

MODELACIÓN MATEMÁTICA DE AGLOMERACIONES URBANAS

Oscar Fontanelli Espinosa



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. El crecimiento y la planificación de las ciudades	3
2. Geometría fractal y el modelo DLA	9
2.1. Dimensión fractal	10
2.2. Determinación de la dimensión fractal de un objeto	11
2.3. El modelo DLA	16
3. El Modelo de Percolación Correlacionada	23
3.1. Percolación por sitios	24
3.2. Modelo de Percolación Correlacionada	26
3.3. Reproducciones del modelo	33
4. Conclusiones	39

Introducción

La forma, el crecimiento y la estructura espacial de las ciudades y aglomeraciones urbanas es algo que durante mucho tiempo geógrafos y urbanistas han intentado comprender, con el objetivo de deducir leyes que relacionen el número de asentamientos, su tamaño y densidad de población así como pronosticar la localización de las futuras comunidades, todo con la idea de predecir el desarrollo urbanístico y así desarrollar y mejorar las políticas y técnicas de planeación urbana.

Sin embargo, los enfoques tradicionales, algunos de ellos desarrollados en el siglo XX como la teoría de las ciudades circulares (Burgess, 1925), la teoría de los sectores radiales (Hoyt, 1939) o la hipótesis de los núcleos múltiples (Ullman, 1962) no habían sido capaces de describir el aparente desorden espacial de las ciudades ni de dar una idea satisfactoria de su forma espacial y futuro desarrollo.

En este contexto, el geógrafo Michael Batty del Centro de Análisis Espacial Avanzado en la Universidad de Londres señaló por primera vez la similitud entre el desarrollo de una ciudad y los procesos que dan lugar a estructuras fractales, tales como la autosimilaridad a cualquier escala y las reglas de organización jerárquica entre sus componentes. Inspirado por las nuevas simulaciones computacionales que, basadas en la geometría fractal producían figuras realistas y semejantes a árboles, nubes, costas, etc. emprendió un detallado estudio de la fractalidad de las formas urbanas. En particular, investigó el modelo de agregación limitada por difusión (DLA) y lo propuso para describir el crecimiento de un pueblo o ciudad. Sus ideas y resultados se encuentran en el libro “Fractal Cities” (Batty, 1994).

Al ver los resultados de las simulaciones mediante este modelo, el físico Hernán A. Makse de la Universidad de Boston no quedó satisfecho (Makse, 1998), pues argumentaba que la forma de una ciudad no corresponde en mu-

chos puntos a las estructuras de DLA. Pero observó que los patrones urbanos mostraban una gran semejanza con las estructuras generadas por un modelo de percolación correlacionada que él estaba desarrollando en ese momento. Basado en la idea de que las aglomeraciones urbanas tienden a formarse en las periferias de otras aglomeraciones ya existentes, obtuvo un modelo matemático que representa de forma más realista el desarrollo urbano real. En este modelo, lo que ocurre en un sitio depende de lo que pasa en todos los demás sitios y se representa además la idea de que las personas buscan vivir cerca de otras personas. Makse y sus colegas Eugene Stanley y Shlomo Havlin llevaron a cabo simulaciones computacionales del crecimiento de las ciudades de Berlín y Londres. Descubrieron además que de su modelo podía deducirse una ley de potencias que se observa empíricamente, la cual relaciona el número de pueblos alrededor de una ciudad con el área que éstos abarcan. Los resultados de sus investigaciones fueron publicados en la revista Nature en 1995 (Makse, 1995b).

El objetivo de este trabajo es presentar y analizar estos dos modelos de crecimiento urbano. En el primer capítulo se hablará brevemente de cómo se ha ido transformando el desarrollo urbano en la historia, cómo se ha analizado tradicionalmente y porqué es necesario un nuevo enfoque. En el segundo capítulo de este trabajo se hablará de geometría fractal, se desarrollarán las ideas principales del trabajo de Batty y se presentará el modelo de DLA para describir el crecimiento de una ciudad. En el cuarto capítulo se presentan y desarrollan las ideas de Makse y se muestran las simulaciones que obtuvo para la ciudad de Berlín.

Capítulo 1

El crecimiento y la planificación de las ciudades

Desde que los seres humanos viven en comunidades se han buscado formas de organizar los espacios donde éstas se establecen y ha sido muy importante la planificación del crecimiento y la estructura espacial de estos asentamientos. Los primeros asentamientos humanos de los que se tiene registro se establecieron hace aproximadamente 10 000 años en la región comprendida entre los ríos Tigris y Éufrates en lo que se conoce como la “Revolución Neolítica”, primera revolución agrícola y primer gran cambio en la forma de vida de la humanidad en la que los pueblos pasaron de ser nómadas a sedentarios con el descubrimiento de la agricultura y la ganadería. Estos primeros asentamientos eran muy pequeños y dependían por completo de las circunstancias geográficas y ecológicas del entorno, por lo que su crecimiento era muy irregular, pues éste era el producto de decisiones tomadas a nivel local y motivadas por muy diversos factores (no había además muchos recursos para controlar el ambiente).

Los primeros asentamientos donde se puede ver cierto indicio de planificación espacial pertenecen a las culturas de Mesopotamia, Egipto y del valle del Indo. Es esta última, una antigua civilización de la Edad de Bronce cuyo periodo de madurez abarcó del año 2600 al 1900 a.C., la más antigua donde existe evidencia de haber ciudades deliberadamente planificadas (por ejemplo, calles que forman ángulos rectos entre sí y una distribución estratégica de las viviendas). Estas características son particularmente visibles en las ciudades de Lothal, Mohenjo Daro y Harrapa (donde hay un importante yacimiento arqueológico en lo que hoy es Pakistán).

Fueron las culturas de Grecia y más adelante de Roma las que por primera vez en la historia dieron importancia a la planificación de sus ciudades. El arquitecto y matemático griego Hipodamo de Mileto (Mileto, 498-408 a.C.), conocido como el padre de la planeación urbana, trazó por primera vez planos para la construcción de una ciudad (la ciudad de Mileto); otros ejemplos de ciudades griegas con un alto grado de orden geométrico fueron Priene y Atenas. Fue en el Imperio Romano donde se consolidaron finalmente los esquemas de planificación urbana, persiguiendo principalmente dos fines: la conveniencia civil (comodidad y eficiencia en el uso) y sobre todo la conquista de nuevos territorios y la defensa militar. Los campos militares romanos o *castra* (singular *castrum*) poseían una clara estructura simétrica de mallas, lo cual daba lugar a una muy buena organización de sus ejércitos que podían reunirse y estar preparados en cuestión de horas. Estos campos sirvieron de modelo para la construcción de muchas otras ciudades en diferentes lugares de Europa, principalmente en Inglaterra donde estas ciudades pueden aún hoy identificarse por la terminación *-chester*.

Al entrar Europa en la edad media se perdió la idea de las ciudades puramente geométricas. En vez de eso, éstas crecían de manera natural y casi siempre alrededor de un punto central (típicamente una iglesia o un mercado). Estas ciudades eran generalmente compactas y de morfología irregular. Si existía algún tipo de planificación era casi siempre con base en su funcionalidad militar y de defensa.

Durante el renacimiento se recuperaron las ideas de planeación urbana que habían surgido en Grecia y en Roma. En estos años se empezó a desarrollar por primera vez el concepto de “ciudad ideal”. Un ejemplo clásico de ciudad ideal es la ciudad de Palma Nuova, diseñada por el arquitecto italiano Vincenzo Scamozzi (Vicenza, 1548-1616), que está situada en las afueras de Venecia. Esta ciudad muestra un clara simetría circular en torno a un centro hexagonal y calles radiales que se dirigen a este centro, y así como ésta predominó en Europa la idea de la ciudad circular. Ejemplos de esto son la replanificación de Roma bajo el papado de Pío V (1566-1572) a finales del siglo XVII y siglos más tarde la renovación de París planeada por Georges-Eugène Barón Haussmann (París, 1809-1891) durante el imperio de Napoleón III.

En Mesoamérica mientras tanto había también civilizaciones que planeaban sus ciudades y las construían bajo principios geométricos. El ejemplo más

claro es tal vez Tenochtitlán, capital de la civilización Mexica, fundada en 1325 y que fue construida sobre el lago de Texcoco, la cual contaba con una población de más o menos 200 000 habitantes (era en su época una de las metrópolis más pobladas del mundo) (Batty, 1994).

Gran parte de la planeación urbana europea del siglo XX se desarrolló con base en principios artísticos y estéticos, inspirándose directa o indirectamente en obras como “Construcción de ciudades según principios artísticos” (1889) del arquitecto austriaco Camillo Sitte (Viena, 1843-1903). Esta obra en particular tuvo una enorme influencia en el urbanismo europeo de su época, culminando con movimientos como el Movimiento Ciudad Jardín (método de planeación urbana en Inglaterra con la idea de construir ciudades compactas y autocontenidas rodeadas de “cinturones verdes”), el movimiento *City Beautiful* (reforma arquitectónica norteamericana con el fin de embellecer las ciudades), etc.

Sin embargo, cada vez se ha hecho más evidente que las ciudades, al ser sistemas en continuo cambio y sujetas a una gran cantidad de elementos que actúan sobre ella de manera individual y descoordinada, no poseen las geometrías ideales que en numerosos casos se ha tratado de imponerles. El crecimiento de una ciudad es el resultado de una gran cantidad de decisiones tomadas a pequeña escala, cada una de ellas tomando en cuenta la situación particular de ese lugar, dando lugar a crecimientos desorganizados en los cuales incluso la planificación a gran escala queda al final nada más como una reminiscencia más o menos superficial en la forma de la ciudad. El resultado es una ciudad “desorganizada”, sin simetrías visibles, con calles curvas e irregulares y una distribución desordenada de los espacios libres y los urbanizados.

Es claro que muchas ciudades en general muestran una combinación de ambos “estilos” (planificación urbanística y crecimiento desorganizado), aunque cerca del 95 % de las ciudades que existen o han existido pueden más bien considerarse como desordenadas u orgánicas. Sobre todo en la era moderna el crecimiento económico, la revolución en los medios de transporte y los avances científicos han dado pie a que las ciudades crezcan de manera explosiva, siendo imposible planificar estos crecimientos aceleradísimos. El ejemplo por excelencia de este fenómeno en la ciudad de Nueva York construida originalmente sobre la isla de Manhattan bajo una geometría rectangular pero que se desarrolló muy rápidamente en sus áreas circundantes como Long Island, Jersey, Westchester y Connecticut, en un crecimiento que

no fue planificado y que podría considerarse como explosivo.

Ante esta circunstancia, fue la teórica del urbanismo canadiense Jane Jacobs (EUA, 1916-Canadá, 2006) quien señaló por primera vez la necesidad de estudiar el crecimiento y la morfología urbana desde una perspectiva distinta:

¿Porqué las ciudades no se han identificado, comprendido y tratado desde hace tiempo como problemas de complejidad organizada? Si las personas que se dedican a las ciencias de la vida han sido capaces de identificar sus complicados problemas como problemas de complejidad organizada, ¿porqué no quienes nos dedicamos profesionalmente al estudio de ciudades no hemos identificado el tipo de problemas que ellos tenían? (Jacobs, 1961)

En el ensayo titulado “The death and life of great american cities” (Jacobs, 1961) expone Jane Jacobs por primera vez su idea de la autoorganización espontánea del urbanismo. Este tipo de ideas ha hecho que se cuestionen cada vez más las formas tradicionales de planificación urbana y han hecho ver la necesidad de una nueva manera de abordar este problema. Estas ideas fueron además consideradas más adelante como claros ejemplos del posterior concepto de sistemas emergentes.

Las enormes irregularidades geométricas presentes en prácticamente todas las ciudades del mundo, producto de su crecimiento orgánico, explosivo y descoordinado, había hecho que la geometría pudiera hacer muy poco para describir y estudiar sus morfologías de la misma forma que, citando a Benoit Mandelbrot: “[...] es incapaz de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol. Ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni la corteza es suave ni tampoco el rayo es rectilíneo” (Mandelbrot, 1982). Ha habido, no obstante, algunos intentos de analizar la morfología urbanística utilizando la geometría euclídeana, pero no fue sino hasta 1983 con la invención de una nueva geometría llamada “geometría fractal” que se empezaron a hacer las cosas de manera distinta.

La geometría fractal permitió desde sus inicios en diferentes áreas de la ciencia un estudio muy satisfactorio de sistemas considerados irregulares o desordenados, permitiendo no sólo una buena descripción de ellos sino además identificando principios de orden interno, muchos de ellos estadísticos, en estructuras donde no se apreciaba ningún tipo de orden. El éxito obtenido por esta nueva geometría y las nuevas ideas de sistemas emergentes llevaron

a Batty y Longley a proponer por primera vez el estudio de la morfología urbana haciendo uso de la geometría fractal. En particular, propusieron el modelo de agregación limitada por difusión para analizar el crecimiento de ciudades. Un modelo que ha demostrado concordar mejor con los datos urbanísticos reales fue propuesto en 1995 por Herman Makse et al, basándose en modelos de percolación correlacionada.

La aplicación de los conceptos de la geometría fractal y de la física estadística al crecimiento urbano puede proporcionar en el futuro información muy importante para la planificación y administración de ciudades (un problema muy importante por ejemplo es el control del tamaño de los asentamientos urbanos). Se espera poder obtener información sobre la distribución del tamaño de las ciudades en términos de sus áreas y poblaciones, la dimensión fractal asociada a ciudades aisladas y a sistemas de ciudades, interacciones entre ciudades que podría dar señales de su interdependencia y la relevancia y efectividad de políticas de planeación local, particularmente aquéllas orientadas a la control del crecimiento.

Capítulo 2

Geometría fractal y el modelo DLA

Ya a inicios del siglo XX se había estudiado las propiedades de figuras geométricas con dimensión no entera. Sin embargo, fue Mandelbrot quien por primera vez señaló la importancia que estos objetos podrían tener en otras disciplinas como la física, la biología, la geografía e incluso la economía (Mandelbrot, 1982). Desde entonces el interés en estudiar los objetos fractales ha crecido; en particular, los procesos de crecimiento fractal han generado gran interés pues han permitido el análisis y la clasificación de procesos de crecimiento fuera de equilibrio según sus propiedades escalantes (Sander, 1986).

A grandes rasgos, un fractal es una forma geométrica compleja con estructura fina a cualquier nivel de escala. Usualmente presentan algún tipo de autosimilaridad, o sea que si se amplifica cualquiera de sus partes se observan propiedades que también son características del total. Esta autosimilaridad puede ser exacta o, lo que es más frecuente, estadística (Strogatz, 1994).

En los siguientes párrafos vamos a definir formalmente un objeto fractal, se hablará de su dimensión y cómo puede ser determinada, se introducirá el modelo DLA para crecimiento de estructuras fractales y por último se explicará cómo se ha empleado este modelo para simular el crecimiento de un sistema urbano.

2.1. Dimensión fractal

La noción que se tenía antiguamente de dimensión era que un conjunto E tenía dimensión d si el mínimo de coordenadas o parámetros necesarios para identificar cualquiera de sus puntos era d (que debía claramente ser un número entero). Pero a finales del siglo XIX hubo dos descubrimientos que hicieron ver las inconsistencias de este enfoque: primero, la correspondencia biunívoca entre los puntos de una línea y los del plano, descubierta por Cantor, que dejaba claro que un plano no contiene más puntos que una recta y que es por lo tanto posible cambiar la dimensión de un conjunto mediante una transformación biyectiva; segundo, la curva propuesta por Peano que cubre todo el plano, la cual contradice la idea de que la dimensión se puede definir como el mínimo número de parámetros necesarios para describir un espacio y que demostró que la dimensión de un conjunto se puede aumentar a través de una transformación univaluada.

A principios del siglo XX el matemático alemán Felix Hausdorff propuso una definición de dimensión libre de estas inconsistencias. Esta definición fue utilizada más adelante por Benoit Mandelbrot para definir un conjunto fractal. En las siguientes líneas seguiremos a Hurewicz (1941) para definir la dimensión de Hausdorff y la utilizaremos para dar la definición de Mandelbrot de conjunto fractal.

Vamos a suponer que estamos en un espacio euclideo de n dimensiones, por ejemplo \mathbb{R}^n . Sea \mathcal{U} un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n . Se define el diámetro de \mathcal{U} como

$$|\mathcal{U}| = \sup\{|x - y| : x, y \in \mathcal{U}\}.$$

Se define ahora un δ -recubrimiento de un subconjunto \mathcal{E} de \mathbb{R}^n como un conjunto numerable de $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^n$ tales que

- i) $\mathcal{E} \subset \bigcup \mathcal{U}_i$,
- ii) $0 < |\mathcal{U}_i| \leq \delta \forall i$.

Ahora, para cada número real no negativo s y $\delta > 0$ se puede definir

$$\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{E}) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |\mathcal{U}_i|^s,$$

donde el ínfimo se toma sobre el conjunto numerable de δ -recubrimientos $\{\mathcal{U}_i\}$ de \mathcal{E} . Es posible probar que \mathcal{H}_δ^s establece una medida exterior en \mathbb{R}^n .

La medida exterior s -dimensional de Hausdorff del conjunto \mathcal{E} se define como

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{E}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{E}).$$

Para cualquier conjunto \mathcal{E} es claro que $\mathcal{H}^s(\mathcal{E})$ es una función no decreciente de s , conforme s va de cero a infinito. Además, si $s < t$, entonces

$$\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{E}) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(\mathcal{E}),$$

lo cual implica que si $\mathcal{H}^t(\mathcal{E})$ es positiva, entonces $\mathcal{H}^s(\mathcal{E})$ es infinita. Por lo tanto, existe un valor único, llamado **dimensión de Hausdorff** y denotado $\mathbf{dim}(\mathcal{E})$, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(\mathcal{E}) &= \infty && \text{si } 0 \leq s < \mathbf{dim}(\mathcal{E}), \\ \mathcal{H}^s(\mathcal{E}) &= 0 && \text{si } \mathbf{dim}(\mathcal{E}) < s < \infty. \end{aligned}$$

La idea geométrica detrás de la dimensión de Hausdorff es la siguiente: supongamos que queremos cubrir un subconjunto X con $N(r)$ bolas de radio a lo más r . Es claro que si r es chico, $N(r)$ va a ser grande y que si r es grande, entonces $N(r)$ va a ser pequeño. ¿Qué proporción deben guardar entre sí r y $N(r)$? Si $N(r)$ crece como $1/r^d$ conforme r tiende a cero, entonces el subconjunto X tiene dimensión de Hausdorff d .

Se define formalmente un **conjunto fractal** como aquél cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica (Hurewicz, 1941).

Ahora se mostrará un ejemplo de un fractal, se calculará su dimensión de Hausdorff y se mostrará cómo calcular la dimensión fractal de diversos objetos, en particular de ciudades.

2.2. Determinación de la dimensión fractal de un objeto

Consideremos la alfombra de Sierpinsky, uno de los fractales más conocidos. Se comienza con un cuadro de longitud L ; se reduce este cuadro por un factor $r = 1/3$ y se colocan $N = 8$ cuadros de longitud $l = r \cdot L$ alrededor del original. Después, se reduce cada uno de los 8 cuadros pequeños por el mismo factor $r = 1/3$ y otra vez se colocan 8 de estos cuadros reducidos alrededor de los anteriores, tal y como se ilustra en la figura 2.1. Así, en la n -ésima

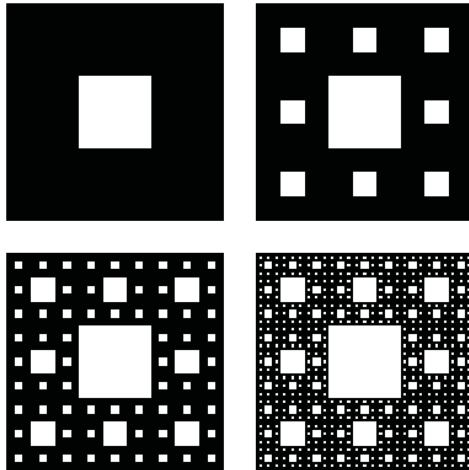


Figura 2.1: Primeras cuatro iteraciones para construir una alfombra de Sierpinsky.

iteración habrá $N_n = N^n = 8^n$ cuadros de longitud $l_n = L \cdot r^n = L/(3^n)$. Siguiendo la idea de Hausdorff, nos preguntamos qué relación tienen entre sí N_n y l_n , obteniendo

$$K = \text{constante} = N_n \cdot l_n^d. \quad (2.1)$$

Se fuerza a que este producto sea constante para alguna constante d por determinar; esta d es la dimensión fractal. Tomando el logaritmo de ambos lados se encuentra una relación lineal

$$\log N_n = \log K - d \log l_n. \quad (2.2)$$

Al escribir la constante en (2.1) de la forma K^d se concluye que esta ecuación se cumple para el valor

$$d = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}, \quad (2.3)$$

así que al sustituir los valores de N y r se encuentra que la dimensión de Hausdorff de la alfombra de Sierpinsky es $d = \log 8 / \log 3 \approx 1,8928$. En este caso fue posible calcular la dimensión fractal de manera exacta porque el objeto tiene siempre una simetría perfecta; si queremos determinar la dimensión fractal de un objeto irregular, en este caso una ciudad, debemos

emplear otro tipo de métodos que nos darán resultados aproximados.

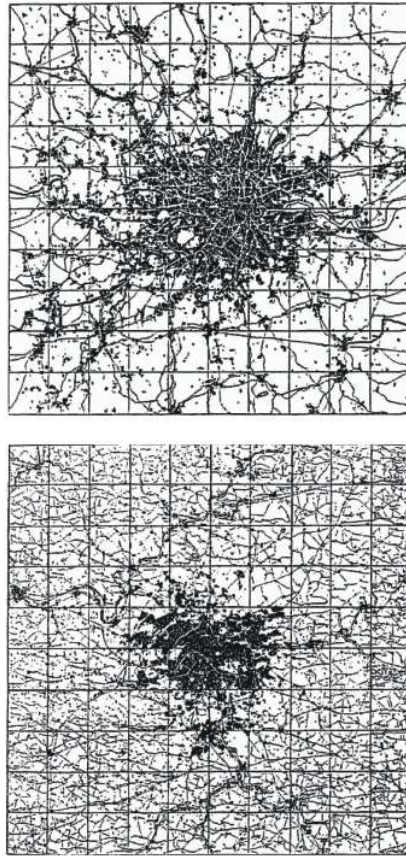


Figura 2.2: Representaciones de las ciudades de Londres (arriba) y París (abajo) utilizadas para determinar la dimensión fractal.

El modelo para determinar la dimensión fractal de una ciudad consiste en tomar una imagen plana (un mapa de la ciudad) en la cual se consideran dos tipos de zonas: las negras, que representan zonas urbanizadas o en las que hay algún tipo de construcción y las blancas, en las que hay áreas verdes o simplemente libres de desarrollos urbanísticos. Estos mapas se han obtenido digitalizando mapas realizados con datos empíricos. No se toma en cuenta la extensión tridimensional de la ciudad y tampoco se toman en cuenta distintos niveles de urbanización. En la figura 2.2 se observan dos ejemplos

de estas imágenes, en este caso de las ciudades de Londres y París, tomadas de Batty (1994). Se han utilizado principalmente 3 métodos para medir la dimensión fractal de este tipo de estructuras:

1. El *método de conteo de cajitas* consiste en cubrir la imagen con una rendija, por lo general rectangular y con aristas de longitud constante ϵ . Se cuenta el número de cuadros con sitios ocupados, en este caso, con estructuras urbanas, $N(\epsilon)$. Se hace variar el tamaño de los cuadros ϵ y se hace el mismo conteo nuevamente, para finalmente ajustar los datos a la recta

$$\log N(\epsilon) = \log \text{const} - D \log(\epsilon), \quad (2.4)$$

de donde se estima la dimensión fractal D . Se observa que esta recta es consistente con (2.2).

2. El *método de dilatación*, en el cual se traza un cuadro de lado ϵ alrededor de cada punto ocupado y se considera que todo el cuadro es una zona ocupada. Se calcula el área total ocupada $A(\epsilon)$ y luego se repite el proceso con una ϵ más grande. Conforme el tamaño de los cuadros crece, éstos comienzan a traslaparse, por lo cual $A(\epsilon)$ no crece de forma proporcional a ϵ ; sin embargo, dividiendo esta área entre el área de cada cuadro se obtiene el número necesario de elementos $N(\epsilon)$ necesarios para cubrir la figura, llegando a una relación consistente con (2.4).
3. El *método radial* se trata de elegir un punto alrededor del cual se trazan círculos de radio r ; en cada círculo se cuenta el número de sitios ocupados $N(r)$ y se llega a una relación de la forma

$$\log N(r) = D \cdot \log r. \quad (2.5)$$

En la tabla se muestran dimensiones fractales calculadas con distintos métodos para varias ciudades del mundo. En particular, los ejemplos tomados de Batty y Longley se llevaron a cabo mediante el método de conteo de cajita, mientras que aquéllos tomados de Fraunhofer se calcularon por los métodos de dilatación y radial. Es evidente que el empleo de distintas técnicas conduce a resultados cuantitativamente distintos; no obstante, hay coincidencias

Ciudad	Dimensión D	Ciudad	Dimensión D
Albany 1970 (Batty)	1.494	C. de México 1981 (Fra)	1.76
Beijing 1981 (Fra)	1.93	Moscú 1981 (Fra)	1.60
Berlin 1980 (Fra)	1.73	París 1981 (Fra)	1.66
Boston 1981 (Fra)	1.69	Pittsburgh 1981 (Fra)	1.59
Budapest 1981 (Fra)	1.72	Pittsburgh 1990 (Batty)	1.775
Buffalo 1990 (Batty)	1.729	Potsdam 1945 (Fra)	1.88
Cardiff 1981 (Batty)	1.586	Roma 1981 (Fra)	1.69
Cleveland 1990 (Batty)	1.732	Seúl 1981 (Batty)	1.682
Columbus 1990 (Batty)	1.808	Stuttgart 1981 (Fra)	1.41
Essen 1981 (Fra)	1.81	Sidney 1981 (Fra)	1.82
Londres 1981 (Fra)	1.72	Siracusa 1990 (Batty)	1.438
Los Ángeles 1981 (Fra)	1.93	Taipei 1981 (Fra)	1.39
Melbourne 1981 (Fra)	1.85	Taunton 1981 (Batty)	1.632

Cuadro 2.1: Dimensiones fractales de diferentes ciudades del mundo medidas mediante los métodos que se han descrito. Se indica el año en el cual se obtuvo el mapa de cada ciudad y la fuente de donde se obtuvieron estos datos.

cuantitativas considerables: para empezar, todos los valores están entre 1 y 2 como era de esperarse; casi todos son mayores a 1.5, y la gran mayoría están entre 1.6 y 1.8; veremos más adelante que el modelo DLA genera estructuras con dimensión fractal de aproximadamente 1.7.

La dimensión fractal nos da una medida cuantitativa de qué tanto llena una ciudad el espacio que tiene disponible: las ciudades con dimensión fractal cercanas a dos son aquéllas que llenan casi todo el plano, dejando pocos espacios libres, casi no hay áreas verdes y han crecido internamente a pesar de los accidentes geográficos de la zona; por otro lado, las ciudades con dimensión fractal menor son las que están muy dispersas en el espacio que tienen disponible, no son tan compactas y contienen un gran número de zonas sin urbanizar.

Este tipo de análisis ha permitido hacer análisis tipológico de los distintos

barrios en una urbe (distinguiendo cada uno de ellos por su dimensión fractal) y ha permitido estudiar el orden jerárquico que presentan los diferentes elementos que conforman una ciudad (De Keersmacker, 2003). Cualitativamente puede comprenderse que ciudades como Los Ángeles y Melbourne, cuyo crecimiento ha sido marcado por el uso vehicular, tengan dimensiones fractales grandes mientras que otras ciudades como Berlín y Moscú, que han crecido alrededor de sus vías de transporte y tienen por lo tanto estructuras espaciales ramificadas, tengan dimensiones fractales más bajas.

Ahora nos preguntamos si es posible modelar el crecimiento de una ciudad aprovechando su naturaleza fractal. Una de las propuestas más importantes (Batty, 1994) es utilizar el modelo de agregación limitada por difusión, abreviado DLA por sus siglas en inglés, del cual se hablará en la siguiente sección.

2.3. El modelo DLA

La agregación limitada por difusión (DLA por sus iniciales en inglés) es un modelo de crecimiento irregular introducido por Witten y Sander en 1981 para el estudio de agregados de partículas metálicas. Se inicia con una latiz (no necesariamente cuadrada) de n dimensiones y se coloca una partícula en el origen (llamada “semilla”). Se añade una segunda partícula a la latiz en un punto lejano al origen y ésta comienza una caminata aleatoria. Si esta partícula visita un sitio adyacente a la semilla (en el caso de la latiz cuadrada hay 4 sitios adyacentes) se queda fija ahí y forma parte del agregado. Entonces una tercera partícula comienza otra caminata aleatoria y se añade al agregado (que ahora contiene 2 partículas) si en algún momento llega a alguno de los sitios del perímetro. Si la partícula se sale de la latiz sin haber pasado por el agregado, ésta se retira y se añade un nuevo caminante aleatorio. Agregando más partículas comienza a formarse una estructura irregular y ramificada. En la figura 2.3 se ilustra un ejemplo de una estructura de este tipo.

Para estudiar los agregados formados mediante el proceso DLA vamos a comenzar con algunos puntos sobre caminatas aleatorias en el plano. El objetivo es calcular la probabilidad de que un agregado de este tipo crezca en un determinado sitio en un cierto tiempo.

Imaginemos una partícula que se mueve sobre un latiz hipercúbica y simétri-

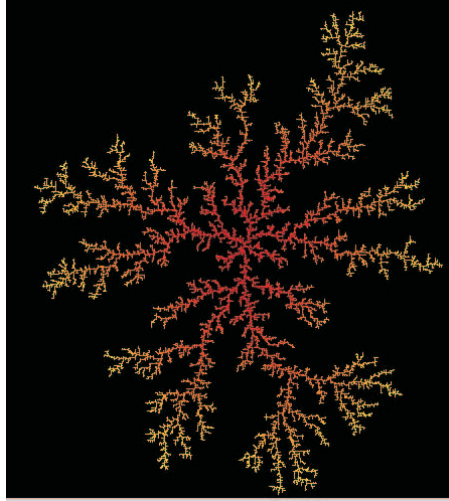


Figura 2.3: Simulación de una estructura fractal obtenida mediante el proceso de DLA. El gradiente de color indica el tiempo en que fue agregada cada partícula: en rojo se representan las primeras etapas y en amarillo las últimas. Como se puede observar, estas estructuras tienden a crecer principalmente en las puntas.

ca en un espacio de D dimensiones y con una distancia h entre dos de sus puntos. En intervalos regulares de tiempo τ la partícula da un paso de tamaño h a alguno de sus sitios vecinos más próximos, eligiendo cada uno de ellos con la misma probabilidad. Como en un espacio de D dimensiones cada sitio de la latiz tiene $2D$ vecinos, la partícula puede desplazarse a cada uno de ellos con probabilidad $1/2D$. Tenemos entonces la siguiente situación:

1. Empezando en el sitio $\bar{r} = \bar{0}$ en el tiempo $t = 0$, la partícula da pasos aleatorios de tamaño h en intervalos regulares de tiempo τ .
2. La partícula se puede mover en cada dirección posible con probabilidad $1/2D$.

La meta es calcular la probabilidad de que en el tiempo t la partícula se encuentre en la posición \bar{r} . Vamos a denotar esta probabilidad como

$$P^L(\bar{r}/h, t/\tau) = P^L(\bar{n}, M).$$

Aquí estamos expresando los sitios de la latiz como $\bar{r} = h\bar{n}$, donde de nuevo h es la constante de la latiz y \bar{n} es un vector formado por n números enteros.

De igual modo, el tiempo t es igual a M veces (con M entero) la duración del intervalo τ . El superíndice L sirve para recordarnos que esta función sólo toma valores en los puntos de la latiz.

La idea es que la partícula puede encontrarse en la posición \bar{r} en el tiempo $t + \tau$ sólo si en el tiempo t se encontraba en alguno de sus $2D$ vecinos más próximos, los cuales denotamos como $\bar{r} - \bar{\xi}_j$. Como podía hallarse en cualquiera de ellos con la misma probabilidad, la ley de probabilidades totales nos dice que

$$P^L\left(\frac{\bar{r}}{h}, \frac{t}{\tau} + 1\right) = \sum_{j=1}^{2D} P^L\left(\frac{\bar{r} - \bar{\xi}_j}{h}, \frac{t}{\tau}\right) P^L\left(\frac{\bar{r}}{h}, \frac{t}{\tau} + 1 \mid \frac{\bar{r} - \bar{\xi}_j}{h}, \frac{t}{\tau}\right),$$

o bien, como la probabilidad de llegar a \bar{r} desde alguno de sus vecinos es $1/2D$,

$$P^L\left(\frac{\bar{r}}{h}, \frac{t}{\tau} + 1\right) = \frac{1}{2D} \sum_{j=1}^{2D} P^L\left(\frac{\bar{r} - \bar{\xi}_j}{h}, \frac{t}{\tau}\right). \quad (2.6)$$

Para transformar esta ecuación en diferencias en una ecuación diferencial parcial introducimos la densidad de probabilidad $P(\bar{r}, t)$, que es una función continua en \bar{r} y en t y no está únicamente definida en los sitios de la latiz (ya no usamos el superíndice L). Dado que un sitio tiene un volumen h^D podemos escribir

$$P^L(n, M) = a^D P(\bar{r}, t).$$

Multiplicamos entonces la ecuación (2.6) por a^{-D} de ambos lados y obtenemos la ecuación equivalente para $P(\bar{r}, t)$

$$P(\bar{r}, t + \tau) = \sum_{j=1}^{2D} \frac{P(\bar{r} - \bar{\xi}_j, t)}{2D}. \quad (2.7)$$

Expandimos ahora los dos lados de esta ecuación en su serie de Taylor hasta los primeros términos no nulos (que no sean iguales a cero). Expandiendo el lado izquierdo respecto a la variable temporal obtenemos

$$P(\bar{r}, t + \tau) = P(\bar{r}, t) + \tau \frac{\partial P}{\partial t}(\bar{r}, t) + o(\tau^2), \quad (2.8)$$

y al hacer la expansión del lado derecho respecto a la variable espacial nos queda

$$P(\bar{r} - \bar{\xi}_j, t) = P(\bar{r}) - \bar{\xi}_j \cdot \nabla P(\bar{r}) + \frac{1}{2}(\bar{\xi}_j \cdot \nabla)^2 P(\bar{r}) + o(|\bar{\xi}|^3). \quad (2.9)$$

Ahora veremos por qué expandimos la parte espacial hasta segundo orden. Los vectores $\bar{\xi}_j$ son vectores de norma fija h pero con direcciones aleatorias, paralelas a los ejes de la latiz, y son por lo tanto variables aleatorias. Como todas las direcciones posibles son equiprobables, es claro que

$$\langle \bar{\xi}_j \rangle = \bar{0}.$$

Por otro lado, para cada j estos vectores se eligen de manera independiente, de modo que

$$\langle \bar{\xi}_j \cdot \bar{\xi}_k \rangle = \langle \bar{\xi}_j \rangle \langle \bar{\xi}_k \rangle = h^2 \delta_{jk}. \quad (2.10)$$

Así vemos que, al sumar sobre todas las jotas, el segundo sumando de (2.9) se desvanece y por lo tanto la ecuación en diferencias para $P(\bar{r}, t)$ la podemos aproximar como

$$\tau \frac{\partial P}{\partial t}(\bar{r}, t) = \sum_{j=1}^{2D} \frac{\frac{1}{2}(\bar{\xi}_j \cdot \nabla)^2 P(\bar{r}, t)}{2D},$$

y el lado derecho se puede simplificar mediante la expresión (2.10) para obtener finalmente

$$\frac{\partial P}{\partial t}(\bar{r}, t) = \frac{h^2}{2D\tau} \nabla^2 P(\bar{r}, t). \quad (2.11)$$

Concluimos entonces que la probabilidad de encontrar al caminante aleatorio en la posición \bar{r} al tiempo t es una función que obedece una ecuación de difusión. En este caso, la *difusividad* o *coeficiente de difusión* es $D_0 = \frac{h^2}{2D\tau}$. La *solución fundamental* de la ecuación (2.11) se define como

$$\Gamma_{D_0}(\bar{r}, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{D/2}} \exp\left(-\frac{|\bar{r}|^2}{4D_0 t}\right).$$

Vamos a ver que la probabilidad de que un sitio \bar{r} del perímetro del agregado adquiriera un nuevo vecino en el tiempo t (denotamos esta probabilidad como $\rho(\bar{r}, t)$) es el gradiente de la función $P(\bar{r}, t)$ para caminatas aleatorias. Simplemente notamos que un sitio \bar{r} del perímetro del agregado puede adquirir un nuevo vecino en el tiempo $t + \tau$ sólo si en el tiempo t alguno de los c sitios libres adyacentes a los vecinos desocupados de \bar{r} contenía alguna partícula (en general $c \neq 2D$ porque no estamos contando los sitios que ya forman

parte del agregado). Haciendo uso nuevamente de la ley de probabilidades totales escribimos esta idea como

$$\rho(\bar{r}, t + \tau) = \sum_{j=1}^c \frac{P(\bar{r} - \bar{\xi}_j, t)}{c},$$

o bien

$$\rho(\bar{r}, t + \tau) = \sum_{j=1}^c \frac{P(\bar{r} - \bar{\xi}_j, t) - P(\bar{r}, t)}{c}.$$

El lado derecho de esta ecuación es el gradiente discreto en \bar{r} , por lo que en el límite continuo tendremos

$$\rho(\bar{r}, t) = \nabla P(\bar{r}, t). \quad (2.12)$$

El modelo predice entonces que los sitios en las puntas son los que tienen la mayor probabilidad de crecer, lo cual se puede verificar en la figura (2.3). Las estructuras que genera este modelo de crecimiento son entonces ramificadas y muy abiertas, pues los huecos que van quedando no pueden llenarse. La motivación que llevó a proponer este modelo para simular el crecimiento urbano es que muchas ciudades en la actualidad tienen a desarrollarse a lo largo de sus vías de transporte, las cuales presentan una estructura dendrítica, y van creciendo por o tanto hacia las afueras. La dimensión fractal teórica de estas estructura (Meakin, 1983) es $D^2 + 1/D + 1$ donde D es la dimensión del espacio donde se contruye el agregado. Para el caso bidimensional, esta dimensión fractal es aproximadamente igual a 1.667. Las simulaciones computacionales requieren hacer algunas modificaciones al algoritmo, por lo que se han medido dimensiones ligeramente diferentes (aproximadamente igual a 1.7) según el model que se esté considerando (Vicsek, 1989). Esto concuerda con las dimensiones fractales empíricas de diferentes ciudades que se mencionaron en la sección anterior.

Como una prueba empírica del modelo se realizó una simulación del crecimiento de la ciudad de Cardiff: en una latiz que considera la geografía del lugar se colocó la semilla en la locación del centro de la ciudad y se realizó el crecimiento del agregado (Batty, 1994). En la figura (2.4) vemos el resultado y una imagen digitalizada de la ciudad real.

La comparación entre la ciudad simulada y la real no muestra aparentemente una similitud plausible. Esto puede deberse a varias cosas: para empezar, el

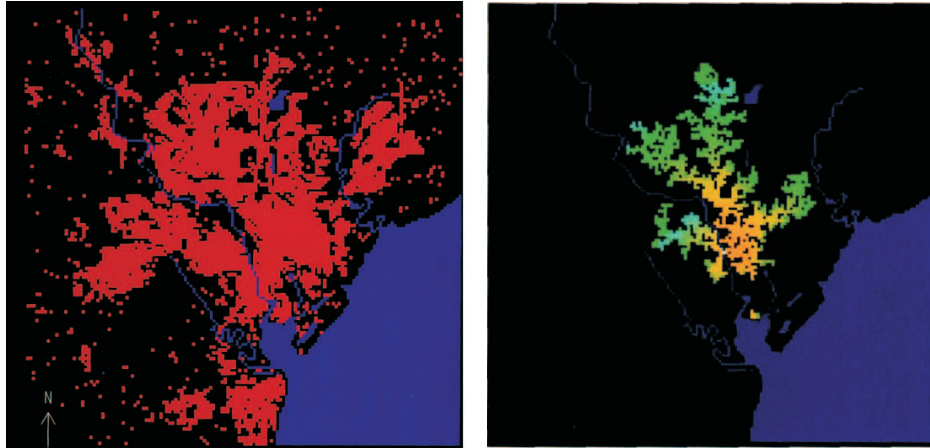


Figura 2.4: A la derecha se presenta una simulación mediante DLA del desarrollo urbano de la ciudad de Cardiff; del lado izquierdo se tiene una digitalización de un mapa real de la ciudad. Imagen tomada de Batty, 1994.

modelo predice la existencia de un solo agregado, suprimiendo la posibilidad de que haya poblaciones aledañas en las afueras de la ciudad principal; los huecos que van quedando en la estructura no pueden llenarse, lo cual no pasa en una ciudad real. Por último, el modelo predice que la densidad de población decae al alejarse del centro como una ley de potencias $\rho(r) \sim r^{d-2}$ donde d es la dimensión fractal; hay evidencia empírica de que esa no es la forma en que decae la densidad de población, como veremos en el siguiente capítulo.

Una posibilidad que se ha explorado es utilizar el modelo de percolación correlacionada en presencia de un gradiente, lo cual ha llevado a resultados cualitativos y cuantitativos más satisfactorios. Sobre este modelo hablaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

El Modelo de Percolación Correlacionada

El modelo de percolación ha sido muy usado para estudiar la física de sistemas desordenados. Fue propuesto por Broadbent y Hammersley (Grimmet, 1999) para contestar la siguiente pregunta: si se sumerge una piedra porosa en una cubeta llena de agua ¿cuál es la probabilidad de que el centro de la roca se moje? Desde entonces y con el desarrollo de la teoría se ha empleado en el estudio de medios porosos, redes eléctricas, propagación de epidemias, etcétera. (Efros, 1986).

La idea de modelar la forma y el crecimiento de una ciudad mediante un sistema de percolación correlacionada surge al considerar las dos siguientes observaciones empíricas (Makse, 1998):

1. La densidad poblacional en una urbe $\rho(r)$ decae exponencialmente al alejarse de una zona de densidad máxima conocida como distrito central de negocios (CBD por sus iniciales en inglés), o sea

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\lambda r}, \quad (3.1)$$

donde r es la distancia a dicha zona, ρ_0 es la densidad poblacional en el CBD y λ es un gradiente de densidad, según observó y justificó el economista Colin Clark (1951).

2. El desarrollo urbano atrae más desarrollo urbano, lo cual significa que las nuevas zonas surgen con mayor frecuencia en la cercanía de los

sectores ya urbanizados, o lo que es lo mismo, las ciudades tienden a crecer alrededor de las zonas con mayor desarrollo urbano.

A continuación vamos a formular el problema de percolación por sitios, expondremos un método para generar sistemas de percolación correlacionada y veremos cómo se introduce un gradiente de densidad para modelar patrones urbanos.

3.1. Percolación por sitios

Denotamos por \mathbb{Z} al conjunto de números enteros y definimos a \mathbb{Z}^d como el subconjunto de \mathbb{R}^D , con D un número entero, que contiene a todos los puntos x con coordenadas enteras. Vamos a definir la distancia entre dos puntos $x, y \in \mathbb{Z}^d$ como

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^D |x_i - y_i|.$$

Diremos que dos puntos $x, y \in \mathbb{Z}^D$ son adyacentes si y sólo si $\delta(x, y) = 1$. A la arista que une a los puntos adyacentes x y y la denotaremos como $\langle x, y \rangle$.

Ahora definimos el conjunto \mathbb{E}^D como el conjunto de todos los segmentos que unen a los puntos x y y tales que x y y son adyacentes (es decir, el conjunto de las aristas). Denotamos $\mathbb{L}^D = \mathbb{Z}^D \cup \mathbb{E}^D$ al conjunto de todos los puntos en \mathbb{R}^d con coordenadas enteras y los segmentos que los unen.

Sea p un número real entre cero y uno. Declaramos que un vértice de \mathbb{L}^D está **abierto** con probabilidad p y **cerrado** con probabilidad $q = 1 - p$, independientemente de los demás vértices. Un camino en \mathbb{L}^D es una secuencia $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$ de diferentes vértices x_i y aristas $e_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$. Tal camino se dice que es de longitud n y que conecta a x_0 con x_n . Un camino en \mathbb{L}^D se dice **abierto** si todos sus vértices lo son.

Consideremos la subgráfica aleatoria \mathbb{L}^D que contiene a todas las aristas \mathbb{Z}^D y a todos los vértices abiertos; los componentes conectados de esta gráfica se llaman **cúmulos abiertos**. Al cúmulo abierto que contiene al vértice x se le denota $C(x)$ Si x está cerrado, entonces $C(x)$ es vacío. Al cúmulo abierto que contiene al vértice cero se le llamará $C = C(0)$. Se define el *tamaño* del cúmulo abierto $C(x)$ como el número de vértices que contiene y se le denota

$|C(x)|$.

Se define la **probabilidad de percolación** $\theta(p)$ como la probabilidad de que un vértice x pertenezca a un cúmulo abierto de tamaño infinito (o simplemente, cúmulo infinito). Debido a la invarianza traslacional de la latiz podemos tomar el vértice x como el origen y definir

$$\theta(p) = P_p[|C| = \infty].$$

En esta expresión, el subíndice p indica que la probabilidad de percolación depende de la frecuencia p con que los vértices están abiertos. Es claro que θ es una función no decreciente de p y que se satisface $\theta(0) = 0$ y $\theta(1) = 1$. Un resultado fundamental en la teoría de percolación es que existe un valor crítico p_c , el cual depende de la dimensión, tal que

$$\theta(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c \\ > 0 & \text{si } p > p_c \end{cases}$$

Esto significa que si $p > p_c$, va a existir un agregado infinito con probabilidad uno. No se conoce con exactitud el valor de p_c , pero diferentes cálculos basados en simulaciones sugieren que se encuentra alrededor de 0.59 (Grimmet, 1999).

La figura 3.1 muestra cuatro estructuras de percolación por sitios para diferentes valores de p . En este modelo se supone que las probabilidades con que los sitios están abiertos son todas iguales e independientes de las demás; sin embargo, los sistemas reales casi siempre muestran algún tipo de correlación. Por ejemplo, se sabe que la permeabilidad de las formaciones rocosas no cambia en el espacio de manera aleatoria, sino que la distribución de la presencia de poros en el material por donde se puede filtrar el agua presenta una correlación espacial de largo alcance (Makse, 1995a). En particular para el problema de las ciudades, como ya se observó anteriormente, un sitio va a tener una probabilidad alta de estar ocupado o abierto si sus vecinos también lo están.

La idea es la siguiente: a cada sitio en una red en dos dimensiones se le asigna una probabilidad de estar ocupado; dicha probabilidad es máxima en el centro, llamado el CBD, y decae exponencialmente con la distancia. Para decidir si los sitios están o no ocupados se define un número aleatorio en cada sitio: si ese número es menor que la probabilidad de ocupación, entonces el sitio quedará ocupado. Pero esos números aleatorios no son independientes,

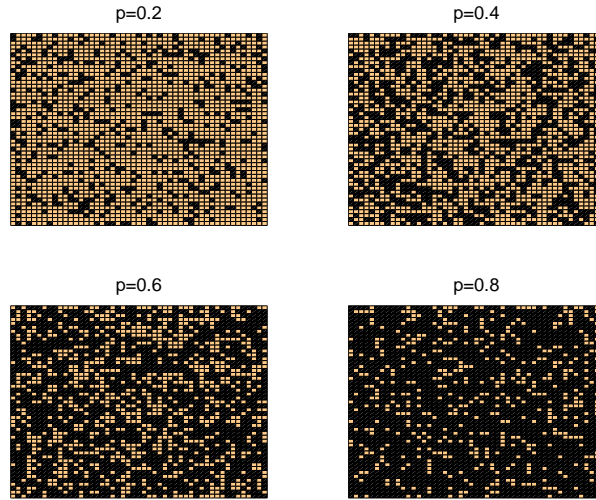


Figura 3.1: Realizaciones de percolación por sitios para diferentes valores de p . En todos los casos los cuadros negros representan sitios abiertos y los anaranjados sitios cerrados.

sino que deben estar correlacionados y esa correlación debe ser de largo alcance.

Vamos entonces a exponer un algoritmo para generar correlaciones de largo alcance en el problema de percolación propuesto por Makse y Havlin (1995b).

3.2. Modelo de Percolación Correlacionada

Comenzamos con una secuencia de N números aleatorios no correlacionados $\{u_j\}$, tomados de una distribución uniforme, definidos sobre una latiz unidimensional. Su función de correlación está dada por

$$\langle u_j, u_{j+n} \rangle = \delta_{n,0}.$$

El objetivo es modificar esta secuencia y obtener una nueva $\{g_j\}$ cuyas correlaciones de largo alcance sigan una ley de potencias de la forma

$$C_n \equiv \langle g_j, g_{j+n} \rangle \sim n^{-\gamma}. \quad (3.2)$$

A la constante γ se le llamará coeficiente de correlación. Para relacionar

ambas secuencias se propone una función de respuesta ϕ_j , de tal modo que se satisfaga

$$g_j = \sum_{k=1}^N \phi_{j-k} u_k. \quad (3.3)$$

Ahora se calcula la transformada de Fourier de (3.2) y (3.3) y de la secuencia $\{u_j\}$. Denotándolas \hat{C}_q , $\hat{\Phi}_q$ y \hat{U}_q respectivamente se obtiene

$$\hat{\Phi}_q = \frac{\hat{C}_q^{1/2}}{|\hat{U}_q|}.$$

Por último se calcula la transformada inversa de Fourier de los $\hat{\Phi}_q$ para obtener los ϕ_j , los cuales se sustituyen en (3.3), llegando así a la secuencia $\{g_j\}$ que se deseaba. Al calcular la función de correlación $\langle g_j, g_{j+n} \rangle$ y promediar sobre todo el sistema se verifica la correlación de largo alcance que se buscaba.

Este algoritmo puede extenderse a dos dimensiones de la siguiente manera: se considera una secuencia de L^2 números aleatorios no correlacionados $\{u(\vec{r})\}$ posicionados sobre los sitios de una red cuadrada de lado L . La función de correlación de estas variables es $\langle u(\vec{r}), u(\vec{r}') \rangle = \delta_{\vec{r}, \vec{r}'}$. La idea es generar una nueva secuencia $\{g(\vec{r})\}$ cuyas correlaciones sean de la forma

$$C(|\vec{r} - \vec{r}'|) = (1 + |\vec{r} - \vec{r}'|^2)^{-\gamma/2}. \quad (3.4)$$

Ahora se calcula la transformada de Fourier de los $C(|\vec{r} - \vec{r}'|)$, se denota por $S(q)$ y se encuentra que

$$\hat{g}(q) = (S(q))^{1/2} \hat{u}(q), \quad (3.5)$$

donde $\hat{g}(q)$ y $\hat{u}(q)$ son los coeficientes de las transformaciones de Fourier de las secuencias g y u respectivamente. Al calcular la transformada inversa de $\hat{g}(q)$ se obtiene la secuencia $\{g(\vec{r})\}$ que se quería.

En la figura (3.2), tomada de Maksé (1995a), tenemos dos estructuras de percolación por sitios sin correlación y dos con correlación. Es visible que en los casos correlacionados el agregado es mucho más compacto, mientras que la ausencia de correlación da lugar a muchos sitios desocupados (negros en esta figura) dentro de los cúmulos.

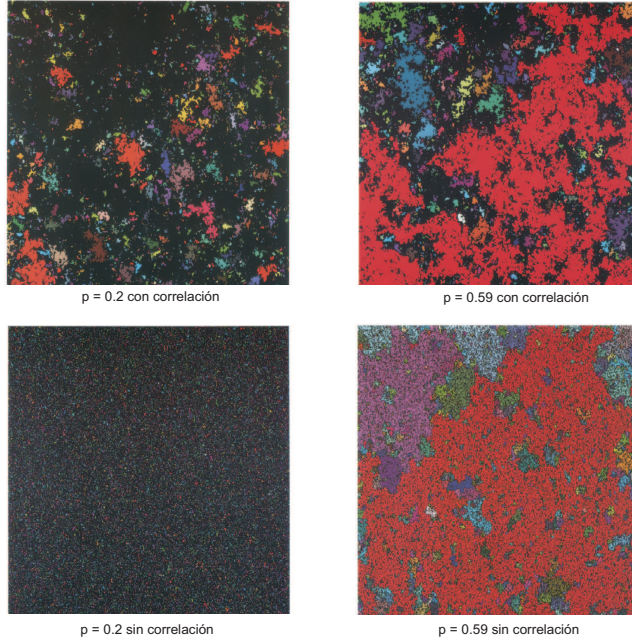


Figura 3.2: Realizaciones de percolación por sitios con y sin correlación para distintos valores de p . Los sitios negros son sitios desocupados o cerrados y los colores se usan para distinguir distintos cúmulos abiertos. En todos los casos las latices son de 512 por 512. En las figuras con correlación se eligió $\gamma = 0,4$.

Ya que se tienen las variables aleatorias correlacionadas lo que sigue es asignarle a cada sitio de la red una probabilidad de ocupación que decaiga exponencialmente con la distancia al CBD, de forma consistente con (3.1). Tendremos entonces un sistema de percolación correlacionada en presencia de un gradiente de densidad. Por último, se discretizan los números aleatorios correlacionados generando una secuencia $\mu(i, j)$, haciendo $\mu_{i,j} = \Theta(\theta - g(\bar{r}))$, donde θ se elige tal que $p(\bar{r}) = \int_{-\infty}^{\theta} P(g)dg$, $P(g)$ es la distribución de las g 's y Θ representa la función de Heaviside.

Para ilustrar la morfología de un sistema de ciudades generado por este modelo se muestran en la figura (3.3) 3 simulaciones hechas por Makse y Havlin (1995b) de sistemas de percolación correlacionada en presencia de un gradiente de densidad. Se ha dejado fijo el valor del gradiente de densidad λ y se ha hecho variar el coeficiente de correlación γ . Conforme este coe-

ficiente tiende a cero la correlación es mayor, y si γ es grande se recupera el caso sin correlación. Vemos que la correlación provoca aglomeramientos alrededor de las zonas de mayor densidad, o sea del CBD, el cual actúa como un núcleo atractor para la ciudad. Definimos la frontera del cúmulo como el perímetro del agregado más grande conectado al CBD. Los agregados que se forman son compactos cerca de sus respectivos centros y son menos compactos cerca de sus fronteras, lo cual era de esperarse, pues conforme la distancia al CBD aumenta, la probabilidad de que los sitios estén conectados al agregado principal es menor. La diferencia entre estos sistemas y los que se muestran en la figura (3.2) es que en aquéllos no había un gradiente de densidad, así que este gradiente provoca la existencia de un agregado principal mucho más grande que los demás. Observamos además que si la probabilidad de ocupación de todos los sitios fuera igual a p_c , la probabilidad crítica, existiría un único agregado conectado de tamaño infinito, por lo cual la distancia media del perímetro al centro r_f se determina por el valor de r para el cual $p(r)$ es igual a este valor crítico, o sea $r_f = \lambda^{-1} \log(1/p_c)$.

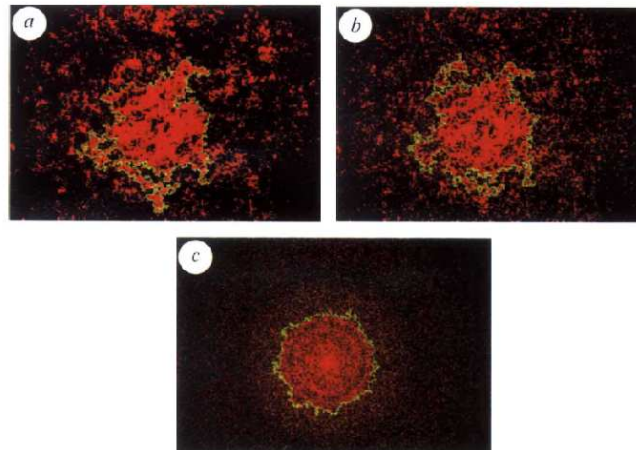


Figura 3.3: Simulaciones de sistemas urbanos mediante el modelo de percolación correlacionada con un gradiente de densidad para diferentes coeficientes de correlación. En los 3 casos el gradiente de densidad es $\lambda = 0,009$. En a) y b) los coeficientes de correlación son $\gamma = 0,6$ y $\gamma = 0,4$ respectivamente. El caso c) es no correlacionado, obteniéndose un patrón circular y muy simétrico que no parece representar un patrón urbano real tomada de Makse, (1995b).

Utilizando los métodos descritos en el capítulo anterior se calculó la dimensión fractal de la frontera de los cúmulos. Se obtuvo $d \approx 1,33$ para el caso no correlacionado y $d \approx 1,4$ para los sistemas con correlación fuerte (es decir, con γ cercana a cero). Estos resultados están acorde a las mediciones hechas por Batty y Longley de la dimensión fractal de la ciudad de Cardiff entre los años 1886 y 1949, los cuales oscilan entre 1.2 y 1.4.

Una forma cuantitativa de poner a prueba el modelo es analizar la distribución del tamaño de los agregados más pequeños que rodean al principal (que serían las pequeñas ciudades o poblados aledaños a la urbe). Para ello, en el trabajo de Makse (1998) se tomaron imágenes de las ciudades de Londres y Berlín (obtenidas por Fraunkhofer (1994) y Batty (1994)) en diferentes años, se digitalizaron y se contó, alrededor de la ciudad principal, cuántas poblaciones había de área A . En la figura 3.6a mostramos el caso de Berlín, donde se puede ver la gran variedad de tamaños de las poblaciones aledañas. Se obtiene entonces una distribución $N(A)$ de cuántos pueblos hay de área A , y mediante un ajuste de mínimos cuadrados se verifica que $N(A)$ sigue un ley de potencias con exponente cercano a 2:

$$N(A) \sim A^{-1,98} \text{ (Berlín, 1920, 1945),}$$

$$N(A) \sim A^{-1,96} \text{ (Londres, 1981).}$$

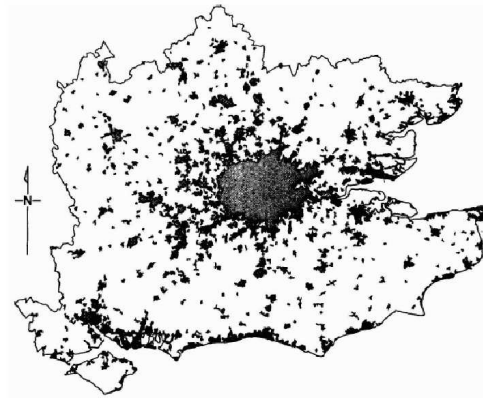


Figura 3.4: Establecimientos urbanos en la región sureste de Inglaterra según el censo de 1981. Se aprecia con claridad la capital Londres y los poblados en las afueras.

En la figura (3.4) presentamos el mapa de Londres y sus alrededores, obtenida por Batty (1994) según el censo de 1981 que se utilizó para determinar $N(A)$. Tomando los datos de los censos de 1981 y 1991 en Gran Bretaña se estudió también la forma de $N(A)$ para todas las áreas urbanas. Se encontró otra vez una ley de potencias similar a la obtenida para Berlín y Londres,

$$N(A) \sim A^{-2,03} \text{ (Gran Bretaña, 1981, 1991).}$$

En términos del modelo, notamos que los agregados aledaños deben estar forzosamente situados a distancias r del CBD tales que $p(r) < p_c$ o $r > r_f$, o de lo contrario estarían dentro del agregado principal. Se encuentra entonces que la distribución $N(A)$ es

$$N(A) = \int_0^{p_c} n(A, p) dp \sim A^{-(\tau+1/d_f\nu)}. \quad (3.6)$$

En esta ecuación $n(A, p) dp \sim A^{-\tau} g(A/A_0)$ es el número promedio de cúmulos de área A para una p dada a una distancia fija r y $\tau = 1 + 2/d_f$. A_0 es el área máxima que ocupa un cúmulo a una distancia r del CBD y $g(A/A_0)$ es una función que decae exponencialmente para $A > A_0$. En la figura 3.5a se muestra la ley de potencias para la distribución de $N(A)$ predicha por la ecuación (3.6) para sistemas con y sin correlación y los datos reales de Berlín y de Londres (la gráfica ha sido tomada de Makse, (1998)). Las leyes de potencia predichas por el modelo son, para el problema sin correlación

$$N(A) \sim A^{-2,45},$$

mientras que para el sistema fuertemente correlacionado se obtuvo

$$N(A) \sim A^{-2,06},$$

lo cual es consistente con las leyes de potencia obtenidas al ajustar por mínimos cuadrados los datos reales. El mismo análisis se llevó a cabo para los establecimientos urbanos en Gran Bretaña. Para ello se usaron nuevamente los censos realizados en este país en 1981 y 1991. Se presenta en la figura 3.5b la gráfica de la distribución del área de las zonas urbanas comparada con la ley de potencias predicha por la ecuación (3.6). Nuevamente vemos que el modelo es capaz de predecir esta distribución de áreas.

Finalmente, la parte dinámica de la morfología de las ciudades puede estudiarse con este modelo basado en las observaciones empíricas de que el

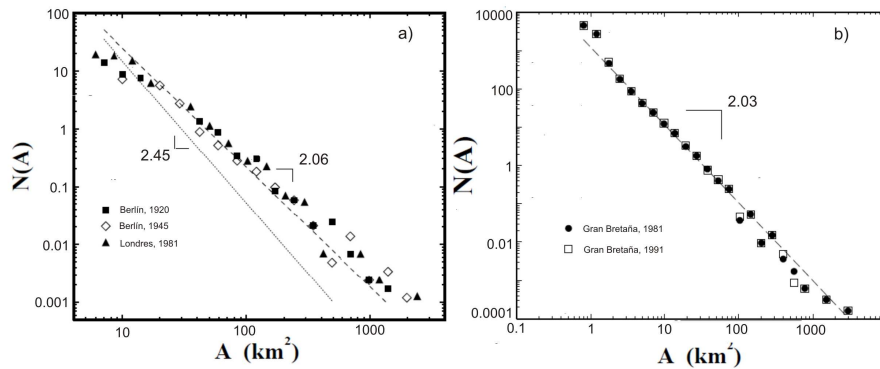


Figura 3.5: a) Gráficas logarítmicas de la distribución de las áreas de los poblados circundantes a las ciudades de Londres y Berlín. Se muestran también la rectas predichas por el modelo para sistemas con y sin correlación, viendo que el caso de correlación fuerte se ajusta mucho mejor a los datos. b) Lo mismo para la distribución de establecimientos urbanos en Gran Bretaña en los años 1981 y 1991. Se muestra sólo la recta predicha por el modelo fuertemente correlacionado. La imagen fue tomada de Makse, (1998).

gradiente de densidad λ varía con el tiempo. Mills (1980) analizó cómo $\lambda(t)$ es una función decreciente del tiempo; esto es una cuantización del hecho de que las grandes ciudades se expanden y tienden a descentralizarse. Se realizaron tres simulaciones con este modelo usando un coeficiente de correlación constante y tres diferentes valores de λ , menores cada vez, obtenidos de la información de la ciudad de Berlín; se comparan estos 3 sistemas simulados en la figura 3.6 con imágenes digitalizadas de Berlín y se encuentran similitudes cualitativas entre el modelo de crecimiento de la ciudad y el crecimiento real.

Por último, un estudio de cómo varía el coeficiente de densidad con el tiempo podría llevar a predicciones futuras del valor de este coeficiente y obtener así predicciones sobre el desarrollo y el crecimiento de una determinada ciudad en el futuro.

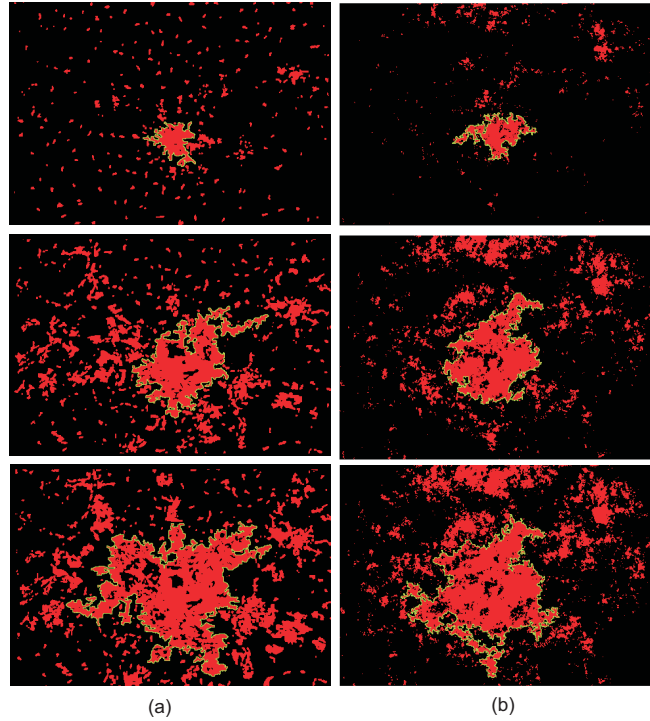


Figura 3.6: Comparación cualitativa entre datos reales y el modelo. a) Crecimiento de la ciudad de Berlín con datos de los años 1875, 1920 y 1945 (de arriba hacia abajo). b) Simulación de la dinámica urbana mediante el modelo propuesto. Se considera el caso fuertemente correlacionado y se varía el gradiente de densidad.

3.3. Reproducciones del modelo

Realizamos reproducciones del modelo de percolación correlacionada en presencia de un gradiente siguiendo las ideas y los algoritmos propuestos por Makse (1995b, 1998). A continuación se explican las simulaciones llevadas a cabo y presentamos los resultados.

Primero nos interesó simular la percolación por sitios en presencia de un gradiente de densidad, pues en los artículos citados no encontramos figuras con este tipo de estructuras. Para ello, creamos una malla cuadrada de n por n sitios. Cada sitio tiene una probabilidad de ocupación que decae exponencialmente con la distancia al sitio central de la red (siguiendo la idea de Clark (1951) expuesta en la ecuación (3.1)), es decir, al sitio (i, j) le

damos la probabilidad

$$P(i, j) = P(c_i, c_j)e^{-L\sqrt{(i-c_i)^2+(j-c_j)^2}}, \quad (3.7)$$

donde (c_i, c_j) es el sitio central de la malla. Aquí, L es un coeficiente que determina la rapidez con que decae la probabilidad de ocupación: si L es grande, la probabilidad decrece rápidamente con la distancia al centro y viceversa. Luego colocamos un número aleatorio entre cero y uno $u(i, j)$ en cada sitio de la malla y definimos la función

$$\theta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } u(i, j) \leq P(i, j) \\ 0 & \text{si } u(i, j) > P(i, j) \end{cases}$$

Generamos así una red cuadrada de números aleatorios que sólo pueden ser 0 ó 1. Graficamos en negro los sitios que valen cero (que en el modelo de percolación serían los sitios cerrados) y en anaranjado los sitios que valen uno (es decir, los sitios abiertos). En la figura 3.7 presentamos los resultados. En estas simulaciones se hizo la probabilidad de ocupación del sitio central igual a uno.

En la figura 3.7 observamos la formación de cúmulos alrededor del centro. Como era de esperarse, valores grandes del coeficiente L dan lugar a agregados muy pequeños y compactos ya que la probabilidad de ocupación disminuye muy rápido. En cambio, si L es pequeños tenemos cúmulos mucho más dispersos y vemos sitios ocupados en todas las regiones de la red.

Ahora simulamos el modelo de percolación correlacionada en presencia de un gradiente. Para ello, en vez de asignar números aleatorios en los sitios de la red colocamos una secuencia en el plano de números aleatorios correlacionados. Siguiendo nuevamente a Makse (1998) construimos el siguiente algoritmo:

1. Primero creamos una matriz cuadrada de tamaño n de números aleatorios entre 0 y 1 (la denotaremos V). Estos números no están correlacionados entre ellos.
2. Usamos la función `fft2` del programa Matlab 7.8 para calcular la transformada discreta de Fourier bidimensional de la matriz aleatoria V . Esta función calcula primero la transformada discreta de Fourier unidimensional de cada columna de V y en el resultado calcula la transformada discreta en una dimensión de las filas. Dado que la primer entrada de una transformada unidimensional en este programa es la

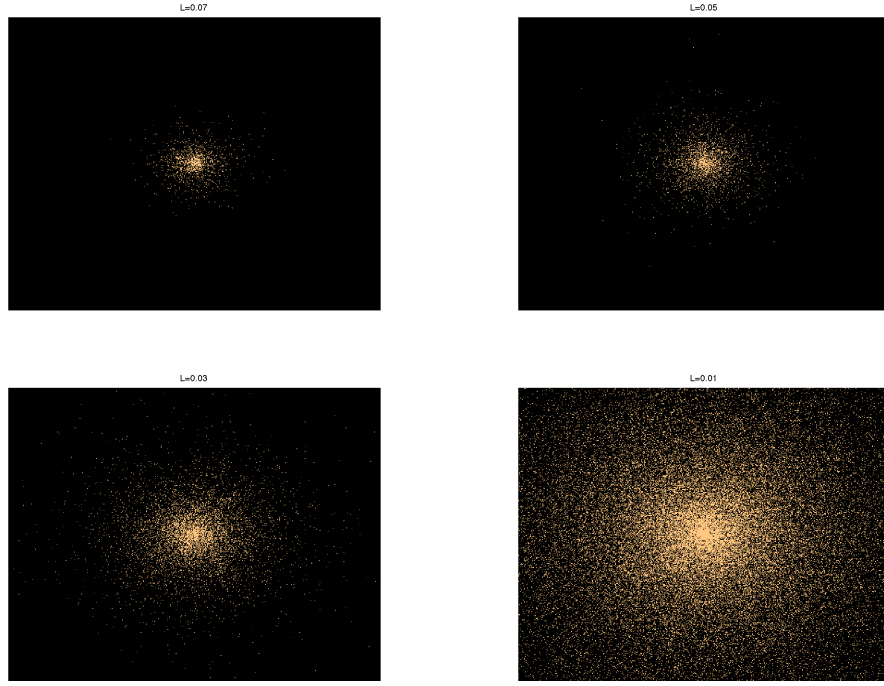


Figura 3.7: Percolación por sitios en un gradiente de densidad para valores $L=0.07$, $L=0.05$, $L=0.03$ y $L=0.01$. La red es de 501 por 501 sitios.

suma de los datos, suprimimos la primer fila y la primer columna del resultado. La matriz resultante contiene números complejos; como lo que nos interesa son sus normas, sustituimos cada entrada por su norma. Denotamos a la matriz resultante U .

3. Calculamos el espectro de Fourier de la función de correlación dada en la ecuación (3.4) y la denotamos $S(q)$, donde q es la norma del vector $\vec{q} = (q_i, q_j)$, $q_i = 2\pi m_i/n$, $-n/2 \leq m_i \leq n/2$ y $q_j = 2\pi m_j/n$, $-n/2 \leq m_j \leq n/2$
4. Definimos ahora la secuencia $\eta(q) = (S(q))^{1/2}U(q)$ y colocamos estos números en una matriz denotada η .
5. Calculamos la transformada inversa bidimensional de Fourier de η . Suprimimos de nuevo la primer fila y la primer columna y los elementos de la matriz resultante los sustituimos por sus normas. Esta matriz contiene los números aleatorios con correlación de largo alcance que

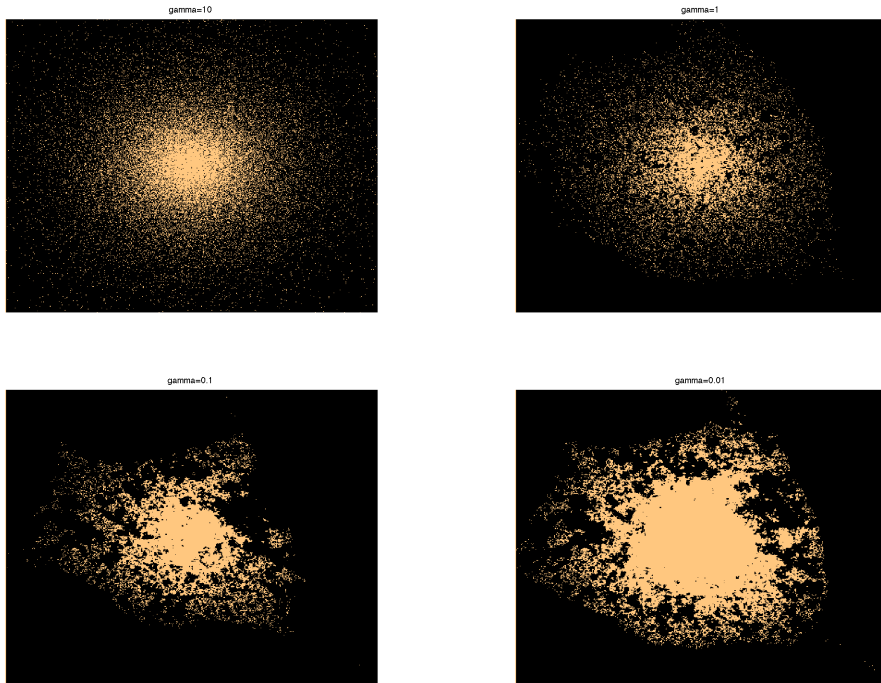


Figura 3.8: Percolación correlacionada en un gradiente de densidad. Se dejó fijo el coeficiente $L=0.02$ (el gradiente de densidad) y se hace $\gamma = 0.01, 0.1, 1$ y 10 . La red es de 501 por 501 sitios.

buscábamos. En caso de que algún número sea mayor a uno lo sustituimos por un uno.

La idea es simple: generar una matriz de números aleatorios, calcular su transformada de Fourier, multiplicar los elementos en el espacio de frecuencias por la transformada de la función de correlación y obtener la transformada inversa.

Con la ecuación (3.7) creamos de nuevo una matriz con un gradiente de probabilidad de ocupación. A esta matriz la llamamos A . Aplicamos la función techo a cada elemento de $A - \eta$ y obtenemos así una matriz con ceros y unos, es decir, con sitios ocupados y desocupados.

Vamos a analizar primero el efecto de la correlación en el sistema. En la figura 3.8 presentamos cuatro simulaciones con este modelo para un gradiente de densidad fijo pero cambiando el valor del coeficiente de correlación γ .

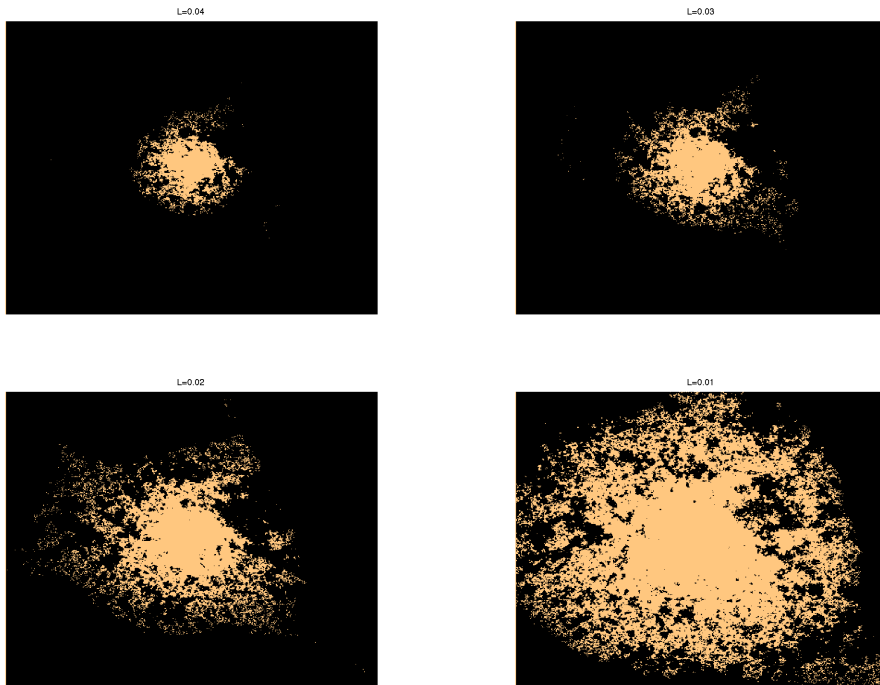


Figura 3.9: Percolación por sitios en un gradiente de densidad. Ahora se fijó el coeficiente de correlación $\gamma = 0.05$ (modelo fuertemente correlacionado) y se cambió el gradiente de densidad, $L = 0.07, 0.05, 0.03$ y 0.01 . La red es de 501 por 501 sitios.

Vemos que cuando γ es grande, es decir, cuando la correlación es pequeña, recuperamos una estructura como las de la figura 3.7 en la que no hay correlación. El patrón es abierto y muy simétrico, lo cual difícilmente podría ser una buena representación de una ciudad. Pero conforme disminuye el valor de γ , o sea, cuando aumenta la correlación, el agregado se vuelve mucho más compacto. En el caso $\gamma = 1$ vemos un cúmulo grande en el centro rodeado de agregados más pequeños y de diversos tamaños en los alrededores. Ésta parece ser una representación mucho más real de una urbe grande con pequeños poblados y suburbios en las afueras.

En las simulaciones mostradas en la figura 3.9 se dejó fijo el coeficiente de correlación. Se eligió $\gamma=0.05$, es decir, correlación fuerte, y se cambió el gradiente de densidad. Cuando la probabilidad de ocupación decae muy rápido se observa que el agregado principal es muy pequeño, pero cuando

se deja que la probabilidad no disminuya tanto con la distancia al centro, el cúmulo se vuelve más grande. Tenemos entonces un modelo de crecimiento urbano, el cual requiere un parámetro $L(t)$ que indica qué tanto tiende la gente a vivir en el centro de la ciudad. Es de esperarse que para una ciudad en crecimiento $L(t)$ sea cada vez menor debido a los procesos de expansión y descentralización. Cabe mencionar que en todas las simulaciones se usó la misma semilla para el generador de números aleatorios.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se presentaron 2 modelos para describir la forma de una ciudad y para simular el crecimiento de aglomeraciones urbanas. Se exhibió la dimensión fractal de diversas ciudades en el mundo, lo cual da una idea cuantitativa de la forma, la extensión y qué tanto ocupa una ciudad el espacio que tiene disponible. Se expuso el modelo DLA para simular patrones urbanos y se mencionaron sus principales fallas. Se analizó el modelo de percolación correlacionada en presencia de un gradiente de densidad, se mostraron simulaciones llevadas a cabo con este modelo y se analizaron las semejanzas entre estas simulaciones y datos urbanos reales.

En la realización de este trabajo se reprodujo también el modelo de percolación correlacionada en presencia de un gradiente. Se muestran las estructuras obtenidas computacionalmente y se observa cómo la presencia de un coeficiente de correlación da lugar a estructuras compactas rodeadas de cúmulos más pequeños. Además, se estudió cómo cambiando el gradiente de densidad se puede simular el crecimiento de una aglomeración urbana.

Las ciudades son sistemas en los que hay una enorme cantidad de agentes interactuando entre sí a escala local, generando estructuras espaciales complejas pero organizadas que determinan en muchos aspectos la forma de vida dentro de la ciudad. Los enfoques tradicionales no habían dado una representación satisfactoria de estas estructuras; sin embargo, las ideas y métodos de la geometría fractal y de los sistemas autoorganizantes han demostrado dar una descripción más realista de los patrones que surgen en los sistemas urbanos, consistentes con la idea de que no hay una inteligencia central que dictamine el crecimiento de una ciudad.

Muchos países en las últimas décadas han tratado de implementar políticas para contener el a veces desmedido crecimiento urbano; en este contexto, las ideas presentadas en este trabajo podrían tener un importante impacto en el desarrollo de estas políticas y en la evaluación de las mismas. Quizá para poder contener o encausar este crecimiento en el futuro sea obligatorio comprender las ciudades como sistemas complejos, pues, como apunta Eugene Stanley, *“uno puede decirle a los que hacen las leyes que hagan lo que quieran hacer, pero la gente va a vivir en donde quiera vivir”*.

Sin duda vale la pena seguir estudiando estos modelos, desarrollarlos más a fondo e incorporar nuevas ideas (no se ha considerado por ejemplo la situación geográfica de cada lugar, la extensión tridimensional de una ciudad, la clasificación de zonas, poco, mediana y altamente urbanizadas y un largo etcétera) pues, aunque quizá no se encuentre un modelo que funcione para todas las ciudades presentes y futuras, este tipo de teorías prometen ser más realistas y efectivas que las que se habían considerado previamente.

Bibliografía

- [1] Batty, M. y Longley, P. (1994) *Fractal Cities*, Academic Press, NY.
- [2] Burgess, E.W. (1925), *The Growth of the City*, Publications of the American Sociological Society, **18**, pp.85-97.
- [3] Clark, C.J.R. (1951), *Urban Population Densities*, R. Statist. Soc. A114,490-496.
- [4] Doxiadis, C.A. (1968), *Ekistics: An Introduction to the Science of Human Settlements*, Hutchinson, Londres.
- [5] Efros, A.L. (1986), *Physics and Geometry of Disorder*, Mir, Moscú.
- [6] Frankhauser, P. (1994), *La Fractalité des Structures Urbaines*, Collection Villes, Anthropos, París.
- [7] Frankhauser, P. (1998), *The fractal approach: a new tool for the spatial analysis of urban agglomerations*, Population, 10e année, **1**, pp.205-240.
- [8] Grimmet, G.(1999), *Percolation*, 2da. ed., Springer, Alemania.
- [9] Hoyt, A.(1939), *The Structure and Growth of Residential Neighbourhoods in American Cities*, United States Government Printing Office, Washington.
- [10] Hurewicz, W. y Wallman (1941), H. *Dimension Theory*, Princeton University Press, N.J.
- [11] Jacobs, J. (1961), *The Death and Life of Great American Cities*, Random House, N.Y.
- [12] Kadanoff, L. (2000), *Statistical Physics, Dynamics and Renormalization*, World Scientific, EUA.

- [13] Makse, H.A., Havlin, S., Stanley, H.E. y Schwartz M., (1995a) *Novel method for generating long-range correlations*, Chaos, Solitons and Fractals, **6**, pp. 295-303.
- [14] Makse, H.A., Havlin. S. y Stanley, H.E., (1995b), *Modelling urban growth patterns*, Nature, **377**, pp. 608-612.
- [15] Makse, H.A., Andrade Jr., J.S., Batty, M., Havlin, S. y Stanley, H.E., (1998), *Modeling urban growth patterns with correlated percolation*, Phys.Rev.E, **58**, pp. 7054-7062.
- [16] Mandelbrot, B. (1982), *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets, España.
- [17] Meakin, P. (1984), *Diffusion-limited aggregation an two-dimensional percolation clusters*, Phys.Rev.B., **29**, pp. 4327-4330.
- [18] Mills, E.S. y Tan, J.P. (1980), *A Comparison of Urban Population Density Functions in Developed and Developing Countries*, Urban Studies **17**, 313.
- [19] Prakash, S., Havlin, S., Schwartz M., Stanley, H.E. (1992), *Structural and dynamical properties of long-range correlated percolation*, Phys.Rev.A. **46**, 1724.
- [20] Saito, Y. (1996), *Statistical Physics Of Crystal Growth*, World Scientific, EUA.
- [21] Salsa S. (2008), *Partial Differential Equations in Action*, Springer, Milán.
- [22] Sander, L.M. (1986), *Fractal Growth Processes*, Nature, **322**, 789.
- [23] Schweitzer, F. y Steinbrick, J. (1997), *Urban Cluster Growth: Analysis and Computer Simulations of Urban Aggregations*, dentro de *Self-Organization of Complex Structures*, Schweitzer, F. (ed.), Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, pp.501-517.
- [24] Shen, G. (2002), *Fractal dimension and fractal growth of urbanized areas*, Int.J. of Geographical Information Science, **16**, 419.
- [25] Strogatz, S.H. (1994), *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books.

- [26] Ullman, E.I. (1962), *The Nature of Cities Reconsidered*, Papers and Proceedings of the Regional Science Association, **9**.
- [27] Vicsek, T. (1989), *Fractal Growth Phenomena*, World Scientific, Singapur.
- [28] Witten, T.A. y Sander, L.M. (1981), *Diffusion-limited aggregation: a kinetic critical phenomenon*, Phys.Rev.Let., **47**, 1400.
- [29] Witten, T.A. y Sander, L.M. (1983), *Diffusion-limited aggregation*, Phys.Rev.B., **27**, 5686.