & \xleftarrow{\varphi^*} & T_{\mathcal{T}}^* \\
g & \xleftarrow{\varphi^*} & G
\end{array}$$

### 1.3. Sobre este trabajo

En este trabajo se investigará las propiedades geométricas del espacio fase. Para hacerlo, calcularemos las ecuaciones de las geodésicas utilizando un método cuyo fundamento esta en la variación del lagrangiano asociado a la métrica. **Las ecuaciones geodésicas encontradas son resueltas de forma analítica.** En el proceso del cálculo de estas ecuaciones encontraremos las primeras integrales asociados a las geodésicas. Demostraremos que estas primeras integrales están relacionados con la norma de los vectores tangentes a las geodésicas del espacio fase y del espacio de estados de equilibrio. Finalmente utilizaremos estos resultados para dar pie al desarrollo de una teoría de "relatividad térmica" generalizada. El concepto de "relatividad térmica" es introducido por Zhao en su artículo (Zhao [2011]).

### 1.4. Sobre la estructura de este trabajo

El capítulo 2 presenta el formalismo GTD de manera completa. Debido a la gran cantidad de conceptos de geometría diferencial y geometría de Riemann necesarios para entenderlo, hemos puesto los apéndices A y B. En éstos se podrá encontrar un tratamiento formal que sustenta los conceptos matemáticos utilizados para la definición del espacio fase y el espacio de estados de equilibrio. Desarrollamos los cálculos necesarios para entender los sistemas termodinámicos con dos grados de libertad y presentamos dos ejemplos: el gas ideal y el agujero negro de Reissner-Nordström. Estos ejemplos muestran que los resultados de GTD son acordes con la termodinámica clásica, para el caso del gas ideal; y con la termodinámica de agujeros negros, para el caso del agujero de Reissner-Nordström. Los conceptos termodinámicos clásicos los hemos

puestos como referencia en el apéndice C.

El capítulo 3 es la parte central de este trabajo. En él calcularemos de manera completa las ecuaciones geodésicas asociadas a una métrica de Riemann sobre el espacio fase. La elección de la métrica de Riemann que utilizamos se debe a que ésta es la métrica más general ante transformaciones totales y parciales de Legendre. Al utilizar las ecuaciones de Lagrange, asociadas a las geodésicas, calcularemos de manera algebraica primeras integrales asociadas a estas ecuaciones. El uso de las primeras integrales nos servirá para simplificar las ecuaciones geodésicas; de tal forma que llegaremos a una solución analítica de las mismas.

El capítulo 4 es el capítulo final. Al principio mostraremos un resumen de los resultados encontrados en el capítulo 3. Posteriormente utilizaremos el pullback del encaje para mostrar que las ecuaciones geodésicas encontradas son consistentes con el formalismo de GTD. El principal tema del capítulo serán las conclusiones que podemos obtener utilizando las primeras integrales. Estas primeras integrales están relacionados a la longitud del vector tangente a las geodésicas en el espacio fase y a los vectores tangentes de las geodésicas del espacio de estados de equilibrio. Al finalizar, mostraremos que este trabajo abre la posibilidad de generalizar una propuesta para relatividad térmica" que ha sido presentada recientemente.

## Capítulo 2

# Geometrotermodinámica

En este capítulo presentaremos las estructuras matemáticas de la GTD: el espacio fase y el espacio de estados de equilibrio. Al final desarrollaremos algunos ejemplos de sistemas termodinámicos descritos por la GTD; a decir: el gas ideal y el agujero negro de Reissner-Nordström.

### 2.1. Espacio de fase

Hemos mencionado que podemos estudiar diversos fenómenos físicos utilizando estructuras matemáticas apoyadas con una fuerte intuición geométrica. Para los fenómenos termodinámicos esta situación no es tan clara. Para estudiar la termodinámica, desde un punto de vista geométrico, debemos encontrar una serie de estructuras que mimeticen las propiedades de estos sistemas; esperando a posteriori que sus propiedades geométricas den no solo la misma información que la teoría clásica, sino que podamos profundizar en el entendimiento de ella.

#### 2.1.1. Estructura de contacto y la independencia de las variables físicas

El primer paso para introducir el lenguaje de la Geometría Diferencial en termodinámica es la definición de una variedad  $\mathcal{T}$  de dimensión  $2n + 1$ . Podemos demostrar que existe una 1-forma  $\Theta$  en el espacio cotangente  $T^*(\mathcal{T})$  que localmente pueden ser generados por campos vectoriales de la misma dimensión y que puede ser asociada al núcleo (kernel) de tal manera que si tenemos un subconjunto  $V \subset T(\mathcal{T})$  del espacio tangente  $T(\mathcal{T})$ , podemos asociar a  $V$  con el núcleo de  $\Theta$ :

$$V = \ker \Theta. \tag{2-1}$$

Si la condición de integrabilidad de Frobenius,

$$\Theta \wedge d\Theta = 0, \tag{2-2}$$

se satisface, el campo de hiper-planos  $V$  es completamente integrable. Esta condición está relacionada con la existencia de una foliación regular de la variedad; que, utilizando la necesidad física, es equivalente a decir que este espacio es lo suficientemente grande para mantener a sus coordenadas independientes entre sí.

En el caso límite en el que:

$$\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0, \tag{2-3}$$

el campo de hiper-planos es maximalmente no integrable y se dice que define una **estructura de contacto sobre  $\mathcal{T}$** , donde  $\Theta$  recibe ahora el nombre de **forma de contacto** de esta estructura y de acuerdo a (2-3) esto significa que no es degenerada, siendo entonces (2-3) una condición de no degeneración.

De acuerdo al teorema de Darboux, existe coordenadas locales, llamadas coordenadas de contacto,  $\{x^0, x^i, p_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; en las cuales  $\Theta$  es descrita como:

$$\Theta = dx^0 + p_i dx^i. \tag{2-4}$$

La condición (2-3) es interpretada de manera geométrica, al observar (2-4), lo cual nos dice que  $\Theta \wedge (d\Theta)^n$  es la forma de volumen sobre  $\mathcal{T}$ . Una variedad tiene una forma de volumen si y solo si es orientable. Más información geométrica podemos obtener debido a que al tener una variedad orientable, tenemos un número infinito de formas de volumen dado que al multiplicar cualquier forma por una función, que no se desvanece, obtenemos otra forma de volumen. La importancia de la forma de volumen está en la capacidad que nos da para definir la integral de una función sobre la variedad. En términos físicos, la forma de volumen, en este contexto, da sentido a la conexión entre estados.

Hasta este momento tenemos que el par  $(\mathcal{T}, V)$  define una estructura de contacto y algunas veces es denotada como  $(\mathcal{T}, \Theta)$  para enfatizar su relación con la forma de contacto  $\Theta$ . Las características principales que definen esta variedad están dadas por las ecuaciones (2-3), (2-4) y (2-2). La interpretación termodinámica comienza al identificar a  $\mathcal{T}$  con un subconjunto de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , en el que asignamos la siguiente correspondencia:

$$\{x^0; x^i; p_i\} \iff \{U; S, V, N_1 \dots; -T, -P, -\mu_1 \dots\}, \quad (2-5)$$

y,

$$\Theta^U = dU - TdS - PdV - \mu_k dN^k, \quad k = 1, \dots, n - 2; \quad (2-6)$$

donde todos estos símbolos pueden ser interpretados con su significado estándar termodinámico.

### 2.1.2. Invariancia de Legendre

Las transformaciones de Legendre son importantes herramientas en la física teórica dado que asumen un rol crítico en la mecánica clásica, la física estadística y la termodinámica. En física pueden ser vista como la forma en la cuál se seleccionan variables independientes que son controlables de mejor manera, es decir una transformación de Legendre puede ser vista como una forma alternativa de mostrar información. El ejemplo clásico que nos da intuición sobre el punto anterior esta al considerar una función  $x$ , que depende del tiempo, la función  $x(t)$  no cambia el símbolo utilizado si damos el tiempo en segundos o minutos. De manera general tenemos a  $t$  como variable independiente o variable de control; y a  $x$  como variable dependiente. En algunas circunstancias es bueno codificar la función  $x$  de manera diferente, como ocurre cuando realizamos una transformación de Fourier o una transformación de Laplace. Una transformación de Legendre es entonces una forma en la cual codificar información si la función cumple dos condiciones: primero, la función es convexa; segundo es más fácil medir, controlar o pensar en la derivada de  $x$  con respecto de  $t$  que medir a  $t$  directamente.

En nuestro formalismo, las transformaciones de Legendre son casos especiales de transformaciones de contacto, la cuales dejan invariante la estructura de contacto  $(\mathcal{T}, \Theta)$ . Esta condición la

podemos entender como la existencia de una transformación que lleva cada plano, de un campo hiper-planos, a otro plano del mismo campo. En términos físicos, la invariancia de Legendre tiene como significado el que las propiedades termodinámicas de un sistema son independientes del potencial termodinámico utilizado para describirle.

Puede demostrarse que si existe una segunda 1-forma  $\tilde{\Phi}$  que satisface la condición de máxima integrabilidad (2-3), esto es:

$$\tilde{\Theta} \wedge (d\tilde{\Theta})^n \neq 0. \quad (2-7)$$

Tendremos entonces que  $\Theta$  y  $\tilde{\Theta}$  están asociadas por una transformación de Legendre.

Una transformación parcial de Legendre puede ser presentada matemáticamente de la siguiente manera,

$$\{Z^A\} \rightarrow \{\tilde{Z}^A\} = \{\tilde{\Phi}, \tilde{E}^a, \tilde{I}^a\}; \quad (2-8)$$

que específicamente son:

$$\begin{aligned} \Phi &= \tilde{\Phi} - \delta_{kl} \tilde{E}^k \tilde{I}^l; \\ E^i &= -\tilde{I}^i; \\ E^j &= \tilde{E}^j; \\ I^i &= \tilde{E}^i; \\ I^j &= \tilde{I}^j. \end{aligned} \quad (2-9)$$

En estas condiciones tomamos a el conjunto  $i \cup j$  como cualquier colección disjunta de los índices  $\{1, \dots, n\}$  y  $k, l = 1, \dots, i$ . En particular, si tomamos a  $i \cup j$  como toda la colección tendremos lo que se conoce como una transformación total de Legendre.

La relación (2-8) nos permite escribir (2-5) para diferentes potenciales termodinámicos. Este es un requerimiento que en principio es requerido por la teoría base de la termodinámica y que la GTD acopla.



### 2.1.3. Estructura Riemanniana, la métrica $G$ y la invariancia de Legendre

La idea de utilizar geometría diferencial en termodinámica se la debemos a Gibbs. Él llegó a la conclusión de que la primera ley de la termodinámica podría ser representada en lo que hoy conocemos como formas diferenciales. Carathéodory interpretó las leyes de la termodinámica en una forma axiomática utilizando lo que son las formas de Pfaff. Podemos decir entonces que este es el primer conjunto de ideas matemáticas que modelan los fenómenos termodinámicos. La idea de generalizar estas ideas comienza con Hermann y la introducción del concepto de espacio fase termodinámico, donde las variables termodinámicas juegan el papel de coordenadas. En nuestra exposición hemos partido precisamente del espacio fase termodinámico, y aún no hemos asignado ninguna característica a este espacio más que la de ser una estructura de contacto. La pregunta natural es saber si esta estructura de contacto es suficiente para admitir los problemas termodinámicos bajo el formalismo de Gibbs y Carathéodory. La respuesta a esta pregunta nos lleva a enriquecer la estructura del espacio fase termodinámico al introducir un nuevo componente, una métrica, y de esta forma darle a este espacio la estructura de una geometría de Riemann.

Introducir una métrica en el sistema fase termodinámico es el primer punto clave en el desarrollo de la GTD. Tanto Weinhold como Ruppeiner introdujeron métricas no pensando en el espacio fase, sino pensando en procesos cuasi-estáticos. El problema de utilizar la aproximación teórica de Weinhold y Ruppeiner se da en que los resultados dados por sus métricas dependían de la elección del potencial termodinámico. Es decir tenían un problema de no ser invariantes bajo una transformación de Legendre, el cuál es un requisito para una teoría termodinámica. **La GTD incorpora la invariancia de Legendre desde el sistema fase termodinámico.**

En GTD la métrica  $G$  inducida debe ser invariante con respecto a transformaciones que no modifique la estructura de contacto  $(\mathcal{T}, \Theta)$ . En particular  $G$  debe ser invariante con respecto transformaciones de Legendre. La idea detrás de esta condición es poder describir un sistema termodinámico independiente de las coordenadas que utilizamos, esto es hacer que (2-6) sea una condición variable. El construir estas métricas se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones y estos son establecidos utilizando la condición de la invariancia de Legendre. Denotemos a una métrica  $\tilde{G}(\tilde{Z}^A)$  como la métrica obtenida a partir de  $G$  al aplicar una transformación de

Legendre (2-9). Definamos ahora  $G'(\tilde{Z}^A) = G(Z^A \rightarrow \tilde{Z}^A)$ , es decir la métrica  $G$ , pero con el argumento dado por la transformación de Legendre de él. La invariancia de Legendre para  $G$  debe de cumplir la siguiente condición:

$$\tilde{G}(\tilde{Z}^A) = G'(\tilde{Z}^A). \quad (2-10)$$

La relación (2-10) define un sistema de ecuaciones. De manera específica tendremos que la parte izquierda de la relación (2-10) puede ser vista como:

$$G_{AB} \rightarrow \tilde{G}_{AB} = \frac{\partial Z^C}{\partial \tilde{Z}^A} \frac{\partial Z^D}{\partial \tilde{Z}^B} G_{CD}. \quad (2-11)$$

Donde,

$$\frac{\partial Z^A}{\partial \tilde{Z}^B} = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z}^{n+1} & -\tilde{Z}^{n+2} & \dots & -\tilde{Z}^{2n} & -\tilde{Z}^1 & -\tilde{Z}^2 & \dots & -\tilde{Z}^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2-12)$$

el determinante de esta matriz es 1, de tal forma que existe la transformación inversa y determina un difeomorfismo que corresponde a una transformación total de Legendre.

Una condición importante al imponer invariancia de Legendre sobre una métrica es que existan soluciones de la misma. Una métrica de dimensión  $2n + 1$  puede ser construida a partir de uno de los elementos que ya tenemos. Tomemos la 1-forma de Gibbs dada en (2-4) y escribámosla utilizando un conjunto de coordenadas generales  $\{\Phi; E^a; I^a\}$ , donde  $\Phi$  es llamada la coordenada del potencial,  $E^a$  las coordenadas extensivas; y  $I^a$  las coordenadas intensivas. La 1-Forma de Gibbs que da entonces como:

$$\Theta_G = d\Phi - I_a dE^a. \quad (2-13)$$

Esta 1–forma demostraremos que es invariante bajo transformaciones de Legendre en la siguiente sección, de momento, para construir la métrica, tomemos simplemente:

$$G = \Theta_G \otimes \Theta_G; \tag{2-14}$$

la cual se transforma en:

$$G = (d\Phi - I_a dE^a)^2. \tag{2-15}$$

La invariancia de esta métrica se sigue de la invariancia de la 1–forma de Gibbs. Esta métrica la nombramos métrica de Gibbs y notamos que dado que no tiene ningún componente que depende de algún  $dI^a$ , su determinante se desvanece. Esto significa que la solución para el sistema de ecuaciones que determina la métrica no es única.

Tenemos ahora un algoritmo para buscar métricas que cumplen con los dos requerimientos principales: son invariantes de Legendre y el conjunto de ecuaciones que las genera pueden ser resueltas. La métrica más general que cumple estos requisitos esta dada por:

$$G = (d\Phi - I_a dE^a)^2 + \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} dE^a dI^a, \Lambda \text{ constante.} \tag{2-16}$$

**Esta es la métrica que utilizaremos para investigar la geometría del espacio fase termodinámico.**

## 2.2. Espacio de estados de equilibrio

Hemos tomado algo de tiempo en describir de manera precisa lo que es el espacio fase termodinámico; y lo hemos hecho debido a que el propósito de este trabajo es analizar su geometría. Sin embargo, para poder utilizar la GTD en el estudio de fenómenos termodinámicos, debemos de entender lo que es el espacio de estados de equilibrio. De manera intuitiva, en el espacio de estados de equilibrio definimos lo que son los procesos cuasiestáticos.

### 2.2.1. El espacio de estados de equilibrio como una variedad y la primera ley de la termodinámica

El espacio de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$  se define utilizando el mapa suave  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$ , dado por:

$$\varphi : (E^a) \longmapsto (\Phi(E^a), E^a, I^a(E^a)). \quad (2-17)$$

Este será entonces un subespacio de  $\mathcal{T}$ , más precisamente una subvariedad encajada.

El nombre de espacio de estados de equilibrio viene al darle al pullback del encaje la siguiente propiedad:

$$\varphi^*(\Theta_G) = 0, \quad (2-18)$$

esta condición es equivalente a decir:

$$\varphi^*(d\Phi - I_a dE^a) = 0. \quad (2-19)$$

Una primera relación que nos servirá para realizar operaciones la podemos deducir de (2-19):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E^a} = I_a, \quad (2-20)$$

la cuál es una condición de equilibrio termodinámico. En consecuencia, la relación (2-19) es equivalente a la primera ley de la termodinámica:

$$d\Phi - I_a dE^a = 0. \quad (2-21)$$

Para aplicar el pullback debemos de utilizar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(E^a); \\ I^a &= I^a(E^a); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} &= I_a. \end{aligned} \quad (2-22)$$

De las relaciones anteriores, podemos inferir que:

$$\begin{aligned}
d\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial E^a} dE^a \\
dI_a &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial E^b \partial E^a} dE^b.
\end{aligned}
\tag{2-23}$$

Estas relaciones pueden ser utilizadas directamente para encontrar el pullback de la métrica  $G$ . Más adelante analizaremos la métrica inducida por este pullback en el espacio de estados de equilibrio.

### 2.2.2. El espacio de estados de equilibrio y la ecuación fundamental

Para distinguir entre diferentes sistemas termodinámicos, en el espacio de estados de equilibrio, debemos de especificar la ecuación fundamental<sup>1</sup>. En el formalismo de la GTD, esta ecuación esta contenida en el encaje  $\varphi$ , a través de la relación:

$$\Phi = \Phi(E^a). \tag{2-24}$$

La construcción que hemos realizado hasta el momento cuenta ya con la primera ley de la termodinámica. El paso lógico siguiente es incorporar la segunda ley, lo cuál lo hacemos pidiéndole a la ecuación fundamental una condición de convexidad:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial E^a \partial E^b} \geq 0.$$

Adicionalmente, los potenciales termodinámicos deberán de satisfacer una condición de homogeneidad. Esta condición se puede expresar como:

$$\Phi(\lambda E^a) = \lambda^\beta \Phi(E^a), \tag{2-25}$$

donde  $\lambda$  y  $\beta$  son constantes. Al diferenciar la expresión (2-25) con respecto a  $\lambda$ , para después igualar  $\lambda$  con 1, nos llevará a la identidad de Euler:

---

<sup>1</sup>Una ecuación de estado es una relación que describe el estado de un sistema termodinámico.

$$\beta\Phi(E^a) = \delta_{ab}I^b E^a. \quad (2-26)$$

Lo que debemos de tener en mente es que tanto la relación (2-25), como la relación (2-26) son condiciones matemáticas equivalentes. Estas dos condiciones expresan la homogeneidad.

El formalismo de la geometría diferencial puede ser utilizado en la identidad de Euler con el propósito de encontrar una relación entre los parámetros intensivos. Esta relación se deriva al aplicar la derivada exterior a la relación (2-26):

$$\begin{aligned} \beta d\Phi(E^a) &= d(\delta_{ab}I^b E^a) \\ &= \delta_{ab}I^b dE^a + \delta_{ab}E^a dI^b, \end{aligned}$$

y aplicando la primera ley de la termodinámica tendremos,

$$\beta d\Phi(E^a) = \beta(I_a dE^a),$$

los cuál nos lleva a la siguiente expresión,

$$(\beta - 1) \delta_{ab}I^b dE^a = \delta_{ab}E^a dI^b. \quad (2-27)$$

La relación (2-27) es conocida como la relación generalizada de Gibbs-Duheim. Al hacer  $\beta = 1$ , encontramos la relación clásica de Gibbs-Duheim:

$$\delta_{ab}E^a dI^b = 0.$$

### 2.2.3. El espacio de estados de equilibrio, la métrica $g$ y la invariancia de Legendre

La segunda condición que se le pide a la métrica  $G$  es que esta induzca una métrica  $g$  en el espacio de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$ , y que esta métrica sea también invariante de Legendre. La condición puesta de manera precisa es:

$$\varphi^*(G) = g. \quad (2-28)$$

Los componentes de esta métrica estarán dados por:

$$g_{ab} = \frac{\partial Z^A}{\partial E^a} \frac{\partial Z^B}{\partial E^b} G_{AB}. \quad (2-29)$$

Donde notamos de manera inmediata que una transformación de Legendre en  $G$  corresponde a una transformación de coordenadas de  $g$ . Si denotamos por  $\{\tilde{Z}^A\}$  las coordenadas en  $\mathcal{T}$  asociadas a una transformación de Legendre, entonces la métrica dada por (2-11) induce una métrica en  $\mathcal{E}$  dada por:

$$\tilde{g}_{ab} = \frac{\partial \tilde{Z}^A}{\partial E^a} \frac{\partial \tilde{Z}^B}{\partial E^b} \tilde{G}_{AB}. \quad (2-30)$$

Esta relación nos permite establecer una relación con (2-29):

$$\tilde{g}_{ab} = \frac{\partial E^c}{\partial \tilde{E}^a} \frac{\partial E^d}{\partial \tilde{E}^b} g_{cd}. \quad (2-31)$$

En particular podemos aplicar la relación (2-29) a la métrica (2-16) y encontrar la métrica  $g$  inducida:

$$g = \Lambda \left( E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} \delta^{ab} dE^a dE^c. \quad (2-32)$$

La métrica  $g$  ha sido utilizada para calcular las ecuaciones geodésicas y la curvatura para sistemas termodinámicos conocidos como el gas ideal. La selección de un sistema en particular se hace al utilizar su ecuación fundamental.

### 2.3. Algunos ejemplos

Esta sección tiene como propósito aterrizar varios de los conceptos expuestos en este capítulo. Principalmente trataremos los sistemas termodinámicos simples con dos grados de libertad, lo cual se traduce al uso de dos variables extensivas, dos variables intensivas y un potencial

termodinámico.

### 2.3.1. Sistemas con dos grados de libertad

Consideremos un sistema termodinámico con dos grados de libertad. El espacio de fase  $\mathcal{T}$  será una variedad de dimensión cinco para la cuál seleccionamos las coordenadas:

$$\{Z^A\} = \{\Phi, E^1, E^2, I^1, I^2\}. \quad (2-33)$$

Seguiremos el orden establecido en este trabajo para presentar las varias estructuras que conforman la GTD.

#### Estructura de contacto

La estructura de contacto depende de la 1-forma de Gibbs (2-13). Utilizando las coordenadas dadas por (2-33) la 1-forma de Gibbs es:

$$\Theta_G = d\Phi - I_1 dE^1 - I_2 dE^2. \quad (2-34)$$

La condición de no degeneración (2-3) y el parámetro  $r$  (A-84) están relacionados, de tal forma que a partir de la secuencia,

$$\begin{aligned} \Theta_G &= d\Phi - I_1 dE^1 - I_2 dE^2 \\ d\Theta_G &= -dI_1 \wedge dE^1 - dI_2 \wedge dE^2 \\ \Theta_G \wedge d\Theta_G &= I_1 dE^1 \wedge dI_2 \wedge dE^2 + I_2 dE^2 \wedge dI_1 \wedge dE^1 \\ d\Theta_G \wedge d\Theta_G &= 2dI_1 \wedge dE^1 \wedge dI_2 \wedge dE^2 \\ d\Theta_G \wedge d\Theta_G \wedge d\Theta_G &= 0; \end{aligned} \quad (2-35)$$

concluimos que  $r = 5$  y que las soluciones (2-34) serán de dimensión dos.



## Invariancia de Legendre y la forma de contacto

Supongamos que seleccionamos un sistema de coordenadas en particular,

$$\{Z^A\} = \{U, S, V, T, -P\}. \quad (2-36)$$

En la notación termodinámica esto es conocido como la representación de la energía interna y su 1-forma de Gibbs asociada es:

$$\Theta_G = dU - TdS + PdV. \quad (2-37)$$

Una transformación parcial de Legendre nos lleva de la representación de la energía interna a la energía libre de Helmholtz  $F$ . Denotemos a las coordenadas para esta representación como:

$$\{\tilde{Z}^A\} = \{F, \tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{T}, -\tilde{P}\}. \quad (2-38)$$

La transformación esta dada por:

$$\begin{aligned} U &= F - \tilde{S}\tilde{T} \\ S &= -\tilde{T} \\ V &= \tilde{V} \\ T &= \tilde{S} \\ P &= \tilde{P}. \end{aligned} \quad (2-39)$$

Con lo que podemos expresarle de la siguiente manera,

$$\{U, S, V, T, -P\} \rightarrow \{F, T, V, -S, -P\}, \quad (2-40)$$

y la 1-forma asociada será,

$$\tilde{\Theta}_G = dF + SdT + PdV. \quad (2-41)$$

## Métrica $G$ del espacio fase e invariancia de Legendre

La métrica (2-16) para el sistema de coordenadas dadas por  $\{Z^A\} = \{\Phi, E^1, E^2, I^1, I^2\}$  es:

$$G = (d\Phi - I_1 dE^1 - I_2 dE^2)^2 + \Lambda \left[ (E_1 I_1)^{2k+1} dE^1 dI^1 + (E_2 I_2)^{2k+1} dE^2 dI^2 \right]. \quad (2-42)$$

La ecuación anterior es una forma general para la métrica. De acuerdo al problema a tratar, podemos seleccionar un conjunto de coordenadas termodinámicas junto con un potencial termodinámico. Si utilizamos específicamente las coordenadas  $\{Z^A\} = \{U, S, V, T, -P\}$ , que son la representación de la energía, la métrica adquiere la forma siguiente:

$$G = (dU - T dS + P dV)^2 + \Lambda \left[ (ST)^{2k+1} dS dT - (-VP)^{2k+1} dV dP \right]. \quad (2-43)$$

Sobre la métrica  $G$  dada por la relación (2-43) podemos calcular directamente su naturaleza invariante con respecto a transformaciones de Legendre. Primero seleccionemos una transformación total de Legendre  $\{U, S, V, T, -P\} \rightarrow \{\tilde{U}, \tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{T}, -\tilde{P}\}$  dada por:

$$\begin{aligned} U &= \tilde{U} - \tilde{S}\tilde{T} + \tilde{P}\tilde{V} \\ S &= -\tilde{T} \\ V &= \tilde{P} \\ T &= \tilde{S} \\ -P &= \tilde{V}. \end{aligned} \quad (2-44)$$

La matriz de transformación de coordenadas esta dada por:

$$\frac{\partial Z^A}{\partial \tilde{Z}^B} = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{T} & \tilde{P} & -\tilde{S} & \tilde{V} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2-45)$$

La métrica  $G$  puede ser escrita como:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -T & P & 0 & 0 \\ -T & T^2 & -TP & \frac{\Lambda}{2} (ST)^{2k+1} & 0 \\ P & -TP & P^2 & 0 & \frac{\Lambda}{2} (VP)^{2k+1} \\ 0 & \frac{\Lambda}{2} (ST)^{2k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda}{2} (VP)^{2k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2-46)$$

Aplicando a los elementos de esta métrica la transformación de Lagrange dada en (2-43), obtenemos:

$$G' = G(Z^A \rightarrow \tilde{Z}^A) = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{S} & -\tilde{V} & 0 & 0 \\ -\tilde{S} & \tilde{S}^2 & \tilde{S}\tilde{V} & -\frac{\Lambda}{2} (\tilde{T}\tilde{S})^{2k+1} & 0 \\ -\tilde{V} & \tilde{S}\tilde{V} & \tilde{V}^2 & 0 & -\frac{\Lambda}{2} (\tilde{P}\tilde{V})^{2k+1} \\ 0 & -\frac{\Lambda}{2} (\tilde{T}\tilde{S})^{2k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Lambda}{2} (\tilde{P}\tilde{V})^{2k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-47)$$

Con lo cual podemos calcular  $\tilde{G} = \left(\frac{\partial Z^A}{\partial \tilde{Z}^B}\right)^T G' \frac{\partial Z^A}{\partial \tilde{Z}^B}$ , el resultado es:

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{T} & \tilde{P} & 0 & 0 \\ -\tilde{T} & \tilde{T}^2 & -\tilde{P}\tilde{T} & \frac{1}{2}\Lambda (\tilde{S}\tilde{T})^{2k+1} & 0 \\ \tilde{P} & -\tilde{P}\tilde{T} & \tilde{P}^2 & 0 & \frac{1}{2}\Lambda (\tilde{P}\tilde{V})^{2k+1} \\ 0 & \frac{1}{2}\Lambda (\tilde{S}\tilde{T})^{2k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\Lambda (\tilde{P}\tilde{V})^{2k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2-48)$$

Acabamos de demostrar que la métrica seleccionada cumple con el requisito de ser invariante de Legendre.

### Espacio de estados de equilibrio

El espacio fase  $\mathcal{T}$  que seleccionamos utiliza las coordenadas:

$$\{Z^A\} = \{\Phi, E^1, E^2, I^1, I^2\}. \quad (2-49)$$

Para definir el espacio de estados de equilibrio tenemos que especificar un mapa suave  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$  que en este caso esta dado por:

$$\varphi : (E^1, E^2) \mapsto (\Phi(E^1, E^2), E^1, E^2, I^1(E^1, E^2), I^2(E^1, E^2)). \quad (2-50)$$

El pullback debe de cumplir la siguiente identidad:

$$\varphi^* (d\Phi - I_1 dE^1 - I_2 dE^2) = 0. \quad (2-51)$$

Las condiciones de equilibrio están dadas específicamente por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E^1} = I_1; \quad (2-52)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E^2} = I_2. \quad (2-53)$$

La primera ley de la termodinámica es establecida como:

$$d\Phi - I_1 dE^1 - I_2 dE^2 = 0. \quad (2-54)$$

Para obtener las ecuaciones (2-23) denotaremos a:

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial E^1} = I^1; \quad (2-55)$$

$$\Phi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial E^2} = I^2. \quad (2-56)$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned}
 d\Phi &= \Phi_1 dE^1 + \Phi_2 dE^2; \\
 dI^1 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial E^1} dE^1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial E^2} dE^2 \\
 &= \Phi_{11} dE^1 + \Phi_{21} dE^2; \\
 dI^2 &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial E^1} dE^1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial E^2} dE^2 \\
 &= \Phi_{12} dE^1 + \Phi_{22} dE^2.
 \end{aligned} \tag{2-57}$$

Las relaciones que acabamos de describir nos darán un método para obtener la métrica del espacio de estados de equilibrio. Estas relaciones son las que, en su forma generalizada, nos llevan a inferir la ecuación (2-32). En la siguiente sección deduciremos la forma general para la métrica  $g$  utilizando las ecuaciones (2-57); este método nos ayudará a ganar comprensión en la forma en la que el **pullback puede ser utilizado para obtener información de objetos geométricos del espacio fase, lo cual nos ayudará a interpretarlos físicamente.**

### La métrica $g$ en el espacio de estados de equilibrio

En el ejemplo que estamos desarrollando la variedad  $\mathcal{E}$  es un encaje de la variedad  $\mathcal{T}$ . La variedad  $\mathcal{E}$  es de dimensión dos, la cual describimos utilizando las coordenadas  $\{E^1, E^2\}$ . Para esta variedad, la métrica de Riemann más general se puede escribir como  $g = g_{ab} dE^a dE^b$ , con  $a, b \in \{1, 2\}$ .

La métrica  $G$  induce en el espacio de estados de equilibrio una familia de métricas  $g$  a partir de la relación  $\varphi^*(G) = g$ . Este es el sentido que damos al decir que utilizando la GTD podemos estudiar cualquier sistema termodinámico con dos grados de libertad. Un problema termodinámico en específico corresponde a la elección de una ecuación fundamental. Debemos de ser capaces de definir la métrica  $g$  utilizando directamente el pullback, que es equivalente en el problema de dos grados de libertad a utilizar las relaciones (2-23). Partiendo de la métrica  $G$  dada por (2-42) y la condición (2-18) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi^*(G) &= \varphi^* \left\{ (d\Phi - I_1 dE^1 - I_2 dE^2)^2 + \Lambda \left[ (E_1 I_1)^{2k+1} dE^1 dI^1 + (E_2 I_2)^{2k+1} dE^2 dI^2 \right] \right\} \\
&= (\Phi_1 dE^1 + \Phi_2 dE^2 - \Phi_1 dE^1 - \Phi_2 dE^2)^2 + \Lambda \left[ \begin{array}{l} (E_1 \Phi_1)^{2k+1} dE^1 (\Phi_{11} dE^1 + \Phi_{21} dE^2) \\ + (E_2 \Phi_2)^{2k+1} dE^2 (\Phi_{12} dE^1 + \Phi_{22} dE^2) \end{array} \right]. \\
&= \Lambda \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{11} (\Phi_1 E_1)^{2k+1} (dE^1)^2 \\ + \Phi_{22} (\Phi_2 E_2)^{2k+1} (dE^2)^2 \\ + \left[ \Phi_{21} (\Phi_1 E_1)^{2k+1} + \Phi_{12} (\Phi_2 E_2)^{2k+1} \right] dE^1 dE^2 \end{array} \right\}. \tag{2-58}
\end{aligned}$$

La métrica más general para un sistema con dos grados de libertad estará dada por la siguiente relación:

$$g = \Lambda \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (E^1)^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial E^1} E_1 \right)^{2k+1} (dE^1)^2 \\ + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (E^2)^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial E^2} E_2 \right)^{2k+1} (dE^2)^2 \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial E^1 \partial E^2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial E^1} E_1 \right)^{2k+1} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial E^2} E_2 \right)^{2k+1} \right] dE^1 dE^2 \end{array} \right\}. \tag{2-59}$$

A partir de esta métrica podemos construir las ecuaciones geodésicas, las cuales son interpretadas como los procesos cuasi-estáticos. El otro ingrediente geométrico que podemos obtener de la métrica esta relacionado con la curvatura. Un sistema tiene interacción termodinámica cuando su curvatura es diferente de cero. Para observar una aplicación directa desarrollaremos dos ejemplos de sistemas termodinámicos.

### 2.3.2. El gas ideal como sistema termodinámico con dos grados de libertad

Uno de los propósitos de la GTD ha sido mostrar que la curvatura de la métrica termodinámica  $g$  es una medida de la interacción termodinámica. El ejemplo clásico es el del gas ideal. El caso del gas ideal que corresponde a dos grados de libertad es conocido como gas monocomponente. En el gas ideal la ecuación fundamental esta dada por:

$$U(S, V) = \left[ \frac{\exp\left(\frac{S}{k_B}\right)}{V} \right]^{2/3}, \tag{2-60}$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzman. Para el gas ideal utilizaremos la representación de la entropía, de tal forma que las coordenadas para el espacio fase son  $Z^A = \{S, U, V, \frac{1}{T}, \frac{P}{T}\}$ . La métrica  $G$  toma la forma:

$$G = \left( dS - \frac{1}{T}dU - \frac{P}{T}dV \right) + \Lambda \left[ \left( \frac{U}{T} \right)^{2k+1} dU d\left( \frac{1}{T} \right) + \left( \frac{VP}{T} \right)^{2k+1} dV d\left( \frac{P}{T} \right) \right]. \quad (2-61)$$

Y la métrica  $g$  para el estado de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$ , el descrito por las coordenadas  $E^A = \{U, V\}$ , es:

$$g = \Lambda \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \left( U \frac{\partial S}{\partial U} \right)^{2k+1} (dU)^2 \\ + \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \left( V \frac{\partial S}{\partial V} \right)^{2k+1} (dV)^2 \\ + \frac{\partial S}{\partial U \partial V} \left[ \left( U \frac{\partial S}{\partial U} \right)^{2k+1} + \left( V \frac{\partial S}{\partial V} \right)^{2k+1} \right] dU dV \end{array} \right\}. \quad (2-62)$$

Escribiendo la ecuación fundamental en términos de la entropía  $S$ , explícitamente:

$$S(U, V) = k_B \left( \frac{3}{2} \ln U + \ln V \right);$$

la métrica (2-62) se transforma en:

$$g = -\Lambda k_B^{2k+2} \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^{2k+2} \frac{(dU)^2}{U^2} + \frac{(dV)^2}{V^2} \right\}. \quad (2-63)$$

Toda la información geométrica debe de estar contenida en esta métrica. Al hacer la elección de los parámetros  $\Lambda = -1$  y  $k = -1$ , entonces la métrica toma la forma:

$$g = \frac{(dU)^2}{U^2} + \frac{(dV)^2}{V^2}. \quad (2-64)$$

Esta métrica puede ser puesta en forma plana al hacer la transformación  $\xi = \ln U$  y  $\eta = \ln V$ , de tal forma que la métrica es:

$$g = d\xi^2 + d\eta^2 \quad (2-65)$$

La restricción que tenemos hasta el momento es que  $\xi, \eta \geq 0$ . En consecuencia las geodésicas del gas ideal pueden ser descritas la ecuación:

$$\xi = c_1\eta + c_0; \quad (2-66)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración. Vistas esta última ecuación en un plano  $\xi\eta$  tendremos una línea recta las cuales serán los procesos cuasi-estáticos. El razonamiento para asociar a las geodésicas con los procesos cuasi-estáticos es debido a que estas pueden ser vistas como una sucesión densa de estados termodinámicos; definición que coincide con la de la termodinámica.

Podemos utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange para estudiar las geodésicas de este sistema. Para este caso el Lagrangiano esta dado por:

$$L_g = -\Lambda k_B^{2k+2} \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^{2k+2} \left( \frac{\dot{U}}{U} \right)^2 + \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^2 \right\}; \quad (2-67)$$

donde la notación con punto denota una derivada por un parámetro afín  $\lambda$ , esto es  $\frac{d}{d\lambda}$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\dot{U}}{U^2} \right) + \frac{\dot{U}^2}{U^3} = 0; \quad (2-68)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\dot{V}}{V^2} \right) + \frac{\dot{V}^2}{V^3} = 0. \quad (2-69)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir de la siguiente manera:

$$U \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\dot{U}}{U^2} \right) + \left( \frac{\dot{U}}{U} \right)^2 = 0;$$

$$V \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\dot{V}}{V^2} \right) + \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^2 = 0.$$

De estas ecuaciones podemos deducir las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (\ln UV) = c_m &\implies UV = A \exp [c_m (\lambda + c_1)] \\ \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{U}{V} = c_n &\implies \frac{U}{V} = B \exp [c_n (\lambda + c_2)] \\ \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{V}{U} = c_p &\implies \frac{V}{U} = C \exp [c_p (\lambda + c_3)] \end{aligned}$$



donde las  $c$ 's son constantes. La manipulación de las anteriores nos lleva a una solución para el sistema dada por:

$$U = mV; \tag{2-70}$$

con  $m$  una constante. Esta última relación es una confirmación de la encontrada en (2-66), es decir, ambas nos dicen que las geodésicas, o los procesos cuasi-estáticos, son rectas.

### 2.3.3. Agujero negro de Reissner-Nordström como sistema termodinámico con dos grados de libertad

Utilizando el teorema de no pelo para la teoría de Einstein-Maxwell, aplicada a los agujeros negros, nos permite describirles utilizando tres parámetros: su masa  $M$ ; momento angular  $J$ ; y carga eléctrica  $Q$ . En 1973, Bekenstein descubrió que el área de horizonte<sup>2</sup>  $A$  de un agujero negro se comporta como la entropía de un sistema termodinámico clásico. Esto es el comienzo de lo que se conoce como termodinámica de agujeros negros.

Un sistema termodinámico con dos grados de libertad puede ser aplicado para el estudio del agujero negro de Reissner-Nordström. Este puede ser entendido como un agujero negro cargado, estático y esféricamente simétrico. La métrica que le describe es:

$$ds = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Donde,

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = \frac{1}{r^2} (r - r_+) (r - r_-).$$

Con la siguiente definición:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}.$$

El horizonte de eventos interior y exterior están situados en  $r_-$  y  $r_+$  y el área de horizonte exterior es  $A = 4\pi r_+^2$ .

---

<sup>2</sup>El horizonte de eventos es una hipersuperficie frontera en el espacio tiempo. En esta superficie, los eventos que suceden de un lado de ella no afectan a un observador situado del otro lado.

La información termodinámica asociada con el agujero negro de Reissner-Nordström es dada por la ecuación fundamental en la representación de la entropía:

$$S = \frac{1}{4}A = \pi \left( M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right).$$

Con esta ecuación, aplicando los principios utilizados en GTD, bastaría con encontrar la métrica  $g$  asociada al espacio de estados de equilibrio. Acortamos la discusión sobre la obtención de esta métrica para presentar los resultados. La métrica del espacio de estados de equilibrio esta dada por:

$$\begin{aligned} g_{ab}^{RN} &= \left( M \frac{\partial S}{M} + Q \frac{\partial S}{Q} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial M^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial S}{\partial Q^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{8\pi r_+^3}{(r_+ - r_-)^2} \begin{pmatrix} 2r_+(r_+ - 3r_-) & 0 \\ 0 & r_+^2 + 3r_-^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2-71)$$

La métrica (2-71) es el pullback de una métrica  $G$  que es invariante solo ante transformaciones totales (Álvarez *et al.* [2008]). El análisis de este sistema lo hacemos utilizando el escalar de curvatura, el resultado del cálculo nos da:

$$R^{RN} = \frac{(r_+^2 - 3r_-r_+ + 6r_-^2)(r_+ - 3r_-)(r_+ - r_-)^2}{\pi^2 r_+^3 (r_+^2 + 3r_-^2)^2 (r_+ - 3r_-)^2}.$$

La primera conclusión que podemos obtener es que en el límite,  $r_+ \rightarrow r_-$ , la métrica se vuelve plana. Esto significa que debe de existir un sistema de coordenadas diferente en el cuál la métrica (2-71) no diverja en el límite. Adicionalmente, en la curvatura observamos una indeterminación cuando  $r_+ = 3r_-$ . Este punto en particular corresponde a aquel en el cuál existe una transición de fase para la capacidad calorífica calculada para este sistema utilizando la termodinámica de agujeros negros. En base a el ejemplo mostrado, observamos que la GTD puede predecir transiciones de fase, las cuales están asociadas con puntos singulares de la curvatura.

## 2.4. Referencias

Un resumen con las ideas básicas de la GTD puede encontrarse en (Quevedo y Quevedo [2011]). El principal ingrediente que distingue al espacio fase geometrotermodinámico con los anteriores esquemas para el mismo es la invariancia de Legendre tanto para la métrica de Riemann como para la 1-forma de Gibbs. Para entender el proceso de pensamiento que llevo a la introducción del espacio fase y a la elección de una variedad se puede referir a (Mrugala [1985]). En principio, la idea de utilizar una variedad de contacto fue propuesta en (Hermann [1973]), más en este trabajo aún nos se hablaba sobre una variedad diferente que fuera la que contiene los procesos cuasi-estáticos. En el artículo (Mrugala [1978]) se comienza a estudiar las sub-variedades de  $T$ . En particular un encaje  $\varphi$  que cumpla la condición  $\varphi^*(\Phi) = 0$  es presentada como un alias para la primera ley de la termodinámica. La inducción de una métrica  $g$  en  $\mathcal{E}$ , utilizando la relación  $\varphi^*(G) = g$ , es presentada por primera ocasión en el artículo (Quevedo [2007]), el cual es la primera referencia para la GTD.

Las aplicaciones a diferentes sistemas termodinámicos con dos grados de libertad es expuesto de manera general en el trabajo (Quevedo *et al.* [2010]), en este mismo artículo encontramos el primer ejemplo para un sistema determinado, el gas ideal. De nueva cuenta, podemos utilizar a (Quevedo [2007]) como nuestro punto de partida en las aplicaciones de la GTD. Con más detalle, el gas ideal es analizado en (Quevedo *et al.* [2008]). Las aplicaciones para agujeros negros tanto para dos grados de libertad como para tres es expuesta en (Álvarez *et al.* [2008]). Convenimos al lector para que lea estas últimas referencias.

## Capítulo 3

# Propiedades geométricas del Espacio Fase Geometrotermodinámico

En la introducción hemos dicho que las características de la geometría intrínseca pueden ser estudiadas a partir de las geodésicas. Matemáticamente el estudio de las geodésicas nos da información de las propiedades locales de una variedad. Para esto, debemos de entender la relación que tiene las geodésicas con la curvatura. Otra clase de información obtenida a través de las geodésicas viene dada para una variedad completa, en la cuál, utilizando el teorema de Hopf y Rinow, sabemos que para cualesquiera dos puntos podemos encontrar una geodésica que los une.

Aunque las geodésicas como objetos matemáticos nos pueden brindar información sobre una variedad, el objetivo principal de esta tesis es buscar qué información física podemos obtener a partir de ellas. La pregunta sigue en el aire: ¿cuál es la importancia de una geodésica para un sistema físico? La respuesta la encontramos en trabajos previamente realizados y desde luego en la teoría de la relatividad general en donde las geodésicas representan los caminos en el espacio tiempo que describen los cuerpos en caída libre. Podemos considerar también líneas que nos son geodésicas en el espacio tiempo; estas representan movimientos acelerados. La magnitud de la aceleración es medida en términos del espacio tiempo como la curvatura de una línea de mundo. De manera generalizada, al tener una variedad y una conexión, las geodésicas asociadas a la conexión serán las líneas que representan los movimientos inerciales. ¿Qué importancia tiene las

geodésicas para variedades más generales que el espacio tiempo? La respuesta a esta pregunta comienza al dar un sentido general a la variedad y utilizarla para describir otro tipo de teorías físicas.

En el formalismo Geometrotermodinámica las geodésicas en el espacio de estados de equilibrio son interpretadas como procesos cuasi estáticos asociados a un sistema termodinámico. La curvatura, concepto fuertemente unido a las geodésicas, es interpretada como la interacción. El objetivo que tenemos trazado es saber que información podemos obtener de las geodésicas del espacio fase.

### 3.1. Curvatura

En GTD identificamos la curvatura del espacio de equilibrio con la interacción termodinámica. La interpretación de interacción termodinámica esta basada en un tratamiento estadístico. Todas las propiedades de un sistema pueden ser derivadas explícitamente de su Hamiltoniano correspondiente, en el cual la interacción entre partículas de un sistema es descrito por su parte potencial. En consecuencia, si el potencial es nulo, entonces no hay interacción termodinámica. Esto se puede ver de manera muy clara en el ejemplo que hemos dado sobre el gas ideal.

Para calcular el escalar de curvatura del espacio fase, y sentar un precedente para su estudio, utilizamos un espacio con dos grados de libertad termodinámico. Las coordenadas de este espacio están dadas por  $\{Z^A\} = \{\Phi, E^1, E^2, I^1, I^2\}$ . De tal forma que la métrica (2-42) adquiere la forma:

$$G = (d\Phi - I_1 dE^1 - I_2 dE^2)^2 + \Lambda \left[ (E_1 I_1)^{2k+1} dE^1 dI^1 + (E_2 I_2)^{2k+1} dE^2 dI^2 \right]. \quad (3-1)$$

Realizar el cálculo del tensor de curvatura y del escalar de curvatura, requeriría al menos  $5^4$  objetos a calcular. Debido a la dificultad para realizar esto, realizamos nuestros propias algoritmos en un lenguaje de programación con capacidad para cálculo simbólico<sup>1</sup>. El resultado obtenido para el escalar de curvatura es:

---

<sup>1</sup>El lenguaje de programación utilizado es python y la librería utilizada es sympy.

$$R = -\frac{2}{\Lambda^2 E_1^2 E_2^2 I_1^2 I_2^2} \frac{E_1^2 I_1^2 (E_1 I_1)^{4k} + E_2^2 I_2^2 (E_2 I_2)^{4k}}{(E_1 I_1)^{4k} (E_2 I_2)^{4k}}. \quad (3-2)$$

El escalar de curvatura es nulo solamente si se cumple la siguiente condición:

$$(E_1 I_1)^{2k+1} = - (E_2 I_2)^{2k+1} \quad (3-3)$$

La última relación derivaría en una relación entre números complejos, de tal manera que en general podemos asumir que el espacio fase, en este ejemplo es curvo.

## 3.2. Ecuaciones Geodésicas

Utilizando el concepto de la derivada covariante, definimos el paralelismo que es utilizado para definir las geodésicas. Este concepto es definido en la ecuación (B-17). Intuitivamente debemos de comprender que el proceso lleva a la relación (B-17) como aquel en que la característica que define a la geodésica es: **una curva cuyo vector tangente se transporta paralelamente a lo largo de ella; o dicho de otra forma, una curva cuyo vector tangente siempre hace el mismo ángulo con ella.** El punto que debemos de destacar es que esta definición no depende de tener una estructura de Riemann.

Por otra parte, basandonos en los principios variacionales; utilizando una primera variación podemos llegar también al concepto de geodésicas. La idea es reformular el concepto de **geodésica como una curva extremal cuya primera variación sea cero.** Utilizar una variación es una técnica matemática que está unida conceptualmente con la idea física de encontrar puntos críticos para un problema dinámico. En principio, utilizar una variación nos brinda información física de manera inmediata al saber que una constante en la variación puede ser interpretada como una simetría del sistema. En este punto encontramos una ventaja al utilizar geometría Riemanniana; debido a que la métrica de Riemann del sistema puede ser utilizada para observar cuales cantidades físicas son conservadas.

### 3.2.1. Análisis para la ecuación geodésica $\Phi$

El Lagrangiano correspondiente al sistema definido con la métrica (2-16) es,

$$L_G = \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 + \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda}. \quad (3-4)$$

La ecuación de Euler-Lagrange que corresponde a la coordenada  $\Phi$  es

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L_G}{\partial \dot{\Phi}} \right) - \frac{\partial L_G}{\partial \Phi} = 0. \quad (3-5)$$

Realizamos el cálculo para cada uno de los elementos de esta ecuación comenzando con  $\frac{\partial L_G}{\partial \Phi}$ :

$$\frac{\partial L_G}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 + \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] = 0,$$

esto debido a que ninguno de los elementos del lagrangiano es función de  $\Phi$ . El siguiente elemento a analizar es  $\frac{\partial L_G}{\partial \dot{\Phi}}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_G}{\partial \dot{\Phi}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 + \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] + \frac{d}{d\dot{\Phi}} \left[ \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right], \end{aligned}$$

de manera inmediata observamos,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \left[ \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] = 0, \quad (3-6)$$

debido a que ningún término dentro del paréntesis depende explícitamente de  $\dot{\Phi}$ .

El término que queda es una función que si depende de  $\dot{\Phi}$ , por lo tanto aplicamos la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] &= 2 \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) \\ &= 2 \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right) \\ &= 2 \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right), \end{aligned}$$

de tal manera que la relación que buscamos es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_G}{\partial \dot{\Phi}} &= 2 \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) \\ &= 2 \left( \dot{\Phi} - I_a \dot{E}^a \right).\end{aligned}\tag{3-7}$$

Las relaciones (3-6) y (3-7), puestas en (3-5) nos indican que:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \dot{\Phi} - I_a \dot{E}^a \right) = 0,$$

de tal forma que lo que se encuentra dentro del paréntesis debe de ser una constante. A esta constante la llamaremos  $C_\Phi$ , para indicar su dependencia con  $\Phi$ . La expresión final es:

$$\dot{\Phi} - I_a \dot{E}^a = C_\Phi.\tag{3-8}$$

De esta relación observamos que al buscar la ecuación de Euler-Lagrange para el parámetro  $\Phi$ , encontramos en su lugar una primera integral. Esta primera integral será interpretado físicamente más adelante.

### 3.2.2. Análisis para las ecuaciones geodésicas $I_c$

Las ecuaciones geodésicas correspondientes a  $I_c$  se analizan comenzando con sus ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L_G}{\partial \dot{I}_c} \right) - \frac{\partial L_G}{\partial I_c} = 0,\tag{3-9}$$

donde debemos de notar que el término  $I_c$  es una coordenada intrínseca en específico. Dicho lo anterior escribimos para  $\frac{\partial L_G}{\partial I_c}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_G}{\partial I_c} &= \frac{\partial}{\partial I_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 + \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial I_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial I_c} \left[ \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right],\end{aligned}$$



para los sumandos de esta última ecuación tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial I_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] &= 2 \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial I_c} \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) \\ &= -2 \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) \left( \frac{dE^c}{d\lambda} \right);\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial I_c} \left[ \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] &= \Lambda \frac{\partial}{\partial I_c} \left[ (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] \\ &= (2k+1) \Lambda E_c^{2k+1} I_c^{2k} \frac{dE^c}{d\lambda} \frac{dI^c}{d\lambda}.\end{aligned}$$

El resultado para  $\frac{\partial L_G}{\partial I_c}$  es,

$$\frac{\partial L_G}{\partial I_c} = -2 \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) \left( \frac{dE^c}{d\lambda} \right) + (2k+1) \Lambda E_c^{2k+1} I_c^{2k} \frac{dE^c}{d\lambda} \frac{dI^c}{d\lambda},$$

la cuál puede ser reducida al utilizar (3-8):

$$\frac{\partial L_G}{\partial I_c} = (2k+1) \Lambda E_c^{2k+1} I_c^{2k} \dot{E}^c \dot{I}^c - 2C_\Phi \dot{E}^c. \quad (3-10)$$

Analícemos ahora  $\frac{\partial L_G}{\partial \dot{I}_c}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_G}{\partial \dot{I}_c} &= \frac{\partial}{\partial \dot{I}_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 + \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{I}_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial \dot{I}_c} \left[ \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right],\end{aligned}$$

la no dependencia por  $\dot{I}_c$  nos indica que:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{I}_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] = 0.$$

El término restante es:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{I}_c} \left[ \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] = \Lambda (E_c I_c)^{2k+1} \frac{dE^c}{d\lambda},$$

con lo cual:

$$\frac{\partial L_G}{\partial \dot{I}_c} = \Lambda (E_c I_c)^{2k+1} \frac{dE^c}{d\lambda},$$

esta relación la debemos de derivar con respecto al parámetro  $\lambda$ , para el resultado debemos de utilizar la regla de la cadena, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L_G}{\partial \dot{I}_c} \right) &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \Lambda (E_c I_c)^{2k+1} \frac{dE^c}{d\lambda} \right] \\ &= \Lambda \left\{ \frac{d}{d\lambda} \left[ (E_c I_c)^{2k+1} \right] \frac{dE^c}{d\lambda} + (E_c I_c)^{2k+1} \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{dE^c}{d\lambda} \right] \right\} \\ &= \Lambda \left\{ (2k+1) (E_c I_c)^{2k} \frac{d}{d\lambda} (E_c I_c) \frac{dE^c}{d\lambda} + (E_c I_c)^{2k+1} \frac{d^2 E^c}{d\lambda^2} \right\} \\ &= \Lambda \left\{ (2k+1) (E_c I_c)^{2k} \left( E_c \frac{dI_c}{d\lambda} + I_c \frac{dE_c}{d\lambda} \right) \frac{dE^c}{d\lambda} + (E_c I_c)^{2k+1} \frac{d^2 E^c}{d\lambda^2} \right\}, \end{aligned}$$

la cual escribimos de manera compacta como:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L_G}{\partial \dot{I}_c} \right) = \Lambda (E_c I_c)^{2k} \left[ (E_c I_c) \ddot{E}^c + (2k+1) (E_c \dot{I}_c + I_c \dot{E}_c) \dot{E}^c \right]. \quad (3-11)$$

Utilizamos (3-10) y (3-11), en (3-9) para encontrar la ecuación relacionada para el parámetro  $I_c$ , esto es:

$$\Lambda (E_c I_c)^{2k} \left[ (E_c I_c) \ddot{E}^c + (2k+1) (E_c \dot{I}_c + I_c \dot{E}_c) \dot{E}^c \right] - (2k+1) \Lambda E_c^{2k+1} I_c^{2k} \dot{E}^c \dot{I}^c + 2C_\Phi \dot{E}^c = 0,$$

la cuál escribimos de manera compacta como:

$$\Lambda (E_c I_c)^{2k} I_c \left[ E_c \ddot{E}^c + (2k+1) (\dot{E}^c)^2 \right] + 2C_\Phi \dot{E}^c = 0, \quad (\text{no suma}) \quad (3-12)$$

y que de manera compacta es escrita como:

$$\Lambda I_c^{2k+1} \frac{d}{d\lambda} \left( E_c^{2k+1} \dot{E}^c \right) + 2C_\Phi \dot{E}^c = 0. \text{ (no suma)} \quad (3-13)$$

La ecuación (3-12) es una ecuación para una sola coordenada  $E_c$  aunque hay que notar que es la ecuación la ecuación de Euler-Lagrange para  $I_c$ . Es importante decir que en esta ecuación, aunque haya índices repetidos, no estamos tomando la convención de la suma. Este punto debe de ser claro dado que más adelante combinaremos con las ecuaciones de correspondientes a  $E_c$ . Hasta este momento vemos que existe, de alguna manera, una dependencia entre las ecuaciones de Euler-Lagrange para los parámetros  $I_c$ ; ¡Estas ecuaciones están en términos de  $E_c$ !

### 3.2.3. Análisis para las ecuaciones geodésicas $E_c$

En la sección anterior encontramos un comportamiento, que de momento es extraño, en el cual la ecuación de Euler-Lagrange para  $I_c$  nos dio una ecuación en términos de  $E_c$ . Veamos si este mismo caso se presenta para la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a  $E_c$ . La ecuación para el parámetro  $E_c$  es:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L_G}{\partial \dot{E}^c} \right) - \frac{\partial L_G}{\partial E_c} = 0, \quad (3-14)$$

notamos de ahora que  $E_c$  es un parámetro extrínseco. Para  $\frac{\partial L_G}{\partial E_c}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_G}{\partial E_c} &= \frac{\partial}{\partial E_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 + \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial E_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial E_c} \left[ \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right], \end{aligned}$$

el primer sumando es igual a cero debido a que no depende de  $E_c$ ,

$$\frac{\partial}{\partial E_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] = 0.$$

para el otro sumando utilizamos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial E_c} \left[ \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] &= \Lambda \frac{\partial}{\partial E_c} \left[ (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] \\ &= \Lambda (2k+1) E_c^{2k} I_c^{2k+1} \frac{dE^c}{d\lambda} \frac{dI^c}{d\lambda},\end{aligned}$$

el resultado para el término  $\frac{\partial L_G}{\partial E_c}$  es entonces:

$$\frac{\partial L_G}{\partial E_c} = \Lambda (2k+1) E_c^{2k} I_c^{2k+1} \frac{dE^c}{d\lambda} \frac{dI^c}{d\lambda}.$$

Escribimos esta expresión en forma compacta:

$$\frac{\partial L_G}{\partial E_c} = \Lambda (2k+1) E_c^{2k} I_c^{2k+1} \dot{E}^c \dot{I}^c, \quad (3-15)$$

notamos que este término, en contraste con el correspondiente para  $\frac{\partial L_G}{\partial I_c}$ , no depende de la constante  $C_\Phi$ .

La dependencia con  $C_\Phi$  entra al analizar  $\frac{\partial L_G}{\partial \dot{E}_c}$ . Explicitamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_G}{\partial \dot{E}_c} &= \frac{\partial}{\partial \dot{E}_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 + \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{E}_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial \dot{E}_c} \left[ \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right].\end{aligned}$$

En particular para el primer sumando tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot{E}_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] &= 2 \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{E}_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) \right] \\ &= -2I_c \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right).\end{aligned}$$

Este término es el que tiene una dependencia con  $C_\Phi$ , debido a que de acuerdo con la relación (3-8):

$$\frac{\partial}{\partial \dot{E}_c} \left[ \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} - I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right)^2 \right] = -2C_\Phi I_c.$$

Con el otro término, observamos:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{E}_c} \left[ \Lambda (E_a I_a)^{2k+1} \frac{dE^a}{d\lambda} \frac{dI^a}{d\lambda} \right] = \Lambda (E_c I_c)^{2k+1} \frac{dI^c}{d\lambda}.$$

Llegamos a la expresión para  $\frac{\partial L_G}{\partial \dot{E}_c}$ :

$$\frac{\partial L_G}{\partial \dot{E}_c} = \Lambda (E_c I_c)^{2k+1} \dot{I}^c - 2C_\Phi I_c.$$

En esta última expresión ya hemos utilizado la notación con punto para denotar la derivada con respecto de  $\lambda$ , el término que finalmente buscamos es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L_G}{\partial \dot{E}_c} \right) &= \frac{d}{d\lambda} \left( \Lambda (E_c I_c)^{2k+1} \dot{I}^c - 2C_\Phi I_c \right) \\ &= \Lambda \frac{d}{d\lambda} \left[ (E_c I_c)^{2k+1} \dot{I}^c \right] - 2C_\Phi \dot{I}_c. \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\lambda} \left[ (E_c I_c)^{2k+1} \dot{I}^c \right] &= \Lambda \left[ (E_c I_c)^{2k+1} \frac{d}{d\lambda} \dot{I}^c + \dot{I}^c \frac{d}{d\lambda} (E_c I_c)^{2k+1} \right] \\ &= \Lambda \left[ (E_c I_c)^{2k+1} \ddot{I}^c + (2k+1) \dot{I}^c (E_c I_c)^{2k} \frac{d}{d\lambda} (E_c I_c) \right] \\ &= \Lambda (E_c I_c)^{2k} \left[ (E_c I_c) \ddot{I}^c + (2k+1) \dot{I}^c \left( I_c \dot{E}^c + E_c \dot{I}^c \right) \right] \end{aligned}$$

Ahora estamos en posición para escribir  $\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L_G}{\partial \dot{E}_c} \right)$ :

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L_G}{\partial \dot{E}_c} \right) = \Lambda (E_c I_c)^{2k} \left[ (E_c I_c) \ddot{I}^c + (2k+1) \dot{I}^c \left( I_c \dot{E}^c + E_c \dot{I}^c \right) \right] - 2C_\Phi \dot{I}_c. \quad (3-16)$$

El análisis anterior nos da como resultado la expresión para la ecuación de Euler-Lagrange

que corresponde a  $E_c$ . Utilizando (3-15) y (3-16) en (3-14):

$$\Lambda (E_c I_c)^{2k} \left[ (E_c I_c) \ddot{I}^c + (2k + 1) \dot{I}^c \left( I_c \dot{E}^c + E_c \dot{I}^c \right) \right] - 2C_\Phi \dot{I}^c - \Lambda (2k + 1) E_c^{2k} I_c^{2k+1} \dot{E}^c \dot{I}^c = 0.$$

Esta expresión se puede escribir finalmente:

$$\Lambda (E_c I_c)^{2k} E_c \left[ I_c \ddot{I}^c + (2k + 1) \left( \dot{I}^c \right)^2 \right] - 2C_\Phi \dot{I}^c = 0 \text{ (no suma)}, \quad (3-17)$$

de manera compacta podemos escribir esta ecuación como:

$$\Lambda E_c^{2k+1} \frac{d}{d\lambda} \left( I_c^{2k+1} \dot{I}^c \right) - 2C_\Phi \dot{I}^c = 0. \text{ (no suma)} \quad (3-18)$$

De nueva cuenta debemos resaltar que esta es una sola ecuación que depende de la variable  $I_c$  y que no estamos tomando la convención de la suma. En este caso encontramos que la ecuación de Euler-Lagrange para  $E_c$  es una ecuación para  $I_c$ . Este comportamiento puede indicarnos que debe de haber una relación entre estas dos ecuaciones. La respuesta la encontramos en una primera integral que puede deducirse, algebraicamente, de la expresión (3-13) y (3-18).

### 3.2.4. Soluciones para las ecuaciones geodésicas

Las ecuaciones (3-13) y (3-18) describen un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Para el caso particular de  $k = 0$ , el sistema es escrito (al eliminar los índices para ser más claros) como:

$$\ddot{E} + \frac{\left( \dot{E} \right)^2}{E} + 2 \frac{C_\Phi \dot{E}}{\Lambda I E} = 0, \quad (3-19)$$

$$\ddot{I} + \frac{\left( \dot{I} \right)^2}{I} - 2 \frac{C_\Phi \dot{I}}{\Lambda E I} = 0. \quad (3-20)$$

Utilizando integración numérica y graficando observamos un comportamiento exponencial e inversamente exponencial para estas ecuaciones. El comportamiento observado lo utilizamos como guía para proponer una solución dada por:

$$\begin{aligned}
E &= \exp\left(-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right); \\
I &= \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right),
\end{aligned} \tag{3-21}$$

donde  $\lambda_0 = \Lambda/C_\Phi$ .

Con la intuición ganada en la derivación para el caso particular anterior, proponemos una solución del tipo:

$$\begin{aligned}
E_c &= A_c \exp(-B_c \lambda) \\
I_c &= F_c \exp(B_c \lambda);
\end{aligned}$$

con  $A$ ,  $B$  y  $F$  constantes. Aplicando esta solución en las ecuaciones, encontramos el valor de las constantes que solucionan de manera general las ecuaciones para las geodésicas. La solución general para cada sistema acoplado es:

$$E_c = E_0^c \exp\left(-\frac{\lambda}{\lambda_0^c}\right); \tag{3-22}$$

$$I_c = I_0^c \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_0^c}\right); \tag{3-23}$$

donde  $I_0^c$  y  $E_0^c$  son constantes. El parámetro  $\lambda_0^c$  es también una constante, pero involucra a las demás, por lo tanto lo ponemos como una nueva ecuación:

$$\lambda_0^c = \frac{\Lambda(k+1)(I_0^c E_0^c)^{2k+1}}{C_\Phi} \tag{3-24}$$

Las relaciones hasta ahora obtenidas pueden utilizarse en la primera integral (3-8), lo cuál nos dice que:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{d\lambda} &= C_\Phi + I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \\
&= C_\Phi - \sum_c \frac{I_0^c E_0^c}{\lambda_0^c}
\end{aligned} \tag{3-25}$$

con lo cuál obtenemos una ecuación para la coordenada  $\Phi$ :

$$\Phi = \lambda_{\Phi} \lambda + \lambda_1; \quad (3-26)$$

donde:

$$\lambda_{\Phi} = C_{\Phi} - \sum_c \frac{I_0^c E_0^c}{\lambda_0^c}. \quad (3-27)$$

En resumen, las ecuaciones (3-26), (3-23) y (3-22). Son soluciones generales para cualquier parámetro  $k$  y para cualquier conjunto de coordenadas a elegir.



### 3.2.5. Gráficas para las geodésicas

Utilizamos las ecuaciones (3-26), (3-23) y (3-22) para generar una familia de geodésicas. Los ejes seleccionados cooresponden a  $I^c$ ,  $E^c$  y  $\Phi$  y los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} I_0^c &= \frac{7n}{2}; \\ E_0^c &= \frac{7n}{2}, \quad n \in \{1, 2, \dots, 9\}; \\ \lambda_0^c &= \frac{2}{3}; \\ \lambda_\Phi &= 1; \\ \lambda_1 &= 0. \end{aligned} \tag{3-28}$$

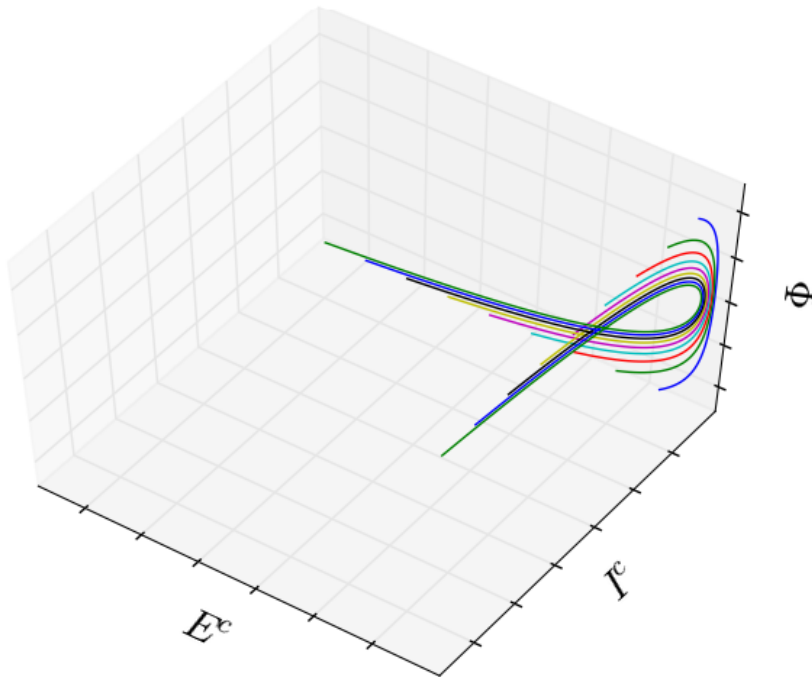


Figura 1: La perspectiva seleccionada es  $-154^\circ$  para el ángulo azimutal y  $54^\circ$  para el ángulo de elevación.

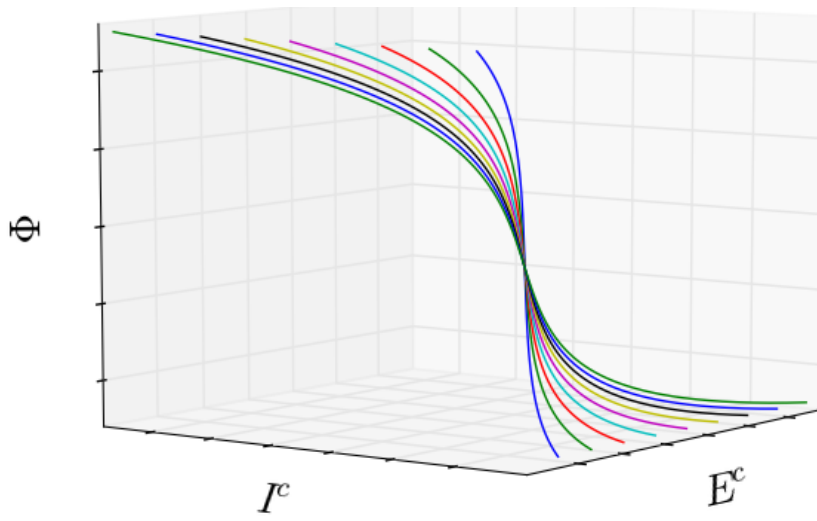


Figura 2: La perspectiva seleccionada es  $143^\circ$  para el ángulo azimutal y  $8^\circ$  para el ángulo de elevación.

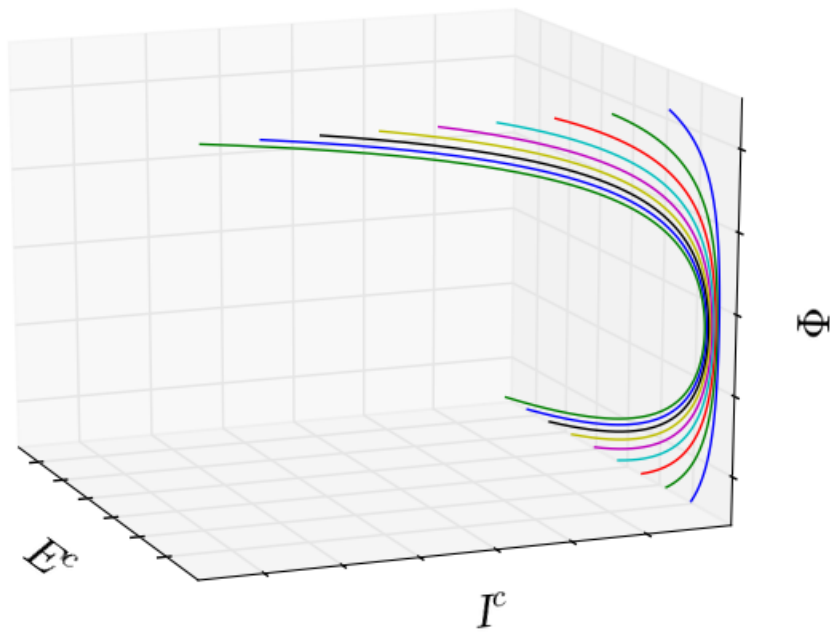


Figura 3: La perspectiva seleccionada es  $158^\circ$  para el ángulo azimutal y  $15^\circ$  para el ángulo de elevación.

### 3.3. Primeras integrales

En el apéndice A, al hablar de curvas integrales, relacionamos la solución de una ecuación diferencial con un campo vectorial; a manera precisa la identificación entre soluciones y campos esta dada por la relación (A-36). Supongamos que tenemos una función  $I : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual podemos evaluar a lo largo de una curva integral. Para algunas funciones  $I$ , podremos encontrar que estas son constantes a lo largo de una curva integral, estas funciones son llamadas primeras integrales del sistema.

Ejemplos de primeras integrales los encontramos en los modelos físicos, siendo el más conocido como el principio de la conservación de la energía. Algunos otros nombres que reciben las primeras integrales son: invariantes, constantes de movimiento y cantidades conservadas.

En esta sección analizaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange con el propósito de encontrar primero integrales relacionados con el espacio fase.

#### 3.3.1. Primera integral relacionada con el parámetro $\Phi$

Al realizar el análisis para las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondiente al parámetro  $\Theta$ , encontramos una relación que nos dice que:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{dL_G}{d\dot{\Phi}} \right) = 0.$$

Esta relación nos llevo a la ecuación (3-8), la cuál volvemos a escribir:

$$\dot{\Phi} - I_a \dot{E}^a = C_\Phi.$$

Esta ecuación es una primera integral, y la nombramos la primera integral relacionada con  $\Phi$ .

Una de las ventajas de utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange es que nos permiten identificar de manera rápida primeras integrales.

### 3.3.2. Primeras integrales relacionados con las ecuaciones de Euler-Lagrange para $E_c$ y $I_c$

Al obtener las ecuaciones (3-13) y (3-18), notamos que cada una de ellas involucraba términos cruzados. Es decir, la ecuación para  $I_c$  esta dada en términos de  $E_c$ ; y la ecuación de  $E_c$  en términos de  $I_c$ . Este comportamiento nos da un indicio para buscar alguna expresión compuesta de estas ecuaciones. El análisis que presentamos aquí es puramente algebraico y lo desarrollaremos por pasos.

#### Paso 1: Eliminar el factor que contiene a $C_\Phi$

Las ecuaciones (3-13) y (3-18) son:

$$\Lambda I_c^{2k+1} \frac{d}{d\lambda} \left( E_c^{2k+1} \dot{E}^c \right) + 2C_\Phi \dot{E}^c = 0$$

y

$$\Lambda E_c^{2k+1} \frac{d}{d\lambda} \left( I_c^{2k+1} \dot{I}^c \right) - 2C_\Phi \dot{I}^c = 0.$$

Estas ecuaciones las multiplicamos por  $\dot{I}^c$  y  $\dot{E}^c$ ; respectivamente. El resultado es:

$$\Lambda I_c^{2k+1} \dot{I}^c \frac{d}{d\lambda} \left( E_c^{2k+1} \dot{E}^c \right) + 2C_\Phi \dot{I}^c \dot{E}^c = 0 \quad (3-29)$$

y

$$\Lambda E_c^{2k+1} \dot{E}^c \frac{d}{d\lambda} \left( I_c^{2k+1} \dot{I}^c \right) - 2C_\Phi \dot{E}^c \dot{I}^c = 0. \quad (3-30)$$

La suma de estas ecuaciones cancela el factor que depende de  $C_\Phi$ . Podemos hacer la suma de manera sencilla si observamos cuales son los factores comunes, el resultado es:

$$\Lambda I_c^{2k+1} \dot{I}^c \frac{d}{d\lambda} \left( E_c^{2k+1} \dot{E}^c \right) + \Lambda E_c^{2k+1} \dot{E}^c \frac{d}{d\lambda} \left( I_c^{2k+1} \dot{I}^c \right) = 0.$$

Finalmente eliminando el factor común:

$$I_c^{2k+1} \dot{I}^c \frac{d}{d\lambda} \left( E_c^{2k+1} \dot{E}^c \right) + E_c^{2k+1} \dot{E}^c \frac{d}{d\lambda} \left( I_c^{2k+1} \dot{I}^c \right) = 0. \quad (3-31)$$

### Paso 2: Aplicando las reglas de la multiplicación

Podemos obtener una nueva expresión para (3-31) si observamos que simplemente es la regla de la multiplicación para las derivadas, la expresión es como sigue:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( I_c^{2k+1} E_c^{2k+1} \dot{I}^c \dot{E}^c \right) = 0 \quad (3-32)$$

Ahora podemos expresar esta última relación como una primera integral:

$$(I_c E_c)^{(2k+1)} \dot{E}^c \dot{I}^c = C_c \quad (3-33)$$

Podemos obtener una segunda expresión para esta primera integral utilizando la solución para las ecuaciones geodésicas (3-22) y (3-23):

$$C_c = - \left[ \frac{(E_0^c I_0^c)^{k+1}}{\lambda_0^c} \right]^2 \quad (3-34)$$

### Un comentario final

Como comentario final, debemos de notar que las ecuaciones definidas por (3-33) son ecuaciones para cada par de parámetros que dependen del índice  $c$ . Nuevamente no tomamos la convención para la suma en estas ecuaciones. El número de estas ecuaciones depende de la dimensión de la variedad, en este caso la dimensión de la variedad es  $2n + 1$ , con lo que nos quedan  $n$  variables para los parámetros intrínsecos y extrínsecos. De tal forma que el número de primeras integrales que hemos encontrado es  $n$ . El número  $n$  es entonces el mismo número de ecuaciones para (3-12) o (3-17) dada la dimensión de la espacio fase que hemos utilizado.

### 3.4. Interpretación de las primeras integrales

Para obtener una interpretación de las primeras integrales (3-8) y (3-33) utilizaremos el pullback del mapeo suave  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$  definido (2-19). El método que utilizamos es muy parecido a aquel con el cual encontramos la expresión para la métrica  $g$  del espacio de fase utilizando la métrica más general  $G$  definida en (2-19). La primera integral (3-8) nos llevará a una identidad que confirmará la primera propiedad del espacio de estados de equilibrio, expuesta en (2-18).

La relación con la que definimos el lagrangiano (B-29), en términos de la métrica de Riemann, nos permite interpretarle como la norma de un vector sobre una curva geodésica; esta asociación la hacemos a partir de la relación (B-4). Bajo estas condiciones demostraremos utilizando el pullback  $\varphi^*$  que las normas de los vectores sobre las geodésicas en el espacio  $\mathcal{T}$  están relacionadas con las normas de los vectores sobre las curvas proyectadas en  $\mathcal{E}$ . Demostraremos que el valor de la norma de vectores para las curvas proyectadas en  $\mathcal{E}$  es también una constante.

#### 3.4.1. Interpretación para la primera integral relacionada con el parámetro

$\Phi$

Una métrica de Riemann asocia una distancia a puntos muy cercanos de una variedad. Una posible elección de estos punto pueden ser puntos sobre una geodésica. Con esta elección, aplicamos el pullback a la primera integral (3-8):

$$\varphi^* \left( \dot{\Phi} - I_a \dot{E}^a \right) = \varphi^* (C_\Phi). \quad (3-35)$$

Aplicar el pullback a esta última identidad se reduce a la aplicación de las relaciones (2-22) y (2-23). Primero sabemos que el pullback no actúa sobre  $\Phi$ , esto nos lleva a:

$$\varphi^* \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right) = \frac{d}{d\lambda} \varphi^* (\Phi) = \frac{d\Phi}{d\lambda}. \quad (3-36)$$

Para la parte que depende de las coordenadas intensivas y extensivas, el pullback si actúa sobre las coordenadas intensivas, de tal forma que a partir de la condición de equilibrio termodinámico dada en (2-20), podemos inferir:

$$\varphi^* \left( I_a \frac{dE^a}{d\lambda} \right) = \frac{d\Phi}{d\lambda}. \quad (3-37)$$

Las relaciones (3-36) y (3-37) aplicadas a (3-35), nos dicen que:

$$\varphi^* \left( \dot{\Phi} - I_a \dot{E}^a \right) \equiv 0. \quad (3-38)$$

Es decir, obtenemos la siguiente relación:

$$\dot{\Phi} = I_a \dot{E}^a \quad (3-39)$$

**La identidad (3-38) es una expresión válida para puntos muy cercanos sobre una geodésica del espacio de estados de equilibrio. Para estos puntos, al ser proyectados a  $\mathcal{E}$ , vemos que se cumple la primera ley de la termodinámica. Por lo tanto, la proyección de  $C_\Phi$  sobre el espacio de estados de equilibrio resulta en una identidad que no proporciona información adicional.**

### 3.4.2. Longitud de un vector termodinámico asociado a una geodésica en el espacio fase termodinámico

Una de los primeros resultados que podemos obtener de las primeras integrales resulta en una nueva expresión para el lagrangiano. Tomando las relaciones (3-8) y (3-33) podemos escribir el lagrangiano dado en (3-4) como:

$$L_G = C_\Phi^2 + \Lambda \sum_{c=1}^n C_c. \quad (3-40)$$

este lagrangiano lo podemos interpretar como la longitud de un vector tangente asociado a una geodésica utilizando la relación (B-29) y la relación (B-4), con lo cual definimos para un vector  $\vec{v}$  sobre una geodésica:

$$v_A v^A = C_\Phi^2 + \Lambda \sum_{c=1}^n C_c. \quad (3-41)$$

**La condición (3-41) es una comprobación de que las curvas sobre las que estamos trabajando son geodésicas.**

### 3.5. Aplicación a un sistema con dos grados de libertad

Concluimos este capítulo presentando los resultados que hemos encontrado hasta este momento utilizando un sistema de coordenadas:

$$\{Z^A\} = \left\{ \Phi = S, E^1 = U, E^2 = V, I^1 = \frac{1}{T}, I^2 = \frac{P}{T} \right\}; \quad (3-42)$$

a continuación escribiremos todos los objetos matemáticos que hemos utilizados, y también los que hemos calculado, hasta el momento.

Comenzamos por la métrica (2-16):

$$G_U = \left( dS - \frac{1}{T}dU - \frac{P}{T}dV \right)^2 + \Lambda \left[ \left( \frac{U}{T} \right)^{2k+1} dU d \left( \frac{1}{T} \right) + \left( \frac{VP}{T} \right)^{2k+1} dV d \left( \frac{P}{T} \right) \right]; \quad (3-43)$$

y la uno forma de Gibbs (2-13):

$$\Theta_G = dS - \frac{1}{T}dU - \frac{P}{T}dV. \quad (3-44)$$

Ahora escribimos las ecuaciones geodésicas. La ecuación geodésica que corresponde a (3-8) es:

$$\frac{dS}{d\lambda} - \frac{1}{T} \frac{dU}{d\lambda} + \frac{P}{T} \frac{dV}{d\lambda} = C_S \quad (3-45)$$

y las ecuaciones geodésicas (3-13) son:

$$\Lambda \left( \frac{1}{T} \right)^{2k+1} \frac{d}{d\lambda} \left( U^{2k+1} \frac{dU}{d\lambda} \right) + 2C_S \frac{dU}{d\lambda} = 0 \quad (3-46)$$

$$\Lambda \left( \frac{P}{T} \right)^{2k+1} \frac{d}{d\lambda} \left( V^{2k+1} \frac{dV}{d\lambda} \right) + 2C_S \frac{dV}{d\lambda} = 0; \quad (3-47)$$

mientras que las ecuaciones geodésicas que corresponden a (3-18) son las siguientes:



$$\Lambda U^{2k+1} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{T} \frac{d(1/T)}{d\lambda} \right) - 2C_S \frac{d(1/T)}{d\lambda} = 0 \quad (3-48)$$

$$\Lambda V^{2k+1} \frac{d}{d\lambda} \left( \left( \frac{P}{V} \right)^{2k+1} \frac{d(P/V)}{d\lambda} \right) - 2C_S \frac{d(P/V)}{d\lambda} = 0. \quad (3-49)$$

En este sistema de coordenadas, las soluciones adquieren la siguiente forma:

$$U = U_0 \exp \left( -\frac{\lambda}{\lambda_0^U} \right) \quad (3-50)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} \exp \left( \frac{\lambda}{\lambda_0^U} \right); \quad (3-51)$$

y para estas soluciones:

$$\lambda_0^U = \frac{\Lambda (k+1) (U_0/T_0)^{2k+1}}{C_S}. \quad (3-52)$$

Las otras soluciones son:

$$V = V_0 \exp \left( -\frac{\lambda}{\lambda_0^V} \right) \quad (3-53)$$

$$\frac{P}{T} = \frac{P_0}{T_0} \exp \left( \frac{\lambda}{\lambda_0^V} \right); \quad (3-54)$$

con:

$$\lambda_0^V = \frac{\Lambda (k+1) (V_0 P_0/T_0)^{2k+1}}{C_S}. \quad (3-55)$$

La relación para la ecuación de  $S$  es:

$$S = \left( C_S - \frac{U_0}{T_0 \lambda_0^U} - \frac{P_0 V_0}{T_0 \lambda_0^V} \right) \lambda + \lambda_1$$

Las primeras integrales están en las ecuaciones (3-33), de tal manera al utilizar el sistema de coordenadas que elegimos, sus expresiones serian las siguientes:

$$(U/T)^{2k+1} \frac{dU}{d\lambda} \frac{d(1/T)}{d\lambda} = C_1 \quad (3-56)$$

$$(VP/T)^{2k+1} \frac{dV}{d\lambda} \frac{d(P/T)}{d\lambda} = C_2. \quad (3-57)$$

Ahora comprobaremos las soluciones dadas por (3-50), (3-51), (3-53) y (3-54), junto con sus constantes (3-52) y (3-55) en las diferentes ecuaciones donde estas aparezcan. Para simplificar el trabajo utilizaremos las siguientes relaciones:

$$\frac{dU}{d\lambda} = -\frac{U_0}{\lambda_0^U} \exp\left(-\frac{\lambda}{\lambda_0^U}\right) \quad (3-58)$$

$$\frac{d(1/T)}{d\lambda} = \frac{1}{T_0 \lambda_0^U} \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_0^U}\right) \quad (3-59)$$

$$\frac{dV}{d\lambda} = -\frac{V_0}{\lambda_0^V} \exp\left(-\frac{\lambda}{\lambda_0^V}\right) \quad (3-60)$$

$$\frac{d(P/T)}{d\lambda} = \frac{P_0}{T_0 \lambda_0^V} \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_0^V}\right). \quad (3-61)$$

Comenzamos con las primeras integrales ( relaciones (3-56) y (3-57)). En primer lugar:

$$\begin{aligned} (U/T)^{2k+1} \frac{dU}{d\lambda} \frac{d(1/T)}{d\lambda} &= - \left[ \frac{(U_0/T_0)^{k+1}}{\lambda_0^U} \right]^2 \\ &= C_1; \end{aligned}$$

esto nos muestra que  $C_1$  es efectivamente una constante.

La siguiente primera integral me dice que:

$$\begin{aligned} (VP/T)^{2k+1} \frac{dV}{d\lambda} \frac{d(P/T)}{d\lambda} &= - \left[ \frac{(V_0 P_0 / T_0)^{k+1}}{\lambda_0^V} \right]^2 \\ &= C_2; \end{aligned}$$

de tal forma que llego, al igual que con  $C_1$ , a la conclusión de que  $C_2$  es constante.

Para finalizar, mostraré la ecuación **(3-41)** con las constantes calculadas de acuerdo a las coordenadas utilizadas. Para **(3-41)**,

$$v_A v^A = C_S^2 - \frac{\Lambda}{(\lambda_0^U \lambda_0^V)^2} \left[ (\lambda_0^V)^2 (U_0/T_0)^{2k+2} + (\lambda_0^U)^2 (V_0 P_0/T_0)^{2k+2} \right].$$

## Capítulo 4

# Conclusiones

En la presente tesis hemos presentado una introducción al formalismo geometrotermodinámico. A su vez, presentamos un análisis del gas ideal y del agujero negro de Reissner-Nordström; en el espacio de estados de equilibrio.

La parte central de esta investigación está enfocada al estudio de las propiedades geométricas del espacio fase. Como punto de partida tomamos la métrica  $G$  (2-16), que es la más general ante transformaciones parciales y totales de Legendre. En primer lugar se demostró que el escalar de curvatura para esta métrica es en general diferente de cero. Esto concuerda con el resultado ya conocida de que cualquier métrica  $G$  de  $\mathcal{T}$  debe tener curvatura diferente de cero para poder ser invariante ante transformaciones de Legendre (Quevedo [2007]). Posteriormente se estudiaron las ecuaciones de las geodésicas asociadas con la métrica  $G$ . Utilizamos el método de Euler-Lagrange con el fin de tener un mejor control de la estructura matemática para estas ecuaciones. Esto nos permitió ecuaciones geodésicas, a pesar de que su forma pareciera complicada, y lograr encontrar la solución más general:

$$\begin{aligned} E^c &= E_0^c \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_0^c}\right); \\ I^c &= I_0^c \exp\left(-\frac{\lambda}{\lambda_0^c}\right); \\ \Phi &= \lambda_\Phi \lambda + \lambda_1; \end{aligned}$$

la cual muestra claramente la dependencia exponencial de las variables  $I^c$  y  $E^c$ ; y la dependencia lineal de la variable  $\Phi$  en términos del parámetro afín  $\lambda$ . Además se mostró que existe una constante de movimiento  $C_\Phi$  asociada a la variable  $\Phi$ , y una constante adicional  $C_c$  para cada par de variables  $(E^c, I^c)$ . Observamos que la primera integral  $C_\Phi$  está asociado con la primera ley de la termodinámica y no proporciona ninguna información adicional. También calculamos la norma asociada a el vector tangente (en cada punto) de una geodésica,

$$v_A v^A = C_\Phi^2 + \Lambda \sum_{c=1}^n C_c; \quad (4-1)$$

esta norma muestra una dependencia en las primeras integrales.

Las ecuaciones geodésicas y sus soluciones son el resultado principal del presente trabajo. Estos resultados nos dan pie para un posterior trabajo en el cuál podemos encontrar el significado físico de estas primeras integrales. La propuesta consistiría en calcular la proyección, sobre el espacio de estados de equilibrio, de la norma asociada a los vectores tangentes. Esta norma puede asociarse punto a punto con un vector en  $\mathcal{E}$  y estaría determinada completamente por los valores de las primeras integrales. Este es un resultado interesante que nos permite encontrar una conexión entre el concepto de relatividad térmica desarrollado recientemente por Zhao (Zhao [2011]), haciendo uso del formalismo GTD.

De las propiedades geométricas que hemos estudiado, podríamos utilizar la ecuación (4-1) como base para establecer una relación:

$$C = \varphi^* (v_A v^A), \text{ en } \mathcal{E} \quad (4-2)$$

Zhao, en su artículo (Zhao [2011]), ofrece una interpretación de la segunda ley de la termodinámica como un principio de causalidad térmica:

El elemento de línea  $ds^2$  entre dos estados de equilibrio cualesquiera que pueden ser conectados por un proceso termodinámico deben ser no negativos. Es decir, el cambio en la entropía propia debe ser real.

La relación que establece Zhao puede expresarse de la siguiente manera:

$$dS^2 = ds^2; \tag{4-3}$$

donde  $dS$  indica una variación en la entropía del sistema, es decir, la distancia entre dos puntos del espacio de equilibrio, identificados como dos procesos termodinámicos, es el cambio en la entropía entre esos procesos. Utilizando la relación establecida en (4-2) y el valor establecido en (4-3) podríamos establecer en un futuro trabajo que,

$$ds^2 = C, \tag{4-4}$$

de tal forma que relativo a cualquier punto  $X$  en  $\mathcal{E}$ , la totalidad de este espacio se divide en dos regiones diferentes.

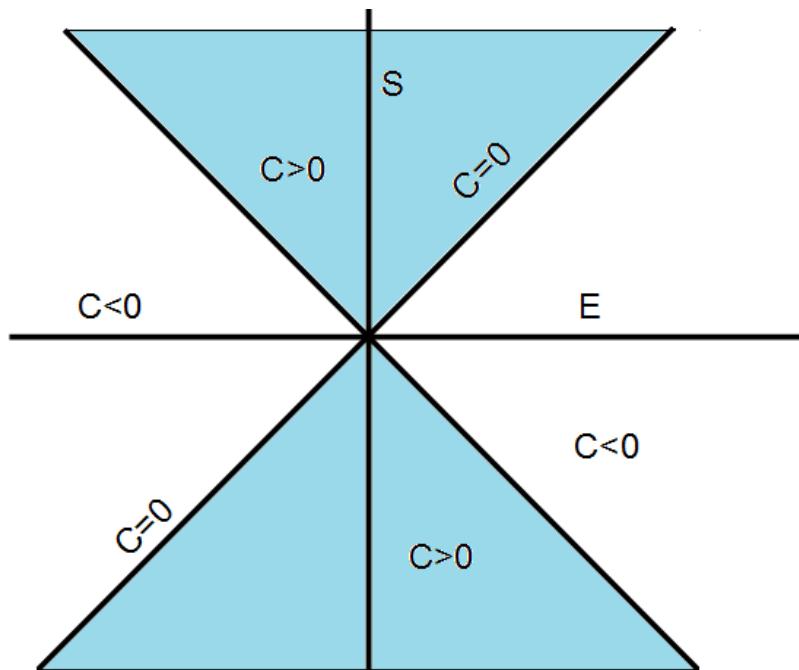


figura 4: Cono C

La región que puede conectarse termodinámicamente con  $X$ , que cumple que  $C > 0$ . Y la que no lo puede hacer, dada por  $C < 0$ . Esto induce un principio de causalidad térmica en el espacio de estados de equilibrio. El límite de causalidad térmica entre las dos regiones esta determinado

para todas las líneas donde  $C = 0$ ; que consiste de todos los estados que se pueden conectar a  $X$  por procesos reversibles. Las primeras integrales que encontramos abren la posibilidad para desarrollar una teoría de "relatividad térmica" que generaliza el trabajo de Zhao. En este sentido, el cono  $C$ , tiene un gran potencial de aplicación si este pudiera ser relacionado con un cono adiabático, mismo que nos permitiría conocer cuales sistemas son posibles desde el punto de vista de la termodinámica.

## Apéndice A

# Elementos de Geometría Diferencial

El problema básico de cualquier teoría física es el de encontrar un conjunto  $M$  que contenga todos los estados plausibles. Este es el llamado espacio de estados del sistema. El otro ingrediente necesario es la estructura de este espacio. La estructura es usualmente definida utilizando un tensor, un campo de vectores o vectores covariantes, o una conexión. El grupo de automorfismos que preserva la estructura geométrica de  $M$  es considerado como el grupo de simetrías de la teoría. Desde este punto de vista, cualquier teoría física puede ser tratada como una rama de la geometría. Para la mecánica clásica, la relatividad especial y general, la electrodinámica, las teorías de norma y la física cuántica es bastante conocido este tipo de estructuras.

En este capítulo presentaremos los elementos básicos que conforman la Geometrotermodinámica (GTD). A decir, presentaremos el formalismo matemático en el que está basada: la Geometría Diferencial junto con la geometría de Riemann; y el campo de la física sobre el cuál aplicaremos este formalismo: la termodinámica.

La principal herramienta matemática que utilizamos en estos días para estudiar las teorías físicas se engloba en el concepto de Geometría Diferencial. Explicar este concepto de manera sólida es una tarea por demás formidable, debido a que en realidad al hablar de Geometría Diferencial estamos haciendo referencia a una variedad de conceptos que están intrínsecamente mezclados. Las categorías en la cuales cae este concepto entra en el álgebra, la geometría, la topología y el análisis matemático. Cada una de estas ramas de la matemática progresa activamente y el encerrar a la Geometría Diferencial en solo una de ellas sería un error. Una forma de explicar este concepto es no definiendo de manera general lo que este significa, en lugar



de eso, hacer una definición a través de un objeto matemático, de tal manera que al hablar de diferentes ramas de Geometría Diferencial estamos hablando de diferentes objetos matemáticos cuyas propiedades e interrelaciones, con otros objetos matemáticos, son estudiadas.

Un objeto matemático que es un eje para todas las ramas de la Geometría Diferencial es el de variedad diferencial. Las interrelaciones y propiedades de este objeto son estudiadas por el análisis de variedades diferenciales. En lo que sigue definiremos este importante concepto y las propiedades que de él necesitaremos para el formalismo matemático de la GTD.

## A.1. La variedad topológica y la parametrización global

La idea básica de la geometría analítica se centra en asignar números a entidades geométricas; de tal manera que los problemas de geometría son transformados en problemas de análisis y algebra. Los fenómenos físicos suceden en espacios físicos y sus propiedades deben de ser independientes de qué coordenadas utilicemos para describir este espacio. Para definir de manera abstracta los espacios que puedan ser descritos por diferentes clases de coordenadas utilizamos las variedades. Una variedad es un espacio topológico el cual tiene una estructura adicional que permita asignarle diferentes clases de coordenadas. Comencemos nuestro estudio de variedades utilizando una clase de coordenadas que nos dan las propiedades globales de la variedad: las coordenadas globales.

Dada una variedad  $M$ , una parametrización global de  $M$  es un homeomorfismo

$$\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n. \tag{A-1}$$

El homeomorfismo  $\phi$  asigna a cada punto  $p \in M$  un vector  $(\phi_1(p), \dots, \phi_n(p)) \in \mathbb{R}^n$ . Cada una de **las funciones**  $\phi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  **son las coordenadas de  $p$  bajo  $\phi$** . Al ser  $\phi$  un homeomorfismo, la asignación de  $\phi_i$  es única, debido a que un homeomorfismo es una función biyectiva y continúa con inversa continúa.

Se puede dar el caso en el que exista una parametrización  $\phi' : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  para  $M$ , podemos definir un mapa  $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dado por:

$$\gamma = \phi' \circ \phi^{-1} \tag{A-2}$$

$\gamma$  es un homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ ; debido a que la composición de homeomorfismos es un homeomorfismo. Adicionalmente, debido a que un homeomorfismo es una biyección, tendremos que  $m = n$ . El número  $n$  es una característica invariante para las variedades y es asociado con la dimensión del espacio  $\mathbb{R}^n$ . Al ser una característica invariante, definimos a  $n$  como la **dimensión de la variedad  $M$** .

Hemos mencionado en la introducción, el espacio más importante para los físicos es el espacio de estados de un sistema. Podemos identificar el espacio de estados con  $\mathbb{R}^n$ , de tal forma, que al definir funciones sobre este espacio y aplicando las herramientas del cálculo diferencial e integral, podemos obtener información sobre el estado del sistema. Hasta este momento, una variedad topológica ha sido identificada con  $\mathbb{R}^n$  a través de parametrizaciones globales  $\phi$ . Los vectores asociados a la parametrización son entonces candidatos para aplicar en ellos las técnicas de cálculo (debido a que estas están en  $\mathbb{R}^n$ ). Un problema que surge es si consideramos que dos parametrizaciones  $\phi$  y  $\phi'$ , que tiene diferente grado de diferenciabilidad, lo cual puede derivar en diferentes resultados de las operaciones de cálculo para cada parametrización. Es decir, diferentes parametrizaciones pueden no darnos la misma información, lo cual no es deseable, debido a que la información física de un sistema no debe depender de sus coordenadas. Evitamos este problema si hacemos una restricción hacia las parametrizaciones válidas. El punto de partida es utilizar el mapa (A-2) como regulador de parametrizaciones. En principio deseamos saber a qué tipo de funciones podemos aplicar las técnicas de cálculo. Nuestro conocimiento se centra en el estudio de funciones del tipo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la cuales definimos como de **clase  $C^\infty$  (o infinitamente diferenciables)** si sus derivadas parciales cumplen:

$$\frac{df}{dx_i}, \frac{d^2f}{dx_i dx_j}, \dots, 1 \leq i \leq j \leq n \quad (\text{A-3})$$

existen para todos los órdenes y sobre las cuales las operaciones del cálculo son aplicables. Más aún, podemos definir un mapa  $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  como  $C^\infty$  si cada una sus funciones componentes  $f_1, \dots, f_m$  son  $C^\infty$ , es decir, aquellas que para  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , asignamos el vector  $\gamma(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ .

La idea de tener un mapa del tipo  $C^\infty$  es la que utilizaremos para regular el cálculo para las parametrizaciones de una variedad. Si tenemos un mapa  $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que tanto  $\gamma$  como  $\gamma^{-1}$  sean  $C^\infty$ , **definiremos a  $\gamma$  como un difeomorfismo**. Un difeomorfismo es la

característica que necesitamos para el mapa (A-2) y para poder realizar cálculo bajo cualquier sistema coordenado. De manera precisa, diremos que **dos parametrizaciones  $\phi$  y  $\phi'$  están  $C^\infty$  relacionadas si el mapeo asociado (A-2) es un difeomorfismo.**

Existe una manera más útil de poder entender de manera intuitiva como llevar el cálculo de  $\mathbb{R}^n$  a  $M$ . En principio, definamos a  $F(\mathbb{R}^n)$  como el conjunto de todas las funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que sean  $C^\infty$ . Estas funciones pueden ser sumadas, multiplicadas y multiplicadas por un número real. Podemos realizar todas estas operaciones debido a que  $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ , para cualquier  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , y estas operaciones ya están definidas bajo el formalismo algebraico de  $\mathbb{R}$ . Técnicamente  $F(\mathbb{R}^n)$  define un algebra conmutativa y asociativa sobre los número reales. La idea de definir así a  $F(\mathbb{R}^n)$  nos da una forma elegante de poder aplicar las ideas del cálculo diferencial dado que cualquier elemento de  $F(\mathbb{R}^n)$  posee las propiedades de diferenciabilidad. Lo que necesitamos ahora es poder realizar las operaciones de cálculo que se realizan sobre  $F(\mathbb{R}^n)$  pero ahora teniendo como base una variedad. La forma en la que lo logramos es al utilizar una parametrización  $\phi$  compuesta con cualquiera de las  $f \in F(\mathbb{R}^n)$ . De manera precisa, definimos al conjunto  $F_\phi(M)$  como el conjunto de todas las funciones  $f_\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f_\phi = f \circ \phi^{-1} \tag{A-4}$$

donde  $f \in F(\mathbb{R}^n)$ . Supongamos que dos parametrizaciones  $\phi$  y  $\phi'$  están  $C^\infty$  relacionadas, esto es equivalente a decir que existe un difeomorfismo  $\gamma$  entre ellas, si componemos a  $f_\phi$  con  $\gamma^{-1} = \phi \circ (\phi')^{-1}$ , tenemos que

$$f_\phi \circ \gamma^{-1} = f \circ (\phi')^{-1} = f_{\phi'} \tag{A-5}$$

y al ser  $\gamma^{-1}$  un difeomorfismo encontramos que

$$F_\phi(M) = F_{\phi'}(M). \tag{A-6}$$

De tal forma que tener dos parametrizaciones  $C^\infty$  es equivalente a describir cualquier función de valor real bajo cualquier parametrización. Esta última parte nos dice que podemos realizar cálculo sobre una variedad utilizando las parametrizaciones para operar sobre un espacio  $\mathbb{R}^n$

extender esta propiedad hacia toda la variedad. Intuitivamente lo que hacemos será definir una colección de parches, subconjuntos de  $M$ , los cuales están  $C^\infty$  relacionados. Matemáticamente lo que haremos será dar una estructura a la variedad, la estructura de un atlas. Un atlas para una variedad  $M$  es una familia de parametrizaciones locales  $\beta = \{(A_i, \phi_i)\}$  con las siguientes propiedades:

1. Todo punto de  $M$  pertenece a un subconjunto  $A_i$ .
2. Cualesquiera dos parametrizaciones locales de  $\beta$  están  $C^\infty$  relacionadas.

Si  $\beta$  es un atlas **definimos a  $F(M, \beta)$  como el espacio de todas las funciones  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cualquier  $(A, \phi) \in \beta$ ,  $f$  restringida a  $A$  pertenece a  $F_\phi(M)$** . Utilizando la condición (A-7) observamos que si una función es  $C^\infty$  con respecto a una parametrización local de un atlas, entonces es  $C^\infty$  para cualquier otra parametrización, debido a que toda parametrización local en el atlas esta  $C^\infty$  relacionada.

Un miembro particular  $(A, \phi)$  de un atlas  $\beta$  es referida, comúnmente, como una carta o un sistema coordinado para  $A$ . Recordemos que la propiedad que queremos mantener es la forma en la cuál podemos hacer cálculo, ahora de manera local en una carta, utilizando las funciones en  $F(M, \beta)$ . La idea aquí es dar una noción precisa matemática de cuando esto es posible, este es el propósito de la siguiente definición. **Dos atlas  $\beta$  y  $\beta'$  son  $C^\infty$  equivalentes para una variedad  $M$  si**

$$F(M, \beta) = F(M, \beta') \tag{A-8}$$

La relación (A-8) es una relación de equivalencia, lo que es equivalente a tener una partición. Cada clase de equivalencia tiene un conjunto de funciones  $F(M)$  independientes de la parametrización local que se utilice. Una clase de equivalencia de un conjunto de atlas sobre  $M$  le da a la variedad una estructura de variedad diferencial.

Con esto hemos completado la definición para variedad diferencial, sin embargo existen algunas restricciones que debemos de pedir al espacio topológico  $M$ . La primera de ellas es definir el espacio como paracompacto, esta propiedad nos permitirá extender la integral de una forma diferencial hacia todo el espacio. La segunda es que nuestro espacio topológico debe de ser metrizable, lo que es equivalente a tener una métrica en el espacio, más aún, debemos de pedir

que nuestro espacio sea completo<sup>1</sup> intuitivamente lo que pedimos es que a la variedad topológica no le falten puntos. La última condición que pediremos será que la variedad topológica sea Hausdorff, en este tipo de variedades a cada par de puntos en la variedad se les puede asignar vecindades disjuntas; esto es equivalente a decir que nuestras variedades no tendrán arrugas.

Con el concepto de variedad diferencial, y las restricciones que le hemos dado, podemos comenzar a definir los objetos matemáticos que se utilizarán para llegar a la definición de campos vectoriales y formas diferenciales. Para llegar a estas definiciones debemos de primero entender las relaciones que pueden existir entre dos variedades diferenciales a través de un mapeo.

### A.3. Los difeomorfismos entre variedades diferenciales

Un difeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow M'$  entre dos variedades  $M$  y  $M'$  es un mapa  $C^\infty$  entre ellas. Formalmente, la condición de ser  $C^\infty$  se define al cumplir la siguiente propiedad:

- Para cada  $f' \in F(M')$ , la composición  $f' \circ \varphi$  pertenece a  $F(M)$

Un difeomorfismo es entonces una aplicación continua y diferenciable entre dos variedades que tiene inversa que a su vez es continua y diferenciable. Teniendo un difeomorfismo podemos transportar propiedades conocidas de una variedad hacia otra, esto es debido a las propiedades que tienen las funciones  $C^\infty$  de formar una álgebra conmutativa. En general podemos también inducir una estructura de grupo para los difeomorfismos en una variedad. Si esta estructura de grupo preserva alguna de las estructuras de la variedad se dirá que es una simetría. Las simetrías de un sistema nos permiten abstraer información de una variedad; existe un teorema que relaciona simetrías con leyes de conservación<sup>2</sup>.

Una de las herramientas que se usa de manera constante en la Geometría Diferencial es la dualidad entre puntos de una variedad diferencial y funciones reales. Si tenemos un difeomor-

---

<sup>1</sup>Un espacio topológico es completo si toda secuencia de Cauchy tiene un límite.

<sup>2</sup>Teorema de Emmy Noether

fismo  $\varphi : M \rightarrow M'$ , una función  $f' \in F(M')$ ; denotemos la composición de  $f' \circ \varphi$  como:

$$\varphi^*(f'(p)) = f(\varphi(p)) \quad (\text{A-9})$$

para algún punto  $p \in M$ .  $\varphi^*$  es entonces un mapa entre  $F(M')$  a  $F(M)$ . Esta propiedad es de mucho uso en la Geometría Diferencial, la resumimos de la siguiente manera: si un difeomorfismo  $\varphi$  envía objetos en una dirección, el mapeo dual  $\varphi^*$  manda objetos duales en dirección contraria.

Varias propiedades pueden demostrarse de manera sencilla al utilizar la naturaleza de algebra conmutativa de  $F(M)$ :

1.  $\varphi^*(f'_1 + f'_2) = \varphi^*(f'_1) + \varphi^*(f'_2)$
2.  $\varphi^*(f'_1 f'_2) = \varphi^*(f'_1) \varphi^*(f'_2)$
3. Si tenemos difeomorfismos  $\varphi_1 : M \rightarrow M'$  y  $\varphi_2 : M' \rightarrow M''$  entonces,  $(\varphi_1 \varphi_2)^* = \varphi_1^* \varphi_2^*$ .

La propiedad de dualidad y el contrasentido del mapeo dual nos permitirán establecer lo que es un vector y un covector tangente.

## A.4. Los vectores y covectores tangentes

Nuestro formalismo tiene como objetivo llevar el cálculo diferencial de los espacios Euclidianos a variedades diferenciales. En el cálculo, la idea de derivada de una función real  $t \rightarrow f(t)$  para una variable real  $t$  es:

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (\text{A-10})$$

esto puede ser extendido a las funciones de  $n$  variables reales  $f(x_1, \dots, x_n)$  al definir las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (\text{A-11})$$

esto es solamente un caso especial de (A-10) puesto que cada una de las derivadas parciales en (A-11) es la derivada de funciones del tipo  $t \rightarrow f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n)$  para  $t = 0$ . Una notación

y que estas operaciones son equivalentes para cualquier parametrización que escojamos, con lo cual podemos definir al conjunto de funciones  $C^\infty$  libre de parametrización, esto lo hacemos al decir que todas las funciones pertenecen al conjunto  $F(M)$ . En resumen, podemos realizar cálculo no importando qué parametrización seleccionemos.

Finalmente hemos introducido el concepto de variedad como una generalización del espacio  $\mathbb{R}^n$  al cual le hemos identificado con una dimensión  $n$ , y equipado con parametrizaciones o cartas  $\phi$  (A-1) las cuales son reguladas por un homeomorfismo (A-2) con el cuál hacemos una identificación del conjunto de funciones  $C^\infty$  (A-6) con  $F(M)$  para operar con ellas utilizando las técnicas de cálculo tradicional.

La importancia de utilizar a  $F(M)$  radica en que a través de ella podemos definir los tres objetos matemáticos más importantes de la Geometría Diferencial: mapeos  $C^\infty$  entre variedades, campos vectoriales y formas diferenciales.

## A.2. La variedad diferencial y la parametrización local

La construcción que hemos realizado hasta el momento para llevar el cálculo diferencial a espacios generalizados se basa en encontrar una parametrización global para este espacio. Esto nos restringe, dado que solo podremos operar sobre objetos con parametrizaciones globales.

Muchos de los espacios que emergen de manera natural en el estudio de los fenómenos físicos no permiten una parametrización global. Como ejemplo tomemos a dos partículas unidas por un lazo, suficientemente rígido, donde una de las partículas es libre de moverse en un plano y la otra solo en una línea paralela al plano. El espacio de configuración para la posición de las partículas está dado por  $\mathbb{R} \times S^1$ . En los casos que no exista una parametrización global utilizaremos una parametrización local para un espacio topológico  $M$ . La definición precisa consiste en tomar un subconjunto  $A$  de la variedad y una parametrización global  $\phi$ , esto es un par  $(A, \phi)$ . **Dos parametrizaciones locales  $(A, \phi)$  y  $(A', \phi')$  se dicen  $C^\infty$  relacionadas si**

$$F_\phi(A \cap A') = F_{\phi'}(A \cap A'), \quad (\text{A-7})$$

esto nos dice que las funciones  $C^\infty$  definidas en  $A \cap A'$  nos dan el mismo cálculo. La idea es

conveniente para expresar las derivadas parciales es:

$$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

esta notación es ampliamente utilizada en los textos modernos y a lo largo de este trabajo nos acoplaremos a ella.

Las coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  juegan un papel importante en esta definición dado que si tenemos un conjunto nuevo de coordenadas  $(x'_1, \dots, x'_n)$ , entonces no podemos garantizar que las derivadas parciales sean iguales:

$$\partial_{x_i}(f) \neq \partial_{x'_i}(f) \tag{A-12}$$

Analizemos con mayor detalle lo que es una derivada parcial (A-11). Tomemos una curva  $t \rightarrow (x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n)$ , la cual podemos restringir a la función  $f$  y diferenciar utilizando (A-10). Lo que debemos notar es que estamos utilizando un tipo especial de curvas; estas están determinadas por la variación de uno solo de los parámetros de la curva y comúnmente se les denomina curvas coordenadas.

Cuando cambiamos de coordenadas, cambiamos el sistema de curvas coordenadas. Debemos de buscar entonces un concepto que nos considere todos los posibles cambios de coordenadas, es decir, que generalice el concepto de derivada parcial. El concepto que buscamos se conoce como **derivada direccional**, supongamos que tenemos una curva  $t \rightarrow x(t)$  donde  $t \in [0, 1]$ . Tomemos un punto en la curva  $t$ , consideremos el mapeo:

$$f \rightarrow \left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=t_0} \tag{A-13}$$

este es un mapa de las funciones de valor real  $x$  hacia los números reales. Dos reglas algebraicas son demostradas para este proceso:

1. El proceso es lineal.
2. Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones, entonces:

$$\left. \frac{d}{dt} (fg)(x(t)) \right|_{t=t_0} = g(x(t_0)) \left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=t_0} + f(x(t_0)) \left. \frac{d}{dt} g(x(t)) \right|_{t=t_0} \tag{A-14}$$



Ahora definamos nuestra curva para un espacio Euclideo de  $n$  dimensiones como  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  y pongamos que la derivada para cada una de las funciones  $x_i(t)$  toma valores  $v_i$  reales en el punto  $t_0$ , dicho de otra forma:

$$v_i = \frac{d}{dt}x_i(t_0) \tag{A-15}$$

si tomamos la restricción de la curva a una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que es un elemento de  $F(\mathbb{R}^n)$ , entonces:

$$\left. \frac{d}{dt}f(x(t)) \right|_{t=t_0} = v_i \partial_{x_i}(f(x(t_0))) \tag{A-16}$$

en esta última expresión hemos utilizado la **convención de la suma de Einstein**, la cual nos indica que si tenemos índices repetidos en una expresión, la expresión es una suma.

El vector  $(v_1, \dots, v_n)$  es definido como el vector tangente a la curva  $t \rightarrow x(t)$  al punto  $t = t_0$ . La relación (A-16) nos dice que al hacer uso de la estructura Euclidea de  $\mathbb{R}^n$ , y utilizar su sistema coordenado canónico, el mapa lineal (A-13) puede ser identificado como el vector tangente a la curva  $t \rightarrow x(t)$  al punto  $t = t_0$ . Si además tenemos que otra curva  $t \rightarrow y(t)$  que tiene el mismo vector tangente al punto  $t = t_0$ , entonces la función definida en (A-13) es la misma para ambas curvas. Podemos entonces identificar el conjunto de los vectores tangentes a un punto  $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$  como el conjunto de los mapeos de la forma (A-13). En la definición que hemos dado para una variedad diferencial, hemos dado una fórmula para identificar las funciones  $F(\mathbb{R}^n)$ , con aquellas funciones en  $F(M)$  definidas dentro de una variedad diferencial y, a partir de las relaciones (A-6), (A-7) y (A-8), hemos hecho que la definición de estas funciones sea independiente del sistema coordenado. La relación (A-13) también forma parte de la definición que hicimos para estas curvas al considerarlas de clase  $C^\infty$ .

#### A.4.1. Vectores Tangentes

Hasta aquí identificamos una idea geométrica de la derivada direccional a lo largo de una curva con un concepto algebraico que es el de vector tangente, esta identificación es (A-16). En Geometría Diferencial utilizamos las estructuras algebraicas relacionadas con objetos geométricos para estudiar las relaciones entre ellos. De tal forma que es importante dar una definición

precisa de vector tangente. Sea  $p$  un punto de una variedad diferencial  $M$ , **un vector tangente de  $M$  en  $p$  es un mapa**  $v_p : F(M) \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes condiciones:

$$v_p(f_1 f_2) = f_1(p) v_p(f_2) + f_2(p) v_p(f_1); \quad (\text{A-17a})$$

$$v_p(f_1 + f_2) = v_p(f_1) + v_p(f_2); \quad (\text{A-17b})$$

$$v_p(\alpha f_1) = \alpha v_p(f_1); \quad (\text{A-17c})$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Las últimas dos condiciones dicen que  $v$  es lineal y la primera condición es la ley de Leibniz. Lo importante de esta definición es que no depende de la elección de coordenadas para describir  $M$ . **Los vectores tangentes a un punto conforman un espacio vectorial de dimensión  $n$ , este espacio se denomina el espacio tangente de  $M$  a  $p$  y se denota por  $T_p M$ .** Al ser un espacio vectorial podremos definir una base para el espacio y una forma para escribir cualquier elemento en términos de esa base. Tomemos las coordenadas dadas por  $(x_1, \dots, x_n)$ , para este conjunto de coordenadas (o para cualquier otro), los vectores tangentes pueden ser escritos como:

$$v_p(f) = a_i \partial_{x_i}(f) \quad (\text{A-18})$$

donde  $a_i = v(x_i)$  y  $f$  es una función en  $F(M)$ .

Un fibrado tangente  $TM$ , es la unión disjunta de los espacios tangentes de  $M$ , en otras palabras:  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ .

#### A.4.2. Covectores Tangentes

El espacio vectorial  $T_p M$  tiene su espacio dual  $T_p^* M$ , los elementos de este espacio son todos los mapeos lineales  $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  cada uno de los elementos de este espacio vectorial dual son denominados los **covectores tangentes de  $M$  al punto  $p$ .**

Utilicemos lo que ya conocemos sobre funciones en  $F(M)$  para generalizar la idea de una derivada direccional, esto lo hacemos con el concepto de diferencial. Sea  $f$  una función de  $F(M)$  y  $p$  un punto de  $M$ ; la diferencial de  $f$  en  $p$  es denotada por  $df$  y es un elemento de  $T_p^* M$ , el

cuál definimos como sigue:

$$df(v) = v(f), \quad (\text{A-19})$$

para  $v \in T_pM$ .

De manera inmediata podemos demostrar una versión de la regla de Leibniz heredada del vector tangente  $v$ , esto es:

$$d(f_1f_2) = f_1df_2 + f_2df_1. \quad (\text{A-20})$$

Un vector tangente lo hemos escrito utilizando como base las coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  y definiendo las funciones base coordenadas como  $\partial x_i$ , la dualidad del espacio  $T_pM$  nos permite utilizar esta base para definir una base dual para el espacio  $T_p^*M$ , esta base es puesta en forma de una diferencial, la cuál cumple que:

$$dx_i(\partial x_j) = \delta_{ij}, \quad (\text{A-21})$$

al utilizar esta base para los elementos de  $T_p^*M$  podemos escribir para cualquier  $f$  en  $F(M)$  :

$$df = \partial x_i(f) dx_i; \quad (\text{A-22})$$

la fórmula (A-22) será comúnmente utilizada cuando introduzcamos alguna clase de coordenadas en particular para realizar un cálculo.

El trabajo que hemos realizado hasta ahora nos permite escribir, si es que conocemos algún sistema de coordenadas, los vectores y covectores asociados a un espacio vectorial  $T_pM$  y su dual  $T_p^*M$ . También podemos escribir un vector o un covector al dar una base para los espacios vectoriales asociados. Para los vectores utilizamos (A-18) y para los covectores (A-22); donde existe la relación (A-21) que nos lleva de uno a otro. Cada uno de estos elementos es un objeto algebraico, al cual nosotros le hemos asociado una interpretación geométrica dada por (A-16). La ventaja, del lenguaje que hemos desarrollado, es una descripción libre de coordenadas, cuyos elementos pueden ser utilizados como objetos algebraicos. Con esto hemos terminado el desarrollo básico del lenguaje utilizado en Geometría Diferencial, en la siguiente sección

mostramos una primera aplicación utilizando los difeomorfismos.

## A.5. Los difeomorfismos y sus diferenciales

Los elementos más básicos de la Geometría Diferencial son los vectores, que pertenecen al espacio  $T_pM$  y los covectores, que pertenecen al espacio  $T_p^*M$ , ambos relacionados para una sola variedad  $M$ . La pregunta que no surge de manera natural es el saber cuál es la importancia de tener dos tipos de vectores en nuestro formalismo. Existe un problema al tratar con objetos abstractos, que radica en la poca ayuda que brinda a la intuición. Una forma en la que podemos ayudar a nuestra intuición es entendiendo las definiciones en términos topológicos, es decir de manera que no se requiera una medición. Nuestro formalismo aún está desprovisto de cualquier noción de medición, así que deberemos de encontrar una manera de resolver esto sin recurrir a ninguna. Dicho de otra forma, necesitamos definiciones que continúen siendo válidas no importando la variedad diferencial sobre la cual estemos trabajando. Más aún, ya hemos definido el concepto de difeomorfismo entre variedades, a partir de esta definición lo que necesitamos ahora es que las propiedades de un vector en una variedad sean iguales a las del vector transportado por el homeomorfismo. Este tipo de pensamiento cae en lo que se conoce como pensar en invariantes topológicas.

Comencemos a entender la invariancia topológica utilizando los difeomorfismos. Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciales y  $\phi : M \rightarrow N$  un difeomorfismo entre ellas. Ya hemos definido lo que es el mapeo dual  $\phi^* : F(N) \rightarrow F(M)$  asociado al difeomorfismo  $\phi$ . Utilizaremos este mapeo dual para definir la diferencial de  $\phi$ . **Dado un punto  $p \in M$ , la diferencial de  $\phi$  a  $p$ , denotada por  $\phi_*$  es el mapeo lineal  $\phi_* : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}(N)$ , definida como sigue:**

$$\phi_*(v)(f) = v(\phi^*(f)), \quad (\text{A-23})$$

con  $v \in T_pM$  y  $f \in F(N)$ . El comportamiento  $\phi_*$  es aquel de llevar vectores de asociados a una variedad hacia otra en el mismo sentido en que tiene el difeomorfismo  $\phi$ , es por eso que se le llama el **pushforward**. Esta operación es lineal, en el sentido de que:

$$\phi_*(v + w)(f) = v(\phi^*(f)) + w(\phi^*(f)) \quad (\text{A-24})$$

y

$$\phi_* (\alpha v) (f) = \alpha v (\phi^* (f)) \quad (\text{A-25})$$

Además también podemos demostrar que cumple una regla de Leibniz:

$$\begin{aligned} \phi_* (v) (fg) &= v (\phi^* (fg)) \\ &= v ((f \circ \phi) (g \circ \phi)) \\ &= (f \circ \phi) v ((g \circ \phi)) + (g \circ \phi) v ((f \circ \phi)) \\ &= (\phi^* f) (\phi_* (v) (g)) + (\phi^* g) (\phi_* (v) (f)) \end{aligned} \quad (\text{A-26})$$

**El mapeo dual de la diferencial  $\phi_*$  sobre covectores, es el mapeo  $\phi^* : T_{\phi(p)}^*(N) \rightarrow T_p^*M$  definido como:**

$$\phi^* (\omega) (v) = \omega (\phi_* (v)), \quad (\text{A-27})$$

para  $v \in T_pM$  y  $\omega \in T_{\phi(p)}^*(N)$ . En contraste con el comportamiento de  $\phi_*$ ,  $\phi^*$  transporta covectores en el sentido inverso al que tiene  $\phi$ , este comportamiento le da un nombre especial al **mapeo dual: el pullback**.

Para dar una intuición geométrica a los covectores debemos de saber de dónde es que se generó el término. Si tomamos intuitivamente un difeomorfismo que comprime un espacio, la magnitud de los covectores se hará más grande, mientras que la de los vectores se hará más chica. Esta es la razón por la que en algunos textos se definen dos clases de vectores, los covectores y los contravectores.

Mostremos ahora como las definiciones para el pushforward y el pull-back toman una forma conocida al utilizar un sistema de coordenadas. Tomemos un sistema de coordenadas  $(y_1, \dots, y_n)$  para una función en  $g \in F(N)$  que pasa por el punto  $\phi(p)$  en  $N$ ; y un sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_m)$  asociadas a la función dada por  $f = \phi^*(g)$  para funciones  $f \in F(M)$  que pasan por el punto  $p$ . Con esta terminología, tomemos bases para  $T_pM$  y  $T_{\phi(p)}(N)$  dadas por  $\partial x_i$  y  $\partial y_i$ , respectivamente, y las bases duales que son encontradas utilizando las relaciones:  $dx_i (\partial x_i) = \delta_{ij}$

y  $dy_i(\partial y_i) = \delta_{ij}$ . Suponiendo que  $\phi = (\phi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \phi_n(x_1, \dots, x_m))$  y utilizando la definición (A-23):

$$\begin{aligned}
 \phi_* (\partial x_i) (g) &= \partial x_i (\phi^* (g)) \\
 &= \partial x_i (g \circ \phi) \\
 &= (\partial x_i (\phi_j) \partial y_i) (g).
 \end{aligned}
 \tag{A-28}$$

Desde el punto de vista del cálculo,  $\partial x_i (\phi_j)$  es la matriz Jacobiana para el mapeo  $\phi$  si identificamos a  $M$  con  $\mathbb{R}^m$  y a  $N$  con  $\mathbb{R}^n$  al utilizar coordenadas locales. Para el mapeo dual de la diferencial y utilizando (A-27):

$$\begin{aligned}
 \phi^* (dy_i) (v) (g) &= dy_i (\phi_* (v) (g)) \\
 &= dy_i ((\partial x_i (\phi_j) \partial y_i) (g)) \\
 &= (\partial x_i (\phi_j) dy_i) (g).
 \end{aligned}
 \tag{A-29}$$

En general podemos comprobar que los mapeos entre dos variedades tienen un comportamiento similar al que tienen los mapeos entre dos espacios Euclidianos. A partir del uso de cartas en cada una de las variedades se pueden realizar cálculos explícitos al seleccionar un sistema de coordenadas en cada variedad.

## A.6. El teorema de la función implícita, las inmersiones, las sumersiones y los encajes

El pushforward representa la mejor aproximación lineal que un mapa  $\phi$  puede tener cerca de un punto dado. Podemos obtener mucha información sobre el mapa al estudiar sus propiedades algebraicas en cada punto. La propiedad algebraica más importante es el rango, definido como la dimensión de su imagen. Los mapeos cuyo pushforward dan información local son aquellos

cuyo rango es constante. Existen tres categorías especiales: las sumersiones, mapeos cuyo pushforward son sobreyectivos; las inmersiones, mapeos cuyo pushforward es inyectivo; y encajes, que son inmersiones inyectivas que también son homeomorfismos. Para comenzar una discusión, y la definición, de estos conceptos debemos de utilizar el teorema de la función inversa y sus corolarios: el teorema del rango y el teorema de la función implícita. Estos teoremas muestran que bajo las hipótesis adecuadas sobre el rango de un mapeo, este se comporta localmente como un pushforward.

### A.6.1. El teorema de la función implícita

Supongamos que  $M$  y  $N$  son variedades diferenciales de la misma dimensión, y  $\phi : M \rightarrow N$  es un mapeo entre ellos. Sea  $p \in M$  tal que:  $\phi_*(T_p M) = T_{\phi(p)}(N)$ . Entonces, existe un subconjunto abierto  $U \subset M$  que contine a  $p$  y se cumple lo siguiente:

1.  $\phi(U)$  es un subconjunto abierto de  $N$ ;
2.  $\phi$  es un difeomorfismo entre  $U$  y  $\phi(U)$ .

Este es el resultado principal que se utiliza para estudiar los mapeos entre variedades diferenciales de diferente dimensión.

### A.6.2. Las inmersiones y las variedades inmersas

Dado un mapeo  $\phi : M \rightarrow N$  en el que la dimensión de  $M$  es menor o igual a la dimensión de  $N$ ,  $\phi$  es una inmersión si:

$$\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)}(N) \text{ es uno a uno para cada } p \in M, \quad (\text{A-30})$$

el par  $(\phi, M)$  es llamado una variedad (sub-variedad) inmersa de  $N$ . Si adicionalmente pedimos que  $\phi$  sea uno a uno, entonces se dice que  $\phi$  es un mapeo de sub-variedad, también se dice que el mapeo  $\phi$  define a  $M$  como una sub-variedad de  $N$ .

### A.6.3. Los encajes y las variedades encajadas

Si adicionalmente a la propiedad (A-30), pedimos que el mapeo  $\phi$  sea uno a uno, entonces  $\phi$  es llamada un encaje y el par  $(\phi, M)$  es llamado una variedad (sub-variedad) encajada. Finalmente,  $(\phi, M)$  se dice que es una variedad encajada regular si  $\phi$  es un homeomorfismo entre  $M$  y  $\phi(M)$ . Si  $S$  es una sub-variedad encajada la diferencia entre la dimensión de  $M$  y la dimensión de  $N$  es llamada la codimensión de  $S$  en  $M$ .

### A.6.4. Las sumersiones

El tipo de mapeo final que sirve para el estudio local de las variedades son las sumersiones. Sea  $\phi : M \rightarrow N$  un mapeo entre variedades,  $\phi$  es una sumersión si se cumple la siguiente condición:

$$\phi_*(T_p M) = T_{\phi(p)}(N). \quad (\text{A-31})$$

Notamos que esta última condición requiere que la dimensión de  $M$  sea mayor o igual que la dimensión de  $N$ . **El término de hipersuperficie es entendido como una variedad inmersa o encajada de codimensión uno.**

## A.7. Los campos vectoriales

En esta sección definiremos el primer objeto principal de la Geometría Diferencial: los campos vectoriales. Además presentaremos las principales reglas bajo las cuales se pueden realizar cálculos sin utilizar sistemas de coordenadas.

Sea  $M$  una variedad y  $F(M)$  el conjunto de todas las funciones de valor real sobre la variedad  $M$ . Dos elementos  $f_1$  y  $f_2$  de  $F(M)$  pueden ser multiplicados y sumados entre ellos; y además pueden ser multiplicados por cualquier número real. De tal forma que  $F(M)$  tiene una estructura de un algebra conmutativa y asociativa sobre los números reales. Esta estructura algebraica será utilizada en las definiciones básicas. Comencemos con definir un **campo vectorial  $X$  sobre  $M$  como un mapa lineal  $X : F(M) \rightarrow F(M)$  tal que:**

$$X(f_1 f_2) = X(f_1) f_2 + f_1 X(f_2) \quad (\text{A-32})$$



El conjunto de todos estos objetos es denotado por  $V(M)$  y además todo  $X \in V(M)$  puede ser multiplicado por una  $f \in F(M)$ , de tal forma que.

$$(fX)(f_1) = fX(f_1) \tag{A-33}$$

podemos entonces contruir un mapa  $\Psi : F(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$ , el cual le da a  $V(M)$  una estructura conocida como un  $F(M)$ -módulo. La idea de utilizar esta nueva estructura es con el proposito de darle a  $V(M)$  una estructura de espacio vectorial generalizada<sup>3</sup>, principalmente entenderemos que los campos vectoriales son objetos matemáticos cuya única ambición es la de diferenciar funciones, esto se nota de manera clara al observar la propiedad (A-33) utilizada en su definición. Un campo vectorial Euclidiano es entendido como la asignación de un vector a cada punto del espacio Euclidiano. Esta idea es generalizada a variedades diferenciales de la siguiente forma. Tomemos un punto  $p$  sobre la variedad y una función  $f \in F(M)$ , tomamos un campo vectorial  $X(f)$ , el cual esta también en  $F(M)$ , a esta función, evaluémosla sobre el punto  $p$ :  $X(f)(p)$ , he identificamos esta última función con un vector tangente al punto  $p$  de la siguiente manera:

$$v_p(f) = X(f)(p). \tag{A-34}$$

Para verificar que este es un vector tangente, debe de seguir el comportamiento dictado por (A-17a), (A-17b) y (A-17c). La linealidad de el campo vectorial es equivalente a la idea de linealidad en (A-17b) y (A-17c), con lo que bastaria con comprobar (A-17a); tomando una  $g \in F(M)$ ,

---

<sup>3</sup>Esta estructura es la de un  $F(M)$ -módulo, que es un espacio vectorial pero con un campo de escalares generalizado por el anillo  $F(M)$ .

$$\begin{aligned}
v_p(fg) &= X(fg)(p) \\
&= (X(f)g + fX(g))(p) \\
&= (X(f)g)(p) + (fX(g))(p) \\
&= f(p)X(g)(p) + X(f)(p)g(p) \\
&= f(p)v_p(g) + v_p(f)g(p)
\end{aligned}$$

de tal manera que podemos identificar a los campos vectoriales con los vectores tangentes al evaluar en cada punto de la variedad el campo vectorial.

Tomando una parametrización local  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U \in M$ , y observando que esto es un difeomorfismo, el mapeo dual  $\phi^* : F(\mathbb{R}^n) \rightarrow F(U)$  manda funciones sobre  $\mathbb{R}^n$  a funciones sobre  $U$ . Tomando las funciones coordenadas sobre  $\mathbb{R}^n$  y denotándolas por  $x^\mu$ , podemos definir un conjunto de funciones sobre  $U$  dadas por  $\phi^*(x^\mu)$ , que usualmente son escritas<sup>4</sup> como  $x^\mu$ . Las funciones  $x^\mu$  son nombradas las coordenadas locales sobre  $U$ . Cualquier función  $f \in F(U)$  puede ser escrita como  $f(x^1, \dots, x^n)$ , es decir, como una función que depende de las coordenadas locales. De manera similar, los campos vectoriales coordenadas  $\partial_\mu$  en  $\mathbb{R}^n$ , que son base para los campos vectoriales en  $\mathbb{R}^n$ , pueden ser transportados a  $U$ . De nueva cuenta definimos a este mapeo como  $\partial_\mu$  y los llamamos los campos vectoriales coordenados. De tal forma que podemos escribir cualquier campo vectorial sobre  $U$  como:

$$X = X^\mu \partial_\mu. \tag{A-35}$$

La ecuación (A-35) es una manera algebraica para escribir cualquier campo vectorial.

En lo que resta de esta sección daremos una interpretación física para los campos vectoriales y expondremos la razón por la cual son importantes. En la parte final hablaremos una forma para crear nuevos campos vectoriales a partir de campos vectoriales conocidos.

---

<sup>4</sup>Esto se puede prestar a confusiones, pero es una práctica usual en la geometría diferencial

### A.7.1. Las curvas integrales

La forma más fácil de entender la importancia de los campos vectoriales es a través de la dinámica de un sistema, es decir, interpretar una ecuación diferencial como un campo vectorial. Uno de los objetos geométricos más importantes relacionados con un campo vectorial son **las curvas integrales, estas son funciones  $\gamma : J \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , cuyo vector tangente a cada punto en la variedad es igual al valor de un vector tangente, es decir**

$$\gamma'(t) = v_{\gamma(t)}, \quad (\text{A-36})$$

**donde  $v_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M$  para todo  $t \in J$** , con esto estamos asociando a cada punto de la variedad a lo largo de la curva con un elemento de su espacio tangente. En la práctica se inicia con un campo vectorial, sobre el cual se busca una curva cuyos vectores tangentes correspondan a los del campo. El nombre de curvas integrales cobra sentido debido a que encontrar curvas integrales dado un campo vectorial es un problema que se puede traducir a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Escribamos a  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  utilizando un sistema de coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$ , la condición (A-36) puede ser expresada:

$$\gamma'_i(t) \partial x_i(\gamma(t)) = v_i(\gamma_i(t)) \partial x_i(\gamma(t)) \quad (\text{A-37})$$

que es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE):

$$\gamma'_1(t) = v_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad (\text{A-38})$$

...

$$\gamma'_n(t) = v_n(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Para estos sistemas existe una solución única si se da una condición inicial  $(\gamma_1(0), \dots, \gamma_n(0)) = (a_1, \dots, a_n)$ . En un sistema de ODEs, su solución se obtiene al integrar el sistema; esta es la razón por la cual se utiliza la denominación de curva integral para este tipo de curvas. **Decimos que un campo vectorial  $X$  es integrable si todas las curvas integrales están definidas para todo tiempo  $t$ .**

### A.7.2. Los Flujos globales y los campos vectoriales completos

La colección de todas las curvas integrales para un campo vectorial dado determina una familia de difeomorfismo en la variedad llamados los flujos. Para ser precisos, tomemos un campo vectorial  $X$  sobre una variedad  $M$  y supongamos que este campo es integrable. Para cada  $t \in \mathbb{R}$  definamos un mapa  $\theta_t : M \rightarrow M$  que manda cada punto  $p \in M$  al punto obtenido de seguir la curva integral  $\gamma(t)$  a lo largo de  $t$ :

$$\theta_t(p) = \gamma(t)(p), \quad (\text{A-39})$$

si tomamos en cuenta todos los puntos  $p$  sobre la variedad, la familia de todas las funciones  $\theta_t$  asociadas a cada punto será definida como el flujo global determinado por esa familia de puntos. Motivados por estas consideraciones, definimos un flujo global sobre  $M$  como un mapa continuo:  $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  que satisface las siguientes propiedades para cada  $s, t \in \mathbb{R}$  y toda  $p \in M$ :

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p), \quad (\text{A-40a})$$

$$\theta(0, p) = p. \quad (\text{A-40b})$$

Dado un flujo global  $\theta$  sobre  $M$ , podemos definir dos colecciones de mapeos como sigue:

1. Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , definimos  $\theta_t(p) = \theta(t, p)$ . En esta caso, las propiedades (A-40a) y (A-40b) son equivalentes a las leyes un grupo. Para cada grupo, tenemos asociada una acción de grupo, esto nos lleva a concluir que cada mapa  $\theta_t : M \rightarrow M$  es un homeomorfismo, y si la acción es suave,  $\theta_t$  es un difeomorfismo.
2. Para cada  $p \in M$ , definimos la curva  $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M$ , dada por

$$\theta^{(p)}(t) = \theta(t, p). \quad (\text{A-40})$$

La imagen de la curva (A-40) es la órbita de  $p$  bajo la acción de grupo. Debido a que cualquier acción de grupo particiona la variedad en conjuntos disjuntos, se sigue que  $M$  es la unión

disjunta de las imágenes de las curvas definidas por (A-40).

Todo flujo global es derivado de las curvas integrales para algún campo vectorial. Si  $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  es un flujo global suave, para cada  $p \in M$ , definimos un vector tangente  $v_p \in T_p M$  como:

$$v_p = \theta^{(p)'}(t). \quad (\text{A-42})$$

La asignación  $p \rightarrow v_p$  es un campo vectorial sobre  $M$ , que es llamado el **generador infinitesimal de  $\theta$** . La idea importante de este concepto es que podemos determinar los flujos globales de una variedad a través de los campos vectoriales. Sin embargo, el converso no es siempre cierto: un campo vectorial no es siempre un generador infinitesimal de un flujo global. Los campos vectoriales que si son un generador infinitesimal de un flujo son denominados como **campos vectoriales completos**.

### A.7.3. El paréntesis de Lie-Jacobi

Una forma de obtener un nuevo campo vectorial a partir de otros conocidos, que está relacionada con los flujos globales, es introduciendo la operación entre campos vectoriales conocida como el paréntesis de Lie-Jacobi o el conmutador. Un paréntesis de Lie-Jacobi es un mapa bilineal:  $(X, Y) : V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$ , denotado por  $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$  y definido como:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (\text{A-43})$$

.y que cumple las siguientes propiedades:

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \quad (\text{A-44a})$$

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (\text{A-44b})$$

$$[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y], \quad (\text{A-44c})$$

para  $f \in F(M)$ ;  $X, Y \in V(M)$ . La ecuación (A-44a) es conocida como la identidad de Jacobi.

Para comprobar que el paréntesis de Lie-Jacobi genera un nuevo campo vectorial, debemos de ver que se cumpla (A-17a); tomando una  $f, g \in F(M)$  :

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(Y(g)f + Y(f)g) - Y(X(g)f + X(f)g) \\
&= X(Y(g))f + X(Y(f))g - Y(X(g))f - Y(X(f))g \\
&= (XY(g) - YX(g))f + (XY(f) - YX(f))g \\
&= f[X, Y](g) + g[X, Y](f)
\end{aligned}$$

de tal forma que  $[X, Y]$  es un nuevo campo vectorial.

## A.8. Las formas diferenciales

El segundo objeto importante de la Geometría Diferencial es la forma diferencial. Estos objetos son importantes dado que nos permiten realizar integración sin hacer uso de coordenadas; y, además, son el eslabón entre el análisis y la topología<sup>5</sup>. En física las formas diferenciales son identificadas con el campo electromagnético y la corriente. El gradiente, el rotacional y la divergencia pueden ser entendidos como diferentes aspectos de un mismo operador que actúa sobre formas diferenciales. Los teoremas de Stokes y Gauss son casos especiales de un teorema que relacionado con formas diferenciales.

Matemáticamente, **una  $p$ -forma diferencial denotada típicamente por  $\omega$ , es un mapa  $\omega : V(M) \times \dots \times V(M) \rightarrow F(M)$  que asigna a cada  $(X_1, \dots, X_p) \in V(M) \times \dots \times V(M)$  una función  $\omega(X_1, \dots, X_p)$  sobre  $M$  y  $\omega$  debe de satisfacer la condición de ser  $F(M)$ -multilineal**, es decir:

$$\omega(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_p) = f\omega(X_1, \dots, X_p) \quad (\text{A-45a})$$

$$\omega(X_1, \dots, X_i + X'_i, \dots, X_p) = \omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_p) + \omega(X_1, \dots, X'_i, \dots, X_p) ; \quad (\text{A-45b})$$

---

<sup>5</sup>El estudio de este enlace corresponde al estudio de las cohomologías de Rham.

además  $\omega$  debe de ser anti simétrica, que es lo mismo que decir que cambia de signo para cualquier permutación de dos elementos adyacentes de su argumento:

$$\omega(X_1, \dots, X_i, X_{i+1} \dots X_p) = -\omega(X_1, \dots, X_{i+1}, X_i \dots X_p). \quad (\text{A-46})$$

$F^p(M)$  denota el conjunto de las  $p$ -formas diferenciales sobre  $M$ , este conjunto es de nueva cuenta un  $F(M)$  módulo.

**La 0-formas diferenciales corresponden a las funciones  $f \in F(M)$ .** Una 1-forma es entonces un mapa  $\omega : V(M) \rightarrow F(M)$  que es lineal sobre  $F(M)$ . Justo como un campo vectorial sobre  $M$  da un vector tangente a cada punto de  $M$ , una 1-forma sobre  $M$  da un tipo de vector a cada punto de  $M$ , este vector ya lo conocemos y es el covector tangente a un punto  $p \in M$ . Sea  $T_p^*M$  el espacio de todos los vectores cotangentes al punto  $p$ , para cada  $\omega_p \in T_p^*M$  al decir que para cualquier campo vectorial  $X$  sobre  $M$ ,

$$\omega_p(X_p) = \omega(X)(p) \quad (\text{A-47})$$

La naturaleza dual del los covectores tangentes nos permite escribir de manera algebraica una 1-forma. Recordando las funciones locales  $x^\mu$  utilizadas para escribir un campo vectorial como (A-35); el dual a estas coordenadas es denotado por  $dx^\mu$  y podemos escribir una 1-forma como:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \quad (\text{A-48})$$

que es una representación algebraica de una 1-forma.

Debemos de enfatizar que es malo pensar a los campos vectoriales  $V$  y a las 1-formas  $\omega$  definidas por sus componentes  $X^\mu$  y  $\omega_\mu$ . Como debemos de pensarles es como objetos matemáticos que tiene componentes que dependen de la base de coordenadas locales utilizada.

En la práctica, las formas diferenciales de orden mayor son creadas utilizando una operación conocida como la multiplicación exterior; comenzando con funciones conocidas,  $f, g, \dots$ , etc; encontramos formas diferenciales asociadas a estas funciones  $df, dg, \dots$ , etc; y a partir de la multiplicación exterior construimos formas de mayor orden. La multiplicación exterior es una

operación que se realiza entre dos formas diferenciales para construir una de orden mayor a las originales, existen más operaciones que relacionan formas diferenciales y campos vectoriales que mostraremos en la siguiente parte.

## A.9. Unas Operaciones entre campos vectoriales y formas diferenciales

Presentamos en esta sección las cuatro operaciones principales del cálculo sobre una variedad diferencial  $M$ .

### A.9.1. La contracción o el producto interior

Sea  $X \in V(M)$ ,  $\omega \in F^p(M)$ , la contracción o producto interior de  $\omega$  con  $X$  es la  $(p-1)$ -forma  $\iota_X \omega$ . El producto interior es una función  $\iota_X : F^p(M) \rightarrow F^{p-1}(M)$  que cumple la propiedad:

$$\iota_X \omega(X_1, \dots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{p-1}), \quad (\text{A-49})$$

a esta operación también se le conoce como multiplicación interna o derivada interna.

### A.9.2. Multiplicación Exterior

El producto exterior entre  $\omega_1 \in F^p(M)$  y  $\omega_2 \in F^r(M)$  es denotada por  $\omega_1 \wedge \omega_2 \in F^{p+r}(M)$ . Lo podemos identificar con un mapeo  $\wedge : F^p(M) \times F^r(M) \rightarrow F^{p+r}(M)$  que manda  $(\omega_1, \omega_2)$  a  $\omega_1 \wedge \omega_2$ , con la condición de que  $\wedge$  sea un mapa  $F(M)$ -bilineal y que satisfice que:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{p+r} \omega_2 \wedge \omega_1 \quad (\text{A-50a})$$

$$\iota_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = \iota_X \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \iota_X \omega_2 \quad (\text{A-50b})$$



### A.9.3. La derivada de Lie para campos vectoriales

La derivada de Lie es una construcción importante que utiliza los campos vectoriales para generalizar la derivada direccional. Ya sabemos que podemos utilizar el concepto de la 1-forma  $df$ , para una función  $f \in F(M)$  con un vector tangente  $v_p \in T_p M$ , para obtener una derivada direccional de la función en el punto  $p \in M$ . Generalizar la derivada direccional, a un campo vectorial  $X$  sobre una variedad diferencial  $M$ , es difícil dado que los valores de  $X$  a diferentes puntos, de la variedad, están en diferentes planos tangentes. Este problema puede ser resuelto si utilizamos el flujo global asociado con el campo vectorial  $X$ . La idea general es utilizar el flujo para empujar los valores de  $X$  hacia  $p$ . El resultado es llamado la derivada de Lie de  $M$  con respecto al campo vectorial  $X$ . De manera precisa necesitaremos tres elementos: Un campo vectorial  $X$ , un campo vectorial  $Y$  y el flujo  $\theta_t : M \rightarrow M$  asociado con  $X$ ; definimos la derivada de Lie de  $Y$  con respecto a  $X$  a el punto  $p \in M$ , como:

$$\mathcal{L}_X(Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_{-t})_*(Y(\theta_t)(p)) - Y(\theta_0)(p)}{t}, \quad (\text{A-51})$$

que existe en donde el límite, utilizado en su definición, existe. Con esta definición hemos asignado a cada punto de la variedad un vector, lo cual nos permite intuir que la asignación  $p \rightarrow \mathcal{L}_X(Y)(p)$ , para todo punto en  $p \in M$ , es un campo vectorial. Este campo ya lo hemos tratado con anterioridad y es definido como:

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y] \quad (\text{A-52})$$

### A.9.4. La derivada de Lie para formas diferenciales

Hemos utilizado el pushforward para poder relacionar dos campos vectoriales utilizando la derivada de Lie. Ahora utilizaremos el pull-back para relacionar  $p$ -formas diferenciales. Sea  $X$  un campo vectorial de una variedad  $M$  y  $\theta_t : M \rightarrow M$  su flujo asociado. Para cualquier  $p \in M$ , si  $t$  es lo cercano a cero,  $\theta_t$  es un difeomorfismo para vecindades de  $p$  a vecindades de  $\theta_t(p)$ , de tal manera que  $\theta_t^*$  asociada 1-formas en vecindades  $\theta(p)$  a 1-formas en vecindades de  $p$ . Dada una 1-forma  $\omega$  sobre  $M$ , definimos la derivada de Lie para  $\omega$  con respecto  $X$  como:

$$\mathcal{L}_X(\omega)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_t)^*(\omega(X)(\theta_t)(p)) - (X)(\theta_t)(p)}{t}, \quad (\text{A-53})$$

la cual tiene sentido si el límite existe. De manera similar que con la derivada de Lie para campos vectoriales, la asignación  $p \rightarrow \mathcal{L}_X(\omega)(p)$  define un campo de covectores  $\mathcal{L}_X(\omega)$ . Varias propiedades pueden ser demostradas para la derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_X(f) = X(f), \quad (\text{A-54})$$

para  $f \in F(M)$ ;

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta), \quad (\text{A-55})$$

para  $\omega, \eta \in F^1(M)$ ;

$$\mathcal{L}_X(\iota_Y \omega) = \iota_{\mathcal{L}_X(Y)} \omega + \iota_Y \mathcal{L}_X(\omega), \quad (\text{A-56})$$

para  $Y \in V(M)$ .

Una de las consecuencias de las propiedades para la derivada de Lie es que podemos encontrar una forma para escribir la derivada de Lie de una  $p$ -forma  $\omega$ , esta es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\omega)(Y_1, \dots, Y_p) &= X(\omega)(Y_1, \dots, Y_p) \\ &\quad - (\omega)([X, Y_1], \dots, Y_p) \\ &\quad - \dots \\ &\quad - (\omega)(Y_1, \dots, Y_{p-1}, [X, Y_p]), \end{aligned} \quad (\text{A-57})$$

donde  $X_1, \dots, X_p \in V(M)$ , además podemos extender las propiedades (A-55) y (A-56) a cualesquiera  $p$ -formas.

### A.9.5. La derivada Exterior

La derivada Exterior es la extensión de el concepto de la diferencial de una 1-forma a  $p$ -formas sobre una variedad diferencial  $M$ . A decir es una medida de la linealidad de una forma diferencial. La derivada exterior es un mapeo  $R$ -lineal  $d : F^r(M) \rightarrow F^{r+1}(M)$ , de tal forma que:

$$dd = 0. \tag{A-58}$$

La segunda identidad nos dice que:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2, \tag{A-59}$$

para  $\omega_1 \in F^p(M)$ ,  $\omega_2 \in F^r(M)$ ; Finalmente:

$$X(d\omega) = d(X(\omega)), \tag{A-60}$$

para  $X \in V(M)$  y  $\omega \in F^p(M)$ .

Al tener un sistema de coordenadas locales  $x^\mu$ , podemos dar una expresión para  $d\omega$  en estas coordenadas:

$$d(\omega_\mu dx^\mu) = d\omega_\mu \wedge dx^\mu, \tag{A-61}$$

Esta fórmula es importante debido a que nos permite entender la importante relación que tiene  $d$  con las operaciones del cálculo sobre  $\mathbb{R}^3$ . Como ejemplo tomemos la 1-forma dada por  $pdx + qdy + rdz$ , y calculemos su derivada exterior. En principio debemos de aplicar la identidad (A-61) :

$$\begin{aligned}
d(pdx + qdy + rdz) &= dp \wedge dx + dq \wedge dy + dr \wedge dz \\
&= \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\
&\quad + \left( \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy + \frac{\partial q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\
&\quad + \left( \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\
&= \left( -\frac{\partial p}{\partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial p}{\partial z} dx \wedge dz \right) \\
&\quad + \left( \frac{\partial q}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial q}{\partial z} dy \wedge dz \right) \\
&\quad + \left( \frac{\partial r}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial r}{\partial y} dy \wedge dz \right) \\
&= \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) dx \wedge dz + \left( \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \right) dy \wedge dz
\end{aligned}$$

el largo cálculo que acabamos de realizar no puede ser visto como el rotacional del vector  $(p, q, r)$ , si identificamos  $dy \wedge dz = e_x$ ,  $dx \wedge dz = e_y$  y  $dx \wedge dy = e_z$ . Existe un operador formal que nos permite hacer esta identificación llamado el operador estrella de Hodge, que para su definición requiere de una estructura adicional, el producto interno. En  $\mathbb{R}^3$  tenemos una definición formal para lo que es un producto interno, pero, para un variedad en general, esta definición debe de ir acompañada por una estructura adicional a la de variedad diferencial, la estructura dada por una métrica la cual definiremos en la sección sobre geometría de Riemann. Así como el rotacional está relacionado con la derivada exterior de una 1-forma, las operaciones del gradiente y la divergencia están relacionada con la derivada exterior de una 0-forma y de una 2-forma respectivamente.

### A.9.6. Las identidades de Élie Cartan

Existen varias identidades que relacionan la derivada exterior y la derivada de Lie. La teoría básica de estas identidades fue estudiada por el matemático francés Élie Cartan (1869-1951). Estas identidades son:

$$X(\omega) = \iota_X d\omega + d(\iota_X \omega) \quad (\text{A-62})$$

para  $X \in V(M)$  y  $\omega \in F^p(M)$ ;

$$\mathcal{L}_X(f) = \iota_X df \quad (\text{A-63})$$

para  $f \in F(M)$ ;

$$\mathcal{L}_X(\omega) = \iota_X d\omega + d(\iota_X \omega) \quad (\text{A-64})$$

$$d\mathcal{L}_X(\omega) = \mathcal{L}_X(d\omega) \quad (\text{A-65})$$

$$\mathcal{L}_{fX}(\omega) = f\mathcal{L}_X(\omega) + \iota_X \omega \quad (\text{A-66})$$

Las definiciones, relaciones e identidades (A-49) a (A-66) determinan las reglas básicas el cálculo sobre variedades diferenciales.

## A.10. Los mapeos entre variedades y sus relaciones con los campos vectoriales y las formas diferenciales

Sea  $\phi : M \rightarrow N$  un mapeo entre variedades. Existe un mapeo dual o un pullback  $\phi^* : F^r(N) \rightarrow F^p(M)$  definido para  $p \in \mathbb{N}$  que cumple que:

$$\phi^*(f)(p) = f(\phi(p)), \quad (\text{A-67})$$

para  $f \in F(N)$ ,  $p \in N$ ;

$$\phi^*(d\omega) = d\phi^*(\omega) \quad (\text{A-68})$$

para  $\omega \in F^p(M)$ ;

$$\phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \phi^*(\omega_1) \wedge \phi^*(\omega_2) \quad (\text{A-69})$$

para  $\omega_1 \in F^p(M)$ ,  $\omega_2 \in F^r(N)$ .

## A.11. Integración sobre variedades diferenciales

Hemos introducido las formas diferenciales con la promesa de que estas son los objetos que pueden ser integrados en una variedad de manera independiente de los sistemas coordenados. El plan que se sigue usualmente es el de definir la integral de una forma diferencial sobre un espacio Euclidiano y después al utilizar invariancia de difeomorfismos y partición de la unidad, esta definición se puede extender a la integral de  $n$ -formas sobre una  $n$ -variedad orientada. La clave en esta definición es la invariancia bajo difeomorfismos que preservan la orientación.

### A.11.1. Integración de formas diferenciales en un espacio Euclidiano

Un dominio de integración es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  cuya frontera tiene una medida  $n$ -dimensional cero. Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio de integración compacto y sea  $\omega$  una  $n$ -forma sobre  $D$ ,  $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , con  $f \in F(D)$ . Definimos la integral de  $\omega$  sobre  $D$  como:

$$\int_D \omega = \int_d f dx^1 \dots dx^n. \quad (\text{A-70})$$

En términos simples, para calcular la integral de una  $n$ -forma simplemente lo que hacemos es quitar las cuñas y evaluar como si fuera una integral múltiple sobre  $\mathbb{R}^n$ .

De manera más general desearíamos poder definir la integral de cualquier  $n$ -forma soportada compactamente sobre  $U$ , subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Primero definamos el concepto de soporte para una  $n$ -forma. Sea  $\omega \in F^n(M)$ , entonces el soporte de  $\omega$ , denotado como  $\text{sup } p(\omega)$ , es el conjunto de puntos  $p \in M$  con la propiedad de que no hay subconjuntos abiertos de  $M$  que contengan a  $p$  para los cuales  $\omega = 0$ . Se puede demostrar que  $\text{sup } p(\omega)$  es un conjunto cerrado y además, si este conjunto es compacto, diremos que  $\omega$  es soportada compactamente o que define un conjunto  $\text{sup } p(\omega)$  compacto. De manera general, ni  $U$ , ni  $\text{sup } p(\omega)$  son dominios

de integración, pero lo que si es cierto es que si tenemos un conjunto  $K$  compacto, para el cuál  $K \subset U$ , entonces existe un dominio compacto de integración  $D$ , para el cual  $K \subset D \subset U$ .

### A.11.2. Integración de formas diferenciales sobre variedades

Al final lo que deseamos es definir, o dar sentido, a la siguiente expresión  $\int_M \omega$ . Al tener un variedad y una parametrización local  $(U \subset M, \phi)$ , quisiéramos utilizar las propiedades del difeomorfismo  $\phi$ , para interpretar la integral sobre una variedad a través de la integral sobre dominios integrales  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Para realizar esta interpretación necesitaremos dar algunas definiciones adicionales con el propósito de que la definición final para la integral de una  $n$ -forma sobre una variedad  $M$  sea independiente de la parametrización seleccionada.

### A.11.3. Orientación

La palabra orientación tiene significado familiar en la experiencia diaria, todos podemos distinguir que es el arriba y que es el abajo, aunque izquierda y derecha se nos complica a otros. Para los espacios Euclidianos, la orientación puede ser definida como la elección del orden de una base canónica, visto el espacio Euclidiano como un espacio vectorial. La definición formal consiste en asignar a una categoría de orientación cualquier base de un espacio vectorial. Esto se logra al observar el signo de la matriz de cambio de base, si esta es positiva, las dos bases tiene la misma orientación. En las variedades podemos definir una orientación puntual debido a que a cada punto lo podemos identificar con el espacio tangente a ese punto. Sin embargo, esta definición no es en general extensible a toda la variedad debido a que la orientación puede cambiar a cada punto. Para extender esta propiedad se define una orientación continua a puntos, es decir, para cada punto de la variedad. De tal manera que si este tipo de orientación continúa a puntos existe, entonces la variedad es orientable. Esta última condición es difícil de comprobar para una variedad diferencial en general. La orientación en una variedad se define de manera natural utilizando la parametrizaciones locales, a cada parametrización, le podemos asignar una orientación al utilizar las cartas y verificar la orientación en el espacio euclidiano subyacente. El único problema que encontramos sería en las cartas que se superponen, para quitarnos este problema lo que hacemos es simplemente pedir que el mapeo de transición entre las cartas

tenga un Jacobiano positivo. Lo anterior nos lleva a la definición siguiente: Una variedad  $M$ , de dimensión  $n$ , se dice orientable si existe al menos una  $n$ -forma  $\omega \in F^n(M)$  de tal forma que:

$$\omega(p) \neq 0 \text{ para cada } p \in M. \quad (\text{A-71})$$

Una  $n$ -forma que satisface la condición (A-71) se le da el nombre de forma de volumen para  $M$ . Además, definimos que dos formas de volumen,  $\omega$  y  $\omega'$ , son equivalentes en su orientación en  $M$ ; si se cumple que:

$$\omega' = f\omega, \quad (\text{A-72})$$

donde  $f \in F(M)$  y  $f(p) > 0$  para todo  $p \in M$ .

#### A.11.4. Integración sobre variedades compactas

Si tenemos una variedad que es compacta y orientable, entonces podemos demostrar que solo existen dos clases de orientaciones. El proceso que sigue es poder definir una forma en la cual podamos llevar cuenta de la orientación para los subconjuntos dentro de una variedad y poder integrar cada una de estas variedades a través de su parametrización local de la manera en que lo hicimos en la sección anterior. La definición clave consiste en saber cuándo un difeomorfismo preserva orientación. Sean  $M$  y  $M'$  variedades de la misma dimensión  $n$ ,  $U$  y  $U'$  subconjuntos correspondientes en ese orden a cada variedad. Un difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow M'$  preserva orientación si para cada elemento de volumen  $\omega'$  de  $M'$ , la forma dada por  $\phi^*(\omega')$  pertenece a la misma clase de orientación en  $U$ . Identificando a la primera variedad con  $\mathbb{R}^n$  y a  $(U', \phi)$  como una carta local tendremos el resultado que deseamos. Esto nos lleva a la siguiente definición, dependiente de las cartas, pero independiente del sistema de coordenadas: La integral de una forma  $\omega$  sobre una variedad  $M$  es:

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* (\omega) \quad (\text{A-73})$$

Para integrar sobre toda la variedad, debemos de introducir el concepto de partición de unidad que nos permitirá partir la integral sobre la variedad en la suma de integrales sobre



cartas. Sea entonces  $\{(U_a, \phi_a)\}$  un atlas de  $M$  en el que cada carta está orientada. Podemos siempre encontrar una colección de funciones  $f_a \in F(M)$  que:

1.  $f_a$  es cero fuera de  $U_a$
2. Cualquier punto  $p \in M$  está relacionado con un conjunto abierto que contiene al punto para el cual solamente un número finito de las funciones  $f_a$  no son cero.
3. Para cualquier punto  $p \in M$ ,

$$\sum_a f_a = 1.$$

El resultado de tener una partición de la unidad se basa en que la variedad es un espacio paracompacto y Hausdorff. Lo importante es que al utilizar este concepto, podemos escribir la forma de volumen como:

$$\omega = \sum_a f_a \omega, \tag{A-74}$$

donde  $f_a \omega = 0$  fuera de  $U_a$ . Definimos entonces la integral de la forma de volumen como:

$$\int_M \omega = \sum_a \int_M f_a \omega$$

y de esta forma le damos sentido a la integral sobre una variedad.

### A.11.5. El teorema de Stokes

El resultado central de la teoría de integración sobre variedades es el teorema de Stokes. Este teorema es una generalización del teorema fundamental del cálculo. El teorema dice que si tenemos una variedad diferencial  $M$  orientada de dimensión  $n$ ; y si tenemos una  $(n - 1)$ -forma con soporte compacto sobre  $M$ , entonces:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

### A.11.6. Propiedades de la integral sobre formas de volumen

La integral sobre formas de volumen tiene propiedades que son similares a las de las integrales múltiples sobre un dominio integrable. Para todas estas identidades damos  $M$  y  $N$  variedades orientables de dimensión  $n$ ;  $\omega$  y  $\eta$ ,  $n$ -formas con soporte compacto en  $M$ . La primera identidad tiene que ver con la linealidad, siendo  $a, b \in \mathbb{R}$ , tenemos:

$$\int_M a\omega + b\eta = a \int_M \omega + b \int_M \eta. \quad (\text{A-75})$$

La segunda identidad tiene que ver con las orientaciones, Si  $M'$  es una variedad con orientación opuesta a  $M$ , entonces:

$$\int_{M'} \omega = - \int_M \omega. \quad (\text{A-76})$$

La siguiente identidad tiene que ver con el signo de la solución de la integral, si  $\omega$  es una forma orientable para una orientación dada de  $M$ , entonces:

$$\int_M \omega > 0. \quad (\text{A-77})$$

La última identidad tiene que ver con la invariancia bajo un difeomorfismo, si  $F : N \rightarrow M$  es un difeomorfismo que preserva la orientación, entonces:

$$\int_M \omega = \int_N (F^*)(\omega) \quad (\text{A-78})$$

### A.11.7. Cálculos de integrales sobre variedades compactas

Aunque la definición dada en (A-78) es práctica para propósitos teóricos, no es conveniente al momento de hacer cálculos. En general es difícil escribir de manera explícita una partición de unidad. Con el propósito de realizar cálculos es más conveniente cortar la variedad en un número finito de piezas cuyas fronteras sean conjuntos de medida cero y calcular la integral en cada uno de estos puntos utilizando parametrizaciones locales.

La técnica empleada tiene un nombre, integración sobre parametrizaciones, comenzamos tomando subconjuntos  $E \subset M$  denominados como dominios de integración, los cuales deben

de cumplir que  $\bar{E}$ , la cerradura de  $E$ , es compacta y  $\partial E$ , la frontera de  $E$ , tiene medida cero. Un ejemplo de estos subconjuntos están dados por un dominio regular compacto. Formalmente, dada una variedad  $M$  orientable y una familia,  $E_1, \dots, E_k$ , de dominios compactos de integración sobre  $M$ ; y  $D_1, \dots, D_k$  que son dominios compactos de integración en  $\mathbb{R}^n$ ; y para  $i = 1, \dots, k$ , más mapeos suaves  $F_i : D_i \rightarrow M$  que satisfagan:

1.  $F_i(D_i) = E_i$  y  $F_i$  restringida al interior de  $D_i$  es un difeomorfismo que preserva orientaciones del interior de  $D_i$  al interior de  $E_i$ .
2. Para cada  $i \neq j$ ,  $E_i$  y  $E_j$  se intersectan solamente en sus fronteras.

entonces, para cualquier  $n$ -forma  $\omega$  sobre  $M$  cuyo soporte este contenido en la unión de los  $E_i$ , tendremos que:

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{D_i} F_i^*(\omega). \quad (\text{A-79})$$

La técnica que nos llevó a la relación (A-79) parece ser pesada en el sentido del cálculo, pero una vez que se comprende se puede utilizar de manera sencilla. Para demostrarlo hagamos un cálculo. Integremos una 2-forma sobre la esfera con la orientación dada por la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Esta 2-forma se puede escribir como:

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

Tomemos a  $D$  como el rectángulo  $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$  y demos el difeomorfismo por la parametrización en coordenadas esféricas:

$$F(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi).$$

Podemos checar que este difeomorfismo preserva la orientación al observar que es la restricción de la parametrización en coordenadas esféricas  $X : (0, 1] \times D \rightarrow \bar{B}^3$  definida por:

$$X(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi).$$

El jacobiano para esta transformación está dado por:

$$\det \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} = \rho^2 \sin \varphi,$$

el cuál es positivo en  $D$ . Sea ahora  $D_1 = [0, \pi] \times [0, \pi]$  y  $D_2 = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ; y sean  $F_1 = F|_{D_1}$  y  $F_2 = F|_{D_2}$ ; Los dos mapeos  $F_1 : D_1 \rightarrow S^2$  y  $F_2 : D_2 \rightarrow S^2$  son utilizados debido a que  $F$  en todo el dominio de  $D$  es  $S^2$ , de tal forma que  $F(\text{int}D)$  no es igual a el interior de  $F(D)$ , esto lo solucionamos al partir a  $D$  en  $D_1$  y  $D_2$ . Notamos que:

$$\begin{aligned} F^* dx &= \cos \varphi \cos \theta d\varphi - \sin \varphi \sin \theta d\theta, \\ F^* dy &= \cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi \cos \theta d\theta, \\ F^* dz &= -\sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

De tal manera que:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \omega &= \int_{D_1} F_1^* \omega + \int_{D_2} F_2^* \omega = \int_D F^* \omega \\ &= \int_D (\sin \varphi \cos \theta) F^* (dy \wedge dz) \\ &\quad + (\sin \varphi \sin \theta) F^* (dz \wedge dx) \\ &\quad + \cos \varphi F^* (dx \wedge dy) \\ &= \int_D (\sin \varphi \cos \theta) [(\cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi \cos \theta) d\theta \wedge (-\sin \varphi d\varphi)] \\ &\quad + (\sin \varphi \sin \theta) [(-\sin \varphi d\varphi) \wedge (\cos \varphi \cos \theta d\varphi - \sin \varphi \sin \theta d\theta)] \\ &\quad + \cos \varphi [(\cos \varphi \cos \theta d\varphi - \sin \varphi \sin \theta d\theta) \wedge (\cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi \cos \theta d\theta)] \\ &= \int_D (\sin^3 \varphi \cos^2 \theta) d\varphi \wedge d\theta \\ &\quad + (\sin^3 \varphi \sin^2 \theta) d\varphi \wedge d\theta \\ &\quad + (\cos^2 \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta) d\varphi \wedge d\theta + (\sin \varphi \cos^2 \varphi \cos^2 \theta) d\varphi \wedge d\theta \\ &= \int_D \sin \varphi d\varphi \wedge d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi d\theta = 4\pi \end{aligned}$$

Este ejemplo muestra que al seleccionar una base de coordenadas, debemos de utilizar lo que ya hemos visto sobre cálculo sobre variedades, en especial las relaciones vistas en las secciones precedentes.

## A.12. Las variedades integrales y el teorema de Frobenius

Si tenemos un campo vectorial  $X$  sobre una variedad  $M$  que siempre es diferente de cero, tendremos que cada curva integral determinada por  $V$  es una inmersión. Geométricamente, las imágenes de las curvas integrales parecerán líneas paralelas que toman la forma de la variedad. Esta idea puede ser generalizada a variedades, o mejor dicho a variedades de más alta dimensión. A manera general, supongamos que para cada  $p \in M$  damos un subespacio de  $T_pM$  de dimensión  $k$  y que esta asignación del subespacio es suave al pasar de punto a punto<sup>6</sup>; a la colección de subespacios creados de esta manera se le denomina una distribución tangencial. La pregunta es entonces si podemos crear una subvariedad  $N$ , a la cuál llamamos una variedad integral, en la cuál sus espacios  $T_pN$  sean la distribución tangencial asociada a la variedad  $M$ . La respuesta es complicada debido a que se debe de introducir el concepto de involución. Al tener el concepto de involución, lo reformularemos en el lenguaje de las formas diferenciales y después enunciaremos el teorema de Frobenius el cuál nos da una condición necesaria y suficiente para obtener una variedad integral. El teorema de Frobenius nos dice que la condición de involución es suficiente para la existencia de una variedad integral.

### A.12.1. Distribuciones tangenciales

Comenzamos definiendo de manera precisa que es una distribución tangente. Sea  $M$  una variedad. Una elección de un subespacio lineal,  $D_p \subset T_pM$ , de dimensión  $k$  para cada punto  $p \in M$  es llamada una distribución tangencial de dimensión  $k$ . La distribución,  $D = \bigcup_{p \in M} D_p$ , es suave si y solo si se satisface que para cada punto  $p \in M$ , tenemos una vecindad  $U$  para la cuál existen

---

<sup>6</sup>Para imaginarlo, supongamos que tenemos un lápiz que va recorriendo la variedad. Cada vez que el lápiz se pone sobre un punto, una superficie casi euclidiana es puesta en una pantalla. Al mover el lápiz, esta superficie se ira transformando en otra superficie, sin que se rompa o desgarre.

campos vectoriales  $Y_1, \dots, Y_k$  tales que al ser evaluados en  $p$ , los vectores resultantes forman una base para  $D_p$  y esto ocurre para cada  $p \in M$ .

### A.12.2. Involución

Supongamos que  $D \subset TM$  es una distribución tangencial suave. Una subvariedad,  $N \subset M$ , inmersa es llamada una variedad integral de  $D$  si:

$$T_p N = D_p \text{ para cada } p \in N. \quad (\text{A-80})$$

Supongamos que  $D$  es una distribución tangencial suave sobre una variedad  $M$ , decimos que  $D$  es involutiva si para cualquier par de campos vectoriales, pongamos  $X$  y  $Y$ , definidos en un subconjunto de  $M$  y para los cuales se cumpla que  $X_p, Y_p \in D_p$  para cada  $p$ ; entonces su paréntesis de Lie-Jacobi,  $[X, Y]$ , también cumple que

$$[X_p, Y_p] \in D_p \text{ para cada } p. \quad (\text{A-81})$$

Decimos que la distribución  $D$  es integrable si cada punto de  $M$  esta contenido en una variedad integral de  $D$ . Finalmente podemos demostrar que toda distribución integrable es involutiva. Esto es, que la existencia de una variedad integrable esta asociada con la condición de que una distribución sea involutiva.

Un ejemplo para el cuál podemos aplicar esta condición está dada para la distribución dada por:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y}; \end{aligned}$$

de  $\mathbb{R}^3$ . El paréntesis de Lie-Jacobi para esta distribución esta dado por:

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= XY - YX \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

con lo cuál verificamos que  $[X, Y]$  no esta en  $D$ .

### A.12.3. Involución y formas diferenciales

Existe una forma alternativa para verificar la condición de que una distribución  $D$  sea involutiva. Esta condición utiliza las formas diferenciales. Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y sea  $D \subset TM$  una distribución tangencial de dimensión  $k$ .  $D$  es suave si y solo si todo punto  $p \in M$  tiene una vecindad  $U$  suave sobre la cuál existen 1-formas  $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$  tales que para cada  $q \in U$ ,

$$D_q = \ker \omega_p^1 \cap \dots \cap \ker \omega_p^{n-k}. \quad (\text{A-82})$$

Si tenemos  $m = n - k$  1-formas definidas en un subconjunto  $U \subset M$  que satisfacen la propiedad (A-82) para cada  $q \in U$  se llamarán formas locales definidoras para la distribución  $D$ .

De manera más general, decimos que una  $k$ -forma  $\omega$  aniquila a  $D$  si  $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$  para las cuales el vector asociado al evaluar cada campo vectorial  $X_1, \dots, X_k$  en el punto  $p$ ; este se encuentra en  $D_p$  para cada  $p$ .

El criterio de involución puede ser traducido a formas diferenciales utilizando la derivada exterior. Este criterio nos dice que  $D$  es involutiva si y solo si se cumple los siguiente:

$$\text{Si } \eta \text{ es una 1-forma que aniquila a } D \text{ en} \quad (\text{A-83})$$

un subconjunto abierto  $U \subset M$ , entonces

$$d\eta \text{ también aniquila a } D \text{ sobre } U$$

#### A.12.4. Involución e Ideales

Existe una tercera condición para verificar si una distribución  $D$ , de una variedad  $M$ , es involutiva. Utilizando terminología algebraica definimos un algebra graduada de formas diferenciales, sobre una variedad  $M$ , como  $A^*(M) = F^0(M) \oplus \dots \oplus F^n(M)$ . Un ideal de  $A^*(M)$  es un subespacio lineal  $J$  que es cerrado bajo el producto cuña, es decir si  $\omega \in J$ , entonces  $(\eta \wedge \omega) \in J$  para cada  $\eta \in J$ . Sea  $J^p(D) \subset F^p(M)$  que denote el espacio de  $p$ -formas que aniquilan a  $D$  y sea  $J(D) = J^0(D) \oplus \dots \oplus J^p(D) \subset A^*(M)$ .

Un ideal  $J \subset A^*(M)$  es un ideal diferencial si  $d(J) \subset J$ , esto es que si  $\omega \in J$ , entonces  $d\omega \in J$ . Entonces tendremos que  $D$  es una distribución tangencial suave si  $J(D)$  es un ideal diferencial.

#### A.12.5. El teorema de Frobenius

Decimos que una distribución  $D \subset TM$  para una variedad  $M$  es completamente integrable si existe una carga para  $D$  en una vecindad para cada punto de  $M$ . Toda distribución integrable es integrable y por lo tanto es involutiva. En resumen, tendremos:

$$\text{completamente integrable} \implies \text{integrable} \implies \text{involutiva}$$

El teorema de Frobenius nos dice que la cadena de implicaciones anteriores es en realidad una serie de equivalencias:

$$\text{completamente integrable} \iff \text{integrable} \iff \text{involutiva}$$

El encontrar variedades integrales nos lleva a resolver ecuaciones diferenciales parciales, de tal forma que podemos interpretar el teorema de Frobenius como un teorema para la existencia y unicidad de sistemas de ecuaciones parciales.

El teorema de Frobenius puede ser aplicado de la siguiente forma. Supongamos que tenemos un sistema de  $n$  ecuaciones asociadas con 1-formas:

$$\omega_j = 0; \quad J = 0, 1, 2, \dots, n.$$



Existe entonces un ideal  $J$  de formas diferenciales generadas por  $\omega_j$ . Específicamente este ideal es aquel en el cual la derivada exterior de cualquier forma en el ideal esta en el ideal, es decir, este ideal es un ideal diferencial. Para un ideal formado por solo una 1–forma  $\omega$ , el ideal estará dado por la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned}
 &\omega && \text{(A-84)} \\
 &d\omega \\
 &\omega \wedge d\omega \\
 &d\omega \wedge d\omega \\
 &\omega \wedge d\omega \wedge d\omega \\
 &d\omega \wedge d\omega \wedge d\omega \\
 &\omega \wedge d\omega \wedge d\omega \wedge d\omega.
 \end{aligned}$$

Para cualquier solución  $\omega = 0$ , cada una de estas formas diferenciales debe ser cero. Algunas de estas formas son cero en toda la variedad. Una vez que una de ellas es idénticamente cero, todos los demás elementos en la secuencia son cero. Supongamos que el primer elemento de la secuencia que es cero ocurre en la posición  $r$ . El número  $r$  nos indica algo muy importante sobre  $\omega$ :  $r$  es el mínimo número de variables que pueden ser utilizadas para expresar  $\omega$ . Esta es la relación que se establece entre el teorema de Frobenius y el teorema de Darboux que presentamos en la siguiente sección.

Para comprender la estructura del espacio fase de GTD debemos de entender que este problema nos da permiso para poder encontrar espacios que son soluciones para problemas propuestos en términos de ecuaciones diferenciales en termodinámica.

### A.13. El teorema de Darboux

Supongamos que  $\omega$  es una 1–forma de una variedad  $M$  de dimensión  $n$ . Supongamos además que  $d\omega$  tiene rango constante  $k$ . Si:

$$\omega \wedge (d\omega)^p = 0 \text{ en todos lados,}$$

entonces existe un sistema local de coordenadas  $x^1, \dots, x^{n-p}, y^1, \dots, y^p$  en el cual:

$$\omega = x^1 dy^1 + \dots + x^p dy^p.$$

Si por otra parte tenemos que,

$$\omega \wedge (d\omega)^p \neq 0 \text{ en todos lados,}$$

entonces si  $p = 2m + 1$ ,

$$\omega = dx^0 + p_i dx^i.$$

y si  $p = 2m$ ,

$$\omega = p_i dx^i$$

donde tenemos un sistema de coordenadas dado por  $\{x_0; x^i, p^i\}$  con  $i = 1, \dots, m$ .

## A.14. Referencias

Es necesaria una gran cantidad de conceptos matemáticos para poder comprender a la GTD. La referencia principal en geometría diferencial para este trabajo esta en el libro (Hermann [1973]), el alcance del mismo es mucho más amplio que solamente la geometría diferencial. Da también una introducción a los modelos matemáticos que se utilizan en la física actual. Un trabajo especializado en la relación de los principios varacionales esta en la obra (Hermann [1968]). Los principios varacionales en la física son una de las más importantes herramientas. Las dos obras anteriores consisten en la estructura del presente apéndice, más, muchos de los detalles para los cálculos así como la ampliación para los conceptos de campos vectoriales y flujos están en el libro (Lee [2003]). Las matemáticas utilizadas en la física moderna son en si mismas un reto intelectual para cualquier profesional de la física. Por lo anterior agradecemos las aportaciones que nos

permiten entenderlas de mejor manera como la presentada en (Baez y Muniain [1994]). La gran mayoría de las explicaciones que se dieron para los conceptos matemáticos de ese trabajo. Aunque en principio los conceptos de la geometría diferencial y los principios varacionales pueden ser aplicados a diversos campos de la física es necesario poder encontrar un texto especializado relacionado con el área de estudio en la que se desea trabajar. Una referencia que es un enlace entre la geometría diferencial y la termodinámica la encontramos en el gran trabajo (Salamon *et al.* [2006])

## Apéndice B

# Elementos de Geometría de Riemann

La construcción, que realizamos, de una variedad diferencial se ha basado en dos aspectos de la teoría matemática: la topología y el análisis de funciones  $C^\infty$ . La parte topológica nos permite definir de manera correcta las funciones entre conjuntos dentro de la variedad, mientras que el uso de las funciones  $C^\infty$  asociadas a la variedad nos permitió definir el cálculo sobre la variedad. Una variedad es asociada con las soluciones de un sistema físico. Al conocer ciertas características de la variedad, podemos inferir propiedades físicas de un sistema. La propiedad esencial de una variedad diferencial es la capacidad que tiene de no transformar sus características al transformar el sistema de coordenadas con la que se le describe. Esta es la puede ser resumida en la siguiente oración: Las características de una variedad son independientes de un sistema de coordenadas. Esta independencia es la razón por la cuál las variedades diferenciales son muy importantes en el estudio de los fenómenos físicos; dado que la característica de invariancia de información con respecto a descripción es uno de los objetivos principales de la física.

Por otra parte, el estudio de problemas en la física nos lleva a la necesidad de incrementar las capacidades de descripción de la Geometría Diferencial. Este problema fue estudiado ampliamente por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), y actualmente es entendido como la asignación de una métrica a la variedad. En su conferencia con título: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen* (Sobre las hipótesis en las cuales se basa la geometría),

propone una relación entre la validez de la geometría en lo infinitesimalmente pequeño y la base interna de una relación métrica del espacio (Riemann y Weyl [1923]). Una variedad discreta contiene una relación métrica intrínseca, mientras que la idea de métrica debe ser añadida para una variedad continua. De tal manera que la realidad física, vista como la base para el espacio de estados físicos, debe de ser discreta o se debe de añadir una relación métrica en las fuerzas de conexión asociadas.

## B.1. Los problemas de variaciones homogéneos y ordinarios en la definición de una métrica de Riemann

Sea  $M$  una variedad. Un problema de variación homogéneo y ordinario sobre  $M$  es definido utilizando una función real  $v \rightarrow L(v)$  sobre  $TM$  llamada el Lagrangiano sobre  $M$ . Esta función debe de cumplir que:

$$L(\lambda v) = \lambda L(v), \text{ para } \lambda > 0. \quad (\text{B-1})$$

Supongamos que  $L$  satisface la siguiente condición:

$$L(u+v)^2 - L(u-v)^2 = 2L(u)^2 + 2L(v)^2, \text{ para } u \text{ y } v \text{ en } TM. \quad (\text{B-2})$$

Utilizando la condición (B-2), podemos definir una forma bilineal simétrica en cada espacio tangente  $T_pM$ , para  $p \in M$ , dada por una función  $(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$ , donde:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} [L(u+v)^2 - L(u)^2 - L(v)^2]. \quad (\text{B-3})$$

La forma bilineal cumplirá entonces que:

$$L(u) = \langle u, u \rangle^{1/2} \text{ para toda } u \in T_pM, \quad (\text{B-4})$$

lo cual también es escrito como:  $L(u) = \|u\|$ .

Si adicionalmente la forma bilineal definida por la ecuación (B-3) es positiva definida, diremos que  $L$  **definirá una métrica de Riemann sobre  $M$** . El estudio de las propiedades

geométricas de las curvas extremales de el Lagrangiano  $L$  es conocida como geometría de Riemann. Las curvas extremales en este contexto son llamadas geodésicas.

Los teoremas básicos de la geometría de Riemann pueden ser considerados casos especiales de los teoremas para problemas de variaciones generales. Sin embargo, existen resultados especiales, los cuales se utilizan para comprender la estructura de los extremales. Una razón para esto es la existencia de una nueva estructura, llamada la conexión afín, asociada con la métrica de Riemann. Esta conexión nos permite estudiar las ecuaciones diferenciales asociadas a los extremales con un mayor detalle; llevándonos finalmente al concepto de curvatura.

## B.2. La conexión afín

De manera precisa, una conexión afín sobre una variedad  $M$  es un mapa  $V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$ , denotado por  $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ , para  $X, Y \in V(M)$ , que cumple las siguientes condiciones:

$$\nabla_{X_1+X_2}(Y_1+Y_2) = \nabla_{X_1}Y_1 + \nabla_{X_2}Y_2 + \nabla_{X_1}Y_2 + \nabla_{X_2}Y_1, \quad (\text{B-5})$$

para todas  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in V(M)$ ;

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y, \quad (\text{B-6})$$

para  $f \in F(M)$ ;

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y. \quad (\text{B-7})$$

Una conexión afín puede ser entendida intuitivamente como una regla de diferenciación covariante;  $\nabla_X Y$  es la derivada covariante del campo vectorial  $Y$  por el campo vectorial  $X$ .

Podemos dar sentido a la conexión afín como un objeto geométrico, el cual conecta espacios tangentes cercanos y permite que los vectores en estos espacios puedan ser derivados como si fuesen funciones sobre la variedad. Hasta el momento no hemos utilizado la métrica de Riemann asociada a una variedad. La importancia de la métrica es que nos permite seleccionar de manera natural una conexión afín conocida como la conexión de Levi-Civita. La elección de una conexión

afín es equivalente a describir la forma en la cual se derivarán los campos vectoriales sobre la variedad.

Utilizando un conjunto de funciones coordenadas  $x^\mu$  y las bases coordenadas para los campos vectoriales  $\partial_\mu$ , para el campo vectorial  $X$ , y  $\partial_\nu$ , para el campo vectorial  $Y$ ; encontramos los componentes de la conexión afín:

$$\nabla_{\partial_\mu} (\partial_\nu) = \Gamma_{\mu\nu\xi} \partial_\xi. \quad (\text{B-8})$$

Las funciones  $\Gamma_{\mu\nu\xi}$  caracterizan la conexión, esto se ve claramente si tomamos los campos vectoriales como  $X^\mu \partial_\mu$  y  $Y^\nu \partial_\nu$ ; y aplicamos las reglas de la derivada covariante. Primero, a partir de la regla (B-6), tenemos:

$$\nabla_{X^\mu \partial_\mu} (Y^\nu \partial_\nu) = X^\mu \nabla_{\partial_\mu} (Y^\nu \partial_\nu),$$

seguido de la regla (B-7),

$$X^\mu \nabla_{\partial_\mu} (Y^\nu \partial_\nu) = X^\mu (\partial_\mu (Y^\nu) \partial_\nu + Y^\nu \nabla_{\partial_\mu} (\partial_\nu)),$$

continuando con la aplicación de los componentes (B-8),

$$X^\mu (\partial_\mu (Y^\nu) \partial_\nu + Y^\nu \nabla_{\partial_\mu} (\partial_\nu)) = X^\mu (\partial_\mu (Y^\nu) \partial_\nu + Y^\nu \Gamma_{\mu\nu\xi} \partial_\xi),$$

y finalizando con un renombre de coordenadas, obtenemos la expresión final:

$$\nabla_{X^\mu \partial_\mu} (Y^\nu \partial_\nu) = X^\mu \left[ \partial_\mu (Y^\xi) + Y^\nu \Gamma_{\mu\nu\xi} \right] \partial_\xi. \quad (\text{B-9})$$

La importancia de la ecuación (B-9) se centra en el espíritu de la Geometría Diferencial, es decir, que es una definición libre del sistema de coordenadas. Esta ecuación tendrá una modificación cuando encontremos la dependencia de los coeficientes de la conexión con la métrica de Riemann.

### B.3. El transporte paralelo y la conexión afín

Una derivada es una medida del cambio que se tiene con respecto a la cualidad de ser constante. ¿Qué idea debemos de tener por constante para los objetos geométricos definidos en la geometría diferencial? ¿Como es que identificamos a un campo vectorial como constante en una variedad? La propiedad de ser constante esta relacionada con una característica de cualquier operación del tipo de derivación y esta es, que cuando el objeto es alimentado a la derivación, esta nos debe de regresar un objeto particular al identificaremos como el objeto cero. La idea de constancia esta relacionada con la característica de ser paralelo para un campo vectorial. En una variedad en general definimos un vector asociado a un espacio tangente, este espacio tangente existe para cada punto en la variedad. Así que comparar vectores, es decir, saber decir cuando son paralelos, sería solo posible si tenemos un objeto que sirva como conexión entre los diferentes espacios tangentes. Estas ideas son las que nos llevan a entender la idea de la conexión afín y su carácter como derivada covariante. Más aún, la idea de paralelismo la definimos en base a las curvas que existen sobre la variedad y esto hace que el paralelismo tenga una dependencia con respecto a las curvas. La idea se dependencia con respecto a una curva, al movernos entre dos puntos de la variedad, para el paralelismo es un ingrediente esencial en las teorías físicas modernas de la interacción entre partículas.

La importancia de la conexión afín es que nos da la oportunidad de crear un método para realizar traslaciones paralelas de vectores tangentes, de una variedad  $M$ , a lo largo de cualquier curva de  $M$ . El proceso del transporte paralelo puede ser descrito cualitativamente de la siguiente forma, supongamos que tenemos una curva  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ . Para cualesquiera dos puntos sobre la curva, les podemos asociar sus espacios tangentes; estos espacios son espacios vectoriales y por lo tanto son isomorfos. No existe una manera única de describir un isomorfismo entre espacios vectoriales, pero si  $M$  es euclidiano, podemos describir este isomorfismo debido a que ambos espacios tangentes serían isomorfos con  $M$ ; una manera de pensar esto es ver a  $M$  euclidiano como un puente entre los espacios tangentes. Sin embargo, esto no es en general cierto para cualquier variedad diferencial. Por una traslación paralela a lo largo de una curva  $\sigma$ , lo que entenderemos será un método para dar un isomorfismo entre dos puntos a lo largo de la curva; de tal manera que este isomorfismo sea suave. Recordando, que en cierto sentido, el espacio tangente a un punto de una variedad es una descripción local de la geometría de este



punto, entonces el transporte paralelos correspondería a una regla para transportar la geometría local a lo largo de una variedad.

De manera general el isomorfismo entre dos espacios tangentes depende de la curva con la que se unen los puntos asociados con dichos espacios. La conexión afín, a través de las reglas para la derivación covariante, nos describe un proceso para encontrar un isomorfismo. Comencemos suponiendo que  $\sigma$  es una curva integral para un campo vectorial  $X$  sobre  $M$ . Supongamos, adicionalmente, que  $Y$  es otro campo vectorial sobre  $M$ , con la condición:

$$\nabla_X Y(\sigma(t)) = 0 \text{ para } t \in [a, b]. \quad (\text{B-10})$$

Si  $Y$  satisface la condición anterior diremos que su derivada covariante a lo largo de  $\sigma$  es cero. Un campo vectorial sobre  $\sigma$  es un mapa  $v : [a, b] \rightarrow T_{\sigma(t)}M$ , es decir, asigna un vector  $v(t) \in T_{\sigma(t)}M$  a cada  $t \in [a, b]$ . Podemos crear una nueva operación que asigne un campo vectorial  $\nabla v$  a cada campo vectorial  $v$  sobre  $\sigma$ , que cumple las siguientes propiedades:

Si  $\alpha(t)$  es una función real de  $t \in [a, b]$ ,

$$\nabla(\alpha(t)v(t)) = \frac{d\alpha}{dt}v(t) + \alpha(t)\nabla v(t); \quad (\text{B-11})$$

si  $u$  y  $v$  son dos campos vectoriales a lo largo de  $\sigma$ ,

$$\nabla u + \nabla v = \nabla(u + v); \quad (\text{B-12})$$

si  $X$  y  $Y$  son campos vectoriales sobre  $M$  que cumplen que  $\dot{\sigma}(t) = X(\sigma(t))$  y  $v(t) = Y(\sigma(t))$ , para  $t \in [a, b]$ , entonces,

$$\nabla v(t) = \nabla_X Y(\sigma(t)), \quad (\text{B-13})$$

si  $v_a$  es un vector tangente en  $T_{\sigma(a)}M$ , existe un único campo vectorial  $v$  a lo largo de  $\sigma$  con  $v(a) = v_a$  y  $\nabla v = 0$ . La correspondencia  $v_a \rightarrow v(t)$ , para cada  $t \in [a, b]$  es lineal, y crea un isomorfismo entre  $T_{\sigma(a)}M$  y  $T_{\sigma(t)}M$ . Esta correspondencia la llamaremos una **traslación paralela** de vectores tangentes a lo largo de  $\sigma$ . En resumen, decimos que un vector es transportado paralelamente si se cumple que:

$$\nabla_{\dot{\sigma}(t)}v(t) = 0, \text{ para todo } t \in [a, b]. \quad (\text{B-14})$$

Una mejor idea de lo que nos dice la ecuación (B-14) la obtenemos al escribirla utilizando un sistema de coordenadas  $x^\mu$ . En este sistema, escribimos:  $X = X^\mu \partial_\mu$ ,  $Y = Y^\nu \partial_\nu$  y  $\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu$ . Aplicando la fórmula (B-9) y la regla de la cadena, llegamos a que podemos expresar (B-14) como:

$$\frac{d}{dt} \left( Y^\xi \right) + \frac{dx^\mu}{dt} Y^\nu \Gamma_{\mu\nu\xi} = 0. \quad (\text{B-15})$$

## B.4. Las líneas auto-paralelas

Cualquier campo vectorial  $v$  sobre  $\sigma$  que cumpla que  $\nabla v = 0$  se dira que es auto-paralelo. En una variedad diferencial con una conexi3n afn, las lneas auto-paralelas del espacio satisface que:

$$\nabla \dot{\sigma}(t) = 0 \quad (\text{B-16})$$

En esta 3ltima ecuaci3n, al utilizar un sistema de coordenadas  $x^\mu$ , si  $\sigma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ , los componentes del campo vectorial  $\dot{\sigma}(t)$  ser3n  $\frac{dx^\mu}{dt}$ , y utilizando (B-9):

$$\frac{d^2 x^\xi}{dt^2} = -\Gamma_{\mu\nu\xi} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}. \quad (\text{B-17})$$

La relaci3n (B-17) son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales y de segundo orden. A lo m3s, podremos decir de ellas que tienen un soluci3n 3nica cuando seleccionamos las condiciones  $x(a)$  y  $\frac{dx}{dt}(a)$ ; esto es, cuando tanto  $\sigma(a)$  y  $\dot{\sigma}(a)$  son datos dados.

## B.5. El tensor de torsi3n y el tensor de curvatura

Ahora describiremos lo que es el tensor de torsi3n y el tensor de curvatura asociados con una conexi3n afn de una variedad  $M$ . El tensor de torsi3n lo definimos como un mapa  $T :$

$V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$  definido como:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (\text{B-18})$$

para  $X, Y \in V(M)$ . La idea geométrica que debemos de tener en mente es que el tensor de torsión nos indica que tanto gira un plano tangente asociado a un punto cuando este es transportado paralelamente.

El tensor de curvatura es definido como un mapa  $R : V(M) \times V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$  definido como:

$$R(X, Y)(Z) = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z, \quad (\text{B-19})$$

para  $X, Y, Z \in V(M)$ . La idea geométrica en esta ocasión es un poco más complicada que con la torsión. En este caso, al transportar paralelamente, a lo largo de una curva, un vector asociado a un punto y por ende asociado a un espacio tangente, el cual se entenderá que rodará con una cierta velocidad dependiendo que depende de la curvatura.

Podemos deducir algunas propiedades algebraicas de estos tensores, sin embargo, estas propiedades, como la formula en coordenadas para los tensores, serán más fáciles de comprender cuando hayamos introducido formalmente el concepto del producto interno de una variedad y su asociación con alguna métrica de Riemann asociada a la variedad.

## B.6. Intermedio: Del dialecto físico

Hasta este momento hemos desarrollado de manera formal un lenguaje matemático para entender el comportamiento de los objetos geométricos dentro de la geometría diferencial. Las relaciones que estos objetos para con la física parecen oscuros de momento. En física la capacidad de poder identificar el comportamiento de un fenómeno, como por ejemplo utilizando ecuaciones diferenciales para entender su evolución, es tan importante como poder calcular de manera precisa el estado en el que dicho fenómeno se encuentra. Podemos resumir que para la física es tan importante la comprensión, a nivel matemático, como la posibilidad de describir, realizar cálculos. La geometría diferencial tiene en si misma grandes capacidades de descripción, pero su fortaleza completa solo puede ser observada si desarrollamos herramientas útiles para

realizar cálculos. La idea principal que hemos utilizado hasta estos momentos es la de tener un objeto matemático, que describa de manera correcta una de las más importantes propiedades físicas, esta es la capacidad de describir sin en un mismo lenguaje matemático sin tener que estar atados a los sistemas coordenados que se utilicen. Finalmente, la geometría de Riemann extiende las capacidades de descripción utilizando una métrica. Diversas teorías físicas son desarrolladas dependiendo de las características de una métrica. En esta sección daremos inicio a lo que es popularmente conocido como el lenguaje de geometría diferencial utilizado por los físicos. El nodo que utilizaremos para comenzar a utilizar el dialecto físico será el Lagrangiano.

## B.7. El producto interno y el Lagrangiano

Supongamos que tenemos una variedad  $M$  con un Lagrangiano  $L \in F(TM)$ . Esto significa que para cada  $p \in M$ , existe una forma bilineal simétrica positiva  $(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$  en cada espacio tangente  $T_p M$ , de tal forma que:  $L(v) = \langle v, v \rangle^{1/2} = \|v\|$ . Si  $X$  y  $Y$  son campos vectoriales sobre  $M$ , el producto interno de  $X$  y  $Y$ , denotado por  $\langle X, Y \rangle$  es definido como:

$$\langle X, Y \rangle (p) = \langle X(p), Y(p) \rangle. \quad (\text{B-20})$$

Con las siguientes propiedades:

$$\langle X, Y \rangle \in F(M) \text{ para } X, Y \in V(M); \quad (\text{B-21})$$

$$\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle; \quad (\text{B-22})$$

para  $f_1, f_2 \in F(M)$  y  $X_1, X_2, Y \in V(M)$ ,

$$\langle f_1 X_1 + f_2 X_2, Y \rangle = f_1 \langle X_1, Y \rangle + f_2 \langle X_2, Y \rangle; \quad (\text{B-23})$$

$$\langle X, X \rangle \geq 0, \text{ si } \langle X, X \rangle = 0, \text{ entonces, } X(p) = 0. \quad (\text{B-24})$$

Con estas identidades podemos definir una métrica de Riemann utilizando el producto interno que satisface las anteriores propiedades.

Una conexión afín es una estructura extra que hemos dado a la variedad, sin embargo, no existe en principio nada que nos diga cuantas conexiones afines podemos asociar a una variedad. Esto se traduce en la amenaza extendida de tener una definición múltiple de los que seria el transporte paralelo. En lugar de atacar el problema de seleccionar un tipo de paralelismo, utilizamos el producto interno para definir una única conexión afín  $\nabla$  sobre una variedad  $M$ . Esta es la propiedad principal que obtenemos al tener un producto interno.

Supongamos entonces que tenemos una producto interno sobre  $M$ , que satisface las propiedades (B-21) a (B-24), entonces, existe una única conexión  $\nabla$  sobre  $M$  que cumple:

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y], \quad (\text{B-25})$$

para  $X, Y \in V(M)$ , la propiedad (B-25) significa que el vector de torsión es cero; y para  $Z \in V(M)$

$$Z(\langle X, Y \rangle) = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (\text{B-26})$$

Esta conexión afín es conocida como la conexión de Riemann o también es conocida como la conexión de Levi-Civita. Para comprobar la unicidad, a partir de (B-26), escribimos:

$$\langle \nabla_Z X, Y \rangle = Z(\langle X, Y \rangle) - \langle X, \nabla_Z Y \rangle,$$

lo cual es cierto debido a que todos los términos de la ecuación son elementos de  $F(M)$ , es decir que obedecen las operaciones de los números reales; después, aplicando (B-25),

$$\begin{aligned} Z(\langle X, Y \rangle) - \langle X, \nabla_Z Y \rangle &= Z(\langle X, Y \rangle) - \langle X, \nabla_Y Z + [Z, Y] \rangle \\ &= Z(\langle X, Y \rangle) - \langle X, \nabla_Y Z \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle, \end{aligned}$$

donde en la última parte hemos aplicado las operaciones lineales del producto interno, y comenzamos a darle sentido a la razón de utilizarle. Al tomar  $\langle X, \nabla_Y Z \rangle$  y aplicar la relación (B-26),

obtenemos que  $\langle X, \nabla_Y Z \rangle = Y(\langle X, Z \rangle) - \langle \nabla_Y X, Z \rangle$ , esta identidad nos dice que:

$$Z(\langle X, Y \rangle) - \langle X, \nabla_Y Z \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle = Z(\langle X, Y \rangle) - Y(\langle X, Z \rangle) - \langle X, [Z, Y] \rangle + \langle \nabla_Y X, Z \rangle,$$

lo que observamos con este juego es que podemos empujar el campo de variación utilizando las identidades que hemos definido. El juego terminará si llegamos a una expresión que nos relacione la identidad original con una sucesión de aplicaciones de sus propiedades. El resultado final es concatenar todas las igualdades obtenidas, finalmente:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_Z X, Y \rangle &= Z\langle X, Y \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle & (\text{B-27}) \\ &\quad - Y\langle X, Z \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle \\ &\quad + X\langle Y, Z \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle. \end{aligned}$$

Debido a que el lado derecho de (B-27) no esta en función de  $\nabla$ , esta expresión será una regla que define de manera única a  $\nabla$ .

## B.8. La métrica de Riemann

Supongamos que para un sistema de coordenadas  $x^\mu$  escribimos:

$$g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle. \quad (\text{B-28})$$

Las propiedades (B-21) a (B-24) implican que para cada  $p$ ,  $g_{\mu\nu}(p)$  es una matriz positiva definida y simétrica. Los componentes de  $g_{\mu\nu}$  son los componentes de esta métrica con respecto a el sistema coordenado dado. Recordemos que el producto interno esta relacionado con la definición del Lagrangiano  $L(v) = \|v\|$ , de tal forma que este puede ser escrito como:

$$L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (\text{B-29})$$

Los coeficientes para la conexión también pueden ser expresados utilizando la métrica. Lo que tenemos que hacer es utilizar la relación (B-8) y observar que:

$$\langle \nabla_{\partial_\mu} (\partial_\nu), \partial_\kappa \rangle = \Gamma_{\mu\nu\xi} \langle \partial_\xi, \partial_\kappa \rangle = \Gamma_{\mu\nu\xi} g_{\xi\kappa},$$

por otro lado, utilizando la identidad (B-27), y observando que  $[\partial_\mu, \partial_\nu] = \delta_{\mu\nu}$ , encontramos que:

$$\langle \nabla_{\partial_\mu} (\partial_\nu), \partial_\kappa \rangle = \frac{1}{2} [\partial_\mu (g_{\nu\kappa}) - \partial_\kappa (g_{\nu\mu}) + \partial_\nu (g_{\kappa\mu})];$$

si tomamos la matriz inversa  $(g_{\xi\kappa})^{-1}$ , encontramos que:

$$\Gamma_{\mu\nu\xi} = \frac{1}{2} [\partial_\mu (g_{\nu\kappa}) - \partial_\kappa (g_{\nu\mu}) + \partial_\nu (g_{\kappa\mu})] (g_{\xi\kappa})^{-1}. \quad (\text{B-30})$$

La identidad (B-30) muestra de manera clara que al tener una métrica podemos calcular los componentes de la conexión de Levi-Civita.

En las siguientes secciones trasladaremos lo que hemos aprendido de la conexión afín, en este caso especial, sobre la conexión de Levi-Civita, utilizando el poder de cálculo que nos da la métrica de Riemann.

## B.9. Escribiendo en términos de la métrica de Riemann

En este trabajo, el objeto principal de estudio son las geodésicas. Hasta el momento hemos desarrollado las ideas que nos llevan hacia ellas, prestando especial atención al definir las líneas auto-paralelas. Con la métrica de Riemann dimos un paso adelante para poder describirles. Sin embargo, la pregunta sigue en el aire, ¿qué es lo que debemos de entender por una geodésica? En este punto, comenzaremos con escribir los objetos matemáticos de la geometría diferencial en términos de la métrica. El plan a seguir es utilizar la métrica para definir las geodésicas desde dos frentes diferentes. Primero les definiremos utilizando la conexión de Levi-Civita y después lo haremos utilizando el Lagrangiano.

### B.9.1. Los vectores base del espacio tangente a un punto y la métrica de Riemann

Dado un Lagrangiano  $L \in F(TM)$ , sobre una variedad  $M$ , a cada  $p \in M$ , existe un producto interno en cada espacio tangente  $T_pM$ . Si  $X$  y  $Y$  son campos vectoriales sobre  $M$ , estos pueden ser escritos en coordenadas locales como:  $X = X^\mu \partial_\mu$ ,  $Y = Y^\nu \partial_\nu$ . Para el producto interno tendremos que

$$\begin{aligned}\langle X, Y \rangle (p) &= \langle X^\mu \partial_\mu, Y^\nu \partial_\nu \rangle (p) \\ &= X^\mu Y^\nu \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle (p).\end{aligned}$$

Una notación, más acorde con el carácter de espacio vectorial de  $T_pM$ , para los vectores base  $\partial_\mu$  y  $\partial_\nu$  es  $\vec{e}_\mu$  y  $\vec{e}_\nu$ , respectivamente, de esta manera podemos escribir el producto interno como:

$$X^\mu Y^\nu \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle (p) = (X^\mu Y^\nu) (p) [\vec{e}_\mu (p) \cdot \vec{e}_\nu (p)],$$

por otra parte, la relación (B-28) nos dice que:

$$X^\mu Y^\nu g_{\mu\nu} (p) = (X^\mu Y^\nu) (\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu) (p),$$

con lo cual llegamos a la identificación de la métrica con los vectores base de un espacio tangente:

$$g_{\mu\nu} (p) = (\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu) (p), \tag{B-31}$$

más aún, podemos llegar a identificar a la base dual con la métrica de la siguiente manera:

$$g^{\mu\nu} (p) = (\vec{e}^\mu \cdot \vec{e}^\nu) (p), \tag{B-32}$$

las cantidades definidas por  $g^{\mu\nu}$  son en general diferentes de las dadas por  $g_{\mu\nu}$ . A las primeras se les denomina los componentes contravariantes de la métrica. De manera general, diremos que para dos vectores  $v_p = \vec{v}$  y  $w_p = \vec{w} \in T_pM$ , el producto interno de ellos estará definido por:



$$\vec{v} \cdot \vec{w} = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu, \quad (\text{B-33})$$

con esta fórmula comenzamos a notar que la métrica contiene dentro de ella la descripción geométrica local, a decir, una métrica de un espacio euclidiano debería de ser:  $\vec{v} \cdot \vec{w} = v^\mu w^\nu$ , para  $\vec{v}$  y  $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ . Esta idea la podemos extender con la conexión de Levi-Civita y la curvatura asociada a esa conexión para entender que un espacio plano es un espacio con curvatura cero.

### B.9.2. Subir y bajar índices con la métrica de Riemann

Podemos especificar cualquier vector sobre  $T_p M$ , ya sea utilizando la base natural o su dual. En este contexto, entenderemos que un vector está especificado por los componentes en cualquiera de estas dos bases. A los componentes asociados con la base dual los llamamos covariantes; mientras que a los asociados con la base natural los llamaremos contravariantes. Los componentes covariantes y contravariantes son formas equivalentes de poder describir un vector de una manera correcta. El enlace entre ellas se encuentra al considerar las diferentes formas en las que uno puede escribir el producto interno entre dos vectores. Recordemos que, de manera general:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu \quad (\text{B-34})$$

y

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = g^{\mu\nu} v_\mu w_\nu, \quad (\text{B-35})$$

una importante relación, que debemos tener en mente, se debe a lo que define que una base sea dual. De manera precisa, tendremos:

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (\text{B-36})$$

Con esta última relación, obtenemos dos formas en las cuales podemos relacionar componentes covariantes y contravariantes. Comenzamos con el producto interno entre dos vectores y observamos que:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v^\mu \vec{e}_\mu) \cdot (w_\nu \vec{e}^\nu) = v^\mu w_\nu \delta_\mu^\nu \quad (\text{B-37})$$

y

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_\mu \vec{e}^\mu) \cdot (w^\nu \vec{e}_\nu) = v_\mu w^\nu \delta_\nu^\mu. \quad (\text{B-38})$$

Comparando todas las expresiones anteriores, llegamos a las siguientes conclusiones:

$$g_{\mu\nu} w^\nu = w_\mu \quad (\text{B-39})$$

y

$$g^{\mu\nu} w_\nu = w^\mu. \quad (\text{B-40})$$

En palabras diremos que  $g_{\mu\nu}$  baja índices al multiplicarse por un componente contravariante y  $g^{\mu\nu}$  sube índices al aplicársele a un componente covariante.

Finalmente, con las relaciones (B-39) y (B-40), podemos relacionar los elementos de la base natural y la dual:

$$\vec{e}_\mu = g_{\mu\nu} \vec{e}^\nu \quad (\text{B-41})$$

y

$$\vec{e}^\mu = g^{\mu\nu} \vec{e}_\nu. \quad (\text{B-42})$$

### B.9.3. Relación entre los componentes covariantes y contravariantes de la métrica de Riemann

Un resultado sobre los componentes contravariantes de la métrica  $g^{\mu\nu}$  y los componentes de la covariantes  $g_{\mu\nu}$  se da al tomar las propiedades para subir y bajar índices que estas tienen. Primero, demostremos que:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\xi} = \delta_\xi^\mu. \quad (\text{B-43})$$

La demostración es siguiendo el siguiente conjunto de igualdades para algún componente  $v^\xi$  de un vector  $\vec{v}$ :

$$\delta_{\xi}^{\mu} v^{\xi} = v^{\mu} = g^{\mu\nu} v_{\nu} = g^{\mu\nu} g_{\nu\xi} v^{\xi},$$

al ser  $v^{\xi}$  cualquier componente, la igualdad (B-43) se sigue. Esta relación nos indica, que si identificamos a  $g_{\mu\nu}$  con una matriz  $G$ ; y a  $g^{\mu\nu}$  con una matriz  $\bar{G}$ , tendremos que  $G\bar{G} = I$ , de tal manera que  $G$  y  $\bar{G}$  son inversas una de la otra.

#### B.9.4. Los coeficientes de la conexión y la métrica de Riemann

De la relación (B-43), aplicada a la definición de los coeficientes (B-30), tendríamos que escribir:

$$\Gamma_{\mu\nu\xi} = \frac{1}{2} g^{\xi\kappa} [\partial_{\mu} (g_{\nu\kappa}) - \partial_{\kappa} (g_{\nu\mu}) + \partial_{\nu} (g_{\kappa\mu})],$$

esto nos indica, utilizando la convención para los índices:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\xi} = \frac{1}{2} g^{\xi\kappa} [\partial_{\mu} (g_{\nu\kappa}) + \partial_{\nu} (g_{\kappa\mu}) - \partial_{\kappa} (g_{\nu\mu})],$$

esta última expresión se acostumbra escribirla con un orden diferente en los índices de la siguiente forma:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} [\partial_b (g_{cd}) + \partial_c (g_{db}) - \partial_d (g_{cb})], \quad (\text{B-44})$$

donde también se utiliza el alfabeto romano en lugar del griego.

#### B.9.5. Los vectores base del espacio tangente a un punto y los coeficientes de la conexión afín

Utilizando esta nueva terminología podemos escribir la derivada covariante de la siguiente forma:

$$\nabla_{\partial_b} (Y^a \partial_a) = [\partial_b (Y^c) + Y^a \Gamma_{ba}^c] \partial_c,$$

que al utilizar la convención para escribir las bases del espacio tangente, esto se escribe como:

$$\nabla_{\partial_b} (v^a \vec{e}_a) = [\partial_b (v^c) + v^a \Gamma_{ba}^c] \vec{e}_c,$$

donde nos hemos tomado la libertad de escribir el vector  $Y^a \partial_a = v^a e_a$ ; finalmente, se toma una nueva convención para indicar con respecto de que base se esta derivando, tomándose solo la letra de su índice, esto es:

$$\nabla_b (v^a \vec{e}_a) = [\partial_b (v^c) + v^a \Gamma_{ba}^c] \vec{e}_c. \quad (\text{B-45})$$

de esta misma identidad podemos identificar inmediatamente que:

$$\partial_b (\vec{e}_a) = \nabla_b (\vec{e}_a) = \Gamma_{ba}^c \vec{e}_c \quad (\text{B-46})$$

Por otra parte, también podemos ver que:

$$\begin{aligned} g^{ac} \nabla_b (v^a \vec{e}_a) &= \nabla_b (v^a g^{ca} \vec{e}_a) = \nabla_b (v^a \vec{e}^c) \\ &= g^{ac} [\partial_b (v^c) + v^a \Gamma_{ba}^c] \vec{e}_c \\ &= [\partial_b (v^a) + v^c \Gamma_{bc}^a] \vec{e}^a \end{aligned}$$

y volviendo a operar de la misma forma:

$$\begin{aligned} g_{ca} \nabla_b (v^a \vec{e}^c) &= \nabla_b (g_{ca} v^a \vec{e}^c) = \nabla_b (v_c \vec{e}^c) \\ &= g_{ca} [\partial_b (v^a) + v^c \Gamma_{bc}^a] \vec{e}^c \\ &= [\partial_b (g_{ca} v^a) + g_{ca} v^c \Gamma_{bc}^a] \vec{e}^a \\ &= [\partial_b (v_c) + v_a \Gamma_{bc}^a] \vec{e}^a, \end{aligned}$$

siendo entonces la identidad final:

$$\nabla_b (v_c \vec{e}^c) = [\partial_b (v_c) + v_a \Gamma_{bc}^a] \vec{e}^a \quad (\text{B-47})$$

que es la derivada covariante para los covectores.

### B.9.6. Relación entre la torsión y la derivada covariante

Podemos escribir los coeficientes de la torsión en términos de la derivada covariante, para hacerlo, rescribimos la relación (B-18) para los vectores base:

$$T(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \nabla_a \vec{e}_b - \nabla_b \vec{e}_a - [\vec{e}_a, \vec{e}_b].$$

En esta expresión debemos de recordar que para un conjunto de sistemas coordenados  $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 0$ , lo cual nos dice que:

$$T(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \nabla_a \vec{e}_b - \nabla_b \vec{e}_a.$$

Aplicando la relación (B-46):

$$T_{ab}^c \vec{e}_c = T(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = (\Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c) \vec{e}_c. \quad (\text{B-48})$$

en el caso de que la torsión sea cero, como en el caso de la conexión de Levi-Civita, obtenemos:

$$\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c \quad (\text{B-49})$$

### B.9.7. Relación entre la curvatura y la derivada covariante

También podemos obtener una expresión para la curvatura y los coeficientes de la conexión. Comenzamos con la expresión para la curvatura general,

$$R(X, Y)(Z) = \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

y los escribimos en términos de una base para un espacio tangente:

$$R(\vec{e}_a, \vec{e}_b)(\vec{e}_c) = \nabla_a (\nabla_b \vec{e}_c) - \nabla_b (\nabla_a \vec{e}_c) - \nabla_{[\vec{e}_a, \vec{e}_b]} \vec{e}_c,$$

aplicando la definición (B-46):

$$R(\vec{e}_a, \vec{e}_b)(\vec{e}_c) = \nabla_a \left( \Gamma_{bc}^d \vec{e}_d \right) - \nabla_b \left( \Gamma_{ac}^d \vec{e}_d \right),$$

la propiedad (B-7) de la derivada covariante nos permite escribir esta expresión como:

$$R(\vec{e}_a, \vec{e}_b)(\vec{e}_c) = \partial_a \left( \Gamma_{bc}^d \right) \vec{e}_d + \Gamma_{bc}^d \nabla_a (\vec{e}_d) \\ - \partial_b \left( \Gamma_{ac}^d \right) \vec{e}_d - \Gamma_{ac}^d \nabla_b (\vec{e}_d),$$

y aplicando nuevamente (B-46), llegamos a que:

$$R(\vec{e}_a, \vec{e}_b)(\vec{e}_c) = \partial_a \left( \Gamma_{bc}^d \right) \vec{e}_d + \Gamma_{bc}^d \Gamma_{ad}^e \vec{e}_e \\ - \partial_b \left( \Gamma_{ac}^d \right) \vec{e}_d - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^e \vec{e}_e,$$

ordenando los índices llegamos a la expresión final:

$$R_{ab}(\vec{e}_c) = R(\vec{e}_a, \vec{e}_b)(\vec{e}_c) \\ = \partial_a \left( \Gamma_{bc}^d \right) - \partial_b \left( \Gamma_{ac}^d \right) + \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ae}^d - \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d. \quad (\text{B-50})$$

## B.10. Las Geodésicas y la conexión de Levi-Civita

Sabemos que un campo vectorial es auto-paralelo si satisface que:

$$\nabla_{\dot{\sigma}}(t) = 0.$$

Donde suponemos que  $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ , es una curva sobre una variedad  $M$ . Esta condición la hemos escrito utilizando un sistema de coordenadas locales, a decir, escribimos que:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\Gamma_{\mu\nu\xi} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}.$$

La idea principal es identificar a  $\sigma$  como una curva integral para un campo vectorial  $X$  sobre la variedad. En esta parte, lo que hacemos es tomar cualquier otro campo vectorial, digamos  $Y$  y observar que si la condición se cumple, tendríamos que:

$$\nabla_X Y(\sigma(t)) = 0,$$

para todo punto  $t \in [a, b]$ . Esta es una condición que hemos aplicado sobre una conexión. Podemos seleccionar esta conexión como la de Levi-Civita y aplicando la terminología de la geometría de Riemann, escribimos:

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0. \quad (\text{B-51})$$

El sistema de ecuaciones (B-51) definirá para cada coordenada  $x^a$  una curva  $x^a(t)$ , la cual será la ecuación geodésica asociada a esa coordenada.

## B.11. Las Geodésicas y la primera variación

El cálculo de variaciones permite encontrar una función o conjunto de funciones que hace que una integral que depende de una función sea estacionaria, es decir, hace que el valor de esa integral sea un máximo o mínimo local. Consideremos la siguiente integral:

$$I = \int_A^B F(x^a, \dot{x}^a, u) du,$$

donde  $A, B$  y el integrando  $F$  son fijos, pero la curva  $x^a(u)$  se toma de tal manera que sea un valor estacionario de  $I$ . Observamos que podemos tomar el integrando como el Lagrangiano que definimos en (B-29).

Consideremos ahora hacer una variación  $x^a(u) \rightarrow x^a(u) + \delta x^a(u)$  en esta curva. Mantenemos los puntos  $A$  y  $B$  fijos. La primera variación en el valor de la integral estará dada por:

$$\delta I = \int_A^B \delta F du = \int_A^B \left( \frac{\partial F}{\partial x^a} \delta x^a + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \delta \dot{x}^a \right) du.$$

Integrando por partes y pidiendo que  $\delta I = 0$ , obtenemos:

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \delta \dot{x}^a \Big|_A^B + \int_A^B \left[ \frac{\partial F}{\partial x^a} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \right) \right] \delta x^a du = 0.$$

Dado que  $A$  y  $B$  son puntos fijos, el primer término de la expresión anterior es igual a cero.

Entonces, dado que  $\delta x^a$  es arbitrario, la curva extremal  $x^a(u)$  satisface las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^a} = 0.$$

Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Considerando ahora el Lagrangiano (B-29), las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0. \quad (\text{B-52})$$

La forma en la cuál podemos ver que estas ecuaciones son equivalentes con las dadas por (B-21), es simplemente desarrollándolas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} &= \frac{d}{du} \left( \frac{\partial g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b}{\partial x^a} \\ &= \frac{d}{du} \left( g_{ab} \frac{\partial \dot{x}^a}{\partial \dot{x}^a} \dot{x}^b \right) - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^a} \dot{x}^a \dot{x}^b \\ &= \frac{d}{du} (g_{ab} \dot{x}^b) - \partial_a (g_{ab}) \dot{x}^a \dot{x}^b \\ &= \frac{d}{du} \dot{x}_a - [\partial_a (\vec{e}_a) \cdot \vec{e}_b + \vec{e}_a \cdot \partial_a (\vec{e}_b)] \dot{x}^a \dot{x}^b \\ &= \ddot{x}_a - [\Gamma_{aa}^c \vec{e}_c \cdot \vec{e}_b + \vec{e}_a \cdot \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c] \dot{x}^a \dot{x}^b \\ &= \ddot{x}_a - \Gamma_{ab}^c g_{ac} \dot{x}^a \dot{x}^b \\ &= \ddot{x}_a - \Gamma_{ab}^c \dot{x}^c \dot{x}^b \\ &= \ddot{x}^a + \Gamma_{ab}^c \dot{x}^c \dot{x}^b \end{aligned}$$

de lo cuál se sigue que determina los mismo elementos que (B-51).

De la demostración anterior nos damos cuenta de que si  $g_{ab}$  no depende de alguna coordenada en particular, digamos  $x^d$ , entonces tendremos que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^d} = g_{db} \dot{x}^b = \text{constante.}$$

Entonces, si relacionamos a  $\dot{x}^b = t^b$ , donde  $t$  es el vector tangente a la geodésica, encontramos que:



$$t_d = \text{constante.}$$

De tal forma que tenemos un importante resultado:

Si los coeficientes de la métrica  $g_{ab}$  no dependen (B-53)  
de alguna coordenada  $x^d$ , entonces el  $d$  – componente  
de  $t_d$ , es decir del vector tangente, es una cantidad  
conservada a lo largo de una geodésica.

## B.12. Referencias

El principal trabajo que utilizamos para estudiar los conceptos de la geometría de Riemann lo encontramos en (Hobson *et al.* [2006]). Siendo un libro de relatividad pensamos que esta obra será en las próximas décadas un clásico para la enseñanza de la misma. Su estructura es muy clara y no entra en detalles que en algún momento serán necesario, para este tipo de eventos podemos referir al trabajo clásico (Carmo [1992]). Una importante obra que ha servido también en la elaboración de esta sección es (R. [2010]). El uso que le hemos dado para entender desde una perspectiva más heurística los conceptos de la física y su asociación con la geometría de Riemann.

## Apéndice C

# Elementos de Termodinámica

La termodinámica es una teoría que ha tenido mucho éxito en explicar las propiedades de la materia y su relación con la mecánica de los átomos y las moléculas. En esencia, la termodinámica, estudia el movimiento interno de sistemas de muchos cuerpos. Virtualmente todas las sustancias que nos encontramos en la vida diaria son sistemas de muchos cuerpos. A este tipo de sistemas se les denomina **sistemas macroscópicos**.

¿Cómo depende la presión de un gas con la temperatura y el volumen de su contenedor? ¿Cómo es que funciona un refrigerador? ¿Podemos hacerle más eficiente? ¿Cuánta energía se necesita añadirle al agua para transformarla en vapor? ¿Por qué las propiedades del agua son diferentes a las del vapor siendo que ambas están hechas de las mismas moléculas? Todas estas preguntas están relacionadas con **propiedades macroscópicas** como la presión, el volumen y la temperatura; y su relación con el calor y el trabajo. La termodinámica es una teoría que nos permite relacionar las propiedades macroscópicas de un sistema con otro. En la termodinámica solo se estudian las cantidades macroscópicas y se ignora el resto de las variables microscópicas que caracterizan las moléculas individuales.

### C.1. Conceptos fundamentales

Una teoría inductiva esta basada en las leyes universales de la experiencia. Estas expresan que lo que ha sido cierto en el pasado se espera que sea verdadero en el futuro. La termodinámica es una teoría de este tipo; de tal forma que es una teoría fenomenológica. La termodinámica,

y su interpretación matemática, están basadas en un conjunto de axiomas o postulados. Para comprender estos axiomas debemos primero presentar algunos conceptos fundamentales.

### **C.1.1. Sistemas y parámetros termodinámicos**

Un sistema termodinámico es cualquier sistema macroscópico. A cada sistema termodinámico le asociamos parámetros termodinámicos que son cantidades macroscópicas medibles. Algunos ejemplos de estas cantidades son la presión, el volumen, la temperatura o el campo magnético; y son definidas experimentalmente. Al especificar un valor para cada una de estas variables esta especificando un estado termodinámico y la cantidad de parámetros que tengamos que especificar esta relacionada con la interacción entre los mismos.

### **C.1.2. Equilibrio termodinámico, la ecuación de estado para un sistema y su interpretación geométrica**

Cuando un sistema no cambia con el tiempo, es decir cuando sus parámetros termodinámicos son constantes en el tiempo, tendremos un equilibrio termodinámico en el sistema. En sí, la interacción entre parámetros termodinámicos esta definida por una ecuación de estado, esta ecuación es una relación funcional entre sus parámetros termodinámicos y es aplicada a los sistemas en equilibrio. Si definimos a  $I^a$  y a  $E^a$  como los parámetros de un sistema, su ecuación de estado la podemos expresar como:

$$f(E^a, I^a) = 0. \tag{C-1}$$

El carácter matemático de las ecuaciones de estado nos permite pensar en la reducción de variables independientes de un sistema. La función  $f$  se asume como específica de un fenómeno o la especificación de un sistema. Podemos interpretar la ecuación de estado como una superficie geométrica en un espacio cuyas coordenadas son los parámetros termodinámicos. Cada punto en esta superficie representará un estado de equilibrio.

### **C.1.3. Las transformaciones termodinámicas, los procesos cuasi-estáticos y los procesos reversibles**

El punto de interés en toda teoría física es poder interpretar los cambios que se dan en un sistema. En termodinámica el cambio de un estado lo conocemos como transformación termodinámica. Si el estado inicial es un estado de equilibrio, la transformación se hace solamente por cambios en las condiciones externas del sistema. Una transformación es cuasi-estática si las condiciones externas cambian de manera lenta que a cada momento el sistema esta aproximadamente en equilibrio. De tal manera que un proceso cuasi-estático es una sucesión de estados de equilibrio densa. Podemos caracterizar una transformación como reversible si la transformación puede volver sobre sus pasos cuando las condiciones externas vuelven sobre su historia en el tiempo. Una transformación reversible es cuasi-estática, pero el converso no es cierto. Las transformaciones reversibles están relacionadas con las coordenadas termodinámicas. De tal manera que estas trazan diferentes curvas sobre una superficie de equilibrio; las cuales pueden ser de tipo isotérmica, adiabática, etc.

### **C.1.4. El Trabajo y el Calor**

Los axiomas termodinámicos se definen en términos de energía y por lo mismo están asociados al trabajo y al calor. La definición de trabajo esta ligada con la definición hecha del mismo en la mecánica clásica. Como un ejemplo, si tenemos un sistema con los parámetros  $P$ ,  $V$  y  $T$ ; el trabajo hecho en una transformación infinitesimal en la cuál el volumen es incrementado por  $dV$  es dado por:

$$dW = PdV. \tag{C-2}$$

El calor es un tipo de energía que es absorbido por un sistema homogéneo si su temperatura se incrementa mientras que no se hace trabajo sobre el sistema.

### **C.1.5. La capacidad calorífica como medida del calor**

Para poder darle sentido físico al calor, debemos de encontrar una forma de medirle. La capacidad calorífica es el concepto deseado. Si una cantidad pequeña de calor  $\Delta Q$  es absorbida, un

cambio pequeño de temperatura  $\Delta T$  acompaña la absorción de calor. La capacidad calorífica es definida como:

$$\Delta Q = C \Delta T; \quad (\text{C-3})$$

y depende de la naturaleza del sistema. Un hecho experimental nos dice que para el mismo  $\Delta T$ ,  $\Delta Q$  es diferente para formas diferentes de calentar un sistema. De manera correspondiente, la capacidad calorífica depende, también, de la forma en la que se calentó un sistema. Algunas capacidades caloríficas comunes son  $C_V$  y  $C_p$ ; asociadas a procesos de calentamiento con  $V$  y  $P$  constantes. La capacidad calorífica por unidad de masa o mol para una sustancia es definida como el calor específico.

### **C.1.6. Variables Intensivas y Extensivas**

A los parámetros termodinámicos también se les llama variables termodinámicas. Una variable termodinámica es extensiva si es proporcional a la cantidad de sustancia en el sistema considerado; y es intensiva si es independiente de esta cantidad. Un hecho experimental es que, bajo una buena aproximación, las variables termodinámicas pueden estar solamente de un grupo, es decir pueden ser solo intensivas o extensivas.

### **C.1.7. Axiomas, postulados y leyes termodinámicas**

Los axiomas, o postulados o leyes, termodinámicas son axiomas que definen un modelo matemático. Es posible deducir consecuencias de estos axiomas, pero debemos de recordar que este modelo no corresponde rigurosamente al mundo físico dado que ignora la estructura atómica de la materia. En el dominio macroscópico la termodinámica es útil en el sentido de que nos permite obtener conclusiones precisas. Esta característica se debe a que la ecuación de estado es una función regular en la que las leyes termodinámicas le son enormemente restrictivas.

### C.1.8. La primera ley de la termodinámica

En una transformación termodinámica arbitraria  $\Delta Q$  es la cantidad de calor absorbido por el sistema y  $\Delta W$  es el trabajo total hecho por el sistema. La primera ley de la termodinámica dice que podemos definir una cantidad  $\Delta U$  de la siguiente forma:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W. \quad (\text{C-4})$$

Esta cantidad es la misma durante todas las transformaciones que nos llevan de un mismo estado inicial a un estado final común. Con esto decimos que para todas las transformaciones termodinámicas que comienzan en un mismo estado y finalizan en un estado final, que es igual para todas, la cantidad  $\Delta U$  es la misma.

La primera ley de la termodinámica define una función de estado  $U$ , llamada la energía interna. Empíricamente  $U$  es una cantidad extensiva y esto lo podemos ver de manera clara debido a que la energía de una sustancia se duplica si su masa se duplica. El fundamento experimental de esta ley es conocido como la demostración de Joule entre el calor y la energía mecánica. Al definir al calor como una forma de energía, debemos incluirlo dentro de la ley de conservación de la energía que es precisamente la primer postulado.

Para una transformación infinitesimal, la primera ley nos dice que:

$$dU = dQ - dW. \quad (\text{C-5})$$

Donde la diferencial debe de ser exacta. Esto significa que existe una función  $U$  cuya diferencial es  $dU$ ; o que la integral  $\int dU$  es independiente de el camino de integración; dependiendo solamente de los límites en los cuales esta se integra. Esta propiedad no es compartida por  $dQ$  y  $dW$ . Matemáticamente, la condición para que una diferencial,

$$df = g(A, B) dA + h(A, B) dB, \quad (\text{C-6})$$

sea exacta es:

$$\frac{\partial g}{\partial B} = \frac{\partial h}{\partial A}. \quad (\text{C-7})$$

### C.1.9. La segunda ley de la termodinámica

Existen procesos que satisfacen la primera ley de la termodinámica, pero que estos no existen. Un ejemplo sería tener una piedra en reposo sobre el piso. Esta nunca se ve que espontáneamente se enfríe y salte con la energía así obtenida. El propósito del segundo postulado es incorporar estos hechos a la termodinámica. Su fundamentación experimental es el sentido común.

Históricamente existen dos enunciados equivalentes para enunciar el segundo axioma termodinámico:

1. No existen transformaciones termodinámicas cuyo solo efecto sea extraer una cantidad de calor, de una reserva de calor infinita, para convertirle en trabajo.
2. No existe una transformación termodinámica cuyo solo efecto sea extraer una cantidad de calor de un sistema a una temperatura más baja para llevarle a otro sistema a mayor temperatura.

### C.1.10. La entropía

La segunda ley de la termodinámica nos permite definir una función de estado  $S$ , la entropía. Esta función la podemos definir utilizando un proceso cíclico para el cuál la temperatura cumple la siguiente desigualdad:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0. \quad (\text{C-8})$$

Donde la integral es sobre un ciclo de la transformación. Cuando la expresión anterior es una igualdad decimos que un ciclo termodinámico es reversible.

Una consecuencia de esta definición es que para un sistema aislado en un estado de equilibrio es identificado con aquel para el cual se alcanza el máximo en la entropía.

### C.1.11. Potenciales termodinámicos

En la termodinámica se introducen dos funciones de estado adicionales: la energía libre de Helmholtz  $A$  y la energía libre de Gibbs  $G$ . Su definición es la siguiente:

$$A = U - TS; \tag{C-9}$$

$$G = A + PV. \tag{C-10}$$

Estos potenciales son útiles al momento de determinar el estado de equilibrio de un sistema que no está aislado.

El significado físico de la energía libre  $A$  lo encontramos en las transformaciones isotérmicas. En estas el cambio de la energía libre es el negativo del trabajo máximo posible hecho por el sistema. Podemos demostrar que para un sistema aislado que se mantiene a una temperatura constante, la energía libre de Helmholtz nunca se incrementa. Un corolario de lo anterior sería que para un sistema aislado mecánicamente, el cual se mantiene a temperatura constante, el estado de equilibrio es un mínimo para  $A$ .

Considerando ahora el potencial de Gibbs, observamos que, para un sistema a temperatura y presión constante,  $G$  nunca se incrementa. Al igual que con  $H$ , el potencial de Gibbs es un mínimo para las condiciones de temperatura y presión constante.

## C.2. Sistemas generales

En la sección anterior establecimos los principios de la termodinámica para sistemas simples. El patrón de generalización para estos sistemas es simple. La ecuación fundamental de un sistema simple es de la forma:

$$\Phi = \Phi (E^a, I^a); \tag{C-11}$$

que nos dice que la ecuación fundamental es una función de los parámetros extensivos  $E^a$  y los parámetros intensivos  $I^a$ . Los parámetros extensivos para sistemas generales incluyen diversos parámetros termodinámicos que pueden ser del tipo magnético, eléctrico y elástico; además de la entropía, el volumen y el número de moles. A medida que se va estudiando un fenómeno, diferentes parámetros extensivos pueden ser encontrados.



En los sistemas generales decimos que existen estados particulares, que macroscópicamente están caracterizados por completo cuando se especifica la ecuación fundamental  $\Phi$  y el conjunto de los parámetros extensivos  $E^a$ . El segundo postulado de la termodinámica nos dice que existe una función de estado (a la que llamamos entropía) la cual es una relación de los parámetros extensivos. Esta función está definida para todos los estados de equilibrio en los cuales los valores de los  $E^a$ , en ausencia de ligaduras, son aquellos que maximizan la entropía respecto al conjunto de estados de equilibrio.

La forma diferencial de la ecuación fundamental queda definida como:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial E^a} dE^a; \quad (\text{C-12})$$

donde, en la representación de la energía, la expresión anterior es:

$$dU = TdS + \frac{\partial U}{\partial E^a} dE^a;$$

lo único que hemos hecho es sacar el primer sumando de la expresión dada en (C-12), esperamos que esto no se preste a confusión. La idea de utilizar esta expresión es debido a que el término  $TdS$  es entendido como el calor intercambiado y  $\frac{\partial U}{\partial E^a} dE^a$  es el trabajo. Los parámetros intensivos son función de los parámetros extensivos, que puesto como una relación matemática es equivalente a lo siguiente:

$$I^a = I^a(E^a). \quad (\text{C-13})$$

### C.3. La Termodinámica y la Física

En la termodinámica no existe una ecuación unificadora tal como la segunda ley de Newton; las ecuaciones de Maxwell en electrodinámica; o la ecuación de Schrödinger en la mecánica cuántica no relativista. Los conceptos de la termodinámica son universales pero su aplicación a sistemas particulares no lo es.

## C.4. Referencias

Para el presente trabajo decidimos utilizar como referencia en los conceptos de termodinámica a (Callen [1985]). La principal fortaleza de este tratado para nuestro propósito se centra en la fundamentación matemática precisa para los sistemas termodinámicos. Sin embargo, muchos de los conceptos principales de la termodinámica deben de ser también definidos de manera precisa. En el trabajo (Huang [1987]) encontramos a manera de resumen los conceptos necesarios para la realización de el presente trabajo. Debemos de citar nuevamente a (Salamon *et al.* [2006]) debido a que es el pequeño paso que tomamos para introducir la interpretación geométrica de la termodinámica.

# Bibliografía

- ÁLVAREZ, J.L., QUEVEDO, H., Y SÁNCHEZ, A. Unified geometric description of black hole thermodynamics. **77**(8):084004 (2008). 0801.2279
- BAEZ, J.C. Y MUNIAIN, J. *Gauge fields, knots, and gravity*. K & E series on knots and everything. World Scientific (1994)
- CALLEN, H.B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics, 2nd Edition* (1985)
- CARATHEODORY, C. Untersuchungen Äijber die Grundlagen der Thermodynamik. *Mathematische Annalen* **67**:355–386 (1909)
- CARMO, M. *Riemannian geometry*:. Mathematics, theory and applications. Birkhäuser (1992)
- GIBBS, J. *A Method of geometrical representation of the thermodynamic properties of substances by means of surfaces* (1873)
- HERMANN, R. *Differential geometry and the calculus of variations*. Mathematics in science and engineering. Academic Press (1968)
- HERMANN, R. *Geometry, physics, and systems*. Pure and applied mathematics. M. Dekker (1973)
- HOBSON, M., EFSTATHIOU, G., Y LASENBY, A. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press (2006)
- HUANG, K. *Statistical Mechanics, 2nd Edition* (1987)
- LEE, J. *Introduction to smooth manifolds*. Graduate texts in mathematics. Springer (2003)

- MRUGALA, R. Geometrical formulation of equilibrium phenomenological thermodynamics. *Reports on Mathematical Physics* **14**:419–427 (1978)
- MRUGALA, R. Submanifolds in the thermodynamic phase space. *Reports on Mathematical Physics* **21**:197–203 (1985)
- QUEVEDO, H. Geometrothermodynamics. *Journal of Mathematical Physics* **48**(1):013506 (2007). [arXiv:physics/0604164](https://arxiv.org/abs/physics/0604164)
- QUEVEDO, H. Y QUEVEDO, M.N. Fundamentals of Geometrothermodynamics. *ArXiv e-prints* (2011). [1111.5056](https://arxiv.org/abs/1111.5056)
- QUEVEDO, H., SANCHEZ, A., Y VAZQUEZ, A. Invariant geometry of the ideal gas. *ArXiv e-prints* (2008). [0811.0222](https://arxiv.org/abs/0811.0222)
- QUEVEDO, H., SANCHEZ, A., TAJ, S., Y VAZQUEZ, A. Curvature as a measure of thermodynamic interaction. *Journal of Korean Physical Society* **57**:646 (2010). [1011.0122](https://arxiv.org/abs/1011.0122)
- R., P. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Paw Prints (2010)
- RIEMANN, B. Y WEYL, H. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Springer (1923)
- RUPPEINER, G. Thermodynamics: A Riemannian geometric model. **20**:1608–1613 (1979)
- SALAMON, P., IHRIG, E., Y BERRY, R.S. A group of coordinate transformations which preserve the metric of Weinhold. *Journal of Mathematical Physics* **24**:2515–2520 (1983)
- SALAMON, P., ANDRESEN, B., NULTON, J., Y KONOPKA, A. The Mathematical Structure of Thermodynamics. En *Systems Biology*, págs. 207–222-. CRC Press (2006)
- WEINHOLD, F. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. III. Elementary formal structure of a vector-algebraic representation of equilibrium thermodynamics. **63**:2488–2495 (1975)
- ZHAO, L. Thermal Relativity. *Communications in Theoretical Physics* **56**:1052–1056 (2011)