



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE
RIEMANN-FINSLER

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

JAIME SANTOS RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO



2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos alumno
Santos
Rodríguez
Jaime
56874326
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304555532
2. Datos del tutor
Dr.
Oscar Alfredo
Palmas
Velasco
3. Datos del sinodal 1
Dr.
Gabriel
Ruiz
Hernández
4. Datos del sinodal 2
Dr.
Eugenio
Garnica
Vigil
5. Datos del sinodal 3
Dr.
Antonio Fernando
Sarmiento
Galán
6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Francisco Manuel
Barrios
Paniagua
7. Datos del trabajo escrito
Introducción a la geometría de Riemann-Finsler.
88 p.
2012.

Índice general

1. Conceptos Preliminares	1
1.1. Haces vectoriales y conexiones	2
1.2. Propagaciones	5
2. Los espacios de Finsler	11
2.1. Normas de Minkowski	11
2.1.1. Algunas propiedades	15
2.2. Variedades de Finsler	18
2.2.1. Algunos ejemplos	20
2.2.2. El tensor fundamental y el tensor de Cartan	22
3. La conexión de Chern y el haz inducido	27
3.1. El haz inducido π^*TM	27
3.1.1. La conexión no lineal en $TM \setminus 0$	34
3.2. La conexión de Chern	35
3.2.1. La derivada covariante horizontal y vertical	40
4. Geodésicas y curvatura	43
4.1. Geodésicas	43
4.2. Métricas proyectivamente equivalentes	48
4.2.1. Geodésicas en la métrica de Funk	50
4.2.2. La métrica de Klein	57
4.3. Curvatura	63

4.3.1. Fórmulas para R y P	65
4.3.2. Curvatura riemanniana	66
4.3.3. Curvatura bandera	67
4.3.4. S-curvatura	72
5. Conclusiones	81
A. Algunos resultados de Álgebra Lineal	83
Bibliografía	91

Introducción

En 1854, Riemann escribió en *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*¹ acerca del desarrollo de un nuevo tipo de geometría. En este nuevo contexto se abarcaban no solamente el caso euclidiano sino también el esférico y el hiperbólico; además este trabajo daría pie a la generalización de la teoría geométrica de superficies a dimensiones mayores. Sin embargo el tipo de métrica usada en estos espacios no es del todo general, siempre se está restringido a una forma diferencial cuadrática.

En 1918 Paul Finsler, bajo la dirección de Carathéodory, publica su tesis doctoral y revive el interés en estudiar métricas más generales. La geometría de Riemann-Finsler tiene sus orígenes en uno de los 23 problemas planteados por Hilbert en 1900. El problema en cuestión es el último, el cual curiosamente no está formulado concretamente sino que solamente es un llamado al desarrollo del Cálculo de Variaciones. Uno de los temas más comunes en esta rama de las matemáticas es estudiar integrales de la forma

$$S := \int_a^b F \left(x^i, \frac{dx^i}{dt} \right) dt \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

con las x^i coordenadas del espacio. Como buscamos que la longitud de arco S sea independiente de la elección del parámetro requerimos que F cumpla

$$F(x^i, \lambda y^i) = \lambda F(x^i, y^i), \quad \lambda > 0. \quad (2)$$

¹Una traducción de este texto puede encontrarse en *Spivak, Michael. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol 2*

El estudio de la geometría de Riemann-Finsler puede llegar a parecer demasiado complejo, el lenguaje de tensores y formas diferenciales es usado frecuentemente. En este trabajo tratamos de encontrar el significado geométrico detrás de muchas de las definiciones que en principio pueden parecer demasiado abstractas. A lo largo del texto iremos trabajando con distintos ejemplos, mismo que serán usados constantemente, esto con el fin de aprovecharlos al máximo.

En el primer capítulo mencionaremos algunos conceptos preliminares que ayudarán a recordar ideas planteadas en los cursos de Geometría Diferencial y en su caso Riemanniana.

En el segundo capítulo definiremos primero los espacios de Minkowski, que tiene como análogo los espacios vectoriales con producto interior que usábamos en Geometría Riemanniana. Se darán ejemplos y se demostrarán algunos resultados útiles para cuando veamos variedades de Finsler.

El tercer capítulo comienza con una discusión sobre la necesidad de usar otro *haz* distinto a TM y se realiza la construcción pertinente. A continuación recordamos el papel de la conexión de *Levi-Civita* y construimos una conexión que se desempeñe de manera similar. En particular tendremos que para variedades riemannianas estas conexiones coinciden.

En el cuarto capítulo definimos las geodésicas de una variedad de Finsler y hacemos algunas observaciones acerca de ellas. Una vez que tengamos el concepto de geodésica veremos los distintos tipos de curvatura asociados a una variedad de Finsler, daremos nociones intuitivas de lo que estos tipos de curvatura no riemanniana describen de nuestras variedades diferenciables. Además trabajaremos con algunos ejemplos tanto de geodésicas como de curvatura.

Finalmente en el capítulo 5 incluimos algunas referencias a artículos que tratan algunos temas de geometría diferencial para variedades de Riemann-Finsler.

CAPÍTULO 1

Conceptos Preliminares

En este primer capítulo nos centraremos en sentar las bases de los distintos conceptos que usaremos a lo largo de esta tesis. Como estamos trabajando en espacios más generales a los que posiblemente el lector haya tenido oportunidad de estudiar, es necesario generalizar las construcciones con las que se contaba en cursos de Geometría Diferencial.

Sea M una n -variedad diferenciable. Denotemos, para cada $x \in M$, a $T_x M$ como el espacio tangente a x . Así mismo denotaremos al dual de $T_x M$ por $T_x^* M$ y se le llamará espacio cotangente.

Definimos $TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$ el haz tangente sobre M donde todo elemento en TM tiene la forma (x, v) con $x \in M$ y $v \in T_x M$. Se le dará además la proyección natural $p : TM \rightarrow M$ dada por $p(x, v) = x$.

Hacemos lo análogo con cada $T_x^* M$ y formamos el haz cotangente $T^* M$. Nótese que tanto TM como $T^* M$ son variedades diferenciables de dimensión $2n$.

1.1. Haces vectoriales y conexiones

A lo largo de esta sección usaremos haces en general, es decir, nuestros objetos no serán necesariamente espacios tangentes o sus duales.

Definición 1.1.1. *Un haz vectorial k -dimensional sobre una variedad diferenciable N es una terna (E, N, π) , tal que E es una variedad diferenciable, llamada espacio total, N , es llamada espacio base y $\pi : E \rightarrow N$ es una aplicación suprayectiva que cumple*

- $\forall p \in N$ se tiene que $\pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial de dimensión k . A $E_p := \pi^{-1}(p)$ se le llama la fibra de p .
- (Axioma de trivialidad local) $\forall p \in N \exists U$ vecindad de p para la cual existe un difeomorfismo

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k,$$

tal que para cada $p \in U$

$$\varphi_p := \varphi|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$$

sea un isomorfismo de espacios vectoriales.

En lo posible para simplificar la notación nos referiremos al haz (E, N, π) simplemente como E , a menos que sea necesario dar el espacio base o la proyección de manera explícita.

Definición 1.1.2. *Sea (E, N, π) un haz vectorial.*

- Una sección diferenciable del haz es una aplicación diferenciable $X : N \rightarrow E$ tal que $X(p) \in E_p$ para toda $p \in N$. $\Gamma(E)$ denotará al espacio de secciones diferenciables del haz.
- Un marco móvil de (E, N, π) es un conjunto de secciones $\{e_i\}_{i=1}^k$ del haz, definidas en un abierto $U \subset N$ tal que para toda $p \in U$, el conjunto $\{e_i(p)\}_{i=1}^k$ sea una base de la fibra E_p .

Otra forma de ver un haz vectorial es pensarlo como la unión de todas las fibras sobre el espacio base, es decir

$$E := \bigcup_{p \in N} E_p$$

De esta forma podemos tomar E_p^* el espacio dual a la fibra E_p , y con ello definir el haz dual como:

$$E^* := \bigcup_{p \in N} E_p^*,$$

lo denotamos como la terna (E^*, N, π) .

Definición 1.1.3. Sean N, M variedades diferenciables, (E, N, π) un haz vectorial. Si $f : M \rightarrow N$ es una función diferenciable entonces definimos el fibrado inducido

$$(f^*E, M, \pi^*),$$

donde $f^*E = \{(q, e) \in M \times E \mid f(q) = \pi(e)\}$ y π^* es la proyección natural sobre M . Con lo cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{f_\pi} & E \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

A la construcción anterior también se le conoce como el pullback de f .

Consideremos E y E' haces vectoriales sobre una misma variedad M , denotemos a las fibras correspondientes como E_p y E'_p , al ser espacios vectoriales podemos entonces considerar su producto tensorial $(E \otimes E')_p := E_p \otimes E'_p$. Con lo cual se sigue de forma natural que podemos definir el siguiente haz

$$E \otimes E' := \bigcup_{p \in M} E_p \otimes E'_p.$$

Las métricas con las que trabajaremos no son diferenciables, en general, en todo el haz tangente TM , para solucionarlo definiremos un tipo particular de haz que se define a continuación.

Definición 1.1.4. Sea (TM, M, ρ) el haz tangente a una variedad diferenciable M con $\rho : TM \rightarrow M$ proyección. Definimos el doble haz tangente como $(TTM, TM, d\rho)$, donde $d\rho : TTM \rightarrow TM$ denota a la diferencial de ρ .

Vale la pena detenernos un poco para analizar cómo se comportan las fibras de este nuevo haz. Consideremos $(x, y) \in TM$ el cual podemos describir como $(x, y^i \frac{\partial}{\partial x^i})$ con $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ un marco móvil. Entonces localmente escribimos $(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n)$ y tenemos el marco móvil $\{\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial y^j}\}$. Así un campo vectorial X en TM , es decir $X \in \Gamma(TTM)$, se puede escribir como:

$$X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X^{n+j} \frac{\partial}{\partial y^j}. \quad (1.1)$$

Definición 1.1.5. Sea (E, M, π) un haz vectorial sobre M . Una conexión lineal ∇ en E es una transformación

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*M)$$

tal que cumple:

1. $\nabla s(fX + X', \theta) = f\nabla s(X, \theta) + \nabla s(X', \theta)$
2. $\nabla(\lambda s + s') = \lambda\nabla s + \nabla s'$
3. (Regla de Leibniz) $(\nabla(fs))(X, \theta) = f\nabla s(X, \theta) + (df \otimes s)(X, \theta)$.

Para todo $s, s' \in \Gamma(E)$, $X, X' \in \Gamma(TM)$, $\theta \in \Gamma(E^*)$, $f \in C^\infty(M)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lema 1.1.6. Sea (E, M, π) un haz vectorial sobre M , ∇ una conexión lineal. Para $U \subseteq M$ abierto consideremos un marco móvil $\{e_j\}$ entonces existen $\omega_j^k \in \Gamma(T^*M)$ tales que

$$\nabla e_j = \omega_j^k \otimes e_k. \quad (1.2)$$

Demostración. Una demostración de este lema se encuentra en [11]. \square

Otro concepto que es necesario definir es el de derivada covariante para una conexión en un haz.

Definición 1.1.7. Sea ∇ una conexión en un haz vectorial E . Para $X \in \Gamma(TM)$ definimos la transformación $\nabla_X : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ como

$$\nabla_X s := (\nabla s)(X), \text{ para } s \in \Gamma(E).$$

A ∇_X se le llamará la derivada covariante en la dirección de X .

Una vez definido el concepto de derivada covariante de una conexión consideremos (E, N, π) un haz vectorial, ∇ una conexión. Sea $x \in N$, $U \subset N$ un abierto que contenga a x y $\{e_i\}$ un marco móvil. Entonces

$$\nabla_{e_i} e_j = (\nabla e_j)(e_i) = (\omega_j^k \otimes e_k)(e_i) = \omega_j^k(e_i) e_k = \Gamma_{ij}^k e_k$$

por la ecuación (1.2).

Definición 1.1.8. Sean (E, M, π) un haz vectorial sobre M , ∇ una conexión lineal y T un campo tensorial de rango $(1,1)$ en la variedad M . $T = T_i^j e_j \otimes \theta^i \in \Gamma(E \otimes E^*)$. Donde $\{e_j\}$ y $\{\theta^i\}$ son marcos móviles en E y E^* respectivamente. Dado $X \in \Gamma(TM)$ definimos la derivada covariante de T en la dirección de X como

$$\nabla_X T := (\nabla_X T)_i^j e_j \otimes \theta^i, \quad (1.3)$$

donde $(\nabla_X T)_i^j := dT_i^j + T_i^k \omega_k^j - T_k^j \omega_i^k$.

1.2. Propagaciones

Debido a que trabajaremos en haces vectoriales más generales no siempre podremos usar construcciones totalmente análogas a las hechas en variedades riemannianas. Por ejemplo para definir geodésicas usaremos los conceptos de *ecuación diferencial de segundo orden* y basándonos en ésta definiremos el concepto de *propagación*. Para ello trabajaremos con un tipo particular de campo vectorial que representará un sistema de ecuaciones diferenciales de gran utilidad.

Consideremos una curva suave $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, luego podemos hablar de su derivada respecto a t .

$$\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M,$$

y gracias a esto podemos definir la *curva de velocidades*

$$\dot{\gamma} : (a, b) \rightarrow TM. \quad (1.4)$$

Nótese que dada la ecuación (1.4), es fácil ver que tenemos una curva suave en TM .

Entonces repitiendo el argumento anterior podemos definir:

$$\ddot{\gamma} : (a, b) \rightarrow TTM, \quad (1.5)$$

donde TTM es el haz tangente de la variedad TM .

Definición 1.2.1. Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en una variedad M en un campo vectorial en TM , es decir, $\xi \in \Gamma(TTM)$. Con la propiedad de que toda curva integral β de ξ sea la curva de velocidades de su proyección sobre M , en otras palabras, que se cumpla $\beta = \dot{\gamma}$ para $\gamma = \pi \circ \beta$.

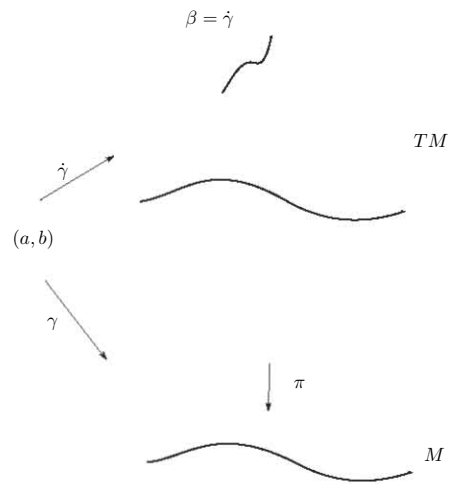
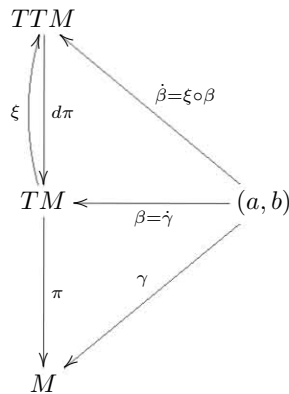


Figura 1.1: Curva de velocidades.

Definición 1.2.2. A una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ se le llama curva integral de la ec. dif. de segundo orden ξ en M si $\dot{\gamma}$ es curva integral de ξ en TM , en otras palabras si para toda t se tiene que $\ddot{\gamma}(t) = \xi(\dot{\gamma}(t))$.



Entonces como las curvas integrales de ξ en TM y en M se obtienen una de otra mutuamente $\gamma = \pi \circ \beta$, $\beta = \dot{\gamma}$, las consideramos como formas distintas

de un mismo objeto.

Definición 1.2.3 (Propagación). *Sea M una variedad diferenciable. Una propagación¹ G en M es un campo vectorial en TM de la forma*

$$G(x, y) := y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (1.6)$$

con $G^i = G^i(x, y)$ funciones que localmente cumplen

$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y.)$$

Ahora si consideramos una curva diferenciable $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ con coordenadas $\gamma^i(t)$, por (1.4) la curva de velocidades $\dot{\gamma}$ tiene coordenadas $(\gamma^i(t), \dot{\gamma}^i(t))$. Si $\dot{\gamma}$ es curva integral de la propagación G se tiene:

$$\ddot{\gamma} = G(\dot{\gamma}),$$

es decir las coordenadas satisfacen

$$\ddot{\gamma}^i(t) + 2G^i(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0. \quad (1.7)$$

Definición 1.2.4 (geodésica de una propagación). *Sea M una variedad diferenciable y G una propagación. Decimos que una curva diferenciable $\gamma(t) : (a, b) \rightarrow M$ es una geodésica de G si γ es una curva integral de la propagación.*

Veamos que la definición de curva geodésica para propagaciones (1.2.4) es equivalente a la definición usual de geodésica que se tiene para variedades riemannianas. Sea (M, g) variedad riemanniana, el haz tangente TM y una conexión ∇ en TM .

Definición 1.2.5. *Sean (M, g) una variedad riemanniana y $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ una curva diferenciable. Decimos que γ es una geodésica de M si*

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0, \quad \forall t \in (a, b). \quad (1.8)$$

Así si la curva $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ tiene coordenadas $\gamma^i(t)$, por (1.4) su curva de velocidades es $\dot{\gamma} : (a, b) \rightarrow TM$ con coordenadas $\dot{\gamma}^i(t)$. Con lo cual la ecuación de la definición anterior queda expresada como:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \dot{\gamma}^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \dot{\gamma}$$

¹En la literatura en inglés el término usado es *spray*.

$$= \dot{\gamma}^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \dot{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial \dot{\gamma}^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

como por definición $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, con Γ_{jk}^i símbolo de Christoffel. Luego $\dot{\gamma}^i \frac{\partial \dot{\gamma}^i}{\partial x^i} = \ddot{\gamma}^i$

$$= (\ddot{\gamma}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k) \frac{\partial}{\partial x^i} = 0.$$

De donde se obtiene que:

$$\ddot{\gamma}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0. \quad (1.9)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación geodésica.

Entonces dada una variedad riemanniana (M, g) podemos definir una propagación G en TM tomando $G^i(x, y) = \Gamma_{jk}^i y^j y^k$. Así por la ecuación (1.7) una curva γ es geodésica de G si sus coordenadas cumplen:

$$\ddot{\gamma}^i(t) + 2G^i(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0,$$

lo cual al sustituir tenemos:

$$\ddot{\gamma}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0,$$

que es equivalente a la definición usual de una geodésica para variedades riemannianas.

CAPÍTULO 2

Los espacios de Finsler

En este capítulo introduciremos las nociones básicas de espacios de Minkowski y variedades de Finsler, mostrando sus análogos a las vistas en geometría Riemanniana.

En el primer caso, intuitivamente, podemos decir que se trata de espacios en los que la forma de medir depende de la dirección que se esté considerando. En el segundo tenemos que se trata de variedades diferenciables para las cuales en lugar de tener un espacio vectorial con un producto interior, en cada punto, tenemos otro espacio un poco distinto, un espacio de Minkowski.

2.1. Normas de Minkowski

Definición 2.1.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{R} . Una función $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma de Minkowski si cumple con las siguientes propiedades:*

1. $F(y) \geq 0$, $\forall y \in V$ y $F(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$
2. $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\forall y \in V$ y $\lambda > 0$
3. F es C^∞ en $V \setminus \{0\}$

4. Para todo $y \in V$, el siguiente funcional bilineal simétrico es positivo definido

$$(g_{ij})(y) := \left(\left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j} \right) (y)$$

Vale la pena precisar el último inciso. Si tomamos $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ y $\{b_i\}$ una base de V . Podemos pensar a $F(y) = F(y^i b_i)$ como una función de $(y^i) \in \mathbb{R}^n$ y con ello:

$$[F^2]_{y^i y^j}(y),$$

denota a las parciales de F^2 respecto a los y^i y y^j . Solamente falta mostrar que este último inciso no depende de la elección de la base.

Sean $\{b_i\}$, $\{c_i\} \subset V$ bases de V . Luego es claro que $b_i = r_i^j c_j$ con lo cual si tomamos $y \in V \Rightarrow y = y^i b_i = y^i r_i^j c_j = \tilde{y}^j c_j$. Entonces si

$$(g_{ij})(y) := \left(\left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j} \right) (y), \quad (\tilde{g}_{ij})(y) := \left(\left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{\tilde{y}^i \tilde{y}^j} \right) (y)$$

son las matrices definidas por las bases $\{b_i\}$ y $\{c_i\}$ tenemos que:

$$(g_{ij}) = A^t (\tilde{g}_{ij}) A,$$

donde la matriz $A = (r_i^j)$ es la matriz del cambio de coordenadas. Por lo tanto si tomamos un vector $(y^i) \in \mathbb{R}^n$,

$$(y^i)^t (g_{ij})(y^i) = (y^i)^t A^t (\tilde{g}_{ij}) A (y^i) = ((y^i)^t A^t) (\tilde{g}_{ij}) (A(y^i)) = (\tilde{y}^i)^t (\tilde{g}_{ij})(\tilde{y}^i).$$

De donde se sigue que el funcional es positivo definido sin importar qué base se tome.

Definición 2.1.2. Dada una norma de Minkowski F en V , definimos

$$S_F := \{y \in V | F(y) = 1\},$$

una hipersuperficie cerrada con centro en el origen, la cual es difeomorfa a la esfera usual $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. A S_F le llamaremos la indicatriz de F .

Veamos ahora un ejemplo de norma de Minkowski. Consideremos en \mathbb{R}^2 la siguiente función

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \sqrt{\sqrt{x^4 + y^4} + \epsilon(x^2 + y^2)},$$

con $\epsilon > 0$.

Veamos que F es una norma de Minkowski. Primero notemos que:

$$\sqrt{x^4 + y^4} \geq 0, \quad \epsilon(x^2 + y^2) \geq 0$$

de donde se sigue que $F(x, y) \geq 0$. Además es claro que $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$. Sea $\lambda > 0$, entonces

$$\begin{aligned} F(\lambda(x, y)) &= \sqrt{\sqrt{(\lambda x)^4 + (\lambda y)^4} + \epsilon((\lambda x)^2 + (\lambda y)^2)} = \\ &= \sqrt{\lambda^2 \sqrt{x^4 + y^4} + \lambda^2 \epsilon(x^2 + y^2)} = \lambda F(x, y). \end{aligned}$$

Calculemos las entradas de la matriz g , para $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ se tiene que

$$\frac{F^2}{2} = \frac{\sqrt{x^4 + y^4} + \epsilon(x^2 + y^2)}{2}.$$

Ahora calculemos las derivadas:

$$\left(\frac{1}{2}F^2\right)_x = \frac{1}{2} \left(\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + y^4}} + 2\epsilon x \right) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^4}} + \epsilon x.$$

Análogamente

$$\left(\frac{1}{2}F^2\right)_y = \frac{y^3}{\sqrt{x^4 + y^4}} + \epsilon y.$$

Luego

$$\begin{aligned} g_{xx} &= \left(\frac{1}{2}F^2\right)_{xx} = \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}\right)_x + (\epsilon x)_x \\ &= x^3 \left(\frac{-4x^3}{2(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}} \right) + \frac{3x^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} + \epsilon = \frac{x^6 + 3x^2y^4}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}} + \epsilon. \end{aligned}$$

$$g_{yy} = \left(\frac{1}{2}F^2\right)_{yy} = \frac{y^6 + 3y^2x^4}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}} + \epsilon.$$

$$g_{xy} = \left(\frac{1}{2}F^2\right)_{xy} = \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}\right)_y + (\epsilon x)_y = x^3 \left(\frac{-4y^3}{2(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}} \right)$$

$$= \frac{-2x^3y^3}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

Es claro que $g_{xy} = g_{yx}$. Sea $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, queremos ver que

$$(u, v) \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0.$$

Pero esto es equivalente a ver

$$u^2g_{xx} + 2uv g_{xy} + v^2g_{yy} \geq 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} & u^2 \left(\frac{x^6 + 3x^2y^4}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}} + \epsilon \right) + 2uv \left(\frac{-2x^3y^3}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}} \right) \\ & + v^2 \left(\frac{y^6 + 3y^2x^4}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}} + \epsilon \right). \end{aligned}$$

Agrupando apropiadamente obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{(ux^3 - vy^3)^2 - 2uvx^3y^3 + 3u^2x^2y^4 + 3v^2y^2x^4}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}} + \epsilon(u^2 + v^2) \\ & = \frac{(ux^3 - vy^3)^2 + x^2y^2(3u^2y^2 - 2uvxy + 3v^2x^2)}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}} + \epsilon(u^2 + v^2) \\ & = \frac{(ux^3 - vy^3)^2 + x^2y^2(2(u^2y^2 + v^2x^2) + (uy - vx)^2)}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^4 + y^4}} + \epsilon(u^2 + v^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que la matriz es definida positiva.

2.1.1. Algunas propiedades

Dado que en este trabajo usaremos normas de Minkowski definidas sobre espacios vectoriales de dimensión finita, las siguientes propiedades serán enunciadas para normas de Minkowski en \mathbb{R}^n .

Teorema 2.1.3 (Euler). *Sea una función $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que sea diferenciable fuera del origen. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- H es homogénea positiva de grado r . Es decir,

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y) \quad \forall \lambda > 0.$$

- La derivada direccional radial de H es r veces H .

$$y^i H_{y^i}(y) = rH(y)$$

Demostración. Supongamos que H satisface $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$ para toda λ positiva. Fijamos y y derivando respecto a λ obtenemos

$$y^i H_{y^i}(\lambda y) = r\lambda^{r-1} H(y).$$

Tomando $\lambda = 1$ obtenemos el criterio buscado.

Ahora supongamos $y^i H_{y^i}(y) = rH(y)$. De nuevo fijemos y y consideremos la función $H(\lambda y)$ con $\lambda > 0$. Por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{d}{d\lambda} H(\lambda y) = y^i H_{y^i}(\lambda y) = \frac{1}{\lambda} (\lambda y^i) H_{y^i}(\lambda y).$$

Usando la hipótesis tenemos que el último término es igual a $\frac{1}{\lambda} rH(\lambda y)$. De esta manera planteamos la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{d}{d\lambda} H(\lambda y) - \frac{r}{\lambda} H(\lambda y) = 0.$$

Resolviéndola por el factor integrante¹ $\frac{1}{\lambda^r}$ obtenemos $H(\lambda y) = C\lambda^r$, donde C es alguna constante que depende de y , pero no de λ . Haciendo $\lambda = 1$ obtenemos que $C = H(y)$. \square

En particular tenemos que una norma de Minkowski F es homogénea positiva de grado 1, con lo cual:

$$y^i F_{y^i}(y) = F(y), \quad y^j F_{y^i y^j}(y) = 0. \quad (2.1)$$

Y con ello tenemos que F_{y^i} es homogénea de grado cero y $F_{y^i y^j}$ es homogénea de grado -1 .

Teorema 2.1.4. *Sea F una norma de Minkowski en \mathbb{R}^n entonces se cumplen:*

1. $F(y) > 0$ si $y \neq 0$.

¹Si el lector requiere consultar un libro sobre resolución de E.D.O. puede ver por ejemplo: [4], [5]

2. (Desigualdad del triángulo)

$F(y_1 + y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$ donde la igualdad se cumple si y sólo si $y_1 = \alpha y_2$ $\alpha \geq 0$.

3. (Desigualdad Fundamental)

$$w^i F_{y_i}(y) \leq F(w) \quad \text{si } w \neq 0,$$

la igualdad se cumple si y sólo si $w = \alpha y$ para alguna $\alpha \geq 0$.

Demostración. Observemos primero que

$$(g_{ij})(y) := \left(\frac{1}{2}F^2\right)_{y^i y^j}(y) = (F F_{y^i y^j} + F_{y^i} F_{y^j})(y) \quad (2.2)$$

mediante la regla de la cadena.

Luego $g_{ij} y^i y^j = y^i y^j (F F_{y^i y^j} + F_{y^i} F_{y^j})$, de donde al distribuir apropiadamente se tiene

$$y^i F_{y^j} y^j F_{y^i y^j} + y^i F_{y^i} y^j F_{y^j} = F^2, \quad (2.3)$$

por la ecuación (2.1).

Ahora el lado izquierdo de la igualdad anterior es positivo siempre que $y \neq 0$, debido a que $g_{ij} = F^2$ y g_{ij} es positivo definido.

Para la desigualdad del triángulo, sea $y \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, luego la matriz $(g_{ij}(y))$ define un producto interior. Entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, si $\eta := (\eta^i)$ y $\xi := (\xi^i)$ son vectores en \mathbb{R}^n ,

$$[g_{ij} \xi^i \eta^j]^2 \leq [g_{ij} \xi^i \xi^j][g_{ij} \eta^i \eta^j],$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si η y ξ son colineales. Tomando $\eta^i = y^i$ y usando que $g_{ij}(y) y^i y^j = F^2(y)$,

$$[g_{ij} \xi^i y^j]^2 \leq F^2(y) [g_{ij} \xi^i \xi^j]. \quad (2.4)$$

Por otro lado la ecuación (2.3) para g_{ij} nos da

$$F^2(y) [g_{ij} \xi^i \xi^j] - [g_{ij} y^i \xi^j]^2$$

$$= (F F_{y^i y^j} + F_{y^i} F_{y^j}) y^i y^j [g_{ij} \xi^i \xi^j] - [g_{ij} y^i \xi^j]^2$$

como $F g_{ij} y^i y^j = F^3$ entonces

$$= F^3 F_{y^i y^j} \xi^i \xi^j + F_{y^i} F_{y^j} y^i y^j g_{ij} \xi^i \xi^j - [g_{ij} y^i \xi^j]^2$$

por la ecuación (2.1) tenemos que $y^i F_{y^i} = F$ y con ello

$$\begin{aligned}
&= F^3 F_{y^i y^j} \xi^i \xi^j + F^2 g_{ij} \xi^i \xi^j - [g_{ij} y^i \xi^j]^2 \\
&= F^3 F_{y^i y^j} \xi^i \xi^j + g_{ji} y^j y^i g_{ij} \xi^i \xi^j - [g_{ij} y^i \xi^j]^2 \\
&= F^3 F_{y^i y^j} \xi^i \xi^j + g_{ji} \xi^j y^i g_{ij} \xi^i y^j - [g_{ij} y^i \xi^j]^2 \\
&= F^3 F_{y^i y^j} \xi^i \xi^j + [g_{ij} \xi^i y^j]^2 - [g_{ij} y^i \xi^j]^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $F^2(y) [g_{ij} \xi^i \xi^j] - [g_{ij} y^i \xi^j]^2 = F^3 F_{y^i y^j} \xi^i \xi^j$ entonces

$$F_{y^i y^j}(y) \xi^i \xi^j = \frac{1}{F^3(y)} \{F^2(y) [g_{ij} \xi^i \xi^j] - [g_{ij} y^i \xi^j]^2\},$$

usando la ecuación (2.4) obtenemos la siguiente desigualdad

$$F_{y^i y^j}(y) \xi^i \xi^j \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5)$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si ξ y y son colineales.

Probemos que

$$2F(y) \leq F(y + \xi) + F(y - \xi) \forall y, \xi \in \mathbb{R}^n$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $\xi = \lambda y$ para alguna $|\lambda| \leq 1$.

Veamos primero qué pasa si $\xi = \lambda y$. Si $|\lambda| \leq 1$, la homogeneidad de F en el lado derecho implica la desigualdad anterior. Si $|\lambda| > 1$ el lado derecho se reduce a:

$$F(y + \lambda y) + F(y - \lambda y) = F((1 + \lambda)y) + F((1 - \lambda)y)$$

que es mayor que $2F(y)$ pues se tiene de antemano que $|\lambda| > 1$ con lo cual $(1 + \lambda) > 2$ ó $(1 - \lambda) > 2$, pero entonces para alguno de los sumandos de la derecha podemos aplicar la homogeneidad de F y con ello es clara la desigualdad.

Ahora veamos el caso en que ξ y y no son colineales. Consideremos la función de variable real $F(y + t\xi)$, que además es de clase C^∞ . Usando el teorema del valor medio

$$F(y \pm \xi) = F(y) \pm F_{y^i}(y) \xi^i + \frac{1}{2} F_{y^i y^j}(y \pm \epsilon \xi) \xi^i \xi^j,$$

para alguna $0 < \epsilon < 1$. Dado que $y \pm \epsilon\xi$ y ξ son linealmente independientes, por la ecuación (2.5) sabemos que $\frac{1}{2}F_{y^i y^j}(y \pm \epsilon\xi)\xi^i \xi^j > 0$. Entonces tenemos

$$F(y + \xi) > F(y) + F_{y^i}(y)\xi^i, F(y - \xi) > F(y) - F_{y^i}(y)\xi^i, \quad (2.6)$$

sumando estas dos últimas expresiones tenemos el resultado buscado.

Finalmente demostremos la desigualdad fundamental:

$$w^i F_{y^i}(y) \leq F(w) \quad \forall y \neq 0$$

donde la igualdad se da si y sólo si $w = \alpha y$ para alguna $\alpha \geq 0$. Si $w = \alpha y$ para alguna $\alpha \geq 0$, ambos lados de la desigualdad son $\alpha F(y)$. En caso de que w fuera un múltiplo negativo de y el lado izquierdo es negativo por lo tanto se cumple la desigualdad.

Ahora si y, w son linealmente independientes, también lo son y y $\xi = y - w$. Usando la desigualdad (2.6) obtenemos

$$F(w) > F(y) - F_{y^i}(y)(y^i - w^i),$$

de donde se sigue el resultado. \square

2.2. Variedades de Finsler

Una vez definidos en la sección anterior los *espacios de Minkowski*, podemos ahora empezar a trabajar con las variedades que conciernen a este texto.

Definición 2.2.1. *Sea M una n -variedad diferenciable. Una estructura de Finsler en M es una función*

$$F : TM \rightarrow [0, \infty)$$

con las siguientes propiedades:

- F es C^∞ en $TM \setminus 0$, donde $TM \setminus 0$ se define como el haz tangente TM menos la sección cero.
- $\forall x \in M$ $F(x, -)$ es una norma de Minkowski.

A la pareja (M, F) se le llamará *variedad de Finsler*. Cuando no haya posibilidad de confusión la denotaremos simplemente como M .

Sea $\mathcal{U} \in M$ un abierto y $(x^1, \dots, x^n) = (x^i) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un sistema de coordenadas local en \mathcal{U} . Entonces se tiene que esta carta da lugar a coordenadas (x^i, y^i) en TM mediante

$$y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

con lo cual las y^i están definidas en cada fibra. Así podemos describir a F localmente como

$$F(x, y) = F(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n).$$

En algunos casos puede que F cumpla condiciones adicionales como por ejemplo $F(x, -y) = F(x, y)$. En este caso diremos que F es absolutamente homogénea, $F(x, \lambda y) = |\lambda|F(x, y) \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esto ocurre por ejemplo, cuando la métrica de Finsler es en realidad una métrica riemanniana.

Lema 2.2.2. *Sea (M, F) variedad de Finsler. Entonces se cumplen:*

- $y^i F_{y^i} = F$,
- $y^i F_{y^i y^j} = 0$,
- $y^k F_{y^i y^j y^k} = -F_{y^i y^j}$

Demostración. Las primeras dos afirmaciones se siguen claramente pues $\forall x \in M$ se tiene que F es una norma de Minkowski y por el teorema (2.1.3) se tiene el resultado. Para la tercera afirmación consideremos $\lambda > 0$ y

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \text{ derivando respecto de } y^i$$

$$\lambda F_{y^i}(x, \lambda y) = \lambda F_{y^i}(x, y)$$

cancelando la constante y derivando ahora respecto de y^j

$$\lambda F_{y^i y^j}(x, \lambda y) = F_{y^i y^j}(x, y)$$

con esto queda claro que $F_{y^i y^j}$ es homogénea de grado -1 , se sigue del teorema (2.1.3) la fórmula buscada. \square

2.2.1. Algunos ejemplos

- Variedades de Riemann.

Sea (M, g) una variedad riemanniana, es decir, M es una variedad diferenciable y $g \in \Gamma((TM \otimes TM)^*)$. Así definimos $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ como:

$$F(x, y) := \sqrt{g_x(y, y)}$$

Es fácil ver que F es C^∞ en TM y que en cada punto es una norma de Minkowski, con la peculiaridad de que g_{ij} definido anteriormente no depende de y .

- (Métrica de Klein) Sea $B^n \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ la bola unitaria, y $\|\cdot\|$ la norma euclidiana usual. Definimos:

$$\alpha_{-1} := \frac{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - \|x\|^2}, \quad y \in T_x B^n \cong \mathbb{R}^n.$$

α_{-1} es una métrica riemanniana en B^n , llamada métrica de Klein. A la pareja (B^n, α_{-1}) se le conoce como modelo de Klein².

- Espacios de Randers.

Sea M una variedad diferenciable. Una métrica de Randers es una estructura de Finsler en TM de la forma:

$$F(x, y) := \alpha(x, y) + \beta(x, y),$$

definiendo $\alpha(x, y) := \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$, $\beta(x, y) := b_i(x)y^i$.

Los a_{ij} son los componentes de una métrica riemanniana y los b_i son los de una 1-forma. Hay que tener un poco de cuidado debido a la presencia del término β , que al ser lineal en y , no tiene un signo fijo. Para que F sea positiva en $TM \setminus 0$, debemos controlar el tamaño de los b_i . Mostremos que F es positiva si y sólo si:

$$\|b\| := \sqrt{a_{ij}b^i b^j} < 1, \quad \text{con } b^i := a^{ij}b_j$$

²El modelo de Klein es usado en geometría hiperbólica.

Teorema 2.2.3. Sea $F(x, y) := \alpha(x, y) + \beta(x, y)$ métrica de Randers. Son equivalentes:

1. $\|b\| := \sqrt{a_{ij}b^ib^j} < 1$.
2. $F(x, y)$ es positiva para toda $y \neq 0$.
3. El tensor fundamental $g_{ij}(x, y)$ es positivo definido para toda $y \neq 0$.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Supongamos que $\|b\| < 1$; luego usando Cauchy-Schwarz,

$$\pm\beta \leq |\beta| = |b_i y^i| \leq \|b\| \|y\| \leq 1 \cdot \sqrt{a_{ij}y^i y^j} = \alpha.$$

Con lo cual $F = \alpha + \beta$ es positiva.

(2) \Rightarrow (1) Supongamos ahora que F es positiva. Entonces para $-b^i = -b^i(x)$,

$$\begin{aligned} F(x, -b^i) &= \alpha(x, -b^i) + \beta(x, -b^i) = \sqrt{a_{ij}b^i b^j} - b_i(b^i) = \\ &= \sqrt{a_{ij}b^i b^j} - a^{ij}b^j b^i = \|b\|(1 - \|b\|) > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|b\| < 1$.

(3) \Rightarrow (2). Se tiene que $F^2(x, y) = g_{ij}(x, y)y^i y^j$, con lo cual al ser el tensor fundamental positivo definido se sigue que F es positiva. Finalmente

(2) \Rightarrow (3) El resultado es claro, pues recordando la definición de $g_{ij}(x, y)$ se observa que

$$(g_{ij}) = \left(\left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j} \right),$$

al ser F positiva, es claro que g_{ij} también lo es. \square

- (Deformación de la métrica de Klein) Definimos en $B^n \subset \mathbb{R}^n$

$$F := \frac{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - \|x\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle}{1 - \|x\|^2}, \quad y \in T_x B^n \cong \mathbb{R}^n.$$

A esta métrica también se le conoce como métrica de Funk.

Obsérvese además que en el caso de los espacios de Randers F no puede ser absolutamente homogénea a menos que F sea riemanniana (i.e. $\beta = 0$).

2.2.2. El tensor fundamental y el tensor de Cartan

Ya que definimos variedades de Finsler, nos gustaría sacar provecho de las propiedades de F , aquí definiremos dos tensores, el primero jugará en lo posible el papel de una métrica riemanniana, el segundo nos servirá como una guía para saber qué tanto se parece el primero a una métrica riemanniana.

Con ellos podremos hacer construcciones lo más parecidas a las hechas para variedades riemannianas, por ejemplo al momento de hablar de conexiones.

Definición 2.2.4 (Tensor Fundamental). *Sea (M, F) variedad de Finsler. Definimos*

$$g := g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

le llamaremos a g el tensor fundamental. Donde g_{ij} es el funcional bilineal definido en (2.1.1).

Lema 2.2.5. *Los componentes del tensor fundamental satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $y^i g_{ij} = FF_{y^j}$,
2. $y^i y^j g_{ij} = F^2$,
3. $y^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = y^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 0$

Demostración. Observemos primero que el tensor fundamental cumple:

$$(g_{i,j}) := \left(\left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j} \right) = (FF_{y^i y^j} + F_{y^i} F_{y^j}),$$

Ahora mostremos 1, usando la fórmula anterior tenemos

$$y^i (FF_{y^i y^j} + F_{y^i} F_{y^j}) = Fy^i F_{y^i y^j} + (y^i F_{y^i}) F_{y^j},$$

por el teorema (2.2.2) concluimos $y^i g_{ij} = FF_{y^j}$.

Para 2 consideremos de igual forma

$$y^i y^j (FF_{y^i y^j} + F_{y^i} F_{y^j}) = y^j F(y^i F_{y^i y^j}) + (y^i F_{y^i})(y^j F_{y^j})$$

por el teorema (2.2.2) se tiene el resultado.

Finalmente para 3 usando una vez más el teorema (2.2.2),

$$\begin{aligned} y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} &= y^k (F_{y^k} F_{y^i y^j} + F F_{y^i y^j y^k} + F_{y^i y^k} F_{y^j} + F_{y^i} F_{y^j y^k}) \\ &= (y^k F_{y^k}) F_{y^i y^j} + F (y^k F_{y^i y^j y^k}) + (y^k F_{y^i y^k}) F_{y^j} + F_{y^i} (y^k F_{y^j y^k}) \\ &= F F_{y^i y^j} - F F_{y^i y^j} + (y^k F_{y^k y^i}) F_{y^j} + F_{y^i} (y^k F_{y^k y^j}) = 0, \end{aligned}$$

El último paso se sigue del hecho de que $F_{y^i y^j} = F_{y^j y^i}$ debido a que F es de clase C^∞ . Los demás casos son análogos. \square

Definición 2.2.6 (Tensor de Cartan). *Sea (M, F) variedad de Finsler, si g_{ij} denota a los componentes del tensor fundamental. Definimos*

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k,$$

donde

$$\mathcal{A}_{ijk} := \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{F}{4} (F^2)_{y^i y^j y^k}.$$

Teorema 2.2.7. *Sea F una norma de Minkowski en \mathbb{R}^n . Son equivalentes:*

1. F es euclidiana. Es decir, F está inducida por un producto interior.
2. $\mathcal{A}_{ijk} = 0 \forall i, j, k$.

Demostración. Supongamos que $F(x, y) := \sqrt{h_x(y, y)}$ entonces es fácil ver que

$$\mathcal{A}_{ijk} = \frac{F}{2} \frac{\partial h_{ij}}{\partial y^k} = 0,$$

pues

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left(\left[\frac{F^2}{2} \right] \right)_{y^i y^j} = \left(\left[\frac{h(y, y)}{2} \right] \right)_{y^i y^j} \\ &= \left(\left[\frac{h_{kl} y^k y^l}{2} \right] \right)_{y^i y^j} = \left(\left[\frac{h_{il} y^l + h_{li} y^l}{2} \right] \right)_{y^j} \\ &= \left(\left[\frac{h_{ij} + h_{ji}}{2} \right] \right) = h_{ij}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_{ij} := \left(\left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j} \right) = h_{ij}$ no depende de y .

Supongamos ahora que $\mathcal{A}_{ijk} = 0$ para toda i, j, k . Por definición se tiene que

$$\mathcal{A}_{ijk} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 0.$$

Así, es claro ver que g_{ij} no depende de y^k para toda k . Con lo cual F debe ser euclidiana. \square

Proposición 2.2.8. *Sea (M, F) variedad de Finsler. Entonces los componentes del tensor de Cartan cumplen*

1. \mathcal{A}_{ijk} es totalmente simétrica, es decir, $\mathcal{A}_{ijk} = \mathcal{A}_{jik} = \mathcal{A}_{ikj}$,
2. $y^i \mathcal{A}_{ijk} = 0$,
3. (M, F) es variedad riemanniana $\Leftrightarrow \mathcal{A} = 0$

Demostración. Recordemos la definición de $\mathcal{A}_{ijk} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$.

Para 1 consideremos:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = F_{y^k} F_{y^i y^j} + F F_{y^i y^j y^k} + F_{y^i y^k} F_{y^j} + F_{y^i} F_{y^j y^k};$$

como F es de clase C^∞ en $TM \setminus 0$, sabemos que podemos permutar el orden de las derivadas parciales en el caso de $F_{y^i y^j y^k}$. Por lo que basta hacer la observación de que con los términos restantes, al tomar $\frac{\partial g_{ji}}{\partial y^k}$ y $\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j}$ lo único que cambia es el orden de los sumandos.

Para 2 se tiene

$$y^i \mathcal{A}_{ijk} = y^i \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{F}{2} (y^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}) = 0,$$

por el lema 2.2.5.

Para 3, si (M, F) es una variedad riemanniana es claro que $g_{ij}(x)$ no tiene dependencia de y con lo cual $\frac{\partial g_{ji}}{\partial y^k} = 0$, de la definición de los \mathcal{A}_{ijk} , se tiene que también estos son cero.

Supongamos que $\mathcal{A}_{ijk} = 0$ para todo i, j, k . Entonces por el teorema anterior se sigue el resultado. \square

CAPÍTULO 3

La conexión de Chern y el haz inducido

En este capítulo discutiremos la necesidad de trabajar en π^*TM en lugar de usar solamente TM como en el caso en que tenemos métricas riemannianas. Continuaremos recordando los conceptos de conexión en haces vectoriales y construiremos las secciones, bases y demás objetos que nos facilitarán la construcción de la conexión de Chern y el estudio de sus propiedades. Mencionaremos además algunas propiedades de la derivada covariante respecto a las bases que definiremos a lo largo del capítulo.

3.1. El haz inducido π^*TM

En la definición de variedad de Finsler, observamos que en general F es de clase C^∞ solamente en $TM \setminus 0$. Hasta ahora esta restricción no había presentado ningún inconveniente, pero consideremos lo siguiente: La falta de diferenciabilidad de F en todo el haz tangente nos impide trabajar en él, volviendo un poco desalentador el tratar de emular lo hecho para la conexión de Levi-Civita. Recordemos el tensor fundamental g definido en (2.2.4), el cual para todo $(x, y) \in TM \setminus 0$ es invariante bajo rescalamiento positivo de y , es decir, es homogéneo positivo de grado cero.

Lema 3.1.1. *El tensor fundamental g definido en (2.2.4) es invariante bajo rescalamiento positivo.*

Demostración. Como una consecuencia del teorema de Euler (2.1.3) tenemos que F_{y^i} , $F_{y^i y^j}$ son funciones homogéneas de grado 0 y -1 respectivamente (véase la ecuación (2.1)). Luego tenemos que:

$$g_{ij} = FF_{y^i y^j} + F_{y^i} F_{y^j},$$

basta hacer notar que F al ser métrica de Finsler es homogénea positiva de grado 1 por definición, con ello el producto $FF_{y^i y^j}$ es homogéneo positivo de grado 0 y por lo tanto es claro que g_{ij} también lo es. \square

Así el tensor $g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ podría haber funcionado como producto interior en $T_x M$ de no ser por la condición de que $y \neq 0$. Estas observaciones nos obligan en cierta manera a conseguir una conexión lineal en algún otro haz que, en lo posible, pudiese ser de una importancia y utilidad comparable a la conexión de Levi-Civita que se tiene para variedades riemannianas.

Dada una variedad diferenciable M de dimensión n el haz tangente TM es a su vez una variedad diferenciable, pero de dimensión $2n$. Si además contamos con una métrica de Finsler F (2.2.1) se tiene que en general no es diferenciable para $y = 0$, esto nos lleva a considerar el haz tangente menos la sección cero:

$$TM \setminus 0 = \{(x, y) \in TM | y \neq 0\}. \quad (3.1)$$

Tenemos la proyección canónica en la primera coordenada $\pi : TM \setminus 0 \rightarrow M$, construimos el haz inducido por π . Sobre M tenemos los haces vectoriales TM y T^*M , con sus proyecciones canónicas correspondientes q y \hat{q} . Construimos el fibrado inducido por π (1.1.3).

$$\begin{array}{ccc} \pi^* TM & \xrightarrow{\pi_q} & TM \\ q^* \downarrow & & \downarrow q \\ TM \setminus 0 & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Y hacemos lo análogo para el haz cotangente T^*M . Así se tienen que los haces inducidos $\pi^* TM$ y $\pi^* T^*M$ están definidos como:

$$\pi^* TM := \{(x, y, x, v) \in TM \setminus 0 \times TM | \pi(x, y) = q(x, v)\} \quad (3.2)$$

$$\pi^* T^*M := \{(x, y, x, v) \in TM \setminus 0 \times T^*M | \pi(x, y) = \hat{q}(x, v)\} \quad (3.3)$$

El tensor fundamental g (2.2.4) es invariante bajo reescalamiento positivo, con lo cual se tiene que los productos interiores $g_{ij(x,y)}dx^i \otimes dx^j$ y $g_{ij(x,\lambda y)}dx^i \otimes dx^j$ son iguales. De esta forma es fácil convencerse que en los puntos de la forma $(x, \lambda y)$ con $\lambda > 0$, hemos puesto el mismo espacio tangente y le hemos dado el mismo producto interior. Esto hace a nuestra construcción un poco redundante, pero esto es fácil de resolver. Consideremos $TM \setminus 0$ y definamos la siguiente relación de equivalencia:

$$(x, y), (x, z) \in TM \setminus 0, (x, y) \sim (x, z) \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \text{ tal que } (x, y) = (x, \lambda z).$$

Definimos el haz unitario $\mathbb{S}M := (TM \setminus 0) / \sim$. En el caso de que F fuera absolutamente homogénea, y esto obligase a que $g_{ij(x,y)} = g_{ij(x,\lambda y)}$ para toda $\lambda \neq 0$, definimos una relación de equivalencia similar \sim' y con ello formamos el haz proyectivo $\mathcal{P}TM := (TM \setminus 0) / \sim'$. Formalizemos ahora la construcción discutida. Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \rho^*TM & \xrightarrow{\rho_q} & TM \\ q^* \downarrow & & \downarrow q \\ \mathbb{S}M & \xrightarrow{\rho} & M \end{array}$$

De manera análoga hacemos el pullback correspondiente al haz cotangente obteniendo ρ^*T^*M . Para propósitos globales trabajaremos con objetos invariantes bajo reescalamiento positivo, es decir definidos sobre $\mathbb{S}M$. Cuando sea necesario usar coordenadas locales usaremos $TM \setminus 0$ como el espacio base. El haz tangente a $TM \setminus 0$ es de la forma:

$$TTM \setminus 0 := \bigcup_{(x,y) \in TM \setminus 0} T_{(x,y)}TM \setminus 0. \quad (3.4)$$

Las coordenadas locales (x^i) de M nos dan secciones básicas $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ y $\{dx^i\}$, en los haces correspondientes. Para cada punto (x, y) en la variedad $TM \setminus 0$, la fibra de π^*TM es el espacio vectorial T_xM mientras que la de π^*T^*M es su dual T_x^*M . Así obtenemos fácilmente secciones en π^*TM y en π^*T^*M . Estas secciones transplantadas están definidas localmente en x y globalmente en y . Una vez que fijamos x es claro que las secciones no dependen de y , por lo que no varían y podemos decir que están definidas de manera global. Sea $x^i = x^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ un cambio de coordenadas en M . La regla de la cadena nos da $y^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \tilde{y}^k$. Con estas relaciones podemos deducir:

Lema 3.1.2. *Con las hipótesis anteriores $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ se transforman de la siguiente forma:*

1 Si consideramos a $\frac{\partial}{\partial x^i}$ como marcos móviles de π^*TM , se transforman

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.5)$$

2 Por otro lado, como campos vectoriales en TM , se transforman

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \tilde{y}^l \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (3.6)$$

Demostración. Sea $x^i = x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n)$ un cambio de coordenadas en M . Luego

$$y^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \tilde{y}^k \quad (3.7)$$

Por la construcción del haz inducido π^*TM , $\frac{\partial}{\partial x^i}$ se transforma como $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^i}$ pues nótese que en cada punto $(x, y) \in TM \setminus 0$ la fibra correspondiente es $T_x M$.

Ahora de la definición del doble haz tangente (1.1.4) tenemos que un marco móvil es de la forma $\{\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^k}\}$. Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x^i}$ se transforma como:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial y^i} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \tilde{y}^l \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Al sustituir por la ecuación (3.7). □

Lema 3.1.3. Sea $x^i = x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n)$ un cambio de coordenadas en M , entonces como formas diferenciales en TM $\{dx^i, dy^i\}$ se comportan como:

$$1 \quad d\tilde{x}^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} dx^i.$$

$$2 \quad d\tilde{y}^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} dy^i + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} y^j dx^i$$

Demostración. Sea $x^i = x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n)$ un cambio de coordenadas en M , luego su inversa es $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Entonces al aplicar la derivada exterior obtenemos

$$d\tilde{x}^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} dx^i.$$

Ahora $\tilde{y}^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} y^i$, con lo cual

$$d\tilde{y}^k = d\left(\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} y^i\right) = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} dy^i + \frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} y^j dx^i.$$

□

Este comportamiento hace tedioso el trabajar con estos marcos móviles tal como fueron definidos anteriormente, más adelante los cambiaremos por otros con los que nos resulte más cómodo trabajar.

Definición 3.1.4. Definimos $\ell \in \Gamma(\pi^*TM)$, la sección distinguida de π^*TM , como

$$\ell_{(x,y)} := \frac{y^i}{F(y)} \frac{\partial}{\partial x^i} = \ell^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Definición 3.1.5. Definimos $\omega \in \Gamma(\pi^*T^*M)$, la forma de Hilbert, como

$$\omega_{(x,y)} := F_{y^i}(x,y) dx^i$$

Ambas secciones (3.1.4) y (3.1.5) están definidas globalmente en $TM \setminus 0$, y además son duales una de la otra

$$\omega(\ell) = \frac{y^i}{F} F_{y^i} = 1,$$

como consecuencia del teorema (2.1.3).

Ahora el haz π^*TM admite una métrica Riemanniana, recordando el tensor fundamental definido en (2.2.4). Entonces se tiene que $g \in \Gamma(\pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M)$. De manera similar el tensor de Cartan (2.2.6) es una sección simétrica de $\otimes^3 \pi^*T^*M$.

Una consecuencia del Teorema (2.1.3) es que la sección distinguida ℓ tiene norma 1 respecto a esta métrica Riemanniana.

$$g(\ell, \ell) = g_{ij} \frac{y^i}{F} \frac{y^j}{F} = 1.$$

Como (π^*TM, g) es una variedad riemanniana nos puede resultar útil el definir una base g -ortonormal de la siguiente forma: $\{e_a\}$ debe satisfacer:

1. $g(e_a, e_b) = \delta_{ab}$
2. $e_n = \ell$ la sección distinguida.

Esto resulta fácil de hacer al usar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

De manera similar podemos definir en π^*T^*M una base $\{\omega^b\}$ de la forma

- $\omega^b(e_a) = \delta_a^b$,
- $\omega^n = \omega$ la forma de Hilbert.

Ahora tenemos que las bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ y $\{e_a\}$ pueden escribirse una respecto de la otra. Lo mismo pasa para sus respectivos duales.

$$e_a = u_a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = v_i^a e_a.$$

Análogamente

$$\omega^a = v_i^a dx^i, \quad dx^i = u_a^i \omega^a.$$

Enunciaremos algunas identidades que nos serán útiles más adelante:

Lema 3.1.6.

1. $v_i^\alpha y^i = 0.$
2. $u_\alpha^i F_{y^i} = 0.$
3. $u_a^i g_{ij} u_b^j = \delta_{ab}.$
4. $g^{ij} = u_a^i \delta^{ab} u_b^j.$
5. $g_{ij} = v_i^a \delta_{ab} v_j^b.$
6. $g^{ij} = u_a^i \delta^{ab} u_b^j.$
7. $v_i^a g^{ij} v_j^b = \delta^{ab}.$
8. $u_\alpha^i = \delta_{ab} v_j^b g^{ji}.$
9. $v_i^a = \delta^{ab} u_b^j g_{ji}.$

Demostración. Primero observemos que (u_a^i) y (v_i^a) como matrices son inversas una de la otra.

$$v_i^a u_b^i = \delta_b^a, \quad u_\alpha^i v_j^i = \delta_\alpha^j. \quad (3.8)$$

Cuando usamos letras griegas para los índices se tiene entonces que corren hasta $n - 1$.

1. Consideremos $0 = \delta_n^\alpha = \omega^\alpha(e_n) = \omega^\alpha(\ell) = \omega^\alpha(\frac{y^i}{F} \frac{\partial}{\partial x^i}) = v_j^\alpha dx^j (\frac{y^i}{F} \frac{\partial}{\partial x^i}) = v_i^\alpha \frac{y^i}{F}.$
2. $0 = \omega^n(e_\alpha) = \omega(u_\alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = u_\alpha^j \omega(\frac{\partial}{\partial x^j}) = u_\alpha^j F_{y^i} dx^i (\frac{\partial}{\partial x^j}) = u_\alpha^i F_{y^i}.$
3. $\delta_{ab} = g(e_a, e_b) = g(u_a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, u_b^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = u_a^i g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) u_b^j = u_a^i g_{ij} u_b^j.$

4. Consideremos $v_i^a g^{ij} v_j^b = \delta^{ab}$, nótese que es equivalente a demostrar 6), es decir al multilpicar por u_a^i y por u_b^j de la siguiente forma:

$$u_a^i v_i^a g^{ij} v_j^b u_b^j = u_a^i \delta^{ab} u_b^j,$$

simplificando

$$g^{ij} = u_a^i \delta^{ab} u_b^j,$$

luego observemos dos cosas, primero g_{ij} es simétrica por lo cual podemos considerar sin pérdida de generalidad g_{ji} . Segundo, de antemano sabemos que $(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$, con lo cual basta demostrar la expresión anterior, para ello basta ver que

$$g_{ji} u_a^i \delta^{ab} u_b^j = v_j^b \delta^{ba} v_i^a u_a^i \delta^{ab} u_b^j = 1,$$

de manera similar multiplicando del otro lado. Por lo tanto se sigue la igualdad buscada.

5. Considere la identidad del inciso 3) $u_a^i g_{ij} u_b^j = \delta_{ab}$. Multiplicando por la izquierda v_i^a y por la derecha v_j^b , obtenemos el resultado
6. El procedimiento es análogo al inciso anterior usando la identidad 4).
7. Usando la identidad 3) $u_a^i g_{ij} u_b^j = \delta_{ab}$. Multiplicando por la derecha $v_j^b g^{ij}$ se sigue el resultado.
8. Análogo al anterior usando la identidad 6).

□

Como una última observación respecto al comportamiento de u , v . Por (3.8) tenemos que al derivar

$$0 = d(\delta_b^a) = d(v_i^a u_b^i) = (dv_i^a) u_b^i + v_i^a du_b^i$$

$$\Rightarrow (dv_i^a) u_b^i = -v_i^a du_b^i.$$

Y de manera análoga para $u_a^i v_j^a = \delta_j^i$.

3.1.1. La conexión no lineal en $TM \setminus 0$

La falta de diferenciabilidad del tensor fundamental g nos llevó a definir el haz inducido π^*TM con espacio base $TM \setminus 0$. A continuación definiremos objetos con los cuales daremos solución a la manera un tanto incómoda en que se comportan $\{\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial y^j}\}$ y $\{dx^j, dy^j\}$.

Definición 3.1.7. *Las componentes del tensor fundamental g son funciones en $TM \setminus 0$. Definimos*

$$\gamma_{jk}^i := g^{is} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} \right)$$

y definimos

$$\frac{N_j^i}{F} := \gamma_{jk}^i \ell^k - \frac{\mathcal{A}_{jk}^i}{F} \gamma_{rs}^k \ell^r \ell^s$$

Por los lemas (3.1.2) y (3.1.3) observamos como se comportan los marcos móviles inducidos al hacer un cambio de coordenadas. Para remediar esto utilizaremos γ_{jk}^i y N_j^i . Cambiamos $\frac{\partial}{\partial x^j}$ por

$$\frac{\delta}{\delta x^j} := \frac{\partial}{\partial x^j} - N_j^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

y dy^i por

$$\frac{\delta y^i}{F} := \frac{1}{F} (dy^i + N_j^i dx^j).$$

Definición 3.1.8. *La variedad $TM \setminus 0$ admite una métrica Riemanniana*

$$g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \frac{\delta y^i}{F} \frac{\delta y^j}{F},$$

conocida como la métrica de Sasaki [12].

Con respecto a esta métrica tenemos que el subespacio generado por $\{\frac{\delta}{\delta x^j}\}$, llamado el subespacio horizontal, y el subespacio generado por $\{F \frac{\partial}{\partial y^i}\}$, llamado el subespacio vertical, son ortogonales. Entonces $TM \setminus 0$ admite una *conexión de Ehresmann*,¹ esto gracias a la existencia de las N_j^i , las cuales son conocidas como la conexión no lineal.

Hemos definido entonces bases que son duales entre sí

¹Una conexión de Ehresmann en un haz E es un subhaz H de TE tal que $TE = H \oplus V$. [18]

- $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ para el haz tangente de $TM \setminus 0, y$
- $\{dx^i, \frac{\delta y^i}{F}\}$ para el haz cotangente de $TM \setminus 0$.

De la misma forma que con las bases *g-ortonormales* podemos encontrar respecto a la métrica de Sasaki nuevas bases

$$\{\hat{e}_a, \hat{e}_{n+a}\}, \text{ para } T(TM \setminus 0), \{\omega^a, \omega^{n+a}\} \text{ para } T^*(TM \setminus 0).$$

Si recordamos los términos u y v , tenemos que las bases recién definidas pueden expresarse en términos de las bases que dependen de la conexión no lineal.

$$\hat{e}_a = u_a^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \hat{e}_{n+a} = u_a^i F \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

$$\omega^a = v_i^a dx^i, \omega^{n+a} = v_i^a \frac{\delta y^i}{F}.$$

3.2. La conexión de Chern

En el capítulo dedicado a los conceptos preliminares definimos haz vectorial (1.1.1) y el concepto de conexión lineal asociada a un haz (1.1.5). En esta sección construiremos la conexión lineal asociada a π^*TM , veremos que en el caso de que nuestra variedad sea Riemanniana, la conexión de Chern coincide con la de Levi-Civita.

Teorema 3.2.1 (Chern). *Sea (M, F) una variedad de Finsler. El haz inducido π^*TM admite una única conexión lineal, llamada la conexión de Chern,² tal que sus formas de conexión están caracterizadas por las siguientes ecuaciones:*

- [Libre de torsión]

$$dx^j \wedge \omega_j^i = 0.$$

- [Casi compatibilidad con la métrica]

$$dg_{ij} - g_{kj} \omega_i^k - g_{ik} \omega_j^k = 2\mathcal{A}_{ijs} \frac{\delta y^s}{F}.$$

²En la literatura esta conexión se le conoce también como conexión de Rund [17]

Demostración. Para construir la conexión primero daremos una expresión para $\{\omega_j^i\}$ a partir de las propiedades de libertad de torsión y casi compatibilidad con la métrica. Posteriormente definiremos una función ∇ y probaremos que es una conexión lineal en el haz inducido π^*TM , la unicidad será clara por la definición de $\{\omega_j^i\}$. Sea $\{\omega_j^i\}$ un conjunto de 1-formas en $TM \setminus 0$, localmente cada ω_j^i se expresa como:

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k + \Pi_{jk}^i dy^k.$$

Primero consideremos la libertad de torsión

$$0 = d^2 x^i = dx^j \wedge (\Gamma_{jk}^i dx^k + \Pi_{jk}^i dy^k).$$

El hecho de que la conexión sea libre de torsión implica la ausencia de términos que incluyan algún dy^k en ω_j^i , es decir

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k.$$

Y además se cumple $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$. Ahora para la condición de casi compatibilidad con la métrica

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k + 2\mathcal{A}_{ijs} \frac{\delta y^s}{F},$$

Recordando que definimos $\frac{\delta y^i}{F} = \frac{1}{F}(dy^i + N_j^i dx^j)$ obtenemos:

$$dg_{ij} = g_{kj}\Gamma_{il}^k dx^l + g_{ik}\Gamma_{jl}^k dx^l + \frac{2}{F}\mathcal{A}_{ijs}(dy^s + N_l^s dx^l).$$

Por definición (2.2.6) sabemos que el tensor de Cartan tiene por componentes a $\mathcal{A}_{ijs} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^s}$. Con lo cual es fácil ver que

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = g_{kj}\Gamma_{il}^k + g_{ik}\Gamma_{jl}^k + \frac{2}{F}\mathcal{A}_{ijk}N_l^k. \quad (3.9)$$

Al permutar los índices obtenemos

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = g_{jk}\Gamma_{il}^k + g_{kl}\Gamma_{ij}^k + \frac{2}{F}\mathcal{A}_{jkl}N_i^k. \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} = g_{kl}\Gamma_{ij}^k + g_{ik}\Gamma_{jl}^k + \frac{2}{F}\mathcal{A}_{ikl}N_j^k. \quad (3.11)$$

Ahora si sumamos (3.10) con (3.11) y restamos (3.9) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} &= g_{jk}\Gamma_{il}^k + g_{kl}\Gamma_{ij}^k + \frac{2}{F}\mathcal{A}_{jkl}N_i^k + g_{kl}\Gamma_{ij}^k + g_{ik}\Gamma_{jl}^k + \frac{2}{F}\mathcal{A}_{ikl}N_j^k \\ &\quad - g_{kj}\Gamma_{il}^k - g_{ik}\Gamma_{jl}^k - \frac{2}{F}\mathcal{A}_{ijk}N_l^k \end{aligned}$$

Ahora, agrupando adecuadamente obtenemos:

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = 2g_{kl}\Gamma_{ij}^k + \frac{2}{F}(\mathcal{A}_{jkl}N_i^k + \mathcal{A}_{ikl}N_j^k - \mathcal{A}_{ijk}N_l^k).$$

Así podemos despejar Γ_{ij}^k , y obtenemos la expresión

$$\frac{g^{lk}}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) - \frac{g^{lk}}{F}(\mathcal{A}_{jkl}N_i^k + \mathcal{A}_{ikl}N_j^k - \mathcal{A}_{ijk}N_l^k) = \Gamma_{ij}^k,$$

de donde se sigue por la definición de símbolo de Christoffel (3.1.7)

$$\Gamma_{jk}^l = \gamma_{jk}^l - g^{li}(\mathcal{A}_{ijs}\frac{N_k^s}{F} - \mathcal{A}_{jks}\frac{N_i^s}{F} + \mathcal{A}_{kis}\frac{N_j^s}{F}).$$

Además podemos escribirla en términos de nuestra base $\{\frac{\delta}{\delta x^k}\}$. Primero observemos que $\frac{\delta}{\delta x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} + N_j^k dx^j$, así que reordenando los términos de la expresión, es fácil ver que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{lk}}{2}\left(\frac{\delta g_{jl}}{\delta x^i} + \frac{\delta g_{li}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^l}\right). \quad (3.12)$$

Esta última expresión parece justificar el hecho de que cambiáramos de base, resulta terriblemente familiar a la conexión de Levi-Civita. Sin embargo yacen escondidos los N_i^j , es decir, los coeficientes de la conexión no-lineal, misma que parece ya evidente que mide qué tanto nos estamos alejando de las variedades riemannianas.

Una vez que tenemos una expresión para ω_j^i definimos $\nabla : \Gamma(\pi^*TM) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes \pi^*TM)$ como:

$$\nabla s := (ds^i + s^j \omega_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.13)$$

donde $s = s^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es una sección de π^*TM . Veamos que ∇ define una conexión lineal en π^*TM . Sean $\lambda > 0, f \in C^\infty(M), \theta \in \Gamma(\pi^*T^*M)$ y $X, \hat{X} \in \Gamma(TM)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \nabla(\lambda s + \hat{s}) &= \nabla \left(\lambda s^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \hat{s}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = (d(\lambda s^i + \hat{s}^i) + (\lambda s^i + \hat{s}^i) \omega_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \\
 &= (\lambda ds^i + d\hat{s}^i + \lambda s^i \omega_j^i + \hat{s}^i \omega_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} = \lambda \nabla s + \nabla \hat{s}. \\
 \nabla(fs) &= (d(fs^i) + f s^j \omega_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} = (fds^i + s^i df + f s^i \omega_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \\
 &= f(ds^i + s^i \omega_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + df \otimes s^i \frac{\partial}{\partial x^i} = f \nabla s + df \otimes s.
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 \nabla_s(fX + \hat{X}, \theta) &= \left((ds^i + s^j \omega_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \left(fX^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \hat{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \theta_i dx^i \right) \\
 &= \left(ds^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (fX + \hat{X}, \theta_i dx^i) + \left(s^j \omega_j^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (fX + \hat{X}, \theta_i dx^i).
 \end{aligned}$$

Recordando que $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$ se sigue que

$$\begin{aligned}
 ds^i(fX + \hat{X}) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}(\theta_i dx^i) + s^j \Gamma_{jk}^i (fX + \hat{X}) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}(\theta_i dx^i) \\
 = f ds^i(X) \otimes \theta_i + ds^i(\hat{X}) \otimes \theta_i + f s^j \Gamma_{jk}^i(X) \otimes \theta_i + s^j \Gamma_{jk}^i(\hat{X}) \otimes \theta_i.
 \end{aligned}$$

Asociando adecuadamente

$$(fds^i(X) + f s^j \Gamma_{jk}^i(X)) \otimes \theta_i + (ds^i(\hat{X}) + s^j \Gamma_{jk}^i(\hat{X})) \otimes \theta_i = f \nabla_s(X, \theta) + \nabla_s(\hat{X}, \theta).$$

Por lo tanto ∇ es una conexión lineal en π^*TM . La unicidad de ∇ se sigue del hecho de que si $\bar{\nabla}$ es una conexión lineal que en π^*TM sea libre de torsión y es casi compatible con la métrica implica que $\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i$, pues tendríamos que:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{lk}}{2} \left(\frac{\delta g_{jl}}{\delta x^i} + \frac{\delta g_{li}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^l} \right) = \bar{\Gamma}_{ij}^k.$$

Por lo tanto $\nabla = \bar{\nabla}$ y la conexión de Chern es única. \square

Puede resultar útil además expresar la conexión de Chern en términos de las bases *g-ortonormales* definidas anteriormente.

Primero se tiene que

$$\nabla_v e_b := \omega_b^a(v) e_a \text{ y } \nabla_v \omega^a := -\omega_b^a(v) \omega^b.$$

Usando que $e_b = u_b^k \frac{\partial}{\partial x^k}$,

$$\omega_b^a e_a = \nabla e_b = \nabla(u_b^k \frac{\partial}{\partial x^k}) = u_b^k \nabla \frac{\partial}{\partial x^k} + du_b^k \frac{\partial}{\partial x^k} = u_b^k \omega_k^l \frac{\partial}{\partial x^l} + du_b^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

renombrando los índices obtenemos

$$= u_b^l \omega_l^k \frac{\partial}{\partial x^k} + du_b^k \frac{\partial}{\partial x^k} = (du_b^k + u_b^l \omega_l^k) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\Rightarrow \omega_b^a e_a = \omega_b^a (u_a^k \frac{\partial}{\partial x^k}) = (du_b^k + u_b^l \omega_l^k) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\Rightarrow \omega_b^a u_a^k = du_b^k + u_b^l \omega_l^k,$$

multiplicando por la derecha v_k^a

$$\Rightarrow \omega_b^a = du_b^k v_k^a + u_b^l \omega_l^k v_k^a.$$

Así tenemos las formas de la conexión de Chern expresadas en términos de la base g –ortonormal que vimos anteriormente. De manera análoga si partimos de $\nabla_v \omega^a := -\omega_b^a(v)\omega^b$, obtenemos la expresión

$$\omega_j^i = (dv_j^a)u_a^i + v_j^b \omega_b^a u_a^i.$$

Lema 3.2.2. *Una conexión se dice que es g -compatible si*

$$dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = 0.$$

Entonces son equivalentes:

1. Existe una conexión libre de torsión y g -compatible en π^*TM .
2. La estructura de Finsler F es riemanniana.

Demostración. 1) \Rightarrow 2)

Sea ∇ conexión libre de torsión y g -compatible en π^*TM , luego vemos que para el tensor fundamental g

$$(\nabla g)_{ij} = dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = 0,$$

por la condición de compatibilidad con la métrica.

Es claro entonces que el tensor de Cartan se anula y por lo tanto F es riemanniana. 2) \Rightarrow 1) Supongamos ahora que F es Riemanniana entonces

es claro que por el lema , que los componentes del tensor de Cartan \mathcal{A}_{ijk} son todos cero, recordando la condición de casi compatibilidad con la métrica

$$dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = 2\mathcal{A}_{ijk}\frac{\delta y^k}{F} = 0,$$

con lo cual la conexión de Chern construida en el teorema anterior cumple las condiciones buscadas. \square

3.2.1. La derivada covariante horizontal y vertical

Una vez construida la conexión de Chern podemos centrar por lo pronto nuestra atención en la derivada covariante. Si recordamos nuestras bases $\{\hat{e}_a, \hat{e}_{n+a}\}$, $\{\omega^a, \omega^{n+a}\}$. Observamos que, gracias en parte a la métrica de Sasaki, nos dividen nuestro espacio en dos, el horizontal y el vertical. Esta división se observa también en la derivada covariante. Recordando la definición (1.1.7), podemos entonces definir la derivada covariante y analizar su comportamiento.

Empecemos pues considerando a $T \in \Gamma(\pi^*TM \otimes \pi^*T^*M)$ y $X \in \Gamma(TM)$, por la definición (1.1.8) tenemos que

$$\nabla_X T = (\nabla_X T)_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i,$$

Como $(\nabla_X T)_i^j$ son 1-formas en $TM \setminus 0$, expandiendo respecto a la base $\{dx^s, \frac{\delta y^s}{F}\}$

$$(\nabla_X T)_i^j = T_{i|s}^j dx^s + T_j^{i;s} \frac{\delta y^s}{F}$$

Los símbolos $|$ y $;$ nos ayudan a distinguir entre los coeficientes correspondientes a las distintas partes de la base. Nos ayudan a denotar cómo se comporta la derivada covariante de un campo tensorial respecto a los subespacios vertical y horizontal de los que habíamos hablado con anterioridad.

Con tal de introducir terminología a $|$ se le conoce como la derivada horizontal y a $;$ como la derivada vertical .

Ahora por ejemplo para el tensor fundamental g se tiene que

$$(\nabla g)_{ij} = 2\mathcal{A}_{ijk} \frac{\delta y^k}{F},$$

debido a la condición de casi compatibilidad con la métrica de la conexión de Chern. Nótese entonces que

$$g_{ij|s} = 0, \quad g_{ij;s} = 2\mathcal{A}_{ijk}$$

es decir el tensor fundamental es constante en el subespacio horizontal y proporcional al tensor de Cartan en el vertical.

De lo presentado en este capítulo queda claro, hasta cierto punto, que la conexión de Chern generaliza en lo posible la conexión de Levi-Civita, sin embargo el lector puede tener dudas acerca de su definición. Por ejemplo, ¿por qué se pide que sea libre de torsión y casi compatible con la métrica?, ¿hay otras conexiones que se utilicen para trabajar con estas variedades?. La respuesta es sí, durante el desarrollo de la geometría de los espacios de Finsler se definieron varias conexiones, las cuales cumplen distintas propiedades que resultan útiles al momento de trabajar con alguna clase particular de métricas de Finsler. En [17] se hace una comparación de estas conexiones.

4.1. Geodésicas

Un problema que se estudió para variedades, fue el asignar un métrica a nuestra variedad, para ello disponíamos en principio de la métrica riemanniana. Sin embargo ésta estaba definida en el haz tangente TM y no en M , pero después de mucho trabajo se podía hablar de cuándo una curva $\gamma(t)$ tuviese las propiedades que deseábamos, por ejemplo el que minimizara distancias.

Sea (M, F) una variedad de Finsler. Dada una curva suave $c(t) : [a, b] \rightarrow M$ nos preguntamos sobre su longitud en la variedad. Con la ayuda de la estructura de Finsler F definimos la longitud de c como:

$$\mathcal{L}_F(c) := \int_a^b F(c(t), \dot{c}(t)) dt.$$

Ahora nos gustaría definir una noción de distancia entre dos puntos $p, q \in M$. Si consideramos curvas $c(t)$ tales que $c(a) = p$ y $c(b) = q$ definimos:

$$d_F : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$d_F(p, q) = \inf \mathcal{L}(c).$$

Observamos que d_F nos define una “distancia” que cumple:

- $d_F(p, q) \geq 0$, donde la igualdad se da si y sólo si $p = q$.
- $d_F(p, q) \leq d_F(p, r) + d_F(r, q)$, $\forall p, q, r \in M$.

Sin embargo, esta noción de distancia es, en general, más débil que la que se tiene para un espacio métrico. Esto se debe a que $d_F(p, q) \neq d_F(q, p)$, ya que la estructura de Finsler no es necesariamente reversible.

Definición 4.1.1. Sea $c(t) : [a, b] \rightarrow M$ una curva suave, decimos que $c(t)$ es minimizante si

$$\mathcal{L}(c) = d_F(c(a), c(b)).$$

Y $c(t)$ es localmente minimizante si $\forall t_0 \in [a, b]$ existe $\epsilon > 0$ tal que $c(t)|_I$, $I := [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \cap [a, b]$, es minimizante

Recordando el concepto de *propagación* visto en el capítulo de preliminares, se trata de un campo vectorial en $TM \setminus 0$ de la forma:

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

tal que G^i cumple:

$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y), \lambda > 0.$$

Ahora procedamos a realizar lo propio con nuestras variedades de Finsler. Sea (M, F) variedad de Finsler, vemos que F induce una *propagación* definida de la siguiente forma

$$G^i := \frac{1}{4} g^{il} \{ [F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l} \}. \quad (4.1)$$

Proposición 4.1.2. Sea (M, F) variedad de Finsler, la *propagación* (4.1) cumple:

1. $G^i = \frac{1}{2} N_j^i y^j = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i y^j y^k$.
2. $\frac{\partial G^i}{\partial y^j} = N_j^i$.

Demostración. Primero hacemos la observación de que $G^i = \frac{1}{2} \gamma_{jk}^i y^j y^k$, donde

$$\gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right\}.$$

Entonces

$$\gamma_{jk}^i y^j y^k = \frac{1}{2} g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right\} y^j y^k.$$

Notamos que $[F^2]_{x^l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} y^i y^j$, $[F^2]_{x^k y^l} y^k = 2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} y^i y^j$. Así al sustituir obtenemos

$$\frac{1}{2} \gamma_{jk}^i y^j y^k = \frac{1}{4} \left\{ [F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l} \right\} = G^i.$$

Recordemos que Γ_{jk}^i (3.12) es:

$$\Gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - g^{il} \left\{ \mathcal{A}_{ljs} \frac{N_k^s}{F} - \mathcal{A}_{jks} \frac{N_l^s}{F} + \mathcal{A}_{kls} \frac{N_j^s}{F} \right\}.$$

Entonces

$$\frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i y^j y^k = \frac{1}{2} \gamma_{jk}^i y^j y^k - \frac{1}{2} g^{il} \left\{ \mathcal{A}_{ljs} \frac{N_k^s}{F} - \mathcal{A}_{jks} \frac{N_l^s}{F} + \mathcal{A}_{kls} \frac{N_j^s}{F} \right\} y^j y^k.$$

Por la proposición (2.2.8) tenemos que \mathcal{A}_{ijk} es simétrico en todos sus subíndices y que $y^l \mathcal{A}_{ijk} = 0$, por lo cual el segundo término de $\frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i y^j y^k$ se anula. Por lo tanto

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i y^j y^k = \frac{1}{2} \gamma_{jk}^i y^j y^k = G^i.$$

Para la otra igualdad tenemos

$$N_j^i y^j = \left(\gamma_{jk}^i y^k - g^{il} \frac{\mathcal{A}_{ljk}}{F} \gamma_{rs}^k y^r y^s \right) y^j.$$

Por el lema (2.2.8) sabemos que $y^j \mathcal{A}_{ljk} = 0$, por lo tanto

$$N_j^i y^j = \gamma_{jk}^i y^j y^k = 2G^i.$$

Esta última ecuación nos da otra expresión para N_j^i

$$N_j^i = \gamma_{jk}^i y^k - F g^{il} \frac{\mathcal{A}_{ljk}}{F} G^k.$$

Podemos notar además que $N_j^i = \Gamma_{jk}^i y^k$.

$$\Gamma_{jk}^i y^k = \gamma_{jk}^i y^k - g^{il} \frac{\mathcal{A}_{ljs}}{F} N_k^s y^k = \gamma_{jk}^i y^k - g^{il} \frac{\mathcal{A}_{ljs}}{F} G^s = N_j^i.$$

Para el segundo inciso de la proposición usamos que $G^i = \gamma_{jk}^i y^k$ y calculamos la derivada respecto a y^j .

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^i}{\partial y^j} &= \frac{1}{4} g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right\} y^k + \frac{1}{4} \frac{\partial g^{il}}{\partial y^j} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right\} y^j y^k \\ &\quad + g^{il} \left\{ \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial y^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial y^j \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial y^j \partial x^l} \right\} y^j y^k \end{aligned}$$

Observamos que $\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial y^j \partial x^k} y^j = \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}$, y análogamente para las otras derivadas. Entonces

$$\frac{\partial G^i}{\partial y^j} = \frac{1}{2} g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right\} y^k + \frac{1}{4} \frac{\partial g^{il}}{\partial y^j} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right\} y^j y^k.$$

Notamos que $g_{ml} G^m = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right\} y^j y^k$. Luego

$$\Rightarrow \frac{\partial G^i}{\partial y^j} = \gamma_{kj}^i y^k + \frac{\partial g^{il}}{\partial y^j} g_{ml} G^m.$$

Como $\frac{A_{ijk}}{F} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^{il}}{\partial y^j} g_{ml} + g^{il} \frac{\partial g_{ml}}{\partial y^j} &= \frac{\partial g^{il} g_{lm}}{\partial y^j} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial g^{il}}{\partial y^j} g_{ml} G^m &= -2g^{il} \frac{A_{jml}}{F} G^m. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial G^i}{\partial y^j} = \gamma_{jk}^i y^k - g^{il} \frac{A_{ljm}}{F} G^m = N_j^i.$$

□

Definición 4.1.3. Decimos que una curva suave $c(t) : [a, b] \rightarrow M$ es una geodésica en una variedad de Finsler (M, F) si es una geodésica de la propagación G (1.2.4) inducido por la métrica F .

Lema 4.1.4. Si $c(t)$ es una geodésica en una variedad de Finsler (M, F) entonces tiene velocidad constante.

Demostración. Primero recordemos que para el tensor fundamental se cumple:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{im}\Gamma_{jk}^m + g_{mj}\Gamma_{ik}^m + \frac{2}{F}\mathcal{A}_{ijk}N_k^m \quad (4.2)$$

Además como $c(t)$ es geodésica entonces

$$\ddot{c}^i(t) + 2G^i(c(t), \dot{c}(t)) = 0 \quad (4.3)$$

Ahora calculamos

$$\frac{d}{dt} [F^2(c(t), \dot{c}(t))] = \frac{d}{dt} [g_{ij}\dot{c}^i(t)\dot{c}^j(t)] = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{c}^k\dot{c}^i\dot{c}^j + 2\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\dot{c}^k\dot{c}^i\dot{c}^j + 2g_{ij}\ddot{c}^i\dot{c}^j.$$

Usando las ecuaciones (4.2) y (4.3) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{c}^k\dot{c}^i\dot{c}^j &= \left(g_{im}\Gamma_{jk}^m + g_{mj}\Gamma_{ik}^m + \frac{2}{F}\mathcal{A}_{ijm}N_l^m \right) \dot{c}^k\dot{c}^i\dot{c}^j = \\ &g_{im}(\Gamma_{jk}^m\dot{c}^k)\dot{c}^i\dot{c}^j + g_{mj}(\Gamma_{ik}^m\dot{c}^k)\dot{c}^i\dot{c}^j + \frac{2}{F}\mathcal{A}_{ijm}N_k^m\dot{c}^k\dot{c}^i\dot{c}^j. \end{aligned}$$

Usamos que $N_j^i = \Gamma_{jk}^i\dot{c}^k$ para obtener

$$\Rightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{c}^k\dot{c}^i\dot{c}^j = g_{im}N_j^m\dot{c}^i\dot{c}^j + g_{mj}N_i^m\dot{c}^i\dot{c}^j + \frac{2}{F}\mathcal{A}_{ijm}N_k^m\dot{c}^k\dot{c}^i\dot{c}^j.$$

Luego como $N_j^m\dot{c}^j = 2G^m$, $\frac{\mathcal{A}_{ijm}}{F} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{c}^k\dot{c}^i\dot{c}^j = 2g_{im}G^m\dot{c}^i + 2g_{mj}G^m\dot{c}^j + 4\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}G^k\dot{c}^i\dot{c}^j.$$

Por la ecuación (4.3) $\ddot{c}^i = -2G^i(c, \dot{c})$, sustituimos y obtenemos

$$2\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\dot{c}^k\dot{c}^i\dot{c}^j + 2g_{ij}\ddot{c}^i\dot{c}^j = -4\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}G^k\dot{c}^i\dot{c}^j + g_{ij}G^i\dot{c}^j\right).$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} [F^2(c(t), \dot{c}(t))] = \frac{d}{dt} [g_{ij}\dot{c}^i(t)\dot{c}^j(t)] = 0.$$

□

Definición 4.1.5. Sea (M, F) variedad de Finsler, decimos que F es positivamente (negativamente) completa si toda geodésica $\sigma(t)$ en (a, b) puede extenderse a una geodésica en (a, ∞) ($(-\infty, b)$). F es completa si es completa tanto positiva como negativamente.

4.2. Métricas proyectivamente equivalentes

Seguramente el lector recuerda de sus cursos de geometría riemanniana, que el determinar las geodésicas de una variedad no siempre es una tarea fácil. Incluso con nuestra definición alternativa de geodésica con base en propagaciones, no resulta claro que las podamos calcular con mayor facilidad. Con el fin de proveer ejemplos interesantes de geodésicas introduciremos un concepto de equivalencia entre las geodésicas determinadas por dos métricas de Finsler. Un resultado importante será que podremos aprovechar las geodésicas que conocemos en las variedades riemannianas y veremos como es que se comportan en el contexto más general de una métrica de Finsler.

Sean (M, F) , (M, \bar{F}) dos métricas de Finsler en una misma variedad M . Diremos que F y \bar{F} son proyectivamente equivalentes si sus geodésicas son las mismas, como conjuntos de puntos. Más formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 4.2.1. Dadas dos métricas de Finsler F, \bar{F} en una variedad M . Son proyectivamente equivalentes si dada $\bar{\sigma}(\bar{t})$ geodésica de \bar{F} existe una parametrización $\bar{t} = \bar{t}(t)$ tal que $\sigma(t) := \bar{\sigma}(\bar{t}(t))$ es una geodésica de F .

Proposición 4.2.2. Sean F, \bar{F} métricas de Finsler en una variedad diferenciable M . (M, F) y (M, \bar{F}) son proyectivamente equivalentes si y sólo si las propagaciones correspondientes cumplen

$$G^i(x, y) = \bar{G}^i(x, y) + P(x, y)y^i,$$

donde $P(x, y)$ es una función tal que $P(x, \lambda y) = \lambda P(x, y) \forall \lambda > 0$.

Demostración. Denotemos ahora por G y por \bar{G} a las propagaciones correspondientes a F y a \bar{F} respectivamente. Supongamos que F es equivalente a \bar{F} . Sea $y \in T_x M \setminus 0$, $\sigma(t)$ una geodésica de F tal que $\sigma(0) = x$ y $\dot{\sigma}(0) = y$. Entonces existe una reparametrización $\bar{t}(t)$ tal que $\bar{\sigma}(\bar{t}) := \sigma(t)$ es una geodésica de \bar{F} . Recordemos que una curva $\sigma(t)$ en M se llama geodésica si es una curva C^∞ , tal que su levantamiento canónico $\gamma(t) := \dot{\sigma}(t)$ es una curva integral de la propagación G (4.1.3), en otras palabras $\gamma(t)$ debe cumplir

$$\ddot{\sigma}^i(t) + 2G^i(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) = 0.$$

Entonces dado

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(\bar{t}(t)) \text{ se tiene entonces } \frac{d}{dt}\sigma(t) = \frac{d}{dt}\bar{\sigma}(\bar{t}(t))$$

$$\Rightarrow \dot{\sigma}(t) = \dot{\bar{\sigma}}(\bar{t})\dot{\bar{t}}(t) \text{ derivando una vez más obtenemos}$$

$$\ddot{\sigma}(t) = \dot{\bar{\sigma}}(\bar{t})\ddot{\bar{t}}(t) + \ddot{\bar{\sigma}}(\bar{t})(\dot{\bar{t}}(t)) \text{ evaluando en 0 y simplificando}$$

$$\ddot{\sigma}(0) = \dot{\bar{\sigma}}(0)\ddot{\bar{t}}(0) + \ddot{\bar{\sigma}}(0).$$

Ahora recordando que $\sigma(t)$ es una geodésica de la propagación G vemos

$$2G^i(x, y) = -\ddot{\sigma}^i(0) = -\dot{\bar{\sigma}}^i(0) - \ddot{\bar{t}}(0)\dot{\bar{\sigma}}^i(0) = 2\bar{G}^i(x, y) - \ddot{\bar{t}}(0)y^i,$$

pues de antemano sabemos que $\dot{\bar{\sigma}}(0) = y$.

Llamémosle $P = -\frac{1}{2}\ddot{\bar{t}}(0)$, es claro que la parametrización $\bar{t}(t)$ solamente depende de $x \in M$ y de $y \in T_x M$ por lo cual $P = P(x, y)$. De hecho P cumple

$$P(x, \lambda y) = \lambda P(x, y), \lambda > 0.$$

Por lo tanto obtenemos la siguiente ecuación

$$G^i(x, y) = \bar{G}^i(x, y) + P(x, y)y^i \quad (4.4)$$

Y es claro que de cumplirse la ecuación anterior llegamos a que F es proyectivamente equivalente a \bar{F} . Así tenemos una relación entre las geodésicas de las métricas y sus respectivas propagaciones. \square

Una vez desarrollada la teoría de cuando dos métricas de Finsler son proyectivamente equivalentes resulta necesario poner a prueba la herramienta que hemos construido. Veremos como son las geodésicas de dos métricas de Finsler, y además mostraremos que una de ellas es completa positiva mientras que la otra si es completa.

4.2.1. Geodésicas en la métrica de Funk

Recordando la definición de métrica de Funk (2.2.1) , en $B^n \subset \mathbb{R}^n$.

$$F := \frac{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - \|x\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle}{1 - \|x\|^2}$$

Lema 4.2.3. *La métrica de Funk en $B^n \subset \mathbb{R}^n$ cumple:*

$$F_{x^k} = FF_{y^k}.$$

Demostración. Basta calcular las derivadas correspondientes.

$$\begin{aligned} F_{x^k} &= \left(\frac{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - \|x\|^2} \right)_{x^k} + \left(\frac{\langle x, y \rangle}{1 - \|x\|^2} \right)_{x^k} = \\ &= \frac{(-\|y\|^2 x^k + \langle x, y \rangle y^k) (1 - \|x\|^2)}{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)} (1 - \|x\|^2)^2} + \\ &+ \frac{2\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)} x^k}{(1 - \|x\|^2)^2} + \frac{(y^k (1 - \|x\|^2) + 2\langle x, y \rangle x^k)}{(1 - \|x\|^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{y^k} &= \left(\frac{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - \|x\|^2} \right)_{y^k} + \left(\frac{\langle x, y \rangle}{1 - \|x\|^2} \right)_{y^k} = \\ &= \frac{y^k - \|x\|^2 y^k + \langle x, y \rangle x^k}{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)} (1 - \|x\|^2)} + \frac{x^k}{1 - \|x\|^2} \end{aligned}$$

Entonces al multiplicar obtenemos

$$\begin{aligned} FF_{y^k} &= \left(\frac{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - \|x\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle}{1 - \|x\|^2} \right) \\ &\left(\frac{y^k - \|x\|^2 y^k + \langle x, y \rangle x^k}{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)} (1 - \|x\|^2)} + \frac{x^k}{1 - \|x\|^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)} (y^k - \|x\|^2 y^k + \langle x, y \rangle x^k)}{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)} (1 - \|x\|^2)^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - \|x\|^2} \right) \left(\frac{x^k}{1 - \|x\|^2} \right) + \\
& + \left(\frac{\langle x, y \rangle (y^k - \|x\|^2 y^k + \langle x, y \rangle x^k)}{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)} (1 - \|x\|^2)^2} \right) + \left(\frac{\langle x, y \rangle x^k}{(1 - \|x\|^2)^2} \right)
\end{aligned}$$

□

Lema 4.2.4. *La métrica de Funk es proyectivamente equivalente a la métrica euclidiana.*

Demostración. Calcularemos la propagación inducida por F usando la propiedad $F_{x^k} = FF_{y^k}$ demostrada en el lema anterior. Primero la propagación inducida por F está definida como:

$$G^i := \frac{1}{4} g^{il} \{ [F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l} \}.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
G^i &= \frac{1}{4} g^{il} \{ [2FF_{x^k}]_{y^l} y^k - [2FF_{x^l}] \} = \frac{1}{2} g^{il} \{ [F_{y^l} F_{x^k} + FF_{x^k y^l}] y^l - 2FF_{x^l} \} \\
&\Rightarrow G^i = \frac{1}{2} g^{il} \{ FF_{y^l} (y^k F_{y^k}) + FF_{x^k y^l} y^k - FF_{x^l} \} = \\
&= \frac{1}{2} g^{il} \{ F (FF_{y^l}) + FF_{x^k y^l} y^k - FF_{x^l} \}.
\end{aligned}$$

Como $FF_{y^l} = F_{x^l}$ entonces

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{2} g^{il} \{ FF_{x^l} + FF_{x^k y^l} y^k - FF_{x^l} \} = \frac{1}{2} g^{il} \{ FF_{x^k y^l} y^k \}. \\
&\Rightarrow G^i = \frac{1}{2} g^{il} \{ F[F_{x^k}]_{y^l} y^k \} = \frac{1}{2} g^{il} \{ F[FF_{y^k}]_{y^l} y^k \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{2} g^{il} \{ F[F_{y^l} F_{y^k} + FF_{y^k y^l}] y^k \} = \frac{1}{2} g^{il} \{ FF_{y^l} (F_{y^k} y^k) + FF_{y^k y^l} y^k \} = \\
&= \frac{1}{2} g^{il} \{ F^2 F_{y^l} + FF_{y^k y^l} y^k \}.
\end{aligned}$$

Usando que $F^2 = g_{il} y^i y^l$ y $F_{y^k y^l} y^k = F_{y^l y^k} y^k = 0$.

$$\Rightarrow G^i = \frac{1}{2}g^{il} \{g_{il}y^i y^l F_{y^l}\} = \frac{1}{2}Fy^i = \hat{G}^i + Py^i,$$

donde $\hat{G}^i = 0$ es la propagación inducida por la métrica euclidiana y $P = \frac{1}{2}Fy^i$. Por lo tanto F es proyectivamente equivalente a la métrica euclidiana. \square

Por el lema anterior F es proyectivamente equivalente a la métrica euclidiana, con lo cual las geodésicas son rectas. Mostraremos ahora que la métrica de Funk en B^n es completa positiva pero no completa.

Dado un punto $x \in B^n$ y un vector distinto de cero $y \in T_x B^n$, damos una curva

$$c(t) = s(t)a + x, \quad (4.5)$$

donde $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ es un vector tal que $y = ka$ para alguna $k > 0$. Determinaremos la función $s(t)$ que parametriza la curva $c(t)$.

Pedimos además que la curva $c(t)$ cumpla $c(0) = x$ y $\dot{c}(0) = y$. Esto es equivalente a pedir que la función $s(t)$ cumpla $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = k$.

Así tenemos que la curva $c(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 c^i}{dt^2} + F(c(t), \dot{c}(t)) \frac{dc^i}{dt} = 0. \quad (4.6)$$

Primero evaluamos $F(c(t), \dot{c}(t))$

$$F(c(t), \dot{c}(t)) = \frac{\sqrt{\|\dot{c}\|^2 - (\|c\|^2 \|\dot{c}\|^2 - \langle c, \dot{c} \rangle^2)}}{1 - \|c\|^2} + \frac{\langle c, \dot{c} \rangle}{1 - \|c\|^2}.$$

Para simplificar los cálculos desarrollaremos $\|c\|^2$, $\|\dot{c}\|^2$ y $\langle c, \dot{c} \rangle$.

$$\|c\|^2 = \sum_{i=1}^n (sa_i + x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (s^2 a_i^2 + 2sa_i x_i + x_i^2) = s^2 + 2s \langle a, x \rangle + \|x\|^2.$$

$$\|\dot{c}\|^2 = \sum_{i=1}^n (s' a_i)^2 = (s')^2.$$

$$\langle c, \dot{c} \rangle = \sum_{i=1}^n s' a_i (sa_i + x_i) = s' (s + \langle a, x \rangle).$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\dot{c}\|^2 - \left(\|c\|^2 \|\dot{c}\|^2 - \langle c, \dot{c} \rangle^2 \right) &= (s')^2 - \left((s^2 + 2s \langle a, x \rangle + \|x\|^2) (s')^2 \right) + \\
(s')^2 (s + \langle a, x \rangle)^2 &= (s')^2 \left(1 - s^2 - 2s \langle a, x \rangle - \|x\|^2 + s^2 + 2s \langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2 \right) \\
&= (s')^2 \left(1 - \|x\|^2 + \langle a, x \rangle^2 \right).
\end{aligned}$$

Además

$$1 - \|c\|^2 = 1 - (s^2 + \|x\|^2 + 2s \langle a, x \rangle).$$

Por lo tanto tenemos

$$F(c, \dot{c}) = s' \left(\frac{(s + \langle a, x \rangle) + \sqrt{1 - \|x\|^2 + \langle a, x \rangle^2}}{1 - (s^2 + \|x\|^2 + 2s \langle a, x \rangle)} \right).$$

Como a y x son vectores en \mathbb{R}^n podemos tomar el ángulo entre ellos:

$$\cos \theta = \frac{\langle a, x \rangle}{\|x\| \|a\|} \Rightarrow \|x\| \cos \theta = \langle a, x \rangle.$$

Definimos $\lambda = \|x\|$ y sustituimos en $F(c, \dot{c})$

$$s' \left(\frac{(s + \lambda \cos \theta) + \sqrt{1 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos^2 \theta}}{1 - s^2 - \lambda^2 - 2s\lambda \cos \theta} \right).$$

Usamos la identidad trigonométrica $\lambda^2 = \lambda^2 \cos^2 \theta + \lambda^2 \sen^2 \theta$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F(c, \dot{c}) &= s' \left(\frac{(s + \lambda \cos \theta) + \sqrt{1 - \lambda^2 \sen^2 \theta}}{1 - s^2 - \lambda^2 \cos^2 \theta - \lambda^2 \sen^2 \theta - 2s\lambda \cos \theta} \right). \\
\Rightarrow F(c, \dot{c}) &= s' \left(\frac{(s + \lambda \cos \theta) + \sqrt{1 - \lambda^2 \sen^2 \theta}}{(1 - \lambda^2 \sen^2 \theta) - (s + \lambda \cos \theta)^2} \right). \\
\Rightarrow F(c, \dot{c}) &= s' \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sen^2 \theta} - (s + \lambda \cos \theta)} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{d^2 c^i}{dt^2} + F(c, \dot{c}) \frac{dc^i}{dt} = s'' a_i + \frac{(s')^2}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} - (s + \lambda \cos \theta)} a_1 = 0.$$

Así basta resolver la ecuación diferencial

$$s'' + \frac{(s')^2}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} - (s + \lambda \cos \theta)} = 0.$$

Distribuimos adecuadamente y reescribimos esta última ecuación como:

$$s'' \left(\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} - \lambda \cos \theta \right) - s'' s + (s')^2 = 0.$$

Definimos $\eta := \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} - \lambda \cos \theta$ e introducimos la función $h(s) := s'$. Tenemos entonces que

$$s'' = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (h(s)) = \frac{dh(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dh(s)}{ds} h(s).$$

Sustituimos y la ecuación diferencial queda

$$\eta \frac{dh(s)}{ds} h(s) - \frac{dh(s)}{ds} h(s) s + (h(s))^2 = 0.$$

Despejamos $\frac{dh(s)}{ds}$

$$\Rightarrow \frac{dh(s)}{ds} = \frac{h(s)}{s - \eta}.$$

Consideramos la solución $h(s) \neq 0$ y dividimos por $h(s)$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dh(s)}{ds}}{h(s)} = \frac{1}{s - \eta}.$$

Integramos respecto a s

$$\int \frac{\frac{dh(s)}{ds}}{h(s)} ds = \int \frac{ds}{s - \eta} \Rightarrow \ln(h(s)) = \ln(s - \eta) + c_1.$$

$$\Rightarrow h(s) = e^{c_1} (s - \eta).$$

Recordamos que $h(s) = s'$ y hacemos el cambio de variable para obtener

$$\frac{s'}{s - \eta} = e^{c_1}.$$

Integramos con respecto a t

$$\begin{aligned} \int \frac{s'}{s - \eta} dt &= \int e^{c_1} dt \Rightarrow \ln(s - \eta) = te^{c_1} + c_2. \\ \Rightarrow s &= e^{te^{c_1} + c_2} + \eta. \end{aligned}$$

Usamos que las condiciones iniciales son $s(0) = 0$ y $s'(0) = k$ para obtener los valores de c_1 y c_2 . Por lo tanto la solución es:

$$s(t) = \eta \left(1 - e^{-\frac{kt}{\eta}} \right) = \left(\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta \right) \left(1 - e^{\frac{-kt}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta}} \right)$$

Buscamos ahora el intervalo máximo para el que está definida nuestra solución $s(t)$. Para ello consideremos una recta $r(l) = la + x$, veamos para que valor $l \in \mathbb{R}$ se tiene que $r(l)$ corta a \mathbb{S}^{n-1} .

Entonces calculamos la solución a

$$1 = \langle r(l), r(l) \rangle = \sum_{i=1}^n (la_i + x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (l^2 a_i^2 + 2la_i x_i + x_i^2) = l^2 + 2l \lambda \cos \theta + \lambda^2.$$

Resolvemos para l y sus raíces son

$$l_0 = -\lambda \cos \theta - \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta}, \quad (4.7)$$

$$l_1 = -\lambda \cos \theta + \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta}. \quad (4.8)$$

Ahora tenemos que ver si existen valores t_0, t_1 tales que $s(t_0) = l_0$, $s(t_1) = l_1$. Para esto basta considerar

$$l_0 = s(t) \Leftrightarrow -\lambda \cos \theta - \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \eta \left(1 - e^{-\frac{kt}{\eta}} \right).$$

Entonces despejamos t

$$\begin{aligned} \frac{-kt}{\eta \left(\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta \right)} &= 1 + \frac{\lambda \cos \theta + \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta}. \\ \Rightarrow \frac{-kt}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta} &= \ln \left(1 + \frac{\lambda \cos \theta + \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t = -\ln \left(1 + \frac{\lambda \cos \theta + \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta} \right) \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta}{k}.$$

Para la otra raíz

$$l_1 = s(t) \Leftrightarrow -\lambda \cos \theta + \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \eta \left(1 - e^{\frac{-kt}{\eta}} \right)$$

Para este caso observamos que cuando tratamos de despejar t

$$e^{\frac{-kt}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta}} = 1 + \frac{\lambda \cos \theta - \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta} = 0.$$

Y por lo tanto no existe t para el cual $l_1 = s(t)$. Esto nos dice que el intervalo máximo en el que está definida $s(t)$ es $(-t_0, \infty)$, donde

$$t_0 := \ln \left(1 + \frac{\lambda \cos \theta + \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta} \right) \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda \cos \theta}{k}.$$

Así queda demostrado que la métrica de Funk es positiva completa pero no completa.

4.2.2. La métrica de Klein

Aunque el ejemplo anterior (4.2.1) muestra que las variedades de Finsler no son en general completas, esto no quiere decir que no podamos construir ejemplos de métricas de Finsler que sí lo sean. Aquí mostramos que la métrica de Klein definida en (2.2.1), sí es completa.

La métrica de Klein en B^n es:

$$H(x, y) := \frac{1}{2} \{F + \bar{F}\},$$

donde F es la métrica de Funk y $\bar{F}(x, y) = F(x, -y)$.

Sabemos que la métrica de Funk cumple $F_{x^k} = F F_{y^k}$, es fácil ver que \bar{F} cumple: $\bar{F}_{x^k} = -\bar{F} \bar{F}_{y^k}$. Antes de proceder a calcular la propagación inducida por H demostremos la siguiente propiedad:

$$H_{x^k y^l} y^k = H_{x^l} \tag{4.9}$$

$$H_{x^k y^l} y^k = \frac{1}{2} \{F_{x^k y^l} + \bar{F}_{x^k y^l}\} y^k$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow H_{x^k y^l} y^k &= \frac{1}{4} \left\{ [F^2]_{y^k y^l} - [\bar{F}]_{y^k y^l} \right\} y^k \\
\Rightarrow H_{x^k y^l} y^k &= \frac{1}{4} \left\{ [F^2]_{y^l} - [\bar{F}]_{y^l} \right\} \\
\Rightarrow H_{x^k y^l} y^k &= \frac{1}{2} \{ F_{x^l} + \bar{F}_{x^l} \} = H_{x^l}.
\end{aligned}$$

Ahora la propagación de H .

$$\begin{aligned}
G^i &= \frac{1}{4} g^{il} \left\{ [H^2]_{x^k y^l} y^k - [H^2]_{x^l} \right\}. \\
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{2} g^{il} \left\{ [H_{y^l} H_{x^k} + H H_{x^k y^l}] y^k - H H_{x^l} \right\}
\end{aligned}$$

Por la ecuación (4.9)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{2} g^{il} \{ H_{y^l} H_{x^k} y^k \} \\
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{8} g^{il} \left\{ (F + \bar{F})_{y^l} (F + \bar{F})_{x^k} y^k \right\} \\
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{8} g^{il} \left\{ (F_{y^l} + \bar{F}_{y^l}) (F_{x^k} + \bar{F}_{x^k}) y^k \right\} \\
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{8} g^{il} \left\{ (F_{y^l} + \bar{F}_{y^l}) (F F_{y^k} - \bar{F} \bar{F}_{y^k}) y^k \right\} \\
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{8} g^{il} \left\{ (F_{y^l} + \bar{F}_{y^l}) (F y^k F_{y^k} - \bar{F} y^k \bar{F}_{y^k}) \right\} \\
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{8} g^{il} \left\{ (F_{y^l} + \bar{F}_{y^l}) (F^2 - \bar{F}^2) \right\} \\
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{8} g^{il} \left\{ (F_{y^l} + \bar{F}_{y^l}) (F^2 - \bar{F}^2) \frac{(F + \bar{F})}{(F + \bar{F})} \right\} \\
\Rightarrow G^i &= \frac{1}{8} g^{il} \left\{ (F_{y^l} + \bar{F}_{y^l}) (F - \bar{F}) \frac{(F + \bar{F})^2}{(F + \bar{F})} \right\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow G^i = \frac{1}{8} g^{il} \left\{ (F_{y^l} + \bar{F}_{y^l}) (F - \bar{F}) \frac{4H^2}{(F + \bar{F})} \right\}$$

Como $H^2 = g_{il} y^i y^l$, al sustituir obtenemos

$$\begin{aligned} \Rightarrow G^i &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(F_{y^l} + \bar{F}_{y^l}) (F - \bar{F})}{F + \bar{F}} y^i y^l \right\} \\ \Rightarrow G^i &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(y^l F_{y^l} + y^l \bar{F}_{y^l}) (F - \bar{F})}{F + \bar{F}} \right\} y^i. \end{aligned}$$

Por lo tanto H es proyectivamente plana es decir, $G^i = P y^i$.

$$G^i = \frac{1}{2} \{F - \bar{F}\} y^i$$

Entonces podemos calcular las geodésicas de manera similar al ejemplo de la métrica de Funk. Sean $x \in B^n$, $y \in T_x B^n$ vector no nulo. Definimos la curva

$$c(t) = s(t)a + x,$$

donde $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $y = ka$ para algún $k > 0$. Además pedimos que $c(t)$ cumpla las siguientes condiciones iniciales: $c(0) = x$, $\dot{c}(0) = y$. Mismas que son equivalentes a $s(0) = 0$ y $\dot{s}(0) = k$.

Como $c(t)$ es geodésica entonces debe satisfacer

$$\frac{d^2 c^i}{dt^2} + \{F - \bar{F}\} (c, \dot{c}) \frac{dc^i}{dt}.$$

Observamos que

$$\bar{F}(c, \dot{c}) = \frac{\sqrt{\|\dot{c}\|^2 - (\|c\|^2 \|\dot{c}\|^2 - \langle c, \dot{c} \rangle^2)}}{1 - \|c\|^2} - \frac{\langle c, \dot{c} \rangle}{1 - \|c\|^2}.$$

Por lo tanto

$$\{F - \bar{F}\} (c, \dot{c}) = \frac{\sqrt{\|\dot{c}\|^2 - (\|c\|^2 \|\dot{c}\|^2 - \langle c, \dot{c} \rangle^2)}}{1 - \|c\|^2}.$$

Para las geodésicas de la métrica de Funk vimos que $\|c\|^2 = s^2 + 2s \langle a, x \rangle + \|x\|^2$, $\|\dot{c}\|^2 = (s')^2$ y $\langle c, \dot{c} \rangle = s'(s + \langle a, x \rangle)$. Sustituimos en la ecuación anterior para obtener:

$$s' \frac{\sqrt{1 - (\|x\|^2 - \langle a, x \rangle^2)}}{1 - (s^2 + 2s \langle a, x \rangle + \|x\|^2)}.$$

Además tenemos que si θ es el ángulo entre los vectores a y x , entonces

$$\cos \theta = \frac{\langle a, x \rangle}{\|x\| \|a\|} \Rightarrow \lambda \cos \theta = \langle a, x \rangle,$$

donde definimos $\lambda := \|x\|$.

Entonces la ecuación queda de la siguiente forma:

$$s' \left(\frac{\sqrt{1 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos^2 \theta}}{1 - s^2 - \lambda^2 - 2s\lambda \cos \theta} \right) = s' \left(\frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \theta) - (s + \lambda \cos \theta)^2} \right).$$

Así la ecuación diferencial a resolver es:

$$s'' + \frac{(s')^2 \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \theta) - (s + \lambda \cos \theta)^2} = 0.$$

Despejamos

$$s'' \left((s + \lambda \cos \theta)^2 - (1 - \lambda^2 \sin^2 \theta) \right) - (s')^2 \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} = 0.$$

Para simplificar los cálculos definimos $\mu := \lambda \cos \theta$ y $\nu := \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}$.

$$\Rightarrow s'' \left((s + \mu)^2 - \nu^2 \right) - (s')^2 \nu = 0.$$

Definimos la función $g(s) = s'$, notamos que $s'' = \frac{dg(s)}{ds} g(s)$.

$$\Rightarrow \frac{dg(s)}{ds} g(s) \left((s + \mu)^2 - \nu^2 \right) - (g(s))^2 \nu = 0.$$

Despejamos $\frac{dg(s)}{ds}$.

$$\frac{dg(s)}{ds} = \frac{g(s)\nu}{(s + \mu)^2 - \nu^2}.$$

Consideremos la solución $g(s) \neq 0$ y pasamos dividiendo

$$\frac{\frac{dg(s)}{ds}}{g(s)} = \frac{\nu}{(s-\mu)^2 - \nu^2}.$$

Integramos respecto a s para obtener

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{dg(s)}{ds}}{g(s)} ds &= \int \frac{\nu ds}{(s-\mu)^2 - \nu^2} \Rightarrow \ln(g(s)) = \ln\left((s+\mu)^2 - \nu^2\right) + c_1 \\ &\Rightarrow g(s) = e^{c_1} \left((s+\mu)^2 - \nu^2\right). \end{aligned}$$

Hacemos la sustitución $g(s) = s'$.

$$\Rightarrow s' = e^{c_1} (s^2 + 2s\mu + \mu^2 - \nu^2).$$

Resolvemos el polinomio $s^2 + 2s\mu + \mu^2 - \nu^2 = 0$, para encontrar las raíces $s_1 = -\mu + \nu$ y $s_2 = -\mu - \nu$.

$$\Rightarrow s' = e^{c_1} (s + \mu - \nu)(s + \mu + \nu).$$

Pasamos dividiendo $(s + \mu - \nu)(s + \mu + \nu)$ e integramos respecto de t .

$$\frac{1}{e^{c_1}} \int \frac{s'}{(s + \mu - \nu)(s + \mu + \nu)} dt = \int 1 dt.$$

Resolvemos la integral por fracciones parciales

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{e^{c_1}} \int \left(\frac{s'}{2\nu(s + \mu - \nu)} - \frac{s'}{2\nu(s + \mu + \nu)} \right) dt = \int 1 dt. \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\nu e^{c_1}} (\ln(s + \mu - \nu) - \ln(s + \mu + \nu)) = t + c_2. \end{aligned}$$

Despejamos s

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{s + \mu - \nu}{s + \mu + \nu}\right) = (t + c_2) 2\nu e^{c_1}.$$

$$\Rightarrow s + \mu - \nu = (s + \mu + \nu) e^{(t+c_2)2\nu e^{c_1}}.$$

Definimos $d_1 = e^{c_1}$, $d_2 = e^{c_2 2\nu e^{c_1}}$ para simplificar la fórmula. Entonces tenemos

$$s(t) = \frac{(\mu + \nu) d_2 e^{t2\nu d_1} + \nu - \mu}{1 + d_2 e^{t2\nu d_1}}.$$

Ahora dadas las condiciones iniciales $s(0) = 0$ y $s'(0) = k$ obtenemos las constantes d_1 y d_2 .

$$s(0) = 0 \Leftrightarrow (\mu + \nu) d_2 + \nu - \mu = 0 \Leftrightarrow d_2 = \frac{\mu - \nu}{\mu + \nu}.$$

Para la condición inicial $s'(0) = 0$ calculemos primero s'

$$\begin{aligned} s' &= \\ &\left(1 + \frac{\mu - \nu}{\mu + \nu} e^{t d_1 2\nu}\right)^2 - \\ &\quad - \frac{((\mu - \nu) e^{t d_1 2\nu} + \nu - \mu) \left(\frac{\mu - \nu}{\mu + \nu} d_1 2\nu e^{t d_1 2\nu}\right)}{\left(1 + \frac{\mu - \nu}{\mu + \nu} e^{t d_1 2\nu}\right)^2} \\ \Rightarrow s' &= \frac{(\mu - \nu) d_1 2\nu e^{t d_1 2\nu} - \frac{(\mu - \nu)^2}{\mu + \nu} d_1 2\nu e^{t d_1 4\nu}}{\left(1 + \frac{\mu - \nu}{\mu + \nu} e^{t d_1 2\nu}\right)^2}. \end{aligned}$$

Entonces $s'(0) = k$ si y sólo si

$$\begin{aligned} &\frac{(\mu - \nu) d_1 2\nu - \frac{(\mu - \nu)^2}{\mu + \nu} d_1 2\nu}{\left(1 + \frac{(\mu - \nu)}{\mu + \nu}\right)^2} = k. \\ \Leftrightarrow d_1 &= k \left(1 + \frac{(\mu - \nu)}{\mu + \nu}\right)^2 \left(\mu - \nu - \frac{(\mu - \nu)^2}{\mu + \nu}\right)^{-1} = \\ &= k (\mu - \nu)^{-1} \left(\frac{2\mu}{\mu + \nu}\right)^2 \left(\frac{2\nu}{\mu + \nu}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{(\mu - \nu) e^{4t\left(\frac{k}{\mu - \nu}\right)} + \nu - \mu}{1 + \frac{\mu - \nu}{\mu + \nu} e^{4t\left(\frac{k}{\mu - \nu}\right)}} \\ \Rightarrow s(t) &= (\mu^2 - \nu^2) \left(\frac{e^{4t\left(\frac{k}{\mu - \nu}\right)} - 1}{(\mu + \nu) + (\mu - \nu) e^{4t\left(\frac{k}{\mu - \nu}\right)}}\right). \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior calculamos cuando es que una recta de la forma $ta + x$ corta a \mathbb{S}^{n-1} (4.7), las raíces son:

$$l_0 = -\lambda \cos \theta - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} = -\mu - \nu,$$

$$l_1 = -\lambda \cos \theta + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} = -\mu + \nu.$$

Supongamos que existen puntos en el dominio de la curva que pasan por las raíces. Para l_0 tenemos

$$\begin{aligned} (\mu^2 - \nu^2) \left(\frac{e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})} - 1}{(\mu + \nu) + (\mu - \nu) e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})}} \right) &= -\mu - \nu. \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\mu - \nu} \left((\mu + \nu) + (\mu - \nu) e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})} \right) &= e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})} - 1 \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{(\mu + \nu)}{\mu - \nu} &= 2e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{-2\nu}{\mu - \nu} \right) &= e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})}, \end{aligned}$$

donde la última equivalencia no se puede dar pues la exponencial es estrictamente mayor que cero.

Para l_1

$$\begin{aligned} -\mu + \nu &= (\mu^2 - \nu^2) \left(\frac{e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})} - 1}{(\mu + \nu) + (\mu - \nu) e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{-\mu + \nu}{\mu^2 - \nu^2} \left((\mu + \nu) + (\mu - \nu) e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})} \right) &= e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})} - 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{-\mu + \nu}{\mu - \nu} \right) (\mu - \nu) + 1 &= e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})} (1 - (\mu - \nu)) \\ \Leftrightarrow \frac{-\mu + \nu + \mu - \nu}{\mu - \nu} &= e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})} (1 - (\mu - \nu)). \\ \Leftrightarrow 0 &= e^{4t(\frac{k}{\mu-\nu})} (1 - (\mu - \nu)), \end{aligned}$$

lo cual no es posible pues la exponencial es distinta de cero para todo t .

Así queda demostrado que el dominio de la curva $c(t) = s(t)a + x$ se extiende a todo \mathbb{R} y con ello H es completa.

4.3. Curvatura

Introduciremos resultados sobre la forma de curvatura asociada a una conexión, en este caso la conexión de Chern, tales como las identidades de Bianchi.

Consideremos así las *2-formas de curvatura* de la conexión de Chern.

$$\Omega_j^i := d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i.$$

Ahora al ser 2-formas en $TM \setminus 0$ las podemos expandir de la siguiente manera:

$$\Omega_j^i := \frac{1}{2}R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2}Q_{jkl}^i \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F}.$$

A R , P y Q se les conoce como los tensores de *hh-curvatura*, *hv-curvatura* y *vv-curvatura* respectivamente. Recordemos que a $TM \setminus 0$ le habíamos dado una métrica de Sasaki misma que le otorga una conexión de Ehresmann, es decir, una descomposición en un subespacio vertical y uno horizontal respecto a dicha métrica.

Los componentes dx^k son llamados *horizontales*, mientras que los $\frac{\delta y^k}{F}$ son los *verticales*. Así cuando hablamos de *hv-curvatura* nos referimos a la presencia de dx^k o de $\frac{\delta y^k}{F}$.

Más adelante mostraremos que la *vv-curvatura* se desvanece para la conexión de Chern, y que en el caso de variedades riemannianas lo mismo pasa para la *hv-curvatura*.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer

$$R_{jlk}^i = -R_{jkl}^i, Q_{jlk}^i = -Q_{jkl}^i.$$

Ahora consideremos lo siguiente. La conexión de Chern es libre de torsión, es decir, se tiene $dx^j \wedge \omega_j^i$. Ahora aplicando la derivada exterior obtenemos

$$dx^j \wedge d\omega_j^i,$$

pero sabemos que $dx^j \wedge d\omega_j^k \wedge \omega_k^i = 0$, por lo cual podemos restarlo sin afectar la igualdad anterior. Y con ello

$$dx^j \wedge d\omega_j^i - dx^j \wedge d\omega_j^k \wedge \omega_k^i = dx^j \wedge \Omega_j^i = 0.$$

Expandiendo Ω_j^i ,

$$dx^j \wedge \left(\frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2} Q_{jkl}^i \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F} \right) =$$

$$\frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^j \wedge dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2} Q_{jkl}^i dx^j \wedge \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F} = 0.$$

Entonces los distintos coeficientes deben anularse, procedamos uno por uno.

- Para Q se tiene que al anularse es simétrico en los índices k y l , lo cual implica que $Q_{jkl}^i = 0$.
- Para P al anularse vemos que es simétrico en j y k , es decir $P_{jkl}^i = P_{kjl}^i$.
- Finalmente para R obtenemos la *primera identidad de Bianchi*

$$R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0. \quad (4.10)$$

Observamos que la expresión de la forma de curvatura Ω_j^i depende solamente de $dx^k \wedge dx^l$ y de $dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}$, es decir, tiene la forma:

$$\Omega_j^i := \frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}. \quad (4.11)$$

4.3.1. Fórmulas para R y P

En la sección anterior dedujimos la expresión (4.11) para las 2-formas de curvatura de la conexión de Chern. Ahora buscaremos expresiones para R y P en términos de los símbolos de Christoffel. Usando la primera definición de estas 2-formas tenemos:

$$d\omega_j^i - \omega_j^h \wedge \omega_h^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}. \quad (4.12)$$

Observemos que $d\omega_j^i = d\Gamma_{jl}^i \wedge dx^l$, como $d\Gamma_{jl}^i$ es una 1-forma en $TM \setminus 0$ podemos expresarla en términos de dx^k y $\frac{\delta y^k}{F}$. Entonces

$$d\omega_j^i = \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} dx^k \wedge dx^l + F \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial y^k} \frac{\delta y^k}{F} \wedge dx^l$$

$$= \frac{\delta\Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} dx^k \wedge dx^l - F \frac{\partial\Gamma_{jl}^i}{\partial y^k} dx^l \wedge \frac{\delta y^k}{F}.$$

Ahora para $-\omega_j^h \wedge \omega_k^i = \omega_k^i \wedge \omega_j^h$ sustituimos $d\omega_j^i = d\Gamma_{jl}^i \wedge dx^l$ y obtenemos

$$\omega_k^i \wedge \omega_j^h = \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h dx^k \wedge dx^l. \quad (4.14)$$

Sustituyendo las fórmulas (4.13) y (4.14) en (4.12)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\delta\Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} + \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h \right) dx^k \wedge dx^l - F \frac{\partial\Gamma_{jk}^i}{\partial y^l} dx^k \wedge \frac{\partial y^l}{F} \\ &= \frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} R_{jkl}^i = \frac{\delta\Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} + \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h.$$

Como R es antisimétrico se sigue que

$$R_{jkl}^i = \frac{\delta\Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} - \frac{\delta\Gamma_{jk}^i}{\delta x^l} + \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h - \Gamma_{hl}^i \Gamma_{jk}^h. \quad (4.15)$$

De manera análoga

$$P_{jkl}^i = -F \frac{\partial\Gamma_{jk}^i}{\partial y^l}. \quad (4.16)$$

Finalmente observamos que $P_{jkl}^i = -F \frac{\partial\Gamma_{jk}^i}{\partial y^l} \Rightarrow P_{kjl}^i = P_{jkl}^i$.

4.3.2. Curvatura riemanniana

En esta sección hablaremos un poco sobre el concepto de curvatura, en principio curvatura de Riemann. Definamos entonces el tensor de Riemann.

Recordando la *2 forma de curvatura* de la conexión de Chern

$$\Omega_j^i := \frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}.$$

Definición 4.3.1. Definimos el tensor de Riemann

$$\mathcal{R} := R_k^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k$$

con

$$R_k^i := y^j R_{jkl}^i y^l$$

Lema 4.3.2. Sea (M, F) variedad de Finsler. El tensor de Riemann \mathcal{R} depende solamente de la propagación inducida por F

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Demostración. En (4.15) mostramos que R_{jkl}^i se expresa en base a los símbolos de Christoffel Γ_{jk}^i de la siguiente manera:

$$R_{jkl}^i = \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} - \frac{\delta \Gamma_{jk}^i}{\delta x^l} + \Gamma_{ks}^i \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{ls}^i.$$

Ahora tenemos que $N_j^i = y^m \Gamma_{mj}^i$ y $\frac{\delta}{\delta x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} + N_k^i \frac{\partial}{\partial y^i}$.

$$R_{kl}^i = \frac{\partial N_l^i}{\partial x^k} - \frac{\partial N_k^i}{\partial x^l} + N_l^s \frac{\partial N_k^i}{\partial y^s} - N_k^s \frac{\partial N_l^i}{\partial y^s}.$$

$$R_k^i = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^i \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k} \quad (4.17)$$

□

4.3.3. Curvatura bandera

Así como la curvatura seccional generaliza para variedades riemannianas la idea de curvatura de Gauss que se tenía para superficies, en esta sección veremos como poder llevar esta noción a los espacios de Finsler.

Para poder definir nuestra “bandera” necesitaremos lo siguiente:

- Un punto $p \in M$ en el que plantaremos el asta.
- Un vector $y \in T_p M$ distinto de cero, el cual servirá de asta.
- Un vector $v := v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ que sea l.i. a y .

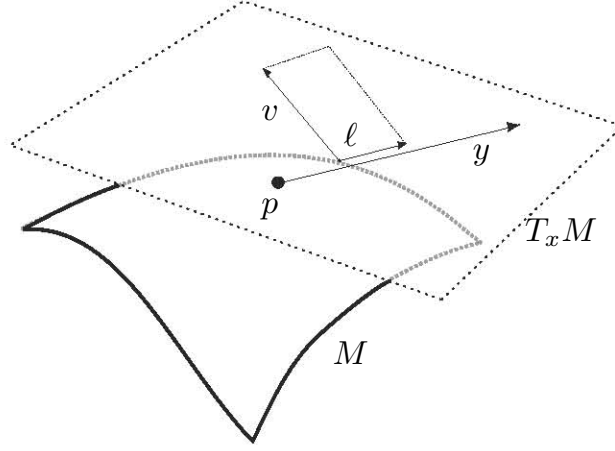


Figura 4.1: Bandera.

Para mayor claridad refirámonos a la figura (4.1). Con lo anterior podemos definir la *curvatura bandera* como sigue:

$$K(y, v) := \frac{v^i (y^j R_{jikl} y^l) v^k}{g(y, y)g(v, v) - [g(y, v)]^2} \quad (4.18)$$

recordando que

$$g := g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i, y^j} dx^i \otimes dx^j$$

el tensor fundamental.

Observemos que si dividimos por $F^2(p, y)$ del lado derecho de (4.18) no se afecta la igualdad, entonces:

$$\begin{aligned} K(y, v) &= \frac{\frac{1}{F^2(p, y)} v^i (y^j R_{jikl} y^l) v^k}{\frac{1}{F^2(p, y)} (g(y, y)g(v, v) - [g(y, v)]^2)} = \\ &= \frac{v^i (\ell^j R_{jikl} \ell^l) v^k}{g(\ell, \ell)g(v, v) - [g(\ell, v)]^2} = K(\ell, v) \end{aligned}$$

donde $\ell = \ell^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es la sección distinguida definida en (3.1.4). Así obtenemos una expresión más simple para la curvatura bandera $g(\ell, \ell) = 1$.

$$K(y, v) = \frac{v^i R_{ik} v^k}{g(v, v) - [g(\ell, v)]^2} \quad (4.19)$$

donde $R_{ik} := \ell^j R_{jikl} \ell^l$.

Proposición 4.3.3. *Sea F una métrica riemanniana en una variedad M . Entonces para todo $p \in M$, se tiene que $K(y, v) = K(v)$ es decir la curvatura bandera es independiente de la elección del vector y . Con lo cual coincide con la curvatura seccional.*

Demostración. Como F es riemanniana se tiene que el tensor fundamental $g_{ij} = g_{ij}(x)$ y $R_{jkl}^i = R_{jkl}^i(x)$. Con lo cual $R_{jikl} = g_{im} R_{jkl}^m$ depende únicamente de $x \in M$.

Entonces tenemos que

$$R_{ik}(x, y) v^i v^k = R_{jikl}(x) y^j y^l v^i v^k = R_{ijlk}(x) v^i v^k y^j y^l = R_{jl}(x, y) y^j y^l.$$

Luego dado un punto $x \in M$, un asta $y \in T_x M \setminus 0$. y un vector $v \in T_x M \setminus 0$ li. a y .

$$\begin{aligned} K(y, v) &= \frac{R_{ik}(x, y) v^i v^k}{(g_{jl}(x) g_{ik}(x) - g_{ij}(x) g_{kl}(x)) y^j y^l v^i v^k} = \\ &= \frac{R_{jl}(x, y) y^j y^l}{(g_{jl}(x) g_{ik}(x) - g_{ij}(x) g_{kl}(x)) y^j y^l v^i v^k} = K(v, y), \end{aligned}$$

es decir la curvatura bandera es independiente de $y \in P \setminus \{0\}$. \square

Es decir, con el resultado anterior vemos que la curvatura bandera generaliza la curvatura seccional definida para variedades riemannianas.

Definición 4.3.4. *Sea (M, F) una variedad de Finsler. Decimos que F tiene curvatura bandera escalar si $K(y, v) = K(x, y)$, donde $x \in M$, es decir, si K es una función escalar en $TM \setminus 0$.*

Lema 4.3.5. *Sea (M, F) variedad de Finsler. M es de curvatura bandera escalar si y sólo si $R_k^i = K(x, y) F^2 h_k^i$, con $K(x, y)$ función escalar en $TM \setminus 0$ y $h_k^i = \delta_k^i - F^{-2} g_{kq} y^q y^i$.*

Demostración. La prueba es clara pues dado $x \in M$, $y, v \in T_x M \setminus \{0\}$ l.i.

$$\begin{aligned} v^i R_{ik} v^k &= v^i g_{im} R_k^m v^k = K(x, y) v^i g_{im} \{F^2 \delta_k^m - g_{kq} y^q y^m\} v^k. \\ &\Leftrightarrow v^i R_{ik} v^k = K(x, y) \{g_{im} F^2 \delta_k^m v^i v^k - g_{im} v^i y^m g_{kq} v^k y^q\} \\ &\Leftrightarrow v^i R_{ik} v^k = K(x, y) \left\{ g(y, y) g(v, v) - [g(y, v)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.3.6. *Toda métrica de Finsler proyectivamente plana es de curvatura bandera escalar.*

Demostración. Sea (M, F) métrica de Finsler proyectivamente plana, es decir, los coeficientes de la propagación inducida por F son de la forma $G^i = P y^i$

Como ya demostramos que los coeficientes R_k^i del tensor de Riemann dependen solamente de la propagación inducida por F basta sustituir $G^i = P y^i$.

$$\begin{aligned} R_k^i &= 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2 G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k}. \\ \Rightarrow R_k^i &= 2 \frac{\partial (P y^i)}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 (P y^i)}{\partial x^j \partial y^k} + 2 (P y^j) \frac{\partial^2 (P y^i)}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial (P y^i)}{\partial y^j} \frac{\partial (P y^j)}{\partial y^k}. \\ &\Rightarrow R_k^i = \{P^2 - y^j P_{x^j}\} \delta_k^i + \{2P_{x^k} - y^j P_{x^j y^k} - P P_{y^k}\} y^i. \end{aligned}$$

Definimos $\Theta := P^2 - P_{x^k} y^k$, $\Lambda_k := 2P_{x^k} - y^j P_{x^j y^k} - P P_{y^k}$. Se sigue además que $\Lambda_k = 3(P_{x^k} - P P_{y^k}) + \Theta_{y^k}$.

$$R_k^i = \Theta \delta_k^i + \Lambda_k y^i \quad (4.20)$$

Obtenemos también que

$$\Lambda_k y^k = -\Theta,$$

$$R_{jk} := g_{ij} R_k^i = \Theta g_{jk} + \Lambda g_{ij} y^i.$$

Como $R_{jk} = R_{kj}$,

$$\Rightarrow \Lambda_k g_{ij} y^i = \Lambda_j g_{ik} y^i.$$

Contrayendo esta última expresión con y^j y usando $\Lambda_k y^k = -\Theta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda_k g_{ij} y^i y^j &= \Lambda_j g_{ik} y^i y^j \\ \Rightarrow \Lambda_k F^2 &= \Lambda_j y^j g_{ik} y^i y^j = -\Theta g_{ik} y^i \\ \Rightarrow \Lambda_k &= -\Theta F^{-1} F_{y^k}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esto último en (4.20)

$$R_k^i = \Theta \{ \delta_k^i - F^{-1} F_{y^k} y^i \} \quad (4.21)$$

Por lo tanto F tiene curvatura bandera escalar y podemos calcularla mediante

$$K = \frac{\Theta}{F^2} = \frac{P^2 - P_{x^k} y^k}{F^2} \quad (4.22)$$

□

Ahora que tenemos algunos resultados acerca de la curvatura bandera veamos algunos ejemplos.

- En $B^n \subset \mathbb{R}^n$ la métrica de Funk

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - \|x\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle}{1 - \|x\|^2},$$

tiene curvatura bandera negativa. En la sección de geodésicas demostramos que la métrica de Funk, F , es proyectivamente equivalente a la métrica euclidiana (4.2.4), para ello calculamos la propagación inducida y vimos que es de la forma $G^i = P y^i$. Por la proposición anterior tenemos que F es de curvatura bandera escalar y además en la demostración dimos una expresión (4.22) para calcularla en base a la propagación.

$$K = \frac{P^2 - P_{x^k} y^k}{F^2},$$

con lo cual al sustituir $P = \frac{1}{2}F$

$$\Rightarrow K = \frac{\frac{F^2}{4} - \frac{F_{x^k}}{2} y^k}{F^2} = \frac{\frac{F^2}{4} - \frac{FF_{y^k}}{2} y^k}{F^2} = \frac{\frac{F^2}{4} - \frac{F(y^k F_{y^k})}{2}}{F^2} = \frac{\frac{F^2}{4} - \frac{F^2}{2}}{F^2}.$$

Por lo tanto la métrica de Funk tiene curvatura bandera escalar negativa igual a $-\frac{1}{4}$.

- En $B^n \subset \mathbb{R}^n$ la métrica de Klein

$$H := \frac{1}{2} \{F + \bar{F}\},$$

donde F es la métrica de Funk y $\bar{F} = F(x, -y)$.

En la sección de geodésicas mostramos que la métrica de Klein es proyectivamente plana (4.2.2) y además

$$G^i = P y^i = \frac{1}{2} \{F - \bar{F}\} y^i.$$

Por la ecuación (4.22) podemos calcular la curvatura de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K &= \frac{P^2 - P_{x^k} y^k}{H^2} = \frac{\frac{1}{4} (F - \bar{F})^2 - \frac{1}{2} (F - \bar{F})_{x^k} y^k}{\frac{1}{4} (F + \bar{F})^2} = \\ &= \frac{(F - \bar{F})^2 - 2(F F_{y^k} + \bar{F} \bar{F}_{y^k}) y^k}{(F + \bar{F})^2}. \\ \Rightarrow K &= \frac{(F - \bar{F})^2 - 2(F^2 + \bar{F}^2)}{(F + \bar{F})^2} = -1. \end{aligned}$$

4.3.4. S-curvatura

Ahora discutamos un poco una noción de curvatura que no se presenta en el caso de que la variedad sea riemanniana. Para (M, F) variedad de Finsler tenemos que cada espacio tangente es un espacio de Minkowski. Consideremos la indicatriz S_F en $T_p M$, como se había mencionado antes esta hipersuperficie cerrada es homeomorfa a \mathbb{S}^1 . Podríamos decir que se

trata intuitivamente de, digamos un intento de dibujar un círculo (esfera) a mano alzada.

Sea V un espacio vectorial con F una norma de Minkowski. Sean $\{b_i\}$, $\{\theta^i\}$ bases de V y V^* respectivamente, definimos así

$$\sigma_F := \frac{\text{Vol}\{B^n\}}{\text{Vol}\{y^i \in \mathbb{R}^n | F(y^i b_i) < 1\}}$$

y

$$dV_F := \sigma_F \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n.$$

Observemos que σ_F depende de la elección de la base $\{b_i\}$, mientras que dV_F está bien definida.

Queremos ver cómo es que varía σ_F respecto al tensor fundamental g , para ello definiremos el concepto de distorsión en un espacio de Minkowski.

Definición 4.3.7. *Sea V un espacio vectorial con F norma de Minkowski, $g_{ij} := \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j}(y)$. Entonces definimos la distorsión de F como:*

$$\tau(y) := \ln \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(y))}}{\sigma_F}$$

Nótese que en general $\sigma_F \neq \sqrt{\det(g_{ij}(y))}$.

Para la demostración de la siguiente proposición necesitaremos un lema de álgebra lineal.

Lema 4.3.8 (Fórmula de Jacobi). *Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ una curva suave. Entonces la derivada del determinante de A es*

$$\frac{d \det(A)}{dt} = \text{tr} \left(\text{adj}(A) \frac{dA}{dt} \right).$$

Nótese además que si A es invertible entonces $\text{adj}(A) = A^{-1}$.

Demostración. La demostración de este lema se encuentra en el apéndice. \square

Como una aplicación de la fórmula de Jacobi calculamos τ_{y^k} .

$$\tau_{y^k} = \frac{\partial}{\partial y^k} \left[\ln \sqrt{\det(g_{ij})} \right],$$

pues nótese que σ_F depende únicamente de x . Luego por la fórmula de Jacobi

$$\frac{\partial}{\partial y^k} \left[\ln \sqrt{\det(g_{ij})} \right] = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = g^{ij} \frac{\mathcal{A}_{ijk}}{F}.$$

Por lo tanto

$$\tau_{y^k} = g^{ij} \frac{\mathcal{A}_{ijk}}{F}. \quad (4.23)$$

Ahora si trabajamos en variedades de Finsler (M, F) tenemos que por definición $F(x, \cdot)$ es una norma de Minkowski, con lo cual es fácil extender la definición de distorsión a toda la variedad. De igual manera el lema anterior puede extenderse a una variedad de Finsler y con ello obtenemos que la distorsión τ nos permite diferenciar estructuras de Finsler de métricas riemannianas en un punto de la variedad.

Ahora resultará conveniente encontrar una manera de calcular explícitamente, en especial para los ejemplos, el valor de $\sigma_F(x)$. Empecemos considerando el caso en que nuestra variedad sea riemanniana. Sea

$$\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}, \quad y = y^i e_i \in T_x M.$$

Sea además A una matriz tal que $A^t A = (a_{ij})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\det(A) > 0$, además la transformación lineal $x = Ay$ manda a $\mathcal{U}_x := \left\{ (y^i) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} < 1 \right\}$ en la bola unitaria B^n . Tenemos también que

$$\det(A^t A) = \det((a_{ij})) \Rightarrow \det(A) = \sqrt{\det(a_{ij})}.$$

Calculemos el volumen de la bola unitaria

$$\begin{aligned} \text{Vol} \{B^n\} &= \int_{B^n} dx^1 \dots dx^n. \\ \Rightarrow \text{Vol} \{B^n\} &= \int_{\mathcal{U}_x} \det(A) dy^1 \dots dy^n. \end{aligned}$$

Entonces

$$\text{Vol} \{\mathcal{U}_x\} = \frac{\text{Vol} \{B^n\}}{\sqrt{\det(a_{ij})}}.$$

Por lo tanto

$$\sigma_\alpha(x) = \sqrt{\det(a_{ij})}.$$

Proposición 4.3.9. *Sea (M, F) una variedad de Finsler. Son equivalentes:*

- 1 F es riemanniana.
- 2 τ es constante.
- 3 $\tau = 0$.

Demostración. 1 \Rightarrow 3.

Como (M, F) es riemanniana entonces tenemos que $\sigma_F = \sqrt{\det(g_{ij})}$. Por lo tanto

$$\tau = \ln \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{\sigma_F} = \ln 1 = 0.$$

3 \Rightarrow 2. Es obvio.

2 \Rightarrow 1.

Como τ es constante, entonces $\tau_{y^k} = 0$ para toda k .

Por lo tanto $\frac{\partial A_{ij^k}}{\partial y^k} = 0$ y por el lema (2.2.8) se sigue que F es riemanniana. \square

En general no podemos expresar a $\sigma_F(x)$ en términos de funciones elementales. Sin embargo veremos que para métricas de Randers (2.2.1) sí es posible.

Lema 4.3.10. *Sea (M, F) variedad de Finsler, $F = \alpha + \beta$ métrica de Randers, donde $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ es una métrica riemanniana y $\beta = b_i y^i$ es una 1-forma. Entonces*

$$\sigma_F(x) = (1 - \|\beta\|_\alpha^2)^{\frac{n+1}{2}} \sigma_\alpha(x).$$

Demostración. Dado $x \in M$, sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de $(T_x M, \alpha_x)$ tal que $\beta(y) = \|B\|_\alpha y^1$. Denotemos por $\mathcal{U}_x := \{(y^i) \in \mathbb{R}^n \mid F(x, y^i e_i) < 1\}$

Entonces tenemos para $(y^i) \in \mathbb{R}^n$.

$$F(x, y^i e_i) < 1. \Leftrightarrow \alpha(x, y^i e_i) + \beta(x, y^i e_i) < 1.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a_{ij}y^i y^j} + b_i y^i < 1.$$

Despejamos $\sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ y elevamos al cuadrado.

$$a_{ij}y^i y^j < (1 - b_i y^i)^2 \Rightarrow a_{ij}y^i y^j < 1 - 2\|\beta\|_\alpha y^1 + \|\beta\|_\alpha^2 (y^1)^2.$$

Como la base $\{e_i\}$ es ortonormal tenemos que $a_{ij}y^i y^j = \delta_{ij}y^i y^j$.

$$(y^1)^2 + \sum_{j=2}^n (y^j)^2 < 1 - 2\|\beta\|_\alpha y^1 + \|\beta\|_\alpha^2 (y^1)^2.$$

$$\Rightarrow (y^1)^2 - (y^1)^2 \|\beta\|_\alpha^2 + \sum_{j=2}^n (y^j)^2 < 1 - 2\|\beta\|_\alpha y^1.$$

$$\Rightarrow (1 - \|\beta\|_\alpha^2) (y^1)^2 + 2\|\beta\|_\alpha y^1 + \frac{\|\beta\|_\alpha^2}{1 - \|\beta\|_\alpha^2} + \sum_{j=2}^n (y^j)^2 < 1 + \frac{\|\beta\|_\alpha^2}{1 - \|\beta\|_\alpha^2}.$$

$$\Rightarrow (1 - \|\beta\|_\alpha^2) \left(y^1 + \frac{\|\beta\|_\alpha}{1 - \|\beta\|_\alpha^2} \right)^2 + \sum_{j=2}^n (y^j)^2 < 1 + \frac{\|\beta\|_\alpha^2}{1 - \|\beta\|_\alpha^2}.$$

$$\Rightarrow (1 - \|\beta\|_\alpha^2)^2 \left(y^1 + \frac{\|\beta\|_\alpha}{1 - \|\beta\|_\alpha^2} \right)^2 + (1 - \|\beta\|_\alpha^2) \sum_{j=2}^n (y^j)^2 < (1 - \|\beta\|_\alpha^2) + \|\beta\|_\alpha^2.$$

Por lo tanto tenemos que $F(x, y) < 1$ es equivalente a

$$(1 - \|\beta\|_\alpha^2)^2 \left(y^1 + \frac{\|\beta\|_\alpha}{1 - \|\beta\|_\alpha^2} \right)^2 + (1 - \|\beta\|_\alpha^2) \sum_{j=2}^n (y^j)^2 < 1.$$

Es claro entonces que la imagen de la bola B^n bajo la transformación $z^1 = (1 - \|\beta\|_\alpha^2) (y^1 + \|\beta\|_\alpha)$, $z^i = \sqrt{1 - \|\beta\|_\alpha^2} y^i$, $\forall i > 1$, es \mathcal{U}_x . Además el determinante de dicha transformación es $(1 - \|\beta\|_\alpha^2)^{\frac{n+1}{2}}$

Por lo tanto

$$\text{Vol}\{\mathcal{U}_x\} = \frac{\text{Vol}\{B^n\}}{(1 - \|\beta\|_\alpha^2)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\det(a_{ij})}}.$$

Además tenemos que

$$dV_F = (1 - \|\beta\|_\alpha^2)^{\frac{n+1}{2}} dV_\alpha.$$

□

Lo pertinente ahora sería estudiar como cambia la distorsión en la variedad al tomar trayectorias, naturalmente trabajaremos en las geodésicas definidas anteriormente.

Definición 4.3.11 (S-curvatura). *Sea (M, F) una variedad de Finsler, τ distorsión. Entonces para cada vector $y \in T_p M$, sea $\gamma = \gamma(t)$ una geodésica tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = y$*

$$\mathcal{S}(p, y) := \frac{d}{dt} [\tau(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))] |_{t=0}.$$

Luego \mathcal{S} es homogénea positiva de grado uno, es decir,

$$\mathcal{S}(p, \lambda y) = \lambda \mathcal{S}(p, y), \lambda > 0.$$

Lema 4.3.12. *La S-curvatura puede expresarse como:*

$$\mathcal{S} = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m} (\ln \sigma_F),$$

donde G^m es la propagación inducida por F .

Demostración. Sea $p \in M$, $y \in T_p M$ y $\gamma = \gamma(t)$ una geodésica tal que $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = y$. Entonces por definición

$$\mathcal{S}(p, y) = \frac{d}{dt} [\tau(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))] |_{t=0}.$$

Calculamos

$$\frac{d}{dt} [\tau(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))] |_{t=0} = \dot{\gamma}^i(0) \frac{\partial \tau}{\partial x^i} + \ddot{\gamma}^i(0) \frac{\partial \tau}{\partial y^i}.$$

Nótese que como γ es geodésica entonces $\ddot{\gamma}^i = -2G^i$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} [\tau(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))] |_{t=0} = y^i \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial y^i} G^i.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\ln \frac{\sqrt{\det(g_{ml})}}{\sigma_F} \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \sqrt{\det(g_{ml})} - \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sigma_F). \end{aligned}$$

Por la fórmula de Jacobi (4.3.8) tenemos

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial x^i} = \frac{1}{2} g^{ml} \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sigma_F).$$

Al sustituir obtenemos:

$$\frac{d}{dt} [\tau(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))] |_{t=0} = \frac{1}{2} g^{ml} \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i} y^i - 2 \frac{\partial \tau}{\partial y^i} G^i - y^i \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sigma_F).$$

Calculemos

$$\frac{\partial G^m}{\partial y^m} = N_m^m = \gamma_{mi}^m y^i - g^{ml} \frac{A_{mli}}{F} G^i.$$

Ahora

$$\gamma_{mi}^m = \frac{1}{2} g^{ml} \left\{ \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l} \right\} y^i$$

Basta observar que $\frac{\partial g_{li}}{\partial x^m} y^i = \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l} y^i$

$$\Rightarrow \gamma_{mi}^m = \frac{1}{2} g^{ml} \left\{ \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i} \right\} y^i.$$

Mostramos anteriormente que $\tau_{y^i} = g^{lm} \frac{A_{lmi}}{F}$. Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} [\tau(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))] |_{t=0} = \frac{\partial G^i}{\partial y^i} - y^i \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sigma_F).$$

□

Definición 4.3.13. Sea (M, F) una variedad de Finsler. F tiene S -curvatura isotrópica si

$$\mathcal{S} = (n+1)cF,$$

donde $c = c(x)$ es una función escalar en M . Decimos que F tiene S -curvatura constante si $\mathcal{S} = (n+1)cF$ para c constante.

Lema 4.3.14. Sean $G = (g_{ij})$, $H = (h_{ij})$ matrices simétricas de $n \times n$ y $c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$ vector. Supongamos que H es invertible con $H^{-1} = (h^{ij})$. Si $g_{ij} = h_{ij} + \lambda c_i c_j$. entonces

$$\det(g_{ij}) = (1 + \lambda h^{ij} c_i c_j) \det(h_{ij}).$$

Además si $(1 + \lambda h^{ij} c_i c_j) \neq 0$, G es invertible y su inversa está dada por

$$G^{-1} = (g^{ij}) = \left(h^{ij} - \frac{\lambda c^i c^j}{1 + \lambda h^{rs} c_r c_s} \right),$$

donde $c^i := h^{ij} c_j$.

Demostración. La demostración de este lema puede consultarse en el apéndice. \square

Ahora veamos un ejemplo. Consideremos la métrica de Funk (2.2.1) definida en B^n

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{\|y\|^2 - (\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - \|x\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle}{1 - \|x\|^2}$$

Definimos la matriz

$$a_{ij} = \frac{1}{1 - \|x\|^2} \left(\delta_{ij} + \frac{x^i x^j}{1 - \|x\|^2} \right).$$

Aplicando el lema (4.3.14) tenemos:

1. $\det(a_{ij}) = \frac{1}{(1 - \|x\|^2)^{n+1}}$.
2. $a^{ij} = (1 - \|x\|^2) (\delta^{ij} - x^i x^j)$.

Entonces tenemos que al ser F métrica de Randers

$$\|\beta\|_\alpha = \sqrt{a^{ij} b_i b_j} = \|x\|,$$

$$dV_\alpha = (1 - \|x\|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx^1 \dots dx^n.$$

Así obtenemos

$$dV_F = (1 - \|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}} dV_\alpha = (1 - \|x\|^2)^{\frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{2}} dx^1 \dots dx^n.$$

Por lo tanto

$$\sigma_F = 1.$$

En la sección de geodésicas mostramos que F es proyectivamente plana (4.2.4) y calculamos

$$P = \frac{1}{2}F.$$

Para calcular la S -curvatura de F necesitamos calcular $\frac{\partial(Py^m)}{\partial y^m}$.

$$\frac{\partial(Py^m)}{\partial y^m} = \frac{\partial P}{\partial y^m}y^m + nP = P_{y^m}y^m + nP.$$

Nótese que $P = \frac{1}{2}F$ entonces

$$P_{y^m}y^m = \frac{1}{2}F_{y^m}y^m = \frac{1}{2}F.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial(Py^m)}{\partial y^m} = (n+1)P.$$

Luego como $\sigma_F = 1$ entonces $\ln\sigma_F = 0$. Por el lema (4.3.12) concluimos

$$S = \frac{n+1}{2}F.$$

CAPÍTULO 5

Conclusiones

A lo largo de este trabajo desarrollamos la teoría básica necesaria para estudiar a las variedades de Finsler. Para concluir mencionamos algunos temas que resultan interesantes para profundizar nuestro estudio de las variedades de Finsler.

En el capítulo 4 definimos dos tipos de curvatura en variedades de Finsler: la curvatura bandera (4.18) y la S-curvatura (4.3.11). La primera es una generalización de la curvatura seccional para variedades riemannianas, la segunda es un concepto exclusivo de las variedades de Finsler.

La métricas de Randers son quizá las más sencillas de entre las métricas de Finsler. En general no es claro que se pueda describir la distorsión (4.3.7) en términos de funciones elementales, sin embargo mostramos que en espacios de Randers si es posible (4.3.10). Resulta entonces natural estudiar como se comportan la S-curvatura y la curvatura bandera en estas métricas. Es posible dar una clasificación de espacios de Randers homogéneos de S-curvatura isotrópica y curvatura bandera positiva [8].

En esta tesis solamente desarrollamos propiedades geométricas intrínsecas a las variedades. Para estudiar subvariedades en geometría de Finsler hace falta introducir la noción de curvatura media y curvatura normal. Además es necesario definir las ecuaciones que relacionan la curvatura de la subvariedad respecto a la variedad ambiente, así como la conexión intrínseca y la inducida.[13]

También podemos tomar un enfoque más afín al Análisis geométrico y probar teoremas de comparación del Laplaciano, Hessiano y de volúmenes bajo restricciones sobre la curvatura de nuestras variedades de Finsler [19]. Aquí resulta interesante mencionar que la medida de Hausdorff no es útil en este contexto [1], pues en este artículo se construye una clase de métricas en \mathbb{R}^3 para las cuales si usamos la medida de Hausdorff como noción de volumen en una variedad de Finsler se deduce que las subvariedades totalmente geodésicas no son necesariamente mínimas. Este inconveniente se soluciona al considerar el volumen de Holmes-Thompson.

APÉNDICE A

Algunos resultados de Álgebra Lineal

En este apéndice reunimos un par de lemas que usamos en la sección dedicada a S -curvatura del capítulo 4.

Lema A.0.15. Sean $G = (g_{ij})$, $H = (h_{ij})$ matrices simétricas de $n \times n$, $c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$ un vector y $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que H es invertible con $H^{-1} = (h^{ij})$. Si $g_{ij} = h_{ij} + \lambda c_i c_j$, entonces

$$\det(g_{ij}) = (1 + \lambda h^{ij} c_i c_j) \det(h_{ij}).$$

Además si $(1 + \lambda h^{ij} c_i c_j) \neq 0$ entonces G es invertible y $G^{-1} = (g^{ij})$ es

$$g^{ij} = h^{ij} - \frac{\lambda c^i c^j}{1 + \lambda h^{rs} c_r c_s},$$

donde $c^i = h^{ik} c_k$.

Demostración. Comencemos probando el lema para el caso $H = Id_{\mathbb{R}^n} = I$. Definimos $\sqrt{\lambda}c := (\sqrt{\lambda}c_i)$, y las matrices

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ (\sqrt{\lambda}c)^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + (\sqrt{\lambda}c)(\sqrt{\lambda}c)^t & \sqrt{\lambda}c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(\sqrt{\lambda}c)^t & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I & \sqrt{\lambda}c \\ 0 & 1 + \lambda\delta^{ij}c_i c_j \end{pmatrix}$$

Tomando el determinante concluimos que

$$\det(G) = \det(I + \lambda c^t c) = (1 + \lambda\delta^{ij}c_i c_j) \det(I).$$

Para el caso general basta notar que:

$$\det(G) = \det(h_{ij} + \lambda c_i c_j) = \det(h_{ij}) \det(\delta_{ij} + \lambda h^{ij} c_i c_j).$$

Ahora supongamos que $(1 + \lambda h^{ij} c_i c_j) \neq 0$, es claro entonces que $\det(G) \neq 0$. Por lo tanto es invertible. Luego

$$G = H + (\lambda c_i c_j) = H + (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t.$$

Definimos la matriz B como

$$B = H^{-1} - \frac{H^{-1} (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1}}{1 + (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1} (\sqrt{\lambda}c)}.$$

Veamos que $GB = I$.

$$\begin{aligned} GB &= \left(H + (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t \right) \left(H^{-1} - \frac{H^{-1} (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1}}{1 + (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1} (\sqrt{\lambda}c)} \right) \\ &\Rightarrow GB = HH^{-1} + (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1} - \\ &\quad - \frac{HH^{-1} (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1} + (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1} (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1}}{1 + (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1} (\sqrt{\lambda}c)} \\ &\Rightarrow GB = I + (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1} - \\ &\quad - \frac{(\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1} + (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1} (\sqrt{\lambda}c) (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1}}{1 + (\sqrt{\lambda}c)^t H^{-1} (\sqrt{\lambda}c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow GB &= I + (\sqrt{\lambda c}) (\sqrt{\lambda c})^t H^{-1} - \\ &= \frac{(\sqrt{\lambda c}) \left[1 + (\sqrt{\lambda c})^t H^{-1} (\sqrt{\lambda c}) \right] (\sqrt{\lambda c})^t H^{-1}}{1 + (\sqrt{\lambda c})^t H^{-1} (\sqrt{\lambda c})} \end{aligned}$$

Notamos que como $1 + (\sqrt{\lambda c})^t H^{-1} (\sqrt{\lambda c})$ es un escalar, entonces podemos simplificar el cociente y la expresión queda

$$GB = I + (\sqrt{\lambda c}) (\sqrt{\lambda c})^t H^{-1} - (\sqrt{\lambda c}) (\sqrt{\lambda c})^t H^{-1} = I.$$

De manera análoga se desarrolla $BG = I$.

□

Lema A.0.16. Sean A, B matrices de $n \times n$. Entonces

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij} = \text{tr}(A^t B).$$

Demostración. Por definición la matriz producto AB tiene entradas

$$(AB)_{jk} = \sum_{i=1}^n A_{ji} B_{ik}.$$

Usando este hecho para $A^t B$

$$(A^t B)_{jk} = \sum_{i=1}^n A_{ij} B_{ik}.$$

Tomamos la traza de ambos lados de la igualdad

$$\text{tr}(A^t B) = \sum_{j=1}^n (A^t B)_{jj} = \sum_{j,i=1}^n A_{ij} B_{ij} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij}.$$

□

Lema A.0.17 (Fórmula de Jacobi). Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ una curva suave. Entonces la derivada del determinante de A es

$$\frac{d \det(A)}{dt} = \text{tr} \left(\text{adj}(A) \frac{dA}{dt} \right).$$

equivalentemente si $d(\det A)$ denota a la diferencial de $\det A$ se tiene

$$d(\det A) = \text{tr}(\text{adj}(A) dA).$$

Nótese además que si A es invertible entonces $\text{adj}(A) = A^{-1}$.

Demostración. Por la fórmula de Laplace para el determinante tenemos

$$\det A = \sum_{j=1}^n A_{ij} \text{adj}^t(A)_{ij},$$

notemos que i es fijo.

Además podemos ver el determinante de A como una función Φ en sus entradas.

$$= \Phi(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{nn}).$$

Así por la regla de la cadena

$$d(\det A) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial A_{ij}} dA_{ij}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}} &= \frac{\partial \sum_{k=1}^n A_{ik} \text{adj}^t(A)_{ik}}{\partial A_{ij}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial (A_{ik} \text{adj}^t(A)_{ik})}{\partial A_{ij}}. \\ &\Rightarrow \frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{ij}} \text{adj}^t(A)_{ik} + A_{ik} \frac{\partial \text{adj}^t(A)_{ik}}{\partial A_{ij}} \right). \end{aligned}$$

Como una entrada A_{ij} de la matriz y un cofactor $\text{adj}^t(A)_{jk}$ están en la misma fila (o columna) esto implica que $\text{adj}^t(A)_{jk}$ no depende de A_{ij} , pues $\text{adj}^t(A)_{ik}$ está expresado en términos de elementos que no se encuentran en su fila (columna.)

$$\frac{\partial \text{adj}^t(A)_{ik}}{\partial A_{ij}} = 0.$$

Entonces

$$\frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}} = \sum_{k=1}^n \operatorname{adj}^t(A)_{ik} \frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{ij}}.$$

Notamos además que las entradas de la matriz son independientes entre sí.

$$\Rightarrow \frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{ij}} = \delta_{kj}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}} = \sum_{k=1}^n \operatorname{adj}^t(A)_{ik} \delta_{kj} = \operatorname{adj}^t(A)_{ij}.$$

Por lo tanto

$$d(\det A) = \sum_{i,j=1}^n \operatorname{adj}^t(A)_{ij} dA_{ij}.$$

Aplicamos el lema anterior

$$d(\det A) = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}^t(A) dA).$$

□

índice alfabético

- 2-formas de curvatura, 59
- conexión
 - de Chern, 31, 34
 - de Ehresmann, 30
 - lineal, 4
- curva
 - integral, 6
 - minimizante, 40
- curvatura
 - bandera, 63
 - bandera escalar, 64
- deformación de la métrica de Klein, 19
- derivada
 - covariante, 4
 - horizontal, 36
 - vertical, 36
- distorsión, 68
- doble haz tangente, 3
- espacio
 - de Minkowski, 9
 - de Randers, 18
- estructura de Finsler, 16
- fórmula de Jacobi, 68, 81
- fibrado inducido, 3
- forma de Hilbert, 27
- geodésica
 - de Finsler, 42
 - de una propagación, 7
- haz vectorial, 2
- hh-curvatura, 59
- hv-curvatura, 59
- indicatriz, 10
- métrica
 - de Finsler, 16
 - de Funk, 19
 - de Klein, 18
 - de Randers, 18
 - de Sasaki, 30
 - proyectivamente equivalente, 44
- marco móvil, 2
- modelo de Klein, 18
- norma de Minkowski, 9
- primera identidad de Bianchi, 60

- propagación, 7
- pullback, 3

- s-curvatura, 67, 72
- s-curvatura isotrópica, 73
- símbolo de Christoffel, 30, 33
- sección
 - diferenciable del haz, 2
 - distinguida, 27
- spray, 7

- tensor
 - de Cartan, 21
 - de Riemann, 62
 - Fundamental, 20
- teorema de Euler, 12

- variedad
 - de Finsler , 16
 - riemanniana, 17
- vv-curvatura, 59

Bibliografía

- [1] Álvarez Paiva, J. C. y Berck G.: *What is wrong with the Hausdorff measure in Finsler spaces*. Adv. Math, 204:647–663, 2006.
- [2] Bao, D., Bryant R.L., Chern S.-S. y Shen Z.: *A Sampler of Riemann-Finsler Geometry*. Cambridge University Press, 2004.
- [3] Bao, D., Chern S.-S. y Shen Z.: *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Springer-Verlag, 2000.
- [4] Blanchard, P., Devaney R. y Hall G.: *Ecuaciones Diferenciales*. International Thompson Editores, 1999.
- [5] Braun, M.: *Differential Equations and their Applications*. Springer-Verlag, 1993.
- [6] Bröcker, T. y Jänich K.: *Introducción a la Topología Diferencial*. Editorial AC, Madrid, 1977.
- [7] Chern, S. S. y Shen Z.: *Riemann-Finsler Geometry*. World Scientific Publishing, 2004.
- [8] Hu, Z. y Deng S.: *Homogeneous Randers spaces with isotropic S-curvature and positive flag curvature*. Mathematische Zeitschrift, 270:989–1009, 2012.
- [9] Jost, Jürgen: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, 2002.

- [10] Mo, X. y Yang Y.: *The existence of harmonic maps from Finsler manifolds to Riemannian manifolds*. Science in China Series A: Mathematics, 48:115–130, 2005.
- [11] Sánchez, Héctor y Palmas Oscar: *Geometría Riemanniana*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2008.
- [12] Sasaki, Shigeo: *On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds*. Tohoku Mathematical Journal, 10(3):338–354, 1958.
- [13] Shen, Z.: *On Finsler geometry of submanifolds*. Mathematische Annalen, (311):549–576, 1998.
- [14] Shen, Z.: *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*. Kluwer Academic, 2001.
- [15] Shen, Z.: *Lectures on Finsler Geometry*. World Scientific Publishing, 2001.
- [16] Spivak, Michael: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volumen 2. Publish or Perish, Inc, 1979.
- [17] Szilasi, József: *Notable Finsler Connections on a Finsler Manifold*. Lect. Mat., 19:7–34, 1998.
- [18] Szilasi, József: *Handbook of Finsler Geometry*, volumen 2, capítulo A setting for Spray and Finsler Geometry, páginas 1185–1426. Kluwer Academic, 2003.
- [19] Wu, B.Y. y Xin Y.L.: *Comparison theorems in Finsler geometry and their applications*. Mathematische Annalen, (337):177–196, 2007.