



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**UNA INTRODUCCIÓN A LOS POLÍGONOS Y
POLIEDROS DE DIRICHLET**

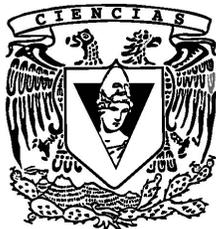
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ISRAEL ZAMORANO ROMERO



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE
2012**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno

Zamorano
Romero
Israel
55 13 22 18 83
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
301147983

2. Datos del tutor

Dr
Antonio
Lascurain
Orive

3. Datos del sinodal 1

Dr
Mario
Eudave
Muñoz

4. Datos del sinodal 2

M en C
Ana Irene del Refugio
Ramírez
Galarza

5. Datos del sinodal 3

M en C
Francisco de Jesús
Struck
Chávez

6. Datos del sinodal 4

Mat
Raybel Andrés
García
Ancona

7. Datos del trabajo escrito.

Una introducción a los polígonos y poliedros de Dirichlet
72 p
2012

A mi madre y hermanos.

Contenido

1. Preliminares	1
2. Polígonos de Dirichlet	9
2.1. Propiedades	10
2.2. Ejemplos	15
2.3. Propiedades avanzadas	22
3. Poliedros de Dirichlet	33
3.1. Fundamentos de la geometría hiperbólica tridimensional	33
3.2. Propiedades de los poliedros.	48
3.3. Ejemplos	54
Bibliografía	73

Introducción

A principios de la década de los ochentas el estudio de la topología de las 3-variedades o nudos tomó un fuerte impulso a raíz de los trabajos de Thurston y Jørgensen (cf. [3] y [9]). Se probó que salvo ciertas familias de variedades *más conocidas*, todas las 3-variedades tenían estructura hiperbólica. Este hecho mostró la gran importancia de los grupos kleinianos actuando en \mathbb{H}^3 (o \mathbb{B}^3), como herramienta para el estudio de los nudos.

En particular, el estudio de las regiones fundamentales es muy importante, ya que proporciona de alguna manera *modelos* de las 3 variedades u orbifolios que definen. Una clase muy importante de éstas son las de Dirichlet. En esta tesis se prueba primero que el polígono de Dirichlet es una región fundamental localmente finita (Teorema 2.1.6), se prueba también que los puntos de un ciclo en la frontera del polígono equidistan del centro del mismo (Teorema 2.1.7). Posteriormente se muestran ejemplos para grupos cíclicos y se concluye con algunos resultados de propiedades avanzadas, por ejemplo, se prueba que para toda elección de w , salvo un conjunto de medida cero, en el polígono de Dirichlet $D(w)$, los ciclos elípticos y parabólicos tienen longitud uno y los ciclos accidentales, longitud tres (Teorema 2.3.2 y Corolario 2.3.3).

La descripción tridimensional de los poliedros de Dirichlet no aparece de manera detallada y formal en la literatura (en contraste con la descripción bidimensional), salvo en el libro de Ratcliffe (cf. [8]), sin embargo este libro desarrolla la teoría de manera demasiado general, es decir, en todas las geometrías (esférica, hiperbólica y euclidiana), y en todas las dimensiones. En este sentido, se proporciona una descripción detallada de la teoría en el caso hiperbólico tridimensional. Para empezar, se prueba que el grupo $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^2)$, es decir, el grupo de extensiones de Poincaré de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^2)$, actúa como grupo de isometrías en \mathbb{H}^3 (Teorema 3.1.3). Se prueba también que este grupo actúa de manera transitiva en las geodésicas de \mathbb{H}^3 (Proposición 3.1.5). Estas he-

ramientas permiten describir los bisectores perpendiculares entre dos puntos de \mathbb{H}^3 (Teorema 3.1.11).

A continuación se prueba que los poliedros de Dirichlet, son poliedros fundamentales convexos, es decir, son regiones fundamentales convexas que además son localmente finitas (Teorema 3.2.11). Para probar esto se usa el hecho de que los grupos kleinianos (es decir discretos), actúan discontinuamente en \mathbb{H}^3 . Posteriormente se muestran ejemplos de grupos cíclicos (hiperbólicos, parabólicos y elípticos) y doblemente periódicos. Uno de dichos ejemplos exhibe que el poliedro de Dirichlet para un grupo cíclico generado por una transformación parabólica, es la región comprendida entre dos esferas ortogonales al plano complejo extendido que además son tangentes entre sí.

Se hace referencia también a un algoritmo diseñado por el autor, para detectar, tanto en el caso bidimensional como en el tridimensional, si los polígonos euclidianos de Dirichlet de grupos doblemente periódicos son paralelogramos o hexágonos, o paralelepípedos o prismas hexagonales en el caso hiperbólico tridimensional en \mathbb{H}^3 .

El Teorema 3.3.2 es en cierta forma original, ya que aparentemente no aparece en la literatura. Este resultado permite construir poliedros fundamentales para grupos fuchsianos con traslaciones que se les puede llamar de Ford.

Al final de la tesis, se exhibe el poliedro de Ford (y Dirichlet), para el grupo clásico modular actuando en \mathbb{H}^3 . Una herramienta que se usa es el hecho de que en el caso fuchsiano la acción en \mathbb{H}^2 es la misma que en el semiplano xz .

Cabe mencionar que la descripción de los poliedros para grupos cíclicos loxodrómicos fue hecha por Troels Jørgensen y posteriormente por Todd Drumm. Sin embargo este estudio no se describe en este trabajo. Existe más información sobre el tema, por ejemplo en los libros de Marden y Ratcliffe. La presente tesis no pretende agotar el tema, ni incluir todos los resultados, sino servir solamente como una introducción al tema.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Iniciamos definiendo algunos conceptos como transformaciones de Möbius complejas, los modelos del plano hiperbólico Δ y \mathbb{H}^2 que en adelante denotaremos por \mathbb{P} , además veremos como se relacionan estos conceptos, dicha relación se vera reflejada en resultados que usaremos posteriormente.

Las transformaciones de Möbius complejas son funciones definidas en $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, de la forma:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad y \quad ad - bc \neq 0.$$

En los casos en los que no se aplica el álgebra, se definen de la siguiente forma:

1. si $c = 0$ se define $T(\infty) = \infty$,
2. si $c \neq 0$ se define $T(\infty) = a/c$ y $T(-d/c) = \infty$.

Definición 1 Sea T de Möbius, tal que fija exactamente un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces a T se le llama parabólica.

Definición 2 Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, tal que fija dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, supóngase también que T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a $S(z) = \alpha z$. Entonces:

- (i) si $|\alpha| = 1$, a T se le llama elíptica;
- (ii) si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a T se le llama hiperbólica;
- (iii) si $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin \mathbb{R}^+$, a T se le llama loxodrómica.

se puede probar la validez de esta clasificación, veáse por ejemplo [5] pp. 21-23.

Cabe mencionar que usando el primer teorema de isomorfismos para grupos, podemos identificar el grupo de transformaciones de Möbius complejas con $PSL(2, \mathbb{C})$ que es el cociente de $SL(2, \mathbb{C})$ módulo $\{\pm Id\}$, es decir $PSL(2, \mathbb{C})$ es la proyectivización de $SL(2, \mathbb{C})$. En adelante identificaremos al grupo de transformaciones de Möbius complejas con $PSL(2, \mathbb{C})$.

El concepto de densidad permite medir longitudes de curvas en el plano hiperbólico, después se describen cuáles son las curvas que minimizan la distancia, llamadas geodésicas, así como los grupos de isometrías.

Definición 3 Sea A un abierto en \mathbb{R}^n , a una función continua $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ se le llama una densidad en A .

Sea A una región en \mathbb{R}^n y $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ una curva de clase C^1 , se define la λ -longitud de γ que denotaremos $l_\lambda(\gamma)$ como:

$$\int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Esta definición se extiende a curvas C^1 por tramos. De esta forma podemos medir distancias entre puntos.

Definición 4 Sean $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ una densidad y $z_1, z_2 \in A$, definimos la λ -distancia de z_1 a z_2 como:

$$\inf_{\gamma} l_\lambda(\gamma),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas de clase C^1 por tramos que van de z_1 a z_2 y la denotamos por $\rho_\lambda(z_1, z_2)$.

Teorema 1.0.1 Sea λ una densidad en A un abierto de \mathbb{R}^n , entonces la distancia ρ_λ define una métrica en A .

La prueba de este teorema se puede consultar en [5] p. 44. Una manera de obtener espacios isométricos es la siguiente:

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y $f : A \rightarrow B$ una biyección conforme, supongamos además que en A tenemos definida una métrica (inducida por una

densidad λ), entonces podemos definir en B una densidad σ de tal modo que f resulte una isometría, específicamente:

$$\sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)} \quad (1.1)$$

donde $\mu(x)$ es el factor de conformalidad de f en x .

Describamos ahora los modelos del plano hiperbólico:

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \text{Im}(z) > 0\},$$

donde la métrica está definida por la densidad

$$\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)}. \quad (1.2)$$

Otro modelo del plano hiperbólico es el disco de Beltrami-Poincaré:

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Usando la función de Cayley:

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

que transforma \mathbb{H}^2 en Δ , se puede probar que la métrica en Δ definida por la densidad:

$$\sigma(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}, \quad (1.3)$$

se obtiene usando la ecuación (1.1) y la función de Cayley, por lo que ésta es una isometría hiperbólica.

Recordamos que si A es un abierto en \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable, se dice que f es conforme en $x_0 \in A$, si $Df(x_0)$ es el producto de una matriz ortogonal y una matriz del tipo kI_d , $k \in \mathbb{R}^+$. A k se le llama *factor de conformalidad* y se le denota por $\mu(x_0)$.

Veamos ahora cuáles son las curvas en \mathbb{H}^2 que minimizan la distancia, llamadas geodésicas. Para ello consideremos i, ki con $k > 1$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ una curva de clase C^1 tal que $\gamma(a) = i$ y $\gamma(b) = ki$. Si $l_h(\gamma)$ denota la longitud hiperbólica de γ , tenemos:

$$l_h(\gamma) \geq \log k,$$

cf. [5] p. 49. Además si $\gamma : [1, k] \longrightarrow \mathbb{H}^2$ está dada por $\gamma(t) = ti$, se sigue fácilmente que:

$$l_h(\gamma) = \log k.$$

Como este argumento se generaliza a curvas C^1 por tramos, se tiene:

$$\rho(i, ki) = \log k,$$

donde ρ denota la distancia hiperbólica. Además este segmento del eje imaginario es la única curva que minimiza la distancia (véase [5] p. 49).

Para conocer las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos u y v que no estén alineados verticalmente usamos el hecho de que $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en la familia de “círculos” ortogonales al eje real, cf. [5] p. 50-51. Sea C el “círculo” ortogonal al eje real que pasa por u y v , podemos encontrar una isometría $\varphi \in PSL(2, \mathbb{R})$ que transforme C en el eje z y se sigue que esta curva es la única que minimiza la distancia, por ello se le llama geodésica.

Definición 5 Sea $A \subset \mathbb{H}^2$, se dice A es h -convexo si $\forall z, w \in A$ se tiene que $[z, w] \subset A$, donde $[z, w]$ denota el segmento de geodésica que une z con w .

Nos interesa ahora conocer el grupo completo de isometrías del plano hiperbólico, para esto definimos las reflexiones en círculos y rectas. Denotaremos por w^* a $w/|w|^2$ y $C(a, r)$ al círculo $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$.

Definición 6 Se define la reflexión en $C(a, r)$, como:

$$\varphi(z) = \begin{cases} a + r^2(z - a)^*, & \text{si } z \in \mathbb{C}, z \neq a, \\ \infty, & \text{si } z = a, \\ a, & \text{si } z = \infty. \end{cases} \quad (1.4)$$

Si $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r\}$ se define exactamente igual la reflexión en $S(a, r)$. Además es fácil ver que φ es una involución y que

$$\varphi(x) = x \iff x \in S(a, r).$$

Para definir las reflexiones en rectas identificaremos $\widehat{\mathbb{C}}$ con $\widehat{\mathbb{R}^2}$, para así usar el producto escalar usual de $\widehat{\mathbb{R}^2}$.

Denotaremos por $R(b, t)$ a la recta que tiene b por vector normal unitario, y cuya distancia al origen es t , es decir:

$$R(b, t) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot b = t, b \in \mathbb{R}^2, |b| = 1, t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

Definición 7 Se define la reflexión en $R(a, t)$ como:

$$\varphi(z) = \begin{cases} z - 2(z \cdot a - t)a, & \text{si } z \in \mathbb{R}^2, \\ \infty, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Esta misma definición se aplica a reflexiones en planos $P(b, t)$ donde

$$P(b, t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot b = t, b \in \mathbb{R}^n, |b| = 1, t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

Teorema 1.0.2 *Cualquier isometría del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 es un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ o es de la forma:*

$$z \longrightarrow \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$.

La prueba de este resultado puede consultarse en [1] p. 57; para conocer cuáles son las isometrías de Δ basta conjugar a las transformaciones del teorema anterior bajo la función de Cayley.

El siguiente resultado muestra cómo la distancia de un punto a una geodésica se alcanza trazando otra geodésica ortogonal a la primera.

Lema 1.0.3 *Sea λ una geodésica en \mathbb{H}^2 y $z \in \mathbb{H}^2 - \lambda$, entonces $\rho(z, \lambda)$ se alcanza en $z_0 \in \lambda$, donde el segmento $[z, z_0]$ corta ortogonalmente a λ .*

Para una prueba de este resultado consulte [1] p. 58.

Definición 8 *Se dice que $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un punto límite con respecto a un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$, si existe $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y transformaciones distintas $\overline{T}_n \in \Gamma, n \in \mathbb{N}$, tales que:*

$$\overline{T}_n(z) \rightarrow \alpha,$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

El conjunto de puntos límite se denota por $\mathbb{L}(\Gamma)$ o \mathbb{L} , además, nótese que se debe usar la métrica cordal para incluir a todos los puntos de la esfera de Riemann.

Definición 9 *Dado $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, al conjunto $\widehat{\mathbb{C}} - \mathbb{L}$, se le llama el conjunto ordinario y se le denota por $\mathbb{O}(\Gamma)$ o simplemente \mathbb{O} , y a los puntos de dicho conjunto se les llama ordinarios.*

Definición 10 Sea A una región en \mathbb{H}^2 , se define su área hiperbólica como la integral de Lebesgue:

$$\text{área}_h(A) = \int_A \frac{d\mu}{(\text{Im}z)^2}.$$

Se puede tomar también, en muchos casos la de Riemann (o la de Riemann impropia, si la región no es acotada).

Obsérvese que cuando dicha integral es infinita entonces la integral de Lebesgue no está definida, sin embargo en dicho caso diremos que el área hiperbólica es infinita .

De ahora en adelante, si $D \subset \mathbb{P}$ es un abierto, denotaremos por \tilde{D} a la cerradura hiperbólica de dicho conjunto, que en general no coincidirá con la cerradura euclidiana, la cual denotaremos por \overline{D} .

Definición 11 Se dice que un subgrupo $\overline{\Gamma}$ de $PSL(2, \mathbb{C})$ es discontinuo, si el conjunto ordinario $\mathbb{O}(\Gamma)$ no es vacío.

Definición 12 Sea $\Gamma < SL(2, \mathbb{C})$ se dice que Γ es discreto si no existe una sucesión de matrices distintas, $T_n \in \Gamma, n \in \mathbb{N}$, tal que $T_n \rightarrow T$, cuando $n \rightarrow \infty$, donde $T \in GL(2, \mathbb{C})$.

Nótese que el grupo modular es discreto, pues sus entradas son enteras y por ello las matrices no pueden acumularse, además si T_n son matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ que convergen a T , $T \in SL(2, \mathbb{C})$ pues el determinante es una función continua.

Definición 13 Se dice que un subgrupo $\overline{\Gamma}$ de $PSL(2, \mathbb{C})$ es discreto, si está determinado por un subgrupo discreto Γ de $SL(2, \mathbb{C})$.

Definición 14 Un grupo fuchsiano es un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preserva un “disco”, es decir, es un grupo que es conjugado a un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Teorema 1.0.4 Sea $\overline{\Gamma} < PSL(2, \mathbb{C})$ discontinuo, entonces $\overline{\Gamma}$ es discreto.

Una demostración de este teorema y el subsecuente aparecen en [5] p. 102.

Teorema 1.0.5 Sea $\overline{\Gamma} < PSL(2, \mathbb{R})$ discreto, entonces $\overline{\Gamma}$ es discontinuo.

Como consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores, se tiene que $\bar{\Gamma} < PSL(2, \mathbb{R})$ es discreto si y sólo si $\bar{\Gamma}$ es discontinuo.

Teorema 1.0.6 *Un grupo discontinuo en $PSL(2, \mathbb{C})$ es a lo sumo numerable.*

La prueba puede consultarse en [5] p. 100.

Teorema 1.0.7 *Sea $\Gamma < SL(2, \mathbb{R})$ discreto, entonces $\mathbb{L}(\Gamma) \subset \widehat{\mathbb{R}}$.*

Para una prueba de este hecho cf. [5] p. 103.

Definición 15 *Sea G un grupo actuando en un espacio métrico X , y Y un subespacio invariante bajo G de X ; se dice que G actúa discontinuamente en Y , si dado cualquier compacto $K \subset Y$, se tiene que:*

$$g(K) \cap K \neq \emptyset,$$

solamente para un número finito de transformaciones en G .

Esta propiedad, que es invariante bajo conjugación con un homeomorfismo, la satisface el conjunto ordinario de un grupo discontinuo (cf [1] p. 99). Además un cálculo sencillo muestra que si $\bar{T} \in PSL(2, \mathbb{R})$ entonces

$$2 \cosh \rho(i, \bar{T}(i)) = \|T\|^2, \quad (1.5)$$

donde T es una matriz en $SL(2, \mathbb{R})$ que representa a \bar{T} .

Definición 16 *Sea*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, c \neq 0,$$

una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$; se define el círculo isométrico de T , que denotaremos por $I(T)$, como

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |T'(z)| = 1\}.$$

De manera equivalente, $I(T)$ es el conjunto de puntos donde el factor de conformalidad es 1, si $ad - bc = 1$, se sigue que

$$I(T) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \left(\frac{-d}{c} \right) \right| = \frac{1}{|c|} \right\},$$

ya que $T'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}$.

CAPÍTULO 2

Polígonos de Dirichlet

En este capítulo se describirá la construcción de un polígono fundamental convexo y posteriormente estableceremos la existencia de dichos polígonos para cualquier grupo fuchsiano.

Sea G un grupo fuchsiano actuando en el plano hiperbólico $\mathbb{P}(\Delta \text{ ó } \mathbb{H}^2)$, y w un punto no fijo para cualquier transformación g de G ($g \neq Id$). Para cada g en $G(g \neq Id)$, definamos los siguientes conjuntos:

$$L_g(w) = \{z \in \mathbb{P} \mid \rho(z, w) = \rho(z, gw)\}, \quad (2.1)$$

$$H_g(w) = \{z \in \mathbb{P} \mid \rho(z, w) < \rho(z, gw)\}. \quad (2.2)$$

Notemos que $L_g(w)$ es una geodésica que resulta ser el h -bisector perpendicular del segmento $[w, gw]$ (véase [5] p. 136), además $\mathbb{P} - L_g$ consiste en dos semiplanos hiperbólicos, uno de ellos contiene a w y es justamente $H_g(w)$, ver Figura 2.1.

Obsérvese que $H_g(w)$ consiste de aquellos puntos que están más cerca de w que de gw .

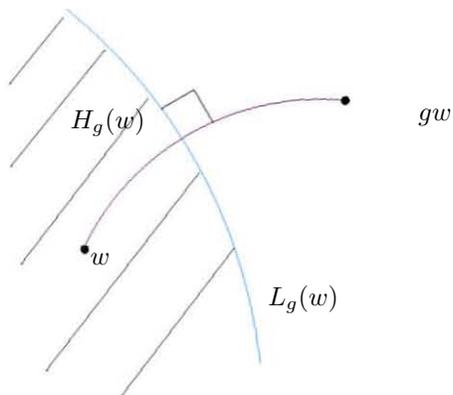
Definición 17 *El polígono de Dirichlet $D(w)$ para G con centro en w se define como:*

$$D_G(w) = \bigcap_{g \in G, g \neq I} H_g(w), \quad g \in G.$$

La notación abreviada para $D_G(w)$ es $D(w)$. A este polígono también se le conoce como de Poincaré o normal para G .

Notemos que $D(w)$ es el conjunto de puntos en \mathbb{P} que están más cerca de w que de $gw \quad \forall g \in G, g \neq Id$, es decir,

$$D(w) = \{z \in \mathbb{P} \mid \rho(z, w) < \rho(z, gw) \quad \forall g \in G, g \neq Id\}.$$

Figura 2.1: h-bisector de $[w, gw]$

Nótese que $w \in D(w)$, por lo cual $D(w)$ es no vacío, además es h -convexo, ya que $\forall g \in G, g \neq Id, H_g(w)$ es h -convexo, esto es claro si $H_g(w)$ coincide con el primer cuadrante (en \mathbb{H}^2), y el caso general se sigue ya que $PSL(2, \mathbb{R})$ es transitivo en geodésicas. Probamos ahora $D(w)$ es un polígono fundamental convexo para G . Primero probamos unos lemas.

2.1. Propiedades

Lema 2.1.1 $z \in H_g(w) \Leftrightarrow w \in H_{g^{-1}}(z)$, donde z no es punto fijo de g^{-1} .

DEMOSTRACIÓN. Como

$$H_{g^{-1}}(z) = \{w \in \mathbb{P} \mid \rho(z, w) < \rho(g^{-1}z, w)\} \quad (2.3)$$

y g es una isometría, se tiene

$$\rho(g^{-1}z, w) = \rho(z, gw),$$

por lo que la condición (2.2) es equivalente a (2.3). \square

Corolario 2.1.2 $z \in D(w) \Leftrightarrow w \in D(z)$, donde z no es punto fijo de ninguna transformación no trivial.

DEMOSTRACIÓN.

$$\text{Si } z \in D(w) = \bigcap_{g \in G, g \neq I} H_g(w),$$

entonces $z \in H_g(w)$ para cada g en G , al aplicar el Lema 2.1.1 tenemos $w \in H_{g^{-1}}(z)$ para cualquier elemento de G , de donde:

$$w \in \bigcap_{g \in G, g \neq I} H_{g^{-1}}(z) = D(w).$$

De manera análoga se prueba que si $w \in D(z)$, entonces $z \in D(w)$. \square

Lema 2.1.3 *Si h es cualquier isometría en el plano hiperbólico, entonces $h(H_g(w)) = H_{hgh^{-1}}(hw)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $h(z) \in h(H_g(w))$, entonces $\rho(z, w) < \rho(z, gw)$, por lo cual al ser h isometría $\rho(hz, hw) < \rho(hz, hgw) = \rho(hz, hgh^{-1}hw)$; es decir $h(z) \in H_{hgh^{-1}}(hw)$. Como estos pasos son reversibles se sigue el lema. \square

Como consecuencia inmediata del lema se tiene el siguiente resultado que muestra cierta invariabilidad de los polígonos de Dirichlet bajo conjugación.

Corolario 2.1.4 $h(D_G(w)) = D_{hGh^{-1}}(hw)$. En particular si $h \in G$, tenemos $h(D(w)) = D(hw)$.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} h(D_G(w)) &= h\left(\bigcap_{g \in G, g \neq I} H_g(w)\right) = \bigcap_{g \in G, g \neq I} h(H_g(w)) \\ &= \bigcap_{\substack{hgh^{-1} \in hGh^{-1} \\ g \neq I}} H_{hgh^{-1}}(hw) = D_{hGh^{-1}}(hw), \end{aligned}$$

y si $h \in G$, como $hGh^{-1} = G$ se sigue la segunda afirmación. \square

Definición 18 *Una región D del plano hiperbólico es un dominio fundamental para un grupo fuchsiano G si*

- (i) *Existe un conjunto fundamental F tal que $D \subset F \subset \tilde{D}$,*
- (ii) *h -área $(\partial D) = 0$.*

Nótese que la condición (i) implica que no existen en D puntos G -equivalentes, es decir si $x, y \in D$ no existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$.

Definición 19 Diremos que un dominio fundamental D para G es localmente finito si dado un subconjunto compacto K de \mathbb{P} , éste interseca sólo a un número finito de imágenes de \tilde{D} bajo G .

Definición 20 Sea G un grupo fuchsiano. Entonces P es un polígono fundamental convexo para G si P es un dominio fundamental localmente finito para G , que además es convexo.

Definición 21 Un lado de $D(w)$ es un segmento de geodésica de la forma $\tilde{D}(w) \cap g(\tilde{D}(w))$ de longitud positiva. Un vértice de D es un punto de la forma $\tilde{D}(w) \cap g(\tilde{D}(w)) \cap h(\tilde{D}(w))$ donde $g, h \neq Id$.

Antes de demostrar que $D(w)$ es un polígono fundamental convexo, probamos un lema que nos será de gran utilidad.

Lema 2.1.5 Cualquier subconjunto compacto $K \subset \mathbb{P}$ interseca sólo a un número finito de $Lg(w)$.

DEMOSTRACIÓN. Se afirma que si $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$, entonces

$$\rho(w, L_{g_n}(w)) = \frac{1}{2}\rho(w, g_n(w)) \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

(la igualdad se sigue de (2.1) y el Lema 1.0.3). En caso contrario el conjunto $\{g_n(w)\}_{n \in \mathbb{N}}$ estaría acotado, y tomando un disco cerrado con centro en w y un radio adecuado r , tendríamos una subsucesión de imágenes de w convergente en dicho disco, lo cual no es posible, ya que al ser G discreto los puntos de \mathbb{P} son ordinarios. Para probar el lema, sea $K \subset \mathbb{P}$ compacto y K' un disco cerrado con centro en w tal que $K \subset K'$, supóngase además que K interseca a un número infinito de $L_g(w)$, como $K \subset K'$ lo mismo ocurre para K' , lo cual no es posible en virtud de 2.4, y se sigue el resultado. \square

Teorema 2.1.6 El polígono de Dirichlet $D(w)$ es un polígono fundamental convexo.

DEMOSTRACIÓN. Como cada $H_g(w)$ es h-convexo y la intersección de conjuntos h-convexos es h-convexa, se sigue que $D(w)$ es h-convexo. Además, como $w \in D(w)$, este conjunto no es vacío. Nótese también que la frontera de $D(w)$ está contenida en la unión de los $L_g(w)$, entonces:

$$\text{área}_h(\partial D) = 0,$$

al estar contenida en la unión numerable de conjuntos de medida cero. Probamos ahora la existencia un conjunto fundamental F tal que

$$D(w) \subset F \subset \tilde{D}(w).$$

Para cada órbita $G(z)$, elegimos un único punto z^* que satisfaga

$$\rho(w, z^*) \leq \rho(w, gz) \quad \forall g \in G,$$

tal elección es posible pues $G(z)$ no se acumula en w , por ser G discreto (Teorema 1.0.5). Obsérvese que esta condición equivale a que $z^* \in \tilde{H}_g(w)$ para toda $g \in G - Id$. Sea F el conjunto de estos puntos, nótese que hay uno para cada órbita. Además si $z \in D(w)$ hay una única elección posible para z^* , la cual es $z = z^*$, en particular $D(w) \subset F$. Para demostrar que $F \subset \tilde{D}(w)$, consideremos $z \in F$ y el segmento de geodésica $[w, z]$. Se afirma que $\forall g \in (G - Id), L_g(w)$ no interseca al segmento (w, z) , esto se sigue ya que de otra manera $z \notin H_g(w)$ (véase la Figura 2.2). En consecuencia $(w, z) \subset D(w)$, y se sigue $z \in \tilde{D}(w)$ y $F \subset \tilde{D}(w)$.

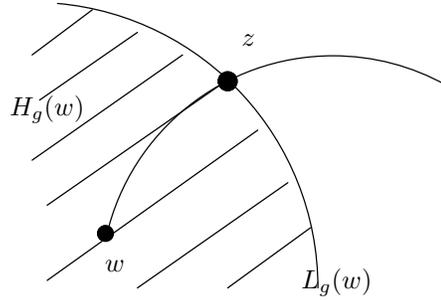


Figura 2.2: $z \in H_g(w)$

Resta probar que $D(w)$ es localmente finito. Sea K un compacto, el cual se puede suponer un disco cerrado con centro en w y radio r . Supóngase que $g(\tilde{D}(w)) \cap K \neq \emptyset$, entonces existe $z \in \tilde{D}(w)$ tal que:

$$\rho(gz, w) \leq r.$$

Finalmente, como $z \in \tilde{D}(w)$, se tiene:

$$\rho(w, gw) \leq \rho(w, gz) + \rho(gz, gw)$$

$$\begin{aligned} &\leq r + \rho(z, w) \\ &\leq r + \rho(gz, w) \leq 2r \end{aligned}$$

y esto sólo puede ocurrir para un número finito de $g \in G$, ya que los puntos de \mathbb{P} son ordinarios. \square

Definición 22 *Un lado de $D(w)$, es un segmento de geodésica de la forma $\tilde{D} \cap g(\tilde{D})$ de longitud positiva. Llamaremos vértice a los puntos de la forma $\tilde{D} \cap g(\tilde{D}) \cap h(\tilde{D})$ para h y g transformaciones distintas de la identidad.*

Definición 23 *Diremos que un punto v es un vértice propio de D (o al infinito), si este es el punto final de dos lados de D . Y será un vértice impropio si es el punto final de un lado y un lado libre. En ambos casos diremos que v es un vértice al infinito.*

Teorema 2.1.7 *Sea $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ un ciclo de vértices finitos en la frontera del polígono de Dirichlet $D(w)$. Entonces:*

$$\rho(w, z_1) = \rho(w, z_2) = \dots = \rho(w, z_n).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $z_1, z_2 \in \partial D(w)$ tales que $h(z_1) = z_2$. Ahora, como $[w, z_1] \subset D(w)$, se sigue que al aplicar h

$$[hw, z_2] \subset h(D(w)) = D(hw)$$

(la última igualdad se da en virtud del Corolario 2.1.4). Además, podemos concluir que

$$z_2 \in \tilde{D}(hw).$$

Por lo cual

$$\rho(w, z_2) = \rho(hw, z_2) \quad (z_2 \in \tilde{D}(hw) \cap \tilde{D}(w)).$$

Finalmente

$$\rho(w, z_2) = \rho(hw, z_2) = \rho(w, h^{-1}(z_2)) = \rho(w, z_1).$$

De manera análoga se prueba el resultado para los demás puntos y se sigue el resultado. \square

2.2. Ejemplos

(1) Grupo cíclico parabólico.

Consideremos primero el caso $\Gamma = \langle T \rangle$, donde $T(z) = z + 1$. Se toma como centro $w = \frac{1}{2} + iv$. Dado que la reflexión en $R(e_1, 1)$ es una isometría hiperbólica, es claro que $L_T(w) = R(e_1, 1)$. Un razonamiento análogo muestra que en general:

$$L_{T^n}(w) = R\left(e_1, \frac{n+1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo cual

$$H_{T^k} \subset H_{T^{k+1}} \quad \text{si } 1 \leq k \quad \text{y} \quad H_{T^l} \subset H_{T^{l-1}} \quad \text{si } l \leq -1,$$

y en consecuencia

$$D(w) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid 0 < \operatorname{Re}[z] < 1\}.$$

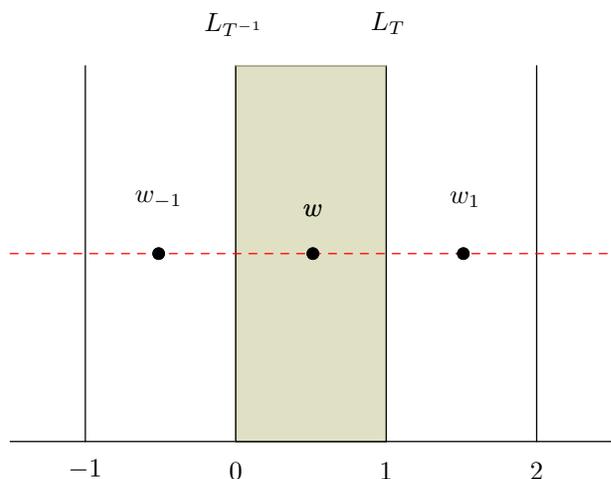


Figura 2.3: Polígono de Dirichlet para un grupo generado por una traslación.

Para el caso general consideremos f una transformación parabólica con punto fijo α . Nótese que existe $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que la traslación $T(z) = z + 1$ satisface $f = hTh^{-1}$ o $f = hT^{-1}h^{-1}$.

Tomemos ahora un horociclo L que pase por w , donde w es como en el caso canónico. Nótese que la imagen de este horociclo bajo h es un horociclo

basado en α , sobre el cual están $u = h(w)$ y sus imágenes bajo f , obteniéndose una configuración como la que muestra la Figura 2.4. Finalmente $h^{-1}(D(w))$ es el polígono de Dirichlet con centro en u , en virtud del Corolario 2.1.4.

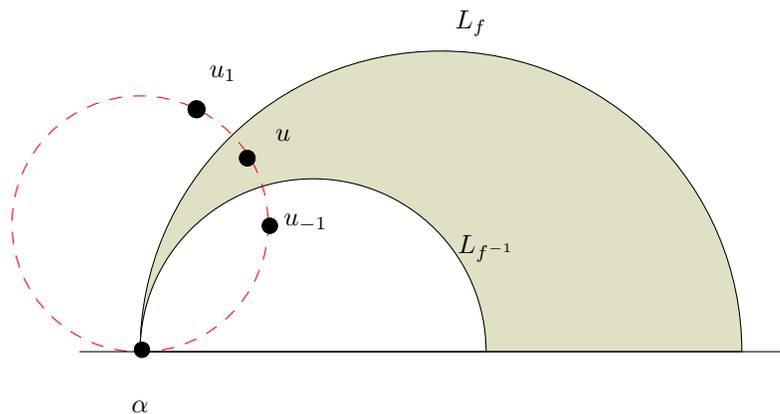


Figura 2.4: Polígono de Dirichlet para un grupo generado por una transformación parabólica con punto fijo α .

(2) Grupo cíclico hiperbólico.

Sea $\Gamma = \langle T \rangle$, donde $T(z) = kz, 1 < k$. Se toma $w = i$ como el centro de $D(w)$. Ahora, dado que:

$$\frac{1}{2}\rho(i, ki) = \frac{1}{2}\log k = \log \sqrt{k},$$

se tiene que el punto medio hiperbólico de $[i, ki]$ es justamente \sqrt{ki} , lo cual muestra que:

$$L_T(w) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = \sqrt{k}\},$$

de manera análoga, se prueba :

$$L_{T^n}(w) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = \sqrt{k^n}\}, \quad \forall n \neq 0, n \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Estos argumentos muestran que:

$$H_{T^n}(w) \subset H_{T^{n+1}}(w), \quad 1 \leq n, \quad (2.6)$$

y también

$$H_{T^n}(w) \subset H_{T^{n-1}}(w), n \leq -1. \quad (2.7)$$

Por lo cual

$$D(w) = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid \frac{1}{\sqrt{k}} < |z| < \sqrt{k} \right\}. \quad (2.8)$$

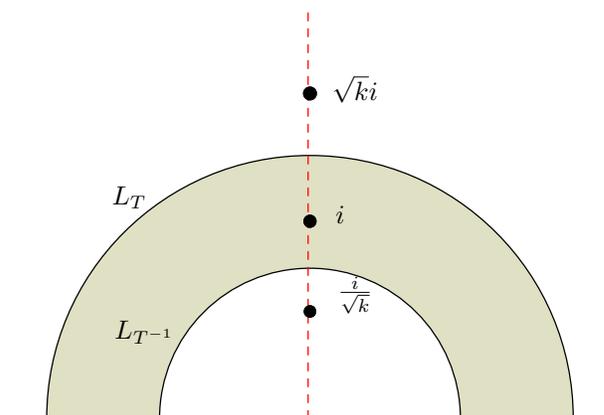


Figura 2.5: Polígono de Dirichlet del grupo $\langle z \rightarrow kz \rangle$.

Para el caso general consideremos f una transformación hiperbólica con puntos fijos α, β ($\alpha \neq \infty$). Tomando

$$h(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta},$$

se sigue que $H = hfh^{-1}(z) = kz$, se puede suponer que $1 < k$ (conjugando una vez más si es necesario). Si $\beta = \infty$ se toma $h(z) = z - \alpha$.

Ahora, ya que todos los bisectores son ortogonales a la geodésica que une los puntos fijos, es decir al eje de la transformación, se sigue de la invariancia de los polígonos de Dirichlet bajo conjugación (Corolario 2.1.4), y del hecho de que las transformaciones son conformes, que los bisectores del grupo conjugado son ortogonales a la imagen del eje. Por lo cual el polígono de Dirichlet con centro en $H^{-1}(w) = u$ donde $w = i$ es la región descrita en la Figura 2.6.

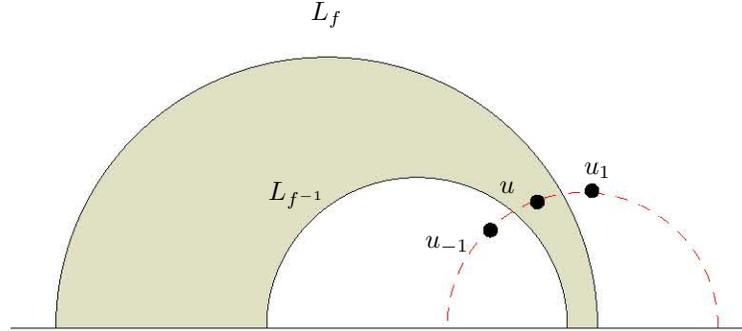


Figura 2.6: Polígono de Dirichlet para un grupo cíclico hiperbólico.

(3) Grupo cíclico elíptico.

Sea $T(z) = e^{\frac{2\pi i}{n}} z$, es decir la rotación de orden n y $\Gamma = \langle T \rangle$. En Δ encontraremos el polígono de Dirichlet con centro en $w = (r, 0)$, donde $0 < r < 1$. Nótese que 0 pertenece a todos los bisectores, ya que equidista de r y de sus imágenes.

Por otra parte, dado que la reflexión en la recta que pasa por el origen y por $e^{\frac{\pi ki}{n}}$, es decir, $R(0, ie^{\frac{\pi ki}{n}})$, es una isometría hiperbólica, se tiene que si $1 < k < n$, entonces

$$\rho(r, re^{\frac{\pi ki}{n}}) = \rho(re^{\frac{\pi ki}{n}}, re^{\frac{2\pi ki}{n}}).$$

Por lo que el conjunto de bisectores consiste en los diámetros

$$\left\{ te^{\frac{\pi ki}{n}} \right\}, |t| \leq 1, 0 < k < n.$$

Además, como

$$T^{n-k} = T^{-k}, k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

se sigue que $D(r)$ es la región acotada por los radios

$$te^{\frac{\pi i}{n}}, t \in [0, 1] \quad \text{y} \quad te^{\frac{\pi i(n-1)}{n}}, t \in [-1, 0],$$

ya que ningún otro bisector interseca a $D(r)$ (véase la Figura 2.7). Esto se verifica fácilmente al tomar $k = 1$ en (2.9).

Para el caso general consideremos una transformación elíptica f de orden finito n actuando en \mathbb{H}^2 , con puntos fijos α, β , y $\Gamma = \langle f \rangle$, se puede suponer que f “rota” hiperbólicamente un ángulo $\frac{2\pi}{n}$.

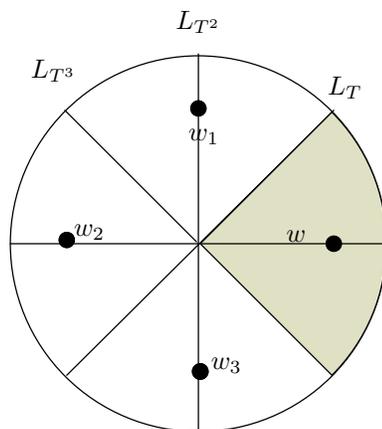


Figura 2.7: Polígono de Dirichlet para el grupo generado por $\langle z \mapsto iz \rangle$.

Tomando

$$h(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

(si $\beta = \infty$ se toma $h(z) = z - \alpha$), se sigue que $hfh^{-1}(z) = e^{\pm \frac{2\pi i}{n}} z$. Ahora, si $D \subset \Delta$ es el polígono de Dirichlet con centro en $w = r$ para el caso canónico, se sigue que $h(D)$ es el polígono de Dirichlet con centro en $h(w)$ para Γ , en virtud del Corolario 2.1.4 (véase la Figura 2.8).

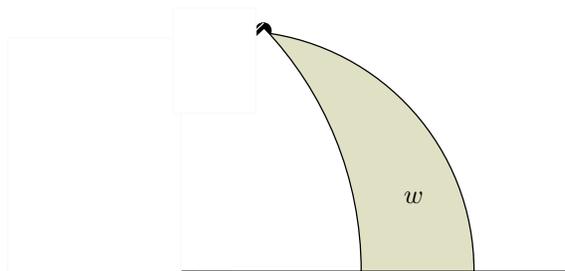


Figura 2.8: Polígono de Dirichlet para un grupo cíclico elíptico.

(4) Grupo clásico modular.

A continuación mostramos que la región determinada en la Figura 2.9 es el polígono de Dirichlet para el grupo clásico modular con centro en $w = iv$ donde $1 < v$. Es claro que $f(z) = z + 1, g(z) = -1/z$, están en G . Nótese además que

$$L_f = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}[z] = 1/2\},$$

$$L_{f^{-1}} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}[z] = -1/2\},$$

y

$$L_g = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = 1\}.$$

Denotamos por P el triángulo hiperbólico determinado por $L_f, L_{f^{-1}}$ y L_g .

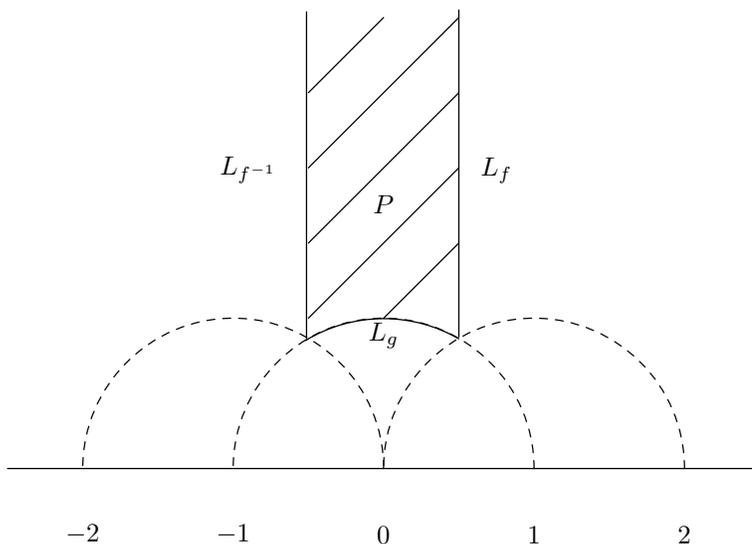


Figura 2.9: Polígono de Dirichlet para el grupo clásico modular.

Se afirma que $P = D(w) = D$. Se sigue de la definición de $D(w)$ que $L_f, L_{f^{-1}}, L_g$ delimitan a $D(w)$, en consecuencia $D \subset P$. Probamos que de hecho $D = P$.

Si $P \subsetneq D$, entonces existe $z_1 \in P$ tal que $z_1 \notin D$. Por ser D región fundamental $z_1 = h(z)$ con $z \in D$, por lo cual $h(z) \in h(D) \cap P$ y en consecuencia $z, h(z) \in P$. Mostramos ahora que esto no ocurre.

Escribiendo

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

se tiene

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= c^2|z|^2 + 2\operatorname{Re}[z]cd + d^2 > c^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}[z]|cd| + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| \\ &= (|c| - |d|)^2 + |cd|, \end{aligned}$$

ya que al estar z en P , $|z| > 1$ y $|Re[z]| < 1/2$. Esta cota inferior es un entero no negativo y es cero sólo si $c = d = 0$, pero esto no ocurre por la condición unimodular, en conclusión $|cz + d| > 1$.

Observemos ahora que si $T \in PSL(2, \mathbb{R})$,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

entonces

$$Im(T(z)) = Im\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = Im\left(\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2}\right)$$

$$Im\left(\frac{adz + bc\bar{z}}{|cz + d|^2}\right) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2}.$$

Por lo que usando la observación anterior se tiene

$$Im(h(z)) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2} < Im(z). \quad (2.10)$$

El mismo argumento aplicado a h^{-1} y al punto $h(z) \in P$ prueba que

$$Im(z) = Im(h^{-1}(h(z))) = \frac{Im(h(z))}{|-cz + a|^2} < Im(h(z)). \quad (2.11)$$

Claramente las relaciones (2.10) y (2.11) no se pueden cumplir simultáneamente, por lo que suponer $D \neq P$ lleva a una contradicción y en consecuencia $D = P$. \square

Nótese que P tiene tres lados, a saber

$$s_1 = [\tau, \infty), \quad s_2 = [-\bar{\tau}, \infty) \quad \text{y} \quad s_3 = [-\bar{\tau}, \tau]$$

donde $\tau = e^{\frac{\pi i}{3}}$. Además, se tienen los siguientes apareamientos de lados $f(s_2) = s_1$ y $g(s_3) = s_3$.

Si en la definición de lado y vértice se acepta la convención de que las transformaciones elípticas de orden 2 determinan dos lados que se intersectan en un vértice que es el punto fijo, entonces P tiene 4 lados, los cuales son

$$s_1 = [\tau, \infty), \quad s_2 = [-\bar{\tau}, \infty), \quad s_3 = [-\bar{\tau}, i) \quad \text{y} \quad s_4 = [i, \tau),$$

y el punto i bajo esta nueva definición es un vértice.

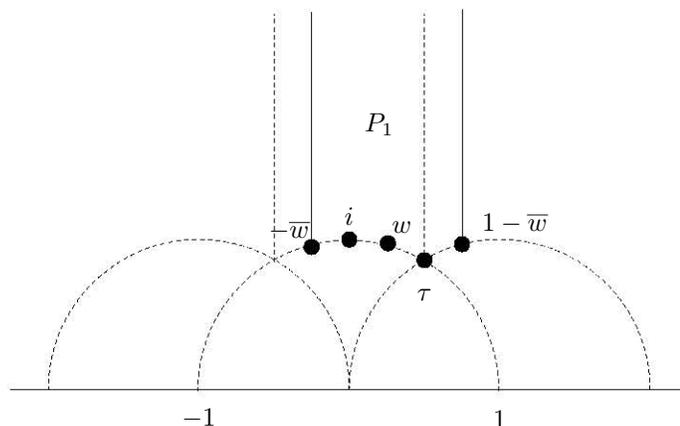


Figura 2.10: Polígono de Dirichlet para el grupo clásico modular.

Finalmente, como P es un polígono fundamental para G , si reemplazamos una banda vertical de P por su imagen bajo f , obtenemos un nuevo polígono P_1 para G , como se describe en la Figura 2.10. Nótese que P_1 el nuevo polígono determinado por los vértices $\infty, -\bar{w}, i, w, 1 - \bar{w}$ y τ es de nuevo una región fundamental para G ya que es fácil mostrar que en P_1 no existen puntos G -equivalentes.

Nótese que en este caso P_1 tiene seis lados, los cuales son:

$$s_1 = [-\bar{w}, \infty), \quad s_2 = f(s_1) = [1 - \bar{w}, \infty),$$

$$s_3 = [-\bar{w}, i], \quad s_4 = g(s_3) = [i, w],$$

$$s_5 = [w, \tau], \quad s_6 = fg(s_5) = [\tau, 1 - \bar{w}].$$

Los ciclos de los vértices de P_1 están dados por

$$\{\infty\}, \{i\}, \{\tau\}, \{-\bar{w}, w, 1 - \bar{w}\}.$$

Obsérvese que este último es accidental, es decir, no son puntos fijos.

2.3. Propiedades avanzadas

Recordemos que si f es una función holomorfa en un abierto A , entonces localmente f cumple una condición Lipschitz en A , es decir, para toda y en una vecindad de x

$$|f(x) - f(y)| < k|x - y|, \quad k \text{ constante.}$$

Lo anterior es consecuencia de la diferenciabilidad de f en $x \in A$, pues dada $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x) \right| < \epsilon,$$

para y en una vecindad de x , $x \neq y$. De donde

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} - |f'(x)| < \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x) \right| < \epsilon,$$

o de manera equivalente

$$|f(x) - f(y)| < (\epsilon + |f'(x)|)|x - y|.$$

Lema 2.3.1 *Sea $R(z)$ una función racional no constante, entonces*

$$E = \{z | R(z) \in \mathbb{R}\},$$

tiene medida bidimensional cero.

DEMOSTRACIÓN. Sean z_1, z_2, \dots, z_n los polos de R y sus puntos críticos. Nótese que, salvo en dichos puntos, R es un difeomorfismo local en su imagen en virtud del teorema de la función inversa.

En particular si $R(u) \in \mathbb{R}$ y $u \neq z_1, z_2, \dots, z_n$, existe una vecindad N_u de u de tal manera que $R|_{N_u}$ es un difeomorfismo que denotamos por f_u . Además existe un intervalo de la forma $[a, b] \subset f_u(N_u)$ tal que $f_u(u) \in (a, b)$.

Probamos primero el lema de manera local. Para esto se toman η arbitrariamente pequeña y δ , de tal forma que se cubra el intervalo $[a, b]$ con un rectángulo W contenido en $f_u(N_u)$, de altura δ , y tal que

$$\text{Área}(W) = (b - a)\delta < \eta,$$

veáse la Figura 2.11.

Tomemos ahora una cubierta abierta de $[a, b]$ formada por cuadrados C_x con centro en $x \in [a, b]$ y de altura menor a δ , de manera que se cumpla la condición Lipschitz para f_u^{-1} . Es decir, se toma $\epsilon > 0$ fija y

$$k = \sup\{|(f_u^{-1})'(x)| + \epsilon \mid x \in [a, b]\},$$

de tal manera que para toda y en la vecindad de C_x se tiene

$$|f_u^{-1}(y) - f_u^{-1}(x)| < k|x - y|.$$

Y esto se hace para cada x .

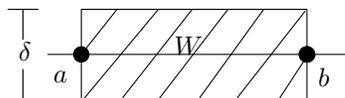


Figura 2.11: Cubierta de $[a, b]$.

El siguiente paso es extraer una subcubierta finita $C_{x_1}, C_{x_2}, C_{x_3}, \dots, C_{x_n}$, de manera que los traslapes sean a lo más dos a dos para cuadrados adyacentes.

Recordemos que para cada x_i se tiene

$$|f_u^{-1}(x_i) - f_u^{-1}(y)| < k|x_i - y|. \quad (2.12)$$

Geoméricamente (2.12) nos dice que cuadrados con centro en x_i y altura δ son transformados bajo f_u^{-1} en conjuntos contenidos en un cuadrado de lado $2k\delta$, ya que la imagen del cuadrado C_{x_i} está contenida en el disco

$$D\left(f_u^{-1}(x_i), \frac{k\delta}{\sqrt{2}}\right),$$

que a su vez está contenido en un cuadrado con centro en $f_u^{-1}(x_i)$ y lado $\sqrt{2}k\delta$ (véase la Figura 2.12).

Finalmente, dada la manera en la que se construyó la cubierta finita, se tiene

$$\sum_{i=1}^n \text{Área}(C_{x_i}) < 2\eta,$$

por lo cual al tomar las imágenes bajo f_u^{-1} se tiene

$$\sum_{i=1}^n \text{Área}(f_u^{-1}(C_{x_i})) < 2k\eta, \quad (2.13)$$

y como η es arbitraria, se sigue el resultado localmente.

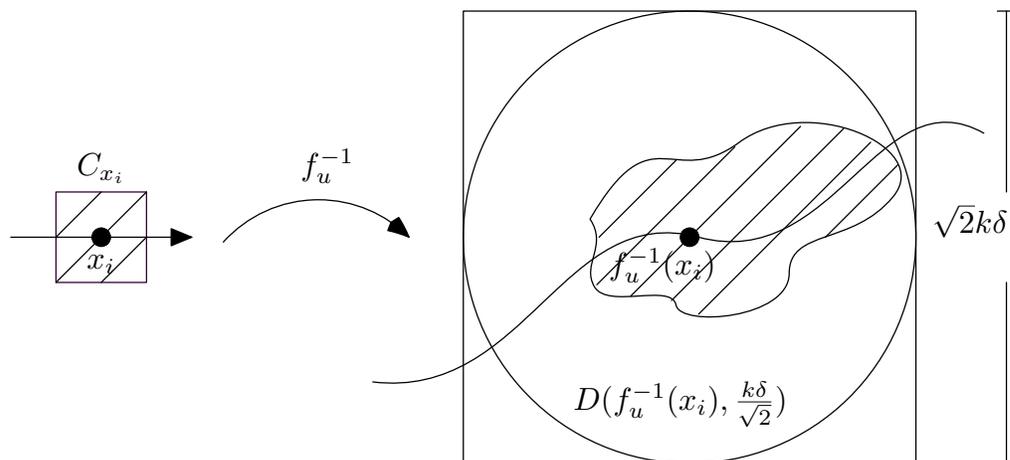


Figura 2.12: Acción geométrica de f_u^{-1} .

Para toda u que satisfaga que $R(u) \in \mathbb{R}$, $R'(u) \neq 0$, existe una vecindad N_u tal que $\{w \in N_u \mid R(w) \in \mathbb{R}\}$ tiene área cero en virtud de (2.13). La vecindad N_u se puede cubrir con discos con centros de coordenadas racionales, con la propiedad de que sus intersecciones con E , tienen medida bidimensional cero. Más aún, se puede cubrir $\mathbb{C} - \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ con discos con centros de coordenadas racionales y radio máximo, de tal manera que R restringida a estos discos sea un difeomorfismo que cumple dicha propiedad.

Denotando en esta colección aquellos discos cuyas imágenes toman valores reales por C_1, C_2, \dots (notése que es una familia a lo sumo numerable, ya que para cada pareja ordenada de racionales se toma sólo un disco, el de radio máximo), se sigue el resultado, ya que cubren E salvo un número finito de puntos, y sabemos que la unión numerable de conjuntos de medida de cero tiene medida cero. \square

Teorema 2.3.2 Sean G un grupo fuchsiano actuando en Δ y $D(w)$ el polígono de Dirichlet con centro en w . Para casi cualquier elección de w , salvo un conjunto de medida cero, se tiene:

1. cada ciclo elíptico en $\partial D(w)$ tiene medida 1,
2. cada ciclo accidental en $\partial D(w)$ tiene longitud 3,

3. cada vértice impropio que es un punto ordinario está en un ciclo de longitud 2,
4. cada vértice propio está en un ciclo de longitud 1 y es un punto fijo parabólico,
5. cada ciclo parabólico tiene longitud 1 y es un vértice propio.

DEMOSTRACIÓN. La prueba de cada inciso sigue el mismo patrón, es decir, si la condición i ($i = 1, 2, \dots, 5$) no se cumple, entonces w está en un conjunto E_i , de área cero. De hecho probaremos que si $w \notin \bigcup E_i$ todas las condiciones se satisfacen.

Para probar 1, considérese E_1 el conjunto formado por la unión de todas las geodésicas que equidistan de dos puntos fijos elípticos. Este conjunto es a lo sumo numerable ya que el número de transformaciones elípticas lo es. Ahora, si u y v son puntos fijos elípticos en el mismo ciclo, se tiene que

$$\rho(w, u) = \rho(w, v),$$

en virtud del Teorema 2.3.1, por lo cual $w \in E_1$. En consecuencia si $w \notin E_1$ se sigue la propiedad 1.

Probamos ahora 2, para ello considérese f, g, h transformaciones en G , y definamos

$$R(z) = \frac{(z - gz)(fz - hz)}{(z - fz)(gz - hz)} \quad (2.14)$$

Nótese se que $R(z)$ puede ser constante, por ejemplo si todas las transformaciones fijan 0 e ∞ , es decir, son de la forma

$$g(z) = k_1z, \quad f(z) = k_2z, \quad h(z) = k_3z \quad \text{donde } k_i = \text{cte},$$

ya que en este caso

$$R(z) = \frac{(z - k_1z)(k_2z - k_3z)}{(z - k_2z)(k_1z - k_3z)} = \frac{(1 - k_1)(k_2 - k_3)}{(1 - k_2)(k_1 - k_3)}.$$

Defínase $E_2 = \bigcup \{z | R(z) \in \mathbb{R}\}$, la unión está definida sobre tripletas de elementos en G que definan transformaciones como (2.14), y que además no sean constantes. Por el Lema 2.3.1 se sigue que E_2 tiene área cero, ya que la cardinalidad de G es a lo sumo numerable, así como $G \times G \times G$.

Supongamos que la condición 2 falla para $w \in \Delta$, entonces existen f, g, h transformaciones distintas de la identidad y distintas dos a dos, y $u, f^{-1}u, g^{-1}u, h^{-1}u$ puntos en algún ciclo accidental en $\partial D(w)$; se sigue del Teorema 2.1.7

$$\rho(w, u) = \rho(w, f^{-1}u) = \rho(w, g^{-1}u) = \rho(w, h^{-1}u).$$

Además como f, g , y h son isometrías se sigue que

$$\rho(w, u) = \rho(fw, u) = \rho(gw, u) = \rho(hw, u),$$

es decir, w, fw, gw y hw son puntos en un círculo hiperbólico con centro en u (véase la Fig 2.13). Además $R(w)$ es la razón cruzada de dichos puntos, por lo que es real (véase [1] p. 77). Por consiguiente $w \in E_2$ o $R(z)$ es constante, probaremos que esto último no ocurre.

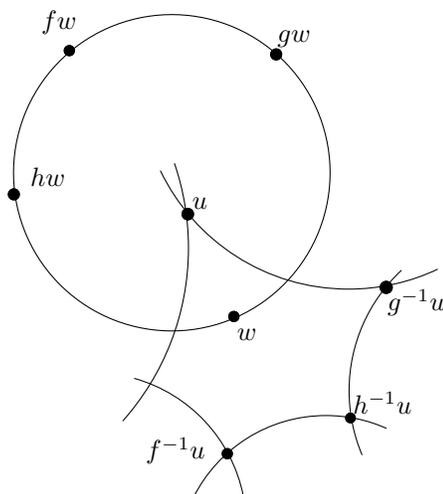


Figura 2.13: Ciclo accidental en $\partial D(w)$.

Supongamos $R(z) = \lambda$. Tomando un punto z que no sea fijado por $g, f, f^{-1}h$ y $g^{-1}h$, se sigue que los factores de $R(z)$ nunca son cero (es decir $hz \neq fz$ y $gz \neq hz$), o de manera equivalente $\lambda \neq 0, \infty$.

Considérese ahora la expresión

$$(z - gz)(fz - hz) = \lambda(z - fz)(gz - hz), \quad (2.15)$$

y v punto fijo de g . Al considerar el límite de (2.15) cuando z tiende a v , es claro que el lado izquierdo de dicha igualdad tiende a cero, ya que los valores

se toman en Δ , además como $\lambda \neq 0$, se tiene que f o h fijan v . Supongamos que g y f tienen un punto fijo en común (el mismo argumento aplica para h). Considérese $\langle g, f \rangle$, es decir un subgrupo del estabilizador de v , se sigue que $\langle g, f \rangle = \langle p \rangle$ pues los estabilizadores de puntos en grupos fuchsianos son cíclicos (véase [1] p. 89).

Por otra parte, p puede ser un elemento hiperbólico, parabólico o elíptico y la órbita de un punto bajo dicha transformación debe estar contenida en un hiperciclo, horociclo o un círculo hiperbólico respectivamente (las anteriores son posibilidades mutuamente excluyentes). En nuestro caso como la órbita de w bajo $\langle f, g \rangle$ necesariamente está contenida en un único círculo hiperbólico con centro en u , se sigue que p es elíptica con punto fijo u , de donde $g(u) = f(u) = u$, lo cual es una contradicción pues u está en un ciclo accidental, lo cual prueba 2.

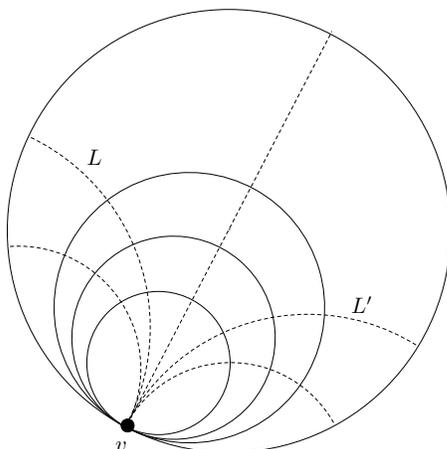


Figura 2.14: Haz parabólico en Δ .

Probamos ahora 4, para ello supongamos que v es un vértice propio de $D(w)$, es decir, es el punto final de dos lados s_1 y s_2 , de la forma

$$s_1 = \tilde{D} \cap g(\tilde{D}), \quad s_2 = \tilde{D} \cap h(\tilde{D}),$$

antes de continuar con la prueba recordemos que un haz parabólico es una configuración en la que dadas dos geodésicas paralelas L y L' con punto final comun v , se define \wp como la familia de todas las geodésicas con punto final

v , y ζ la familia de todos los horociclos tangentes en v a el círculo al infinito (véase Fig 2.14).

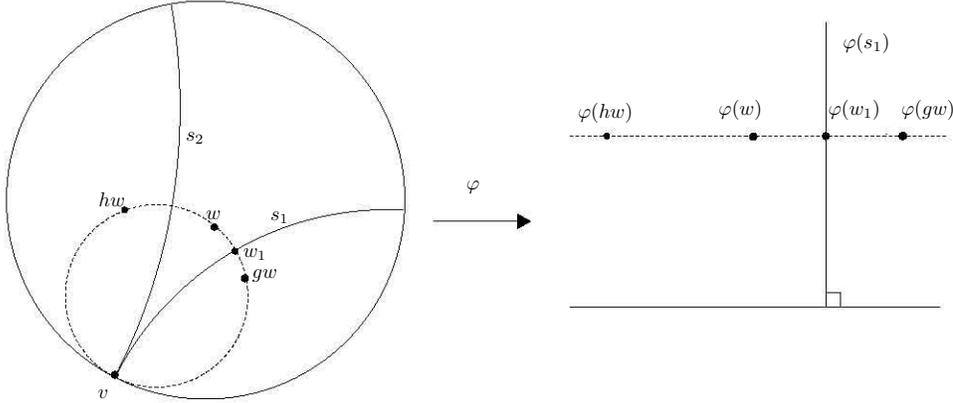


Figura 2.15: Haz parabólico en \mathbb{H}^2 .

Continuando con la prueba, sea w_1 la intersección de s_1 con $[w, gw]$, dado que s_1 biseca dicho segmento, se sigue que $\rho(w, w_1) = \rho(gw, w_1)$. Ahora conjugamos al semiplano superior \mathbb{H}^2 , de tal manera que el punto v vaya a infinito (lo anterior se logra usando una rotación que mande v a 1 y después aplicando la función inversa de Cayley). Si denotamos la función conjugante como φ , el lado s_1 se transforma en una semirecta vertical. Nótese que $Im(\varphi(w)) = Im(\varphi(w_1)) = Im(\varphi(gw))$, ya que la semirecta vertical $\varphi(s_1)$ es el bisector perpendicular entre $\varphi(w)$ y $\varphi(gw)$, y pasa por $\varphi(w_1)$. El mismo argumento se aplica a $\varphi(w)$ y $\varphi(hw)$. Por consiguiente $\varphi(w)$, $\varphi(hw)$ y $\varphi(gw)$ están en una recta horizontal y por ende w , gw y hw están en un horociclo basado en v (véase la Fig 2.15).

Considérese ahora

$$R_1(z) = [v, z, gz, hz] = \frac{(v - gz)(z - hz)}{(v - z)(gz - hz)}, \quad (2.16)$$

al ser un horociclo un círculo euclidiano, se sigue que $R_1(w)$ es real (véase [1] p. 77). Puede ocurrir que R_1 no sea constante, sin embargo si esto sucede, w está en un conjunto de medida cero. Por lo cual basta probar que R_1 no puede ser constante. Como antes, supongamos que $R_1(z) = \lambda$, el argumento usado anteriormente muestra que $\lambda \neq 0, \infty$.

Si hacemos tender z a v en la siguiente expresión

$$(v - gz)(z - hz) = \lambda(v - z)(gz - hz), \quad (2.17)$$

se sigue que g o h fijan v (ya que el valor ∞ no es tomado en $\overline{\Delta}$). Asumamos que g fija v , entonces dicha transformación es parabólica (cf. [1] p. 224). Al considerar $g^{-1}(s_1)$, se observa que éste es un lado de $D(w)$ que termina en v , por lo que necesariamente $g^{-1}(s_1) = s_2$, o de manera equivalente $h = g^{-1}$ (ya que $g^{-1}(s_1)$ es otro lado de $D(w)$ que contiene a v , y por convexidad solo puede haber dos). Es decir, v es un punto fijo parabólico en un ciclo de longitud 1, lo cual prueba 4.

El punto 5 se sigue de 4, y del hecho de que todo punto fijo parabólico en $\partial D(w)$ es un vértice propio (cf. [1] p. 224).

Finalmente probamos 3. Nótese que un vértice impropio que es un punto ordinario pertenece a un ciclo finito, digamos v_1, v_2, \dots, v_n (cf. [1] p. 224). Ahora, si los ángulos de los vértices son $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ respectivamente, se tiene que $\theta_i = 0$ o $\pi/2$ y que

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = \pi,$$

(véase [1] p. 224 y con más detalle [7]). Usando 4 se sigue que, salvo si w está en un conjunto de medida cero, todos los vértices propios corresponden a puntos fijos parabólicos, por lo cual $n = 2$. Cabe mencionar que el inciso 1 también es válido en \mathbb{H}^2 , pues los mismos argumentos antes usados, también son válidos en tal caso. \square

Corolario 2.3.3 *El Teorema 2.3.2 se cumple también en el modelo de \mathbb{H}^2 .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba de los puntos 1, 3 y 5 es la misma por lo que se omite.

Probamos 2, es decir, que cada ciclo accidental en $\partial D(w)$ tiene longitud 3. La demostración es igual al caso de Δ , salvo que el argumento algebraico que aparece después de la expresión 2.15 no se cumple como tal, si el punto fijo de g es ∞ . Recordemos que la prueba en Δ se basa en suponer que la razón cruzada en 2.14 no puede ser constante.

Usando el hecho de que la razón cruzada es invariante bajo transformaciones de Möbius (véase [1] p. 75), se puede conjugar con la transformación de Cayley

$$\varphi(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Entonces, si $z = \varphi^{-1}(u)$

$$\begin{aligned} R(z) &= [z, fz, gz, hz] = [\varphi z, \varphi fz, \varphi gz, \varphi hz] \\ &= [u, \varphi f \varphi^{-1}(u), \varphi g \varphi^{-1}(u), \varphi h \varphi^{-1}(u)], \end{aligned}$$

se sigue que $R(z)$ es constante si y sólo si la correspondiente razón cruzada para el grupo conjugado actuando en Δ , lo es (para las transformaciones f, g, h y sus conjugadas). Finalmente, en Δ se puede aplicar como antes el argumento, esto es, $\varphi f \varphi^{-1}$ y $\varphi g \varphi^{-1}$ tienen un punto fijo en común, es decir f y g lo tienen también, y el argumento fluye como antes.

Finalmente probamos 4, si $v = \infty$, la prueba es igual a la dada para el modelo de Δ salvo que el razonamiento algebraico que aparece después de 2.17 no funciona como tal, sin embargo, podemos conjugar como en el caso accidental usando la transformación de Cayley φ y se tiene

$$R_1(z) = [v, z, gz, hz] = [\varphi v, u, \varphi g \varphi^{-1}u, \varphi h \varphi^{-1}u],$$

donde $\varphi^{-1}(u) = z$. Y como antes, se puede aplicar el argumento algebraico a la última expresión, por lo que $\varphi g \varphi^{-1}$ o $\varphi h \varphi^{-1}$ fijan $\varphi(v)$, es decir, g o h fijan v , y la prueba fluye como antes. \square

CAPÍTULO 3

Poliedros de Dirichlet

En este capítulo generalizaremos algunos conceptos del anterior para así construir poliedros de Dirichlet en el espacio hiperbólico tridimensional

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}.$$

3.1. Fundamentos de la geometría hiperbólica tridimensional

En esta sección estudiamos cuáles son las curvas que minimizan la distancia e identificamos los grupos de transformaciones que actúan como isometrías en este modelo. Identificaremos al plano complejo \mathbb{C} con el plano

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}.$$

Comenzamos dando un método para encontrar un “semicírculo” en \mathbb{H}^3 ortogonal a $\widehat{\mathbb{C}}$ que contenga dos puntos dados x y y en \mathbb{H}^3 .

Sean $x, y \in \mathbb{H}^3$ puntos no alineados verticalmente, y x', y' las respectivas proyecciones en el plano $\widehat{\mathbb{C}}$, denotemos por Π al plano que determinan estos cuatro puntos, tracemos ahora la mediatriz euclidiana η del segmento $[x, y]$, que está contenida en Π , llamemos w al punto de intersección de η con $\widehat{\mathbb{C}}$, por último, si trazamos la semicircunferencia euclidiana L con centro en w y radio $r = |w - x|$ obtenemos un semicírculo ortogonal a $\widehat{\mathbb{C}}$ que contiene a x y y (véase la Figura 3.1).

El caso en que x y y estén alineados verticalmente, la recta que los contiene es ortogonal a $\widehat{\mathbb{C}}$. Nótese que L está contenida también en $S(w, r)$, más aún,

obsérvese que en general un “semicírculo” ortogonal a $\widehat{\mathbb{C}}$ se puede pensar como la intersección de dos “esferas” ortogonales al plano complejo, restringida la intersección a \mathbb{H}^3 . Mostraremos que estos “semicírculos” ortogonales a $\widehat{\mathbb{C}}$ serán las geodésicas en \mathbb{H}^3 .

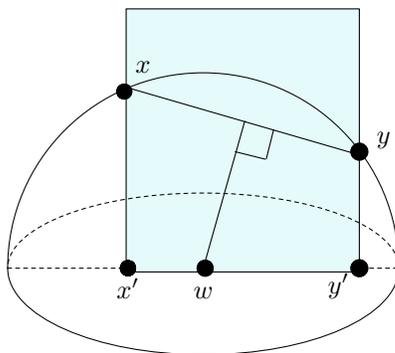


Figura 3.1: Geodésica como intersección de “esferas” ortogonales a $\widehat{\mathbb{C}}$ y ortogonales entre sí.

Definición 24 *El semiespacio \mathbb{H}^3 provisto con la métrica definida por la densidad*

$$\lambda(x) = \frac{1}{x_3}$$

se llama el espacio hiperbólico, y a la métrica correspondiente se le llama la métrica hiperbólica.

Estableceremos ahora cómo son las curvas en \mathbb{H}^3 que minimizan la distancia. Consideremos primero un caso sencillo: tomemos e_3 y ke_3 con $k > 1$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3$ una curva de clase C^1 tal que $\gamma(a) = e_3$ y $\gamma(b) = ke_3$. Si $l_h(\gamma)$ denota la longitud hiperbólica de γ y $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, tenemos:

$$\begin{aligned} l_h(\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + (\gamma_3'(t))^2}}{\gamma_3(t)} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{\sqrt{((\gamma_3'(t))^2)}}{\gamma_3(t)} dt \geq \int_a^b \frac{\gamma_3'(t)}{\gamma_3(t)} dt = \log(\gamma_3(t)) \Big|_a^b \\ &= \log(k) - \log(1) = \log(k). \end{aligned}$$

Obsérvese que $\gamma : [1, k] \longrightarrow \mathbb{H}^3$ dada por $\gamma(t) = te_3$, alcanza esta cota

$$l_h(\gamma) = \int_1^k \frac{1}{t} dt = \log(k).$$

Como este argumento se generaliza a curvas C^1 por tramos, se sigue que

$$\rho(e_3, ke_3) = \log(k),$$

donde ρ denota la distancia hiperbólica. Además este segmento del eje z es la única curva que minimiza la distancia. Para probar esto tomemos cualquier otra curva con componente no cero en x o y , parametrizada por una función $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$ de clase C^1 , tal que $\beta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}^3$ y $\beta(a) = e_3$ y $\beta(b) = ke_3$.

Obsérvese que si $\beta_2(t_0) \neq 0$ para alguna $t_0 \in [a, b]$ entonces existe alguna $t_1 \in [a, b]$ que cumple $\beta_2(t_1) \neq 0$ y $\beta'_2(t_1) \neq 0$. Por continuidad existe $\epsilon > 0$ tal que $\beta'_2(s) \neq 0 \quad \forall s \in [-\epsilon + t_1, t_1 + \epsilon]$. Usando esta observación se obtiene

$$l_h(\beta) > \int_a^b \frac{\gamma'_3(t)}{\gamma_3(t)} dt \quad (\text{desigualdad estricta}).$$

Para conocer las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos de \mathbb{H}^3 que no estén alineados verticalmente estudiamos primero cómo son las isometrías hiperbólicas en \mathbb{H}^3 . A partir de este momento escribiremos “esferas” para denotar esferas o planos en $\widehat{\mathbb{R}^n}$.

Definición 25 *El grupo general de Möbius actuando en \mathbb{R}^n , denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$, consiste en todas las funciones que son una composición finita de reflexiones en “esferas”.*

Como $M(\widehat{\mathbb{R}^2}) = PSL(2, \mathbb{C})$ (cf. [5] p. 70), es natural denotar al conjunto de las extensiones de Poincaré de $PSL(2, \mathbb{C})$ por $\widehat{M}(\widehat{\mathbb{R}^2})$.

Definición 26 *Sea $\hat{a} = (a, 0) \in \mathbb{R}^3$, donde $a \in \mathbb{R}^2$. Si φ es la reflexión en $C(a, r)$ (o en $R(a, t)$), a la reflexión en $S(\hat{a}, r)$ (o en $P(\hat{a}, t)$), denotada por $\hat{\varphi}$, se le llama la extensión de Poincaré de φ .*

Teorema 3.1.1 *Sea Σ cualquier “esfera”, σ la reflexión en Σ e I el mapeo identidad. Si ϕ es cualquier transformación de Möbius que fija puntualmente Σ , entonces $\phi = I$ ó $\phi = \sigma$.*

La prueba de este resultado puede consultarse en [1] p. 31.

Definición 27 Dada $\varphi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$, $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_n$, donde φ_j es la reflexión en un “círculo” para $j = 1, \dots, n$. Se define su extensión de Poincaré como

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_1 \cdots \widehat{\varphi}_n.$$

Esta no depende de la descomposición, pues si

$$\varphi = \varphi_n \cdots \varphi_1$$

y

$$\varphi = \psi_m \cdots \psi_1$$

entonces

$$\widehat{\psi}_1^{-1} \cdots \widehat{\psi}_m^{-1} \widehat{\varphi}_n^{-1} \cdots \widehat{\varphi}_1^{-1} | \mathbb{C},$$

es la identidad en virtud del Teorema 3.1.1.

Denotamos por $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$ al conjunto que consiste en todas las extensiones de Poincaré de $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$.

Lema 3.1.2 Sea $S(a, r)$ la esfera con centro en a y radio r en \mathbb{R}^n , es decir,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r\},$$

y sea φ la reflexión en $S(a, r)$, entonces si $x, y \in \mathbb{R}^n - \{a\}$, se tiene

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = r^2 \frac{|x - y|}{|x - a||y - a|}.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el producto escalar estándar en \mathbb{R}^n , se sigue directamente de la definición que

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 &= r^4 |(x - a)^* - (y - a)^*|^2 \\ &= r^4 \left(\frac{1}{|x - a|^2} + \frac{1}{|y - a|^2} - 2 \frac{(x - a) \cdot (y - a)}{|x - a|^2 |y - a|^2} \right) \\ &= r^4 \left(\frac{|y - a|^2 + |x - a|^2 - 2(x - a) \cdot (y - a)}{|x - a|^2 |y - a|^2} \right) \\ &= r^4 \frac{|x - y|^2}{|x - a|^2 |y - a|^2}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.3 *El grupo $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ actúa como grupo de isometrías en \mathbb{H}^3 con la métrica hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\widehat{\varphi} \in \widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ la reflexión en alguna “esfera” ortogonal a \mathbb{C} , digamos $S(\widehat{a}, r)$ donde $\widehat{a} = (a, 0)$, $a \in \mathbb{C}$. Para probar que $\widehat{\varphi}$ es una isometría basta ver que la igualdad (1.1) aplicada a la densidad hiperbólica de \mathbb{H}^3 se cumple bajo $\widehat{\varphi}$; es decir:

$$\lambda(\widehat{\varphi}(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu_{\widehat{\varphi}}(x)}. \quad (3.1)$$

Usamos el hecho de que si una función g es conforme en x , entonces

$$\mu_g(x) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|}$$

cf. [5] p. 47. Por consiguiente, usando el Lema 3.1.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{|\widehat{\varphi}(x) - \widehat{\varphi}(y)|}{|x - y|} = \lim_{x \rightarrow y} \frac{r^2|x - y|}{|x - \widehat{a}||y - \widehat{a}|} \\ &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{r^2}{|x - \widehat{a}||y - \widehat{a}|} = \frac{r^2}{|x - \widehat{a}|^2}. \end{aligned}$$

Se sigue entonces de la observación anterior que si $(x_1, x_2, x_3) = x \in \mathbb{H}^3$, se tiene

$$\frac{\lambda(x)}{\mu_{\widehat{\varphi}}(x)} = \frac{|x - \widehat{a}|^2}{r^2 x_3},$$

Por otra parte, si $[\widehat{\varphi}(x)]_3$ denota la tercera componente de $\widehat{\varphi}(x)$, tenemos

$$[\widehat{\varphi}(x)]_3 = \frac{r^2 x_3}{|x - \widehat{a}|^2}, \quad (3.2)$$

ya que $\widehat{\varphi}(x) = \widehat{a} + r^2(x - \widehat{a})^2$ y en consecuencia se cumple (3.1), es decir, las reflexiones en esferas ortogonales a \mathbb{C} son isometrías hiperbólicas de \mathbb{H}^3 .

Ahora, si φ es la reflexión en un plano ortogonal a \mathbb{C} entonces un punto $(x_1, x_2, x_3) = x \in \mathbb{H}^3$ y $\varphi(x)$ tienen la tercer componente igual, + aplicando a x la fórmula de la reflexión $\widehat{\varphi}(x) = x - 2(x \cdot \widehat{a} - t)\widehat{a}$, donde $\widehat{a} = (a_1, a_2, 0)$,

se observa que $[\widehat{\varphi}(x)]_3 = [x - 2(\alpha_1, \alpha_2, 0)]_3 = x_3$ y se sigue (3.1), ya que $\mu(x) = 1$, al ser estas reflexiones isometrías euclidianas. \square

Probamos ahora que el grupo de extensiones de Poincaré de $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ es transitivo en el conjunto de “círculos” ortogonales a $\widehat{\mathbb{C}}$.

Proposición 3.1.4 Sean $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones de Möbius tales que $f|_{\widehat{\mathbb{C}}} = g$, y además f preserva \mathbb{H}^3 , entonces $f = \widehat{g}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \widehat{\mathbb{C}}$, entonces $(\widehat{g^{-1}} \circ f)(x) = x$ ya que $f|_{\widehat{\mathbb{C}}} = g$ y $\widehat{g^{-1}}|_{\widehat{\mathbb{C}}} = g^{-1}$, es decir $\widehat{g^{-1}} \circ f$ fija puntualmente $\widehat{\mathbb{C}}$, por lo cual en virtud del Teorema 3.1.1 $\widehat{g^{-1}} \circ f$ es la identidad o la reflexión en $\widehat{\mathbb{C}}$, esto último no ocurre pues $\widehat{g^{-1}} \circ f$ preserva \mathbb{H}^3 , por lo cual $\widehat{g^{-1}} \circ f = I_d$, en consecuencia $\widehat{g} = f$. \square

Proposición 3.1.5 El grupo $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$ es transitivo en “círculos” ortogonales a $\widehat{\mathbb{C}}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in \mathbb{H}^3$ y L el “círculo” ortogonal a $\widehat{\mathbb{C}}$ que los contiene, basta probar que existe $\widehat{\varphi} \in \widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$ tal que $\widehat{\varphi}(L) = Z$, donde Z es el eje z .

Caso 1: Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (x_1, x_2, x'_3)$, al considerar la transformación $T(z) = z - (x_1 + ix_2)$, se tiene que esta misma traslación actuando en \mathbb{R}^3 (que es de Möbius cf. [1] p. 23), es precisamente \widehat{T} , en virtud de la Proposición 3.1.4. La cual manda la recta por x y y en Z (ver Figura 3.2) .

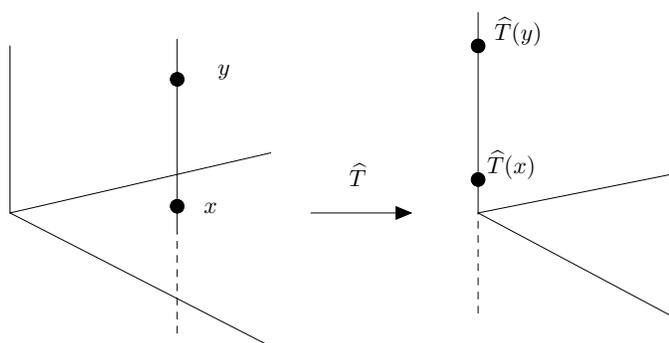


Figura 3.2: Extensión de Poincaré de una traslación.

Caso 2: x y y no están alineados verticalmente.

Supongamos $L \subset S(\hat{a}, r)$, como en el Caso 1 la extensión de Poincaré de $T(z) = z - a$ satisface $\hat{T}(S(\hat{a}, r)) = S(0, r)$ (ver Figura 3.3).

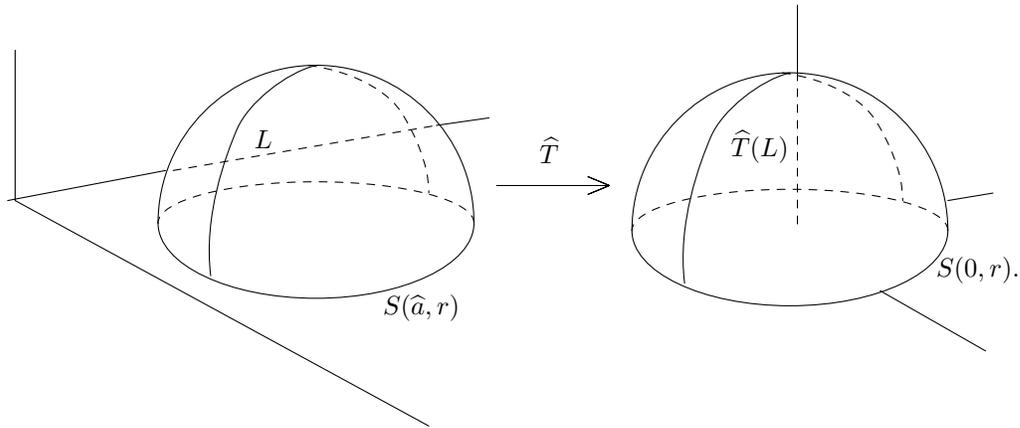


Figura 3.3: Esfera trasladada bajo extensión de Poincaré.

Consideremos ahora la homotecia $H(z) = z/r$, el mismo razonamiento permite aplicar la Proposición 3.1.4 (las homotecias en \mathbb{R}^n son de Möbius cf. [1] p. 23), y la homotecia en \mathbb{R}^3 $x \mapsto x/r$ es \hat{H} , por lo cual $\hat{H}(S(0, r)) = S^2$ (ver Figura 3.4).

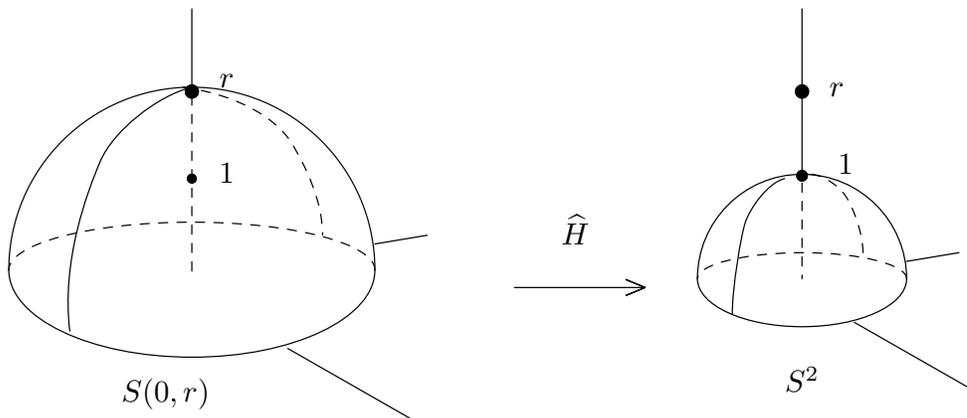


Figura 3.4: La extensión de Poincaré de una homotecia, es también una homotecia.

El siguiente paso es rotar, para que la proyección π de $\widehat{HT}(L)$ en el plano complejo sea el segmento $(-1, 1)$, ésta proyección forma un ángulo θ con este segmento. Escribiendo $\varphi_1(z) = \bar{z}$, $\varphi_2(z) = e^{i\theta}\bar{z}$, resulta que φ_2 es la reflexión en la recta por el origen y $e^{i\theta/2}$ cf. [5] p. 71, claramente la rotación buscada es $\varphi_1\varphi_2$, por lo cual la transformación que se necesita es $\widehat{R} = \widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_2$ en virtud de la Proposición 3.1.4 (véase la Figura 3.5).

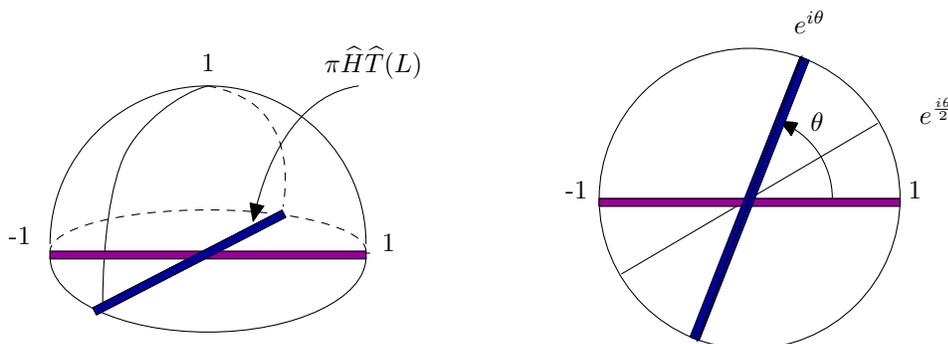


Figura 3.5: Rotación y proyección de S^2 en \mathbb{C} .

Sin embargo, analíticamente esto no es evidente. Por lo cual efectuamos los cálculos. Para el resto de la prueba pensaremos a φ_1, φ_2 como transformaciones lineales de \mathbb{R}^2 en sí mismo, por lo cual en notación real

$$\varphi_1(x) = x - 2(x \cdot (0, 1))(0, 1) \quad y$$

$$\widehat{\varphi}_1(x) = x - 2(x \cdot (0, 1, 0))(0, 1, 0) = x + (0, -2x_2, 0) = (x_1, -x_2, x_3).$$

Como $\varphi_2(z) = e^{i\theta}\bar{z}$ es la reflexión en la recta por el origen y $e^{i\theta/2}$, entonces un vector normal unitario a dicha recta es $i(\cos \theta/2 + i \sin \theta/2)$, es decir $(-\sin \theta/2 + i \cos \theta/2)$, por lo cual en notación real tenemos que

$$\varphi_2(x) = x - 2(x \cdot (-\sin \theta/2, \cos \theta/2))(-\sin \theta/2, \cos \theta/2) \quad y$$

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_2(x) &= x - 2(x \cdot (-\sin \theta/2, \cos \theta/2, 0))(-\sin \theta/2, \cos \theta/2, 0) \\ &= x - (-2x_1 \sin \theta/2 + 2x_2 \cos \theta/2)(-\sin \theta/2, \cos \theta/2, 0) \\ &= x - (2x_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2x_2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, -2x_1 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2x_2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, 0) \\ &= (x_1 + x_1(\cos \theta - 1) + x_2 \sin \theta, x_2 + x_1 \sin \theta - x_2(\cos \theta + 1), 0). \\ &= (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta, 0). \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\widehat{\varphi}_2 \widehat{\varphi}_1(x) = \widehat{\varphi}_2(x_1, -x_2, x_3) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta, x_3)$$

corresponde con la rotación alrededor del eje z por un ángulo θ en \mathbb{R}^3 , es decir con la transformación lineal dada por

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

cabe hacer la aclaración de que en realidad la transformación buscada es $\widehat{\varphi}_1 \widehat{\varphi}_2 = (\widehat{\varphi}_2 \widehat{\varphi}_1)^{-1}$, pues ésta es una rotación por $-\theta$, se concluye entonces que la proyección al plano complejo de $\widehat{R}\widehat{H}\widehat{T}(L)$ es el intervalo $(-1, 1)$ en el eje x .

Por último, consideremos $S(\widehat{a}, \sqrt{2})$ donde $\widehat{a} = (1, 0, 0)$ y la reflexión $\widehat{\phi}$ en dicha esfera. Observemos que $\widehat{\phi}(\widehat{a}) = \infty$ y $\widehat{\phi}(-\widehat{a}) = \bar{0}$, por lo tanto $\widehat{\phi}\widehat{R}\widehat{H}\widehat{T}(L) = Z$. \square

Observemos que los puntos en el eje z son transitivos bajo homotecias de $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$. Más aún, la proposición anterior implica que $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$ es transitivo en puntos de $\widehat{\mathbb{H}^3}$, ya que cualquier punto puede trasladarse al eje z bajo una traslación de $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$ y posteriormente aplicando una homotecia mandarlo a e_3 .

Proposición 3.1.6 *Dados $u, v \in \widehat{\mathbb{H}^3}$, $u \neq v$, el único “círculo” ortogonal a $\widehat{\mathbb{C}}$ que pasa por u y v es la única curva que minimiza la distancia hiperbólica entre u y v . A estas curvas, en este contexto se les llama geodésicas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea C el “círculo” ortogonal a $\widehat{\mathbb{C}}$ por u y v , usando la Proposición 3.1.5 existe $\varphi \in \widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$ tal que $\varphi(u), \varphi(v)$ son puntos en el eje z . Ahora como se mostró al principio del capítulo la única curva que minimiza la distancia hiperbólica entre $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$ es precisamente el segmento en el eje z que une estos dos puntos. Finalmente, usando la relación (3.1) no es difícil mostrar que además de ser una isometría φ preserva la longitud hiperbólica de cualquier curva C^1 por tramos que una u y v . Por consiguiente se sigue el resultado. \square

A la extensión de Poincaré de una transformación parabólica se le llama también parabólica y lo mismo ocurre con las extensiones de Poincaré de transformaciones elípticas, hiperbólicas y loxodrómicas. Si dos transformaciones son conjugadas en $PSL(2, \mathbb{C})$ también lo son sus extensiones, pues como se vio antes, la extensión no depende de la descomposición, es decir, si

$$f = \varphi g \varphi^{-1} \Rightarrow \widehat{f} = \widehat{\varphi} \widehat{g} \widehat{\varphi}^{-1},$$

por lo cual esta clasificación de los elementos de $\widehat{M}(\widehat{\mathbb{R}^2})$ es consistente.

Definición 28 *Dados $u, v \in \mathbb{H}^3$ se define su h -bisector perpendicular o “mediatriz” hiperbólica, como la única “semiesfera” ortogonal a $[u, v]$ en el punto medio hiperbólico, que pasa por dicho punto y que también es ortogonal a $\widehat{\mathbb{C}}$.*

No es difícil ver que esta “semiesfera” es única, al tomar u y v en el círculo $|x| = 1$ en el plano xz , colocados de manera simétrica con respecto al plano yz . El caso general se sigue de la conformalidad de los elementos de $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^3})$ (véase [1] cap. 3)

Lema 3.1.7 *Sean $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ elementos de \mathbb{H}^3 , entonces la expresión*

$$\frac{|u - v|^2}{u_3 v_3}$$

es invariante bajo transformaciones en $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$.

DEMOSTRACIÓN. Basta probar el resultado para reflexiones en “esferas” ortogonales a $\widehat{\mathbb{C}}$. Si $\widehat{\varphi}$ es la reflexión en un plano ortogonal a $\widehat{\mathbb{C}}$, supóngamos $P(b, t)$ entonces

$$|\widehat{\varphi}(u) - \widehat{\varphi}(v)|^2 = |u - v|^2,$$

al ser $\widehat{\varphi}$ una isometría euclidiana, y la tercer componente de $\widehat{\varphi}(u)$ (que denotaremos por $[\widehat{\varphi}(u)]_3$), y u iguales, como se muestra en la prueba del Teorema 3.1.3, por lo que se sigue el resultado. Ahora bien, si $\widehat{\varphi}$ es la reflexión en $S(\widehat{a}, r)$, donde $\widehat{a} = (a_1, a_2, 0)$, usando la formula de la reflexión $\widehat{\varphi}(u) = \widehat{a} + r^2(u - \widehat{a})^*$ se observa que

$$[\widehat{\varphi}(u)]_3 = \frac{r^2 u_3}{|u - \widehat{a}|^2},$$

y también

$$[\widehat{\varphi}(v)]_3 = \frac{r^2 v_3}{|v - \widehat{a}|^2}.$$

Finalmente, usando el Lema 3.1.2

$$\frac{|\widehat{\varphi}(u) - \widehat{\varphi}(v)|^2}{[\widehat{\varphi}(u)]_3 [\widehat{\varphi}(v)]_3} = \frac{r^4 |u - v|^2}{|u - \widehat{a}|^2 |v - \widehat{a}|^2} = \frac{|u - v|^2}{u_3 v_3},$$

como se quería demostrar. \square

El lema anterior se puede generalizar a cualquier dimensión, para ello basta reemplazar la tercer componente por la n -ésima en \mathbb{H}^n y $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$ por el grupo $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^{n-1}})$.

Teorema 3.1.8 Sean $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ puntos en \mathbb{H}^3 , entonces

$$\cosh \rho(u, v) = 1 + \frac{|u - v|^2}{2u_3 v_3}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $u = e_3$ y $v = ke_3, k > 1$ entonces

$$\begin{aligned} \cosh \rho(u, v) &= \cosh(\log k) = \frac{k + (1/k)}{2} \\ &= \frac{k + (1/k) - 2}{2} + 1 = \frac{(k - 1)^2}{2k} + 1 \\ &= \frac{|u - v|^2}{2u_3 v_3} + 1. \end{aligned}$$

El caso general se sigue del lema anterior y del Teorema 3.1.3 y la Proposición 3.1.5, ya que se puede encontrar una función en $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}^2})$ que mande u y v en e_3 y $ke_3, k > 1$. Lo último se logra enviando la geodésica por u y v al eje z , resulta también que la fórmula del teorema anterior se generaliza a cualquier dimensión, la prueba es prácticamente igual. \square

Probamos ahora el siguiente resultado que muestra cierta semejanza entre la geometría hiperbólica y euclidiana.

Teorema 3.1.9 *El conjunto de los puntos $u = (x, y, z) \in \mathbb{H}^3$ que equidistan hiperbólicamente una distancia r de un punto $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$, están determinados por la siguiente ecuación*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0 \cosh r)^2 = z_0^2 \sinh^2 r,$$

es decir, constituye una esfera euclidiana.

DEMOSTRACIÓN. Sea $S = \{u \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(u, u_0) = r\}$, entonces

$$\cosh \rho(u, u_0) = \cosh r = 1 + \frac{|u - u_0|^2}{2zz_0}$$

y se tiene

$$\cosh r = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 + z_0^2}{2zz_0}.$$

Al despejar y completar cuadrados obtenemos

$$2zz_0 \cosh r = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 + z_0^2 (\cosh^2 r - \sinh^2 r)$$

y

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0 \cosh r)^2 = z_0^2 \sinh^2 r.$$

□

Se ha probado que las esferas hiperbólicas son esferas euclidianas con el centro desplazado hacia abajo.

Teorema 3.1.10 *La intersección de dos esferas en \mathbb{R}^n , es vacía o un punto o la intersección de una esfera con un plano ortogonal a la recta que une los centros.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\Sigma = S(a, r)$ y $\Sigma' = S(b, t)$ esferas en \mathbb{R}^n :

Si $|a - b| > r + t$, entonces $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$.

Si $|a - b| = r + t$, entonces la intersección $\Sigma \cap \Sigma'$ es el punto:

$$a + r \frac{(b - a)}{|b - a|} = b + t \frac{(a - b)}{|a - b|},$$

si $u \in \Sigma, \Sigma'$ considerando el plano determinado por u, a y b se sigue que u es el punto de *tangencia*.

Si la intersección no es un punto ni tampoco es vacía, sea $u \in \Sigma \cap \Sigma'$ y w la proyección ortogonal de u a la recta por a, b , se afirma que

$$\Sigma \cap \Sigma' = \Pi \cap \Sigma'',$$

donde Π es el plano ortogonal a $b - a$ por w y $\Sigma'' = S(w, |w - u|)$. Para probar la última afirmación, usando el Teorema de Pitágoras obtenemos

$$|u - a|^2 = |a - w|^2 + |u - w|^2.$$

Probamos que w no depende de la elección de u ; como:

$$|u - w|^2 + |a - w|^2 = r^2 \quad \text{y} \quad |u - w|^2 + |b - w|^2 = t^2$$

se tiene

$$|w - a|^2 - r^2 = |w - b|^2 - t^2, \quad (3.3)$$

por lo cual, si $w = a + k(b - a)$, $k \in \mathbb{R}$, se sigue de (3.3) que

$$|k(b - a)|^2 - r^2 = |(a - b) + k(b - a)|^2 - t^2$$

$$k^2|b - a|^2 - r^2 = |b - a|^2|1 - k|^2 - t^2$$

$$k^2 - |1 - k|^2 = \frac{r^2 - t^2}{|b - a|^2}$$

$$2k - 1 = \frac{r^2 - t^2}{|b - a|^2}, \quad (3.4)$$

por lo que w está unívocamente determinada.

Probamos ahora que $\Sigma \cap \Sigma' \subseteq \Pi \cap \Sigma''$, sea $x \in \Sigma \cap \Sigma'$, como w está unívocamente determinada, entonces $(w - x)$ es ortogonal a $(b - a)$, es decir $x \in \Pi$, una vez más por el Teorema de Pitágoras, se tiene

$$|x - w|^2 = |x - a|^2 - |a - w|^2,$$

pero $|u - a|^2 = |x - a|^2$, por lo que

$$|x - a|^2 - |a - w|^2 = |u - a|^2 - |a - w|^2 = |u - w|^2$$

y por lo tanto $x \in \Pi \cap \Sigma''$.

Para probar la otra contención, sea $x \in \Pi \cap \Sigma''$, entonces $(w - x)$ es ortogonal a $(a - b)$, y $|w - x| = |u - w|$, por lo cual :

$$|x - a|^2 = |x - w|^2 + |a - w|^2 = |u - w|^2 + |a - w|^2 = |u - a|^2 = r^2$$

De donde $x \in \Sigma$, una prueba análoga muestra que $x \in \Sigma'$. \square

Nótese que la fórmula (3.4) establece que si Σ, Σ' tienen el mismo radio, el plano Π es el ortogonal a la línea que une a y b , y pasa por el punto medio.

Proposición 3.1.11 Sean $u, v \in \mathbb{H}^3$, entonces el h -bisector perpendicular a $[u, v]$ consiste en los puntos en \mathbb{H}^3 que equidistan hiperbólicamente de u y v , es decir,

$$\{w \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(u, w) = \rho(v, w)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando la prueba de la Proposición 3.1.5 y el hecho de que las transformaciones en $\widehat{GM}(\mathbb{R}^2)$ son isometrías conformes, podemos suponer existe $f \in \widehat{GM}(\mathbb{R}^2)$ tal que u y v están en la intersección de S^2 y el plano yz , llamamos λ a la geodésica determinada por dicha intersección. Sea w el punto medio hiperbólico en λ entre u y v , se afirma que existe una transformación hiperbólica con puntos fijos $\pm e_2$ (es decir deja a λ invariante), tal que manda w en e_3 . Esto se sigue ya que se puede conjugar mandando λ al eje z (como en la Proposición 3.1.5), y aplicar una homotecia adecuada. Por lo cual se puede suponer $\rho(e_3, u) = \rho(e_3, v)$ (véase la Figura 3.6).

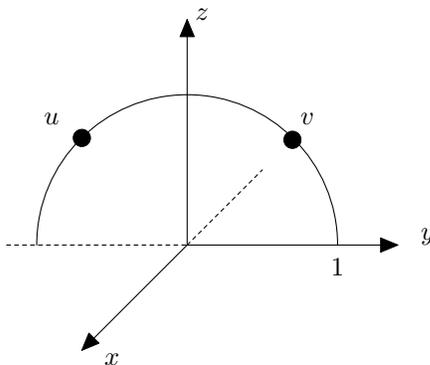


Figura 3.6: Puntos simétricos respecto al plano xz

Consideremos ahora φ dada por

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, -x_2, x_3),$$

es decir la reflexión en el plano xz que es una isometría de \mathbb{H}^3 , ya que es la extensión de Poincaré de la conjugación en $\widehat{\mathbb{C}}$ (Teorema 3.1.3). Se sigue entonces por definición que el h -bisector de $[u, v]$ es el plano xz intersecado con \mathbb{H}^3 . Como φ fija puntualmente el plano xz e intercambia u y v , entonces los puntos de dicho plano equidistan hiperbólicamente de u y v (véase la Figura 3.7).

Resta probar no hay otros puntos que equidistan de u y v . Si w equidista de u y v , sean S_1 la esfera con centro en u y radio $\rho(u, w)$ y $S_2 = \varphi(S_1)$. Como los puntos de intersección de S_1 y S_2 son los puntos equidistantes, entonces $w \in (S_1 \cap S_2)$. Ahora, usando la observación que sigue al Teorema 3.1.10, se deduce que w está en el plano xz , esto se sigue al considerar los centros euclidianos de dichas esferas. \square

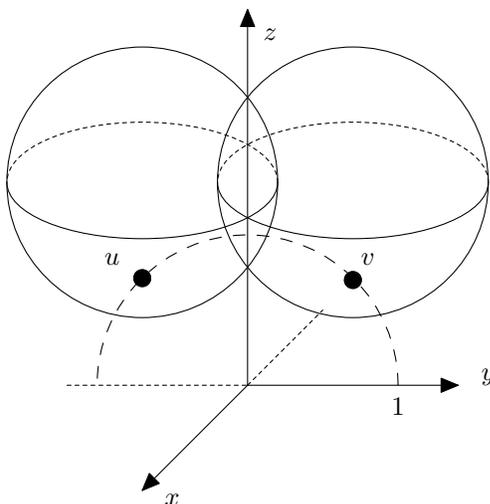


Figura 3.7: h -bisector perpendicular.

Proposición 3.1.12 *Las únicas extensiones de Poincaré de elementos en $PSL(2, \mathbb{C})$ que fijan puntos en \mathbb{H}^3 son las elípticas.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado es claro para traslaciones (ya que la extensión de Poincaré de una traslación en $\widehat{\mathbb{C}}$ es su extensión natural a \mathbb{H}^3), y por lo tanto, conjugando se sigue el resultado para cualquier elemento parabólico.

Ahora, si $\varphi(z) = kz, 1 \neq k \in \mathbb{R}^+$, es decir φ es una transformación hiperbólica y φ tiene un punto fijo, se tendría que

$$|z| = |kz| = |k||z|,$$

y $z = 0$ o $z = \infty$. Como la extensión de Poincaré de $T(z)$ es

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto k(x_1, x_2, x_3)$$

el mismo argumento muestra que \widehat{T} fija solo a 0 e ∞ . Por lo que conjugando se sigue la afirmación para las extensiones de transformaciones hiperbólicas.

Por otra parte si $T(z) = kze^{i\theta}$ con $1 \neq k \in \mathbb{R}^+$ y $0 < \theta < 2\pi$, se sigue de las observaciones anteriores y de la Proposición 3.1.5 que

$$\widehat{T}(x) = Akx$$

donde A es una transformación ortogonal (A es una rotación alrededor del eje z). Además, si $x \neq 0, \infty$

$$|Akx| = |kx| \neq |x|,$$

por lo que se sigue que las *roto-homotecias* tampoco tienen puntos fijos finitos, es decir no tienen puntos fijos en \mathbb{H}^3 . El caso general para transformaciones loxodrómicas se sigue por conjugación.

Finalmente, se sigue de la prueba de la Proposición 3.1.5 que la extensión de Poincaré de una rotación fija la geodésica que une 0 e ∞ , es decir el eje z positivo. Se sigue por conjugación que la extensión de Poincaré de una transformación elíptica T con puntos fijos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ fija puntualmente la geodésica en \mathbb{H}^3 que une $\widehat{\alpha} = (\alpha, 0)$ y $\widehat{\beta} = (\beta, 0)$. A esta geodésica se le llama eje de \widehat{T} . \square

Dado que un grupo kleiniano G es a lo sumo numerable, se tiene que el conjunto de ejes invariantes de sus transformaciones elípticas (que necesariamente son de orden finito), también es numerable o finito. Ahora, como cada uno de estos ejes tiene medida cero, su unión también es de medida cero. Lo cual asegura la existencia de puntos $w \in \mathbb{H}^3$ tales que $\widehat{g}(w) \neq w \forall g \in G - Id$.

3.2. Propiedades de los poliedros.

Definiremos ahora los poliedros de Dirichlet. Lo cual generaliza la definición de polígono de Dirichlet. Para ello consideremos G un grupo kleiniano actuando en el espacio hiperbólico, y $w \in \mathbb{H}^3$ un punto no fijo para cualquier

transformación $\widehat{g} \in \widehat{G}$ ($\widehat{g} \neq Id$), donde \widehat{G} es el grupo de las extensiones de Poincaré de G . Para cada g en G ($g \neq Id$), definamos los siguientes conjuntos:

$$L_g(w) = \{u \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(u, w) = \rho(u, \widehat{g}w)\}, \quad (3.5)$$

$$H_g(w) = \{u \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(u, w) < \rho(u, \widehat{g}w)\}. \quad (3.6)$$

Denotaremos $L_g(w)$ y no $L_{\widehat{g}}(w)$ para simplificar la notación, asimismo $H_g(w)$

Definición 29 *El poliedro de Dirichlet $D(w)$ para G con centro en w se define como:*

$$D_G(w) = \bigcap_{g \in G, g \neq I} H_g(w), \quad g \in G.$$

De nuevo, escribiremos $D_G(w)$ y no $D_{\widehat{G}}(w)$. Notemos $D(w)$ es el conjunto de puntos en \mathbb{H}^3 que están más cerca de w que de $\widehat{g}w \forall g \in G, g \neq Id$; es decir,

$$D(w) = \{u \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(u, w) < \rho(u, \widehat{g}w) \quad \forall g \in G, g \neq Id\}.$$

Enunciamos ahora unos lemas y omitimos las demostraciones, pues éstas son prácticamente las mismas que se dieron en el capítulo anterior.

Lema 3.2.1 $u \in H_g(w) \Leftrightarrow w \in H_{g^{-1}}(u)$, donde u no es punto fijo de \widehat{g}^{-1} .

Corolario 3.2.2 $u \in D(w) \Leftrightarrow w \in D(u)$, donde u no es punto fijo de ninguna transformación no trivial.

Lema 3.2.3 Si h es cualquier isometría en \mathbb{H}^3 , entonces

$$h(H_g(w)) = H_{hgh^{-1}}(hw).$$

Corolario 3.2.4 $h(D_G(w)) = D_{hGh^{-1}}(hw)$. En particular si $h \in \widehat{G}$, tenemos $h(D(w)) = D(hw)$.

Definición 30 Una región D del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 es un dominio fundamental para un grupo kleiniano G si:

- (i) Existe un conjunto fundamental F tal que $D \subset F \subset \widetilde{D}$,
- (ii) La frontera hiperbólica de D tiene medida tridimensional cero.

Definición 31 Diremos que un dominio fundamental D para G es localmente finito si dado un subconjunto compacto K de \mathbb{H}^3 , éste interseca sólo a un número finito de imágenes de \tilde{D} bajo G .

Definición 32 Sea G un grupo kleiniano. Entonces P es un poliedro fundamental convexo para \hat{G} , si P es un dominio fundamental localmente finito para \hat{G} , que además es convexo.

Lema 3.2.5 Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$ tal que G actúa discontinuamente en algún abierto de \mathbb{H}^3 , entonces G es discontinuo en \mathbb{H}^3 .

DEMOSTRACIÓN. Sea A un abierto en \mathbb{H}^3 donde hay acción discontinua, y $\alpha \in A$. Probamos que α es un punto ordinario. De otra manera, si existieran $u \in \mathbb{H}^3$, y g_n transformaciones distintas en G tales que $\hat{g}_n(u) \rightarrow \alpha$, se tendría que necesariamente $u \in A$, ya que si n es suficientemente grande $\hat{g}_n(u) \in A$ y por lo tanto $u = \hat{g}_n^{-1}\hat{g}_n(u)$ también.

Ahora, para r suficientemente pequeño el conjunto compacto

$$B = \overline{B_h(\alpha, r)} \cup \{u\} \subset A.$$

Por lo cual

$$\hat{g}_n(B) \cap B \neq \emptyset,$$

para un número infinito de \hat{g}_n , lo cual contradice las hipótesis. Por consiguiente todos los puntos de A son ordinarios y G es discontinuo en \mathbb{H}^3 . Una prueba análoga se aplica para el caso de acción discontinua en algún abierto de $\hat{\mathbb{C}}$. \square

Lema 3.2.6 Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$ tal que actúa discontinuamente en algún abierto de \mathbb{C} , entonces G es discontinuo.

La prueba es análoga a la del Lema 3.2.5 usando la métrica cordal.

Resulta que la identidad (1.5) se generaliza a \mathbb{H}^3 , obteniéndose la expresión

$$2 \cosh \rho(j, \bar{T}(j)) = \|T\|^2 \quad (3.7)$$

si se reemplaza i por el cuaternio $j = (0, 0, 1)$ y T por \tilde{T} , su extensión de Poincaré. La validez de esta fórmula se puede consultar en [1] pp. 61 y 62.

Teorema 3.2.7 *Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$, entonces G es kleiniano si y sólo si G actúa discontinuamente en \mathbb{H}^3 .*

DEMOSTRACIÓN. Probamos primero la necesidad. Sea K un compacto en \mathbb{H}^3 , sin pérdida de generalidad $K = \overline{B_h(j, r)}$ donde $j = (0, 0, 1)$. Supongamos que $\widehat{g}_n(K) \cap K \neq \emptyset$, donde \widehat{g}_n es la extensión de Poincaré de $g \in G$. Ahora, si $w \in \widehat{g}_n(K) \cap K$ se tiene que

$$\rho(j, \widehat{g}_n(j)) < \rho(j, w) + \rho(w, \widehat{g}_n(j)) < 2r, \quad (3.8)$$

ya que al ser \widehat{g}_n una isometría $\widehat{g}_n(K) = B_h(\widehat{g}_n(j), r)$. Si una cantidad infinita de funciones en G cumplen $\widehat{g}_n(K) \cap K \neq \emptyset$, se tendría usando (3.8) que

$$\|h\|^2 < 2\cosh(2r),$$

en virtud de (3.7), y por tanto G no sería discreto. La suficiencia es consecuencia inmediata del Lema 3.2.5 y el Teorema 1.0.4 \square

Corolario 3.2.8 *Los puntos límite de un grupo kleiniano G están en la esfera de Riemann y todos los puntos de \mathbb{H}^3 son ordinarios.*

Lema 3.2.9 *Cualquier subconjunto compacto $K \subset \mathbb{H}^3$ interseca sólo a un número finito de $Lg(w)$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que en los espacios métricos los conjuntos compactos son acotados, existe $r > 0$ tal que $K \subset B_h(w, r)$. Considérese $u \in L_g \cap K$, se tiene que

$$\rho(w, gw) \leq \rho(w, u) + \rho(u, gw) = 2\rho(w, u) < 2r,$$

la igualdad se da al estar $u \in L_g$ (véase la Proposición 3.1.11). Por lo tanto, si $L_g \cap K \neq \emptyset$ se tiene que

$$gw \in B_h(w, 2r).$$

Finalmente, la órbita de w no puede acumularse en el compacto $\overline{B_h(w, 2r)}$ al ser los puntos de \mathbb{H}^3 ordinarios (véase Corolario 3.2.7).

Lema 3.2.10 *Sea $D(w)$ el poliedro de Dirichlet, la frontera hiperbólica de dicho poliedro consiste en los puntos de \mathbb{H}^3 que satisfacen:*

1. $\rho(u, w) \leq \rho(u, \widehat{g}w) \quad \forall g \in G - Id$
2. $\rho(u, w) = \rho(u, \widehat{g}w)$ para al menos una $g \in G - Id$

DEMOSTRACIÓN. Sea A el conjunto definido por las condiciones (i) y (ii). Probaremos primero que $A \subset \partial D(w)$, para ello consideremos $a \in A$ y N una vecindad de dicho punto, que sin pérdida de generalidad podemos suponer que es un disco. Usando el Lema 3.2.9 y el hecho de que \tilde{N} es compacto, se tiene que éste interseca solamente a un número finito de los bisectores L_g . Más aún, podemos suponer que todos los bisectores pasan por a , pues si lo anterior no ocurriera basta tomar otro disco con radio r tal que

$$r = \frac{\min\{\rho(a, L_g)\}}{2},$$

donde $L_g \cap \tilde{N} \neq \emptyset$ y $a \notin L_g$. Es claro que $a \in \tilde{H}_g \forall g \in G$, ya que \tilde{H}_g es h -convexo. Esto es evidente si \tilde{H}_g es

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3 | x_1 \geq 0\}$$

el caso general se sigue por conjugación usando la Proposición 3.1.5. Por lo cual $[w, a]$ es un arco en $\tilde{H}_g \forall g \in G$. Además $[w, a] \subset H_g \forall g \in G$, de donde

$$[w, a] - \{a\} \subset D(w),$$

como además también ocurre que

$$[w, a] \cap N \neq \emptyset,$$

se sigue que

$$D(w) \cap N \neq \emptyset,$$

es decir $a \in \partial D(w)$.

Ahora si $a \in \partial D(w)$ se afirma que se debe cumplir

$$\rho(a, w) \leq \rho(a, \hat{g}w) \quad \forall g \in G. \quad (3.9)$$

En caso contrario, si $\rho(a, w) > \rho(a, \hat{g}w)$, entonces $a \in H_g'$ que sabemos es abierto, y por ello existe una vecindad de a contenida en H_g' , de donde $a \notin \partial D(w)$.

Por último, si (3.9), es una desigualdad estricta para todo elemento de G , entonces $a \in D(w)$, es decir a sería un punto interior, por lo cual

$$\rho(a, w) = \rho(a, \hat{g}w)$$

para al menos una $g \in G - Id$. □

Nótese que el lema implica también que la frontera hiperbólica de $D(w)$ está contenida en la unión de los bisectores L_g .

Teorema 3.2.11 *El poliedro de Dirichlet $D(w)$ es un poliedro fundamental convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Como cada $H_g(w)$ es h-convexo, se sigue que $D(w)$ es h-convexo al ser la intersección de conjuntos h-convexos.

Probamos ahora que $D(w)$ es un dominio fundamental localmente finito. Se sigue de la observación posterior al Lema 3.2.10 que

$$\partial D(w) \subset \bigcup_{g \in G, g \neq Id} L_g(w),$$

y al tener medida tridimensional cero cada uno de los bisectores, es inmediato que $\partial D(w)$ también tiene medida tridimensional cero.

Se demuestra ahora la existencia de un conjunto fundamental F tal que

$$D(w) \subset F \subset \tilde{D}(w).$$

Mostramos primero $D(w) \subset F$, para ello elegimos en cada órbita de $G(u)$ un único punto u^* que satisfaga

$$\rho(w, u^*) \leq \rho(w, \hat{g}u) \quad \forall \hat{g} \in G, \quad (3.10)$$

tal elección es posible pues al ser G kleiniano gu no se acumula en w . Sea F el conjunto de estos puntos. Nótese que si $u \in D(w)$ hay una única elección posible para u^* , a saber $u = u^*$ ya que en este caso la desigualdad 3.10 es estricta para toda transformación distinta de la identidad, en particular $D(w) \subset F$.

Para probar $F \subset \tilde{D}(w)$, consideremos $u \in F$ y el arco de geodésica $[w, u]$. Se afirma que $\forall g \in G - Id, L_g(w)$ no interseca a $[w, u]$. Si $L_g(w)$ interseca a $[w, u]$, entonces $u \in H'_g(w)$. Esto se sigue ya que si $u \in H_g$, entonces por conexidad $[w, u) \subset H_g$, y si $u \in L_g$, entonces $[w, u] \subset \tilde{H}_g$. Sin embargo, si $u \in H'_g(w)$, se tiene

$$\rho(u, w) > \rho(\hat{g}u, w)$$

lo cual contradice el hecho de que u es el más cercano a w en la órbita. En consecuencia $(w, u) \subset D(w)$ y por lo tanto $u \in \tilde{D}(w)$ y $F \subset \tilde{D}(w)$.

Finalmente, una prueba análoga a la dada en el capítulo anterior muestra que $D(w)$ es localmente finito. \square

3.3. Ejemplos

(1) Grupo cíclico parabólico.

Considéremos primero el caso $\Gamma = \langle \hat{T} \rangle$, donde $T(z) = z + 1$. Ya que $T = \sigma_2 \sigma_1$ donde σ_1, σ_2 son reflexiones en rectas (véase [5] p. 69), se tiene $\hat{T} = \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_1$. Sea $w = (1/2, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$ el centro del poliedro.

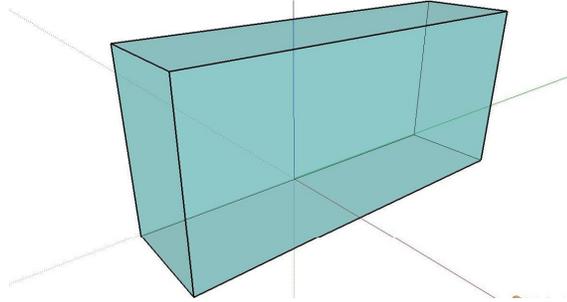


Figura 3.8: Poliedro de Dirichlet para un grupo cíclico, generado por una traslación.

Nótese que la reflexión en $P(e_1, 1)$ es una isometría hiperbólica, ya que es la extensión de Poincaré de un elemento en $GM(\mathbb{R}^2)$ (cf. Teorema 3.1.3), por lo que es inmediato que $L_{\hat{T}}(w) = P(e_1, 1)$. Un razonamiento análogo muestra que en general

$$L_{\hat{T}^n}(w) = P\left(e_1, \frac{n+1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.11)$$

Por lo cual

$$H_{\hat{T}^k} \subset H_{\hat{T}^{k+1}} \quad \text{si } 1 \leq k \quad \text{y} \quad H_{\hat{T}^l} \subset H_{\hat{T}^{l-1}} \quad \text{si } l \leq -1,$$

y en consecuencia

$$D(w) = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{H}^3 \mid 0 < u_1 < 1\},$$

véase la Figuras 3.8 y 3.9.

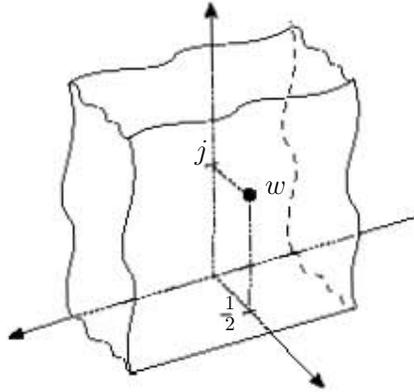


Figura 3.9: Poliedro de Dirichlet con centro en j para un grupo cíclico generado por una translación.

Para el caso general consideremos \widehat{f} la extensión de una transformación parabólica con punto fijo α . Nótese que existe $\widehat{h} \in \widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ tal que la translación $\widehat{T}(u) = u + 1$ satisface $\widehat{f} = \widehat{h}\widehat{T}\widehat{h}^{-1}$ o $\widehat{f} = \widehat{h}\widehat{T}^{-1}\widehat{h}^{-1}$, es decir, el caso general se sigue por conjugación en virtud del Corolario 3.2.4. Por lo que el poliedro de Dirichlet con centro en $u = \widehat{h}^{-1}(w)$ (en adelante denotaremos el centro del poliedro conjugado por u), asociado a un grupo cíclico parabólico es la región encerrada por dos esferas ortogonales a la esfera de Riemann, que además son tangentes, como lo muestran las Figuras 3.10 y 3.11. \square

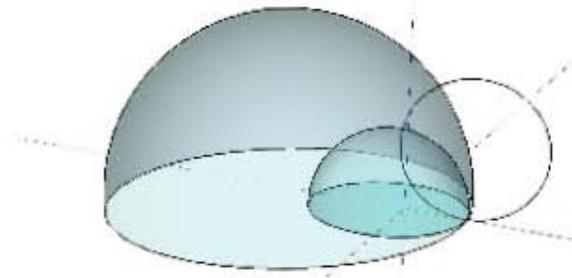


Figura 3.10: Poliedro de Dirichlet para un grupo cíclico generado por una transformación parabólica.

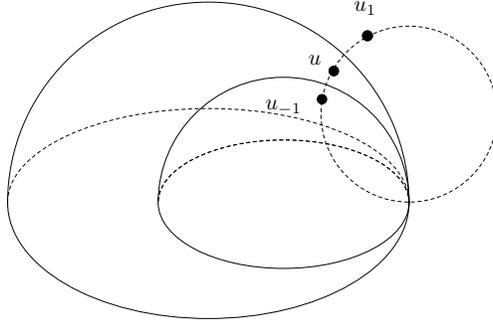


Figura 3.11: Poliedro de Dirichlet con centro en u para un grupo cíclico generado por una transformación parabólica.

(2) Grupo doblemente periódico actuando en \mathbb{H}^3 .

Analizamos el poliedro de Dirichlet asociado a un grupo doblemente periódico. Consideramos primero el ejemplo $\Gamma = \langle \hat{T}, \hat{F} \rangle$, $T(z) = z+1$, $F(z) = z+i$, y $w = (1/2, 1/2, t)$, con $t \in \mathbb{R}^+$. Por el ejemplo 1 sabemos

$$L_{\hat{T}^n}(w) = P\left(e_1, \frac{n+1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

y además

$$H_{\hat{T}^k} \subset H_{\hat{T}^{k+1}} \quad \text{si } 1 \leq k \quad \text{y} \quad H_{\hat{T}^l} \subset H_{\hat{T}^{l-1}} \quad \text{si } l \leq -1,$$

de donde

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} H_{\hat{T}^n} = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{H}^3 \mid 0 < u_1 < 1\}. \quad (3.12)$$

Por otra parte, en virtud de que la reflexión en $P(e_2, 1)$ es una isometría hiperbólica, se sigue que $L_{\hat{F}^n}(w) = P(e_2, 1)$, el mismo razonamiento muestra que

$$L_{\hat{F}^n}(w) = P\left(e_2, \frac{n+1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{o es de la forma (3.11).}$$

Además se tiene

$$H_{\hat{F}^k} \subset H_{\hat{F}^{k+1}} \quad \text{si } 1 \leq k \quad \text{y} \quad H_{\hat{F}^l} \subset H_{\hat{F}^{l-1}} \quad \text{si } l \leq -1,$$

y en consecuencia

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} H_{\hat{F}^n} = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{H}^3 \mid 0 < u_2 < 1\}. \quad (3.13)$$

Es inmediato de las ecuaciones (3.12) y (3.13) que

$$D(w) = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{H}^3 \mid u_1, u_2 \in (0, 1)\},$$

ya que cualquier otro elemento del grupo es de la forma $\widehat{T}^k \widehat{F}^m$ y el biselector asociado $L_{\widehat{T}^k \widehat{F}^m}$ se puede analizar mediante la proyección a $\widehat{\mathbb{C}}$, usando polígonos de Dirichlet euclidianos. Para esto se obtiene una fórmula para encontrar la distancia entre w y $T^k F^m(w)$, a saber

$$\rho(w, T^k F^m(w)) = \sqrt{n^2 + m^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

o de manera equivalente

$$\rho(w, L_{T^k F^m}) = \frac{\sqrt{n^2 + m^2}}{2},$$

lo anterior muestra que los bisectores asociados a transformaciones que son composición de T y F no intersecan a la región $(0, 1) \times (0, 1)$.

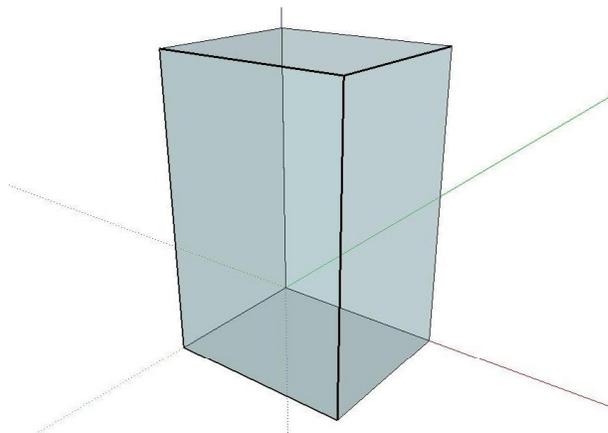


Figura 3.12: Poliedro de Dirichlet asociado a un grupo doblemente periódico con generadores ortogonales.

Finalmente, identificando las caras correspondientes de $D(w)$, se tiene que la 3-variedad es homeomorfa al producto topológico de un toro con el intervalo unitario abierto.

En otros casos donde los vectores determinados por T y F no son ortogonales, es claro que un poliedro fundamental (no necesariamente de Dirichlet), se genera de la misma manera. En algunos casos estos poliedros

también son de Dirichlet, por ejemplo, si consideramos $\widehat{T}(u) = u + v$ donde v esta dado por $v = (5, 0, 0)$ y $\widehat{F}(u) = u + v'$, donde $v' = (2, 1, 0)$ (véase la Fig. 3.14). Sin embargo en otros, el polígono de Dirichlet euclidiano en $\widehat{\mathbb{C}}$ es un hexágono y por ende el correspondiente poliedro de Dirichlet hiperbólico en \mathbb{H}^3 es un prisma hexagonal (véanse las Figuras 3.13 y 3.15), por ejemplo si consideramos $\widehat{T}(u) = u + u'$ y $\widehat{F}(u) = u + u''$ donde $u' = (4, 0, 0)$ y $u'' = (2, 4, 0)$.

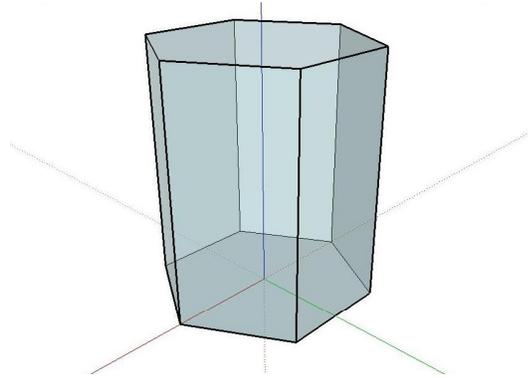


Figura 3.13: Poliedro de Dirichlet asociado a un grupo doblemente periódico.

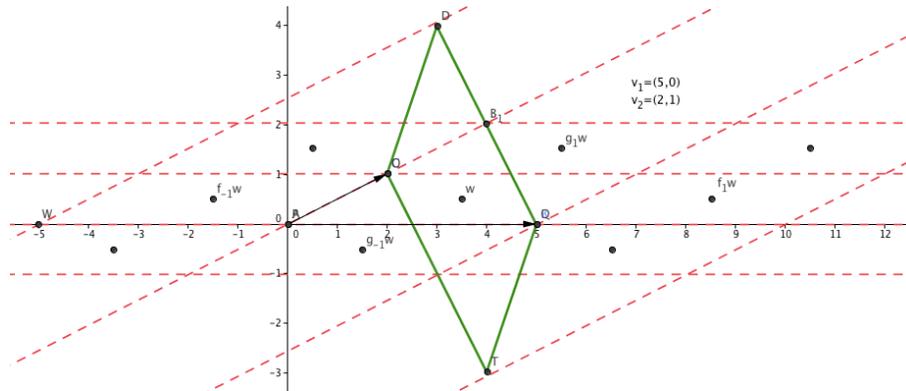


Figura 3.14: Polígono de Dirichlet Euclidiano asociados a un grupo doblemente periódico, usando el programa Geogebra.

Una manera de verificar que ambos casos suceden en múltiples ejemplos es usando el programa Geogebra (software de distribución gratuita), con el

siguiente algoritmo, se colocan dos puntos en un proyecto nuevo, uno de ellos en el origen y el otro sobre el eje x , después trazamos un vector entre dichos puntos, enseguida colocamos un punto en cualquier lugar distinto del eje y y unimos este punto con el origen mediante un vector, estos puntos que llamaremos u_1 y u_2 serán los asociados a las traslaciones T y F , respectivamente, que generarán al grupo.

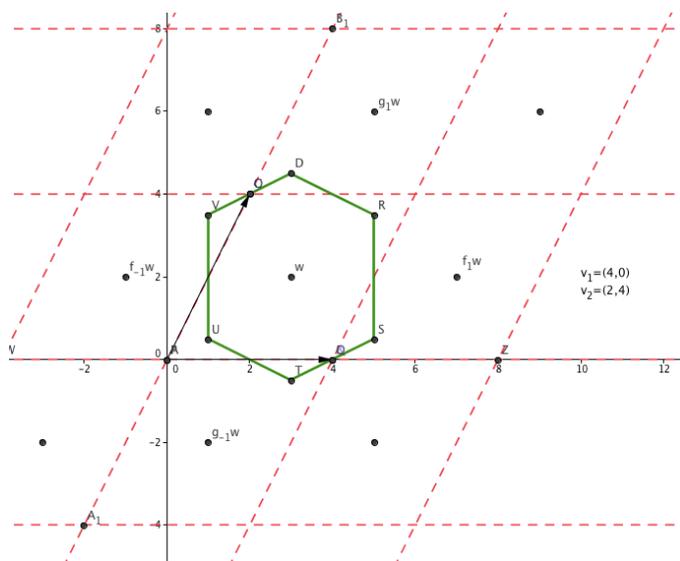


Figura 3.15: Polígono de Dirichlet Euclidiano asociado a un grupo doblemente periódico, usando el programa Geogebra.

Construimos ahora w como la suma de los vectores $\frac{u_1}{2}$ y $\frac{u_2}{2}$, lo siguiente es hallar $T(w)$, esto se logra sumando a w el vector u_1 . Construimos ahora el bisector entre w y su imagen bajo T , para ello es necesario trazar el segmento de recta que une dichos puntos para después encontrar la mediatriz de dicho segmento que es el bisector buscado.

El procedimiento anterior se repite para las transformaciones T^{-1} , F , F^{-1} , TF , $T^{-1}F$, $T^{-1}F^{-1}$ y TF^{-1} , finalmente dado que

$$D(w) = \{u \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(u, w) < \rho(u, \hat{g}w) \quad \forall g \in G, g \neq Id\},$$

se tiene que $D(w)$ es la región acotada por los ocho bisectores.

Un problema aparentemente abierto es encontrar un algoritmo para detectar cuando el polígono (o poliedro) es un paralelogramo (o paralelepípedo infinito) o un hexágono (o un prisma hexagonal).

(3) Grupo cíclico hiperbólico.

Consideremos $T(z) = kz$, $1 < k$ y $\Gamma = \langle \widehat{T} \rangle$. Sea $w = j = (0, 0, 1)$, el centro del poliedro de Dirichlet. Ya que

$$\frac{1}{2}\rho(j, kj) = \frac{1}{2}\log k = \log \sqrt{k},$$

se tiene que $\sqrt{k}j$ equidista hiperbólicamente de j y kj , lo cual muestra

$$L_{\widehat{T}}(w) = \{u \in \mathbb{H}^3 \mid |u| = \sqrt{k}\},$$

de manera análoga se prueba que

$$L_{\widehat{T}^n}(w) = \{u \in \mathbb{H}^3 \mid |u| = \sqrt{k^n}\}, \quad \forall n \neq 0, n \in \mathbb{Z}.$$

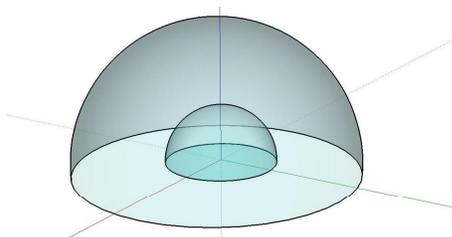


Figura 3.16: Poliedro de Dirichlet para un grupo cíclico, generado por una homotecia.

Lo anterior muestra que las ecuaciones (2.6) y (2.7) son válidas también en este contexto, y en consecuencia

$$D(w) = \left\{ u \in \mathbb{H}^3 \mid \frac{1}{\sqrt{k}} < |u| < \sqrt{k} \right\}, \quad (3.14)$$

véase la Figura 3.17.

El caso general se sigue por conjugación en virtud del Teorema 3.1.3 y el Corolario 3.2.4, es decir, si consideramos \widehat{f} la extensión de Poincaré de una transformación hiperbólica con puntos fijos α, β ($\alpha \neq \infty$), y además

$$h(u) = \frac{u - \alpha}{u - \beta},$$

se sigue que $\widehat{T}(u) = \widehat{h}f\widehat{h}^{-1}(u) = ku$. Se puede suponer que $1 < k$ (conjugando una vez más si es necesario). Si $\beta = \infty$ considérese la siguiente transformación $h(u) = u - \alpha$. De lo anterior se desprende que el poliedro de Dirichlet con centro en $\widehat{h}^{-1}(j)$ es la región comprendida entre dos esferas, como lo muestra la Figura 3.18. Nótese que la 3-variedad cociente es homeomorfa al interior de un toro sólido.

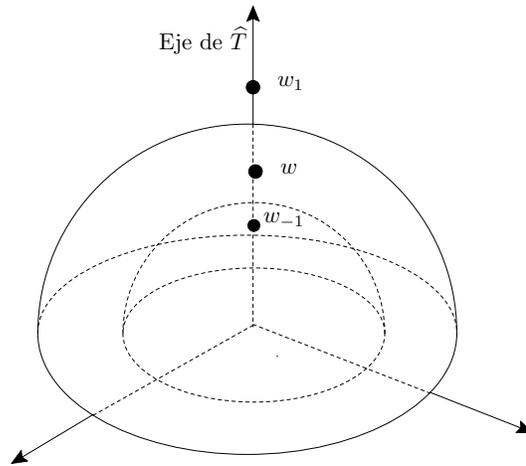


Figura 3.17: Poliedro de Dirichlet para un grupo cíclico, generado por una homotecia.

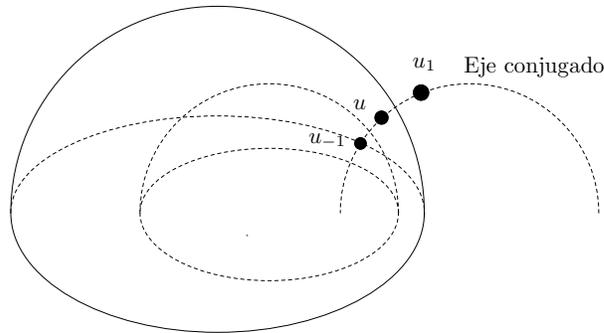


Figura 3.18: Poliedro de Dirichlet con centro en u para un grupo cíclico, generado por una homotecia.

(4) Grupo cíclico elíptico.

Sean $T(z) = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $\Gamma = \langle \widehat{T} \rangle$ y $w = (r, 0, 1)$, $r \in (0, 1)$. Encontraremos el poliedro asociado a Γ con centro en w . Dado que $T(z) = \sigma_k \sigma_1$ donde, σ_1 es la reflexión en el eje real y σ_k es la reflexión en la recta que pasa por el origen y el punto $e^{\frac{\pi k i}{n}}$, es decir, en $R(ie^{\frac{\pi k i}{n}}, 0)$ (véase [5] p. 67), se sigue que $\widehat{T} = \widehat{\sigma}_k \widehat{\sigma}_1$, donde ahora $\widehat{\sigma}_1$ es la reflexión en P_1 el plano xz y $\widehat{\sigma}_k$ es la reflexión en el plano $P_k = P(-\text{sen}(\frac{k\pi}{n}), \text{cos}(\frac{k\pi}{n}), 0, 0)$.

Nótese que $\widehat{\sigma}_1(w) = w$, además recordemos que $\widehat{\sigma}_k$, está dada por

$$\widehat{\sigma}_k(u) = \begin{cases} u - 2(u \cdot a)a, & \text{si } u \in \mathbb{R}_+^3, \\ \infty, & \text{si } u = \infty. \end{cases}$$

donde a es el vector normal unitario al plano, por lo que $\widehat{\sigma}_k(w)$

$$\begin{aligned} &= w - 2\left(w \cdot \left(-\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right), \text{cos}\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0\right)\right) \left(-\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right), \text{cos}\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0\right) \\ &= (r, 0, 1) - 2\left(-r\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \left(-\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right), \text{cos}\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0\right) \\ &= (r, 0, 1) - \left(2r\text{sen}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right), 2r\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\text{cos}\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0\right) \\ &= \left(r - 2r\text{sen}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right), 2r\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\text{cos}\left(\frac{k\pi}{n}\right), 1\right) \\ &= \left(r\text{cos}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), r\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), 1\right), \end{aligned}$$

es decir, $\widehat{T}((r, 0, 1)) = \left(r\text{cos}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), r\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), 1\right)$, en otras palabras \widehat{T} actúa como una rotación alrededor del eje z .

Ahora

$$\rho(w, u) = \rho(\widehat{\sigma}_k(w), \widehat{\sigma}_k(u)) = \rho(\widehat{\sigma}_k(w), u) \quad \forall u \in P_k,$$

al ser $\widehat{\sigma}_k$ una isometría hiperbólica, por lo cual el plano P_k resulta ser el h - bisector entre w y $\widehat{T}^k(w)$, ya que $\widehat{T}^k(w) = \widehat{\sigma}_k \widehat{\sigma}_1(w) = \widehat{\sigma}_k(w)$ (véase la Proposición 3.1.11).

Por lo anterior, se tiene que el conjunto de bisectores consiste de los planos

$$P_k = P\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right), \operatorname{cos}\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0, 0\right) \quad 0 < k < n,$$

Además, como $\widehat{T}^{n-k} = \widehat{T}^{-k}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$,

se sigue que $D(w)$ es la región acotada por los planos P_1 y P_{n-1} , ya que ningún otro bisector interseca a $D(w)$ (véase la Fig 3.19).

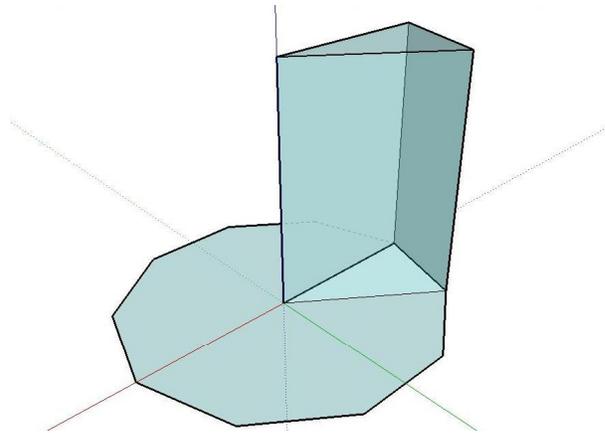


Figura 3.19: Poliedro de Dirichlet para un grupo cíclico, generado por una rotación de orden 10.

El caso general se sigue por conjugación en virtud del Teorema 3.1.3 y el Corolario 3.2.4 (véase Fig 3.20).

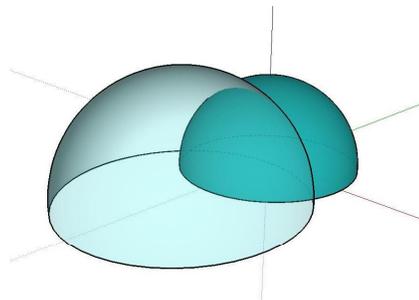


Figura 3.20: Poliedro de Dirichlet para un grupo cíclico, generado por una transformación elíptica.

Antes de comenzar el análisis de la acción del grupo modular en \mathbb{H}^3 , haremos algunas observaciones generales para grupos fuchsianos.

Probamos que la acción de un grupo fuchsiano es la misma en los planos Π_{xy} y Π_{xz} , aunque de manera intuitiva esto es claro para reflexiones en “círculos”, probamos este hecho de manera formal.

Considérese $\varphi \in GM(\widehat{R})$ la reflexión en $u_1 \in \mathbb{R}$, $\widehat{\varphi}$ su extensión de Poincaré, que es la reflexión en la recta l que es ortogonal a \mathbb{R} y pasa por el punto $u = (u_1, 0)$. Más aún, sea $\widehat{\widehat{\varphi}} \in GM(\widehat{\mathbb{R}^3})$ la extensión de Poincaré de $\widehat{\varphi} \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$, dicha extensión es la reflexión en el plano P que es ortogonal a $\widehat{\mathbb{C}}$ y que pasa por l . Se puede considerar que todas estas funciones actúan en subespacios de \mathbb{H}^3 de manera simultánea (véase la Fig 3.21).

Obsérvese que $\widehat{\widehat{\varphi}}$ preserva Π_{xz} , pues al considerar la expresión analítica de la extensión de $\widehat{\varphi}$, se tiene que la segunda coordenada no cambia. Lo anterior muestra que $\widehat{\widehat{\varphi}}|_{\Pi_{xz}}$ es la reflexión en la recta l' que es ortogonal a \mathbb{R} , pasa por u y está contenida en Π_{xz} (de manera equivalente $l' = P \cap \Pi_{xz}$).

Nótese que si φ es como antes y $\widetilde{\varphi}$ su *extensión de Poincaré* al plano Π_{xz} . Esta última, consiste en la reflexión sobre la recta l' que es paralela al eje z y pasa por u . Se sigue que

$$\widetilde{\varphi} = \widehat{\widehat{\varphi}}|_{\Pi_{xz}}.$$

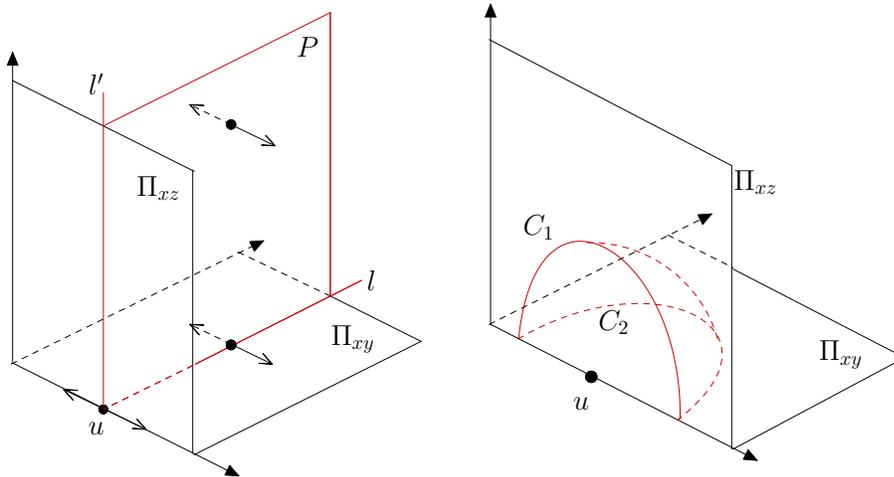


Figura 3.21: Extensiones de Poincaré.

Ahora, sean $\psi \in GM(\widehat{R})$ la reflexión en la “circunferencia” con centro en $u_1 \in \mathbb{R}$ y radio r , $\widehat{\psi} \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ su extensión de Poincaré, que es la reflexión en la circunferencia $C_2 \subset \Pi_{xy}$, con centro en $u = (u_1, 0)$ y además es ortogonal a \mathbb{R} . Y $\widehat{\varphi} \in GM(\widehat{\mathbb{R}^3})$, la extensión de Poincaré de $\widehat{\varphi}$, dicha extensión es la reflexión en una esfera que es ortogonal a \widehat{C} y que contiene a C_2 .

Una vez más consideraremos que todas estas funciones actúan en subespacios de \mathbb{H}^3 de manera simultánea (véase la Fig 3.21). Una prueba análoga a la anterior muestra que $\widehat{\psi}|_{\Pi_{xz}}$ preserva dicho plano y

$$\widetilde{\psi} = \widehat{\psi}|_{\Pi_{xz}},$$

donde $\widetilde{\psi}$ es la reflexión en el círculo C_1 que está contenido en el plano xz (véase la Fig 3.21). Una manera alternativa de probar que $\widehat{\varphi}$ (o $\widehat{\psi}$), preservan Π_{xz} es usando el producto inversivo entre los planos P, Π_{xz} y Π_{xy} . En consecuencia, se sigue la observación sobre los grupos fuchsianos, ya que $PSL(2, \mathbb{R}) = \widehat{M}(\widehat{\mathbb{R}})$.

De manera análoga a \mathbb{R}^2 , en el espacio hiperbólico se definen esferas isométricas para $\varphi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ (véase la Fig. 3.22).

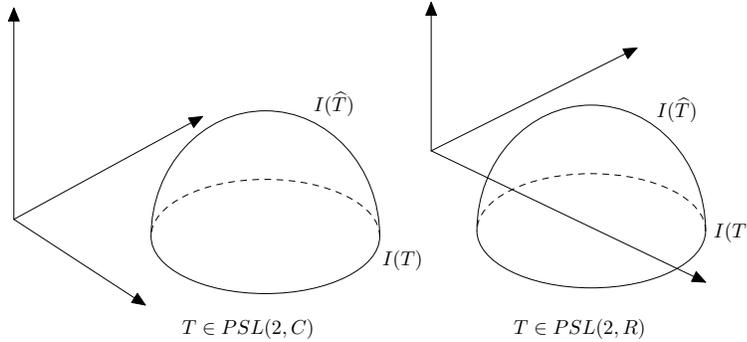


Figura 3.22: Esferas isométricas para distintos grupos de transformaciones.

Definición 33 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $T : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en A , diremos que T es conforme en $x_0 \in A$, si $DT(x_0)$ es un múltiplo escalar de una transformación ortogonal, es decir

$$DT(x_0) = (\mu_T I)B,$$

donde $B \in O(n)$, el escalar μ_T recibe el nombre de factor de conformalidad.

Definición 34 Sea $T \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^3)$ tal que no fija infinito, se define su esfera isométrica que denotaremos por $I(T)$, como el conjunto de puntos donde el factor de conformalidad μ_T es uno.

Una propiedad que caracteriza a este conjunto es la de ser la única esfera en \mathbb{R}^3 , donde T actúa euclidianamente. La prueba de este hecho se puede deducir de los temas expuestos en [1] pp. 40 y 41, véase también [5] p. 159.

La definición anterior se aplica también si $T \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. Las propiedades conocidas de los círculos isométricos (para transformaciones que no fijan infinito), son válidas también en este contexto, es decir

- (i) $T(I(T)) = I(T^{-1})$;
- (ii) $T(IntI(T)) = ExtI(T^{-1})$;
- (iii) $T(ExtI(T)) = IntI(T^{-1})$.

La prueba de estas propiedades se deduce de la regla de la cadena y de [1] p. 41.

Usaremos también el hecho de que cualquier transformación $T \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ que no fije infinito, es de la forma $T = E\sigma$, donde σ es la reflexión en la esfera isométrica de T y E es una isometría euclidiana. Si $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, entonces $T = E\sigma$ donde σ es la reflexión en el círculo isométrico y la isometría euclidiana es de la forma

$$E = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \quad \text{ó} \quad E = \varphi_1,$$

pues E es la composición de a lo más 3 reflexiones en rectas (véase [1] p. 23), y ya que T preserva la orientación el caso en que $E = \varphi_2 \varphi_1$ no acontece.

En consecuencia al tomar la extensión de Poncaré de $T \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^2)$, obtenemos que

$$\widehat{T} = \widehat{E} \circ \widehat{\sigma} = \widehat{\varphi}_3 \circ \widehat{\varphi}_2 \circ \widehat{\varphi}_1 \circ \widehat{\sigma} \quad \text{ó} \quad \widehat{T} = \widehat{\varphi}_1 \circ \widehat{\sigma} \quad (3.15)$$

Se sigue entonces que la esfera determinada por el círculo $I(T)$, es la esfera isométrica asociada a \widehat{T} , pues $\widehat{\sigma}$ actúa euclidianamente en dicho conjunto y \widehat{E} es una isometría euclidiana.

En particular, si

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc = 1,$$

como el círculo isométrico de T tiene radio $1/|c|$ y centro en $-d/c$ (véase [5] p. 158), se sigue que la esfera isométrica de \widehat{T} tiene centro en $(-d/c, 0)$ y radio $1/|c|$.

La construcción del polígono de Dirichlet para $G \leq PSL(2, \mathbb{C})$ es útil cuando podemos conocer el comportamiento de los h – *bisectores* asociados a dicho grupo y determinar el conjunto que éstos forman. En algunos otros casos, determinar el conjunto de todos los bisectores no es tan fácil, por ello se usan otras construcciones como la de Ford. Es conocido que en el caso bidimensional la construcción del polígono de Dirichlet para el grupo clásico modular coincide con la del polígono de Ford (véase [5] pp. 162 - 164). Motivados por lo anterior, a continuación probaremos que ambas construcciones también coinciden en \mathbb{H}^3 para este grupo fuchsiano, actuando en el espacio hiperbólico tridimensional, de hecho en ambos casos se pueden considerar como casos distintos de la misma construcción (polígono de Dirichlet generalizado), hecho que no probaremos al caer fuera de los propósitos de este trabajo.

Si $x \in \mathbb{H}^3$, denotaremos la tercer coordenada de x como $[x]_3$, del mismo modo $[x]_2$ denotará la segunda coordenada de dicho punto.

Definición 35 Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ fuchsiano, con traslaciones, se define el poliedro de Ford para $\widehat{\Gamma} < M(\widehat{\mathbb{R}}^3)$, determinado por $\lambda \in \mathbb{R}$, como

$$R = R_\infty \cap \left(\bigcap_{\widehat{T} \in \Gamma - \widehat{\Gamma}_\infty} Ext I(\widehat{T}) \right), \quad (3.16)$$

donde

$$R_\infty = \{u \in \mathbb{H}^3 \mid \lambda < [u]_1 < \lambda + \mu\},$$

y $u \rightarrow u + \mu$ es un generador de Γ_∞ .

Enunciamos a continuación un teorema que nos será de utilidad más tarde, una prueba de este hecho se puede consultar en [5] pp. 156 y 157.

Teorema 3.3.1 Sea $\Gamma < SL(2, \mathbb{R})$ que contiene matrices que definen traslaciones. Entonces no existe ninguna sucesión de matrices distintas

$$T_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad n \in \mathbb{N},$$

de tal manera que $c_n \rightarrow \alpha, \alpha$ finito.

Una consecuencia del lema es que existe $m > 0$, tal que para cualquier

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

se tiene $|c| \geq m$, o $c = 0$.

Nótese que si $T \in SL(2, \mathbb{R})$,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, c \neq 0,$$

entonces el centro de la esfera isométrica de la correspondiente transformación actuando en \mathbb{H}^3 es el punto $(-d/c, 0, 0)$ y su radio es $1/|c|$.

El teorema anterior bajo las hipótesis de la definición 35, implica que los radios de las esferas isométricas convergen a 0. Por otra parte, se tiene que R es un conjunto abierto y h -convexo, y por lo tanto conexo, ya que R es la intersección de semiespacios (a saber, el exterior de las esferas isométricas, y 2 semiplanos).

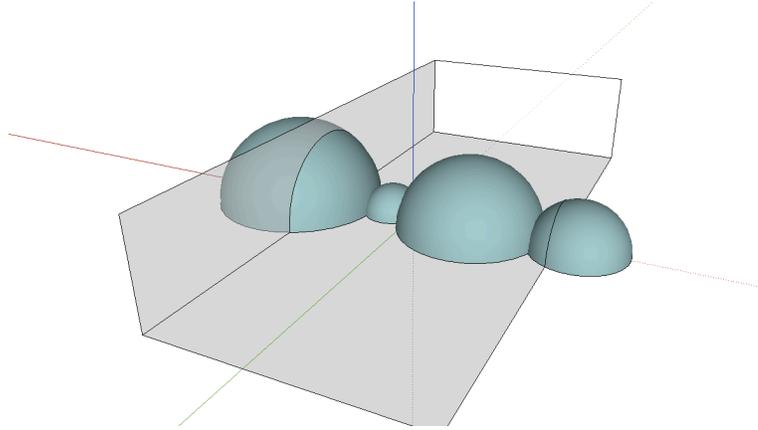


Figura 3.23: Poliedro de Ford para un grupo Fuchsiano con traslaciones.

Teorema 3.3.2 Sean R y $\widehat{\Gamma}$ como en la definición anterior, entonces R es una región fundamental para $\widehat{\Gamma}$.

DEMOSTRACIÓN. Probamos primero que en R no hay puntos $\widehat{\Gamma}$ -equivalentes. Considérese $u \in R$ y $\widehat{T} \in \Gamma$. Si $\widehat{T} \in \widehat{\Gamma}_\infty$, $\widehat{T} \neq Id$ entonces \widehat{T} traslada a u fuera de R , es decir $\widehat{T}(u) \notin R$. Ahora, si $\widehat{T} \notin \widehat{\Gamma}_\infty$, como $u \in ExtI(\widehat{T})$, se sigue que

$$\widehat{T}(u) \in Int(\widehat{T}^{-1}),$$

en otras palabras $\widehat{T}(u) \notin R$. Obsérvese ahora que si

$$u \in \partial R \text{ y } [u]_1 \neq \lambda, \lambda + \mu,$$

entonces u está contenido en la cerradura del exterior de cualquier esfera isométrica, ya que si $u \in \text{Int}I(\widehat{T})$ para alguna \widehat{T} , entonces debe de existir una vecindad de u que no interseque a R . Además como los radios de las esferas isométricas convergen a cero, entonces solamente hay un número finito de esferas isométricas que pasan por u .

Sea

$$M = \sup\{\text{radios de esferas isométricas}\}.$$

Probamos ahora, que dado $u_0 \in \mathbb{H}^3$ existe $v \in \widetilde{R}$ de manera que dichos puntos son $\widehat{\Gamma}$ -equivalentes. Si $u_0 \in \widetilde{R}_\infty$, escribimos $u_0 = u_1$, de otra manera trasladamos u_0 a un punto $u_1 \in \widetilde{R}_\infty$.

Si $u_1 \in \widetilde{R}$ se sigue el resultado, de otra manera $u_1 \in \text{Int}I(\widehat{T})$ para alguna \widehat{T} . Sea $\widehat{T}(u_1) = u_2$, se afirma que $[u_2]_3 > [u_1]_3$. Esto se sigue ya que aplicando a u_1 la fórmula 1.4 para la esfera $S((-d/c, 0, 0), 1/|c|)$, es decir

$$T(u) = (-d/c, 0, 0) + (1/|c|)^2(u - (-d/c, 0, 0))^*,$$

se observa que

$$[u_2]_3 = [T(u_1)]_3 = \frac{[u_1]_3}{|c|^2|u_1 - (-d/c, 0, 0)|^2} > [u_1]_3,$$

pues $1/|c| > |u_1 - (-d/c, 0, 0)|$, al estar $u_1 \in \text{Int}(S((-d/c, 0, 0), 1/|c|))$, lo cual prueba la afirmación.

Sea $\widehat{T}(u_1) = u_2$, si $u_2 \in \widetilde{R}_\infty$ escribimos $u_2 = u_3$, de otra manera trasladamos u_2 a un punto $u_3 \in \widetilde{R}_\infty$. Si $u_2 \notin \widetilde{R}$ procedemos como antes y se obtiene una sucesión.

Por otra parte, considérese

$$K = \{x \in \mathbb{H}^3 \mid \lambda \leq [x]_1 \leq \lambda + \mu, -M \leq [x]_2 \leq M, [u]_3 \leq x_3 \leq M\}.$$

Finalmente, se construye una sucesión $\{u_{k+1}\}$ tal que

$$[u_0]_3 = [u_1]_3 < [u_2]_3 = [u_3]_3 < [u_4]_3 = \dots \quad (3.17)$$

y se tienen tres posibilidades:

Para alguna k , $M \leq [u_{k+1}]_3$, al ser (3.17) una sucesión creciente, por lo cual $u_{k+1} \in \tilde{R}$.

Una segunda posibilidad es que para alguna u_j , se tenga que

$$\left| [u_j]_2 \right| > M, \quad \lambda \leq u_j \leq \lambda + \mu.$$

Se sigue entonces que $u_j \in R$ y terminamos.

De otra manera, $u_{k+1} \in K \forall k$, se tiene una sucesión infinita de puntos distintos en K , lo cual no es posible pues el grupo es discreto y actúa de manera discontinua en \mathbb{H}^3 (cf. [1] p. 95).

Se concluye que después de un número finito de pasos se encuentra $w \in \tilde{R}$ que es $\hat{\Gamma}$ equivalente a u . Por último, es claro que ∂R tiene medida cero pues está contenida en la intersección de conjuntos de medida cero. \square

(5) Poliedro de Ford para el grupo clásico modular (actuando en \mathbb{H}^3).

Nótese que $\langle T(z) = z + 1 \rangle = \Gamma_\infty$ (véase [5] p. 162), por lo que se tiene que $\langle \hat{T} \rangle = \Gamma_\infty$ (para la acción en \mathbb{H}^3), además, conforme a la Definición 35, en este caso $\mu = 1$. Considérese $\lambda = 1/2$, por lo que, aplicando la definición de poliedro de Ford a estos parámetros, se tiene que

$$R_\infty = \{u \in \mathbb{H}^3 \mid -1/2 < [u]_1 < 1/2\}. \quad (3.18)$$

Obsérvese también que las esferas isométricas de radio euclidiano mayor tienen radio uno, y los centros de dichas esferas se encuentran en puntos de la forma $(n, 0, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, pues $\forall d \in \mathbb{Z}$ existe

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

Además es claro que, de las esferas isométricas de radio máximo (euclidiano), sólo las que tienen centro en $0, e_1$ y $-e_1$ intersecan a R_∞ . Para $|c| \geq 2$ sabemos que el centro de las esferas isométricas está en el eje x y su radio r viene dado por $r = 1/|c|$, por lo que es claro que ninguna esfera isométrica con radio $1/|c|$, $|c| > 2$ interseca a B , donde

$$B = R_\infty \cap Ext(S(0, 1)),$$

es decir, B es el poliedro de Ford para el grupo modular (vease la Fig 3.3).

(6) Poliedro de Dirichlet para el grupo clásico modular (actuando en \mathbb{H}^3).

Considérese $w = 2j$ (donde $j = (0, 0, 1)$), es el centro del poliedro, $F(z) = z + 1$ y $S(z) = -1/z$. Por lo que \widehat{F} es la reflexión en el plano $P((1/2, 0, 0), 0)$ y \widehat{S} es la reflexión en $S(0, 1)$ seguida de la reflexión en el plano Π_{yz} .

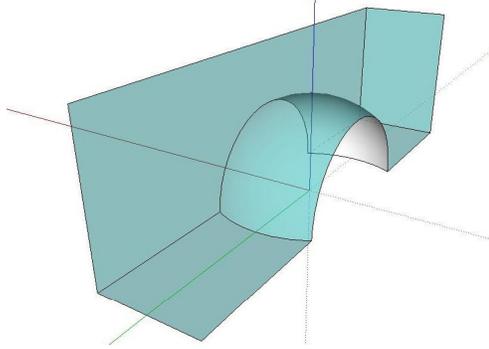


Figura 3.24: Poliedro de Ford y de Dirichlet para el grupo modular actuando en \mathbb{H}^3 .

Nótese además que $2j$ no es punto fijo de ninguna transformación en el grupo, pues de lo contrario el punto $2i$ en plano Π_{xz} sería un punto fijo para el grupo modular actuando en \mathbb{H}^2 , hecho que hemos probado no sucede, además sabemos que

$$L_{\widehat{F}} = \left\{ u \in \mathbb{H}^3 \mid [u]_1 = \frac{1}{2} \right\},$$

$$L_{\widehat{F}^{-1}} = \left\{ u \in \mathbb{H}^3 \mid [u]_1 = \frac{-1}{2} \right\},$$

como ya se vió en el ejemplo 1. Por otro lado

$$L_{\widehat{S}} = \{ u \in \mathbb{H}^3 \mid |u| = 1 \},$$

ya que

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}),$$

y además $S(2i) = i/2$, por lo que el bisector entre $2i$ y $i/2$ es el círculo unitario, lo mismo ocurre en el plano Π_{xz} , por lo cual el bisector entre $2j$ y $j/2$ es la esfera unitaria según lo expuesto en las p. 63 y 64. En consecuencia

$D(2j) \subset R$, donde R es el poliedro de Ford como en el ejemplo anterior. Probaremos que de hecho $D = R$.

Si $D \subsetneq R$, entonces existe $u_1 \in R$ tal que $u_1 \notin D$. Por ser D región fundamental $u_1 = h(u)$ donde $u \in \tilde{D}$, por lo cual $h(u) \in h(D) \cap R$ y en consecuencia $u, h(u) \in \tilde{R}$, lo que es imposible al ser R una región fundamental. Esto se sigue, ya que un punto frontera nunca puede ser equivalente a un punto interior, de lo contrario existirían puntos $\hat{\Gamma}$ equivalentes en la región. Por lo tanto $D = R$ como se quería probar.

Bibliografía

- [1] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [2] DRUMM, T. A., AND PORITZ, J. A., Ford and Dirichlet domains for cyclic subgroups of $PSL(2, \mathbb{C})$ acting on $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ and $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, *Conformal geometry and Dynamics 3 (1999)*, 116-150.
- [3] GROMOV, MICHAEL, Hyperbolic manifolds (according to Thurston and Jørgensen), *Bourbaki Seminar, Vol 1979/80 pp. 40-53, Lectures Notes in Math., 842, Springer, Berlin - New York, 1981*.
- [4] JØRGENSEN, TROELS, On cyclic groups of Möbius transformations, *Math Scand 33 (1973)*, 250 - 260 (1974).
- [5] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, UNAM, Facultad de Ciencias, 2005.
- [6] MARDEN, A., *Outer circles: An introduction to hyperbolic 3 - manifolds*, Cambridge University Press , 2007.
- [7] PÉREZ GUERRERO, JOEL SILVERIO, *Polígonos fundamentales convexos y regiones de Ford en $\widehat{\mathbb{C}}$* , Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2010.
- [8] RATCLIFFE, J. G., *Foundations of Hiperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 149, Springer-Verlag, 1995.
- [9] THURSTON, W. P., *Three Dimensional Geometry and Topolgy, vol 1*, Princeton University Press , 1997.