



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Localidad y Causalidad  
en Mecánica Cuántica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

ANA VALDÉS CURIEL

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDUARDO NAHMAD ACHAR



2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

### Hoja de Datos del jurado

1. Datos del alumno

Valdés

Curiel

Ana

55 55 95 40 03

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

304683606

2. Datos del tutor

Dr.

Eduardo

Nahmad

Achar

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Octavio Augusto

Novaro

Peñaloza

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Jorge Guatavo

Hirsch

Ganievich

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Elias

Okon

Gurvich

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Víctor Manuel

Velázquez

Aguilar

7. Datos del trabajo escrito

Localidad y Causalidad en Mecánica Cuántica

81 p

2012

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares matemáticos y un ejemplo físico</b>	<b>5</b>
1.1. El experimento de la doble rendija y el principio de complementariedad	5
1.2. Los postulados de la mecánica cuántica	7
1.3. Sistemas de dos niveles	11
1.3.1. Operadores de Pauli	12
1.4. El operador de densidad	13
1.5. Sistemas compuestos	16
<b>2. ¿Puede considerarse a la mecánica cuántica como completa?</b>	<b>19</b>
2.1. El argumento E.P.R.	19
2.1.1. La versión de Bohm	21
2.2. Desigualdades y el teorema de Bell	23
2.3. La igualdad de GHZ, o el teorema de Bell sin desigualdades	34
<b>3. Sobre localidad y causalidad</b>	<b>39</b>
3.1. La causalidad local de Bell	40
3.2. La estructura causal de la mecánica cuántica	43
3.3. Otras consideraciones	46
3.4. Un esquema de mediciones causales	48
3.5. Mediciones que ocurren en distintos sistemas de referencia	52
<b>4. Sobre causalidad y complementariedad</b>	<b>59</b>
4.1. Experimentos de elección retardada	59
4.1.1. El interferómetro de Mach-Zender desde el punto de vista de la óptica cuántica	61
4.2. Experimentos cuánticos de elección retardada	66
4.2.1. Elección retardada y variables ocultas	70
<b>Conclusiones</b>	<b>75</b>



# Introducción

*If you are not completely confused by quantum mechanics, you do not understand it.*

John A. Wheeler

La mecánica cuántica representa una de las teorías más exitosas de la física, pero en muchos aspectos es también una de las más difíciles de entender e interpretar pues nos presenta una imagen de los sistemas microscópicos muy alejada de nuestras ideas clásicas. La interpretación probabilística de la teoría y el principio de superposición nos llevan a abandonar las leyes del determinismo y la idea de la existencia de propiedades intrínsecas e independientes del observador, pero sin duda una de las partes más controversiales de la teoría, y el tema en el que se centrará este trabajo, reside en el hecho de que la descripción de los sistemas físicos adquiere un carácter explícitamente no-local.

Al describir los sistemas físicos por medio de funciones de onda en espacios de Hilbert las nociones de espacio y tiempo parecen no ser relevantes. La falta de localidad se hace especialmente evidente al estudiar los llamados estados enredados y los procesos de medición. Bajo ciertas condiciones la mecánica cuántica únicamente permite describir de manera global el estado de un sistema de dos o más partículas por lo que el estado no es separable en términos de propiedades individuales de cada subsistema. En los estados enredados el todo es más que la suma de sus partes y al realizar mediciones locales sobre éstos es posible alterar de manera instantánea la información de todo el estado, generando así correlaciones entre resultados que no son reproducibles de manera clásica.

La posibilidad de interpolar una imagen posiblemente local y realista entre la preparación de un estado y su medición motiva a considerar la opción de complementar a la mecánica cuántica con variables adicionales, sin embargo la condición de localidad impone una serie de restricciones sobre los valores esperados de las mediciones que la mecánica cuántica no satisface. Hasta ahora los esfuerzos experimentales parecen verificar, si se aceptan algunas suposiciones, que los sistemas cuánticos efectivamente obedecen leyes no-locales, no-realistas, o ambas.

A pesar del éxito en las predicciones de la teoría, quedan algunos conceptos que no son tan claros, por ejemplo, lo que se entiende por colapso *instantáneo* de la función

de onda. Por otro lado, las leyes de la mecánica cuántica no son las únicas que rigen el comportamiento de los sistemas físicos, también está la relatividad especial que impone una estructura local y causal a los eventos que ocurren en el espacio tiempo y limita la velocidad de propagación de cualquier tipo de señal. Si la mecánica cuántica no es una teoría localmente causal, que es la condición que pide la relatividad especial, debemos entender las implicaciones físicas que tiene este hecho.

Consideramos entonces como fundamental el estudio de la estructura local y causal de la mecánica cuántica para poder garantizar una descripción consistente de ambas teorías, así como entender mejor la descripción de los procesos físicos que ocurren a escalas pequeñas. En este trabajo se describirán algunas situaciones en las que la mecánica cuántica nos lleva a predicciones inesperadas y sus implicaciones en un esquema local y causal. A lo largo de los capítulos nos encontraremos con paradojas que ponen a prueba la descripción cuántica, y resolverlas nos ayudará a entender cómo es que los modelos clásicos fallan al describir al mundo cuántico y determinar algunas condiciones necesarias para que las descripciones cuánticas y relativistas sean consistentes entre sí. Varias preguntas quedarán abiertas pero nuestro objetivo es simplemente intentar obtener un entendimiento más profundo de algunos aspectos fundamentales de la teoría.

La estructura del trabajo es la siguiente: En el primer capítulo se presentan algunas nociones básicas de la teoría cuántica. Como motivación para presentar el formalismo de la teoría se describen los resultados de un experimento de una doble rendija con partículas individuales. Por completez, se presentan los postulados de la mecánica cuántica que relacionan vectores y operadores lineales en espacios de Hilbert con sistemas físicos. Se introducen también otros resultados sobre sistemas de dos niveles, sistemas compuestos y operadores de densidad que son necesarios para describir las correlaciones entre sistemas enredados

El segundo capítulo estudia la posibilidad de completar a la mecánica cuántica por medio de un modelo local y realista. Primero se presenta el argumento de Einstein, Podolsky y Rosen que cuestiona la completez de la mecánica cuántica y sugiere el uso de variables ocultas. Se estudian algunos ejemplos de modelos locales y realistas que reproducen algunas predicciones de la mecánica y posteriormente se deduce el teorema de Bell y algunas variantes. Todos los resultados nos muestran que las teorías locales y realistas no son compatibles con las correlaciones cuánticas.

Los temas centrales del tercer capítulo son localidad y causalidad. Se introducen primero algunas definiciones cuidadosas que permiten determinar las condiciones que debe tener una teoría localmente causal y se muestra explícitamente que la mecánica cuántica no las satisface. Como alternativa a la causalidad local se introduce el concepto de conmutatividad local, el cual permite darle una estructura causal a la mecánica cuántica pero únicamente en relación a las mediciones. Dados los conflictos que surgen entre mecánica cuántica y relatividad en relación al proceso de medición, se lleva a cabo un análisis de las mediciones en mecánica cuántica desde el punto de vista de la relatividad. Se encuentra que no es posible dar una descripción covariante del vector de estado en un sistema que está sujeto a una serie de mediciones, sin embargo las

predicciones estadísticas son las mismas independientemente del observador.

En el cuarto capítulo se presentan ejemplos físicos en los que la dualidad entre ondas y partículas se vuelve relevante para determinar si la descripción cuántica es localmente causal. Se describe un experimento de elección retardada cuántico en el que es posible tener una superposición de dos configuraciones experimentales y se muestra que el concepto de complementariedad tal vez requiera de una reinterpretación. Por último se muestra un argumento que de una manera alternativa a los teoremas tipo Bell demuestra que es imposible reproducir los resultados de la mecánica cuántica por medio de modelos locales y realistas.

Si el lector se siente confundido al finalizar este trabajo, esperemos que sea porque entiende un poco más de mecánica cuántica.





# Capítulo 1

## Preliminares matemáticos y un ejemplo físico

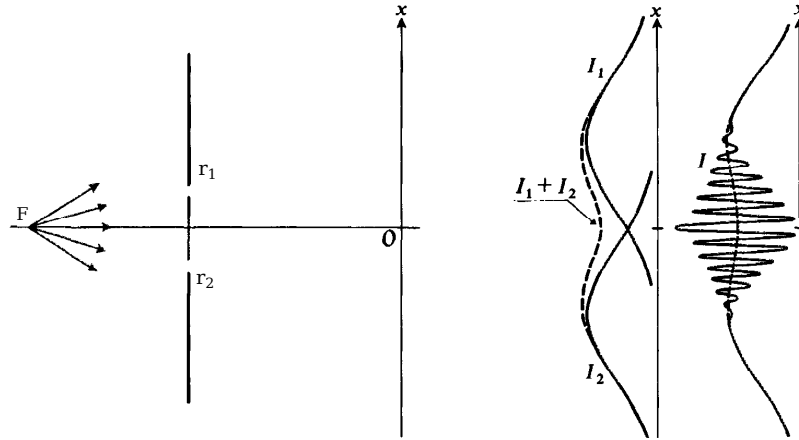
En este capítulo se presentarán, por completez, algunos conceptos de mecánica cuántica que son necesarios para el desarrollo de este trabajo. Desde sus inicios, la mecánica cuántica se ha desarrollado con la finalidad de describir los fenómenos físicos que ocurren a escalas pequeñas (atómica o subatómica). La teoría nos presenta una forma de describir los posibles resultados de una medición y ha sido altamente exitosa en sus predicciones. Como motivación física para presentar el formalismo cuántico a continuación discutiremos un experimento de interferencia de una doble rendija con partículas individuales. Los resultados de este tipo de experimentos sirven para ejemplificar algunas de las características principales de la mecánica cuántica y además nos llevan a concluir que únicamente se puede dar una interpretación completa de los fenómenos observados si se considera tanto el aspecto ondulatorio como el corpuscular de los objetos cuánticos.

### 1.1. El experimento de la doble rendija y el principio de complementariedad

Consideremos un arreglo experimental como el que se muestra en la figura 1.1. Una fuente  $F$  emite electrones que inciden sobre una placa perfectamente absorbente con dos pequeñas rendijas  $r_1$  y  $r_2$  y posteriormente iluminan una pantalla de observación  $P$ . En este caso particular consideramos electrones pero los resultados de este experimento son los mismos para cualquier partícula descrita por la mecánica cuántica.

A lo largo de la pantalla se observan destellos, cada uno de ellos con la misma intensidad, que forman una distribución  $I(x)$  que es función de la altura en la pantalla y se asocia con un patrón de interferencia. Si la fuente emite un electrón a la vez, por cada partícula se observa un único destello en la pantalla por lo que se concluye que las partículas llegan a la pantalla de manera discreta. Dadas ciertas condiciones iniciales, es imposible predecir con certeza en qué punto de la pantalla incidirá el electrón, pero

la probabilidad de que incida en un intervalo es proporcional a  $I$  en ese intervalo.



**Figura 1.1:** Diagrama de un experimento de una doble rendija. Cada rendija produce una distribución de intensidad  $I_1(x)$  e  $I_2(x)$  por separado pero cuando las dos rendijas están abiertas producen una distribución  $I(x)$  que no corresponde a la suma  $I_1(x) + I_2(x)$ .

Debido a la naturaleza discreta del fenómeno, para explicar la distribución en la pantalla  $I(x)$  proponemos lo siguiente:

**Proposición 1.** *Cada electrón pasa por una única rendija y la distribución  $I$  debe corresponder a la suma de los electrones que pasan por  $r_1$  y los que pasan por  $r_2$ .*

Para verificar si la proposición 1 es cierta podemos considerar dos opciones:

1. Podemos bloquear primero la rendija  $r_2$  y medir la distribución de electrones  $I_1(x)$  y posteriormente bloquear la rendija  $r_1$  y de igual forma medir la distribución  $I_2(x)$ . Al comparar las diferentes distribuciones se observa que  $I(x) \neq I_1(x) + I_2(x)$  y dado que cada destello en la pantalla se produjo de manera individual no podemos atribuir esta discrepancia a alguna interacción entre los electrones. Por lo tanto, la Proposición 1 es incorrecta ya que no podemos interpretar los resultados del experimento en términos de una teoría corpuscular.
2. Podemos alterar de alguna forma el experimento para que nos permita determinar por qué rendija pasó el electrón sin necesidad de bloquearlas. Entonces, cada destello en la pantalla se puede identificar con un electrón que atravesó  $r_1$  o  $r_2$  pero no ambos a la vez. En este caso, los electrones que pasan por  $r_2$  tienen una distribución  $I'_1(x)$  y los que pasan por  $r_1$  tienen una distribución  $I'_2(x)$ , ambas gaussianas. Si nos fijamos en la distribución total independientemente de qué rendija atravesó el electrón  $I'(x)$  notamos que  $I'(x) = I'_1(x) + I'_2(x)$ , por lo tanto podemos concluir que la Proposición 1 es correcta. Sin embargo, al intentar determinar qué camino tomó el electrón se pierde el patrón de interferencia pues  $I'(x) \neq I(x)$ .

El intentar explicar los resultados de este experimento nos lleva a una aparente contradicción. En el contexto de una teoría corpuscular resulta difícil explicar por qué los resultados cambian de manera tan drástica si una o las dos rendijas están abiertas, y si el electrón atraviesa una sola rendija a la vez no esperaríamos que lo que ocurre en la otra rendija tuviese importancia. Por otro lado, el hecho de que se observan destellos individuales tampoco es compatible con una interpretación ondulatoria.

El análisis anterior nos muestra que es imposible explicar los resultados del experimento si se considera una única descripción para el comportamiento del electrón, ya sea onda o partícula. Las propiedades de ondas y partículas son inseparables al describir sistemas cuánticos, y es precisamente la parte ondulatoria la que permite determinar la probabilidad de que una partícula se manifieste. Sin embargo, aun cuando ambas propiedades están presentes, pareciera que no se manifiestan de manera simultánea pues no se puede observar el patrón de interferencia y una trayectoria definida al mismo tiempo. A partir de este tipo de observaciones, Bohr definió el llamado *Principio de Complementariedad* el cual afirma que los resultados de un experimento en mecánica cuántica dependen del tipo de medición que se realice y deben ser descritos en términos de conceptos propios de la mecánica clásica.

## 1.2. Los postulados de la mecánica cuántica

El formalismo de la mecánica cuántica está construido para explicar dos principales características de los sistemas microscópicos, las cuales se manifiestan explícitamente en el experimento de la doble rendija. Primero, el hecho de que los posibles resultados de una medición de alguna propiedad física están restringidos a un conjunto de valores. En segundo lugar, para cualquier cantidad física que se mida, en general no es posible predecir el resultado que se obtendrá, únicamente se puede calcular la probabilidad de obtener cierto resultado.

Con la finalidad de poder explicar estas características, la mecánica cuántica describe a los sistemas físicos por medio de objetos matemáticos llamados vectores de estado o funciones de onda  $\psi$  que reemplazan al concepto de trayectorias de la mecánica clásica, y representan toda la información que se puede obtener sobre el sistema. Éstos se representan por medio de vectores en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  sobre  $\mathbb{C}$ . Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con un producto interno definido, en donde toda sucesión de Cauchy converge a un vector dentro del espacio.

Dados dos vectores  $\phi$  y  $\psi$  en  $\mathcal{H}$ , el producto interno es una función bi-lineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \langle \phi | \psi \rangle &\mapsto c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Si  $\langle \phi | \psi \rangle = 0$  se dice que los vectores  $\phi$  y  $\psi$  son ortogonales. El producto interno también permite definir la norma de un vector como  $\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$ .

Dado un espacio de Hilbert, un funcional lineal  $f$  está definido por una operación lineal que asocia un número complejo a cada vector  $\psi$  de  $\mathcal{H}$ . Se puede mostrar que el conjunto de los funcionales lineales que actúan en  $\mathcal{H}$  es un espacio vectorial, el cual es llamado espacio dual  $\mathcal{H}^*$ . Para cada vector dual  $f \in \mathcal{H}^*$  existe un vector  $\phi \in \mathcal{H}$  tal que  $f(\psi) = \langle \phi | \psi \rangle \forall \psi \in \mathcal{H}$ , esto nos motiva a denotar al vector  $\psi$  por el símbolo  $|\psi\rangle$  llamado *ket* y al funcional  $f$  por el símbolo  $\langle \phi |$  llamado *bra*.

Así como definimos el producto interno entre dos vectores, podemos formar también su producto externo, que es un operador en  $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \langle \phi| : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ |\xi\rangle &\mapsto |\psi\rangle \langle \phi | \xi \rangle. \end{aligned}$$

Un operador de la forma  $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle \langle \phi|$  se llama operador de proyección ya que al actuar sobre un estado  $|\psi\rangle$  nos da la proyección de éste en el subespacio generado por  $|\phi\rangle$ . Los operadores de proyección  $\hat{P}$  también satisfacen la relación  $\hat{P}^2 = \hat{P}$ .

En esta trabajo nos enfocaremos principalmente a espacios de Hilbert de dimensión finita. Para simplificar las operaciones matemáticas entre operadores y vectores, recordemos que si se tiene una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ ,  $\{|a_n\rangle\}_{n=1}^N$  podemos escribir cualquier vector como una combinación lineal de los elementos de dicha base

$$|\psi\rangle = \sum_n |a_n\rangle \langle a_n | \psi \rangle = \sum_n \psi_n |a_n\rangle.$$

Esta relación nos permite determinar la acción de un operador  $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  sobre  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ :

$$\begin{aligned} \hat{A} |\psi\rangle &= \sum_{i,j} |a_i\rangle \langle a_i | \hat{A} |a_j\rangle \langle a_j | \psi \rangle \\ &= \sum_{i,j} |a_i\rangle A_{ij} \langle a_j | \psi \rangle. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Entonces, en la base  $\{|a_n\rangle\}$  el operador está representado por una matriz cuyos elementos están dados por

$$A_{ij} = \langle a_i | \hat{A} |a_j\rangle. \tag{1.2}$$

En particular, si los eigenvectores de  $\hat{A}$  forman una base de  $\mathcal{H}$ , podemos representar al operador como una combinación lineal de proyectores  $\hat{P}_{a_n} = |a_n\rangle \langle a_n|$

$$\hat{A} = \sum_n a_n \hat{P}_{a_n}.$$

En esta base, también conocida como representación espectral, el operador  $\hat{A}$  está representado por una matriz diagonal cuyos elementos son precisamente los eigenvalores del operador.

Si por otro lado el operador tiene un espectro continuo  $\{a\}$  con  $a \in \mathbb{R}$ , los vectores en  $\mathcal{H}$  se pueden representar por una integral sobre los eigenvalores de  $\hat{A}$ :

$$|\psi\rangle = \int |a\rangle \langle a|\psi\rangle da.$$

De especial importancia en mecánica cuántica son los operadores llamados autoadjuntos. Se dice que  $\hat{A}^\dagger$  es el operador adjunto de  $\hat{A}$  si,

$$\langle \phi|\hat{A}\psi\rangle = \langle \hat{A}^\dagger\phi|\psi\rangle. \quad (1.3)$$

Un operador es autoadjunto si para todo  $\phi$  y  $\psi \in \mathcal{H}$ ,  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ . En este trabajo también les llamaremos operadores hermitianos, y no distinguiremos entre ambos términos ya que por lo general trabajaremos con espacios de Hilbert de dimensión finita. Una de las propiedades más importantes de este tipo de operadores es que su espectro es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , lo cuál nos permite asociarlos con cantidades físicas.

Otros tipos de operadores que son de importancia en mecánica cuántica son los llamados operadores unitarios  $\hat{U}$ , los cuales tienen la propiedad de preservar productos internos:

$$\langle \hat{U}\phi|\hat{U}\psi\rangle = \langle \phi|\psi\rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H} \quad (1.4)$$

Los operadores unitarios representan transformaciones físicas de un sistema como rotaciones y reflexiones. La ecuación (1.4) también permite mostrar que los eigenvalores  $\lambda$  de  $\hat{U}$  satisfacen la relación  $|\lambda|^2 = 1$ , por lo que su espectro es un subconjunto de  $S^1$ .

Esta estructura matemática que acabamos de presentar se relaciona en la mecánica cuántica con conceptos físicos tales como medición, observable y estado, por medio de una serie de postulados que a continuación enumeramos.

1. Cada sistema físico tiene un espacio de Hilbert asociado. El estado del sistema a un tiempo  $t$  corresponde de manera biyectiva, excepto por una fase global  $e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a un vector unitario  $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$
2. Cada cantidad física  $\mathcal{A}$  que se puede medir en un sistema está descrita por un operador  $\hat{A}$  lineal que actúa en  $\mathcal{H}$ . El operador  $\hat{A}$  debe ser un observable, es decir que sea autoadjunto y que sus eigenvectores formen una base de  $\mathcal{H}$ .
3. El único posible resultado de la medición de una cantidad  $\mathcal{A}$  es uno de los eigenvalores del espectro de  $\hat{A}$ .
4. Si el sistema se encuentra en un estado  $|\psi\rangle$  y se mide una observable  $\mathcal{A}$ , entonces
  - (a) Si el espectro de  $\hat{A}$  es discreto, la probabilidad  $P(a_n)$  de obtener un resultado

$a_n$  es

$$\begin{aligned} P(a_n) &= \sum_i |\langle a_n^{(i)} | \psi \rangle|^2 \\ &= \langle \psi | \sum_i \hat{P}_{a_n^{(i)}} | \psi \rangle, \end{aligned}$$

donde  $\{|a_n^{(i)}\}_{i \in I}$  son los eigenestados de  $\hat{A}$  asociados al eigenvalor  $a_n$ , y  $\hat{P}_{a_n^{(i)}} = |a_n^{(i)}\rangle \langle a_n^{(i)}|$ .

- (b) Si el espectro de  $\hat{A}$  es continuo, la probabilidad de medir un valor entre  $a$  y  $a + da$  es

$$dP(a) = |\langle a | \psi \rangle|^2 da \quad (1.5)$$

donde de igual forma  $|a\rangle$  representa un eigenestado de  $\hat{A}$  asociado al eigenvalor  $a$ .

5. Si la medición de la cantidad física  $\mathcal{A}$  da como resultado  $a_n$ , el estado del sistema *inmediatamente* después de la medición es la proyección normalizada en el subespacio generado por  $|a_n\rangle$ , es decir

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\hat{P}_{a_n} |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{P}_{a_n} | \psi \rangle}}.$$

6. La evolución temporal del vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  está determinada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (1.6)$$

donde  $H$  es el operador Hamiltoniano y representa una observable del sistema.

La introducción de estos postulados tiene varias implicaciones en la interpretación de la teoría. El postulado 1 implica que una combinación lineal de estados en el espacio de Hilbert representa también un sistema físico. Si  $|\psi\rangle = \alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle$ , se considera que el sistema no se encuentra en el estado  $\psi_1$  y en el estado  $\psi_2$  al mismo tiempo, pero al hacer una medición siempre se encuentra que el sistema se encuentra en un único estado. A esta propiedad se le conoce como principio de superposición.

Por los postulados 2 y 3 vemos que los resultados de un experimento estarán condicionados a la base de eigenestados del operador que se elige para hacer las mediciones. Dado un estado  $|\psi\rangle$ , al hacer un experimento para medir una observable  $\mathcal{A}$  siempre obtendremos algún eigenvalor  $a_n$ , incluso si el estado inicial no es un eigenvector de  $\hat{A}$ . En consecuencia, el valor de  $\mathcal{A}$  no está bien definido y solo podemos hablar de un valor promedio, también llamado valor esperado, que refleja la estadística de los resultados de la medición de  $\mathcal{A}$  en varios sistemas igualmente preparados. El valor esperado de  $\mathcal{A}$  en el estado  $|\psi\rangle$  se define como

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (1.7)$$

A diferencia de la mecánica clásica, la mecánica cuántica no permite predecir con precisión los resultados de un experimento y únicamente es posible predecir los resultados de una medición de forma probabilística, tal como lo indica el postulado 4. Como en general los resultados experimentales difieren del valor esperado podemos introducir el concepto de dispersión

$$\Delta \hat{A} = \sqrt{\langle \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \mathbb{1} \rangle} \quad (1.8)$$

que representa una medida de la desviación de los resultados experimentales con respecto al valor esperado.

Si se desean medir dos observables  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  asociadas a un sistema, se puede mostrar que

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \leq \frac{1}{2} | \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle |, \quad (1.9)$$

donde  $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  es el conmutador de los operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ . Este *principio de incertidumbre* impone un límite a la precisión con la que se pueden conocer de manera simultánea los valores asociados a operadores que no conmutan. La medición de la observable  $\mathcal{A}$  ocasiona que el estado colapse a un eigenestado de  $\hat{A}$  por lo que es imposible tener un valor bien definido de  $\mathcal{B}$  ya que no es posible encontrar un conjunto completo de eigenvectores comunes para dos operadores que no conmutan. Únicamente si  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  conmutan es posible encontrar estados para los cuales tanto  $\mathcal{A}$  como  $\mathcal{B}$  están bien definidos. En el siguiente capítulo estudiaremos las llamadas teorías de variables ocultas las cuales estudian la posibilidad de definir estados libres de dispersión.

El postulado 6 implica que la evolución de un sistema cuántico cerrado está descrita por una transformación unitaria. Dado un estado inicial  $|\psi(t_0)\rangle$ , el estado del sistema a un tiempo  $t > t_0$  se puede calcular utilizando el operador de evolución unitario

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle. \quad (1.10)$$

Cuando se realiza una medición inevitablemente se perturba al sistema, por lo que éste deja de ser cerrado y se introduce el postulado 5 para intentar explicar la evolución del sistema en este caso. La evolución del estado debida a una medición no es unitaria y es irreversible. En el capítulo 4 analizaremos las implicaciones de introducir este postulado en un esquema relativista.

### 1.3. Sistemas de dos niveles

Los sistemas más sencillos que se pueden estudiar en mecánica cuántica son aquellos que presentan únicamente dos grados de libertad discretos. Éstos están representados por vectores en un espacio de Hilbert de dos dimensiones complejas  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ . En



este trabajo estudiaremos principalmente este tipo de sistemas, pues nos permiten de manera sencilla observar efectos que no tienen análogos clásicos y mostrar de manera explícita el carácter no-local de la descripción cuántica. Algunos ejemplos físicos de sistemas de dos niveles son átomos que bajo ciertas condiciones presentan interacciones efectivas con dos niveles de energía, fotones con dos tipos de polarización, y partículas con dos posibles proyecciones de espín, es decir con espín total de  $\frac{1}{2}$ .

### 1.3.1. Operadores de Pauli

Independientemente de la propiedad que se quiera observar, podemos representar a los grados de libertad con dos vectores ortonormales  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . Estos dos estados representan la llamada base computacional y por convención se definen como los eigenestados del operador  $\hat{\sigma}_z$ :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_z |0\rangle &= |0\rangle \\ \hat{\sigma}_z |1\rangle &= -|1\rangle.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Cualquier estado en  $\mathbb{C}^2$  queda descrito entonces por

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle.\tag{1.12}$$

Los observables en este espacio se pueden construir a partir de la identidad  $\mathbb{1}$  y los operadores de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \tag{1.13a}$$

$$\hat{\sigma}_y = -i |0\rangle\langle 1| + i |1\rangle\langle 0| \tag{1.13b}$$

$$\hat{\sigma}_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \tag{1.13c}$$

los cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k, \tag{1.14}$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo de Levi-Civita. Los operadores de Pauli son hermitianos, unitarios, con traza igual a cero y determinante igual a 1. Éstos forman junto con la identidad una base del espacio vectorial de operadores en  $\mathbb{C}^2$ .

En el caso particular de las partículas con espín  $\frac{1}{2}$  los operadores  $\hat{\sigma}_i$  se relacionan con la proyección del espín en una dirección determinada por la orientación de un campo magnético de un aparato de Stern-Gerlach. Los observables de espín se construyen como

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i \tag{1.15}$$

pero por simplicidad en este trabajo utilizaremos únicamente a los operadores de Pauli  $\hat{\sigma}_i$  para describir al espín, y a las dos posibles proyecciones las etiquetaremos con  $+1$  y  $-1$ .

Así como los operadores de Pauli representan la medición de la proyección del espín a lo largo de cualquiera de los ejes coordenados, también podemos introducir al operador

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} \cdot \vec{n} &= n_x \hat{\sigma}_x + n_y \hat{\sigma}_y + n_z \hat{\sigma}_z \\ &= \cos \theta |0\rangle \langle 0| + e^{-i\phi} \sin \theta |0\rangle \langle 1| + e^{i\phi} \sin \theta |1\rangle \langle 0| - \cos \theta |1\rangle \langle 1|\end{aligned}\tag{1.16}$$

que representa una medición de la proyección del espín a lo largo de un vector parametrizado por  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ . Los estados propios de este operador son

$$\begin{aligned}|0\rangle_{\vec{n}} &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle & \hat{\sigma} \cdot \vec{n} |0\rangle_{\vec{n}} &= |0\rangle_{\vec{n}} \\ |1\rangle_{\vec{n}} &= \sin \frac{\theta}{2} |0\rangle - e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle & \hat{\sigma} \cdot \vec{n} |1\rangle_{\vec{n}} &= -|0\rangle_{\vec{n}}\end{aligned}\tag{1.17}$$

Notemos que al variar  $\theta$  y  $\phi$ , estos estados generan una esfera, la llamada esfera de Bloch, en cuyos polos se encuentran los vectores  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ .

Es importante mencionar que las relaciones de conmutación (1.14) implican que únicamente es posible determinar la proyección del espín en una dirección de manera simultánea. Esto será importante para desarrollar el argumento E.P.R. en el siguiente capítulo.

## 1.4. El operador de densidad

En las secciones anteriores consideramos sistemas cerrados cuyo estado nos era conocido. Encontramos una forma de determinar su evolución temporal, de predecir los resultados de una medición, y de determinar el estado a un tiempo dado al realizar una medición. Sin embargo, este no es el caso más general, pues en la práctica al llevar a cabo experimentos existen grados de libertad adicionales sobre los cuales no se tiene conocimiento, por lo que no es posible determinar el estado total del sistema. Esto ocurre, por ejemplo, al analizar un sistema que está acoplado a un ambiente sobre el cual no se tiene conocimiento ni control. La descripción de un sistema por medio de estados tampoco es adecuada cuando se tiene una mezcla estadística de estados bien definidos pero diferentes entre sí.

En estos casos resulta útil introducir al operador de densidad, el cual nos permite incorporar la información que poseemos sobre un sistema al formalismo cuántico. Si un sistema está constituido por una mezcla de estados  $|\psi_i\rangle$  con un peso de probabilidad  $p_i$ , el estado está descrito por el operador de densidad

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (1.18)$$

A partir de esta definición se puede deducir que cualquier operador de densidad cumple con las siguientes propiedades:

1.  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$
2.  $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$
3.  $\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle \geq 0 \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$

Podemos distinguir entre dos tipos de sistemas descritos por un operador de densidad. Se dice que un estado es puro si existe una base en la cual todas las probabilidades  $p_i$  son cero menos una. En este caso el vector de estado  $|\psi\rangle$  y el operador de densidad  $\hat{\rho}_\psi$  contienen la misma información ya que se obtienen las mismas probabilidades y predicciones si se utiliza la traza de este operador. El valor esperado en este caso es

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle_\psi &= \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{A} | \psi \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi \rangle \langle \psi | \psi_i \rangle \\ &= \text{tr}(\hat{A} \hat{\rho}_\psi), \end{aligned} \quad (1.19)$$

y la probabilidad de obtener un valor  $a$  es

$$\begin{aligned} P(a) &= \langle \psi | a \rangle \langle a | \psi \rangle \\ &= \langle \hat{P}_a \rangle_\psi \\ &= \text{tr}(\hat{P}_a \hat{\rho}_\psi). \end{aligned} \quad (1.20)$$

El caso contrario a los estados puros está descrito por los llamados estados mixtos. En este caso los valores esperados y las probabilidades asociados a estados mixtos también se pueden calcular a partir de las relaciones (1.19) y (1.20). Es sencillo distinguir estados puros de mixtos. Si un estado es mixto al menos dos probabilidades son distintas de cero por lo que se cumplen la desigualdades  $0 \leq p_i < 1$  y  $0 \leq p_i^2 < p_i$ , y en consecuencia  $\text{tr}(\hat{\rho}^2) < 1$ . En el caso de un estado puro  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$  por lo que  $\text{tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ .

No debemos confundir a un sistema como el descrito en (1.18) con un estado descrito por una superposición de estados de la forma  $\sum_i c_i |\psi_i\rangle$ . Un estado descrito por  $|\psi\rangle$  tiene asociada una probabilidad  $|c_i|^2$  de encontrarse en el estado  $|\psi_i\rangle$ , pero cualquier combinación lineal también tiene en general asociados términos de interferencia de la forma  $c_i c_k^*$ . En el caso de las mezclas estadísticas resulta imposible reproducir los

términos de interferencia que se observan en las superposiciones cuánticas. El siguiente ejemplo dejará más claro este punto.

Consideremos una base ortogonal  $\{|\psi_i\rangle\}$  de  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  y un estado

$$|\psi\rangle = \alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle \langle\psi_2|. \quad (1.21)$$

El operador de densidad asociado a  $|\psi\rangle$  es

$$\hat{\rho}_\psi = |\alpha|^2 |\psi_1\rangle \langle\psi_1| + \alpha\beta^* |\psi_1\rangle \langle\psi_2| + \alpha^*\beta |\psi_2\rangle \langle\psi_1| + |\beta|^2 |\psi_2\rangle \langle\psi_2|, \quad (1.22)$$

mientras que si consideramos una mezcla estadística de los estados  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$  el sistema está descrito por

$$\hat{\rho} = |\alpha|^2 |\psi_1\rangle \langle\psi_1| + |\beta|^2 |\psi_2\rangle \langle\psi_2|. \quad (1.23)$$

En ambos casos la probabilidad de encontrar al sistema en un estado  $|\psi_1\rangle$  es  $|\alpha|^2$  y la probabilidad de encontrarlo en el estado  $|\psi_2\rangle$  es  $|\beta|^2$ , sin embargo al medir un operador más general de la forma

$$\hat{A} = a |\psi_1\rangle \langle\psi_1| + b |\psi_1\rangle \langle\psi_2| + c |\psi_2\rangle \langle\psi_1| + d |\psi_2\rangle \langle\psi_2| \quad (1.24)$$

los valores esperados de cada estado difieren entre sí. El valor esperado de un estado mixto  $\hat{\rho}$  es

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\hat{\rho}} &= \text{tr}(\hat{A}\hat{\rho}) \\ &= a|\alpha|^2 + d|\beta|^2 \end{aligned}$$

mientras que para un estado puro  $\hat{\rho}_\psi$  es

$$\langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}_\psi} = a|\alpha|^2 + b\alpha^*\beta + c\alpha\beta^* + d|\beta|^2$$

por lo que únicamente si se mide un operador diagonal en la base  $\{|\psi_i\rangle\}$  se tendrán las mismas predicciones. La diferencia entre estas se debe precisamente a los términos de interferencia que están fuera de la diagonal de  $\hat{\rho}_\psi$ , también llamados coherencias.

El resto del formalismo de la sección 1.2 también se puede generalizar a los operadores de densidad. La evolución de un sistema descrito por un operador de densidad está descrita la ecuación de Von Neumann

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (1.25)$$

Es sencillo verificar la equivalencia entre ésta ecuación y la evolución temporal descrita en el postulado 6, basta considerar el complejo conjugado de la ecuación de Schrödinger (1.6) y el hecho de que  $\hat{\rho}$  es un operador lineal.

Por último, si el sistema es sujeto a una medición de un operador  $\hat{A}$  y se observa el resultado  $a$ , inmediatamente después de la medición éste estará descrito por

$$\hat{\rho} \rightarrow \frac{\hat{P}_a \hat{\rho} \hat{P}_a}{\text{tr}(\hat{P}_a \hat{\rho})}. \quad (1.26)$$

## 1.5. Sistemas compuestos

Para estudiar los efectos no locales de la mecánica cuántica, en este trabajo nos interesará estudiar sistemas que estén formados por dos o más partes separadas espacialmente. Este tipo de sistemas, y en general cualquier sistema compuesto por más de una parte o grado de libertad se pueden describir utilizando el producto tensorial.

Dados dos sistemas  $A$  y  $B$  descritos por estados en espacios de Hilbert  $\mathcal{H}^{(A)}$  y  $\mathcal{H}^{(B)}$ , el sistema compuesto por las dos partes está descrito en un espacio de Hilbert

$$\mathcal{H}^{(AB)} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}, \quad (1.27)$$

donde el símbolo  $\otimes$  denota el producto tensorial de espacios y vectores. Si  $\{|\psi_i\rangle\}$  y  $\{|\phi_j\rangle\}$  son bases de  $\mathcal{H}^{(A)}$  y  $\mathcal{H}^{(B)}$  respectivamente, y  $\dim_A$  y  $\dim_B$  sus dimensiones, podemos generar al espacio  $\mathcal{H}^{(AB)}$  a partir de una base definida por el producto tensorial  $\{|\psi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle\}$  donde los índices  $i$  y  $j$  están determinados por las dimensiones de sus espacios correspondientes  $1 \leq i \leq \dim_A$  y  $1 \leq j \leq \dim_B$ . Notemos que la dimensión de  $\mathcal{H}^{(AB)}$  está dada por el número de elementos de su base, es decir  $\dim_{AB} = \dim_A \times \dim_B$ . Por simplicidad se suele escribir el producto tensorial entre estados como  $|\psi\rangle = |\psi^{(A)}\rangle |\psi^{(B)}\rangle = |\psi^{(A)}, \psi^{(B)}\rangle = |\psi^{(A)}\psi^{(B)}\rangle$ .

Como únicamente hemos definido el producto interno entre vectores dentro de un mismo espacio, la definición del producto interno en  $\mathcal{H}^{(AB)}$  surge de manera natural como

$$(\langle \psi^{(A)} | \otimes \langle \psi^{(B)} |)(|\phi^{(A)}\rangle \otimes |\phi^{(B)}\rangle) = \langle \psi^{(A)} | \phi^{(A)} \rangle \langle \psi^{(B)} | \phi^{(B)} \rangle. \quad (1.28)$$

De igual forma los operadores en  $\mathcal{H}^{(AB)}$  se construyen a partir de productos tensoriales de operadores que están definidos en sus subespacios como

$$\hat{A} = \hat{A}^{(A)} \otimes \hat{A}^{(B)}, \quad (1.29)$$

y su acción sobre vectores se define como

$$\hat{A}(|\psi^{(A)}\rangle \otimes |\psi^{(B)}\rangle) = (\hat{A}^{(A)} |\psi^{(A)}\rangle) \otimes (\hat{A}^{(B)} |\psi^{(B)}\rangle). \quad (1.30)$$

Es importante distinguir entre dos tipos de sistemas compuestos. Se dice que un estado es separable si existen dos vectores  $|\psi^{(A)}\rangle \in \mathcal{H}^{(A)}$  y  $|\psi^{(B)}\rangle \in \mathcal{H}^{(B)}$  tales que

$$|\psi\rangle = |\psi^{(A)}\rangle \otimes |\psi^{(B)}\rangle. \quad (1.31)$$

Si el sistema está descrito por un operador de densidad el estado es separable si

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^{(A)} \otimes \hat{\rho}_i^{(B)}. \quad (1.32)$$

Se dice que un estado está enredado si no es separable. Más adelante veremos que este tipo de estados presenta correlaciones que no son explicables por medio de teorías locales y causales.

Al estudiar sistemas cuánticos es común que nos encontremos con sistemas compuestos de los cuales solamente nos interesa estudiar una de sus partes. Este podría ser el caso si quisiéramos estudiar un sistema acoplado a un ambiente o a una parte de un aparato de medición que queremos ignorar. Necesitamos entonces, una descripción de lo que le ocurre a  $A$  pero que sea completa y considere al sistema completo  $\hat{\rho}$ . Podemos lograr esto si consideramos operadores de la forma  $\hat{A} = \hat{A}^{(A)} \otimes \mathbb{1}$ , en este caso el valor esperado de un estado  $\hat{\rho}$  está dado por

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}} &= \text{tr} \left( (\hat{A}^{(A)} \otimes \mathbb{1}) \hat{\rho} \right) \\ &= \sum_{ij} \langle \psi_i^{(A)}, \psi_j^{(B)} | (\hat{A}^{(A)} \otimes \mathbb{1}) \hat{\rho} | \psi_i^{(A)}, \psi_j^{(B)} \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi_i^{(A)} | \hat{A}^{(A)} \left( \sum_j \langle \psi_j^{(B)} | \hat{\rho} | \psi_j^{(B)} \rangle \right) | \psi_i^{(A)} \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi_i^{(A)} | \hat{A}^{(A)} \hat{\rho}^{(A)} | \psi_i^{(A)} \rangle \end{aligned} \quad (1.33)$$

donde hemos definido la traza parcial de  $\hat{\rho}$  como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(A)} &= \sum_j \langle \psi_j^{(B)} | \hat{\rho} | \psi_j^{(B)} \rangle \\ &= \text{tr}_B(\hat{\rho}) \end{aligned} \quad (1.34)$$

De esta forma, la matriz  $\hat{\rho}^{(A)}$ , también llamada matriz de densidad reducida en el subespacio  $\mathcal{H}^{(A)}$ , nos permite dar una descripción completa de lo que ocurre en el subsistema  $A$  pero descartando al subsistema  $B$ .

Aunque en nuestro análisis solo consideramos sistemas compuestos por dos partes, los resultados se pueden generalizar de manera directa para sistemas con un número arbitrario de partes. Este análisis quedará más claro si consideramos el siguiente ejemplo, que además nos será de utilidad en las siguientes secciones. Un sistema de dos partículas con espín  $\frac{1}{2}$  está descrito en  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Una posible base de  $\mathcal{H}$  en este caso está formada por el conjunto de vectores  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ . Cada uno de estos vectores representa un estado separable. Podemos por otro lado considerar otra base, formada por los llamados estados de Bell

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle \pm |10\rangle] \quad |\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle \pm |11\rangle]. \quad (1.35)$$

Los estados de (1.35) no permiten una factorización de la forma  $|\psi^{(A)}\rangle \otimes |\psi^{(B)}\rangle$ , y además se puede mostrar fácilmente que los estados de Bell representan sistemas máximamente enredados. Para definir un estado máximamente enredado es necesario tener una forma de cuantificar el enredamiento. La medida más común para cuantificar el enredamiento en estados puros bipartitas es la entropía de enredamiento que se define como la entropía de von Neuman de la matriz de densidad reducida

$$S_E := -tr(\hat{\rho}^{(A)} \ln \hat{\rho}^{(A)}) = -tr(\hat{\rho}^{(B)} \ln \hat{\rho}^{(B)}) \quad (1.36)$$

Existen otras medidas de enredamiento como la entropía lineal y la concurrencia pero no profundizaremos en el tema pues no será necesario para el resto del trabajo. El lector puede consultar [7] si desea obtener más información sobre este tema.

El contenido de este capítulo representa todo el formalismo necesario para el análisis que se llevará a cabo en los siguientes capítulos. En términos operacionales, la mecánica cuántica es una teoría sencilla pues únicamente se requiere del uso del álgebra lineal. Sin embargo, como veremos a continuación, la interpretación física del formalismo matemático de la mecánica cuántica nos puede llevar a formular paradojas o situaciones que en ocasiones contradicen nuestra intuición.

## Capítulo 2

# ¿Puede considerarse a la mecánica cuántica como completa?

En el capítulo anterior estudiamos algunas nociones básicas del formalismo de la mecánica cuántica y algunas consecuencias de su interpretación, tales como el principio de incertidumbre entre observables que no conmutan, la interpretación probabilística de la función de onda y la imposibilidad de asignar propiedades bien definidas a los sistemas físicos antes de realizar una medición. En este capítulo presentaremos el argumento original de Einstein, Podolski y Rosen que cuestiona la completez de la teoría y consideraremos la posibilidad de completarla en una teoría local y realista.

### 2.1. El argumento E.P.R.

Las primeras críticas a la mecánica cuántica surgen prácticamente desde los inicios de la teoría, sin embargo la interpretación ortodoxa y las ideas de complementareidad de Bohr eran generalmente aceptadas. No fue hasta el año de 1935 que los problemas en los fundamentos de la mecánica cuántica comenzaron a tomarse más seriamente cuando Albert Einstein, Boris Podolski y Nathan Rosen (E.P.R.) publican un artículo titulado “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” (¿Puede considerarse como completa la descripción de la realidad física por medio de la mecánica cuántica?) [15].

El artículo, en esencia, argumenta que si partimos de suposiciones bien definidas, la función de onda no permite dar una descripción completa de la realidad física ni mantener una condición intuitiva de localidad. Para formalizar el argumento y poder posteriormente analizar sus implicaciones a continuación se introducen las condiciones:

**Condición 1** (Criterio de completez). *Una teoría es completa si a cada elemento de realidad le corresponde una variable física descrita por ésta.*



**Condición 2** (Elemento de realidad). *Una cantidad física se considera real si existe una posibilidad de predecirla sin perturbar de ninguna forma al sistema. En el contexto de la mecánica cuántica, dado un operador  $\hat{A}$  con espectro  $\{a\}$ , se dice que  $a$  es un elemento de realidad si podemos predecir su valor con certeza sin necesidad de efectuar una medición de  $\hat{A}$ .*

**Condición 3** (Criterio de localidad). *Dos eventos  $E_a$  y  $E_b$  separados de manera espacial cumplen con el criterio de localidad si la probabilidad de que ocurra  $E_a$  es independiente de  $E_b$ .*

El punto clave en el argumento E.P.R. es el hecho de que la mecánica cuántica no permite conocer simultáneamente los eigenvalores correspondientes a operadores que no conmutan; dado que son cantidades que se podrían haber medido o inferido, y por lo tanto existen, de ahí se concluye que (i) la descripción de la realidad física por medio de la función de onda es incompleta o (ii) no es posible asignar una realidad simultánea a dos cantidades físicas correspondientes a operadores que no conmutan.

Si demostramos que (ii) no se cumple entonces la mecánica cuántica es necesariamente incompleta. Para esto, consideremos dos sistemas de partículas  $S^{(A)}$  y  $S^{(B)}$  que interactúan por un tiempo finito y luego se alejan de forma tal que después de la interacción el estado compuesto del sistema está descrita por

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |\psi_n^{(A)}\rangle |u_n^{(B)}\rangle. \quad (2.1)$$

En este caso  $|\psi_n^{(A)}\rangle$  representa una base de eigenestados de un operador  $\hat{O}_1^{(A)}$  del subsistema  $S^{(A)}$  y  $|u_n^{(B)}\rangle$  son estados del subsistema  $S^{(B)}$ . Si se hace una medición de  $\hat{O}_1^{(A)}$  y se obtiene un eigenvalor correspondiente al estado  $|\psi_k^{(A)}\rangle$  el estado del sistema compuesto queda reducido a  $|\psi_k^{(A)}\rangle |u_k^{(B)}\rangle$ . Se puede, por otro lado, expresar el estado original en otra base dada por los eigenestados  $|\phi_j^{(A)}\rangle$  de otro operador  $\hat{O}_2^{(A)}$  tal que  $[\hat{O}_1^{(A)}, \hat{O}_2^{(A)}] \neq 0$  como

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} c'_j |\phi_j^{(A)}\rangle |v_j^{(B)}\rangle \quad (2.2)$$

donde  $|v_j^{(B)}\rangle$  son estados de  $S^{(B)}$ . Si se lleva a cabo ahora una medición de  $\hat{O}_2^{(A)}$  y se obtiene el estado  $|\phi_i^{(A)}\rangle$ , el estado del sistema  $S^{(B)}$  quedará dado por  $|v_i^{(B)}\rangle$ . Si se cumple el criterio de localidad, una medición en el primer sistema no debe alterar al segundo sistema y en consecuencia es posible asignar dos funciones de onda diferentes (en este caso  $|u_k^{(B)}\rangle$  y  $|v_i^{(B)}\rangle$ ) a una misma realidad física de  $S^{(B)}$ .

Consideremos a continuación el caso particular en el que  $\hat{O}_1^{(A)}$  es el operador de momento  $\hat{P}^{(A)} = -i\hbar\partial/\partial x^{(A)}$ , y la función de onda está dada por

$$\Psi(x^{(A)}, x^{(B)}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_p^{(A)}\rangle |u_p^{(B)}\rangle dp = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x^{(A)} - x^{(B)} + x_0)p/\hbar} dp, \quad (2.3)$$

con  $|\psi_p^{(A)}\rangle = e^{ipx^{(A)}/\hbar}$  eigenestado del operador de momento con eigenvalor  $p$  correspondiente al primer sistema y de igual forma  $|u_p^{(B)}\rangle = e^{-ipx^{(B)}/\hbar}$  es el eigenestado de momento del segundo sistema con eigenvalor  $-p$ .

Si asociamos el segundo operador a la posición de la primera partícula  $\hat{Q}^{(A)} = x^{(A)}$  el estado queda de la forma

$$\Psi(x^{(A)}, x^{(B)}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_x^{(A)}\rangle |v_x^{(B)}\rangle dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^{(A)} - x) \delta(x - x^{(B)} + x_0) dx, \quad (2.4)$$

es decir  $|\phi_x^{(A)}\rangle$  y  $|v_x^{(B)}\rangle$  son eigenestados de los operadores de posición con eigenvalores  $x$  y  $x + x_0$  correspondientes al primero y segundo sistema respectivamente.

En consecuencia, si el resultado de medir  $\hat{P}^{(A)}$  es  $p$ , el estado en  $S^{(B)}$  estará asociado al eigenvalor  $-p$ . Si por otro lado se mide la posición  $Q^{(B)}$  y se encuentra el valor  $x + x_0$  el estado en  $S^{(A)}$  estará asociado al eigenvalor  $x$ . Como al medir la posición o el momento en  $S^{(A)}$  es posible determinar con certeza el resultado de la misma medición en  $S^{(B)}$  y viceversa, de acuerdo a la Condición 2 y si se cumple el criterio de localidad, el momento y la posición de los dos subsistemas deben ser elementos asociados a la misma realidad física. Sin embargo, el formalismo de la función de onda no permite describir todos los elementos asociados a la realidad física ya que los operadores de momento y posición no conmutan, y la precisión con la que se pueden conocer sus valores está limitada por el principio de incertidumbre. Por lo tanto, la mecánica cuántica es una teoría incompleta.

El argumento anterior podría objetarse si se considera que el criterio de realidad no es suficientemente restrictivo y que tal vez deberíamos considerar como simultáneamente reales únicamente a aquellas cantidades físicas que puedan ser medidas o predichas simultáneamente. Es decir, si la posición y el momento son reales pero en un distinto contexto de medición, no necesariamente ambos son reales al mismo tiempo. Esto implicaría que una medición en el primer sistema afecta al segundo y de acuerdo a E.P.R. no hay una definición razonable de la realidad que permita esto.

### 2.1.1. La versión de Bohm

Si bien el argumento E.P.R. introduce por primera vez un problema conceptual en la teoría cuántica, por más de 15 años éste únicamente se quedó en la categoría de experimento pensado y no hubieron mayores contribuciones al tema. En 1951 David Bohm presenta en [8] una versión análoga al argumento E.P.R. en la que se considera un sistema con enredamiento en el grado de libertad del espín. Es importante estudiar esta versión porque permite mostrar que la mecánica cuántica presenta correlaciones que no son reproducibles clásicamente y abre paso al desarrollo de las desigualdades

de Bell que estudiaremos posteriormente, además de que resulta más sencillo realizar mediciones de variables discretas. A esta versión del argumento la llamaremos E.P.R.B.

Consideremos entonces una molécula compuesta por dos átomos en un estado tal que el espín total del sistema es cero. Supongamos que la molécula se desintegra por medio de un proceso que conserva el espín total. Los átomos se separan después de la interacción y aunque no se conozca el espín individual, el espín total debe conservarse pues por hipótesis no se introdujeron torcas externas. Como el espín es el único grado de libertad relevante para el argumento podemos describir la situación anterior por medio del vector de estado

$$|\psi^-\rangle = \frac{|0^{(A)}\rangle \otimes |1^{(B)}\rangle - |1^{(A)}\rangle_1 \otimes |0^{(B)}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

Los superíndices  $A$  y  $B$  sirven para diferenciar a cada uno de los átomos. Ahora consideremos a dos observadores A y B quienes se encuentran espacialmente separados y desean realizar mediciones en los átomos  $A$  y  $B$  respectivamente. Observamos que por la forma de  $|\psi^-\rangle$  ambos observadores tienen la misma probabilidad de obtener el resultado  $+1$  ó  $-1$  al medir la proyección del espín  $\hat{\sigma}_z$  en su átomo. Sin embargo, si uno de ellos realiza una medición el espín de la otra partícula toma *inmediatamente* un valor determinado que está perfectamente anticorrelacionado con el valor del espín que se midió, es decir, si se encuentra que el espín de una partícula es  $+1$  ( $-1$ ) el de la otra necesariamente será  $-1$  ( $+1$ ). Esta anticorrelación perfecta no sólo se observa al medir  $\hat{\sigma}_z$  pues se puede mostrar que el estado  $|\psi^-\rangle$  tiene la misma forma para cualquier base de  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  que se utilice por lo que se tiene la misma situación física en cualquier otra dirección de espín  $\hat{\sigma} \cdot \hat{n}$  siempre y cuando ambas mediciones se realicen en la misma dirección.

Si el observador A realiza una medición en una dirección determinada y comunica su resultado, entonces el observador B puede predecir con certeza la orientación del espín de su partícula, y si el criterio de localidad es válido, no la perturba de ninguna forma ya que las interacciones en el sistema del observador A no deberían afectar al estado del observador B. Parece razonable entonces considerar que la orientación del espín del observador B en esa dirección es una propiedad intrínseca, o bien un elemento de realidad física de acuerdo al lenguaje de E.P.R.

Por otro lado, el observador A puede medir la componente del espín en cualquier dirección, por lo que la orientación del espín de la partícula del observador B debe corresponder a un elemento de realidad física para todas las direcciones. Sin embargo, como se vio en el capítulo anterior, los operadores de espín asociados a diferentes direcciones de medición no conmutan entre sí por lo que de acuerdo a la mecánica cuántica no pueden estar bien definidos simultáneamente. Por lo tanto, la teoría debe estar incompleta ya que existen cantidades físicas reales que no están descritas por la teoría.

Es importante notar que en ambos argumentos hay dos suposiciones fundamentales: la idea de realismo que permite asociar propiedades bien definidas a cada subsistema, y el principio de localidad que implica que la interacción en un subsistema no afecta al

otro. Un error común es pensar que el argumento E.P.R. presenta un rechazo *a priori* al indeterminismo de la mecánica cuántica, y tal vez la famosa frase de Einstein “Dios no juega a los dados” no ayuda a aclarar esta confusión. Sin embargo es precisamente la no-localidad que presentan los estados enredados lo que molestaba a los autores. Para garantizar la validez del principio de localidad y evitar la acción a distancia es necesario atribuir a cada región en el espacio tiempo propiedades *reales* que estén bien definidas antes de la medición y que estén correlacionadas; el determinismo simplemente se infiere. Como el formalismo de la función de onda no contempla estas propiedades, aún si sus resultados son correctos, no nos permite tener una descripción completa de la realidad física.

## 2.2. Desigualdades y el teorema de Bell

A partir de las objeciones presentadas por E.P.R., resulta natural preguntarse si es posible describir los fenómenos cuánticos de una forma más cercana a nuestras ideas clásicas. Por ejemplo, el resultado del experimento E.P.R.B. no le parecería del todo extraño a alguien que conoce al Dr. Bertlmann, a quien le gusta usar dos calcetines de diferentes colores. Es imposible predecir anticipadamente qué color de calcetín traerá en un pie pero si vemos que tiene puesto un calcetín verde, podemos estar seguros que el otro calcetín no es verde. La observación de un calcetín nos da información *inmediata* sobre el otro, tal como ocurre en el experimento de E.P.R.B., pero en este caso no hay mecanismos no-locales involucrados. Las correlaciones son idénticas, ¿no podría ser que los espines del estado  $|\psi^-\rangle$  se comportan simplemente como los calcetines del Dr. Bertlmann, es decir, es posible que los espines tengan un valor determinado y opuesto desde su preparación pero que simplemente nosotros no lo conocemos? Este caso ha sido considerado por varios autores en las llamadas teorías de variables ocultas, las cuales intentan complementar a la mecánica cuántica por medio de parámetros adicionales que están bien definidos antes de la medición y nos permiten considerar que las cantidades físicas tienen una realidad asociada. El término “ocultas” proviene del hecho de que estos parámetros nos son desconocidos al no estar consideradas en el formalismo de la mecánica cuántica, sin embargo nos permiten obtener las mismas predicciones que la mecánica cuántica. En este contexto el carácter probabilístico de la teoría surge de manera natural debido a nuestra ignorancia. En un modelo de variables ocultas locales, los parámetros asociados a sistemas espacialmente separados son independientes entre sí y de esta forma se garantiza que una simple correlación entre resultados no implica acción a distancia.

Se han propuesto diversos modelos de variables ocultas y aunque la dinámica de cada uno de ellos puede ser diferente, todos siguen un formalismo similar. En general se considera un espacio de parámetros  $\Lambda$  cuyos elementos son variables ocultas  $\lambda$  que siguen una distribución de probabilidad  $\rho(\lambda)$  tal que  $\int_{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda = 1$ . La forma exacta de  $\lambda$  no necesariamente está especificada ni tiene restricciones pero todo sistema físico se encuentra siempre en un estado descrito por  $\lambda \in \Lambda$ , aún si no se conoce, y éste

determina el resultado de cualquier posible medición. En consecuencia, para una  $\lambda$  dada, cada observable  $\mathcal{A}$  tiene un valor exacto  $A(a, \lambda)$  que es revelado al momento de realizar una medición. De esta forma, toda cantidad física  $A$  se puede representar como una función real en el espacio  $\Lambda$ ,  $A : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ , cuya imagen tiene que ser idéntica al espectro del operador  $\hat{A}$  que de acuerdo a la mecánica cuántica corresponde a la observable  $\mathcal{A}$ .

El formalismo de las teorías de variables ocultas resultará más claro si estudiamos un ejemplo particular. En el caso de una partícula individual, es sencillo describir los resultados de la medición del espín en términos de variables adicionales si suponemos que la partícula se encuentra en un estado bien definido de espín cuya orientación está dada por un vector unitario  $\hat{p}$  y consideramos como variable oculta a un vector unitario  $\hat{\lambda}$  con distribución de probabilidad uniforme en un segmento de un disco de forma tal que  $\hat{\lambda} \cdot \hat{p} > 0$ . Podemos especificar el resultado de una medición de la componente  $\hat{\sigma} \cdot \hat{a}$  si

$$A(\hat{a}, \hat{\lambda}) = \text{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}) \quad (2.6)$$

donde  $\hat{a}'$  es un vector unitario que depende de  $\hat{a}$  y de  $\hat{p}$ . El vector  $\hat{a}'$  genera una recta que divide al disco en dos regiones, tal como se observa en la figura 2.1. El resultado de una medición siempre será  $+1$  si el vector  $\lambda$  está en la región hacia la cual  $\hat{a}'$  apunta y siempre será  $-1$  en el otro caso. El valor esperado de la medición se obtiene al promediar el resultado  $A(\hat{a}, \hat{\lambda})$  sobre todos los posibles valores de  $\hat{\lambda}$

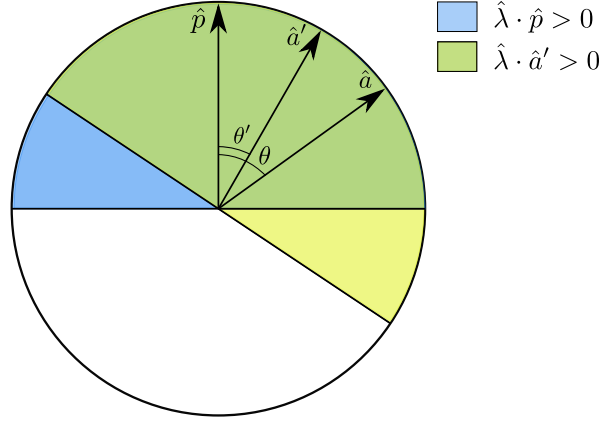
$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma} \cdot \hat{a} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda} A(\hat{a}, \hat{\lambda}) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}(\phi)) d\phi \\ &= 1 - \frac{2\theta'}{\pi} \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $\theta'$  es el ángulo entre  $\hat{a}'$  y  $\hat{p}$ .

Por otro lado, de acuerdo a la mecánica cuántica interpretamos que el estado de la partícula es un eigenestado con eigenvalor positivo del operador de espín en la dirección del vector  $\hat{p}$ , es decir,  $|\psi\rangle = |0\rangle_{\hat{p}}$  y se desea hacer una medición del operador  $\hat{\sigma} \cdot \hat{a}$ . Podemos, sin pérdida de generalidad, escoger nuestro sistema de referencia de forma tal que  $\hat{p}$  esté en la dirección del eje  $z$  por lo que si  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\hat{a}$  y  $\hat{p}$  podemos escribir  $\hat{\sigma} \cdot \hat{a} = \cos \theta \hat{\sigma}_z + \sin \theta \hat{\sigma}_x$ . El valor esperado es en este caso

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma} \cdot \hat{a} \rangle &= \langle \psi | \hat{\sigma} \cdot \hat{a} | \psi \rangle \\ &= \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.8)$$

por lo que podemos obtener las mismas predicciones que en la mecánica cuántica si construimos el vector  $\hat{a}'$  a partir de  $\hat{a}$  y lo rotamos hacia  $\hat{p}$  hasta que se cumpla



**Figura 2.1:** Proyección en un plano del modelo de variables ocultas para un espín.

la relación entre los ángulos  $1 - 2\theta'/\pi = \cos \theta$ . En este caso resulta fácil ver que el resultado de cada medición queda completamente determinado por el valor de la variable adicional  $\hat{\lambda} = \hat{p}$  y el carácter estadístico de la mecánica cuántica surge porque el valor exacto de esta variable nos es desconocido.

Ahora consideremos una situación similar a la de E.P.R.B. en la que una fuente emite un estado  $|\psi^-\rangle$  de dos partículas enredadas que se alejan entre sí. Dos observadores A y B, quienes se encuentran espacialmente separados, comparten el estado y realizan mediciones en determinadas direcciones de  $\hat{\sigma}^{(A)}$  y  $\hat{\sigma}^{(B)}$  con detectores orientados en ángulos diferentes pero en el mismo plano, perpendicular a la dirección de propagación de las partículas. Como se vio anteriormente, la mecánica cuántica predice en este caso que si el observador A mide la componente  $\hat{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{a}$  y obtiene el valor  $+1$  ( $-1$ ) entonces de una medición de  $\hat{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{a}$  necesariamente se obtiene el valor  $-1$  ( $+1$ ).

Como podemos predecir con certeza el resultado de una medición de  $\hat{\sigma}^{(B)}$  en una dirección determinada si se conoce el resultado de la medición de  $\hat{\sigma}^{(A)}$  en la misma dirección, es razonable buscar una descripción más completa en la que la orientación de los espines esté definida antes de la medición y determinada por un parámetro adicional  $\lambda$ . De esta forma, el resultado de una medición de  $\hat{\sigma}_a^{(A)}$  solo depende de la orientación del detector y de una variable oculta  $\lambda$ , y de igual forma el resultado de una medición  $\hat{\sigma}_b^{(B)}$  solo depende de  $\hat{b}$  y  $\lambda$ , es decir,

$$\begin{aligned} A(\hat{a}, \lambda) &= \pm 1 \\ B(\hat{b}, \lambda) &= \pm 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

El valor esperado del producto de las mediciones  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  se define como

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = \int_{\Lambda} A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \tag{2.10}$$

En las ecuaciones (2.9) y (2.10) se considera que los resultados de las mediciones son separables, y como veremos en el siguiente capítulo, la separabilidad es una consecuencia de la localidad.

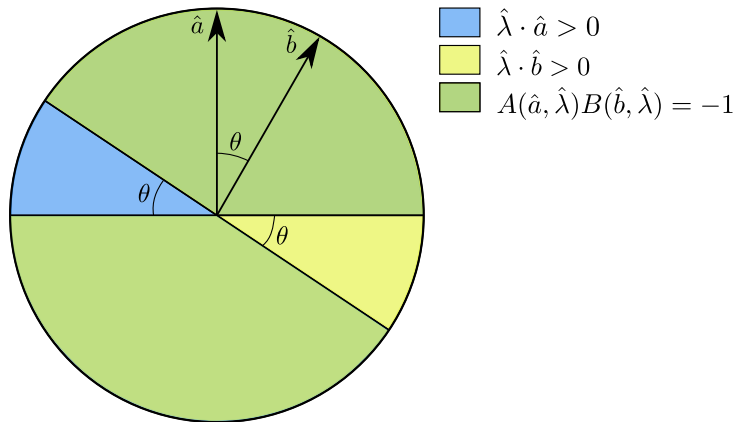
Cualquier modelo de variables ocultas que consideremos debe poder reproducir las (anti)correlaciones perfectas que predice la mecánica cuántica, por lo que se debe cumplir que

$$\begin{aligned} E(\hat{a}, \hat{a}) &= -E(\hat{a}, -\hat{a}) = -1 \\ E(\hat{a}, \hat{b}) &= 0 \quad \text{si } \hat{a} \cdot \hat{b} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

lo cual es sencillo de obtener si consideramos a  $\lambda$  como un vector unitario  $\hat{\lambda}$  con una distribución de probabilidad uniforme en una esfera unitaria y tomamos, por ejemplo,

$$\begin{aligned} A(\hat{a}, \hat{\lambda}) &= \text{sgn}(\hat{a} \cdot \hat{\lambda}) \\ B(\hat{b}, \hat{\lambda}) &= -\text{sgn}(\hat{b} \cdot \hat{\lambda}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Los vectores  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  generan dos planos que dividen a la esfera en cuatro regiones, pero como supusimos que las mediciones se realizan en direcciones coplanares únicamente necesitamos observar lo que ocurre en una proyección en el plano perpendicular a la dirección de propagación de las partículas para poder calcular los valores esperados. Tenemos entonces un disco dividido en cuatro regiones cuya razón entre áreas es  $\theta : \pi - \theta$ , tal como se observa en la figura 2.2.



**Figura 2.2:** Proyección en un plano del modelo de variables ocultas para dos espines

Si  $\lambda$  se encuentra orientado en la misma dirección que  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  el producto de las mediciones de los observadores A y B valdrá  $-1$  mientras que si la proyección de  $\lambda$  en  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  es opuesto el resultado será  $+1$ . El valor esperado de estas mediciones queda determinado entonces por

$$\begin{aligned}
 E(\hat{a}, \hat{b}) &= - \int_{\Lambda} \text{sgn}(\hat{a} \cdot \hat{\lambda}) \text{sgn}(\hat{b} \cdot \hat{\lambda}) \rho(\lambda) d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( -2 \int_0^{\pi-\theta} d\theta + 2 \int_{\pi-\theta}^{\pi} d\theta \right) \\
 &= -1 + \frac{2\theta}{\pi}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Notemos que aún cuando los valores de  $A$  y  $B$  no están bien definidos cuando  $\hat{a} \cdot \hat{\lambda} = 0$  y  $\hat{b} \cdot \hat{\lambda} = 0$ , estos puntos forman un conjunto de medida cero y la integral (2.13) está bien definida.

Si el modelo es completamente compatible con las predicciones de la mecánica cuántica esperaríamos que este resultado fuese igual al valor esperado  $\langle (\hat{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{a})(\hat{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{b}) \rangle_{|\psi^-\rangle}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el vector  $\hat{a}$  es paralelo al eje  $z$  y el vector  $\hat{b}$  se encuentre en el plano  $x-z$ , es decir,  $\hat{b} = \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k}$ . La componente del operador de espín en la dirección del vector  $\hat{b}$  es entonces

$$\hat{\sigma} \cdot \hat{b} = \cos \theta \hat{\sigma}_z + \sin \theta \hat{\sigma}_x = \cos \theta (|0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|) + \sin \theta (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|) \tag{2.14}$$

por lo que si el observador B actúa con este operador sobre el estado  $|\psi^-\rangle$  se obtiene

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{1} \otimes \hat{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{b}) |\psi^-\rangle &= \cos \theta (\mathbb{1} \otimes |0\rangle \langle 0| - \mathbb{1} \otimes |1\rangle \langle 1|) \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &\quad + \sin \theta (\mathbb{1} \otimes |0\rangle \langle 1| + \mathbb{1} \otimes |1\rangle \langle 0|) \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\sin \theta |00\rangle - \sin \theta |11\rangle - \cos \theta |01\rangle - \cos \theta |10\rangle].
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

De igual forma, si el observador A realiza una medición se obtiene

$$\begin{aligned}
 (\hat{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{a} \otimes \mathbb{1}) |\psi^-\rangle &= [|0\rangle \langle 0| \otimes \mathbb{1} - |1\rangle \langle 1| \otimes \mathbb{1}] \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

y finalmente el valor esperado del producto de ambas mediciones es



$$\begin{aligned}
\langle \psi^- | (\hat{\sigma}_A \cdot \hat{a})(\hat{\sigma}_B \cdot \hat{b}) | \psi^- \rangle &= \frac{1}{2} (\langle 01 | + \langle 10 |) (\sin \theta | 00 \rangle - \sin \theta | 11 \rangle \\
&\quad - \cos \theta | 01 \rangle - \cos \theta | 10 \rangle) \\
&= \frac{1}{2} (-\cos \theta - \cos \theta) \\
&= -\cos \theta_{ab} \\
&= -\hat{a} \cdot \hat{b}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Es evidente entonces que las correlaciones cuánticas no son reproducibles por medio de nuestro modelo de variables ocultas. Podríamos todavía hacer modificaciones para que los resultados de (2.13) sean iguales a los de (2.17) si permitimos que los resultados de la medición  $A(\hat{a}, \lambda)$  y  $B(\hat{b}, \lambda)$  también dependan de  $\hat{b}$  y  $\hat{a}$  respectivamente. Por ejemplo, podemos remplazar al vector  $\hat{a}$  en (2.13) por un vector  $\hat{a}'$  que se obtiene rotando  $\hat{a}$  hacia  $\hat{b}$  hasta que

$$1 - \frac{2\theta'}{\pi} = \cos \theta \tag{2.18}$$

donde  $\theta'$  es el ángulo entre  $\hat{a}'$  y  $\hat{b}$ . Esto implicaría sin embargo que el resultado de las mediciones del observador A ahora depende también de la orientación del detector del observador B por lo que nuestro modelo de variables ocultas dejaría de ser local.

Hasta ahora solo hemos considerado un modelo específico de variables ocultas y es necesario buscar un resultado más general. Para ello, observamos que si tomamos los valores esperados de tres conjuntos de mediciones, para cualquier modelo local de variables ocultas siempre se cumple que:

$$\begin{aligned}
|E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{c})| &= \left| \int_{\Lambda} [A(\hat{a}, \lambda)B(\hat{b}, \lambda) - A(\hat{a}, \lambda)B(\hat{c}, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \right| \\
&= \left| \int_{\Lambda} [-B(\hat{a}, \lambda)B(\hat{b}, \lambda)] \rho(\lambda) + B(\hat{a}, \lambda)B(\hat{c}, \lambda) d\lambda \right| \\
&= \left| \int_{\Lambda} B(\hat{a}, \lambda)B(\hat{b}, \lambda) [1 - B(\hat{b}, \lambda)B(\hat{c}, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \right| \\
&\leq \int_{\Lambda} |B(\hat{a}, \lambda)B(\hat{b}, \lambda) [1 - B(\hat{b}, \lambda)B(\hat{c}, \lambda)]| \rho(\lambda) d\lambda \\
&= \int_{\Lambda} [1 - B(\hat{b}, \lambda)B(\hat{c}, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \\
&= 1 + E(\hat{b}, \hat{c}).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

A la ecuación (2.19) se le conoce como la **desigualdad de Bell** [4]. Este resultado es importante porque nos permite establecer una condición que deben cumplir todas las teorías locales y verificar si éstas son compatibles con la mecánica cuántica.

Si se escogen las orientaciones de los detectores  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ , y  $\hat{c}$  de forma tal que estas formen ángulos con valores  $\theta_{ac} = \pi/2$  y  $\theta_{ab} = \theta_{bc} = \pi/4$ , la ecuación (2.19) y las correlaciones cuánticas (2.17) nos darían que  $1/\sqrt{2} \leq 1 - 1/\sqrt{2}$  por lo que si el formalismo de la mecánica cuántica es correcto, no es posible describir los resultados de las mediciones en una forma local y realista como en (2.9). La inconsistencia entre la mecánica cuántica y las teorías locales de variables ocultas tiene implicaciones profundas y apunta hacia la realización de un experimento que ponga a prueba la validez de estas teorías. La deducción de la ecuación (2.19), a pesar de ser matemáticamente correcta, supone la existencia de (anti)correlaciones perfectas, lo cual es poco realista en la práctica debido a limitaciones en la eficiencia de los detectores, por lo que resulta difícil verificar experimentalmente la violación de la desigualdad de Bell.

Para solucionar esta situación Clauser, Horne, Shimony y Horne [12] proponen un esquema alternativo al de Bell, que de igual forma permite verificar si la mecánica cuántica es compatible con una teoría local y realista, y que en principio se puede poner a prueba experimentalmente. Los autores proponen que para alguna elección de  $\hat{b}$  y  $\hat{b}'$  se cumpla que  $E(\hat{b}, \hat{b}') = 1 - \delta$  con  $0 \leq \delta \leq 1$  y de esta forma se evita la condición poco realista de correlación perfecta (i.e.  $\delta = 0$ ). Si dividimos al espacio de parámetros  $\Lambda$  en dos subespacios  $\Lambda_+$  y  $\Lambda_-$  tales que  $\Lambda_{\pm} = \{\lambda | A(\hat{b}', \lambda) = \pm B(\hat{b}, \lambda)\}$  entonces

$$\begin{aligned} 1 - \delta = E(\hat{b}, \hat{b}') &= \int_{\Lambda_+} B^2(\hat{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda - \int_{\Lambda_-} B^2(\hat{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} B^2(\hat{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda - 2 \int_{\Lambda_-} B^2(\hat{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2.20)$$

y esto implica que

$$\int_{\Lambda_-} \rho(\lambda) d\lambda = \delta/2. \quad (2.21)$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} B(\hat{b}, \lambda) B(\hat{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda &= \int_{\Lambda_+} A(\hat{b}', \lambda) B(\hat{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda - \int_{\Lambda_-} A(\hat{b}', \lambda) B(\hat{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} A(\hat{b}', \lambda) B(\hat{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda - 2 \int_{\Lambda_-} A(\hat{b}', \lambda) B(\hat{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ &\geq E(\hat{b}', \hat{c}) - 2 \int_{\Lambda_-} |A(\hat{b}', \lambda) B(\hat{c}, \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda \\ &= E(\hat{b}', \hat{c}) - \delta. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Entonces, utilizando (2.20) y (2.22) podemos re-escribir (2.19) como

$$\begin{aligned}
|E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{c})| &\leq 1 - \int_{\Lambda} B(\hat{b}, \lambda) B(\hat{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\
&\leq 1 - E(\hat{b}', \hat{c}) + \delta \\
&= 2 - E(\hat{b}', \hat{c}) - E(\hat{b}', \hat{b})
\end{aligned} \tag{2.23}$$

que es la **desigualdad CHSH**. La ventaja de este resultado es que puede aplicarse directamente a mediciones experimentales si se utiliza un ensamble de partículas, cada una de ellas preparada en un estado enredado. Es necesario utilizar dos aparatos de medición y se deben etiquetar los eventos de detección con los valores  $+1$  y  $-1$ . Si únicamente se toman en cuenta las cuentas de las coincidencias entre ambos detectores, el valor esperado se puede aproximar de acuerdo a

$$E(a, b) = \frac{N_{++}(a, b) + N_{--}(a, b) - N_{+-}(a, b) - N_{-+}(a, b)}{N_{++}(a, b) + N_{--}(a, b) + N_{+-}(a, b) + N_{-+}(a, b)}, \tag{2.24}$$

donde  $N_{\pm\pm}(a, b)$  corresponde a medir que la primera partícula esté en el estado  $\pm 1$  y la segunda en el estado  $\pm 1$  cuando los detectores están orientados en la orientación  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  respectivamente, y similarmente para los valores de las otras  $N$ 's. De esta forma la desigualdad (2.23) se puede aplicar directamente al número de cuentas experimentales.

En la práctica llevar a cabo un experimento concluyente que descarte las teorías de variables ocultas locales resulta más complicado de lo que muestra la ecuación (2.24). Por un lado, se debe excluir la posibilidad de que las mediciones en  $A$  afecten los resultados de  $B$  por medio de una influencia local que se propaga con velocidad menor a  $c$ , es decir, se requiere que la elección de la orientación de los detectores y la detección de las partículas sean eventos espacialmente separados. El experimento de Weihs [35] logró esto utilizando una configuración en la que la orientación de los detectores se cambiaba de manera aleatoria en un tiempo muy corto con respecto al tiempo de vuelo de las partículas. Adicionalmente al problema de la comunicación, dado que únicamente se detecta una muestra del número total de partículas emitidas por la fuente, es necesario suponer que la muestra de partículas detectadas es representativa. De otra forma, se podría argumentar que es posible dar una descripción local y realista del comportamiento del ensamble de partículas, pero que la muestra detectada tiene una distribución tal que se viola la desigualdad de Bell. Para evitar esta suposición se requieren eficiencias mayores a  $2(\sqrt{2} - 1) \approx 82.84\%$ . Si los detectores tienen adicionalmente algún tipo de filtro o polarizador, lo cual es común cuando se realizan experimentos con fotones, se asume también que las tasas de detección en coincidencia con un filtro colocado en cada detector son menores a las tasas de detección cuando solo se utiliza un filtro en uno de los detectores. Se han realizado experimentos con iones [33] para los cuales se tienen altas eficiencias de detección, evitando así hacer suposiciones adicionales. Sin embargo, hasta antes del 2005 [17] no se tienen experimentos que al mismo tiempo logren resolver el problema de las eficiencias de detección y la comunicación al mismo tiempo, aunque es posible que el experimento de Zeilinger de 2011 [39], o algún refinamiento del mismo, lo logre.

Hasta ahora hemos visto que las desigualdades de Bell son una forma de determinar si es posible dar una descripción más completa de la realidad física por medio de variables ocultas locales. Sin embargo, este resultado es más general y tiene implicaciones más allá de la existencia de modelos de variables ocultas, pues como veremos a continuación, también es posible deducir desigualdades de este tipo de forma puramente fenomenológica y sin utilizar el concepto de variables ocultas.

Para esto consideremos una vez más el caso en el que dos observadores  $A$  y  $B$  realizan mediciones locales del espín de dos partículas en el estado  $|\psi^-\rangle$  en la dirección de dos vectores coplanarios  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$ . Llamemos  $A(a)$  al resultado de medir  $\hat{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{a}$  y  $B(b)$  al resultado de medir  $\hat{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{b}$ . Los valores promedio después de repetir ambas mediciones  $N$  veces son

$$\begin{aligned}\langle A(a) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_j A_j(a) \\ \langle B(b) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_j B_j(b).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Siguiendo el desarrollo de Peres [29], tratemos de imaginar cuáles podrían ser los resultados de otras mediciones en direcciones  $\hat{a}'$  y  $\hat{b}'$ . Es imposible saber con certeza los resultados (al menos que  $\hat{a}' = \pm \hat{a}$  y  $\hat{b}' = \pm \hat{b}$ ) porque no se realizó ninguna medición. Sin embargo, las mediciones *podrían* haber sido realizadas en lugar de las mediciones en la dirección de  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  y los resultados podrían haber sido únicamente  $\pm 1$ .

Podemos entonces intentar construir una tabla que incluya los resultados de las mediciones que sí se llevaron a cabo y los resultados de las mediciones hipotéticas. No sabemos como rellenar todos los espacios porque para cada medición en las direcciones de  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  tenemos 4 posibles resultados de las mediciones hipotéticas. Si se llevan a cabo  $N$  mediciones entonces podemos imaginarnos  $4^N$  tablas diferentes. Desafortunadamente, como veremos a continuación, ninguna de estas tablas es aceptable.

	No. exp.	1	2	3	.	.	.	$N$
Experimentos realizados	$A(a)$ $B(b)$	+1 -1	+1 +1	-1 -1	.	.	.	.
Experimentos no realizados	$A(a')$ $B(b')$	? ?	? ?	? ?	.	.	.	.

**Tabla 2.1:** Comparación entre mediciones realizadas e hipotéticas.

La forma correcta de rellenar la tabla debe cumplir que para una  $N$  suficientemente grande esperamos que  $\langle A(a) \rangle = \langle B(b) \rangle = 0$ , y que el promedio del producto de dos mediciones reproduzca las correlaciones

$$\langle A(a)B(b) \rangle = \frac{1}{N} \sum_j A_j(a)B_j(b) = E(a, b).$$

Si queremos que los resultados de las mediciones hipotéticas sean consistentes con la mecánica cuántica, las correlaciones deben ser

$$\begin{aligned} E(a, b') &= \langle (\hat{\sigma} \cdot \hat{a})(\hat{\sigma} \cdot \hat{b}') \rangle \\ E(a', b) &= \langle (\hat{\sigma} \cdot \hat{a}')(\hat{\sigma} \cdot \hat{b}) \rangle \\ E(a', b') &= \langle (\hat{\sigma} \cdot \hat{a}')(\hat{\sigma} \cdot \hat{b}') \rangle \end{aligned} \quad (2.26)$$

porque los experimentos *podrían* haber sido realizados y los resultados obtenidos deberían ser consistentes con las leyes de la física.

Ahora, para cualquier elección de vectores  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}'$ ,  $\hat{b}$  y  $\hat{b}'$  siempre se cumple que

$$A(a)B(b) + A(a)B(b') + A(a')B(b) - A(a')B(b') = \pm 2 \quad (2.27)$$

por lo que al promediar este valor para varias mediciones obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left| \sum [A(a)B(b) + A(a)B(b') + A(a')B(b) - A(a')B(b')] \right| \\ = |E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| \leq 2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

que es otra de las desigualdades de Bell.

Los valores promedio de cualquier tipo de medición (clásica) con resultados aleatorios, sin importar cuál sea el mecanismo detrás de estos, necesariamente siguen esa desigualdad. La sencillez del argumento nos lleva a pensar que los resultados de cualquier teoría física razonable deberían seguir la desigualdad (2.28), sin embargo en el caso de la mecánica cuántica las correlaciones son más fuertes que en el caso de las teorías clásicas ya que como se observa en la figura 2.3

$$|E(\hat{a}, \hat{b})_{cuántico}| \geq |E(\hat{a}, \hat{b})_{clásico}| \quad (2.29)$$

y hay un espectro continuo de ángulos de medición para los cuales (2.28) no se cumple. La máxima violación ocurre cuando  $\hat{a}'$  y  $\hat{b}'$  forman un ángulo de  $5\pi/4$  y los otros tres un ángulo de  $\pi/4$ . Entonces,

$$\hat{a}' \cdot \hat{b} = \hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{a} \cdot \hat{b}' = -\hat{a}' \cdot \hat{b}' = 1/\sqrt{2} \quad (2.30)$$

y el lado izquierdo de (2.28) vale  $2\sqrt{2}$ .

El problema con el razonamiento anterior es que supusimos que era posible rellenar la tabla pero la mecánica cuántica no permite asignar valores bien definidos a las cantidades  $A(a)$ ,  $A(a')$ ,  $B(b)$  y  $B(b')$ ; en un experimento se pueden medir únicamente a dos de ellas como máximo por lo que no tiene sentido hablar de las cuatro cantidades, ni siquiera como cantidades desconocidas. Al comparar los resultados de experimentos que se llevan a cabo con los resultados de experimentos hipotéticos que podrían haberse llevado a cabo llegamos inevitablemente a la conclusión de que es imposible imaginar

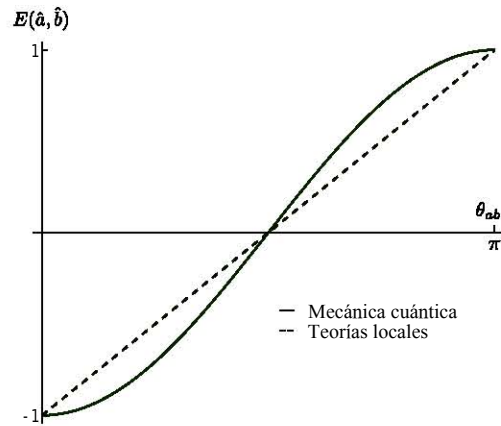


Figura 2.3: Correlaciones clásicas y cuánticas.

los resultados de experimentos no realizados en una forma en que sean compatibles con los experimentos realizados, la separabilidad (localidad) de las mediciones individuales, y la mecánica cuántica. En otras palabras, los experimentos no realizados no tienen resultados, o la suposición de localidad en las mediciones no es correcta.

Ante la situación que se nos presenta, la salida fácil es pensar que no tiene sentido especular sobre los resultados de experimentos no realizados. De esta forma la mecánica cuántica quedaría liberada de varias dificultades conceptuales pues ni siquiera tendría sentido formular el argumento E.P.R. Sin embargo, solo estaríamos dándole la espalda al problema y si lo que realmente buscamos es tener un mayor entendimiento de la teoría, la violación de las desigualdades de Bell parece indicarnos que los resultados de las mediciones no son independientes e inclusive puedan depender de una infinidad de parámetros adicionales  $A = A(\hat{a}, \hat{b}, \lambda, \delta, \dots)$ .

Este resultado no deja de ser sorprendente pues estamos acostumbrados a pensar en términos de sistemas aislados cuyo comportamiento es independiente de lo que ocurre en el resto del mundo, y las desigualdades de Bell nos muestran que esta separación no es posible si estamos dispuestos a aceptar que las predicciones de la mecánica cuántica son correctas. Una medición individual en  $A$  no es independiente de lo que ocurra en  $B$  y viceversa, al observar el calcetín izquierdo del Dr. Bertlmann se determina el color del calcetín derecho. La separabilidad en mecánica cuántica únicamente es válida para un promedio de mediciones, pues sin importar cuántos parámetros consideremos que afecten el resultado de una medición, siempre se cumple que

$$\langle A(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda}, \dots) \rangle = \langle B(\hat{b}, \hat{a}, \hat{\lambda}', \dots) \rangle = 0 \quad \text{y}$$

$$\langle A(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda}, \dots) B(\hat{b}, \hat{a}, \hat{\lambda}', \dots) \rangle = -\hat{a} \cdot \hat{b}.$$

Esto será de importancia para definir la estructura causal de la mecánica cuántica en el siguiente capítulo.

Es importante mencionar que aunque hasta ahora hemos tratado el tema de la falta de realismo local y las violaciones del teorema de Bell para el estado de singulete  $|\psi^-\rangle$ , el teorema de Gisin [20] muestra que cualquier estado puro, bipartita, y enredado viola la desigualdad de Bell (2.28). Para el caso de los estados mixtos la relación entre el enredamiento y la falta de realismo local no es tan directa pues existen estados mixtos que a pesar de estar enredados no presentan violaciones de la desigualdad (2.28), permitiendo así una descripción local y realista [37].

### 2.3. La igualdad de GHZ, o el teorema de Bell sin desigualdades

Las desigualdades de Bell dejan claro que hay un conflicto entre las predicciones estadísticas de la mecánica cuántica y la idea de realismo y localidad cuando consideramos un sistema de dos partículas enredadas. Sin embargo, en 1989 Greenberger, Horne y Zeilinger mostraron [18] que si se consideran sistemas de más de dos partículas es posible observar violaciones más dramáticas del realismo local en la mecánica cuántica. Estas violaciones no se restringen únicamente a las predicciones estadísticas e inclusive permiten introducir igualdades.

Consideremos un sistema de tres partículas con espín 1/2 descrito por

$$|\psi\rangle_{GHZ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle - |111\rangle). \quad (2.31)$$

Es fácil mostrar que  $|\psi\rangle_{GHZ}$  es un eigenestado del conjunto de operadores formados a partir del producto tensorial de los operadores de espín de cada partícula  $\hat{\sigma}_i^{(j)}$ , de forma tal que podemos medir en dos partículas la proyección en  $y$  y en una la proyección en  $x$ . Por ejemplo, para la combinación  $\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)}\hat{\sigma}_y^{(3)}$ , si medimos el espín de la primera partícula obtenemos

$$\hat{\sigma}_x^{(1)} |\psi\rangle_{GHZ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|100\rangle - |011\rangle) = |\psi'\rangle_{GHZ}. \quad (2.32)$$

Si posteriormente se mide el espín de la segunda partícula se obtiene

$$\hat{\sigma}_y^{(2)} |\psi'\rangle_{GHZ} = \frac{i}{\sqrt{2}} (|110\rangle + |001\rangle) = |\psi''\rangle_{GHZ}. \quad (2.33)$$

Y finalmente para la medición de la tercera partícula

$$\hat{\sigma}_y^{(3)} |\psi''\rangle_{GHZ} = \frac{i^2}{\sqrt{2}} (|111\rangle - |000\rangle) = |\psi\rangle_{GHZ}. \quad (2.34)$$

Como los operadores de espín de las tres partículas conmutan entre sí no importa el orden en que se realicen las mediciones y encontramos que, efectivamente,  $|\psi\rangle_{GHZ}$  es un eigenestado de  $\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)}\hat{\sigma}_y^{(3)}$  con eigenvalor 1. Por la simetría del estado es evidente que éste también es un eigenestado con el mismo eigenvalor del producto de operadores

$\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)} \hat{\sigma}_y^{(3)}$  y  $\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_y^{(2)} \hat{\sigma}_x^{(3)}$ . Esto implica que antes de realizar una medición podemos saber con certeza que el producto de las tres mediciones siempre toma el valor  $+1$ , aún cuando no tenemos forma de predecir el valor de cada medición individual de  $\hat{\sigma}_{xy}^{(i)}$  pues

$$\begin{aligned} P(\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)} = 1) &= 1 \\ P(\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)} = 1) &= 1 \\ P(\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)} \otimes \sigma_y^{(3)} = 1) &= 1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Vemos por otro lado que si medimos la proyección del espín en  $x$  de las tres partículas obtenemos

$$\hat{\sigma}_x^{(2)} |\psi'\rangle_{GHZ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|110\rangle - |001\rangle) = |\psi'''\rangle_{GHZ} \quad (2.36)$$

y

$$\hat{\sigma}_x^{(3)} |\psi'''\rangle_{GHZ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|111\rangle - |000\rangle) = -|\psi\rangle_{GHZ} \quad (2.37)$$

por lo que  $|\psi\rangle_{GHZ}$  también es un eigenestado del producto de operadores  $\hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)} \hat{\sigma}_x^{(3)}$  con eigenvalor igual a  $-1$ . En este caso

$$P(\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} \otimes \sigma_x^{(3)} = -1) = 1 \quad (2.38)$$

y el producto de las tres mediciones siempre debe valer  $-1$ .

A continuación tratemos de investigar las propiedades de  $|\psi\rangle_{GHZ}$  desde un punto de vista local y realista en el esquema de E.P.R. Supongamos entonces que el espín de una partícula es una cantidad bien definida y llamemos  $A_{x,y}$ ,  $B_{x,y}$  y  $C_{x,y}$  a los resultados de las mediciones del espín de la primera, segunda y tercer partícula, ya sea en la dirección del eje  $x$  ó  $y$ . Dadas las probabilidades (2.35) se tiene que

$$\begin{aligned} A_y B_y C_x &= 1 \\ A_y B_x C_y &= 1 \\ A_x B_y C_y &= 1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Si se mide el espín de cada partícula en regiones espacialmente separadas, la localidad implica que los valores obtenidos para cada partícula deben ser independientes del tipo de medición que se realice en las otras dos. Podemos entonces realizar más mediciones sobre el mismo estado, y como el cuadrado de cualquier valor  $A, B$ , o  $C$  siempre vale 1 podemos combinar los resultados para encontrar el valor del producto de los tres espines en  $x$ :

$$(A_y B_y C_x)(A_y B_x C_y)(A_x B_y C_y) = A_x B_x C_x = +1. \quad (2.40)$$



Hemos encontrado una contradicción pues de acuerdo a (2.38) esta cantidad debería tener un signo opuesto. En este caso la contradicción entre la mecánica cuántica y las teorías locales y realistas se vuelve más drástica aún, pues las predicciones no solo difieren por un factor de  $\sqrt{2}$  como en el caso de las desigualdades de Bell sino que son completamente opuestas.

La contradicción entre nuestro razonamiento y la mecánica cuántica se debe a que, por un lado, supusimos que si las mediciones se llevan a cabo en regiones espacialmente separadas los resultados de cada medición deben ser independientes de las mediciones que se efectúan en las otras partículas. Por otro lado, supusimos que las proyecciones de los espines en  $x$  y  $y$  son propiedades intrínsecas bien definidas. En el caso de las mediciones del espín de  $|\psi^-\rangle$  vimos que solo podemos asociar un valor bien definido o “elemento de realidad” al espín de una partícula para una configuración experimental determinada, ya que los operadores de espín no conmutan entre sí. En este caso los cuatro operadores que utilizamos conmutan entre sí y en principio se podría utilizar un dispositivo para medir los 4 simultáneamente. Sin embargo, al utilizar un razonamiento realista también supusimos que la medición del producto de tres operadores es equivalente a la medición separada de cada uno de ellos y se les atribuye “elementos de realidad” separados, lo cual nos lleva a contradicciones. Por lo tanto, resulta imposible diseñar un único experimento que nos permita conocer por separado las cantidades  $A_{x,y}$ ,  $B_{x,y}$  y  $C_{x,y}$ , cosa que antes habíamos asumido que era posible.

Para finalizar este capítulo, podemos resumir la estructura lógica de las desigualdades (2.28), (2.23) y (2.19) y la igualdad que acabamos de estudiar como una forma de mostrar que el siguiente conjunto de suposiciones resulta contradictorio:

1. Las cantidades físicas tienen asociados propiedades intrínsecas antes de su medición o “elementos de realidad”
2. El principio de localidad es válido
3. Las predicciones de la mecánica cuántica son correctas

y que debemos renunciar al menos a una de ellas. La motivación para realizar pruebas experimentales del teorema de Bell es precisamente verificar si es la tercera suposición la que debemos abandonar. Hasta ahora, los experimentos han mostrado que las predicciones de la mecánica cuántica son correctas y de ahí su incompatibilidad con las teorías locales. Ningún experimento es perfecto y se podría argumentar que las pruebas experimentales no son concluyentes pues todavía existen huecos que permitirían explicar los resultados de una forma local. Es necesario hacer un experimento en el que no sea necesario hacer suposiciones adicionales sobre la muestra de partículas detectadas y al mismo tiempo se excluya una conexión causal entre la fuente, las partículas, y los detectores. Sin embargo, parece poco realista pensar que hasta ahora los experimentos se ajustan de manera casi perfecta a las predicciones de la mecánica cuántica pero fallarán en situaciones suficientemente críticas. Consideramos entonces que es de mayor importancia estudiar las consecuencias de la violación del teorema de Bell en el

contexto de la relatividad especial, las mediciones y la causalidad, que es el tema del siguiente capítulo.



## Capítulo 3

# Sobre localidad y causalidad

En esta capítulo trataremos de formular las nociones de causa, efecto y correlaciones en el contexto de la mecánica cuántica y la relatividad especial utilizando el principio de causalidad local de Bell. Dado que la mecánica cuántica no es una teoría localmente causal estudiaremos otras condiciones que consideramos importantes para que la descripción cuántica y relativista sean consistentes: causalidad en las mediciones e invariancia de las probabilidades bajo transformaciones de Lorentz.

Combinar mecánica cuántica y relatividad ha sido quizá uno de los problemas más grandes que ha enfrentado la física moderna. Para garantizar la *coexistencia pacífica* [34] entre ambas teorías, la descripciones del mundo físico que nos proporcionan ambas teorías deben ser consistentes entre sí. Esto no resulta del todo sencillo. Cuando se trabaja en el contexto de la relatividad, usualmente se piensa en eventos localizados en el espacio-tiempo en los que las cantidades físicas tienen asociados valores objetivos. Las leyes de transformación entre sistemas inerciales están bien definidas por lo que no hay ambigüedades al definir conceptos como momento, posición o tiempo. La velocidad de la luz impone un límite a la velocidad de propagación de cualquier tipo de señal y esto genera una estructura causal en el espacio-tiempo. La mecánica cuántica por otro lado nos habla de funciones de onda y operadores hermitianos en un espacio de Hilbert. La localizabilidad de las partículas clásicas es reemplazada por la difusividad de la mecánica ondulatoria y el concepto de “momento de una partícula” no es problemático únicamente cuando no se piensa mucho en él pues el colapso de la función de onda permite localizar *instantáneamente* algo que antes estaba disperso en todo el espacio. Si bien nada puede viajar más rápido que la luz, parece que éste no es el caso de las convenciones matemáticas que pueden propagarse con una velocidad tan rápida como sea conveniente. Este podría ser el caso de la función de onda si se le considera únicamente como una herramienta matemática que contiene información de los posibles resultados de experimentos y que no tiene significado físico alguno. Sin embargo, algunos experimentos recientes [26] muestran que es posible medir la función de onda, e inclusive determinar la parte real e imaginaria de ésta, lo cual nos lleva a cuestionarnos si la función de onda es simplemente una convención.

Si queremos tomarnos en serio el límite impuesto por la velocidad de la luz es nece-

sario entonces distinguir entre convenciones matemáticas y cantidades objetivas. Bell [5] define el concepto de *beables* o *existibles* de una teoría como todo lo que, al menos en principio, podemos pensar que corresponde a algo real. Si la propiedad está asociada a una región específica del espacio tiempo podemos hablar de *existibles* locales. Como vimos en el capítulo anterior, el concepto de “realidad” puede ser problemático en mecánica cuántica, pero si queremos pensar que el mundo tiene propiedades independientes del observador los *existibles* parecen una buena alternativa. Sin embargo, como se estudió en el primer capítulo, en mecánica cuántica únicamente se define el concepto de observable por lo que únicamente los aparatos de medición y los resultados experimentales pueden considerarse como reales y localizables.

### 3.1. La causalidad local de Bell

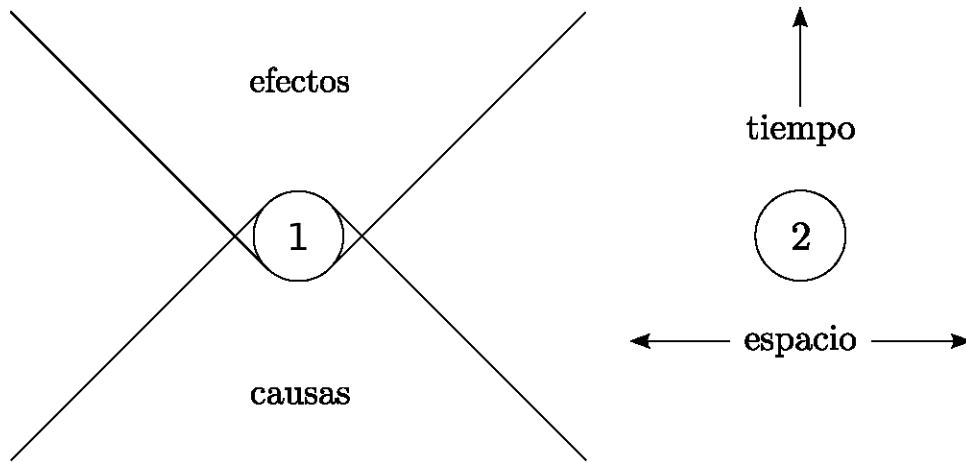
f La formulación actual de la mecánica cuántica no nos permite distinguir sin ambigüedad qué es lo que no puede viajar más rápido que la luz, sin embargo como mínima condición para que ésta sea consistente con la relatividad esperaríamos que las causas y efectos no se propaguen con velocidades superlumínicas. De otra forma en algún marco de referencia los efectos precederían a las causas lo cuál no es aceptable. Bell introduce la siguiente definición [5] para determinar si es posible describir a la mecánica cuántica en un contexto que sea, en la forma menos restringida posible, consistente con los conceptos de localidad y causalidad que impone la relatividad especial.

**Condición 4** (Principio de causalidad local). *Las causas y efectos de los eventos son cercanos y no se encuentran más lejos de lo permitido por la velocidad de la luz, por lo que dos eventos  $E_1$  y  $E_2$  están causalmente relacionados si y solo si  $(x_2 - x_1)^2 - c(t_2 - t_1)^2 < 0$*

Si se tienen dos regiones 1 y 2 espacialmente separadas entre sí como se muestra en la figura 3.1, las causas de un evento en la región 1 deben encontrarse en su cono de luz del pasado y los efectos en su cono de luz del futuro. Si la región 2 se encuentra espacialmente separada de 1, no debería haber causas ni efectos en los eventos de 1. Esto, sin embargo, no implica que eventos en 2 y 1 no puedan estar correlacionados. La definición es bastante intuitiva pero podemos formalizarla un poco más si introducimos la siguiente definición.

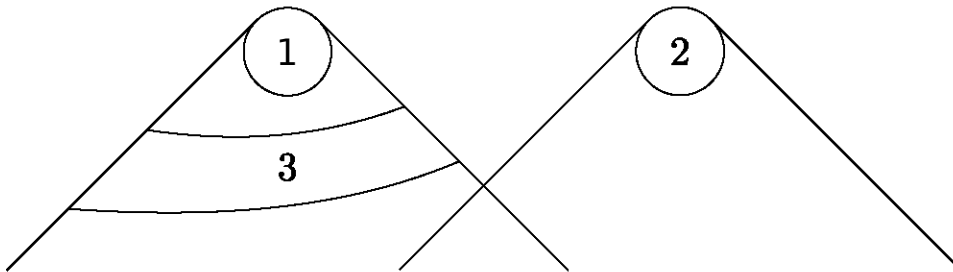
**Condición 5** (Teoría localmente causal). *Una teoría es localmente causal si para dos eventos  $E_1$  y  $E_2$  contenidos respectivamente en regiones espacialmente separadas 1 y 2, la probabilidad de ocurrencia, descrita por la teoría, del evento  $E_1$  es independiente de  $E_2$  y está especificada por un conjunto suficiente de eventos  $E_3$  en el cono de luz del pasado de 1 como se muestra en la figura 3.2, es decir,*

$$P(E_1|E_2, E_3) = P(E_1|E_3). \quad (3.1)$$



**Figura 3.1:** Localización en el espacio tiempo de las causas y efectos de los eventos en la región 1.

Si la región 3 no se intersecta con el cono de luz del pasado de 2, entonces cualquier información acerca de la región 2 se vuelve redundante cuando 3 está completamente especificado.

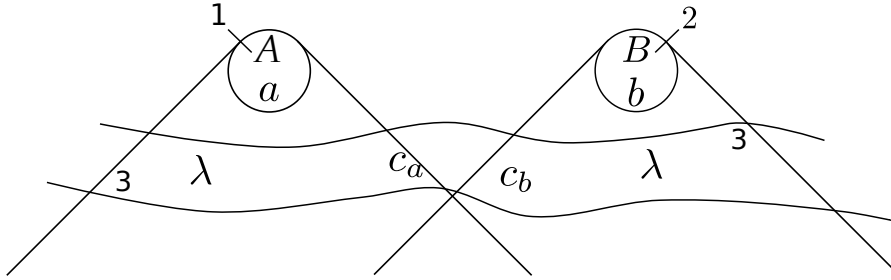


**Figura 3.2:** En una teoría localmente causal, las especificaciones de lo que ocurre en 3 vuelven redundantes los eventos que ocurren en 2 para las predicciones de 1.

El principio de causalidad local es también importante para explicar y entender las correlaciones entre eventos, lo cual es de particular importancia en la mecánica cuántica, como se vio en el capítulo anterior. Si se observan correlaciones entre dos eventos, ya sea en un sistema clásico o cuántico, es natural buscar una explicación, por lo que usualmente se asume que ambos tienen una causa común o que un evento es la causa del otro. Si la segunda opción es la explicación de las correlaciones, y estas se dan de manera instantánea entre dos eventos espacialmente separados entonces se tendría acción a distancia, lo cual no está permitido de acuerdo a la relatividad especial. Es necesario distinguir entre acción a distancia y correlaciones localmente explicables.

Consideremos un sistema bipartita sobre el cual se realizan mediciones de alguna propiedad determinada y cuyos resultados están correlacionados. Los resultados de las mediciones están representados por  $A$  en la región 1 y  $B$  en la región 2 y los parámetros

$a$  y  $b$  los determinan dos observadores. Esta situación se ilustra en la figura 3.3. La región 3 del espacio-tiempo atraviesa los conos de luz del pasado de 1 y 2 e incluye una región en la que éstos no se intersectan. En este caso  $\lambda$  junto con  $c_a$  y  $c_b$  que son los parámetros relevantes de cada subsistema especifican completamente los resultados.



**Figura 3.3:** Diagrama en el espacio tiempo de las causas y efectos de dos eventos en un sistema bipartita.

En general, si dos resultados  $A$  y  $B$  están correlacionados la probabilidad conjunta no es separable, es decir,

$$P(A, B|a, b) \neq P(A|a)P(B|b) \quad (3.2)$$

pero si tenemos información adicional sobre el sistema, en particular sobre sus causas en el pasado, la probabilidad  $P(A, B|a, b, c_a, c_b, \lambda)$  tendrá un valor distinto que a su vez podemos reescribir en términos de probabilidades condicionales como

$$P(A, B|a, b, c_a, c_b, \lambda) = P(A|B, a, b, c_a, c_b, \lambda)P(B|a, b, c_a, c_b, \lambda). \quad (3.3)$$

Hasta ahora solo se han usado reglas de probabilidad básica. Sin embargo, si suponemos que el sistema está descrito por una teoría localmente causal y dado que habíamos supuesto también que  $c_{a,b}$  y  $\lambda$  especifican completamente al sistema en la región 3, el conocimiento de algunas variables se vuelve redundante si las regiones 1 y 2 están espacialmente separadas. La expresión (3.3) se reduce entonces a

$$P(A, B|a, b, c, \lambda) = P(A|a, c_a, \lambda)P(B|b, c_b, \lambda). \quad (3.4)$$

La expresión anterior implica que en una teoría localmente causal la probabilidad conjunta es factorizable en un producto de probabilidades en el que cada factor depende únicamente de sus respectivos parámetros locales  $a$  y  $b$ , de sus causas en el cono de luz del pasado  $c_{a,b}$  y de la variable adicional  $\lambda$ . Hemos encontrado entonces una formulación matemática de las consecuencias del principio de causalidad local: la factorizabilidad de probabilidades. Únicamente las correlaciones que permitan una factorización de la forma (3.4) son local y causalmente explicables. Podemos resumir el resultado anterior por medio de la siguiente relación.

$$\text{teoría localmente causal} \Rightarrow \text{factorizabilidad de probabilidades} \quad (3.5)$$

### 3.2. La estructura causal de la mecánica cuántica

En el caso de las correlaciones de los resultados de un experimento tipo E.P.R.B. podemos interpretar a  $A$  y  $B$  como los resultados de las mediciones del espín de dos observadores, a  $a$  y  $b$  como las orientaciones de los detectores,  $c_i$  como cualquier variable permitida por la mecánica cuántica ordinaria que sirva para especificar al dispositivo experimental, y  $\lambda$  como una variable adicional y desconocida.

La única herramienta con la que contamos para calcular probabilidades en mecánica cuántica es la función de onda. Las probabilidades asociadas al estado  $|\psi^-\rangle$  se pueden calcular fácilmente:

$$P(1, 1|\hat{a}, \hat{b}) = P(-1, -1|\hat{a}, \hat{b}) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \quad (3.6a)$$

$$P(1, -1|\hat{a}, \hat{b}) = P(-1, 1|\hat{a}, \hat{b}) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \quad (3.6b)$$

que claramente no son factorizables en expresiones de la forma (3.4). La situación es similar cuando se consideran las probabilidades asociadas a los otros estados de la base de Bell. Entonces, por contraposición de la relación (3.5) se sigue que las correlaciones cuánticas no son local ni causalmente explicables. Cuando ambos detectores tienen la misma orientación, la medición de una partícula en la región 1 permite predecir con certeza el antes desconocido resultado de la otra partícula en 2, y no hay forma de que hagamos que el resultado de 1 sea redundante para 2 si especificamos los eventos en alguna región 3 del cono de luz del pasado de 2: la mecánica cuántica no es localmente causal.

La violación del principio de causalidad local está implícita también en las desigualdades de Bell ya que podemos escribir la correlación en términos de las probabilidades condicionales como

$$\begin{aligned} E(a, b, c) &= \int_{\Lambda} \sum_{A, B} A B P(A|a, c_a, \lambda) P(B|b, c_b, \lambda) \rho(\lambda|c_a, c_b) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} \langle A(a, \lambda, c_a) \rangle \langle B(b, \lambda, c_b) \rangle \rho(\lambda|c_a, c_b) d\lambda \end{aligned} \quad (3.7)$$

de donde se pueden deducir las desigualdades por medio de una simple manipulación algebraica. Lo que hemos adquirido con el análisis anterior es que ahora tenemos una imagen clara en el espacio tiempo de lo que implica la violación del principio de causalidad local de las correlaciones cuánticas. Queda claro entonces que la mecánica cuántica no es localmente causal y esto no se debe algún tipo de incompletez en su formalismo.

¿Por qué no impresiona esto a algunos físicos? No todos están dispuestos a tomarse en serio a la función de onda, y no creen que sea la historia completa. Es más fácil pensar en calcetines con colores determinados o sistemas con propiedades bien definidas antes



de la medición. La mecánica cuántica no es como los calcetines del Dr. Bertlmann, pero si el color de los calcetines se define al momento de la observación entonces empezamos a dudar si hay algo más allá y conjeturamos que una teoría más completa debería ser localmente causal.

La falta de causalidad local nos lleva a formular paradojas sobre los resultados de las mediciones. Por ejemplo, consideremos a un observador en un sistema de referencia  $\mathcal{S}$  que hace una medición de  $\hat{\sigma}_z^{(1)}$  de una partícula en un estado  $|\psi^-\rangle$  a un tiempo  $t_1$ . Las probabilidades de medir  $+1$  ó  $-1$  son las mismas. Supongamos, por ejemplo, que mide el valor  $+1$ , entonces el estado colapsa *instantáneamente* al estado  $|01\rangle$ , correspondiente al eigenvalor de  $\hat{\sigma}_z^{(1)}$  que se midió, por lo que si otro observador espacialmente separado hace una medición de  $\hat{\sigma}_z^{(2)}$  en la otra partícula a un tiempo  $t_2 > t_1$  observará con toda certeza el resultado  $-1$ . Ahora consideremos la misma situación desde otro sistema de referencia  $\mathcal{S}'$  que se mueve respecto de  $\mathcal{S}$  con una velocidad tal que  $t'_2 < t'_1$ . La mecánica cuántica nos dice que en este caso podemos medir ambos eigenvalores de  $\hat{\sigma}_z^{(2)}$ ,  $+1$  y  $-1$ , con la misma probabilidad. Pero para el otro sistema de referencia habíamos visto que debíamos medir el valor  $+1$  con probabilidad 1 y en consecuencia la descripción de una misma situación física puede cambiar drásticamente para dos sistemas de referencia.

Otra paradoja que nos lleva a conclusiones igualmente impactantes es la siguiente. Un sistema de dos partículas se prepara inicialmente en el estado  $|00\rangle$ . Si a un tiempo determinado  $t_1$  se efectúa una medición del cuadrado del espín total  $\hat{J}^2$  el sistema queda inalterado pues es un eigenestado de este operador, y si a un tiempo  $t_1 + \epsilon$  se mide  $\hat{\sigma}_z^{(2)}$  se obtiene con certeza el resultado  $+1$ . Consideremos por otro lado que a un tiempo  $t_1 - \epsilon$  alguien voltea el espín de la primera partícula de forma tal que el estado cambia a  $|10\rangle$ . Éste no es un eigenestado de  $\hat{J}^2$  pero podemos escribirlo en términos de la base de eigenestados de  $\hat{J}^2$  y  $\hat{J}_z$

$$\begin{aligned} |J_z = 0, J^2 = 0\rangle &= |\psi^-\rangle, & |J_z = 0, J^2 = 2\rangle &= |\psi^+\rangle \\ |J_z = 1, J^2 = 2\rangle &= |00\rangle, & |J_z = -1, J^2 = 2\rangle &= |11\rangle \end{aligned}$$

como  $|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi^+\rangle - |\psi^-\rangle]$ . Entonces, después una medición de  $\hat{J}^2$  el sistema *instantáneamente* cambia al estado  $|\psi^+\rangle$  o  $|\psi^-\rangle$ . Independientemente de cuál sea el resultado, si a un tiempo  $t_1 + \epsilon$  se mide  $\hat{\sigma}_z^{(2)}$ , la probabilidad de medir el resultado  $+1$  ó  $-1$  es la misma mientras que si no se volteó el primer espín se mide a  $t = t_1 - \epsilon$  el resultado  $+1$  con certeza. En consecuencia, si se efectúa una medición de  $\hat{J}^2$  al tiempo  $t_1$ , las probabilidades asociadas al segundo espín al tiempo  $t_1 + \epsilon$  dependerán de las propiedades del primer espín al tiempo  $t_1 - \epsilon$ . Dado que podemos hacer la separación entre las partículas arbitrariamente grande y el tiempo  $\epsilon$  arbitrariamente pequeño, parecería que la medición de  $\hat{J}^2$  es capaz de transmitir información discernible entre 1 y 2 a velocidades superluminales, generando así una violación de la causalidad local.

Sin embargo, a pesar de la existencia de situaciones aparentemente contradictorias como las que se mencionaron, y la falta de localidad causal, resulta que la mecánica

cuántica sí tiene una estructura causal que surge a partir de una relación de *conmutatividad local* propuesta por Heisenberg [21]:

La mecánica cuántica asume que para cualesquiera dos operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  que actúan en regiones espacialmente separadas siempre se cumple que

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \quad (3.8)$$

independientemente de si estos conmutan o no entre sí cuando operan localmente. Lo que se está asumiendo implícitamente en (3.8) es que la acción de los operadores es local. Esto significa que el sistema cuántico se describe efectivamente en un espacio producto de dos diferentes espacios de Hilbert  $|\Psi(t')\rangle \in \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$  y cada uno de los operadores afecta únicamente a un subespacio, es decir,  $A = E^{(A)} \otimes \mathbb{1}$  y  $B = \mathbb{1} \otimes E^{(B)}$ . Esta condición garantiza que aún si los resultados de  $A$  y  $B$  muestran correlaciones que se propagan más rápido que la luz, éstas no pueden ser usadas para transmitir información.

Podemos escribir a los operadores en términos en sus respectivas bases de eigenestados  $\hat{A} = \sum_i a_i \hat{P}_{a_i}$  y  $\hat{B} = \sum_j b_j \hat{P}_{b_j}$ , con  $\hat{P}_{a_i} = |a_i\rangle \langle a_i|$  y  $\hat{P}_{b_j} = |b_j\rangle \langle b_j|$ . Si un observador A mide el operador  $\hat{A}$  y obtiene el valor  $a_i$  el estado colapsa a

$$\rho \rightarrow \hat{P}_{a_i} \rho \hat{P}_{a_i}^\dagger = \rho_i. \quad (3.9)$$

Si otro observador B espacialmente separado pudiese obtener información acerca de lo que hizo el observador A, esto se vería reflejado en las estadísticas de medición de otro operador  $\hat{B}$ . Si A no le informa sus resultados por medio de algún tipo de **comunicación clásica** la probabilidad de B de medir  $b_j$  es

$$\begin{aligned} P^{(B)}(j) &= \sum_{i \in I} \text{tr}(\hat{P}_{b_j} \rho_i) \\ &= \sum_{i \in I} \text{tr}(\hat{P}_{b_j} \hat{P}_{a_j} \rho \hat{P}_{a_j}^\dagger) \\ &= \sum_{i \in I} \text{tr}(\hat{P}_{a_j} \hat{P}_{b_j} \rho \hat{P}_{a_j}^\dagger) \\ &= \sum_{i \in I} \text{tr}(\hat{P}_{a_j}^\dagger \hat{P}_{a_j} \hat{P}_{b_j} \rho) \\ &= \text{tr}\left(\sum_{i \in I} \hat{P}_{a_j}^\dagger \hat{P}_{a_j} \hat{P}_{b_j} \rho\right) \\ &= \text{tr}(\mathbb{1} \hat{P}_{b_j} \rho). \end{aligned} \quad (3.10)$$

En la expresión (3.10) podemos eliminar a los operadores del observador A. Entonces las estadísticas en B son independientes de los resultados que A esté midiendo simultáneamente en otra región del espacio, por lo que la expresión (3.8) efectivamente garantiza que no haya transferencia instantánea de información, es decir, las predicciones estadísticas de los resultados de las mediciones no dependen de influencias externas

afuera del cono de luz del pasado de la observable en cuestión. Como la probabilidad de medir un resultado no se ve alterada por otra medición cuando tomamos el promedio sobre todos los posibles resultados de la primera medición, para la mecánica cuántica no tiene sentido formular las paradojas anteriores.

### 3.3. Otras consideraciones

¿Debemos entonces tomar la idea de no-señalización con velocidad más rápida que la luz como la expresión fundamental de la estructura causal de la física contemporánea? Si bien la formulación matemática es clara y nítida, ésta se relaciona únicamente con una estructura causal en lo que concierne a intervenciones externas o mediciones, y utiliza conceptos como el colapso *instantáneo* de la función de onda que no tienen una formulación covariante. Nos preguntamos entonces si el teorema de Bell y la no-señalización son suficientes para garantizar una *coexistencia pacífica* entre mecánica cuántica y relatividad o si hay una inconsistencia aparente.

Primero, notemos que la condición de conmutatividad local no se sigue como consecuencia de un conjunto de principios sino que se postula como el argumento matemático que representa el hecho de que no se puede intercambiar una señal entre dos puntos separados por un intervalo espacial y por lo tanto las mediciones en tales puntos no deben interferir entre sí. Algunos autores como Peres [32] consideran la no-señalización como una prueba de consistencia entre mecánica cuántica y relatividad, sin embargo podemos pensar que una prueba de un resultado de una teoría que fue construida para garantizar ese mismo resultado no es una prueba contundente [28]. Tal vez lo único que muestra la conmutatividad local es que el requerimiento de no-señalización se puede trabajar de forma consistente con el formalismo cuántico. La causalidad local de Bell hace explícita la incompatibilidad entre las probabilidades asociadas a una medición en mecánica cuántica y la estructura causal del espacio tiempo que impone la relatividad. Con respecto a esto Bell [6] menciona que:

“Para mi ese es el verdadero problema con la teoría cuántica: el aparente conflicto esencial entre cualquier formulación precisa de ésta y la relatividad. Es decir, tenemos una aparente incompatibilidad, al nivel más profundo, entre los dos pilares fundamentales de la física contemporánea...”

Incluso si se toma como válida la conmutatividad local, no necesariamente se garantiza esta *coexistencia pacífica* entre relatividad y mecánica cuántica y es necesario preguntarnos qué otras condiciones debemos pedir. A partir de las paradojas presentadas en la sección anterior consideramos que hay dos puntos importantes. Primero, esperaríamos que existiese una descripción de la evolución, en distintos sistemas de referencia, de un estado cuántico sobre el cual se efectúan mediciones en diferentes regiones espacialmente separadas. Además, si se realiza una transformación lineal de las coordenadas en el espacio-tiempo, las probabilidades asociadas a observables deben permanecer constantes. Por otro lado, en relación a la segunda paradoja, es importante

considerar si es posible o no hacer mediciones locales de observables que no violen la causalidad. Como veremos más adelante estas dos condiciones están relacionadas entre sí.

En mecánica cuántica las transformaciones entre sistemas de referencia se representan por medio de transformaciones unitarias. Se puede mostrar [36] que cualquier transformación de simetría, como es el caso de las transformaciones de Lorentz, tiene una representación unitaria. No abordaremos con detalle el tema de las representaciones de las transformaciones relativistas y únicamente consideraremos algunas generalidades que son necesarias para la discusión posterior. Si el lector desea obtener más información sobre este tema puede consultar [36].

Para encontrar las representaciones unitarias de las transformaciones de Lorentz se trabaja en un espacio de Hilbert de estados  $|p, \sigma\rangle$  donde  $p$  es el vector de 4-momento y  $\sigma$  representa grados de libertad discretos, como por ejemplo el espín. La forma específica de las representaciones dependerá de si se consideran partículas masivas o sin masa y el número de grados de libertad discretos que se tienen, pero en general la descripción del estado de una partícula en un nuevo sistema de referencia es de la forma

$$\hat{U}(\Lambda) |p, \sigma\rangle = N \sum_{\sigma'} D_{\sigma, \sigma'}(W) |\Lambda p, \sigma'\rangle. \quad (3.11)$$

En el nuevo marco de referencia el 4-momento de la partícula es  $\Lambda p$ . La rotación de Wigner está dada por  $W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)$ , donde  $L(p)$  representa una transformación de Lorentz que cambia el 4-momento de una partícula de  $k = (m, 0)^T$  a  $p = (p^0, \vec{p})^T$  y  $L^{-1}$  representa la transformación inversa y su acción cambia el espín de la partícula por medio de la matriz  $D_{\sigma, \sigma'}(W)$ . Se puede mostrar que las rotaciones de Wigner dejan invariante al vector  $k$ :

$$W(\Lambda, p)k = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)k = L^{-1}(\Lambda p) (\Lambda p) = k. \quad (3.12)$$

No profundizaremos en la forma específica de los coeficientes  $D_{\sigma, \sigma'}(W)$ , pero el lector puede consultar [36] si desea obtener más información sobre este tema. Para el siguiente desarrollo únicamente necesitaremos el resultado (3.12).

Es necesario pedir que las transformaciones sean unitarias ya que de esta forma se conservan las probabilidades relacionadas con los resultados experimentales:

$$\begin{aligned} P'(a) &= \text{tr}(\hat{P}'_a |\psi'\rangle \langle \psi'|) \\ &= \text{tr}([\hat{U}(\Lambda) \hat{P}_a \hat{U}^\dagger(\Lambda)] [\hat{U}(\Lambda) |\psi\rangle \langle \psi| \hat{U}^\dagger(\Lambda)]) \\ &= \text{tr}(\hat{P}_a |\psi\rangle \langle \psi|) \\ &= P(a). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sin embargo, pedir que las probabilidades sean invariantes para todo sistema de referencia no es una condición trivial ya que las reglas para calcularlas involucran una serie de operaciones matemáticas que corresponden a eventos con un orden temporal definido, y como ya se vio anteriormente, para observadores espacialmente separados

el orden temporal entre eventos puede cambiar. En el caso particular del experimento de E.P.R.B. la evolución del sistema parece ser completamente diferente para dos diferentes sistemas de referencia en movimiento relativo, y es precisamente por esto que surge la primera paradoja que mencionamos. Antes de continuar tratando este tema consideraremos la posibilidad de realizar mediciones causales de observables no-locales y esto nos permitirá responder algunas preguntas sobre la transformación relativista del estado de un sistema bipartita sobre el cuál se realizan mediciones.

### 3.4. Un esquema de mediciones causales

La instantaneidad del colapso de la función de onda puede ocasionar violaciones de la causalidad local al hacer mediciones, en particular al medir observables no-locales, tal como se observó en la sección anterior. En esta sección se dará una descripción de un esquema de medición en el cual por medio de interacciones locales es posible medir propiedades no-locales sin ocasionar violaciones a la causalidad.

Para dar una descripción del proceso de medición que sea consistente con la relatividad especial es importante considerar primero qué propiedades se pueden medir a un tiempo bien definido y de manera causalmente local. Para esto introducimos la siguiente definición:

**Condición 6** (Medición localmente causal). *Dadas dos regiones del espacio 1 y 2 espacialmente separadas entre sí, se dice que una medición es localmente causal si a un tiempo bien definido  $t_1$  se cumple que:*

- *Las probabilidades locales asociadas a la región 2 del espacio-tiempo al tiempo  $t_1 + \epsilon$  deben ser independientes de las condiciones en la región 1 al tiempo  $t_1 - \epsilon$ .*
- *Las probabilidades locales asociadas a la región 1 del espacio-tiempo al tiempo  $t_1 + \epsilon$  deben ser independientes de las condiciones en la región 2 al tiempo  $t_1 - \epsilon$ .*

*para una  $\epsilon$  suficientemente pequeña.*

Antes de continuar con los esquemas de mediciones causales, es necesario dar una descripción dinámica del proceso de medición en mecánica cuántica. En general, al hacer cualquier medición se considera una interacción con un aparato que está construido de forma tal que los valores asociados a sus grados de libertad estén correlacionados con una observable  $\mathcal{O}$  que se desee medir. Usualmente se describe al aparato con un único grado de libertad  $\hat{q}$  y un momento canónicamente conjugado  $\hat{\pi}$ . Para describir el proceso de medición se puede considerar una interacción impulsiva, es decir, que la interacción entre el sistema y el aparato sea muy fuerte y de corta duración, de tal forma que los cambios debidos a cualquier otra interacción se vuelven despreciables, y se puede aproximar al Hamiltoniano total del sistema y aparato únicamente por un Hamiltoniano de interacción, es decir  $H_{tot} \approx H_{int}$ . Es necesario además que el Hamiltoniano dependa de algún grado de libertad del aparato y de la observable para poder lograr un acoplamiento entre el sistema que se mide y el aparato. Finalmente, si se

elige un Hamiltoniano que sea función de cantidades que conmuten con el observable que se desea medir se evita que la interacción produzca cambios incontrolables en  $\hat{O}$ . De esta forma, dependiendo de la forma específica del Hamiltoniano, al medir una de las cantidades asociadas al aparato se obtiene información sobre el estado cuántico. Es importante notar que esta descripción introduce una línea divisoria entre sistemas cuánticos y aparatos clásicos, y la teoría no dice nada sobre cómo hacer tal separación. Sin embargo, hasta la fecha ésta es la descripción más comúnmente aceptada ya que ha permitido explicar las observaciones experimentales por lo que es la que consideraremos para intentar describir un proceso de medición causal.

Aharonov y Albert [1] consideran un dispositivo diseñado para medir el espín de una partícula por medio de una interacción local en un punto fijo  $x$  del espacio. La interacción entre el dispositivo y la partícula está descrita por el Hamiltoniano

$$H_{int} = g(t) \hat{q} \hat{\sigma}_z \quad (3.14)$$

donde  $g(t)$  representa un acoplamiento que es diferente de cero durante un intervalo corto de tiempo  $t_1 - \epsilon < t < t_1 + \epsilon$  mientras el aparato está funcionando y cuya integral  $G = \int_{t_1 - \epsilon}^{t_1 + \epsilon} g(t) dt$  es finita. La variable  $\hat{q}$  es una variable interna relacionada con el aparato de medición, y tiene un momento canónicamente conjugado  $\hat{\pi}$  tal que se cumple la relación de conmutación

$$[\hat{\pi}, \hat{q}] = -i, \quad (\hbar = 1). \quad (3.15)$$

Podemos interpretar a las variables  $\hat{q}$  y  $\hat{\pi}$  como la posición de una aguja en un medidor y el momento de esta respectivamente.

El Hamiltoniano descrito por (3.14) representa un experimento de no demolición ya que

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_z}{\partial t} = i[H, \hat{\sigma}_z] = 0. \quad (3.16)$$

La evolución de  $\hat{\pi}(t)$  está dada, en el esquema de Heisenberg, por

$$\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial t} = i[H, \hat{\pi}] = -g(t) \hat{\sigma}_z, \quad (3.17)$$

por lo que si consideramos un intervalo muy corto de tiempo entre  $t_1 - \epsilon$  y  $t_1 + \epsilon$  podemos aproximar a  $\hat{\pi}$  por una constante y se puede obtener el espín de la partícula como

$$\sigma_z = \frac{\pi(t < t_1 - \epsilon) - \pi(t > t_1 + \epsilon)}{G}. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, el esquema anterior nos permite medir el espín de una partícula. Ahora buscamos una combinación de dispositivos como el que acabamos de describir que nos permita medir el operador  $\hat{J}_z = \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)}$  por medio de interacciones locales pero sin medir directamente  $\hat{\sigma}_z^{(1)}$  ó  $\hat{\sigma}_z^{(2)}$ . Esto lo podemos lograr utilizando dos dispositivos que interactúan con el sistema por medio del Hamiltoniano

$$H_{int} = h_1 + h_2, \quad (3.19)$$

donde

$$h_i = g_i(t) \hat{q}^{(i)} \hat{\sigma}_z^{(i)}. \quad (3.20)$$

Si las interacciones de los dos dispositivos son simultáneas podemos suponer que  $g_1(t) = g_2(t)$ . A un tiempo  $t_0 < t_1 - \epsilon$  (considerando que  $t_1 - \epsilon$  es el tiempo en el cual inicia la interacción) se juntan ambos dispositivos y se preparan en un estado inicial que cumple con las siguientes características:

$$\hat{\pi}^{(1)}(t_0) + \hat{\pi}^{(2)}(t_0) = 0 \quad (3.21a)$$

$$\hat{q}^{(1)}(t_0) - \hat{q}^{(2)}(t_0) = 0. \quad (3.21b)$$

Posteriormente, se separan los dispositivos para que cada uno interactúe con una partícula. Una vez terminada la interacción se habrá medido  $\hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)}$  ya que

$$J_z = \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)} = \frac{-[\hat{\pi}^{(1)}(t > t_1 + \epsilon) + \hat{\pi}^{(2)}(t > t_1 + \epsilon)]}{G} \quad (3.22)$$

donde se usó la condición inicial (3.21b) para eliminar  $\hat{\pi}^{(1)}(t < t_1 - \epsilon) + \hat{\pi}^{(2)}(t < t_1 - \epsilon)$ . Notemos que las variables internas de los aparatos cumplen con las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}^{(1)} + \hat{\pi}^{(2)}, \hat{q}^{(1)} - \hat{q}^{(2)}] &= 0 \\ [\hat{\pi}^{(1)}, \hat{q}^{(1)} - \hat{q}^{(2)}] &\neq 0 \\ [\hat{\pi}^{(2)}, \hat{q}^{(1)} - \hat{q}^{(2)}] &\neq 0 \\ [\hat{\pi}^{(1)} - \hat{\pi}^{(2)}, \hat{q}^{(1)} - \hat{q}^{(2)}] &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

por lo que  $\hat{\pi}^{(1)} + \hat{\pi}^{(2)}$  y  $\hat{q}^{(1)} - \hat{q}^{(2)}$  están bien definidos simultáneamente, pero  $\hat{\pi}^{(1)}$  y  $\hat{\pi}^{(2)}$  por separado no están bien definidos, al igual que su diferencia. De esta forma basta con conocer  $\hat{\pi}^{(1)}(t > t_1 + \epsilon) + \hat{\pi}^{(2)}(t > t_1 + \epsilon)$  para obtener el eigenvalor  $J_z$  y no es necesario hacer una medición de  $\hat{\sigma}_z^{(1)}$ ,  $\hat{\sigma}_z^{(2)}$  ó  $\hat{\sigma}_z^{(1)} - \hat{\sigma}_z^{(2)}$ . Por lo tanto el esquema anterior permite conocer una propiedad no local por medio de interacciones puramente locales a un tiempo bien definido pues la diferencia  $\epsilon$  se puede hacer arbitrariamente pequeña.

Este esquema se puede extender fácilmente una vez más para hacer una medición que nos permita determinar si un sistema está en un eigenestado particular del operador  $\hat{J}^2$ , por ejemplo  $|\psi^-\rangle$ . Este estado queda determinado por las condiciones

$$\begin{aligned}
J_x &= \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)} = 0 \\
J_y &= \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)} = 0 \\
J_z &= \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)} = 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

por lo que podemos construir nuestros aparatos para que interactúen con las partículas por medio de

$$H_{int} = g(t) \left( \hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{q}_x^{(1)} + \hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{q}_y^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{q}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_x^{(2)} \hat{q}_x^{(2)} + \hat{\sigma}_y^{(2)} \hat{q}_y^{(2)} + \hat{\sigma}_z^{(2)} \hat{q}_z^{(2)} \right) \tag{3.25}$$

y con condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
\hat{q}^{(1)x} &= \hat{q}_x^{(2)}, \quad \hat{q}_y^{(1)} = \hat{q}_y^{(2)}, \quad \hat{q}_z^{(1)} = \hat{q}_z^{(2)} \\
\hat{\pi}_x^{(1)} &= -\hat{\pi}_x^{(2)}, \quad \hat{\pi}_y^{(1)} = -\hat{\pi}_y^{(2)}, \quad \hat{\pi}_z^{(1)} = -\hat{\pi}_z^{(2)}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Podemos reescribir (3.25) como

$$H_{int} = g(t) \frac{1}{2} \left[ \hat{J}_x(\hat{q}_x^{(1)} + \hat{q}_x^{(2)}) + \hat{J}_y(\hat{q}_y^{(1)} + \hat{q}_y^{(2)}) + \hat{J}_z(\hat{q}_z^{(1)} + \hat{q}_z^{(2)}) \right] \tag{3.27}$$

y entonces resulta claro que específicamente para el estado  $|\psi^-\rangle$  se cumple que

$$\left[ H_{int}, \hat{J}_x \right] = \left[ H_{int}, \hat{J}_y \right] = \left[ H_{int}, \hat{J}_z \right] = 0 \tag{3.28}$$

por lo que la medición permite verificar si se tiene al estado  $|\psi^-\rangle$ . Entonces, si se utiliza un procedimiento de este tipo no se obtienen violaciones a la causalidad local al hacer mediciones como ocurría en la segunda paradoja de la sección anterior. La diferencia esencial es que en este caso se realiza una medición para verificar un estado específico de  $\hat{J}^2$  y no una medición del operador como tal. Tenemos entonces efectivamente una medición localmente causal. Si la medición se lleva a cabo a un tiempo  $t_1$ , las probabilidades en  $x_2$  al tiempo  $t_1 + \epsilon$  son independientes de lo que ocurra en  $x_1$  al tiempo  $t_1 - \epsilon$ . Esto sin embargo únicamente es válido para el estado  $|\psi^-\rangle$  ya que fue necesario usar el hecho de que

$$\left[ \hat{J}_i, \hat{J}_k \right] |\psi^-\rangle = 0, \quad i, k = x, y, z, \tag{3.29}$$

porque

$$\hat{J}_i |\psi^-\rangle = 0. \tag{3.30}$$



### 3.5. Mediciones que ocurren en distintos sistemas de referencia

El esquema que presentamos en la sección anterior nos permite reconciliar algunas mediciones en mecánica cuántica con la causalidad local. Sin embargo, únicamente se consideró el caso en el que las mediciones sobre ambas partículas ocurren *simultáneamente*, por lo que la descripción únicamente es válida para un sistema de referencia particular al cual llamaremos  $\mathcal{S}$ . Motivados por la discusión de la sección 3.3, nos interesa ahora considerar una descripción del esquema anterior en un sistema de referencia tal que las mediciones en  $x^{(1)}$  y  $x^{(2)}$  ocurren en tiempos diferentes. Al considerar mediciones sobre el estado  $|\psi^-\rangle$  veremos que únicamente se puede asociar de manera consistente una sucesión covariante de estados en distintos sistemas de referencia antes o después de que ocurran ambas mediciones y no es posible encontrar una descripción covariante para el estado intermedio. En consecuencia, la noción de estado y las probabilidades solo tendrán sentido para un sistema de referencia dado.

Para describir dos mediciones que ocurren en tiempos diferentes resulta conveniente formular el esquema de medición de la sección anterior en términos de estados y operadores del sistema que se desea medir y del aparato de medición. De esta forma se podrá describir la evolución del sistema cuántico y el aparato en el esquema de interacción y se podrán considerar estados intermedios. Primero consideramos la medición del espín de una sola partícula, que ocurre durante  $t_1 - \epsilon < t < t_1 + \epsilon$ .

Inicialmente el sistema cuántico está descrito por

$$|\psi^0\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle \quad (3.31)$$

y el aparato por  $|A^0\rangle = |\pi^0\rangle$ , donde  $|\pi^0\rangle$  satisface

$$\hat{\pi}^0 |\pi^0\rangle = \pi^0 |\pi^0\rangle, \quad (3.32)$$

es decir, es un eigenestado del momento del aparato. El sistema completo está descrito por

$$|\Psi^0\rangle = |\psi^0\rangle \otimes |A^0\rangle = |\psi^0\rangle \otimes |\pi^0\rangle. \quad (3.33)$$

Dado que durante la medición podemos considerar al Hamiltoniano de interacción como el Hamiltoniano total del sistema, el estado del sistema después de la interacción está dado por

$$\begin{aligned} |\Psi(t > t_1 + \epsilon)\rangle &= e^{-iG\hat{q}\hat{\sigma}_z} |\psi^0\rangle \otimes |\pi^0\rangle \\ &= c_0 |0\rangle \otimes (e^{-iG\hat{q}} |\pi^0\rangle) + c_1 |1\rangle \otimes (+e^{iG\hat{q}} |\pi^0\rangle). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para dos variables canónicamente conjugadas, como lo son  $q$  y  $\pi$ , se cumple que

$$\begin{aligned}\hat{\pi}(e^{\pm i\alpha\hat{q}}|\pi\rangle) &= -i\frac{\partial}{\partial q}(e^{\pm i\alpha\hat{q}}|\pi\rangle) \\ &= (\pi \pm \alpha)e^{\pm i\alpha\hat{q}}|\pi\rangle\end{aligned}\quad (3.35)$$

por lo que podemos reescribir  $e^{\pm i\alpha\hat{q}}|\pi\rangle = |\pi \pm \alpha\rangle$ . Entonces el estado después de la interacción queda descrito por

$$|\Psi(t > t_1 + \epsilon)\rangle = c_0|0\rangle|\pi - G\rangle + c_1|1\rangle|\pi + G\rangle. \quad (3.36)$$

Si se mide el momento del aparato inmediatamente después de la interacción se medirá un valor  $\pi^0 - G$  con probabilidad  $|c_0|^2$  o un valor  $\pi^0 + G$  con probabilidad  $|c_1|^2$ ; identificamos a estos valores con el valor del espín  $+1$  y  $-1$  respectivamente. Podemos resumir estos dos resultados en la relación

$$\pi(t > t_1 + \epsilon) = \pi^0 - G\sigma_z. \quad (3.37)$$

Como  $\pi^0$  representa el momento del aparato antes de la medición, encontramos que

$$\sigma_z = \frac{\pi(t < t_1 - \epsilon) - \pi(t > t_1 + \epsilon)}{G}, \quad (3.38)$$

por lo que los resultados son los mismos que los que se obtuvieron en (3.18). La descripción de una medición del espín total de un sistema de dos partículas se puede hacer de manera análoga si se introduce un segundo aparato de medición con condiciones iniciales como en (3.21) y se escribe el estado del sistema cuántico en la base de espín total  $|J, M\rangle$ .

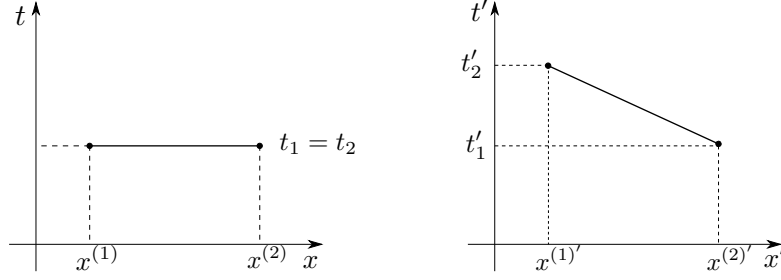
Lo que nos interesa es describir la evolución del estado  $|\psi^-\rangle$  en un sistema de referencia  $\mathcal{S}'$  que se mueve con velocidad constante  $v$  con respecto al sistema en el que ambas mediciones ocurren de manera simultánea. Podemos sin pérdida de generalidad suponer que éste se mueve en la dirección positiva del eje  $x$ , entonces las mediciones no ocurren de manera simultánea y están separadas por el intervalo temporal

$$\Delta t' = t'_2(x^{(2)}) - t'_1(x^{(1)}) = -\gamma v(x^{(2)} - x^{(1)}), \quad (3.39)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.40)$$

Si la velocidad con la que se alejan se acerca a  $c$ , la separación temporal entre las dos interacciones puede hacerse arbitrariamente grande de tal forma que  $|\Delta t'| \gg \epsilon$  y las interacciones no se traslapan en el tiempo. Entonces, para un observador  $\mathcal{O}'$  en  $\mathcal{S}'$  hay un intervalo intermedio  $t'_1 < t' < t'_2$  en el cual la medición de  $\hat{\pi}^{(2)}$  en  $x^{(2)}$  ya se llevó a cabo mientras que la medición de  $\hat{\pi}^{(1)}$  no ha ocurrido; este intervalo no existe para un observador  $\mathcal{O}$  en  $\mathcal{S}$ , tal como se observa en la figura 3.4.



**Figura 3.4:** Una medición vista en dos sistemas de referencia inerciales  $\mathcal{S}$  (izquierda) y  $\mathcal{S}'$  (derecha).

Para simplificar la descripción del estado en  $\mathcal{S}'$  resulta conveniente considerar a las dos partículas fijas en  $x^{(1)}$  y  $x^{(2)}$  respectivamente, de esta forma únicamente la función de onda en el grado de libertad del espín no se ve alterada por el cambio de sistema de referencia. Es por esto que en la descripción que se hará a continuación únicamente se hará una distinción explícita del tiempo  $t'$  en  $\mathcal{S}'$ .

El estado inicial es

$$|\Psi(t' < t'_1 - \epsilon')\rangle = |\psi^-\rangle \otimes |A^0\rangle, \quad (3.41)$$

y dado que se tienen dos partículas el estado del aparato  $|A\rangle$  está descrito por cuatro grados de libertad  $\hat{\pi}^{(1)}$ ,  $\hat{\pi}^{(2)}$  que cumplen relaciones similares a (3.32) y (3.35) y sus respectivas variables conjugadas. Para describir el estado inicial de  $|A^0\rangle$  en términos de las condiciones iniciales (3.21) conviene introducir el siguiente cambio de base

$$\begin{aligned} \hat{\pi} &= \hat{\pi}^{(1)} + \hat{\pi}^{(2)} \\ \hat{q} &= \frac{1}{2} (\hat{q}^{(1)} + \hat{q}^{(2)}) \\ \hat{\tilde{\pi}} &= \frac{1}{2} (\hat{\pi}^{(1)} - \hat{\pi}^{(2)}) \\ \hat{\tilde{q}} &= \hat{q}^{(1)} - \hat{q}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Se puede verificar que los pares de variables  $\pi$  y  $q$ , y  $\tilde{\pi}$  y  $\tilde{q}$  son canónicamente conjugados, y además la transformación  $(\hat{\pi}^{(1)}, \hat{\pi}^{(2)}; \hat{q}^{(1)}, \hat{q}^{(2)}) \rightarrow (\pi, \tilde{\pi}; q, \tilde{q})$  representa una transformación canónica. El estado inicial del aparato debe satisfacer

$$\hat{\pi} |A^0\rangle = 0, \text{ y } \hat{\tilde{q}} |A^0\rangle = 0, \quad (3.43)$$

por lo que lo podemos escribir en la representación de  $|\pi, \tilde{q}\rangle$  como

$$|A^0\rangle = |\pi = 0, \tilde{q} = 0\rangle. \quad (3.44)$$

En estado inicial del sistema completo es

$$\Psi(t' < t'_1 - \epsilon') = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle) \otimes |\pi = 0, \tilde{q} = 0\rangle. \quad (3.45)$$

El Hamiltoniano de interacción es en este caso el mismo que en (3.19) pero en este caso  $g_1(t') = g_2(t' - \Delta t')$  por lo que si  $t'_1 - \epsilon' < t' < t'_1 + \epsilon'$  el estado del sistema evoluciona a

$$\begin{aligned} |\Psi(t')\rangle &= e^{-iG\hat{q}^{(2)}\hat{\sigma}_z^{(2)}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle) \otimes |\pi = 0, \tilde{q} = 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{+iG\hat{q}^{(2)}} |01\rangle - e^{-iG\hat{q}^{(2)}} |10\rangle \right] \otimes |\pi = 0, \tilde{q} = 0\rangle. \end{aligned} \quad (3.46)$$

A continuación es conveniente utilizar nuevamente la representación  $|\pi^{(1)}, \pi^{(2)}\rangle$

$$|\pi = 0, \tilde{q} = 0\rangle = \int \int |\pi^{(1)}, \pi^{(2)}\rangle \langle \pi^{(1)}, \pi^{(2)} | \pi = 0, \tilde{q} = 0\rangle d\pi^{(1)} d\pi^{(2)} \quad (3.47)$$

donde se debe cumplir que

$$\langle \pi^{(1)}, \pi^{(2)} | \pi = 0, \tilde{q} = 0\rangle = 0 \text{ si } \pi^{(1)} + \pi^{(2)} \neq 0. \quad (3.48)$$

Utilizando la ecuación (3.35), la ecuación (3.46) queda de la forma

$$\begin{aligned} |\Psi(t')\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle \otimes \int \int |\pi^{(1)}, \pi^{(2)}\rangle \langle \pi^{(1)}, \pi^{(2)} + G | \pi = 0, \tilde{q} = 0\rangle d\pi^{(1)} d\pi^{(2)} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle \otimes \int \int |\pi^{(1)}, \pi^{(2)}\rangle \langle \pi^{(1)}, \pi^{(2)} - G | \pi = 0, \tilde{q} = 0\rangle d\pi^{(1)} d\pi^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

y cuando se observa un resultado de la medición  $\pi^{(2)}$  en el aparato, por la regla de selección (3.48)

$$|\Psi(t')\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |01\rangle |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)} + G, \pi^{(2)}\rangle - |10\rangle |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)} - G, \pi^{(2)}\rangle \right]. \quad (3.50)$$

El resultado (3.50) representa al estado inmediatamente después de que se realiza la medición de  $\hat{\pi}^{(2)}$ . Este es el estado del sistema de acuerdo a un observador  $\mathcal{O}'$  en  $\mathcal{S}'$  en el intervalo temporal  $t'_1 - \epsilon' < t' < t'_1 + \epsilon'$ . Es evidente que  $|\Psi(t')\rangle$  no es separable en un producto de estados de espín, es decir  $|\Psi(t')\rangle \neq |\psi_\sigma\rangle \otimes |A\rangle$ , por lo que éste representa a un estado enredado. En consecuencia, no es posible relacionar los estados en  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  por medio de una transformación de Lorentz, por lo que únicamente es posible dar una descripción consistente de lo que le ocurre al estado  $|\psi^-\rangle$  utilizando solamente estados de espín en el sistema de referencia en el que ambas interacciones ocurren simultáneamente. En este intervalo temporal el sistema tampoco se encuentra

en un eigenestado definido de  $J_i$ , debido a que los estados  $|01\rangle$  y  $|10\rangle$  representan superposiciones en la base de espín total  $|J, M\rangle$ .

Este resultado es generalizable fácilmente si en lugar de  $|\psi^-\rangle$  se utiliza un estado de la forma  $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |ij\rangle$ . El estado inmediatamente después de la interacción con el aparato de medición en  $x^{(2)}$  queda de la forma

$$\begin{aligned} |\Psi'(t)\rangle &= (c_{00} |00\rangle + c_{10} |01\rangle) \otimes |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)} - G, \pi^{(2)}\rangle \\ &\quad + (c_{10} |10\rangle + c_{11} |11\rangle) \otimes |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)} + G, \pi^{(2)}\rangle, \end{aligned} \quad (3.51)$$

lo cual nos indica que la única forma de que el estado intermedio sea separable en un producto de estados correspondientes al espín y al aparato es que el espín en el subespacio correspondiente a  $\hat{\sigma}_z^{(2)}$  esté bien definido, es decir, que no haya una superposición. Tal vez uno podría pensar que la no-separabilidad entre sistema y aparato, y en consecuencia la imposibilidad de describir un estado sobre el cual se realizan mediciones en distintos sistemas de referencia, es una propiedad asociada a sistemas enredados. La ecuación (3.51) nos indica que las restricciones que se necesitan imponer sobre  $|\psi\rangle$  para poder dar descripciones consistentes de la medición en diferentes sistemas de referencia son más fuertes que únicamente pedir separabilidad en el estado inicial de espines.

Regresemos ahora al estado  $|\Psi\rangle$  de (3.50). Al interactuar con el segundo detector  $\hat{\pi}^{(1)}$ , éste queda descrito por

$$\begin{aligned} |\Psi(t' > t'_2)\rangle &= \frac{e^{-iG\hat{q}^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(1)}}}{\sqrt{2}} \left[ |01\rangle |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)} + G, \pi^{(2)}\rangle - |10\rangle |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)} - G, \pi^{(2)}\rangle \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-iG\hat{q}^{(1)}} |01\rangle |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)} + G, \pi^{(2)}\rangle - e^{+iG\hat{q}^{(1)}} |10\rangle |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)} - G, \pi^{(2)}\rangle \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |01\rangle |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)} + G - G, \pi^{(2)}\rangle - |10\rangle |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)} - G + G, \pi^{(2)}\rangle \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle - |10\rangle] \otimes |\pi^{(1)} = -\pi^{(2)}, \pi^{(2)}\rangle, \end{aligned} \quad (3.52)$$

por lo que en este caso el estado cuántico descrito por el observador  $\mathcal{O}'$  corresponde a la transformación de Lorentz del estado descrito por  $\mathcal{O}$ , y como ambas partículas se encuentran en posiciones fijas, resulta ser el mismo en ambos sistemas de referencia. Además, si se mide el resultado de  $\hat{\pi}^{(1)}$  se puede calcular el espín total de  $|\psi\rangle$  de la misma forma que se hizo anteriormente:

$$J^z = \frac{\hat{\pi}^{(1)} + \hat{\pi}^{(2)}}{G}.$$

En resumen, en un sistema de referencia  $\mathcal{S}'$  donde las mediciones de  $\hat{\pi}^{(1)}$  y  $\hat{\pi}^{(2)}$  no ocurren de manera simultánea, una medición de  $\hat{\pi}^{(2)}$  ( $\hat{\pi}^{(1)}$ ) altera al sistema de

forma tal que el estado cuántico y el aparato quedan enredados por lo que no es posible relacionar los estados en  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  por medio de transformaciones de Lorentz en un intervalo temporal  $t'_1 < t' < t'_2$  y, en consecuencia, en este intervalo solo tiene sentido definir el estado para un observador en un sistema de referencia determinado. Al terminar la segunda interacción, y si no ocurren interacciones adicionales, el sistema cuántico regresa a su estado original y se obtienen los mismos resultados de la medición que en el sistema de referencia en el que las interacciones ocurren de manera simultánea. *No es posible dar una descripción covariante del vector de estado en un sistema que está sujeto a una serie de mediciones.*

La función de onda no es covariante, sin embargo los parámetros clásicos asociados a ésta si deben transformarse de manera covariante y las probabilidades deben dar las mismas predicciones para cualquier observador. El problema es que para el cálculo de las probabilidades se utiliza explícitamente la función de onda, y si no podemos relacionar a la función de onda en distintos sistemas de referencia por medio de transformaciones unitarias la invariancia de la probabilidad no parece trivial.

Esta situación se puede resolver una vez más utilizando la relación de conmutatividad local (3.8). Si los observables asociados a dos regiones espacialmente separadas conmutan, los resultados de las mediciones no dependen del orden en el que estas se llevaron a cabo. En el caso que discutimos anteriormente sobre las probabilidades asociadas al estado  $|\psi^-\rangle$ , si un observador mide en un tiempo fijo  $t_0$  que el espín  $\hat{\sigma}_z^{(1)}$  tiene un valor  $+1$ , cualquier medición espacialmente separada del espín  $\hat{\sigma}_z^{(2)}$  dará con certeza el resultado  $-1$ , sin importar si esta se realiza a un tiempo mayor o menor a  $t_0$ . Las predicciones también serán las mismas si se considera que el colapso de la función de onda ocurrió de manera instantánea en la hipersuperficie  $t = t_0$  ó en alguna otra hipersuperficie espacial  $t' = t_0$ . Parecería entonces que el colapso de la función de onda ocurre de manera instantánea para cualquier observador, por lo que si cada uno de ellos aplica el postulado del colapso instantáneo de la función de onda en su propio sistema de referencia siempre se derivan las mismas predicciones para las mediciones de observables locales. En el caso de observables no-locales como el que se consideró anteriormente, se obtienen las mismas predicciones independientemente de si las interacciones ocurren de manera simultánea o no siempre y cuando no se altere al sistema antes de que el proceso de medición se haya terminado.

Si bien esta solución se presenta de manera natural y permite dar una descripción consistente con la relatividad, únicamente nos proporciona una forma de utilizar de forma consistente la información que se obtiene al realizar una medición para predecir probabilidades de eventos en el futuro. Esta descripción no proporciona información sobre el significado físico del colapso de la función de onda y simplemente nos muestra una vez más que el formalismo cuántico se puede trabajar de manera consistente con relatividad especial.

Para finalizar el análisis de éste capítulo, podemos concluir que aún en las situaciones más complicadas ideadas por los físicos, no ha sido posible probar que las predicciones de la mecánica cuántica sean incorrectas ni que ocurran violaciones explícitas del

principio de relatividad. Ante las paradojas que se nos presentan sobre la estructura causal de la mecánica cuántica y la invariancia de las probabilidades, la conmutatividad local permite mostrar que las predicciones estadísticas de la mecánica cuántica son invariantes. Es cuestión de opiniones si se decide tomar esto como la prueba definitiva de la compatibilidad entre mecánica cuántica y relatividad. En este sentido, parece que la naturaleza obedece leyes que son no-locales, no-realistas o ambas, pero que sí siguen una estructura causal que permite trabajar con ellas en una forma tal que se evita llegar a contradicciones.

## Capítulo 4

# Sobre causalidad y complementariedad

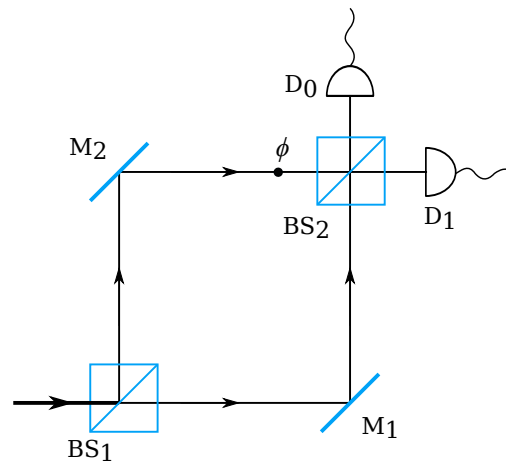
En los capítulos anteriores se vio que es imposible dar una descripción local de las correlaciones que ocurren en estados enredados en  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ , dado que no es posible asignar una estructura causal y local a la teoría. En este capítulo se estudiará una situación en la que se tiene una aparente violación de causalidad local, pero al hacer un análisis detallado se encuentra que la descripción cuántica sí es local y causal. En este caso, la causalidad está estrechamente relacionada con la descripción de los fenómenos físicos en términos de propiedades de onda y partícula.

### 4.1. Experimentos de elección retardada

El estudio del comportamiento de fotones individuales en un interferómetro tipo Mach-Zender nos proporciona otra buena ilustración de la idea de complementariedad en mecánica cuántica, donde también los conceptos de localidad y causalidad se vuelven relevantes. Clásicamente podemos describir al interferómetro de Mach-Zender como un arreglo de divisores de haz y espejos como el que se muestra en la figura 4.1. Primero, un haz de luz incidente es dividido por un divisor  $BS_1$ . Las dos componentes resultantes recorren diferentes caminos pero con la misma longitud de camino óptico y posteriormente son reflejadas y recombinadas por un segundo divisor de haz  $BS_2$ . Si ambas componentes llegan en fase se observará un haz igual al original pero si se induce una diferencia de fase  $\phi$  en uno de los caminos, se observará un patrón de interferencia. Este resultado se puede explicar en términos de la teoría electromagnética.

El experimento se vuelve más interesante si consideramos un solo fotón en el interferómetro y colocamos dos detectores  $D_0$  y  $D_1$  para identificar el camino que éste recorre. Si se utiliza una configuración abierta del interferómetro, es decir, si no se coloca el segundo divisor de haz  $BS_2$  como parte del arreglo experimental, se observa que únicamente uno de los dos detectores mide al fotón, cada uno con la misma probabilidad. Podemos relacionar cada evento de detección con un camino único por





**Figura 4.1:** Configuración de un interferómetro de Mach-Zender

el que viaja el fotón, tal como lo haría una partícula. Si colocamos el segundo divisor  $BS_2$  (configuración cerrada) también se activa solo un detector a la vez pero al repetir el experimento varias veces se observa que las distribuciones de intensidad en cada detector varían como funciones senoidales que dependen de la diferencia de fase  $\phi$ . La presencia de este patrón de interferencia muestra un comportamiento ondulatorio del fotón que parece indicar que éste recorrió los dos caminos dentro del interferómetro.

Para explicar este comportamiento podríamos pensar ingenuamente que al pasar por  $BS_1$  el fotón recibe algún tipo de “información oculta” sobre la configuración experimental que se eligió y de esta forma decide si toma un camino o los dos. Para verificar si esa interpretación es correcta Wheeler propuso un experimento que busca eliminar una conexión causal entre el arreglo experimental y el comportamiento del fotón [38]. En el experimento de Wheeler se decide si se inserta el segundo divisor de haz  $BS_2$  *después* de que el fotón ha pasado por  $BS_1$  y de esta forma se evita que el fotón “sepa” anticipadamente qué comportamiento debe adquirir o si debe viajar por uno o los dos caminos.

Una vez más, al igual que en el experimento de E.P.R.B., el comportamiento de los fotones alejado de nuestras ideas clásicas motiva a la realización de experimentos para verificar sus propiedades fundamentales. En 2007 Jacques [23] realizó un experimento de elección retardada con un interferómetro de Mach-Zender utilizando una fuente de fotones individuales, un modulador electro-óptico que permite cambiar la configuración del interferómetro y un generador de números aleatorios que determina la configuración. La diferencia de fase entre los dos brazos del interferómetro se introduce al rotar el ángulo de incidencia del segundo divisor de haz. Si se registran todas las cuentas de ambos detectores y posteriormente se separan los datos correspondientes a la configuración abierta y cerrada se encuentra que, efectivamente, el comportamiento del fotón en el interferómetro depende de la elección del tipo de medición, aún cuando ésta se haga con una separación de tipo espacial con respecto al momento en que el fotón

entra al interferómetro.

Este resultado podría resultar controversial con respecto a las ideas de localidad y causalidad. Si aceptamos que la presencia del segundo divisor de haz determina completamente el comportamiento del fotón y que el patrón de interferencia se produce porque el fotón recorre ambos brazos del interferómetro, nos enfrentamos una situación en la que, en las palabras de Wheeler [38], “*tenemos una extraña inversión del orden temporal. Si introducimos o quitamos el espejo ( $BS_2$ ) tenemos un efecto inevitable en lo que podemos decir con certeza es la historia del pasado del fotón*”. Si por otro lado consideramos que el fotón siempre recorre una sola trayectoria bien definida, para explicar el patrón de interferencia se podría introducir un efecto no-local que afecta las estadísticas de detección sin importar qué tan separados estén los brazos del interferómetro.

De acuerdo a la interpretación anterior, el experimento de elección retardada también pareciera indicar que las ideas de complementariedad de Bohr son correctas pues se observa ya sea un comportamiento ondulatorio o corpuscular del fotón, dependiendo de la configuración del interferómetro y nunca una combinación de estos. A continuación veremos que esta interpretación no es la más adecuada al hacer un análisis detallado de lo que le ocurre a cada fotón en el interferómetro.

#### 4.1.1. El interferómetro de Mach-Zender desde el punto de vista de la óptica cuántica

A continuación se dará una explicación de los resultados experimentales de los experimentos de elección retardada en términos de la evolución de los fotones, desde su entrada hasta su detección. Para estudiar la interacción de fotones individuales con los elementos ópticos de un interferómetro es necesario considerar la cuantización del campo electromagnético. Sólo se mencionaran algunos resultados necesarios para nuestro análisis, si el lector desea obtener una descripción más detallada sobre este tema puede consultar [25].

La cuantización del campo electromagnético, en resumen, se efectúa al remplazar al potencial vectorial  $\vec{A}$  por un operador  $\hat{A}$  al considerar al campo electromagnético como una superposición infinita de osciladores armónicos cuantizados. Esta transición resulta natural si se expande  $\vec{A}$  en términos de ondas planas de la siguiente forma

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_j = A_j \left[ a_j(t) \vec{\epsilon}_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} - a_j^*(t) \vec{\epsilon}_j^* e^{-i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} \right]. \quad (4.1)$$

Los campos eléctrico y magnético quedan también expresados en una expansión similar debido a las relaciones

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{d\vec{A}(\vec{r}, t)}{dt} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

A partir de (4.1) y (4.2) la energía total del campo electromagnético se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \\ &= \sum_j \frac{\hbar \omega_j}{2} (a_j a_j^* + a_j^* a_j). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Consideremos ahora el Hamiltoniano de un oscilador armónico cuántico

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2, \quad (4.4)$$

y remplacemos a los operadores de momento y posición  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$  por los operadores

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (4.5a)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (4.5b)$$

De esta forma se puede reescribir al Hamiltoniano como

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger) = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.6)$$

Los eigenestados  $|n\rangle$  de (4.6) cumplen

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (4.7)$$

y además se puede mostrar que los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  también cumplen con las relaciones

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (4.8a)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (4.8b)$$

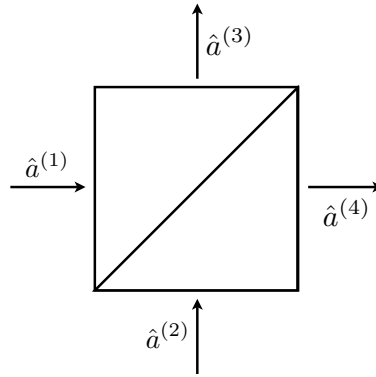
$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = n |n\rangle \quad (4.8c)$$

Al comparar los Hamiltonianos (4.3) y (4.6) resulta evidente la relación entre el oscilador armónico cuántico y el campo electromagnético. Este último se cuantiza al remplazar las amplitudes  $a_j$  y  $a_j^*$  en (4.1) por operadores de creación y aniquilación bosónicos  $\hat{a}_j$  y  $\hat{a}_j^\dagger$ .

En consecuencia, se asocia un oscilador armónico a cada modo del campo de radiación y los operadores  $\hat{a}_j$  y  $\hat{a}_j^\dagger$  respectivamente destruyen o crean un fotón con energía  $\hbar\omega_j$  y frecuencia  $\omega_j = ck_j$ , es por esto que usualmente al operador  $\hat{a}$  se le llama operador de aniquilación y a  $\hat{a}^\dagger$  operador de creación. Los eigenestados del operador  $\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j$

son de la forma  $|n_j\rangle$  y son conocidos como estados de número de fotón o estados de Fock, y representan estados de  $n$  fotones de frecuencia  $\omega_j$ . Es importante aquí enfatizar que en esta sección los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  se referirán a los estados del vacío y un fotón respectivamente, y no a los estados de la base computacional. La frecuencia no es un grado de libertad para el análisis que haremos posteriormente, por lo que no se utilizará el subíndice  $j$ .

Ya que tenemos las bases necesarias, consideremos el caso de un fotón que incide en un divisor de haz. La forma más general de representar lo que ocurre es considerar dos modos de entrada que interactúan e interfieren en el divisor de haz y dos en la salida como se muestra en la figura 4.2.



**Figura 4.2:** Representación de un divisor de haz en el que se muestran los operadores asociados al campo entrante y saliente.

En el esquema de Heisenberg, las relaciones entre los operadores del campo en la entrada y la salida están dadas por las condiciones de frontera del campo electromagnético en la interfase del divisor de haz que refleja y transmite parcialmente por lo que de manera análoga a un campo clásico se debe cumplir que

$$\hat{a}^{(3)} = R\hat{a}^{(1)} + T\hat{a}^{(2)}, \text{ y } \hat{a}^{(4)} = T\hat{a}^{(1)} + R\hat{a}^{(2)}. \quad (4.9)$$

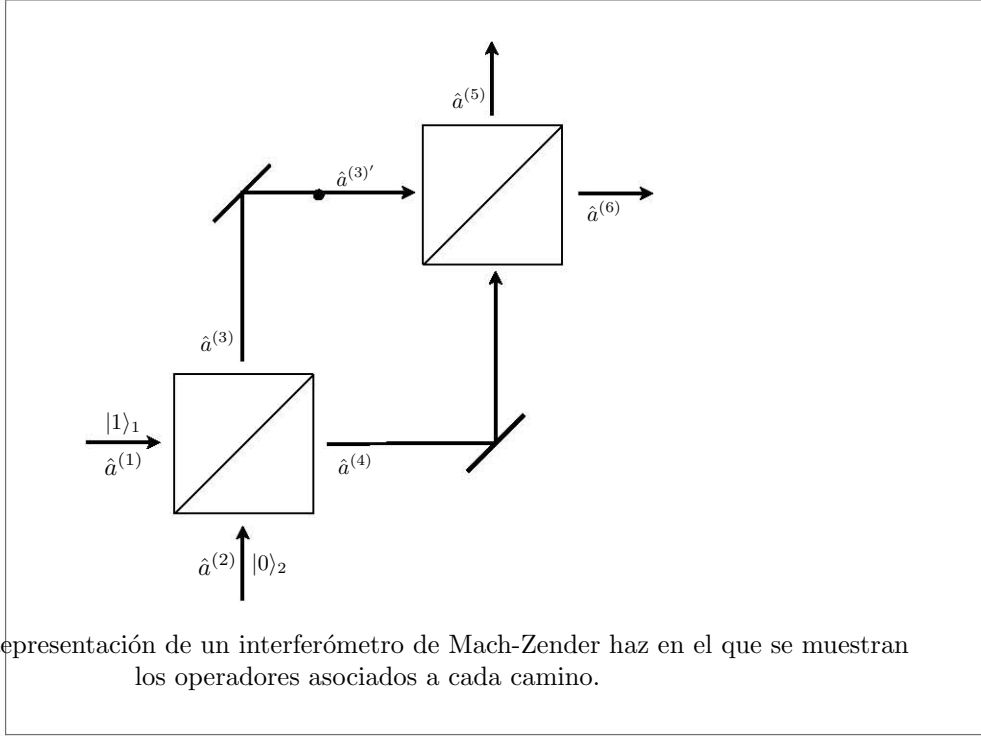
Como los modos de entrada y salida deben ser independientes, sus operadores de creación y aniquilación deben satisfacer las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{a}^{(n)}, \hat{a}^{(m)}] &= 0 \\ [\hat{a}^{(n)}, \hat{a}^{\dagger(m)}] &= \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

y los coeficientes de reflexión y transmisión deben satisfacer las relaciones

$$|R|^2 + |T|^2 = 1, \text{ y } RT^* + R^*T = 0. \quad (4.11)$$

Usualmente, dependiendo de cómo esté diseñado el divisor de haz, los haces transmitido y reflejado difieren en su fase por un factor de  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ . Entonces, para un divisor



**Figura 4.3:** Representación de un interferómetro de Mach-Zender haz en el que se muestran los operadores asociados a cada camino.

50:50 y asumiendo que el haz reflejado sufre un cambio de fase de  $\frac{\pi}{2}$  sus coeficientes son  $R = \frac{i}{\sqrt{2}}$  y  $T = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

En un interferómetro como el de la figura 4.3 cada espejo contribuye en un cambio de fase global de  $\frac{\pi}{2}$  que omitiremos ya que no afecta de ninguna forma las estadísticas de detección. Si posteriormente se introduce un cambio de fase de  $\phi$  en uno de los brazos del interferómetro entonces

$$\hat{a}^{(3')} = e^{-i\phi}\hat{a}^{(3)}. \quad (4.12)$$

Por último, si se introduce un segundo divisor de haz, de manera análoga a (4.9) los modos a la salida del interferómetro son

$$\hat{a}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i e^{-i\phi}\hat{a}^{(3)} + \hat{a}^{(4)} \right) \text{ y } \hat{a}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\phi}\hat{a}^{(3)} + i\hat{a}^{(4)} \right) \quad (4.13)$$

Para estudiar la evolución del estado de un fotón que incide en uno de los brazos del interferómetro resulta conveniente escribir las relaciones inversas de (4.9) y (4.13)

$$\hat{a}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\hat{a}^{(3)} + \hat{a}^{(4)}) \text{ y } \hat{a}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^{(3)} - i\hat{a}^{(4)}), \quad (4.14)$$

y

$$\hat{a}^{(3')} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\hat{a}^{(5)} + \hat{a}^{(6)}) \text{ y } \hat{a}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^{(5)} - i\hat{a}^{(6)}). \quad (4.15)$$

El estado inicial es

$$|1\rangle_1 |0\rangle_2 = \hat{a}^{\dagger(1)} |0\rangle_1 |0\rangle_2, \quad (4.16)$$

y a la salida del primer divisor de haz éste evoluciona de acuerdo con (4.14)

$$|1\rangle_1 |0\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i\hat{a}^{\dagger(3)} + \hat{a}^{\dagger(4)} \right) |0\rangle_3 |0\rangle_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_3 |1\rangle_4 + i |1\rangle_3 |0\rangle_4). \quad (4.17)$$

Después del cambio de fase, el estado del sistema es

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i\hat{a}^{\dagger(3)} + \hat{a}^{\dagger(4)} \right) |0\rangle_3 |0\rangle_4 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i e^{i\phi} \hat{a}^{\dagger(3)} + \hat{a}^{\dagger(4)} \right) |0\rangle_3 |0\rangle_4 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle_3 |1\rangle_4 + i e^{i\phi} |1\rangle_3 |0\rangle_4 \right) =: |\psi_{abierto}\rangle \end{aligned} \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) representa al estado del fotón cuando el interferómetro está abierto. Por otro lado, si se coloca el segundo divisor de haz el estado evoluciona de acuerdo a (4.15). Notemos que

$$\begin{aligned} |0\rangle_3 |1\rangle_4 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_5 |0\rangle_6 + i |0\rangle_5 |1\rangle_6) \\ |1\rangle_3 |0\rangle_4 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_5 |1\rangle_6 + i |1\rangle_5 |0\rangle_6), \end{aligned} \quad (4.19)$$

por lo que al sustituir (4.19) en (4.18) se obtiene

$$|1\rangle_1 |0\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{2} \left[ (1 + e^{i\phi}) |0\rangle_5 |1\rangle_6 + i(1 - e^{i\phi}) |1\rangle_5 |0\rangle_6 \right] =: |\psi_{cerrado}\rangle. \quad (4.20)$$

La ecuación (4.20) representa a el estado del fotón cuando el interferómetro está cerrado. Utilizando (4.18) y (4.20) podemos calcular la probabilidad de que  $D_0$  ó  $D_1$  detecten un fotón. Si la configuración del interferómetro es abierta

$$\begin{aligned} P(n_5 = 1, n_6 = 0) &= |{}_5\langle 1 | {}_6\langle 0 | |\psi_{abierto}\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ P(n_5 = 0, n_6 = 1) &= |{}_5\langle 0 | {}_6\langle 1 | |\psi_{abierto}\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

mientras que si es cerrada

$$\begin{aligned} P(n_5 = 1, n_6 = 0) &= |{}_5\langle 1 | {}_6\langle 0 | |\psi_{cerrado}\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos \phi) = \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ P(n_5 = 0, n_6 = 1) &= |{}_5\langle 0 | {}_6\langle 1 | |\psi_{cerrado}\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi) = \cos^2 \frac{\phi}{2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

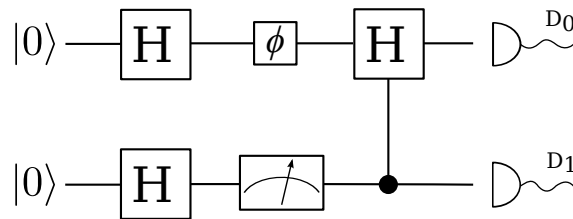
En la sección anterior, el hecho de que las estadísticas de detección dependan de la fase únicamente si se inserta el segundo divisor de haz  $BS_2$  nos llevó a concluir que las propiedades de onda y partícula son complementarias debido a que la medición de una misma cantidad (número de fotones) puede tener dos diferentes significados; se puede medir una propiedad de onda si el interferómetro está cerrado o una propiedad de partícula si está abierto, pero nunca ambas. Sin embargo, el análisis que acabamos de realizar más bien parece mostrarnos que las propiedades de onda y partícula en realidad son compatibles. La evolución del fotón es diferente si se inserta o no el segundo divisor de haz debido a que las relaciones entre los operadores del campo son diferentes.

Esto también nos da una explicación consistente de por qué el número de fotones en los detectores es constante cuando el interferómetro está abierto y varía con la fase cuando se inserta  $BS_2$ : no ocurre que la elección de la configuración del interferómetro determine si el fotón viaja por un brazo o los dos del interferómetro, solo cambia de manera local la evolución del fotón al incidir en  $BS_2$  y posteriormente al ser detectado.

En el contexto del principio de causalidad local de Bell, tenemos probabilidades condicionadas  $P(n_5 = a, n_6 = b | BS_2)$  donde  $BS_2$  representa si se inserta o no el segundo divisor de haz y está en el cono de luz del pasado de la medición. No se viola el principio de causalidad local. Ésta situación nos muestra es que en ciertas situaciones aparentemente paradójicas en la mecánica cuántica, un análisis detallado permite encontrar una explicación consistente con la localidad y causalidad.

## 4.2. Experimentos cuánticos de elección retardada

En el experimento de Wheeler se consideran las configuraciones del interferómetro como mutuamente excluyentes: se coloca o no el segundo divisor de haz. Sin embargo la mecánica cuántica nos da la posibilidad de considerar una superposición de ambas. Ionicioiu y Terno [22] proponen un circuito cuántico equivalente al experimento de Wheeler como el que se muestra en la siguiente imagen:



**Figura 4.4:** Circuito cuántico equivalente a un interferómetro de Mach-Zender

donde  $\phi$  representa una compuerta de cambio de fase y  $H$  el operador de Hadamard, y sus acciones sobre un estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^2$  están descritas por

$$\begin{aligned}\phi |0\rangle &= |0\rangle \\ \phi |1\rangle &= e^{i\phi} |1\rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}H |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\ H |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle).\end{aligned}$$

En este caso la acción del operador de Hadamard es equivalente a introducir un divisor de haz en el interferómetro pues transforma un estado inicial bien definido  $|0\rangle$  ó  $|1\rangle$  en una superposición en la que los dos estados son igualmente probables. Si se encuentra que el estado final está en el estado  $|0\rangle$  ó  $|1\rangle$  es equivalente a que el fotón recorra uno u otro brazo del interferómetro.

El estado de la parte inferior de la figura 4.4, llamado q-bit de control en el lenguaje de la teoría de la información cuántica, es inicialmente preparado en el estado  $|0\rangle$  y posteriormente evoluciona a  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ , y al medirse actúa como un generador de números aleatorios que determina si se aplica el segundo operador de Hadamard. La evolución del estado de la parte superior de la figura 4.4, antes de que actúe el segundo operador de Hadamard, está descrita por

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\phi} |1\rangle) =: |\psi_p\rangle. \quad (4.23)$$

Si se mide que el q-bit de control está en  $|0\rangle$  el operador de Hadamard no actúa y el interferómetro está abierto. El estado final queda entonces descrito por (4.23). Por otro lado, si se mide que el q-bit de control está en  $|1\rangle$  el operador de Hadamard actúa nuevamente sobre el estado  $|\psi_p\rangle$ , e el interferómetro está cerrado, y el estado final es entonces

$$\begin{aligned}H |\psi_p\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{2} + e^{i\phi} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{2} \right) \\ &= e^{i\frac{\phi}{2}} \left( \cos \frac{\phi}{2} |0\rangle - i \sin \frac{\phi}{2} |1\rangle \right) \\ &=: |\psi_o\rangle.\end{aligned} \quad (4.24)$$

En el circuito cuántico los operadores  $D_0 = |0\rangle\langle 0|$  y  $D_1 = |1\rangle\langle 1|$  son equivalentes a los detectores de fotones y las intensidades que se miden corresponden a los valores esperados de estos operadores. Si el interferómetro está abierto las intensidades



$$I_0^p(\phi) = \langle \psi_p | D_0 | \psi_p \rangle = \frac{1}{2} \quad (4.25a)$$

$$I_1^p(\phi) = \langle \psi_p | D_1 | \psi_p \rangle = \frac{1}{2} \quad (4.25b)$$

no dependen de la fase, lo cual equivale a las propiedades de partícula del estado como se vio en las secciones anteriores. Por otro lado, si el interferómetro está cerrado los valores de las intensidades

$$I_0^o(\phi) = \langle \psi_o | D_0 | \psi_o \rangle = \cos^2 \frac{\phi}{2} \quad (4.26a)$$

$$I_1^o(\phi) = \langle \psi_o | D_1 | \psi_o \rangle = \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (4.26b)$$

dependen de la diferencia de fase  $\phi$  lo cual equivale a un comportamiento ondulatorio.

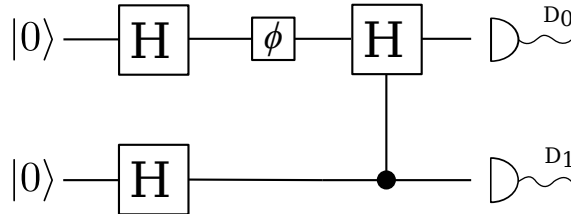
Es evidente entonces la analogía entre el circuito cuántico y el experimento de Wheeler pues se observan las mismas estadísticas de detección. Esto nos permite adoptar una definición más bien operacional de “onda” o “partícula” que representa la habilidad o inhabilidad de producir interferencia, y resulta natural la definición que se hizo anteriormente de los estados

$$|\psi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\phi} |1\rangle) \quad (4.27)$$

y

$$|\psi_o\rangle = e^{i\frac{\phi}{2}} \left( \cos \frac{\phi}{2} |0\rangle - i \sin \frac{\phi}{2} |1\rangle \right). \quad (4.28)$$

Este circuito presenta una característica adicional, pues es posible considerar una superposición de ambas configuraciones si se elimina el medidor del q-bit de control, quedando este en la superposición  $\frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ , como se muestra a continuación en 4.5



**Figura 4.5:** Experimento de elección retardada en un estado de superposición.

De esta forma, la evolución del estado inicial  $|\psi_0\rangle = |0\rangle |0\rangle$  está dada por

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle |0\rangle \rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_p\rangle |0\rangle + |\psi_o\rangle |1\rangle) \quad (4.29)$$

La ecuación (4.29) indica que el fotón de la parte superior de la figura 4.5 queda en una superposición de onda y partícula. Si se mide al bit de control en el estado  $|0\rangle$  ( $|1\rangle$ ) el interferómetro está abierto (cerrado) y se tiene un comportamiento de partícula (onda). Una consecuencia importante de introducir el elemento de control cuántico en el circuito es que es posible detectar al fotón antes de decidir la configuración del interferómetro. Esto representa una ventaja al intentar implementar experimentalmente el circuito pues el bit de control siempre está preparado antes de que el otro bit (fotón) llegue a la compuerta  $H$  (segundo divisor de haz) y no se requieren dispositivos ultrarápidos que cambien la configuración del interferómetro. La necesidad de hacer una postselección de q-bits para determinar la configuración del interferómetro también tiene implicaciones en nuestras ideas de complementariedad en mecánica cuántica como veremos a continuación.

Podemos en general preparar al bit de control en el estado  $\cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle$ , y en este caso el estado final del sistema es

$$|\psi'\rangle = \cos \alpha |\psi_p\rangle |0\rangle + \sin \alpha |\psi_o\rangle |1\rangle \quad (4.30)$$

y al trazar sobre el bit de control obtenemos la matriz de densidad reducida

$$\rho_{op} = \cos^2 \alpha |\psi_p\rangle \langle \psi_p| + \sin^2 \alpha |\psi_o\rangle \langle \psi_o| \quad (4.31)$$

que nos permite calcular la distribución de intensidad en uno de los detectores

$$\begin{aligned} I_0(\phi, \alpha) &= \text{tr}(D_0 \rho_{op}) \\ &= \cos^2 \alpha \text{tr}(D_0 |\psi_p\rangle \langle \psi_p|) + \sin^2 \alpha \text{tr}(D_0 |\psi_o\rangle \langle \psi_o|) \\ &= \cos^2 \alpha I_0^p(\phi) + \sin^2 \alpha I_0^o(\phi) \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \cos^2 \frac{\phi}{2} \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (4.32)$$

La ecuación (4.32) nos indica que el fotón muestra un comportamiento mixto entre onda y partícula, que además podemos variar de manera continua manipulando el parámetro libre  $\alpha$ . Sin embargo, si correlacionamos las intensidades de los detectores con las mediciones del bit de control se observa que el fotón tiene un único comportamiento, partícula si se mide  $|0\rangle$  en el bit de control y onda si se mide  $|1\rangle$ . Contrario a la opinión de Bohr, es posible observar las propiedades supuestamente complementarias de onda y partícula utilizando el mismo dispositivo experimental e inclusive, como mencionamos arriba, al introducir al parámetro  $\alpha$  podemos variar continuamente entre ambas propiedades.

El elemento de control cuántico en el experimento hace que no tenga mucho sentido la disyunción “onda o partícula” que se hace usualmente. Podemos por ejemplo hacer una medición del bit de control en la base  $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle)$  y el fotón queda en una superposición  $\cos \alpha |\psi_p\rangle \pm \sin \alpha |\psi_o\rangle$  que no tiene un análogo clásico. Este circuito ha sido implementado experimentalmente usando la técnica de resonancia magnética nuclear

[27] y se ha verificado que las estadísticas de detección predichas por las ecuaciones (4.26b), (4.25b) y (4.32) son correctas. Parece que después de todo de Broglie tenía razón al afirmar “onda y partícula”

#### 4.2.1. Elección retardada y variables ocultas

El experimento de la sección anterior parece dejar claro que la distinción entre onda y partícula en mecánica cuántica no es relevante. Para complementar este resultado, nos preguntamos entonces si es posible explicar el comportamiento del fotón (o cualquier otro sistema de dos niveles) en un experimento de elección retardada cuántica por medio de una teoría local de variables ocultas. En caso de ser posible la teoría debería satisfacer las siguientes dos condiciones:

1. Debe reproducir las estadísticas de detección que predice la mecánica cuántica.
2. Para un estado dado, la propiedad de “onda” o “partícula” debe ser intrínseca.

La probabilidad conjunta de medir al estado en  $a = 0, 1$  y al bit de control en  $b = 0, 1$  se puede calcular a partir de (4.30) y la podemos escribir en la base  $a \otimes b = (00, 01, 10, 11)$  como

$$p(a, b) = \left( \frac{1}{2} \cos^2 \alpha, \frac{1}{2} \cos^2 \alpha, \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\phi}{2}, \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\phi}{2} \right). \quad (4.33)$$

Supongamos que cada estado tiene un grado de libertad adicional  $\lambda$  que corresponde a un comportamiento de onda ( $\lambda = o$ ) o partícula ( $\lambda = p$ ). Cualquier distribución de probabilidad debe satisfacer las siguientes condiciones: para cualesquiera dos variables  $i, j$  se debe satisfacer que  $p(i) = \sum_j p(i, j)$  y  $p(i, j) = p(i|j)p(j)$ , por lo que cualquier modelo de variables ocultas debe cumplir que  $p(a, b) = \sum_\lambda p(a, b, \lambda)$  donde  $p(a, b, \lambda) = p(a|b, \lambda)p(b|\lambda)p(\lambda)$ , es decir,

$$p(a, b) = \sum_\lambda p(a|b, \lambda)p(b|\lambda)p(\lambda). \quad (4.34)$$

No conocemos la forma exacta de la distribución  $p(a, b, \lambda)$  pero podemos establecer una serie de constricciones a las distribuciones condicionales  $p(a|b, \lambda)$  en base al comportamiento esperado de las ondas y partículas en un interferómetro abierto o cerrado.

Como ya se vio, en un interferómetro abierto ( $b = 0$ ) las estadísticas de medición son

$$p(a|b = 0, \lambda = p) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (4.35)$$

mientras que para un interferómetro cerrado ( $b = 1$ ) se observa el patrón de interferencia

$$p(a|b = 1, \lambda = o) = (\cos^2 \frac{\phi}{2}, \sin^2 \frac{\phi}{2}). \quad (4.36)$$

Las otras dos probabilidades que describen el comportamiento de una onda ( $\lambda = o$ ) en un interferómetro abierto ( $b = 0$ ) y una partícula ( $\lambda = p$ ) en un interferómetro cerrado ( $b = 1$ ) son desconocidas, pero dado que deben cumplir una condición de normalización podemos escribirlas en términos de dos parámetros  $x$  y  $y$  como

$$p(a|b = 0, \lambda = o) = (x, 1 - x)$$

y

$$p(a|b = 1, \lambda = p) = (y, 1 - y).$$

La distribución de probabilidad del bit de control la podemos obtener a partir de (4.30)

$$p(b) = (\cos^2 \alpha, \sin^2 \alpha). \quad (4.37)$$

Es importante notar aquí que ésta se puede elegir libremente si se varía el parámetro  $\alpha$  al momento de preparar al sistema.

Para la variable oculta  $\lambda$  suponemos que una fuente emite fotones con comportamiento de onda o partícula con probabilidad  $f$  y  $1 - f$  respectivamente:

$$p(\lambda) = (f, 1 - f). \quad (4.38)$$

Finalmente, las probabilidades condicionales para el bit de control  $b$  y la variable oculta  $\lambda$  también se escriben en términos de parámetros desconocidos  $z$  y  $v$  como

$$\begin{aligned} p(b|\lambda = p) &= (z, 1 - z) \\ p(b|\lambda = o) &= (v, 1 - v). \end{aligned}$$

Estas deben satisfacer también, por consistencia, la condición  $p(b) = \sum_{\lambda} p(b|\lambda)p(\lambda)$ , es decir, usando (4.37)

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} p(b|\lambda)p(\lambda) &= (z, 1 - z)f + (v, 1 - v)(1 - f) \\ &= (\cos^2 \alpha, \sin^2 \alpha). \end{aligned} \quad (4.39)$$

A continuación veremos que no es posible asignar valores a los parámetros de las distribuciones de probabilidad que sean consistentes con la distribución de probabilidad (4.33) y nuestra intuición física.

Si sumamos las componentes de la primera entrada de la ecuación (4.39) obtenemos

$$z f + v(1 - f) - \cos^2 \alpha = 0 \quad (4.40)$$

A partir de las ecuaciones (4.33) y (4.34), y las constricciones (4.35) y (4.36), se obtienen las siguientes relaciones

$$v(1 - f)(x - \frac{1}{2}) = 0 \quad (4.41)$$

$$f(1 - z)(y - c \cos^2 \frac{\phi}{2}) = 0 \quad (4.42)$$

$$z f + v(1 - f) - \cos^2 \alpha = 0. \quad (4.43)$$

A partir de estas relaciones podemos imponer más restricciones a la distribución de variables ocultas si consideramos casos límites. Primero descartamos el caso  $v = 0$  y  $f = 0$  pues implican que  $\cos^2 \alpha = 0$ , y también  $f = 1$  y  $z = 1$  porque implican  $\cos^2 \alpha = 1$ , ya que el valor de  $\alpha$  lo escoge el experimentador de forma arbitraria.

Cinco de las soluciones no triviales restantes tienen  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \cos^2 \frac{\phi}{2}$  ó ambas. La solución  $x = \frac{1}{2}$  implica que una onda en un interferómetro abierto tiene estadísticas de detección

$$p(a|b = 0, \lambda = o) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

que corresponden a una partícula. La segunda solución  $y = \cos^2 \frac{\phi}{2}$  implica que una partícula en un interferómetro cerrado se comporta como una onda pues

$$p(a|b = 1, \lambda = p) = (\cos^2 \frac{\phi}{2}, \sin^2 \frac{\phi}{2}).$$

Ninguna de estas soluciones es físicamente aceptable ya que tanto ondas como partículas mostrarían un comportamiento inconsistente: ondas en interferómetros cerrados con estadísticas de detección de partículas, y partículas en interferómetros abiertos con patrones de interferencia.

La última solución restante es  $v = 0$ ,  $z = 1$  y  $f = \cos^2 \alpha$ , con  $x$  y  $y$  indeterminados. Esto implica que una fuente emite ondas y partículas con una distribución  $p(\lambda) = (\cos^2 \alpha, \sin^2 \alpha)$  idéntica a la distribución de probabilidad del bit de control  $p(b)$ , que elige el experimentador. Además, si la fuente emite un fotón con propiedades de partícula, siempre se mide que el bit de control está en el estado  $|0\rangle$  ya que  $p(b|\lambda = p) = (1, 0)$  por lo que el interferómetro está abierto. Por otro lado, cuando se emite un fotón con propiedades de onda siempre se encuentra que el interferómetro está cerrado pues  $p(b|\lambda = o) = (0, 1)$ , es decir, la variable oculta y el bit de control están perfectamente correlacionados.

Esta correlación indica que la variable oculta también determina completamente el valor del bit de control que en principio el experimentador eligió libremente. Para explicar esto habría que agrandar el modelo de variables ocultas para incluir también

el parámetro  $\alpha$ . Esta alternativa no es viable ya que nos llevaría a introducir cada vez más variables para compensar la conexión causal entre la preparación del bit de control y la fuente por lo que no sería posible separar al sistema que se desea estudiar del resto del mundo y la idea de libre albedrío pierde sentido. En consecuencia, si la variable  $\lambda$  determina el valor de  $b$ , entonces no es posible determinar  $\lambda$  al elegir  $\alpha$  y preparar  $b$ .

En la siguiente tabla se resumen todas las posibles soluciones a las ecuaciones (4.41), (4.42) y (4.43) y por qué no son físicamente viables

$v$	$f$	$x$	$z$	$y$	Qué ocurre
0	0	-	-	-	El valor de $\alpha$ no es arbitrario.
0	$\cos^2 \alpha$	-	1	-	Se necesita agrandar el modelo de variables ocultas.
0	-	-	$\frac{\cos^2 \alpha}{f}$	$\cos^2 \frac{\phi}{2}$	Una partícula en un interferómetro cerrado tiene estadísticas de onda.
-	1	-	1	-	El valor de $\alpha$ no es arbitrario.
-	1	-	$\cos^2 \alpha$	$\cos^2 \frac{\phi}{2}$	Una partícula en un interferómetro cerrado tiene estadísticas de onda.
$\cos^2 \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	-	-	Una onda en un interferómetro abierto tiene estadísticas de partícula.
-	$\frac{\cos^2 \alpha - v}{1-v}$	$\frac{1}{2}$	1	-	Una onda en un interferómetro abierto tiene estadísticas de partícula.
-	$\frac{\cos^2 \alpha - v}{1-v}$	$\frac{1}{2}$	-	$\cos^2 \frac{\phi}{2}$	Una onda (partícula) en un interferómetro abierto (cerrado) tiene estadísticas de partícula (onda).

**Tabla 4.1:** Posibles distribuciones de probabilidad en el modelo de variables ocultas.

La verificación experimental de las predicciones del experimento nos lleva a concluir que no es posible encontrar un modelo de variables ocultas que reproduzca los resultados de la mecánica cuántica y que al mismo tiempo sea consistente con nuestra intuición física. En este caso el fotón muestra un comportamiento cambiante entre onda y partícula lo cual más que corresponder a propiedades intrínsecas reflejan la forma en la que se estudia al fotón. La elección clásica entre onda y partícula se hace después de que el fotón fue detectado al correlacionar los datos del fotón con los del bit de control. En resumen, es posible observar propiedades complementarias utilizando un único dispositivo experimental que contenga un elemento en un estado de superposición, lo cual sugiere una reinterpretación del principio de complementariedad de Bohr ya que en este caso más que tener dispositivos complementarios se tienen datos experimentales complementarios.

Con respecto a la elección retardada y las mediciones, se podría argumentar que no ocurren en realidad violaciones a la causalidad entre eventos si se mide al fotón antes que al bit de control que decide la configuración experimental. No es hasta

que se correlacionan los datos que podemos hablar de un comportamiento de onda o partícula: el comportamiento está en la observación.

En resumen, podemos decir que aunque clásicamente se hace una distinción entre onda y partícula, la mecánica cuántica nos enseña en este caso que, así como no es posible interpretar la orientación del espín de una partícula como una propiedad intrínseca, tampoco podemos considerar las propiedades de onda o partícula como reales y excluyentes. En el caso de la radiación electromagnética, la mecánica cuántica permite unificar los conceptos de onda y partícula y ponerlos en el mismo plano conceptual, esto se hace especialmente evidente al considerar un interferómetro cuya configuración está en un estado de superposición. De esta forma es posible dar una descripción causal de los resultados de experimentos con fotones individuales en un interferómetro de Mach-Zender.

# Conclusiones

Las predicciones de la teoría cuántica hasta ahora han demostrado estar de acuerdo con los resultados experimentales, incluso aquellas que parecen completamente contra-intuitivas. Sin embargo, la situación conceptual no es tan clara en algunos aspectos, y algunas preguntas quedan abiertas.

En la primera parte de este trabajo nos preguntamos si puede considerarse como completa la descripción de la realidad física que nos proporciona la mecánica cuántica. Esta observación surge a partir de las correlaciones no-locales que muestran los sistemas enredados y del hecho de que al hacer una medición particular se elige describir las propiedades de un sistema en una base de estados particular, por lo que en general se pierde información sobre cualquier otro observable que no conmute. La mecánica cuántica únicamente permite asignar propiedades bien definidas a un sistema después de una medición, pero las correlaciones sugieren una conexión causal entre propiedades preexistentes, por lo que resulta natural considerar la posibilidad de complementar la mecánica cuántica por medio de parámetros adicionales que permitan asignar propiedades locales y realistas a los sistemas cuánticos.

La pregunta original de E.P.R. pudiese parecer casi de carácter filosófico, pero de acuerdo a los observaciones de Bell es posible determinar si la mecánica cuántica es una teoría completa en este sentido por medio de argumentos físicos y experimentos. El teorema de Bell muestra de forma clara y general que las ideas de localidad en las mediciones y la realidad intrínseca de las propiedades físicas son incompatibles con las predicciones de la mecánica cuántica. En todas las pruebas de las diferentes versiones del teorema que se presentaron se asumió de una u otra forma que los resultados locales existen, independientemente de si hay un observador que los mida o no. Esta aparentemente razonable suposición resulta inconsistente con las predicciones de la mecánica cuántica, por lo que su validez se debe verificar experimentalmente. Aun cuando las eficiencias de los detectores de que se dispone actualmente siguen siendo menores a lo deseado, todos los resultados experimentales hasta ahora indican que la mecánica cuántica no es una teoría incompleta en el sentido propuesto por E.P.R. En consecuencia, no es posible completar a la mecánica cuántica por medio de variables locales, y si la teoría llegase a ser completada por variables adicionales, éstas serían explícitamente no-locales.

A pesar de la violación experimental del teorema de Bell, la pregunta original sobre si la mecánica cuántica es la teoría más completa sigue abierta en otros sentidos,



pues ésta no explica la transición entre probabilidades y la obtención de un resultado determinado. El único concepto que está definido en mecánica cuántica en relación a la obtención de resultados es el de aparato de medición, el cual no siempre permite una descripción de la interacción entre sistemas microscópicos y variables macroscópicas e introduce una línea divisoria entre el dominio de la mecánica cuántica y el de la mecánica clásica.

Es posible por otro lado entender las violaciones del teorema de Bell como consecuencia de un resultado más general: la falta de causalidad local en la descripción cuántica. Resulta imposible describir las correlaciones entre los resultados de una medición en una forma tal que los parámetros de una medición solo afecten al estado de manera local, y las causas y efectos de éstas se propaguen con velocidad finita. El principio de causalidad local de Bell hace explícita la incompatibilidad entre la forma de relacionar probabilidades asociadas a las mediciones en mecánica cuántica y la estructura causal del espacio tiempo que impone la relatividad especial, por lo que se puede argumentar que la violación de esta condición implica una inconsistencia entre ambas teorías.

Se mostró que a pesar de la falta de causalidad local la mecánica cuántica sí tiene una estructura causal en relación a promedios de mediciones, si se postula una relación de conmutatividad local. Esta relación permite mostrar que los resultados de mediciones que se realizan en regiones separadas espacialmente son independientes del orden temporal en el que éstas se realicen y garantiza la imposibilidad de transmitir señales de manera instantánea. Podría decirse en este sentido que la mecánica cuántica es separable y causal en relación a promedios de los resultados de una medición. Se ha argumentado también que la no-señalización es una condición suficiente para garantizar la compatibilidad entre mecánica cuántica y relatividad, pero estrictamente la relatividad especial no habla sobre la transmisión de señales sino sobre la estructura del espacio-tiempo por lo que la compatibilidad entre ambas teorías no resulta del todo clara.

En relación a los sistemas sobre los cuales se realiza una serie de mediciones, se encontró que no existe una descripción covariante de la función de onda. Cuando se miden observables no-locales existe un intervalo temporal (que en principio puede ser arbitrariamente largo) durante el cual el sistema cuántico y el aparato están enredados; sin embargo, si no ocurren interacciones adicionales en este intervalo se obtienen siempre los mismos resultados independientemente del marco de referencia en el que se realicen las mediciones. Únicamente las propiedades cuánticas asociadas a parámetros clásicos, como son las probabilidades y los resultados que mide un aparato, tienen una descripción covariante, y esta condición es suficiente para evitar contradicciones entre los resultados de la mecánica cuántica y los de la relatividad.

Por último, se analizó la causalidad y localidad en relación a la dualidad entre la descripción ondulatoria y corpuscular de la mecánica cuántica. Al describir los resultados de un experimento en un interferómetro de Mach-Zender con fotones individuales es necesario, por un lado, considerar una descripción ondulatoria de los operadores de creación y aniquilación del campo pero también es necesario considerar interacciones

discretas con los detectores . De esta forma es posible dar una descripción localmente causal a un experimento de elección retardada que de otra forma nos llevaría a aparentes contradicciones. Este resultado se hizo aún más evidente al considerar los resultados de un experimento de elección retardada en superposición, en el que las estadísticas de medición correspondientes a ondas *y* partículas se presentan en una misma configuración experimental. Se mostró también que es imposible reproducir los resultados del experimento por medio de un modelo de variables ocultas en el cual ambas propiedades sean excluyentes. Pero la descripción cuántica de la radiación electromagnética y los resultados del experimento de elección retardada en el interferómetro de Mach-Zender son un caso particular. En otros casos más generales la parte ondulatoria de la descripción cuántica está relacionada no con una propiedad física sino con la función de onda y la amplitud de probabilidad, lo cual en muchas ocasiones lleva también a violaciones de causalidad local al momento de hacer una medición. Quedan entonces algunas preguntas abiertas en relación a la función de onda y su evolución. Por ejemplo, ¿por qué es necesario introducir dos postulados para describir su evolución, cómo es que uno de ellos deja de ser válido para darle lugar al otro, qué se entiende por colapso de la función de onda, y, sobre todo, por qué el observador debe tener un papel central en este proceso? Tal vez cuando se entiendan mejor estas cuestiones la descripción del mundo físico por medio de la mecánica cuántica sea más clara.

Previo al desarrollo de la mecánica cuántica se creía que el objetivo fundamental de la física, y de cualquier ciencia en general, era el de explicar como el mundo realmente *es* en nuestra ausencia. En concreto, la física debía proveer una explicación del por qué de las cosas por medio de representaciones matemáticas que permiten formar una imagen espacial y temporal de los fenómenos naturales. La mecánica cuántica rompe este esquema pues resulta incompatible con la idea de que las mediciones representan un proceso por medio del cual se obtiene información de una propiedad preexistente. Pero Bohr nos enseña que es incorrecto extender nuestra experiencia cotidiana a los sistemas microscópicos y que la mecánica cuántica únicamente trata sobre lo que *nosotros* podemos decir sobre el mundo. Es importante mencionar que este nuevo esquema ha resultado altamente exitoso y que a pesar de todos los esfuerzos de los físicos para encontrar los límites de validez de la mecánica cuántica, nadie ha podido siquiera mostrar que tales límites existen.

Para finalizar, solo nos queda agregar la siguiente observación de Bell:

Who do we think *we* are?



# Bibliografía

- [1] Aharonov, Y., Albert, D.Z., (1981). *Can we make sense out of the measurement process in relativistic quantum mechanics?*. Physical Review D, 24(2), 360-370.
- [2] Aharonov, Y., Rohrlich, D., (2005), *Quantum paradoxes*. Wiley-VCH.
- [3] Aspect A., et al., (1981). *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*. Phys. Rev. Lett., 47(7), 460.
- [4] Bell, J. S., (1964). *On the Einstein-Podolski-Rosen paradox*. Physics 1, 1(3), 195-200.
- [5] Bell, J. S., (1990). "La nouvelle cuisine" en *In Between Science and Technology*. Sarlemijn A., Kroes P., Elsevier Science Publishers.
- [6] Bell, J. S., (1987). *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*. Cambridge University Press.
- [7] Bengtsson I., Zyczkowski, K., (2008). *The Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press.
- [8] Bohm D. J., (1951). *Quantum Theory*, Prentice-Hall.
- [9] Bohm D. J. (1952). *A suggested interpretation of quantum mechanics in terms of "hidden variables"*. Phys. Rev., 85(2), 166-179.
- [10] Breuer H. P., Petruccione F., (1999). *State vector reduction in relativistic quantum mechanics: An introduction*. Lecture Notes in Physics, 526, 1-30.
- [11] Cavalcanti, E.G., (2007). *Reality, locality and all that: "experimental metaphysics" and the quantum foundations*. arXiv:quant-ph/0408105v3.
- [12] Clauser, J. F. et al., (1969). *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*. Physical Review Letters, 23(15), 880-884.
- [13] Clauser J. F., Horne M.A. (1974). *Experimental consequences of objective local theories*. Phys. Rev. D., 10(2), 526-535.
- [14] Cohen-Tannoudji, C. et al, (1978). *Quantum Mechanics: Volume 1*. Wiley.

- 
- [15] Einstein A., Podolski B., Rosen N., (1935). *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Phys Rev., 47(10), 777.
- [16] Ferrero, M. et al., (2011). *A Critical Discussion About The Methodology Of Quantum Theory*. arXiv:1107.3366v1
- [17] Genovese, M., (2005). *Research on hidden variable theories: A review of recent progresses*. Physics Reports, 413, 319–396.
- [18] Greenberger, D. M., (1989). “Going beyond Bell’s theorem” en *Bell’s Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, Kafatos, M.
- [19] Greenberger, D. M., (1990). *Bell’s theorem without inequalities*. Am. Journal of Physics, 58(12), 1131.1143.
- [20] Gisin, N., (1991). *Bell’s inequality holds for all non-product states*. Physics Letters A, 154(5), 5-6.
- [21] Heisenberg, W., (1930). *The physical principles of quantum mechanics*, The University of Chicago Press.
- [22] Ionicioiu, R., Terno, D., (2011). *Proposal for a Quantum Delayed-Choice Experiment*. Physical Review Letters, 107(23),1-5.
- [23] Jacques, V., et al., (2007). *Experimental Realization of Wheeler’s Delayed-Choice Gedanken Experiment*. Science 315(5814), 966–968.
- [24] Laloë, F., (2001). *Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems*. American Journal of Physics, 69(6), 655-701.
- [25] Loudon, R., (2000). *The Quantum Theory of Light*. Oxford Science Publications.
- [26] Lundeen, J. S. et al., (2011). *Direct measurement of the quantum wavefunction*. Nature, 474(7350), 188-91.
- [27] Roy, S.S., et al., (2011). *NMR implementation of Quantum Delayed-Choice Experiment*. Physical Review A, 85(2), 022109.
- [28] Peacock, K. A. (1991). *Peaceful coexistence or Armed Truce? Quantum Nonlocality and the Spacetime View of the World*. Tesis doctoral, Universidad de Toronto.
- [29] Peres, A., (1978). *Unperformed experiments have no results*. Am. Journal of Physics, 46(7), 745-747.
- [30] Peres, A., (2000). *Classical interventions in quantum systems. I. The measuring process*. Physical Review A, 61(2), 022116 1-9.
- [31] Peres, A., (2000). *Classical interventions in quantum systems. II. Relativistic invariance*. Physical Review A, 61(2), 022117 1-8.

- 
- [32] Peres, A., Terno, D., (2004). *Quantum information and relativity theory*. Reviews of Modern Physics, 76(1), 93-123.
- [33] Rowe, M. A., et al., (2001). *Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection*. Nature, 409(6822), 791-794.
- [34] Seevinck, M., (2010). *Can quantum theory and special relativity peacefully coexist?* arXiv:1010.3714.
- [35] Weihs, G. et al., (1998). *Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions*. Physical Review Letters, 81(23), 5039-5043.
- [36] Weinberg S. (1995). *The Quantum theory of Fields: Volume 1: Foundations*. Cambridge University Press.
- [37] Werner, R. F., (1989). *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*. Physical Review A, 40(8), 4277-4281.
- [38] Wheeler, J. A., (1983). "The Past and the Delayed-Choice Double-Slit Experiment" en *Mathematical Foundations of Quantum Theory*. editado por Marlow, A.R.
- [39] Zeilinger, A. et al., (2011). *Loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment via quantum steering*. arXiv:1111.0760v3
- [40] Zukowski, M. et al., (2002). *Do all pure entangled states violate Bell's inequalities for correlation functions?* Physical Review Letters, 88(21), 210402.