UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

"Un ambiente de aprendizaje para la construcción de cónicas"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO(A) EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (**MATEMATICAS**)

P R E S E N T A

PAVEL IVAN PONCE AGUILERA

DIRECTOR(A) DE TESIS: **M. en C. FRANCISCO DE JESUS STRUCK CHAVEZ**

MÉXICO, D.F. MAYO, 2012

Índice general

Introducción

El propósito que esta tesis persigue es el siguiente: que los alumnos articulen la definición de elipse e hipérbola como lugares geométricos con sus representaciones graficas, o si lo queremos ver de otro modo, que éstos logren alcanzar un aprendizaje que les permita vincular los dibujos con las propiedades geométricas que representan.

En la enseñanza de la geometría, cuando los objetos geométricos son representados por diagramas, los alumnos suelen reconocer sólo dibujos que se encuentran desvinculados de la teoría. No son capaces de identificar las propiedades y relaciones que caracterizan a tales objetos ni de articular un razonamiento que haga explicitas las implicaciones entre ellas. Los estudiantes establecen más bien una identidad directa entre la representación y el objeto geométrico, es decir, se desenvuelven en el ámbito de la evidencia que proporciona el dibujo.

Por el contrario, el aprendizaje de la geometría requiere que los estudiantes sean capaces de trascender el dibujo, descubrir propiedades y las relaciones geométricas que se encuentran vinculadas. El propósito, entonces es ver si ayudando a desarrollar la idea de dependencia entre propiedades geométricas se puede jugar un papel importante en el proceso de desarrollo de la noción de la prueba en matemáticas. Y plantear de qué forma los estudiantes de bachillerato logran, como resultado de diferentes actividades, ir más allá del aspecto visual de la representación grafica de un objeto geométrico, reconocer las propiedades y relaciones geométricas que lo caracterizan.

Capítulo 1 Aprendizaje de la geometría mediante la argumentación y la visualización

1.1 La geometría en la Educación Media Superior

1.1.1 El ambiente actual en la educación está centrado en competencias

En la actualidad la educación media superior (EMS) tanto a nivel internacional como nacional, ha centrado su atención en fomentar competencias[1] y no solamente en aprender conocimientos. En el caso de nuestro país, debido a la cantidad de contenidos que se pretendían enseñar, se les consideraba enciclopédicos, los cuales fomentaban que los alumnos aprendieran de forma algorítmica y memorística. Como podemos observar en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) y el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés).

La RIEMS se desarrolla en torno a cuatro ejes: la construcción e implantación de un Marco Curricular Común (MCC) con base en competencias; la definición y regulación de las distintas modalidades de oferta de la EMS; la instrumentación de mecanismos de gestión que permitan el adecuado tránsito de la propuesta; y un modelo de certificación de los egresados del Sistema Nacional de Bachillerato (SNB). Para los propósitos de este trabajo nos centraremos en el Marco Curricular Común con base en competencias y en el modelo de certificación de los egresados del Sistema Nacional de Bachillerato.

El Marco Curricular Común con base en competencias

El MCC permite articular los programas de distintas opciones de EMS en el país. Comprende una serie de desempeños terminales expresados como competencias genéricas, competencias disciplinares básicas, competencias disciplinares extendidas (de carácter propedéutico) y competencias profesionales (para el trabajo). Todas las modalidades y subsistemas de la EMS comparten los primeros dos tipos de competencias en el marco del SNB, y podrán definir el resto según sus propios objetivos.

[1] Una competencia es la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico (La Reforma Integral de la Educación Media Superior, http://www.sems.gob.mx/aspnv/video/Reforma_Integral.pdf).

Competencias Genéricas

- Clave: aplicables en contextos personales, sociales, académicos y laborales amplios. Relevantes a lo largo de la vida.
- Transversales: relevantes a todas las disciplinas académicas. Así como actividades extra curriculares y procesos escolares de apoyo a los estudiantes.
- Transferibles: refuerzan la capacidad de adquirir otras competencias, ya sean genéricas o disciplinares.

En el contexto del SNB, las competencias genéricas constituyen el **Perfil del Egresado**.

Las **competencias disciplinares básicas** son los conocimientos, habilidades y actitudes asociados con las disciplinas en las que tradicionalmente se ha organizado el saber y que todo bachiller debe adquirir. Se desarrollan en el contexto de un campo disciplinar específico y permiten un dominio más profundo de éste. Las competencias genéricas y las disciplinares básicas están profundamente ligadas y su vinculación define el MCC.

El modelo de certificado del SNB

La certificación nacional que se otorgue en el marco del SNB, complementaria a la que emiten las instituciones, contribuirá a que la EMS alcance una mayor cohesión, en tanto que será una evidencia de la integración de sus distintos actores en un Sistema Nacional de Bachillerato. La certificación reflejará la identidad compartida del bachillerato y significará que se han llevado a cabo los tres procesos de la Reforma de manera exitosa en la institución que la otorgue: sus estudiantes habrán desarrollado los desempeños que contempla el MCC en una institución reconocida y certificada que reúna estándares mínimos y participe de procesos necesarios para el adecuado funcionamiento del conjunto del nivel educativo.

A principios de 2008 se arribó a un consenso nacional sobre el Perfil del Egresado del SNB, el cual consiste en 11 competencias genéricas y sus respectivos principales atributos como se muestra en los párrafos siguientes. Este consenso se alcanzó tras una serie de talleres regionales y nacionales en los que participaron expertos en EMS.

Competencias genéricas para la Educación Media Superior de México

Las once competencias siguientes constituyen el Perfil del Egresado del Sistema Nacional de Bachillerato. Cada una de ellas, está organizada en seis categorías, acompañada de sus principales atributos. Son las siguientes:

Se autodetermina y cuida de sí; se expresa y comunica; piensa crítica y reflexivamente; aprende de forma autónoma; trabaja en forma colaborativa; participa con responsabilidad en la sociedad. A continuación se desarrollan las que nos son de interés para el presente trabajo.

Se expresa y comunica
Escucha, interpreta, emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

- Expresa ideas, conceptos a través de representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
- Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.
- Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

Piensa crítica y reflexivamente
Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- Construye hipótesis, diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

- Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico, discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- Evalúa argumentos, opiniones e identifica prejuicios y falacias.
- Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
- Estructura ideas, argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Lo anterior presenta a grandes rasgos las competencias que la RIEMS propone se desarrollen en el bachillerato y los planes para la certificación nacional. A continuación, planteo las competencias que la prueba internacional PISA busca evaluar.

1.1.2 El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes

Las características clave del enfoque de PISA son las siguientes:
Su enfoque innovador se centra en aptitudes, el cual se relaciona con la capacidad de los estudiantes para aplicar conocimientos y habilidades en materias clave, de analizar, razonar y comunicar de manera eficaz al plantear, resolver e interpretar problemas en una variedad de situaciones.

Su importancia en el contexto del aprendizaje permanente, no limita a PISA a evaluar conocimientos y aptitudes de los estudiantes con relación a su domino del plan de estudios y de las materias que lo integran, sino que también les pide información sobre su motivación para aprender, cómo se consideran ellos mismos y sus estrategias de aprendizaje.

Su consideración del desempeño estudiantil en el contexto de las características de los entornos de los alumnos y de las escuelas, a fin de explorar algunas de las particularidades principales asociadas con el éxito en la educación.

La evaluación de PISA 2003 se centró en Matemáticas. Ésta no fue una prueba de simple capacidad de los estudiantes para realizar operaciones matemáticas, sino más bien, una evaluación sobre su habilidad para reconocer, formular y tratar los problemas matemáticos en el contexto de la vida real. PISA transmite información sobre los conocimientos y aptitudes en cuatro distintos renglones de las matemáticas, aunque también presenta un resumen general de los resultados. Esta medida de eficacia estudiantil general en matemáticas, es la base del análisis de este resumen, que estudia los factores que se asocian con el desempeño.

PISA 2003 midió el desempeño de los estudiantes en cuatro renglones de las matemáticas:
• Espacio y forma**:** que contempla los fenómenos espaciales, geométricos y las propiedades de los objetos.
• Cambio y relaciones**:** que atañe las relaciones entre variables y la comprensión de las formas en que se representan, incluyendo las ecuaciones.
• Cantidad**:** que concierne a los fenómenos numéricos, las relaciones y los patrones cuantitativos.
• Incertidumbre**:** que se refiere a los fenómenos probabilísticos y estadísticos.

La evaluación de matemáticas en PISA 2003 confrontó a los estudiantes con problemas matemáticos basados en contextos del mundo real, donde se requiere que identifiquen características de un problema que podrían ser susceptibles de investigación matemática y activa las competencias relevantes para resolver el problema. Esto requiere de diversas habilidades, entre las que destacan las siguientes: pensamiento y razonamiento; argumentación; comunicación; diseño de modelos; planteamiento y resolución de problemas; representación; uso de lenguaje y operaciones en el ámbito de lo simbólico, formal y técnico. Aunque generalmente estas habilidades funcionan en conjunto, puede observarse cierta duplicación en sus definiciones, es posible distinguir tres grupos de actividad cognoscitiva:

• Habilidades de reproducción**:** se refieren a, la reproducción de conocimientos, como la detección de procesos matemáticos, tipo de problemas familiares y la realización de operaciones de rutina. Esta clase de habilidades son las que se requieren en las tareas más simples que deben realizar los estudiantes en PISA.
• Habilidades de conexiones e integración**:** las cuales requieren que los estudiantes vayan más allá de los problemas de rutina para interpretar y conectar distintas situaciones. Aunque aún en contextos relativamente familiares estas habilidades son las que tienden a utilizarse en problemas de dificultad media.
• Habilidades de reflexión**:** las cuales requieren de análisis y abstracción por parte de los estudiantes, así como de creatividad para identificar los elementos matemáticos de un problema y en el establecimiento de vínculos. Estos problemas a menudo son complejos y tienden a ser los de mayor grado de dificultad en PISA.

Resultados de PISA
Para comprender mejor los resultados de PISA comenzaremos con una breve descripción del tipo de preguntas que se les realiza a los estudiantes, como se califica, los puntajes que pueden obtener y dependiendo de sus resultados, en que nivel de dominio se clasifica a los alumnos y por lo tanto a los países.

Reactivos de matemáticas, puntajes de los estudiantes y niveles de dominio
La evaluación del 2003 incluyó 85 preguntas distintas de matemáticas con distintos niveles de dificultad. En varios casos, se plantearon preguntas seriadas relacionadas con una misma situación matemática descrita en un texto o diagrama. En muchas instancias, se requirió que los estudiantes presentaran respuestas con sus propias palabras a preguntas basadas en el texto presentado. Algunas veces, debían escribir sus cálculos o explicar sus resultados, a fin de mostrar el método y el razonamiento utilizado. Estas preguntas abiertas requirieron del juicio profesional de calificadores capacitados para clasificar las respuestas observadas en distintas categorías. Para las respuestas no del todo correctas, a menudo se asignó un crédito parcial. Cada estudiante recibió un puntaje con base en la dificultad de las preguntas que podía responder de manera confiable. Así, se obtuvieron puntajes para cada uno de los cuatro renglones analizados en matemáticas y para el desempeño general. La escala se dispuso de manera que, en 2003, el puntaje promedio en los países de la OCDE fuera de 500 puntos. Cerca de dos terceras partes de los alumnos obtuvieron puntajes entre 400 y 600 (es decir, la desviación estándar es igual a 100 puntos). Cabe señalar que un puntaje puede utilizarse para describir tanto el desempeño de un estudiante como la dificultad de la tarea a realizar. De este modo, por ejemplo, es posible esperar que un alumno con un puntaje de 650 normalmente complete una tarea con nivel de dificultad también de 650, al igual que reactivos más sencillos

con puntajes menores. Los puntajes de desempeño estudiantil y la dificultad de las tareas también se dividieron en seis niveles de dominio, cada uno de estos niveles se puede describir en función de los tipos de procesos matemáticos que los estudiantes pueden realizar.

Descripción breve de los seis niveles de dominio en las matemáticas:
Nivel 6. De 668 puntos en adelante, los estudiantes tienen la capacidad de conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en su investigación, así como el establecimiento de modelos de situaciones complejas. Los estudiantes de este nivel son capaces de pensar y razonar en un nivel avanzado en matemáticas, pueden profundizar, comprender y dominan las operaciones, relaciones matemáticas simbólicas y formales, a fin de desarrollar nuevos enfoques.

Nivel 5. De 606 a 667 puntos, los estudiantes ubicados en este nivel, son capaces de desarrollar y trabajar con modelos para situaciones complejas, identificar restricciones así como especificar supuestos. Tienen la posibilidad de seleccionar, comparar, evaluar las estrategias apropiadas de resolución de problemas para tratar con casos complejos relacionados con estos modelos. Los alumnos de este nivel son capaces de trabajar de acuerdo con una estrategia mediante el uso de habilidades de pensamiento amplias y bien desarrolladas, representaciones vinculadas de manera apropiada, caracterizaciones simbólicas, formales e ideas que corresponden a estas situaciones. También pueden reflexionar sobre sus acciones, formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

Nivel 4. De 544 a 605 puntos, los estudiantes en este nivel son capaces de trabajar de forma eficaz con modelos explícitos que describen situaciones concretas complejas que pueden involucrar restricciones o requerir el establecimiento de supuestos. También seleccionar e integrar distintas representaciones, incluyendo las simbólicas, vinculándolas directamente con aspectos de situaciones de la vida real. Los alumnos de este nivel son capaces de aplicar habilidades bien desarrolladas, razonar en estos contextos de manera flexible y con cierta profundidad. Tienen así mismo la posibilidad de elaborar, comunicar explicaciones y argumentos con base en sus interpretaciones, demostraciones y acciones.

Nivel 3. De 482 a 543 puntos, los estudiantes en este nivel son capaces de ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo lo que exigen la toma de decisiones en secuencia. También pueden seleccionar y aplicar estrategias sencillas de solución de problemas. Los alumnos en este nivel tienen la posibilidad de interpretar y utilizar representaciones basadas en distintas fuentes de información y razonar directamente de ellas. Tienen la capacidad de elaborar comunicaciones breves acerca de sus interpretaciones, resultados y razonamiento.

Nivel 2. De 420 a 481 puntos, los estudiantes en este nivel son capaces de interpretar a la vez de reconocer situaciones en contextos que exigen, cuando mucho, inferencias directas. Son capaces de extraer información relevante de una sola fuente y utilizar un solo modelo de representación. Los estudiantes de este nivel pueden emplear el grado más básico de algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones. Son capaces de razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.

Nivel 1. De 358 a 419 puntos, los estudiantes en este nivel son capaces de responder preguntas que involucran contextos familiares en los que toda la información relevante está presente y las preguntas están definidas de manera clara. Tienen la posibilidad de identificar información, llevar a cabo procedimientos de rutina de acuerdo con instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a cabo acciones que son obvias y consecuencia inmediata del estímulo presentado.

A continuación damos una breve semblanza sobre los resultados de México y algunas comparaciones con otros países miembros y no miembros de la OCDE

El Desempeño general de los estudiantes, en función del puntaje promedio en matemáticas, para cada país, se puede resumir en un puntaje medio, la mayor parte de los países de la OCDE han estimado desempeños medios en matemáticas en el nivel 3. Las excepciones son Finlandia, cuyos estudiantes obtienen puntajes promedio en la frontera entre el nivel 3 y el 4; Grecia, Italia, Portugal y Turquía con promedios en el nivel 2 y México en el nivel 1.

El desempeño de México en matemáticas: la media está por debajo de los 400 puntos, los estudiantes con mejores resultados están en arriba de los 500 puntos, que es la media de países como Suiza que se encuentra en el décimo lugar y los estudiantes con peores resultados están por debajo de los 250 puntos.

Lo anterior nos indica que el puntaje promedio de los estudiantes de nuestro país se encuentra por debajo de los 400 puntos. De lo cual podemos decir que el promedio de los estudiantes con el más alto desempeño de sus habilidades son los que aspiran a poder responder el tipo de preguntas que involucran contextos familiares en los que toda la información relevante está presente y las preguntas son claras y concisas, pudiendo realizar procedimientos de rutina de acuerdo con instrucciones directas en situaciones explicitas.

Ahora si nos fijamos en la dispersión del desempeño en cada país, el cual muestra el diferencial entre los mejores y peores desempeños estudiantiles, podemos observar que la dispersión de los estudiantes de nuestro país es, hacia las puntuaciones más altas de 100 puntos por arriba de la media, quedando en 500 puntos y hacia las puntaciones más bajas es de 150 puntos por debajo de la media, quedando por debajo de los 250 puntos. Lo cual nos indica que los alumnos mexicanos que más alto desempeño obtuvieron se encuentran por debajo de la media de los países que están en los diez primeros lugares.

En PISA 2003 podemos observar que la media de nuestros estudiantes alcanza el nivel 1 en dicha escala, lo cual nos indica que son capaces de aplicar algoritmos en matemáticas, pero no de buscar datos relevantes para un problema si estos no son tan obvios en el planteamiento del mismo, ni son capaces de llegar a hacer razonamientos directos de lo más básico. De lo anterior podemos deducir que la educación en México, al menos estos alumnos, hacen medianamente bien su trabajo, puesto que los estudiantes acceden al nivel de la algoritmización, pero son incapaces de ir más allá de él.

Por lo tanto si en la EMS se prosigue con ese estilo de enseñanza algorítmica, ya sea por inercia o por otros motivos, el tipo de pensamiento de los alumnos no se va a poder cambiar. En vista de lo anterior se requiere que el estilo de enseñanza en la EMS ya no sea algorítmico, precisamos que los alumnos hagan razonamientos inductivos, deductivos, inferencias, particularizaciones, generalizaciones, etc.

1.1.3 Competencia de razonamiento

Para la autora Sandoval (2005) plantea el razonamiento de la siguiente manera, autores como Balacheff (2000) y Duval (1999b) han puesto su atención en los distintos tipos del razonamiento y han establecido diferencias que se consideran pertinentes abordar en este documento. Para Balacheff, el razonamiento es la “actividad intelectual no completamente explicita, que se ocupa de la manipulación de información de tal manera que se produzca un nuevo conocimiento”(pp. 12-13).

Una *explicación* se sitúa a nivel del sujeto locutor (emisor), la cual establece y garantiza la validez de una proposición para el sujeto, apoyándose en sus conocimientos y en sus propias reglas de decisión de la verdad. La base de la explicación es el lenguaje natural. Cuando una explicación es aceptada y reconocida por otros sujetos es conocida como *prueba*, es decir, un proceso social mediante el cual el discurso es aceptado por una comunidad. Dicha aceptación depende del tiempo, el contexto y del conocimiento de los sujetos involucrados. Una prueba puede ser aceptada por una comunidad, pero también puede ser rechazada por otra.

La *demostración* es la forma de validación del conocimiento matemático; es el tipo de prueba dominante en matemáticas. “Se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto de reglas bien definidas”. Una demostración es también un acto social, pues se convierte en tal después de haber sido aceptada por los especialistas de dicha área. Sin embargo, lo que caracteriza a una demostración es que “se fundamenta sobre un cuerpo de conocimientos fuertemente institucionalizados, sobre un conjunto de definiciones, de teoremas y de reglas de deducción, cuya validez es aceptada socialmente” (Balacheff, 2000).

1.2 Reformas educativas

1.2.1 Reformas en el siglo XX

Kline (1976) describe las carencias del plan tradicional de Matemáticas en EE.UU. Éste se componía fundamentalmente de: Álgebra mecánica, colección de procedimientos inconexos para que los alumnos lleguen a realizar operaciones algebraicas y que abocaban a un aprendizaje memorístico; y Geometría euclidiana deductiva, en la que la cadena lógica en su perfección lineal no enseñaba a pensar pues no desvelaba cuáles eran las dificultades abordadas ni tampoco las ideas motrices que llevaron a superarlas, conduciendo por otra vía también a la memorización. Ambas ramas eran presentadas con frialdad y motivadas con razones de tipo estético, propedéutico o de un futuro muy restringido, alejadas de la realidad práctica en estos niveles. El valor intelectual de las Matemáticas sólo puede ser apreciado desde cierta madurez.

1.2.2 Enseñanza de teoría de conjuntos

El lanzamiento en 1957 del primer Sputnik por la URSS propició en EE.UU. la alarma sobre la inferioridad nacional en los campos científico y tecnológico. En esa coyuntura, al constatar el bajo nivel norteamericano en educación matemática, surgió la idea, secundada en los ámbitos políticos y económicos, de que era necesaria una reforma. Para ello, se supuso que era preciso abandonar la enseñanza del plan tradicional, unas Matemáticas con contenidos separados y anteriores a 1700, sustituyéndolas por otras más «modernas». Dada la importancia de las Matemáticas abstractas en el último siglo, con la unificación de sus ramas mediante conceptos generales y estructuras, se propuso reconstruir las Matemáticas de la enseñanza elemental desde ese punto de vista global. Y se vio la necesidad de reeducar a los profesores, comenzando por doquier los cursillos de Teoría de Conjuntos. Pero como apunta Kline (1976):
Un plan que pudiera ser ideal para la formación de futuros matemáticos no puede ser el correcto para la formación básica de toda la población.

Se argumentaba que si se construían todas las matemáticas elementales lógicamente, comenzando por axiomas, definiciones y avanzando con teoremas y propiedades, paso a paso, como la Geometría euclidiana en el plan tradicional, se podrían comprender todas las Matemáticas. Extendiendo este enfoque a la Aritmética, por ejemplo, los enteros se definen como clases de equivalencia. ¿De verdad así comprende un niño lo que es un entero?

El error residía en ofrecer a los aprendices la versión última y perfeccionada de una ciencia que, sin embargo, fue creada con intuiciones, intentos, aproximaciones y también fracasos instructivos. Se transmitía así una visión falsa del pensamiento matemático, distante y frío en su perfección. Kline (1976), en

apoyo de su tesis, acude a ejemplos en la historia de las Matemáticas: el cero y los complejos fueron adoptados por simple pragmatismo; ni Newton ni Leibniz pudieron formular correctamente los conceptos básicos del cálculo infinitesimal. Los grandes matemáticos del s. XVIII y XIX realizaron enormes avances sin tener una definición precisa de los conjuntos numéricos, sólo a finales del XIX se sientan los fundamentos lógicos de las ramas más importantes. Concluye que «la intuición de los grandes hombres es más poderosa que su lógica».
En definitiva, para alcanzar un nivel de pensamiento hay que pasar por las experiencias previas que lo han propiciado.

Como dijera Lebesgue, las Matemáticas no surgen de la lógica deductiva sino del trabajo de la imaginación creadora, guiada por analogías, intuiciones e incluso ideales estéticos. La lógica actúa después, sólo como control. No se puede sustituir este proceso de conocimiento por la palabrería lógica, si no es destruyendo la vida y el espíritu de las Matemáticas.

Muchos profesores salen de sus clases muy satisfechos consigo mismos después de haber expuesto una serie de semejantes teoremas y demostraciones. Pero los estudiantes no quedan satisfechos. No han comprendido de qué se trata, y todo lo que pueden hacer es aprender de memoria lo que han oído. No conocían el pensamiento original y no han sacado nada en limpio de las repulidas demostraciones. Puesto que no se les muestra el proceso por el cual los matemáticos han llegado a ellas, sólo se les muestra el resultado final, donde los alumnos creen que algunos pasos son mágicos, sacados de una chistera.

Kline (1976) denuncia la obsesión por el rigor en la enseñanza secundaria como mera artificialidad alejada de los significados. Los modernistas tildaban de incompletas a las demostraciones de Euclides porque su desarrollo deductivo no era riguroso, al usar implícitamente axiomas y teoremas no citados por evidentes. Pero, si durante dos mil años los mejores matemáticos no advirtieron la falta de esos axiomas y teoremas, ¿cómo puede esperarse que los jóvenes vean su necesidad? Además, paradójicamente, algunos teoremas son más evidentes que los axiomas requeridos para poder demostrarlos.

¿Qué conceptos se introdujeron así en los planes de enseñanza? Fundamentalmente, la Teoría de Conjuntos. La cual Kline (1976) considera un despilfarro de tiempo pues opina que no pasa de ser un lenguaje que por sí mismo no ofrece resultados que puedan seducir al estudiante con sensibilidad matemática. Además, la numeración en bases no decimales, la Lógica Simbólica, el Álgebra de Boole, las congruencias y las estructuras algebraicas. Un caso que repite por afectarle especialmente es el de las funciones, que eran definidas como conjuntos de pares ordenados, ocultando el hecho esencial de la variación dependiente. El formalismo de este plan solamente puede conducir a una disminución de la vitalidad de las matemáticas y a una enseñanza autoritaria, al aprendizaje mecánico de nuevas rutinas, mucho más inútiles que las rutinas tradicionales.

1.2.3 Regreso a la algoritmización intermedia

Después del fracaso de la matemática moderna en la enseñanza, el exceso de formalismo que se había promovido dio paso a una reacción en extremo opuesta, la cual derivó en diluir los contenidos de la geometría en el currículum y eliminar el tratamiento explícito de la demostración (NTCM, 1989). Así se dio un movimiento de regreso a la enseñanza de las habilidades básicas. Sin embargo, esta orientación tampoco fue exitosa, ni se puede afirmar que haya contribuido a proporcionar una mejor formación matemática a los estudiantes (Hanna, 1996).

1.3 Hacer demostraciones no sólo por medio de la lógica sino a través de la intuición, con un nivel de formalismo menor

En opinión de Flores (2007) desde el ámbito de las matemáticas, es posible lograr un pensamiento deductivo a través de la enseñanza de la demostración matemática. Como lo plantea Fawcett en la obra *the nature of Prof.* (1938, citado por McGivney y DeFranco, 1995). Donde se afirma que el propósito del estudio de la demostración geométrica es cultivar el pensamiento crítico y reflexivo; después de una encuesta sobre la enseñanza de la geometría, el Tercer Comité sobre Geometría estadounidense llegó a la conclusión de que existe un acuerdo casi unánime en que la geometría demostrativa puede enseñarse de manera tal que desarrolle el poder de razonar lógicamente con más rapidez que otras materias escolares.

En el mismo sentido el autor afirma que en la matemática escolar, la demostración es el proceso deductivo que lleva a la validación de conjeturas matemáticas o de resultados surgidos durante el proceso de enseñanza aprendizaje. La diferencia entre la demostración en la matemática formal y la escolar se encuentra en el grado de formalidad. Así según nuestra opinión, la demostración en la escuela puede contribuir de manera notable al desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo en los alumnos. Este tipo de pensamiento, a su vez redundará en un aumento en su capacidad para resolver problemas y para tomar decisiones fundamentadas dentro y fuera del ámbito escolar.

Así pues, la matemática escolar puede contribuir en gran medida a la formación de estudiantes críticos y reflexivos a través del fomento de un razonamiento deductivo y de la enseñanza de la demostración matemática (Flores, 2007)

En un sentido similar Salinas (2008) plantea lo siguiente: como la historia lo confirma, es claro que la elaboración de demostraciones en matemáticas constituye uno de los rasgos característicos del pensamiento matemático, por lo tanto, hay que tenerlo presente cuando uno se pregunte acerca de la formación matemática que debe brindar un bachillerato. Así, aun y cuando ha variado la ponderación del tema de la demostración en diferentes propuestas curriculares, ha prevalecido la idea de que todo estudiante debe tener una introducción en el desarrollo del razonamiento deductivo (NTCM, 2000).

El autor nos dice, sin embargo, que en los procesos de revisión curricular, no puede obviarse la discusión de las grandes dificultades que los alumnos tienen para comprender la demostración y preguntarse si es necesaria su enseñanza (Schoenfeld, 1994). En consecuencia se ha dado una tendencia ha reducir su estudio en los programas preuniversitarios (Greeno, 1994). Es una opinión compartida entre investigadores, el hecho de ser necesario cambiar esta situación. Se reconoce que la demostración es un tema fundamental que debería ser abordado de manera gradual, pero también debe ser tratada de manera explícita, como un objetivo que se desea alcanzar (Balachef, 1987; Greeno, 1994;Schoenfeld, 1994; Hanna, 1996). Por consiguiente tomando en cuenta que el nivel medio superior es la última oportunidad en la que un alumno podría adquirir una formación matemática básica, un objetivo de esta enseñanza debería ser que una población mayoritaria de alumnos accediera a la comprensión y manejo de este tema, como un aspecto fundamental de su formación matemática. Esto implica que los alumnos no se limiten a entender una secuencia de inferencias lógicas, sino que comprendan el carácter necesario y general que tiene una prueba matemática.

El autor nos dice con respecto a la pertinencia del aprendizaje de la demostración a través de la geometría, que las opiniones de diferentes autores presentan matices diferentes. Por ejemplo, hay quienes abogan por la importancia de la enseñanza de la demostración a partir de la construcción de evidencias plausibles (Peirce, 1976). Ya antes Polya (1954) había estudiado el razonamiento intuitivo en matemáticas, considerando que es el razonamiento que usamos para formular nuestras conjeturas matemáticas y lo llama *razonamiento plausible*.

En otro sentido la autora Sandoval (2005) dice que la demostración en matemáticas tiene diferentes significados y diferentes sistemas de pruebas argumentativas, los significados de la demostración los analiza en diferentes contextos. Para los fines de presente trabajo nos centramos en los siguientes contextos:

En la clase de matemáticas: Los teoremas en este contexto son necesariamente verdaderos. Las argumentaciones son deductivas informalmente (en el mejor de los casos); argumentaciones no deductivas o basadas en criterios externos de autoridad. El estudiante tiene que construir demostraciones que lo convenzan y explicar dicho convencimiento al profesor.

Significados personales de la demostración. Para los estudiantes existen tres categorías de la demostración; basados en convicciones externas –cuando los formalismos son introducidos demasiado temprano- en este caso, el profesor es la única fuente de conocimiento (ritual, autoritario y simbólico); empíricos, donde los argumentos son producto de evidencias físicas o experiencias inductivas y perceptivas; analíticos, donde las conjeturas se validan a través de deducciones lógicas. El medio aporta los mecanismos para que, el que aprende, corrobore sus conocimientos, sus construcciones intelectuales y sus conjeturas.

En estos sentidos, es donde se ve la importancia de la demostración matemática en la EMS, de lograr un pensamiento deductivo, así como validar el conocimiento que están construyendo los alumnos, y que de esta forma sean capaces de vincular los conocimientos nuevos con los previos, logrando un aprendizaje significativo, no solamente un aprendizaje memorístico o algorítmico. De esta forma poder contribuir al cambio que busca la RIEMS y que evalúa PISA.

1.4 Aprendizaje de la geometría mediante la argumentación y la visualización

Son muchos los argumentos utilizados a favor de la enseñanza de la geometría en los distintos niveles educativos, los cuales podemos dividir en dos conjuntos, el primero, el gran valor práctico como instrumento matemático para describir las figuras geométricas en el plano y el espacio, y el segundo, su importancia teórica como primer acercamiento al razonamiento deductivo. La geometría es la disciplina matemática en la que con mayor claridad se perciben las complejas relaciones entre el pensamiento teórico y la realidad empírica (Mercado 2004).

Mercado afirma que en el bachillerato debe dársele mayor importancia a la enseñanza de la geometría, ya que en este nivel cobra mayor relevancia el objetivo de que los estudiantes realicen actividades, resuelvan problemas que impliquen llevar a cabo razonamientos deductivos y pruebas matemáticas; en particular, pruebas geométricas.

El autor nos dice con respecto a la pertinencia del aprendizaje del pensamiento deductivo a través de la geometría, que las opiniones de los diferentes autores pueden estar matizadas por intereses específicos. Hay quienes abogan por la importancia de la enseñanza de la demostración a partir de la construcción de evidencias plausibles a través del uso de los argumentos geométricos como Hanna (1991), Hoyles & Jones (1998) y Hershkowitz (1998) entre otros. Goldenberg, Couco & Mark enfatizan el papel de la prueba en geometría como un buen medio para desarrollar hábitos de pensamiento (Goldenberg, Couco & Mark, 1998), mientras que Chazan y Yerushalmy destacan que la prueba en geometría, además de ser un recurso para la justificación, cumple o puede cumplir una función de comunicación (Chazan y Yerushalmy, 1998).

Por otra parte Salinas (2008) afirma que tradicionalmente el primer acercamiento a la prueba en matemáticas se ha dado mediante el estudio de la geometría. Esta situación es adecuada, pues podemos reconocer que esta teoría brinda la posibilidad de vincular un trabajo lógico con contenidos que tienen una base intuitiva muy fuerte y cercana a los alumnos. Por ello, no es un accidente histórico que haya sido la geometría euclidiana la primera teoría matemática que fue estructurada en un sistema deductivo (Klein, 1976). Así incluso se ha resaltado tal vínculo entre el aspecto intuitivo y lógico como una ventaja pedagógica, pues, “la razón para ello es que la intuición puede aplicarse inmediatamente para inferir cuestiones geométricas y que las mismas figuras sugieren métodos de demostración” (op. cit. p.43).

Itzcovich (2005) afirma que al ser más reconocido el trabajo en otras ramas de la matemática, (aritmética, álgebra, cálculo) si algo “se cae” del programa por falta de tiempo es la geometría. Al punto en que nadie dudaría en promover a un alumno de año por no conocer la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Se remarca dicho fenómeno con el fin de advertir que si esta tendencia continúa, se priva a los alumnos de la posibilidad de conocer otro modo de pensar, se les quita la oportunidad de vivir la experiencia de involucrarse en otras formas de razonamiento, que son especificas de este dominio. A su vez, la práctica geométrica tiene un alto valor formativo y es por tal motivo que todos los alumnos tienen derecho a acceder a ella.

1.4.1 Construcciones en geometría

El autor Itzcovich (2005) dice que las construcciones geométricas, partiendo de las premisas de que bajo ciertas condiciones, las construcciones con los instrumentos clásicos de la geometría permiten explorar, identificar, conjeturar y validar propiedades de las figuras. Arsac (1987) plantea que la práctica geométrica consiste en una ida y vuelta constante entre un texto y un dibujo. En consecuencia, analizar los datos con los que se debe construir una figura, determinar si la construcción es posible o no, establecer relaciones entre los datos conocidos y el dibujo a obtener, etc., resultan una experiencia sumamente útil en el camino hacia entender una figura como el conjunto de relaciones que la caracterizan y que pueden ser enunciadas en un texto. Y el dibujo debe de ser sólo un representante. En este sentido, la presencia de una figura de análisis comienza a ser un referente importante.

Itzcovich (2005) plantea que es imperioso aclarar que los alumnos no identifican las propiedades de las figuras por el sólo hecho de mirar los dibujos que las representan. Aquello que un alumno puede reconocer al observar una figura no siempre es lo mismo que el docente pretende que ese alumno identifique con la mirada ya que ambos, docente y alumno, parten de un caudal de conocimientos diferentes. Y muchas veces se cae en la “ilusión” de que, por el hecho de mostrar una figura a los alumnos, éstos reconocerán las propiedades allí representadas.

El autor nos muestra un ejemplo muy contrastante, un dibujo como el siguiente fig. 1, muy probablemente para un profesor de matemáticas pueda representar una circunferencia con cuatro diámetros marcados.

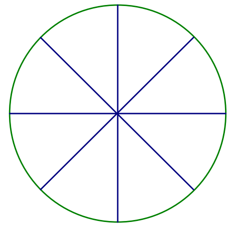


Figura 1

En este mismo dibujo de la fig. 1, para una persona alejada del conocimiento matemático, puede representar cualquier otro objeto, como por ejemplo una rueda o una pizza cortada en ocho porciones.

Lo que el ojo observa depende de los conocimientos que pone en funcionamiento el observador. Sin embargo, en numerosas oportunidades la enseñanza funciona como si la percepción fuera independiente de la cognición y se realizan propuestas de trabajo para establecer propiedades de las figuras que se apoyan exclusivamente en observaciones de dibujos.

Por ese motivo, las situaciones que se propongan a los alumnos con la finalidad de indagar, identificar o reconocer propiedades de las figuras deben impactar en procesos intelectuales que permitan hacer explícitas las características y propiedades de los objetos geométricos, más allá de los dibujos que se utilicen para presentar dichas figuras. Las propiedades y características de los objetos geométricos constituyen herramientas necesarias, que se utilizan en todo proceso deductivo. De allí, el hecho de que los alumnos dispongan de ellas es un requisito imprescindible para el despliegue de prácticas argumentativas en el camino hacia la producción de demostraciones. Pero como se dijo anteriormente no basta con presentarle a los alumnos los nombres, las particularidades o los elementos y propiedades que caracterizan a las figuras. Debe formar parte del proceso el ir identificando estas cuestiones en el conjunto de problemas que se planteen a los alumnos para ser resueltos. Y esta trama no es lineal ni esta determinada completamente por tales problemas. Se apela constantemente a relaciones entre los conocimientos que disponen los alumnos, las actividades de construcción que se propongan, las intuiciones, los ensayos, los errores, los aciertos que se presenten, los aportes del docente, las discusiones de los alumnos, etc.

A continuación revisaremos brevemente la estrategia en el aula a seguir en la implementación de la propuesta didáctica.

1.5 Estrategia en el aula

Según las características y problemas planteados anteriormente de la actual EMS en nuestro país, y tomando en cuenta el tipo de educación que se busca impartir con la implementación de la RIEMS, lo que se mide con estudios internacionales como lo es PISA, el desarrollo de la propuesta la planteo con base en una estrategia educativa constructivista, llamada modelo inductivo (Eggen, 2001). Con la cual se puede ayudar a los alumnos a construir la comprensión de conceptos específicos, haciendo que el centro del proceso de construcción de la comprensión sean ellos mismos.

1.5.1 Modelo Inductivo

El modelo está fundamentado en los principios del *constructivismo*, una visión del aprendizaje que sostiene que los alumnos desarrollan su propia comprensión acerca del mundo, en lugar de obtenerla provista por otros (en la mayoría de los casos por los docentes) de una forma previamente organizada. El constructivismo ubica al alumno en el centro del proceso de aprendizaje.

Este modelo tiene por raíz el trabajo de Jean Piaget, el afamado investigador suizo quien fue pionero en examinar el desarrollo intelectual de los niños y que tuvo gran influencia en el currículum, la educación de los Estados Unidos y otros países.

Eggen dice que el modelo inductivo está diseñado para alcanzar varias metas interrelacionadas. El primero de estos objetivos es ayudar a los alumnos a construir una comprensión profunda y completa de temas específicos. En segundo término, el modelo inductivo esta diseñado para poner a los alumnos en un rol activo en el proceso de construir su comprensión (Eggen, 2001), cuando los alumnos trabajan activamente con lo que les proporcionan los docentes como pueden ser modelos, gráficas, con la guía del docente, no sólo construyen una comprensión completa de los temas, también ganan habilidades y confianza para dar sentido a su entorno.

Este autor menciona que el método inductivo también tiene un componente social muy importante. El clima que necesita prevalecer en la clase, para que tenga lugar el aprendizaje, y los roles del docente como de los alumnos estén muy bien definidos. El modelo inductivo requiere de un ambiente en el que los alumnos se sientan libres de asumir riesgos y ofrecer sus conclusiones conjeturas y evidencias sin temer a las criticas ni sentirse avergonzados. El cual contribuye según la RIEMS con dos competencias genéricas, trabaja en forma colaborativa; participa con responsabilidad en la sociedad.

El método inductivo lo podemos ver a través de cuatro componentes: Ubicación del tema; selección de ejemplos; encontrar patrones; por ultimo generalizaciones y conclusiones. Que describiremos con brevedad a continuación:

Primero, los temas en que se centran los docentes deben estar bien definidos, en el caso del presente trabajo son las cónicas, en particular la elipse y la hipérbola.

Segundo, los docentes deben de comenzar con un ejemplo o un conjunto de ejemplos. En el caso de la propuesta didáctica del presente trabajo los ejemplos los realizan los alumnos con doblado de papel, al generar un óvalo y un par de curvas, teniendo como elementos iniciales en una hoja de papel vegetal una circunferencia, su centro y un punto adentro o afuera de la circunferencia según sea el caso.

Tercero, a la medida en que procesan la información de los ejemplos, los estudiantes practican los procesos básicos de observar, comparar y contrastar, así como de encontrar patrones y generalizaciones. En el caso de la propuesta didáctica del presente trabajo, se pide a los alumnos que observen y encuentren patrones en las figuras que generan.

Cuarto, los docentes guían a los alumnos en cada caso desde los ejemplos específicos a las conclusiones. Las conclusiones representan las metas de contenidos que los docentes deben identificar cuando planifiquen sus clases. En el caso de la propuesta didáctica del presente, la meta es que comprendan el concepto de elipse e hipérbola.

Con el modelo inductivo se puede enseñar diferentes tipos de contenidos, conceptos y relaciones entre estos. Las relaciones entre conceptos pueden ser principios, generalizaciones y reglas académicas. En el caso de la propuesta que se realiza se puede aplicar el modelo inductivo puesto que la elipse y la hipérbola son un par de conceptos.

El propósito de la estrategia didáctica que se va a implementar, es que los alumnos entiendan de la mejor manera posible el concepto de elipse e hipérbola, y esto a través de validar de forma matemática el conocimiento que se les está trasmitiendo con el modelo inductivo, y de esta manera poder fomentar algunas de la habilidades que la RIEMS busca desarrollar en los alumnos de bachillerato y las que el estudio internacional como PISA miden en sus exámenes, una de esas habilidades es la de razonar.

Capítulo 2 Marco Teórico

2.1 Modelo Inductivo

En el presente trabajo de tesis se toma la estrategia de enseñanza aprendizaje constructivista llamada modelo inductivo, como la describe Eggen en su libro Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento (2001).

2.1.1 Metas del modelo inductivo

El modelo inductivo está diseñado para alcanzar varias metas interrelacionadas. El primero de estos objetivos es ayudar a los alumnos a construir una comprensión profunda y completa de temas específicos. En segundo término, este modelo inductivo está diseñado para poner a los alumnos en un rol activo en el proceso de construcción de su propia comprensión. Los docentes al proporcionar datos a los alumnos, permiten que estos trabajen activamente con dichos datos, con la guía del docente. Como resultado, los alumnos no sólo construyen una comprensión completa de los temas, también ganan habilidad y confianza en dar sentido a su entorno.

Al enseñar diferentes contenidos con el modelo inductivo, se puede observar que los procedimientos de los docentes son similares, a continuación se muestra en la figura (Figura 1) los diferentes tipos de contenidos que se tratar con el modelo inductivo.

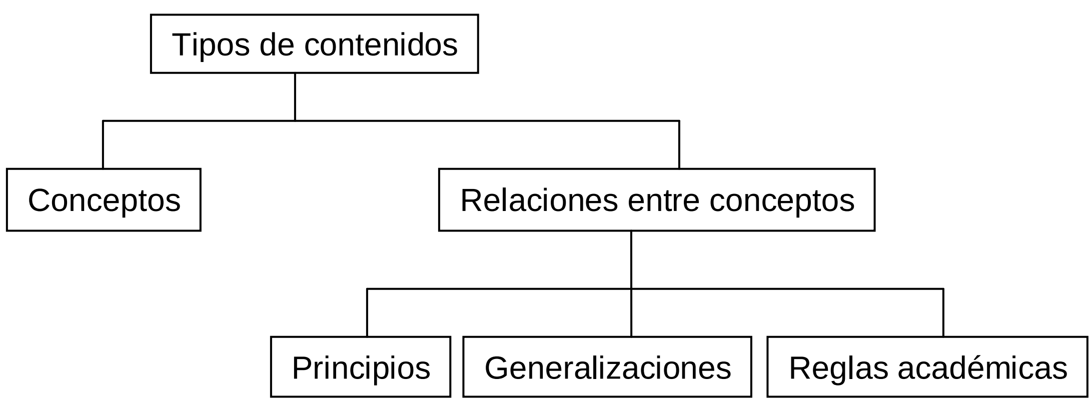
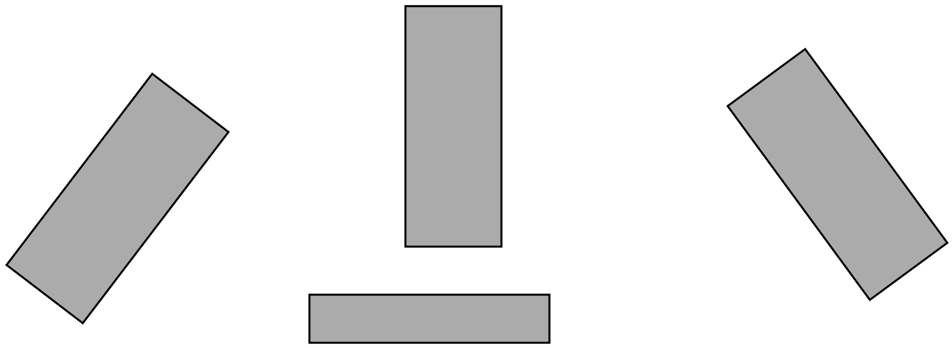


Figura 1. Metas del modelo inductivo

Conceptos: Categorías con características comunes

Los conceptos son categorías, conjuntos o clases con características comunes, supongamos que se muestran los siguientes bloques a un grupo de niños pequeños.



Aunque su tamaño, su dimensión relativa y su orientación varían, los bloques pueden clasificarse como rectángulos, porque todos tienen ángulos de 90º, los lados opuestos iguales y paralelos, el rectángulo es un concepto.

Características:
Las características de un concepto son los rasgos que lo definen, el aprendizaje del concepto depende de la habilidad del alumno para identificar las características esenciales en los ejemplos del docente.

El concepto de rectángulo tiene las siguientes características:
- Lados opuestos del mismo largo.
- Lados opuestos paralelos.
- Todos sus ángulos miden 90º.

Otras características como tamaño, color u orientación, no son esenciales, una parte importante del aprendizaje del concepto es la habilidad para discriminar entre las características esenciales y las no esenciales.

Los alumnos "construyen" el concepto mediante el proceso de generalización. Por ejemplo, en el caso del concepto rectángulo, se mostraron cuatro ejemplos todos con ángulos de 90º, lados opuestos iguales y paralelos. Entonces, los alumnos generalizaron y concluyeron que todos los rectángulos tienen esas características. Muchos conceptos, tales como latitud, longitud y rectángulo, tienen características bien definidas. Existen otros, como democracia o liberal, los cuales son menos precisos. Por ejemplo existen democracias más "democráticas" que otras.

Para conceptos como éste es mucho más difícil especificar las características y algunos investigadores creen que están mejor representados como prototipo, es decir, un caso que sea una buena ilustración del concepto en lugar de tratar de especificar características. En este sentido los alumnos generalizan a partir del prototipo en la construcción del concepto.

Conceptos, facilidad para aprenderlos:
La facilidad para aprender un concepto depende del número de características así como hasta qué punto son éstas tangibles. El concepto de rectángulo es fácil de aprender, porque sólo tiene tres rasgos esenciales, todos concretos y observables. Democracia, por el contrario, es mucho más difícil debido a la complejidad de sus características.

Estas diferencias se reflejan en el currículum escolar. Formas tales como el rectángulo se enseñan en jardín de infantes, mientras que democracia no aparece hasta el nivel intermedio o avanzado. Además, si en la calle se le pide a la gente que diga qué es la democracia, pocos podrán dar más que nociones vagas, lo que demuestra lo difíciles de aprender que son ciertos conceptos.

Análisis del concepto, clarificación del significado:
Los alumnos no comprenden conceptos aislados, en realidad, su comprensión conecta el concepto con otros relacionados. El análisis de éstos es un instrumento útil para ayudar a desarrollar estas conexiones. El análisis del concepto es el proceso de escribir un concepto en términos de sus características, conceptos relacionados, ejemplos y definiciones. En la siguiente tabla se ilustra el análisis del concepto adverbio.

Tabla 1. Análisis del concepto de adverbio

Definición	Una parte del discurso que modifica verbos, adjetivos u otros verbos.
Características	Modifica verbos Modifica adverbios Modifica adjetivos
Ejemplos	Susana se levanto rápidamente. Nelly reveló sus sentimientos muy francamente. David, un levantador de pesas, es increíblemente fuerte.
Concepto supraordenado	Parte del discurso, modificador
Concepto subordinado	Adverbio que modifica a otro adverbio
Concepto coordinado	Adjetivo

A partir de la tabal anterior, vemos que el análisis del concepto incluye una definición, que es una enunciación que incluye, a su vez, un concepto supraordenado, que es una categoría mayor en la que encaja el concepto y sus características. La definición ayuda a conectarlo con una clase mayor de la cual es miembro. Un análisis de éste también incluye conceptos subordinados, que son subconjuntos o ejemplos del mismo, y conceptos coordinados, que son otros miembros de una categoría mayor.

Ejemplos la clave para el aprendizaje del concepto:
Ya sean conceptos especificados por sus características o por prototipos, la clave para el aprendizaje del concepto es un grupo de ejemplos cuidadosamente seleccionados, que son cosas que ilustran el concepto, conjuntamente con una definición. En los casos en que éste puede confundirse con otro concepto muy relacionado, son necesarios los ejemplos positivos y negativos. Entre otros en el aprendizaje del concepto insecto, los docentes deberían incluir a las arañas entre los ejemplos, las cuales son arácnidos, para que los alumnos concluyan que las arañas pertenecen a otra clase de seres vivos. Si se les señalan las diferencias entre los dos, como que las arañas tienen ocho patas en lugar de seis como tienen los insectos, es menos probable que los alumnos los confundan.

Utilizar el análisis del concepto pude ser útil par pensar ejemplos: vemos que los ejemplos subordinados proveen los positivos y los ejemplos coordinados nos ayudan a seleccionar los negativos. Como el caso, del concepto de insecto, podrían ser ejemplos positivos –conceptos subordinados- los escarabajos, las mariposas, las hormigas y otros, mientras que los ejemplos negativos –conceptos coordinados- podrían ser las arañas.

La calidad de los ejemplos. Para que la enseñanza sea más eficaz, los docentes deben de usar los mejores ejemplos posibles. ¿Qué es lo que hace bueno a un ejemplo? En el caso del aprendizaje de un concepto, los mejores ejemplos son aquellos donde son observables las características del concepto. Por ejemplo al enseñar el concepto de mamífero de debemos de usar ejemplos que ayuden a los alumnos a aprender que los mamíferos tienen piel, que tienen sangre caliente y que dan a luz a sus crías. Aunque este criterio es el ideal, el que nosotros siempre tratamos de sostener, los docentes deberían hacer concesiones en algunos casos del mundo real.

Relaciones entre los conceptos: principios, generalizaciones y reglas académicas

Hemos dicho que los conceptos son categorías con características comunes. Cuando encontramos un objeto, un hecho o una idea que se ajusta a la categoría, la incluimos en ella. Esto nos ayuda a simplificar nuestras experiencias y nos permite recordar las categorías en general, en lugar de cada uno de los ejemplos específicos. El mundo sería muy desconcertante si tuviéramos que tratar de identificar y comprender cada insecto en particular entre los billones que existen, en lugar de comprender las clases en general. Algunos aspectos prácticos de nuestra vida, como el control de los insectos dañinos, sería literalmente imposible.

También dijimos que formamos conceptos mediante el proceso de generalización. Vemos que entre las características de los ejemplos específicos hay patrones y generalizamos de acuerdo con ellos. Sin embargo, se puede generalizar aún más. Los conceptos individuales pueden estar conectados entre ellos mediante el proceso de encontrar patrones más amplios que los que rigen sobre los conceptos en sí mismos.

Estos patrones más amplios son los principios, generalizaciones y reglas académicas. Cada uno de ellas es una relación entre dos o más conceptos, como vimos en la figura (Figura 1).

Principios: relaciones aceptadas como verdaderas

Los principios son relaciones entre conceptos aceptados como válidas o verdaderas para todos los casos conocidos. Los términos principios y leyes a menudo se utilizan indistintamente. Por ejemplo, el término ley puede ser utilizado en clase al decir la siguiente afirmación: “Cuando la presión es constante, un aumento en la temperatura resulta en un aumento en el volumen”, es un principio, el cual describe la relación entre el concepto temperatura y el concepto volumen y nosotros lo aceptamos como verdadero.

Los siguientes son otros ejemplos de principios:

- Cuanto mayor es la fuerza no contrapesada sobre un objeto, mayor es su aceleración.
- Los polos magnéticos iguales se rechazan y los polos distintos se atraen.
- El cambio es inevitable.

Los principios son una parte importante del currículum escolar, particularmente en las ciencias. Gran parte del contenido de materias como Química y Física son un estudio de los principios y sus aplicaciones.

Generalizaciones: relaciones con excepciones

Sin embargo, muchos de los patrones que observamos en el mundo tienen obvias excepciones y las generalizaciones son las relaciones entre conceptos que describen patrones que tienen excepciones. Por ejemplo, observemos las siguientes afirmaciones:

- Las personas inmigran por razones económicas.
- Una dieta con altos niveles de grasa saturada eleva los niveles de colesterol de una persona.
- Los docentes elevan los logros de sus alumnos preguntando a todos equitativamente.

Como con los principios, cada afirmación describe la relación entre dos conceptos, pero a diferencia de los principios, las generalizaciones tienen obvias excepciones. Verbigracia, las personas también inmigran por razones religiosas o politicas, para algunas personas afortunadas las dietas con altos niveles de grasas saturadas no tiene efectos sobre su colesterol y los alumnos muy motivados alcanzan los objetivos sean convocados o no a participar en la clase.

Gran parte del conocimiento acerca de la conducta humana en general, de la enseñanza y el aprendizaje, específicamente, se construyen en forma de generalizaciones. Lo mismo sucede con la mayoría de la información relacionada con la salud que encontramos en los medios. Así como, el famoso estudio que sugiere que una aspirina al día en promedio, ayuda a reducir el riesgo de ataque al corazón, es en el mejor de los casos, una tosca generalización, del mismo modo, la creencia de que la vitamina c previene los resfriados podría no ser valida.

La importancia de comprender la diferencia entre principios y generalizaciones ayuda a los alumnos a pensar a cerca de la validez de las diferentes afirmaciones. La validez de las explicaciones y las predicciones dependen basadas en las generalizaciones depende de la validez de las generalizaciones mismas. La validez de realizar y evaluar estas conclusiones son habilidades básicas de pensamiento crítico.

Reglas académicas: relaciones derivadas arbitrariamente por el género humano

Consideremos las siguientes afirmaciones:

- El pronombre debe de concordar con su antecedente en género y número.
- Al redondear un número, si el último digito es un número mayor o igual que 5, se redondea hacia arriba, si es cuatro o menos, se redondea hacia abajo.
- En el idioma Inglés, el adjetivo predice al sustantivo

Cada una de las afirmaciones es una regla académica, que se relaciona entre conceptos derivada arbitrariamente por las personas. Por ejemplo, tanto en francés como en español, los adjetivos siguen a los sustantivos que modifican, lo que demuestra la naturaleza arbitraria de la norma. En el caso del redondeo, seria igualmente valido redondear hacia arriba si el ultimo digito fuera 6 o mas, pero fue arbitrariamente fijado en 5.

Aunque arbitrarias, las normas son importantes para la coherencia, particularmente en la comunicación. Por ejemplo, si no hubiéramos tenido una norma para comunicar coherentemente los posesivos en plural y en singular, nuestra escritura sería muy confusa y la comunicación difícil.

Ejemplos y aplicaciones:
Al igual que con los conceptos, los alumnos “construyen” su comprensión de los principios, generalizaciones y reglas académicas trabajando con ejemplos. El rol del docente es proporcionar los mejores ejemplos posibles y guiar a los alumnos en la medida en que intentan construir significado a partir de estos. En el caso de los principios, generalizaciones y reglas, es un buen ejemplo aquel en que la relación es observable. Una vez analizado el contenido enseñado con el modelo inductivo, pasamos a discutir a cerca de la planificación y la implementación de las clases en las que se ha decidido utilizar el modelo.

2.1.2 Planificar clases con el modelo inductivo

El proceso de planificación para usar el modelo inductivo es sencillo y conlleva tres pasos esenciales, como podemos ver en la figura (Figura 2).

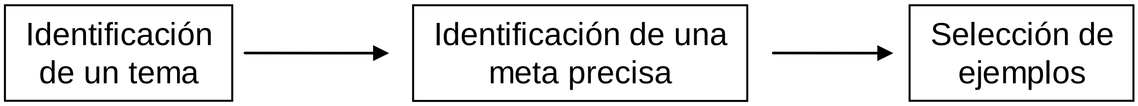


Figura 2. Planificación según el modelo inductivo

El proceso de planificación puede tener numerosos puntos de partida, uno de los cuales es la identificación del contenido a enseñar. Este es un punto de partida práctico e inteligente. Los temas pueden extraerse de libros de textos, guías curriculares, o cualquier otra fuente, incluyendo a los docentes mismos. Cuando los temas son conceptos, principios, generalizaciones o normas, el modelo inductivo puede utilizarse eficazmente.

Especificar metas

Metas de contenido:
Una vez identificado el tema, debemos decidir exactamente que queremos que los alumnos sepan de él. Esto significa explicitar nuestros objetivos hasta el punto de poder identificar qué queremos que nuestros alumnos sean capaces de decir o de hacer. Los docentes eficaces tienen en mente metas muy claras y enseñan directamente en ese sentido.

La claridad conceptual permite mantener la clase en foco mientras se desarrolla. Los docentes que recién comienzan, a menudo especifican por escrito las metas, mientras que los que tienen más experiencia lo hacen menos a menudo, en lugar de eso confían en sus experiencias pasadas y en sus procesos de pensamiento.

Las metas claras -se les ponga por escrito o no- son cruciales por que proporcionan el marco teórico para el pensamiento del docente mientras guía las “construcciones” que los alumnos elaboran sobre el tema. Si las metas del docente no son claras, no sabrán que preguntas hacer, sus respuestas a las preguntas de los alumnos serán vagas y estarán poco capacitados para promover la colaboración de los alumnos. Así mismo, esta claridad guía a los docentes en la elección de ejemplos. Si las metas no son claras, el docente no sabe que está tratando de ilustrar y se reducen las posibilidades de elegir los ejemplos óptimos.

La experiencia en el trabajo con los docentes indica que su eficacia para preguntar está estrechamente relacionada con la claridad de sus metas. Cuando se les pregunta a docentes cuyas clases han sido vagas e inciertas a qué querían llegar, generalmente tienen dificultades en escribir sus metas con claridad. Los docentes deben de ser muy precisos con respecto a sus metas, para guiar con eficacia el pensamiento de sus alumnos.

Desarrollo del pensamiento de nivel superior y del pensamiento crítico

La segunda parte de la especificación de metas es levemente diferente de la primera. Mientras los objetivos de contenido se centran en resultados como identificar las relaciones entre las características de un animal y su habitad o entre la inmigración de la economía, el pensamiento crítico y el de nivel superior se centra en el proceso de encontrar patrones, construir explicaciones, formular hipótesis, generalizar y documentar cada una de estas conclusiones con evidencias. La planificación para el pensamiento significa que los docentes se proponen concientemente que los alumnos observen, comparen, busquen patrones, generalicen, predigan y expliquen mientras "construyen" activamente su comprensión del tema. La enseñanza para el desarrollo del pensamiento no cambia las metas del contenido, en lugar de eso cambia la manera en que el docente y los alumnos operan a medida que se acercan a ellas.

El aprendizaje es una consecuencia del pensamiento (Eggen, 2001), quiere decir que los objetivos de contenidos y los objetivos del desarrollo del pensamiento están densamente entrelazados. Los alumnos emplearan automáticamente los procesos de pensamiento, ya que están comprometidos en construir una comprensión profunda del tema que están estudiando. El docente los ayuda a hacer ese uso conciente y sistemático.

Seleccionar ejemplos

El tercer paso en el proceso de planificación es la selección de los ejemplos. Una vez que los docentes saben exactamente qué es lo que quieren que los alumnos hagan o digan, deben encontrar ejemplos que los ilustren. De la discusión anterior sabemos que, idealmente, los ejemplos reúnen características observables, si se trata de principios, generalizaciones o normas. La selección de un ejemplo puede ser tan simple como dibujar sobre una pelota de playa o tan exigente como crear una simulación compleja y una dramatización para ilustrar el concepto de discriminación o ausencia de un familiar. Nunca resulta exagerado dotar de fundamental importancia a los buenos ejemplos. Veamos brevemente las diferentes formas de ejemplificar.

Realia

Realia no es más que un sustituto para "lo real". Esta es la forma más importante de ejemplo y debe de usarse siempre que sea posible. Un ejemplo ideal de artrópodo sería una langosta viva comprada en la pescadería. Los estudiantes podrían ver y tocar al animal, sentir su cascarón duro y frío y observar por si mismos las patas unidas y el cuerpo en tres partes. Las características esenciales del concepto estarían ilustradas en este ejemplo.

Las demostraciones y las actividades "tangibles" son otra forma de mostrar lo real. Poner globos inflados con aire en tres condiciones diferentes pueden permitir que los alumnos observen la relación entre la temperatura y el volumen. Cuando los alumnos conectan dos cables a una pila y hacen que se encienda una lamparita están viendo un circuito completo real, y no una simulación, un modelo, una dramatización u otro método de indirecto para ilustrar el concepto.

Imágenes

Cuando traer cosas reales es imposible, las imágenes son a menudo un recurso aceptable. Como cuando no podemos traer a la clase montañas jóvenes y montañas antiguas y es difícil ir hacia donde se pueden observar directamente, fotos de las Montañas Rocallosas y de los Apalaches serían recursos apropiados para ilustrar estos conceptos. La clave es acercarse lo más posible a la realidad. Las diapositivas y las fotografías en color son mejores que las de blanco y negro, las que, sin embargo son más eficaces que los dibujos.

Modelos

Hay contenidos -particularmente en ciencias- que no es posible observar directamente. En estos casos los modelos que posibilitan la visualización de lo que no podemos observar directamente, son eficaces. Por ejemplo hacer un modelo del movimiento de las moléculas en el espacio bajo tres temperaturas diferentes, facilita lo que no es posible observar de otra forma.

Como otro modelo, se puede ilustrar el modelo de una molécula de agua. Aunque obviamente, no es la realidad, ilustra las características reconocidas de la molécula de agua: un átomo (el oxígeno) es mayor que los otros dos (Los hidrógenos), ambos están a la misma distancia del oxígeno. De lo anterior concluimos que, aunque los modelos no ilustran la realidad, pueden ayudarnos a identificar características esenciales de ella.

Estudio de casos

Los estudios de casos, particularmente mini estudios de casos, pueden ser herramientas poderosas para ilustrar temas que son difíciles de mostrar de otra forma, por ejemplo consideremos el siguiente texto:

> El sueño de Mary se había vuelto realidad. John, un niño con el que ella quería salir, le había propuesto ir al cine. Sin embargo, cuando pensó acerca de sus tareas escolares para esa noche, recordó que tenía una prueba el viernes. Había estado posponiendo el estudio hasta el último momento y ahora no sabia que hacer.
>
> John sabía que si le copiaba a Hill pasaría el examen; pero también sabia que si lo encontraban copiando lo suspenderían.
>
> Aunque Mary odiaba dejar a los amigos de su pueblo natal, a su familia e incluso su cuarto, en el que había vivido desde niña, quería ir a la universidad de Boston, a 500 millas de distancia.

En las tres anécdotas anteriores, el personaje se enfrenta con alternativas antagónicas. El estudio de casos breve ilustra el concepto de conflicto interno.

Podemos ver qué difícil es describir el concepto, y una descripción como: “estar en pugna, en oposición o en conflicto con uno mismo” no clarifica mucho el concepto para el alumno. Estas tramas breves sin embargo, dan una visión clara de las características del concepto. La habilidad para desarrollar estudios de casos puede ayudar a los docentes a comunicar a sus alumnos conceptos difíciles. El estudio de casos es una herramienta poderosa en áreas como Estudios Sociales o Literatura, en las que ha menudo es difícil encontrar otras formas para ilustrar los temas.

Simulación y dramatización

La simulación y la dramatización son otras formas de simplificación que se usan cuando los conceptos resultan difíciles de ilustrar. Como a menudo los encontramos juntos, discutiremos acerca de ellos al mismo tiempo. Por ejemplo, en una clase de Estudios Sociales una forma de discriminación. Los alumnos han escuchado mucho acerca de eso y muchos tienen experiencia directa. Una situación en la que se discrimine a algunos miembros de la clase por su color de ojos o de pelos, altura u otras características arbitrarias proporciona la ilustración eficaz de un concepto importante.

Docentes de Estudios Sociales también han usado simulaciones para ilustrar nuestro sistema jurídico, la manera en que los proyectos de ley se vuelven leyes y el trabajo monótono en las líneas de montaje en las fábricas

Se da tanto énfasis en la discusión de las diferentes formas de ejemplos porque son cruciales en el aprendizaje de conceptos, principios y generalizaciones. Sin ejemplos, a menudo el aprendizaje se reduce a la mera memorización (Eggen, 2001).

La calidad de los ejemplos: enseñar a estudiantes en riesgo

Hemos escuchado hablar mucho acerca de estudiantes en riesgo: estudiantes en peligro de no alcanzar una educación que reúna las habilidades necesarias para sobrevivir en una sociedad moderna. Los estudiantes en riesgo se caracterizan por tener altos niveles de deserción, bajos logros y baja autoestima. A menudo están privados de experiencias; es decir, que carecen de las experiencias de las que gozan otros alumnos más aventajados. Por ejemplo, en la sección anterior, nos referimos a montañas jóvenes y antiguas. Los estudiantes que provienen de un medio aventajado tal vez hayan viajado a las Montañas Rocallosas o a los Apalaches; por lo tanto, una referencia verbal sería significativa. Contrariamente, para un alumno sin esas experiencias, una simple descripción verbal carecería de significado.

Una buena manera para dar espacio a esas diferencias es proporcionar la experiencia que los estudiantes necesitan; ésta es la razón por la cual la calidad de los ejemplos es tan importante. Si los ejemplos son lo suficientemente buenos, toda la información que el estudiante necesita para comprender el tema estará contenida en él. En esencia, el ejemplo se vuelve la experiencia del alumno en el caso de un estudiante en desventaja. En realidad, los ejemplos de alta calidad no eliminaran las diferencias de medios entre los alumnos aventajados y los desaventajados, pero utilizarlos es un paso importante para ayudar a reducir el vació. Para otros estudiantes, ejemplos excelentes hacen que su comprensión sea más rica y significativa. Es lo más cercano a una situación en la que todos ganan.

2.1.3 Implementar clases utilizando el modelo inductivo

Cuando hemos elegido el tema, especificado cuidadosamente los objetivos y seleccionando o creando los ejemplos, estamos listos para entrar al aula con los alumnos y comenzar la clase. La implementación de una clase usando el modelo inductivo combina cinco etapas interrelacionadas. Están ilustradas en la siguiente figura 3

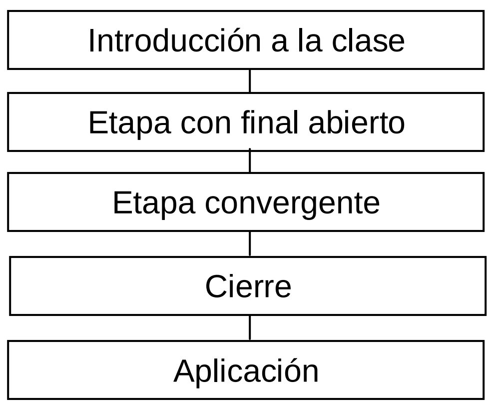


Figura 3. Pasos para la implementación de las clases de modelo inductivo.

Etapa 1: introducción

Durante la introducción a la clase, el docente les dice a los alumnos que va a presentarles algunos ejemplos y que su tarea es buscar patrones y diferencias entre ellos. El docente puede introducir la clase de diferentes maneras. Puede usarse una simple oración como “Hoy voy a mostrarles algunos ejemplos. Quiero que sean muy buenos observadores y traten de ver qué tipo de patrón existe en ellos”.

Etapa 2: final abierto

Durante la etapa de final abierto los alumnos comienzan realmente el proceso de construir significado a partir de los ejemplos presentados. El docente comienza esta etapa presentando ejemplos a los alumnos y pidiéndoles que los observen, describan y comparen. Los docentes tienen varias posibilidades:

- Pueden presentar un ejemplo y pedir que se observe y describa.
- Pueden presentar dos o más ejemplos y preguntar a los estudiantes qué tienen en común (búsqueda de patrones).
- Se puede presentar un ejemplo y un contraejemplo y pedir a los estudiantes que los comparen.
- Según la actividad, los docentes pueden incluso comenzar con un ejemplo negativo y hacer que los estudiantes lo describan.

Cualquiera que sea la opción que el docente elija, los alumnos comienzan su análisis respondiendo a preguntas con final abierto, preguntas que simplemente piden descripciones o comparaciones (contrastaciones), y como resultado obtendrán varias respuestas aceptables.

Las preguntas de final abierto tienen muchas ventajas frente a las típicas preguntas convergentes (preguntas que tienen una sola repuesta correcta):

- Son fáciles de construir y de hacer a los alumnos. Los docentes pueden pedirles que describan o comparen y luego usar las respuestas de los estudiantes como base para otras preguntas. Por esa razón preguntar se vuelve menos laborioso para los docentes.
- Son “seguras” porque son aceptables una gran variedad de respuestas. Así, los alumnos más tímidos o más reacios no temerán equivocarse. Por esta razón son excelentes para motivar la participación y promover un clima de apoyo en la clase.
- Como las preguntas pueden hacerse y responderse rápidamente, es fácil llamar a diferentes alumnos en un periodo corto de tiempo. Por eso se logra un mayor compromiso de los alumnos y una distribución más equitativa de la participación. La investigación dice que el aumento del número de preguntas en la clase está relacionada con un incremento de los logros del desempeño.
- Las preguntas dan un ritmo activo a la clase, lo que aumenta la atención de los alumnos.
- Se ha probado que las preguntas de final abierto son eficientes con alumnos de minorías culturales o con recursos limitados en el uso del idioma, por que brindan oportunidades seguras para que esos estudiantes demuestren lo que saben.
- Las preguntas de final abierto permiten que el docente diagnostique los conocimientos previos de los alumnos. Lo que los alumnos “observen” en los ejemplos reflejara tanto su percepción inmediata como sus conocimientos previos.

El último punto es especialmente importante. Como dijimos con anterioridad, los alumnos “construyen” una nueva comprensión basada en sus conocimientos previos, por eso diagnosticar el nivel actual de comprensión es importante. Hacer preguntas de final abierto es un modo eficaz de obtener esta información.

Aprender a mantener un final abierto requiere de cierto acomodamiento al principio. Los docentes están generalmente preocupados por el tiempo y el ritmo de la clase y tienden a ser muy directivos, tratando de extraer la idea casi inmediatamente. Para aumentar la participación de los estudiantes y darles tiempo para pensar, lo ideal es “aflojar” un poquito y sostener el final abierto por un periodo de tiempo algo mayor.

No hay una regla que sugiera un número ideal de preguntas de final abierto. Con la práctica, los docentes se ponen más cómodos con el proceso y usan su juicio profesional para decidir en qué momento terminar. Es importante aquí monitorear la conducta de los alumnos. Si parecen estar ansioso por continuar describiendo o comparando los ejemplos, el docente puede seguir un poco más; si parecen estar cansados y ansioso por terminar, el docente debe de pasar a otra cosa más rápidamente. Entonces comienza la etapa 3.

Etapa 3; convergencia.

La etapa con final abierto se caracteriza por las observaciones, descripciones y comparaciones; todas la respuestas son virtualmente aceptables. A la vez, existe un objetivo especifico de contenido, y la clase debe de progresar hacia la caracterización explicita de un concepto o hacia el enunciado de una relación con principio, generalización o norma. Para alcanzar ese objetivo, el docente reduce el espectro de respuestas de los alumnos y los lleva a identificar verbalmente la relación o las características. Se llama “Etapa convergente” porque el procesamiento de la información que hacen los alumnos resulta o converge en una respuesta especifica.

La etapa de final abierto fluye naturalmente hacia la etapa convergente, a menudo la línea divisoria entre ambas no está claramente definida. No hay que preocuparse si esta separación no es evidente durante la actividad.

Etapa 4; cierre

El cierre es el punto en el cual los estudiantes identifican el concepto por sus características o pueden establecer el principio, la generalización o la regla.

Si bien la enunciación de un cierre formal generalmente es importante y contribuye a que los alumnos comprendan claramente la clase, existen algunas excepciones. Por ejemplo, supongamos que el concepto “arriba” está siendo enseñado en un grupo de niños pequeños. Se le puede definir como “una posición espacial en la que un objeto está en una altura mayor que otro”. Obviamente, los alumnos pequeños no podrán generar un enunciado como ese, ni siquiera con considerable apuntalamiento. En este caso, el docente pasara directamente a la etapa de aplicación, en lugar de enunciar un enunciado de cierre.

La etapa 4 también proporciona oportunidades para ayudar a los alumnos a desarrollar habilidades de pensamiento para reconocer información irrelevante. Por ejemplo, en el caso de las proposiciones explicativas se puede guiar a los alumnos, se puede guiar a los alumnos para que noten que el pronombre que está al comienzo de la proposición no es relevante, puesto que en cada ejemplo la proposición comienza con diferentes pronombres. Con cualquier tema es fácil establecer los ejemplos de información no esencial, que a su vez preparan a los alumnos para el desarrollo de habilidades de pensamiento importantes.

Etapa 5; aplicación

Si bien la capacidad para enunciar la definición de un concepto o describir un principio, generalización o regla refleja comprensión en un nivel, los estudiantes deben de poder aplicarlo en el “mundo real” para que el tema se vuelva significativo. La etapa de aplicación típica incluye trabajo para hacer en el aula o tareas para hacer en casa. Sin embargo, a pesar de haber hecho un desarrollo cuidadoso del objetivo de contenido, la aplicación aún requiere una transición, que a menudo necesita de mayor ayuda del docente.

El proceso de monitorear cuidadosamente los esfuerzos iniciales de los alumnos en la aplicación y luego discutirlos ayuda a consolidar las ideas en las mentes de de éstos, hace que el tema sea más significativo para ellos y contribuye a llenar el vacío entre el aprendizaje conducido por el docente y la práctica independiente.

Cuando el docente está satisfecho y seguro de que la mayoría de sus alumnos pueden utilizar cómoda e individualmente la información, puede poner una tarea que requiera aplicación. Mientras la mayoría de los alumnos trabajan independientemente, puede ayudar a los que no han comprendido la idea íntegramente o a los que todavía no están listos para trabajar por sí mismos.

La etapa de aplicación es más eficaz cuando se pide a los alumnos que apliquen su conocimiento en un contexto realista. La etapa de aplicación también implica ayudar a los alumnos a unir el nuevo aprendizaje con la comprensión previa.

2.1.4 El modelo inductivo: Énfasis en el desarrollo del pensamiento

Llegados a este punto en el estudio de las etapas del modelo, hemos visto que el foco explicito estaba puesto en los objetivos de contenido. La planificación comenzó con temas de contenido, se identificaron objetivos específicos y se crearon ejemplos que ilustraban los temas.

Como vimos en nuestra discusión acerca de la planificación para usar el modelo inductivo, los objetivos de desarrollo del pensamiento no son un resultado en el mismo sentido que los objetivos de contenido; más bien, son procesos de los cuales el alumno participa en la medida en que se acercan al objetivo de contenido. Los docentes promueven el pensamiento de los alumnos de las siguientes maneras:

- Deben de enfatizar las comparaciones y contrastes. Ésta es una de las habilidades de pensamiento más importantes y fundamental.

- Se requiere que los alumnos encuentren patrones y generalizaciones.
- Se requiere que los alumnos apliquen sus conocimientos recientes en situaciones realistas.

Éstas son todas habilidades de pensamiento importantes, cuyo desarrollo es inherente a la estructura del modelo inductivo.

Aprender a reconocer la oportunidad de hacer preguntas del tipo “¿Cómo lo sabes?”, “¿Por qué?”, “¿Qué pasaría si?” requiere de práctica. Con un esfuerzo, los docentes desarrollan la tendencia de hacer estas preguntas y se vuelve paulatinamente más fácil reconocer las oportunidades para hacerlas. El resultado es lograr, con muy poco tiempo más de clase, un nivel mucho más alto de pensamiento por parte del alumno.

2.2 Visualización

La visualización constituye un tema general con implicaciones de diversos aspectos de nuestras vidas. Posee una importancia determinante para las matemáticas en su conjunto y esto ha sido así en el curso de la historia. Los matemáticos consiguieron un gran avance con la invención de los numerales, que son representaciones visuales de los números. Sin lugar a dudas, uno de los principales logros matemáticos de los últimos siglos fue el desarrollo de la geometría analítica, que nos permitió combinar el pensamiento matemático visual con el formal.

Obviamente, la visualización es de suma importancia en el estudio de la forma. Pero también es importante en el estudio de las matemáticas en su conjunto. Para estudiar el cambio es fundamental que lo veamos; para estudiar datos analizamos varias representaciones gráficas. Se intenta entender el concepto de dimensión superior al trazar diagramas y hacer modelos. Incluso es posible arrojar luz sobre las propiedades de los números por medio de la representación visual, para eso es la recta numérica. Pero es tan falso que sepamos cómo “ver” instintivamente, como la supuesta capacidad instintiva para nadar. La visualización es una herramienta que debe de cultivarse para su uso cuidadoso e inteligente (Steen 2001).

Steen relata una historia en al que ilustra la diferencia entre tener la herramienta de la visualización y no tenerla, la historia es acerca del descubrimiento de las montañas y los cráteres de la Luna realizada por Galileo. Un descubrimiento que ayudó a cambiar para siempre la manera en que vemos el universo y el lugar que ocupamos en él. “De acuerdo con Aristóteles, los europeos de la Edad Media y del renacimiento creían que la Luna era una esfera perfecta, la forma prototípica no sólo de los planetas y las estrellas visibles sino del universo entero”, explica el historiador del arte Samuel Edgerton.

Por lo tanto, el problema no era determinar la forma, la cual todos aceptaban, sino explicar la apariencia jaspeada de su superficie, ese “extraño manchamiento”, Algunas autoridades de la antigüedad habían explicado las manchas arguyendo que la superficie lunar era como un gigantesco espejo que reflejaba las tierras y los mares de nuestro planeta. Otros habían afirmado que la Luna estaba compuesta por una substancia transparente con algunas materias internas más densas que emitían cantidades variables de luz.

Galileo encontró otra explicación:
He sido llevado a la opinión y a la convicción de que la superficie de la Luna no es lisa, uniforme y exactamente esférica como gran número de filósofos creen que es (así como los demás cuerpos celestes), sino que es accidentada, escabrosa y llena de cavidades y prominencias, no siendo diferente a la cara de la Tierra, puesta en relieve por cadenas montañosas y profundos valles.

Thomas Harriot era un astrónomo inglés que también había estado observando la superficie lunar a través de un telescopio al mismo tiempo que Galileo hizo sus descubrimientos. Sin embargo, los diagramas de Harriot muestran que el “extraño manchamiento” para el no eran montañas y valles.

Steen se pregunta y discierne sobre ¿cómo pudo ocurrir que Harriot y Galileo, al observar el mismo objeto a través de telescopios comparables, no “vieran” lo mismo? Cierto, Galileo fue uno de los genios más grandes, pero este hecho por sí solo no resulta muy iluminador. Edgerton sugiere una razón más persuasiva: Galileo era un artista preparado, capacitado en el uso de la perspectiva y el claroscuro, el producto de la luz y la sombra. Por tanto, “Galileo tenia de hecho el marco teórico correcto para resolver el enigma del ‘extraño manchamiento’ de la Luna. A diferencia de Harriot, Galileo llevó a su telescopio una ‘participación del espectador’ especial, es decir, una visión educada para ‘ver’ la esfera no lisa de la Luna iluminada por la escudriñarte luz solar.”

Los descubrimientos telescópicos de Galileo abrieron los ojos de los europeos en todas partes, y como indican las notas de Harriot, hasta él ‘vio’ cráteres sombreados una vez que estuvo al tanto de las observaciones de Galileo.

Hoy en día todos vemos montañas y valles cuando observamos la Luna. Pero ¿los veríamos si no supiéramos de antemano lo que se supone debemos ver? Y, ¿qué “vemos” cuando miramos las imágenes que nos presenta la tecnología moderna? La “participación del espectador” educada resulta tan esencial en la actualidad como lo fue en la época de Galileo. Sea el objeto un virus visto a través de un microscopio electrónico, una distante galaxia explorada por radiotelescopio o un feto observado en la matriz por medio de ultrasonido, es necesario hacer supuestos teóricos antes de que sea posible traducir los datos brutos a una imagen (Steen 2001).

Capítulo 3 Implementación de la propuesta didáctica y resultados

3.1 Propuesta de diseño del ambiente de aprendizaje

El propósito del presente estudio es explorar en que medida la implementación de un ambiente de aprendizaje para la construcción de cónicas, bajo los supuestos de Eggen (2006), Mercado (2004) y Salinas (2008), favorece que los alumnos logren alcanzar un aprendizaje que les permita vincular los dibujos con las propiedades geométricas que representan.

En las siguientes líneas se describirá la población sujeta a la práctica docente, las situaciones didácticas, cuáles actividades fueron objeto de evaluación y una breve descripción del papel del profesor por cada situación didáctica.

Población

La implementación del ambiente de aprendizaje se puso en práctica con un grupo de estudiantes de quinto año de bachillerato, de la Escuela Nacional Preparatoria, plantel 7 Ezequiel A. Chávez, turno matutino. La implementación se llevo a cabo del 13 al 20 de abril del 2009, la puesta en práctica abarco cuatro sesiones, distribuidas en dicho periodo de la siguiente forma:

1ª sesión lunes 13 de abril de 7:50 a 8:40, duración 50 min.
2ª sesión martes 14 de abril de 11:10 a 12:50, duración 100 min.
3ª sesión jueves 16 de abril de 11:10 a 12:50, duración 100 min.
4ª sesión lunes 20 de abril de 7:50 a 8:40, duración 50 min.

El grupo en el cual se puso en práctica el ambiente de aprendizaje es un grupo que se encuentra cursando la materia de Matemáticas V, la cual se ubica en el mapa curricular de la Escuela Nacional Preparatoria en el quinto año del bachillerato, es una materia obligatoria del núcleo Básico con carácter teórico y forma parte del área de Formación. El tema de elipse e hipérbola corresponden a la décima y onceava unidades respectivamente.

Diseño del ambiente de aprendizaje

Eggen (2006), Mercado (2004) y Salinas (2008) proponen:

En consecuencia a lo anterior, nuestro objetivo es partir de lo que los alumnos saben, que ellos sean los que construyan a partir de ciertas condiciones impuestas, trazar una circunferencia, marcar su centro, marcar un punto dentro de la circunferencia y hacer los dobleces de papel al hacer coincidir el punto marcado dentro de la circunferencia con algunos puntos de la circunferencia, con ello se pretende obtener una imagen no sólo mental, sino en papel. Con lo anterior, también se consigue que la construcción pueda ser vista como resultado de un proceso manual y no solamente como un proceso mental, para de esta forma tratar que la articulación entre la definición de elipse y su representación gráfica se de y sea más natural en los alumnos, es una herramienta que utilizamos para este fin.

El proceso de construcción que se les indica a los estudiantes tiene como finalidad que vayan encontrando las tangentes a las curvas en un caso elipse y en otro hipérbola, pues cada doblez que marcan es una tangente a la curva, que tiene como parámetros los focos, los cuales son el centro de la circunferencia y el punto adicional que tienen que marcar los alumnos, el segundo parámetro es la constante a la que tiene que ser igual la suma de las distancias de los focos a los puntos de la curva, la cuál es el radio de la circunferencia. Lo anterior se verifica como parte de las actividades propuestas.

Con los anteriores objetivos fomentamos un uso procedimental (saber hacer) de las cónicas, pero no basta eso (cuando menos no nos conformamos) como saber educativo, intentamos que el conocimiento también sea factual (de conceptos) por eso proponemos que conozcan su definición matemática.

Con los objetivos antes mencionados lo que se fomenta en los alumnos es un conocimiento procedimental de las cónicas, lo cual nos parece que no es suficiente conocimiento educativo, lo que además se propone con los objetivos anteriores es que el conocimiento que adquieran los alumnos también sea factual, por eso proponemos que conozcan su definición matemática, pero que no sólo la conozcan sino que la interioricen dándose de esa forma la articulación entre la definición matemática y su representación gráfica.

Dicha definición se encuentra en términos discursivos que deben ser traducidas en términos del lenguaje gráfico. Es por ello que es necesario articular un puente entre estas formas de representación del mismo objeto, es decir, se hace necesario el objetivo explícito de que los alumnos articulen la definición de mediatriz, elipse e hipérbola con su representación gráfica.

Los anteriores objetivos se materializan con siete actividades expuestas en la Tabla 1.

3.2 Situaciones didácticas

A continuación se describe en la Tabla los objetivos de cada una de las situaciones didácticas, el tiempo disponible para desarrollarlas y el orden en que fueron realizadas. Para la puesta en práctica nos apoyamos en materiales didácticos distribuidos a los alumnos, en los cuales se les daban las instrucciones y se realizan las preguntas que sentimos pertinentes a los estudiantes, dichos materiales didácticos nos sirven como una guía, y se encuentran en los anexos del presente trabajo.

Tabla 2. Desarrollo de Situaciones Didácticas

Número y Nombre de la actividad	**Tiempo**	**Propósito o contenido**	**Núm. de sesión**
0 Pretest	15 min.	Obtener información de los alumnos acerca de sus conocimientos previos.	1
1 Generación de un óvalo	20 min.	Obtención de elipse con hoja de papel albanene.	1
2 Generación de un par de curvas	Tarea	Obtención de hipérbola con hoja de papel albanene.	De la sesión 1 a la sesión 2.
3 Visualización de una mediatriz	30 min.	Que los alumnos articulen la definición de mediatriz con su representación gráfica.	2
4 ¿Óvalo = Elipse?	30 a 35 min.	Que los alumnos articulen la definición de elipse con su representación gráfica.	3
5 Definición de Hipérbola	35 a 40 min.	Que los alumnos articulen la definición de hipérbola con su representación gráfica.	4
6 Postest y Encuesta de Opinión	20 min	Obtener información de los alumnos, para observar sus avances.	5

Como podemos ver con detalle en la primera actividad del anexo 6 El pretest, tiene dos propósitos, el primero es reconocer los conocimientos previos de uno de los temas a tratar y el segundo es servir como instrumento de evaluación cuyos resultados son contrastados con un postest que se encuentra en el anexo 7 y las preguntas que se hacen en las actividades.

La evaluación

A continuación se describe en la Tabla 2 las actividades que se emplearon como instrumentos de evaluación.

Tabla 3. Diseño de instrumento de evaluación

Número y Nombre de la actividad	Conocimientos a evaluar
0 Pretest	Ver los conocimientos previos de los alumnos con respecto del tema de la mediatriz y ver que grado de articulación de lo discursivo con su representación gráfica tienen.
3 Visualización de una mediatriz	Que los alumnos articulen la definición de mediatriz con su representación gráfica.
4 ¿Óvalo = Elipse?	Que los alumnos articulen la definición de elipse con su representación gráfica.
5 Definición de Hipérbola	Que los alumnos articulen la definición de hipérbola con su representación gráfica.
6 Postest	Ver si los alumnos son capaces de articular lo discursivo con su representación geométrica.

Papel del profesor

A continuación se describe el rol que debe desempeñar principalmente el profesor con los alumnos, por cada actividad. Así como algunas observaciones realizadas durante la implementación de las actividades con respecto a las actitudes y respuestas verbales y corporales, las cuales tuvieron lugar en la interacción del profesor con los alumnos, las cuales no aparecen en las estadísticas que se reportan en la siguiente sección de este capítulo.

Tabla 4. Actividad 1 generación de un óvalo

Contenidos de las actividades	Actividad de los alumnos	Actividad del profesor
1. Se le dan las instrucciones necesarias a los alumnos para poder hacer el doblado de papel, los primeros trazos que debe de hacer en la hoja de papel albanene y con un dibujo al margen se ejemplifica una de las posibles de hacerlo.	Trabajar con su hoja de papel albanene.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.

2. Se le dan las instrucciones necesarias a los alumnos para que con ayuda de los trazos anteriores doblen el papel, y con un par de dibujos se ejemplifica dos posibilidades de hacer el primer doblez.	Trabajar con su hoja de papel albanene.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
3. Se les da un posible ejemplo a los alumnos de la figura que les va a quedar después de hacer repetidas veces el paso anterior.	Trabajar con su hoja de papel albanene.	
4. El profesor dirigiéndose a todos los alumnos, pregunta si existe alguna duda y con ayuda de una hoja con bastantes dobleces la muestra a los alumnos, para esclarecer cualquier posible duda.		El profesor se dirige al grupo entero, y resuelve posibles dudas.

Tabla 5. Actividad 2 generación de un par de curvas

Contenidos de las actividades	**Actividad de los alumnos**	**Actividad del profesor**
1. Se le dan las instrucciones necesarias a los alumnos para poder hacer el doblado de papel, los primeros trazos que debe de hacer en la hoja de papel albanene ,y con un dibujo al margen se ejemplifica una de las posibles de hacerlo.	Trabajar con su hoja de papel albanene.	Puesto que la actividad se dejo de tarea, el profesor no tiene actividad.
2. Se le dan las instrucciones necesarias a los alumnos para que con ayuda de los trazos anteriores doblen el papel, y con tres dibujos se ejemplifica algunas posibilidades de hacer el primer doblez.	Trabajar con su hoja de papel albanene.	Puesto que la actividad se dejo de tarea, el profesor no tiene actividad.
3. Se les da un posible ejemplo a los alumnos de la figura que les va a quedar después de hacer repetidas veces el paso anterior.	Trabajar con su hoja de papel albanene.	Puesto que la actividad se dejo de tarea, el profesor no tiene actividad.
4. El profesor dirigiéndose a todos los alumnos, pregunta si existe alguna duda y con ayuda de una hoja con bastantes dobleces la muestra a los alumnos, para esclarecer cualquier posible duda.		El profesor se dirige al grupo entero, y resuelve posibles dudas. (antes de entregar su tarea).

En la implementación de la actividad 1 y 2 se observaron actitudes y repuestas verbales y corporales, las cuales tuvieron lugar en la interacción del profesor con los alumnos, que no aparecen en las estadísticas que se reportan en la siguiente sección.

En esta ocasión la interacción del profesor y los alumnos en la mayoría de los casos fue para indicar como hacer el doblado de papel, para orientar a los alumnos si ya habían realizado suficientes dobleces como se esperaba, por que algunos alumnos solamente los realizaban de un solo lado de la circunferencia y por lo tanto obtenían una parte del contorno de la figura. Lo que si pudimos observar es la sistematización de algunos de los alumnos al realizar la actividad, por ejemplo al ir tomando puntos cercanos y en un mismo sentido de la circunferencia.

Tabla 6. Actividad 3 visualización de una mediatriz

Contenidos de las actividades	**Actividad de los alumnos**	**Actividad del profesor**
1. Se les dan las instrucciones necesarias a los alumnos para en esta ocasión sólo hagan un doblez en la hoja de papel albanene, y marquen unos puntos en el doblez, y se les proporciona la imagen de una de tantas posibilidades de cómo quede el doblez.	Trabajar con su hoja de papel albanene.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
2. Se les da un hint y un apartado para que respondan que observan con el doblez y los siguientes puntos P_i, P_d, A, B, C, D.	Deben hacer observaciones en su hoja de papel albanene.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
3. En caso de que los estudiantes no hayan encontrado, nada evidente con la sugerencia, se presentan una serie de preguntas induciendo al alumno a que encuentre que los puntos que pertenecen al doblez cumplen con que equidistan a los puntos P_i y P_d.	Deben hacer observaciones en su hoja de papel albanene y responder las preguntas de la actividad.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
4. El profesor dirigiéndose a todos los alumnos pregunta si existen dudas, y explica con ayuda de una de las hojas de papel albanene, por qué las distancias de los puntos que se pintaron sobre el doblez sin importar el punto que sea, el profesor hace evidente que al doblar el papel los		El profesor se dirige al grupo entero resuelve posibles dudas. Y hace evidente para todos los

puntos P_i y P_d se enciman y por lo tanto la distancia de cualquier punto del doblez a P_i y P_d es la misma pues la distancia al estar el papel doblado también se enciman.		alumnos que al doblar la hoja de papel los puntos se enciman al igual que las distancias.
5. Se les proporciona a los alumnos la definición de mediatriz, y se les pregunta si es el doblez una mediatriz y por qué.	Deben de responder a las preguntas.	Cierra la actividad haciendo evidente que el doblez es la mediatriz.

En la implementación de la actividad 3 se observaron actitudes y repuestas verbales y corporales, las cuales tuvieron lugar en la interacción del profesor con los alumnos, que no aparecen en las estadísticas que se reportan en la siguiente sección.

En esta ocasión pudimos percatarnos de que algunos alumnos realizaron las observaciones con respecto al doblez en la actividad 3, pero no decían directamente lo que encontraron si no que lo decían a través de las figuras que ellos observaron que se formaron, por ejemplo algunos alumnos se referían que los triángulos formados por los puntos P_i, P_d y A son isósceles por que los lados de triángulo P_iA y P_dA, son iguales, que es lo que se quería que observaran.

En esta actividad para finalizar se hace evidente frente a todo el grupo que al momento de doblar el papel los puntos P_i y P_d se enciman o coinciden y por lo tanto, la distancia a cualquier punto del doblez también se van a encimar o a coincidir y son iguales.

Tabla 7. Actividad 4 ¿Óvalo = Elipse?

Contenidos de las actividades	**Actividad de los alumnos**	**Actividad del profesor**
1. Se les presenta a los alumnos la definición de elipse como lugar geométrico, y se les muestran puntos importantes de la elipse, así como la propiedad de que la longitud del semieje mayor es la constante que se menciona en la definición de elipse.	Deben de leer la definición y responder las preguntas que se les formulan.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
2. El profesor dirigiéndose a todos los alumnos, pregunta si existen dudas y cómo fue que resolvieron las preguntas, y tomando la idea de alguno de los alumnos en el pizarrón la explica al resto del grupo,		El profesor se dirige al grupo entero. Resuelve posibles dudas.

para que el grupo quede más o menos con el mismo nivel de conocimiento, se les explica haciendo énfasis en la figura y después con un lenguaje simbólico con distancias y operaciones aritméticas.		Hace evidente que la distancia constante que nos define a la elipse es igual a la longitud del semieje mayor.
3. Se le dan las instrucciones a los alumnos para que hagan los trazos auxiliares en la hoja de papel albanene y se les proporcionan tres ejemplos de cómo podrían quedar.	Trabajar con su hoja de papel albanene.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
4. Se les hace la observación a los alumnos; podemos rescribir la distancia del radio de la siguiente forma $d(O,P)+d(P,P_d)=k$ y se les recuerda que como P también pertenece a la mediatriz ocurre lo siguiente $d(P_i,P)=d(P,P_d)$ y se les induce a que con una pregunta para cada uno de los incisos a, b y c que si importa la posición de P_d en la circunferencia para que se cumpla esto $d(O,P)+d(P,P_i)=k$, para tratar de inducir en los alumnos la generalidad en este caso.	Deben hacer observaciones en su hoja de papel albanene y responder las preguntas de la actividad.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
5. En la parte final de la actividad con una serie de preguntas se trata de inducir a los alumnos, a las siguientes conclusiones, que el único punto sobre la mediatriz que cumple $d(O,P)+d(P,P_i)=k$ es P, con base en sus respuestas a las anteriores preguntas, si los puntos P cumplen con la definición de elipse y que identifiquen los focos de la elipse.	Deben hacer observaciones en su hoja de papel albanene y responder las preguntas de la actividad.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
6. El profesor se dirige a todos los alumnos en su conjunto y pregunta si existe alguna duda, y después les pregunta a los alumnos como fue que respondieron y tomando una idea correcta de alguno de los alumnos, el profesor la explica en el pizarrón para el resto de la clase y que de esta forma entienda el grupo en su totalidad.		El profesor se dirige al grupo entero resuelve posibles dudas y Hace evidente que puntos son los que pertenecen a la elipse.

En la implementación de la actividad 4 se observaron actitudes y repuestas verbales y corporales, las cuales tuvieron lugar en la interacción del profesor con los alumnos, que no aparecen en las estadísticas que se reportan en la siguiente sección.

En esta actividad en la primera parte se pide que den los argumentos de porque la distancia de los vértices de la elipse es igual a la distancia constante de la que se habla en la definición de la elipse como lugar geométrico. Para lo cual utilizamos una cuerda como distancia constante fijada con cinta adhesiva a dos puntos fijos y trazamos los puntos que cumplen con lo anterior y de esta forma se trazo la elipse. Después de algunos momentos se explica dirigiéndose al grupo en general, al principio la argumentación que se les proporciono a los alumnos es de una forma discursiva, después de que la mayoría entendido la idea de la argumentación, se procedió a decir lo mismo pero utilizando una terminología más matemática y tratar de esa forma que los alumnos dieran el paso de una argumentación discursiva a una argumentación basada en símbolos como cuando se utiliza el lenguaje matemático. Al término de la exposición una alumna, comento que si no hubiera sido más fácil mostrar quitando la cuerda y estirándola para verificar que en este caso se cumple que la longitud de la cuerda era igual a la distancia entre los vértices de la elipse. Lo que nos indica que los alumnos están más habituados a utilizar argumentos de tipo verificación o visualización.

Tabla 8. Actividad 5 Definición de Hipérbola

Contenidos de las actividades	**Actividad de los alumnos**	**Actividad del profesor**
1. Se les dan las instrucciones necesarias a los alumnos para que en esta ocasión sólo hagan un doblez en la hoja de papel albanene, marquen unos puntos en el doblez, y se les proporciona dos imágenes, un par de tantas posibilidades de cómo quede el doblez.	Trabajar con su hoja de papel albanene.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
2. Se presentan una serie de preguntas induciendo al alumno a que encuentre que los puntos que pertenecen al doblez cumplen con que equidistan a los puntos P_i y P_c.	Deben hacer observaciones en su hoja de papel albanene y responder las preguntas de la actividad.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
3. El profesor dirigiéndose a todos los alumnos pregunta si existen dudas, y explica con ayuda de una de las hojas de papel albanene, por qué las distancias de los puntos que se pintaron sobre el doblez sin importar el punto que sea, el profesor		El profesor se dirige al grupo entero resuelve posibles dudas. Y hace evidente

hace evidente que al doblar el papel los puntos P_i y P_c se enciman y por lo tanto la distancia de cualquier punto del doblez a P_i y P_c es la misma, pues la distancia al estar el papel doblado también se encima.		para todos los alumnos que al doblar la hoja de papel los puntos se enciman al igual que las distancias.
4. Se les pregunta si es el doblez una mediatriz y por qué.	Deben de responder a las preguntas.	El profesor se dirige al grupo entero haciendo evidente que el doblez es la mediatriz.
5. Se les presenta a los alumnos la definición de hipérbola como lugar geométrico, y se les muestran puntos importantes de la hipérbola.	Deben de leer la definición.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
6. Se le dan las instrucciones a los alumnos para que hagan los trazos auxiliares en la hoja de papel albanene y se les proporciona un ejemplo, de cómo podrían quedar.	Trabajar con su hoja de papel albanene.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
7. Se les realizan a los alumnos algunas preguntas para que vayan relacionando los trazos que hicieron con los puntos importantes de la hipérbola, también se les pregunta en que forma pueden rescribir como distancia el radio de la circunferencia.	Deben hacer observaciones en su hoja de papel albanene y responder las preguntas de la actividad.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.
8. El profesor se dirige a todos los alumnos en su conjunto y pregunta si existe alguna duda con respecto al valor absoluto que se menciona en la definición de la hipérbola, a través de ejemplos gráficos y la definición del valor absoluto como función.		El profesor se dirige al grupo entero resuelve posibles dudas. Y hace evidente para todos los alumnos
9. A través de unas preguntas se induce a que los alumnos lleguen a la conclusión de que el contorno que generan los dobleces es una hipérbola.	Deben hacer observaciones en su hoja de papel albanene y responder las preguntas de la actividad.	El profesor resuelve dudas de forma individual o en pequeños grupos.

10. El profesor se dirige a todos los alumnos en su conjunto y pregunta si existe alguna duda, y después les pregunta a los alumnos como fue que respondieron las preguntas y tomando una idea correcta de alguno de los alumnos, el profesor la explica en el pizarrón para el resto de los alumnos y que de esta forma entienda el grupo en su totalidad que, las distancias P_cP es igual a P_iP, que si a P_iP le restas la distancia OP es lo mismo que si se la restas a P_cP, y gráficamente se ve muy evidente que si a P_cP le restas OP, la distancia que te queda es el radio por lo tanto, una constante.		El profesor se dirige al grupo entero resuelve posibles dudas. Y hace evidente para todos los alumnos gráficamente que puntos son los que pertenecen a la hipérbola.

En la implementación de la actividad 5 se observaron actitudes y repuestas verbales y corporales, las cuales tuvieron lugar en la interacción del profesor con los alumnos, que no aparecen en las estadísticas que se reportan en la siguiente sección.

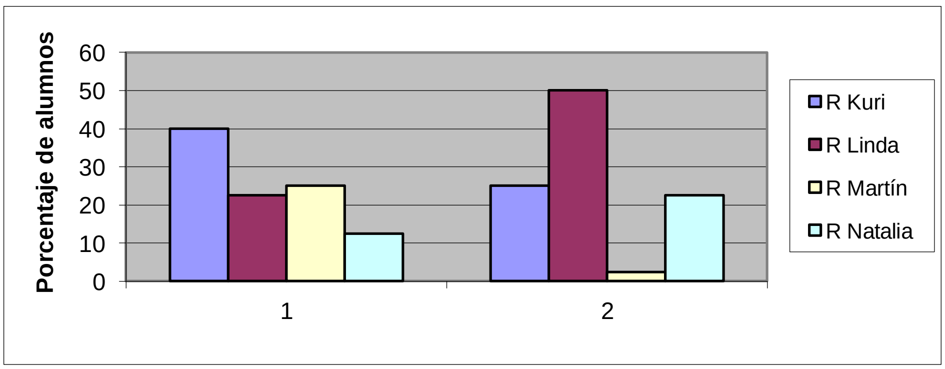
Un ejemplo es la siguiente respuesta, a la hora en que el profesor estaba resolviendo las posibles dudas de los alumnos de forma individual, le preguntó a un alumno cual era la razón por la que se cumple $|d(P,O)-d(P,P_i)|=k$ tratando de ver si ya había entendido o si necesitaba de ayuda, a lo que el alumno respondió de forma discursiva apoyándose de uno de los dibujos del material didáctico ocupado en la actividad 5, señalando con sus dedos que los segmentos PP_c y PP_i son iguales por que P está en la mediatriz de los puntos P_i y P_c, entonces era lo mismo que fijarnos en el segmento PP_c del dibujo, señalando el segmento PP_c y diciendo que si le restábamos PO nos quedaba el radio señalándolo con los dedos y diciendo que ya está. Dicho de forma discursiva y señalando los segmentos, el alumno no los mencionó con sus nombres. Con lo cual da muestra de que entendió los conceptos que eran la meta. Ésto nos indica que el alumno fue capaz de dar una argumentación correcta por sí solo.

3.3 Resultados de la implementación

A continuación se presentan los resultados de la puesta en práctica de la propuesta didáctica, se analizan las respuestas de los alumnos en el pretest, postest, las actividades 3, 4 y 5, así como de la encuesta de opinión.

Resultados del pretest

La primera parte del pretest, consistió en presentar a los alumnos cuatro respuestas a un mismo problema, cada una de las respuestas de Kuri, Linda, Martín y Natalia son diferentes en la forma como la argumentan. La argumentación de Kuri es una verificación dinámica de la proposición, la de Linda está basada en sus conocimientos previos de geometría analítica, se apoya en símbolos y utiliza una deducción lógica, la argumentación de Martín es discursiva y por último la de Natalia se basa en semejanza de triángulos para lo cual hace una deducción lógica.

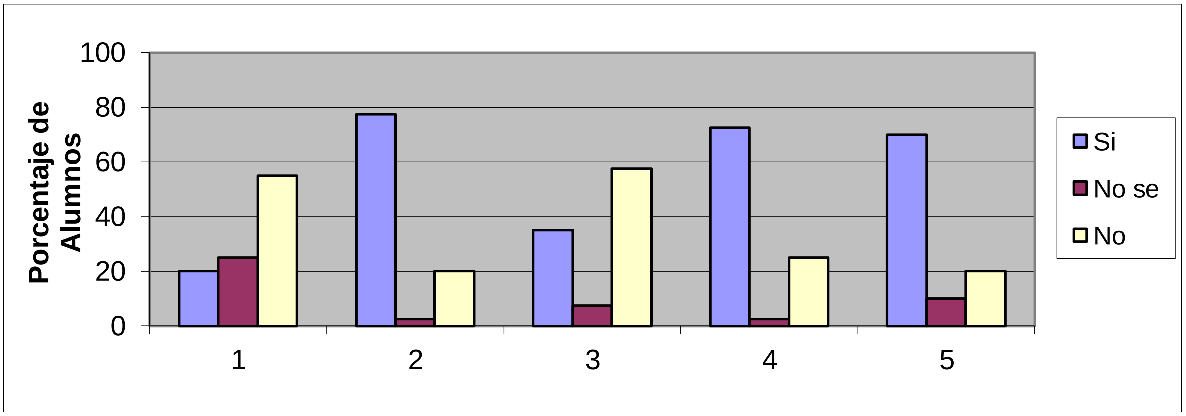


Gráfica 1. La pregunta 1 se refiere a la argumentación que los alumnos prefieren, pregunta 2 a la argumentación que los alumnos consideran que el maestro le daría más calificación.

En la Gráfica 1 podemos observar que las respuestas que más escogieron los alumnos fueron primero la de Kuri y después la de Martín, de las cuales la primera es una verificación dinámica y la segunda una argumentación discursiva.

Y por el contrario, las dos respuestas con mayor porcentaje de alumnos que consideran que el profesor les daría mayor calificación son primero la de Linda y después la de Natalia, las cuales utilizan más símbolos matemáticos y una deducción lógica más evidente.

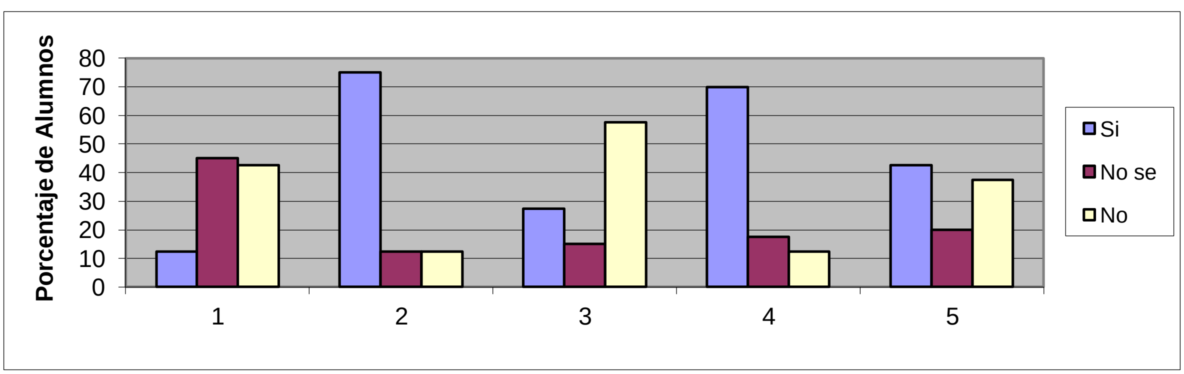
A continuación se muestran las gráficas de cómo calificaron los alumnos las argumentaciones. Más alumnos escogieron en ambas preguntas, la de Kuri y la de Linda.



Gráfica 2. Calificación de los alumnos a la argumentación de Kuri.

Como podemos ver en Gráfica 2, la pregunta uno, casi el 60% de los alumnos consideró que la argumentación de Kuri no tiene error alguno, en la segunda pregunta casi el 80% de los alumnos consideró que la argumentación de Kuri muestra que siempre es verdadera la proposición, la cual se complementa con la pregunta tres, casi el 60% dice que no muestra que la proposición sea sólo verdadera para algunos triángulos, en la pregunta cuatro el 70% de los estudiantes dicen que la respuesta de Kuri si muestra por que es verdadera la proposición, y por último el 70% de los estudiantes considera que la respuesta de Kuri es una forma fácil de explicar.

Ahora veamos lo que los estudiantes contestaron con respecto de la respuesta de Linda



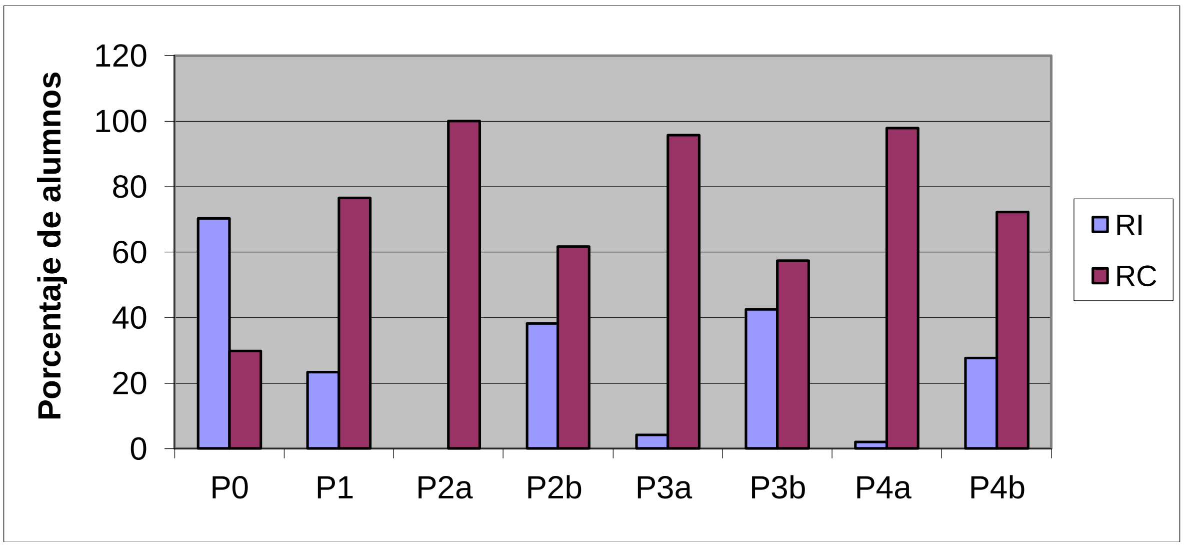
Gráfica 3. Calificación de los alumnos a la respuesta de Linda.

Si observamos en la Gráfica 3, podemos ver que al contrario de la respuesta de Kuri, aquí la mayoría de los alumnos no supieron si tiene o no error la respuesta de Linda, pero el 75% de los alumnos consideró que la respuesta muestra que la proposición siempre es verdadera, y como complemento en la pregunta tres casi el 60% dice que la repuesta de Linda muestra que siempre es verdadera la proposición, en el caso de la pregunta cuatro el 70% de los alumnos dice que la respuesta de Linda muestra por qué es verdadera la proposición, y por último, está muy cerca el porcentaje de alumnos que consideró que la respuesta de Linda es una forma fácil de explicar que la proposición es verdadera con un 42% contra un 37% que considera que no es una forma fácil de explicar.

De lo anterior podemos concluir que los alumnos se expresan y entienden las argumentaciones en términos más discursivas, y que las argumentaciones que emplean símbolos matemáticos y procedimientos de deducción lógica les es más difícil de entender y de comunicar, tanto de ellos al explicarlo como pensar que sus iguales no les va a ser fácil de comprender.

Resultados de la actividad 3

A continuación vemos el resultado de la actividad 3, la cual se centra en que los alumnos identifiquen una mediatriz con doblado de papel albanene. En la Gráfica 4 veremos los resultados de la actividad 3.



Gráfica 4. Resultados de la actividad 3.

En la actividad 3 la primera pregunta que se les hace a los alumnos no es propiamente una pregunta, sino que se les da un hint y se les pide que observen la figura en el papel albanene y que si a partir de ahí pueden decir algo relevante de la figura a lo que el 30% de los alumnos contesto correctamente, por eso de hecho se le identifico como pregunta cero. Casi el 80% de los alumnos identifico que los puntos a los que se hace mención en la actividad con respecto al dobles o son reflejados, simétricos o se enciman y por lo tanto tienen la misma distancia al doblez, y no sólo al doblez sino a cualquier punto en el mismo. Después de haber leído la definición de mediatriz el 72% de los alumnos respondió afirmativamente a al preguntar si el doblez es una mediatriz, y argumentaron satisfactoriamente su respuesta en base a sus observaciones anteriores. Con lo cual los alumnos se dan cuenta que los dobleces que realizaron en la actividad 1, todos fueron mediatrices.

A continuación se transcriben algunas de las respuestas obtenidas en la actividad 3, con motivo de mostrar el tipo de respuestas obtenidas.

Respuesta a pregunta P0:

- Que parece espejo y los dos puntos coinciden.
- Que P_d y P_i coinciden, así que cualquier punto en M va a tener la misma distancia con P_d y P_i al momento de que la hoja se doble.

Respuesta a pregunta P1:

- Que coinciden.
- Ambos puntos coinciden
- Ambos puntos se unen.

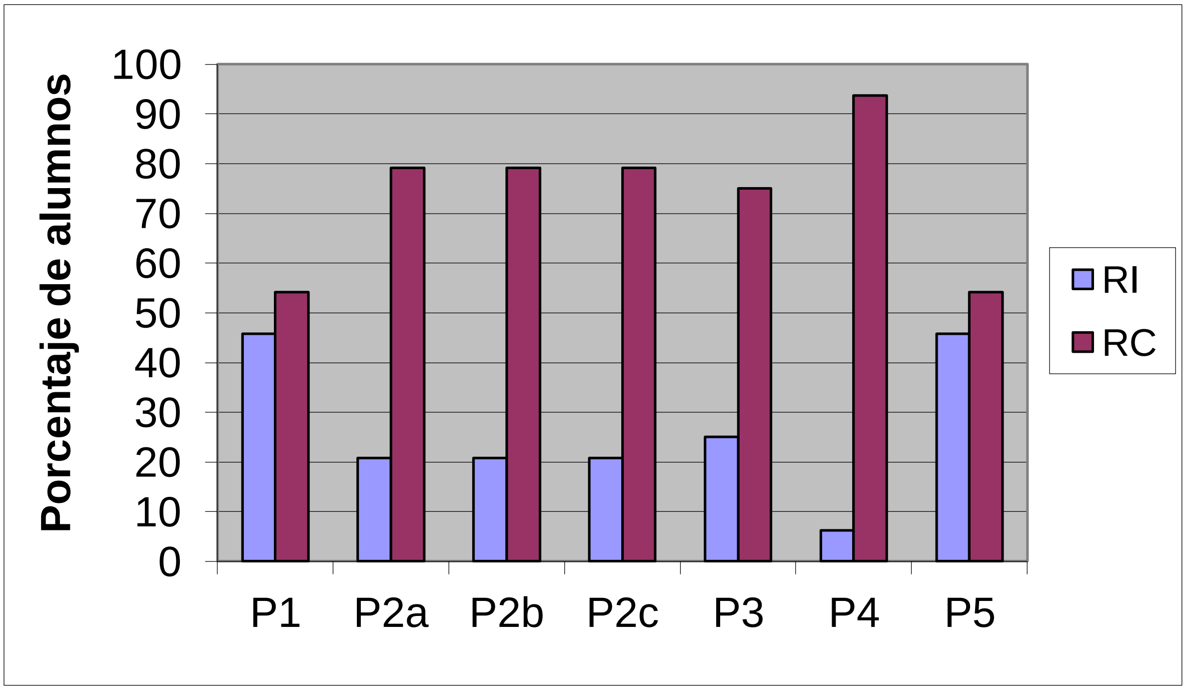
Respuesta a preguntas P2b y P3b:

- Porque (P_d, A) tiene simetría con (P_i, A).
- Porque M con respecto a (P_d, A) y (P_i, A) es el eje de simetría y los puntos conservan simetría.
- Porque al doblar la línea sigue siendo la misma distancia entre cualquier punto de la recta.
- No importa la posición del punto siempre que P_d sea el reflejo de P_i.
- Todos los puntos tienen la misma distancia con P_d y P_i.

En las dos ultimas respuestas que menciono en P2b y P3b se puede observar que realizaron la generalización, sin importar que punto de M sea el que elijamos siempre va a estar a la misma distancia de P_d y P_i.

Resultados de la actividad 4

A continuación presentamos los resultados de la actividad 4, en la cual el propósito es que los alumnos conozcan e identifiquen a la elipse tanto como definición como lugar geométrico y como su representación gráfica. En la Gráfica 5 veremos los resultados de la actividad 4.



Gráfica 5. Resultados de la actividad 4.

En la actividad 4 el 80% de los alumnos contestó correctamente y con argumentos válidos que la suma de la distancias de O a P más de P a P_i es igual a la constante del radio de la circunferencia, sin importar en que posición se encuentre el doblez, más del 90% contestó que con base en sus afirmaciones anteriores puede concluir que el punto que pertenece a la elipse es P.

A continuación, se transcriben algunas de las respuestas obtenidas en la actividad 4, para ilustrar el tipo de respuestas obtenidas.

Pregunta P1:

- Porque al recorrer a b se recorre doble la distancia de F_2 a V_2 y es la misma de F_1 a V_1, $d(F_1,V_1)+d(F_2,V_2)+d(F_1,F_2)=c$.
- La distancia de F_1 a V_2 y de V_2 a F_2 es la misma que de V_1 a V_2, ya que la distancia de F_2 a V_2 se recorre dos veces.
- Porque $d(V_1,V_2)$ es igual a la suma de $d(F_1,V_1)+d(F_2,V_2)+d(F_1,F_2)=c$.

Preguntas P2a, P2b y P2c:

- Ya que al sustituir (P,P_i) en (P,P_d) hacen el radio.
- Porque la distancia entre (P,P_i) es igual a la distancia entre (P,P_d) ya que P_d es el reflejo de P_i.

- Porque sigue teniendo la misma distancia P_i y P_d con respecto a M y el recorrido que tienen de O a P_i es la misma con P_d.

Pregunta P3:

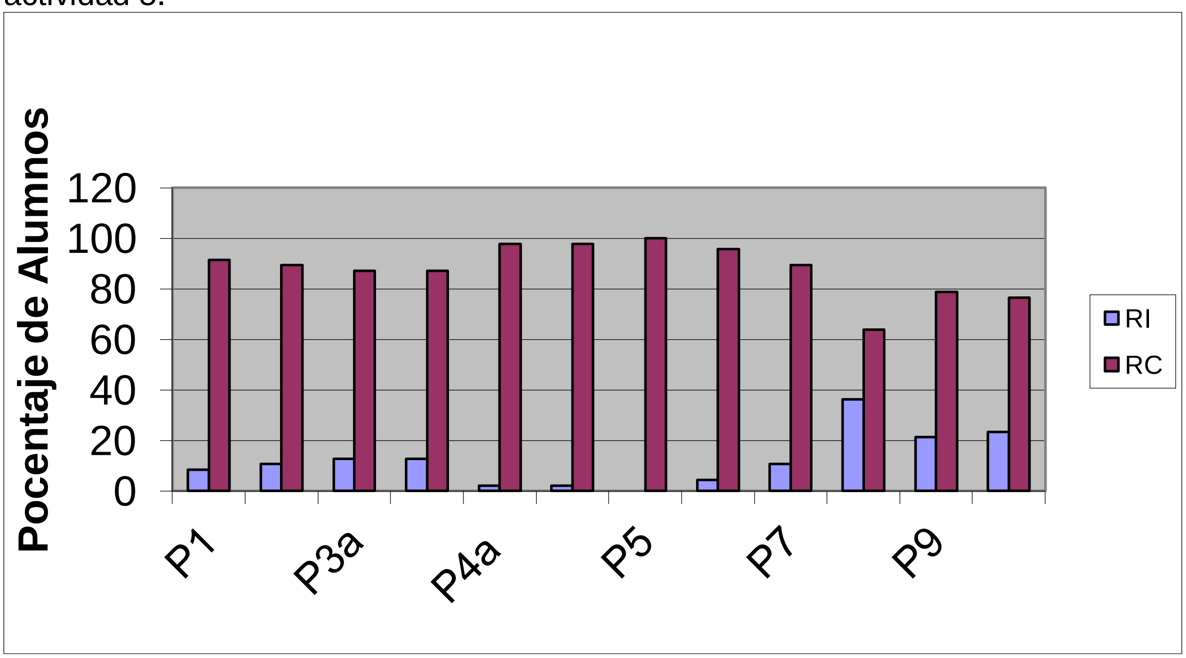
- Porque la distancia de P' es la misma que la $d(P',P_d)$, $d(O,P_d)<d(O,P')+d(P',P_d)$.
- Porque se recorre mayor distancia al recorrer de O a P' y de P' a P_i o P_d, que de O a P_i o P_d.
- La distancia de O a P_d es menor a la distancia de O a P' y de P' a P_d, Por que la distancia de P' a P_d es igual a la distancia de P' a P_i.
- Porque la distancia más corta es una recta y al salirse de la recta se recorre más distancia, ósea $d(O,P_d)<d(O,P')+d(P',P_i)$.

Pregunta P4:

- Si porque el punto "P", se mueve de tal forma que su distancia a dos puntos fijos (O,P_i) son siempre igual a una constante.
- Porque la suma del centro a P y de P a P_i suman una constante, y esto es base de la elipse.

Resultados de la actividad 5

A continuación mostramos los resultados obtenidos en la actividad 5, en la cual el propósito es que el alumno identifique que los dobleces realizados con los que se encuentra el contorno de dos curvas son mediatrices y que la figura que delimitan los dobleces es una hipérbola. La Gráfica 6 nos muestra los resultados de la actividad 5.



Gráfica 6. Resultados de la actividad 5.

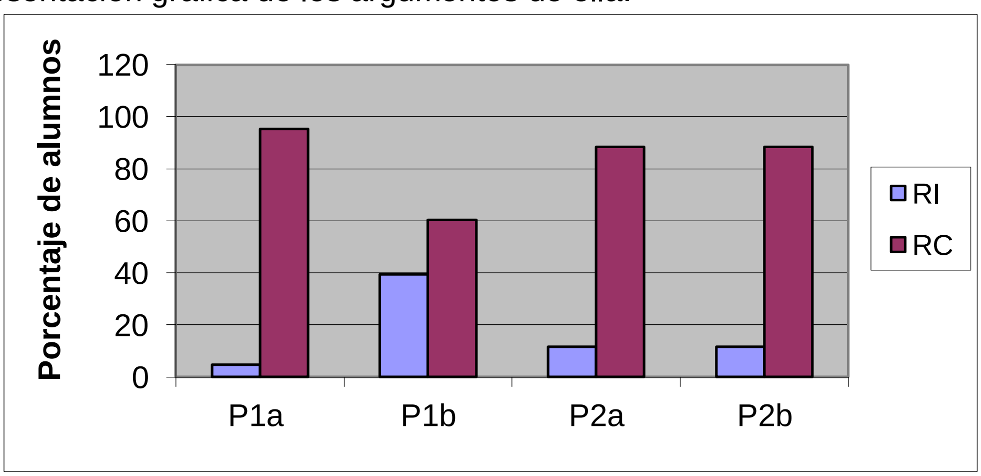
Alrededor del 90% de los alumnos identificaron correctamente que los dobleces cumplen con las características de una mediatriz, más del 90% de los alumnos utilizó correctamente el argumento de la mediatriz para mostrar la igualdad entre las distancias de los siguientes segmentos P_cP y P_iP, y poco menos del 80% entre el 78% y el 76% identificaron adecuadamente el valor absoluto de la diferencia de que segmentos da como resultado una constante y por lo tanto esos puntos pertenecen a una hipérbola.

A continuación se transcriben algunas de las respuestas obtenidas en la actividad 5. En esta ocasión son más preguntas pero algunas se repiten con respecto a la actividad 3, por lo tanto sólo transcribimos algunas respuestas con respecto a la argumentación de los alumnos.

- La mediatriz hace que la distancia $d(O,P_i)$ y $d(O,P_c)$ sea la misma, por lo tanto los valores siempre serán iguales, no importando el lugar donde se encuentren.
- Mientras P esté en la mediatriz y en el radio la distancia de P a P_i será la misma que de P a P_c, por lo tanto se cumple lo anterior.
- Porque P siempre está en la mediatriz y el radio.

Resultados del postest

En la Gráfica 7 se muestran los resultados del postest, en el cual se pregunta que relacionen la representación gráfica de la mediatriz con su definición, y se les presenta la respuesta que da Linda en la proposición del pretest, y se les pide que con sus palabras expliquen la respuesta de Linda y que identifiquen los puntos en la representación gráfica de los argumentos de ella.

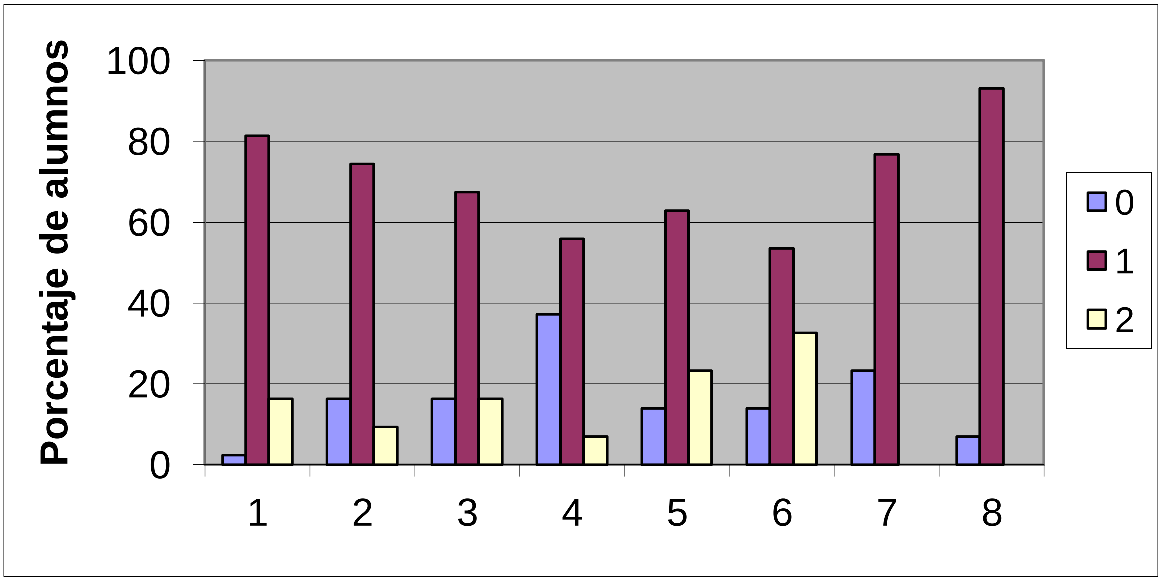


Gráfica 7. Resultados del postest.

El 95% de los alumnos identifico correctamente las partes a que se hacen alusión en la respuesta que se presenta, pero a la hora de explicar con sus propias palabras solamente un 60% de los estudiantes pudo explicarla adecuadamente y casi un 90% de los estudiantes identifico correctamente la representación gráfica de la mediatriz con su definición.

Resultados de la encuesta de opinión

A continuación se presentan los resultados de la encuesta de opinión, las preguntas que cuantificamos, son la 1, 2, 3 y 5. En seguida presentamos la Gráfica 8 en la que se aprecian los resultados.



Gráfica 8. Resultados de la encuesta de opinión.

Las preguntas de la 1 a la 3 que se ven en la gráfica corresponden a si los alumnos consideraron las actividades tediosas (0), motivantes (1) o indiferentes (2). Del primer día de un 81% decreció a un 70%, las siguientes tres preguntas hacen referencia al nivel de dificultad de esta manera, fácil (0), adecuado (1) o difícil (2), a lo cual alrededor del 60% de los alumnos contesto que les pareció adecuado el nivel en los tres días de actividades, la pregunta 7 corresponde a que estilo de clase les agrada más si el tradicional o algo parecido al que se implementó, a lo que el 76% de los alumnos contestó que le agrada más el estilo que se implemento en la puesta en práctica, y por último se les preguntó a los alumnos que si consideraron que aprendieron algo en las clases pasadas, a lo que respondieron que si más del 90% de los alumnos, existieron diversas respuestas, todas muy similares, que decían desde doblado de papel para generar cónicas, mediatriz, elipse e hipérbola.

En seguida se presentan respuestas particulares de los alumnos en la encuesta de opinión. En general les agrado la forma en que se llevaron a acabo las clases por que dicen que son:

- Menos tediosas.
- Más entretenida.
- Más interactivas.
- Hace que te llame la atención la clase.
- Se les facilita el aprendizaje.

Pero a pesar de eso algunos de los alumnos señalan los siguientes puntos

- Que el maestro de más explicaciones.
- Falta de apuntes.
- Están acostumbrados a tomar apuntes y a hacer ejercicios.
- Ejemplos y teoría.

Y en otra pregunta nos sorprendió gratamente un caso, el cual hizo el siguiente comentario en el que el alumno consideró que aprendió "a saber como fundamentar una respuesta".

Capítulo 4 Conclusiones

Como pudimos observar en los resultados del pretest, con respecto a la visualización y la argumentación no se mostró evidencia de que los alumnos la hayan desarrollado con anterioridad. De hecho es muy difícil que el maestro pueda dar cuenta de si el alumno está logrando visualizar algún tema en sí, puesto que la visualización es un proceso interno que se da en el alumno, el cual sirve para argumentar -en caso de que el alumno lo logre- o es de esta forma como el profesor se puede dar cuenta, si el alumno logro la visualización, puesto que utiliza las características que logra visualizar para respaldar su argumentación.

En el pretets se observó que la mayoría de los estudiantes no entiende las argumentaciones con símbolos matemáticos e implicaciones lógicas con un grado de formalidad mínima, que los estudiantes se apegan más a la argumentación discursiva y de validación en algunos casos. A pesar de opinar que la argumentación a la que el maestro le daría una mayor calificación es la que tiene símbolos matemáticos e implicaciones lógicas.

El diseño de la secuencia didáctica basado en el modelo inductivo nos ayudó a concretar el objetivo a enseñar a los alumnos, el cual fue el concepto de mediatriz al generalizar los elementos que cumplen con dicha propiedad. Y los conceptos de elipse e hipérbola, pensando siempre en que el modelo inductivo por su forma de implementación ayuda a los alumnos a desarrollar el pensamiento de nivel superior y el pensamiento crítico, al centrarse en el proceso de encontrar patrones, construir explicaciones, formular hipótesis, generalizar y documentar cada una de estas conclusiones con evidencias.

Con base en el modelo inductivo se pretendió que los alumnos aprendieran los conceptos de mediatriz, elipse e hipérbola, lo cual se alcanzó puesto que la mayoría de ellos en las actividades correspondientes dieron evidencia de haber visualizado lo que se pretendía a la hora de leer sus argumentaciones, que es donde el profesor puede notar si los alumnos alcanzaron a visualizar lo que se deseaba. En el caso de la elipse y la hipérbola se puede afirmar que los alumnos articularon su representación gráfica con la definición como lugar geométrico puesto que dieron evidencia de visualizarlo al momento de argumentar por que las figuras que generaron con el doblado de papel eran una elipse y una hipérbola.

Con respecto a la argumentación se pude ver el cambio entre los resultados del pretest y el postest los cuales nos dan evidencia de que en el primero, alrededor del 60% de los alumnos no comprendió la argumentación con símbolos matemáticos e implicaciones lógicas elementales, y en contraparte en el postest alrededor del 60% de los alumnos entendió la argumentación con símbolos matemáticos e implicaciones lógicas elementales.

La información que obtuvimos de la encuesta de opinión, es muy interesante puesto que en general a todos lo alumnos les pareció, que la forma en que se implemento la secuencia didáctica con el método inductivo, es más entretenida y facilita el aprendizaje. A pesar de lo anterior, los alumnos están muy acostumbrados al estilo tradicional en donde el profesor es la figura central en el aula y no así ellos, donde el maestro da apuntes, explica la teoría y da ejercicios. Así mismo, se observaron muestras de la incapacidad o falta de costumbre de los alumnos de consultar libros o textos en donde ya está toda la teoría que se les enseña. La explicación que encuentro a lo anterior es la costumbre o falta de experiencias distintas en la forma en como reciben la educación, puesto que los maestros fueron formados de la misma forma y así sucesivamente, lo cual nos indica que la forma en como se enseña actualmente es una forma inercial, que viene desde nuestros maestros y de los maestros de nuestros maestros, y la forma de poder cambiar la manera como enseñamos a los alumnos es implementando formas diferentes de enseñar, basadas más en el alumno que en el profesor, o los métodos constructivistas del cual forma parte el modelo inductivo, y de esta forma poder acercarse a los lineamientos de la RIEMS y de los objetivos que evalúa la prueba internacional de PISA.

De lo anterior puedo concluir que el modelo inductivo es una buena forma de implementación didáctica con el cual se pude promover un cambió en los alumnos en su forma de argumentar y de esta manera en el sentido que la RIEMS y la evaluación internacional de PISA buscan en los alumnos.

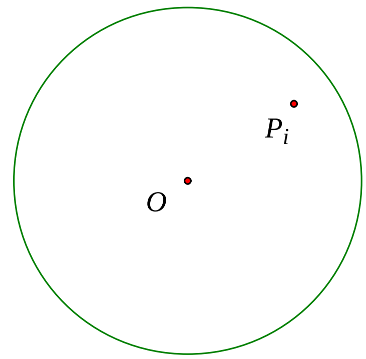
Anexos

Anexo 1 *Actividad 1 Obtención de un óvalo*

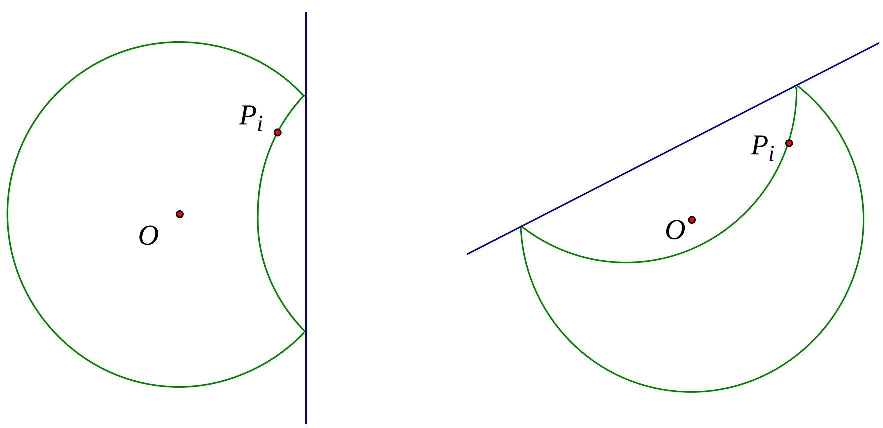
Tiempo estimado 20 min.

Para seguir las indicaciones en una hoja de papel albanene escribe tu nombre y nómbrala hoja 1.

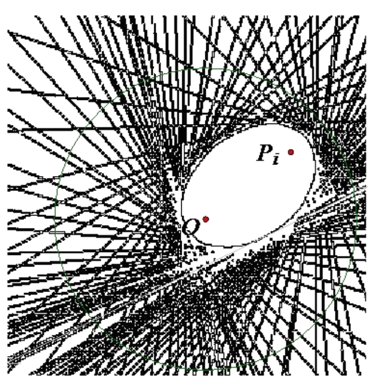
1.- En el papel albanene debes dibujar una circunferencia con ayuda de tu compás, y marcar su centro al cual llamarás O. Dibuja un punto dentro del círculo al que llamarás P_i, de preferencia más cerca de la circunferencia que de su centro, semejante a como se muestra en el dibujo.



2.- Dobla el papel de tal manera que el punto P_i coincida con alguno de los puntos de la circunferencia, hacer este paso repetidas veces, haciendo que coincida con otros puntos en la circunferencia, no importa con que puntos comiences la actividad, ni con cuales la continúes, lo que importa es que hagas el proceso repetidas veces con diferentes puntos de la circunferencia.



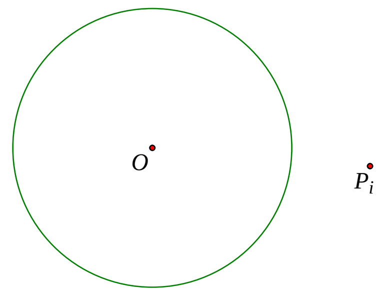
Al hacer repetidas veces este paso la figura que te debe de quedar es similar a la siguiente.



Anexo 2 *Actividad Generación de Hipérbola*

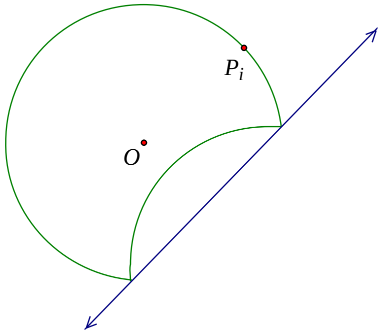
Tarea

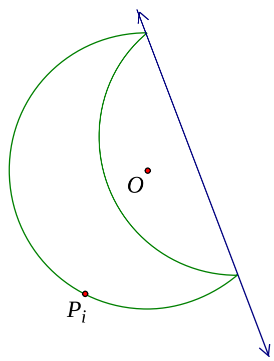
Para seguir las indicaciones en una hoja de papel albanene escribe tu nombre y nómbrala hoja 2.

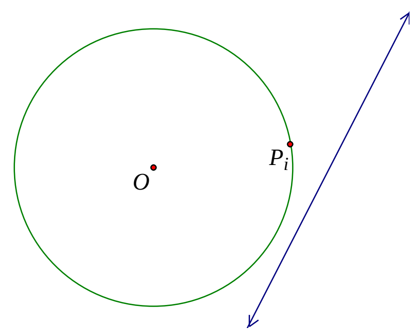


1.- En la hoja de papel albanene traza una circunferencia con ayuda de tu compás, marca su centro y nómbralo O. Dibuja un punto fuera de la circunferencia al que llamarás P_i, de preferencia cerca de la circunferencia como se muestra en el dibujo

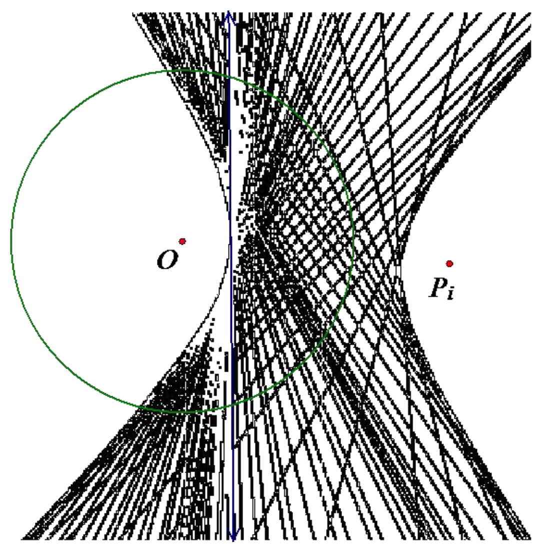
2.- Dobla el papel de tal forma que el punto P_i coincida con alguno de los puntos de la circunferencia, hacer este paso repetidas veces, haciendo que coincida con otros puntos de la misma, no importa con que puntos comiences la actividad, ni con cuales la continúes, lo que importa es que hagas el proceso repetidas veces con diferentes puntos de ésta.







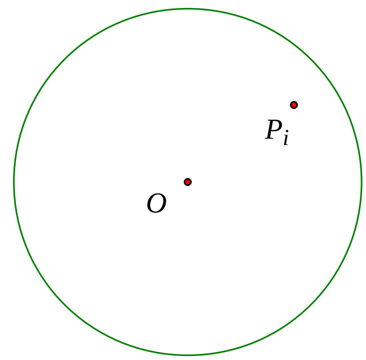
Al hacer repetidas veces este proceso la figura que te debe de quedar es similar a la siguiente.



Anexo 3 *Actividad 3 Visualización de una mediatriz*

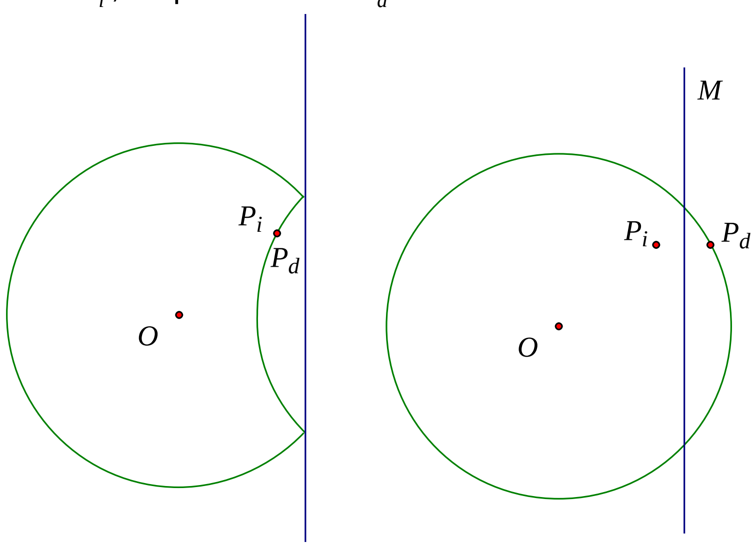
Nombre:______________________________________ Grupo:____________
Práctica Docente III 2009-2 Fecha______________________
Tiempo 30 min.

Para seguir las indicaciones en una hoja de papel albanene escribe tu nombre y nómbrala hoja 3.



1.- En la hoja 3, que aún no hayas utilizado, dibuja una vez más una circunferencia, debes marcar su centro al cual llamaremos O. Dibuja un punto dentro del círculo al que llamaremos P_i, de preferencia más cerca de la circunferencia que de su centro (al igual que en la actividad 01).

En esta ocasión sólo debes de marcar un doblez en el papel albanene, e identificar el punto de la circunferencia que coincide con el punto P_i, al que llamarás P_d

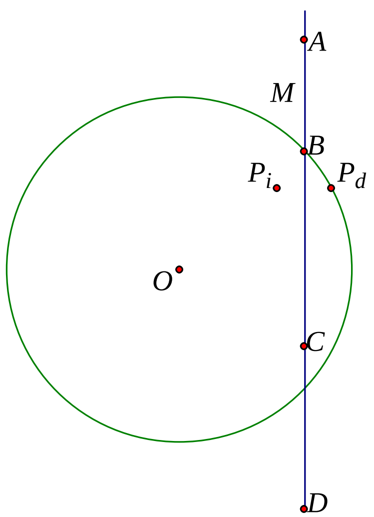


Sugerencia: Ahora observa que características tiene el doblez que acabamos de hacer con respecto de P_i y P_d, al que llamarás M
.

2.- Marca 3 o 4 puntos distintos (A, B, C, D) sobre el doblez M, como se muestra en la siguiente figura.

Describe si encontraste algo al seguir la sugerencia.	En caso de no haber encontrado nada con la sugerencia, te damos los siguientes tips.
	Al doblar sobre M ¿qué relación hay entre P_i y P_d?____________________ ______________________________

	¿Son iguales las distancias $d(P_d, A)$ y $d(P_i, A)$? Si o no ____________________________ ¿Porqué?___________________________ ____________________________________ ¿Si en la pregunta anterior sustituyes a A por B y después por C y después por D, en los tres casos se sigue conservando tu respuesta? Si o no ____________________________ ¿Porqué?___________________________ ____________________________________



Definición de Mediatriz
Son los puntos del plano que equidistan de dos puntos que pueden ser los extremos de un segmento.

3.- Ver la definición del recuadro.

¿ M es mediatriz ?____

____

¿ Porqué ? ____

____

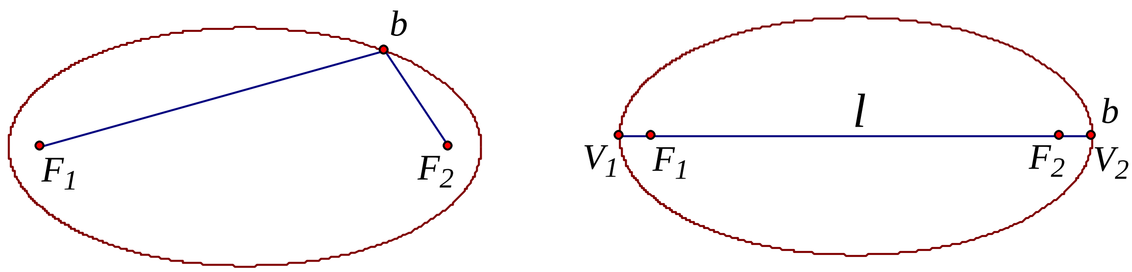
____

Anexo 4 *Actividad 04 ¿Óvalo = Elipse?*

Nombre:_______________________________________ Grupo:_____________
Práctica Docente II 2009-1 Fecha_______________________
Tiempo 50 min.

A continuación te presentamos una “definición matemática” de elipse léela

“Una *elipse* es el lugar geométrico de un punto (b) que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos fijos a los que llamamos focos (F_1, F_2)” Lo anterior se escribe en matemáticas así $d(F_1, b) + d(b, F_2) = c$



La recta que pasa por los focos la llamamos eje focal (l), donde se intersecta el eje focal con la elipse se llaman vértices (V_1, V_2), y la longitud de vértice a vértice es la constante que nos define a la elipse y a ese segmento lo llamamos el semieje mayor.

¿Porqué sucede que $d(V_1, V_2) = c$? ____
____

En la siguiente secuencia vamos a verificar dónde más se encuentra la constante “c” que nos define a la elipse con respecto a dos puntos fijos, y también nos encontramos con el reto de verificar que el ovalo obtenido al hacer el doblado del papel en la actividad 1 es en realidad una elipse.

A continuación emplea la hoja 3 de papel albanene de la actividad anterior:

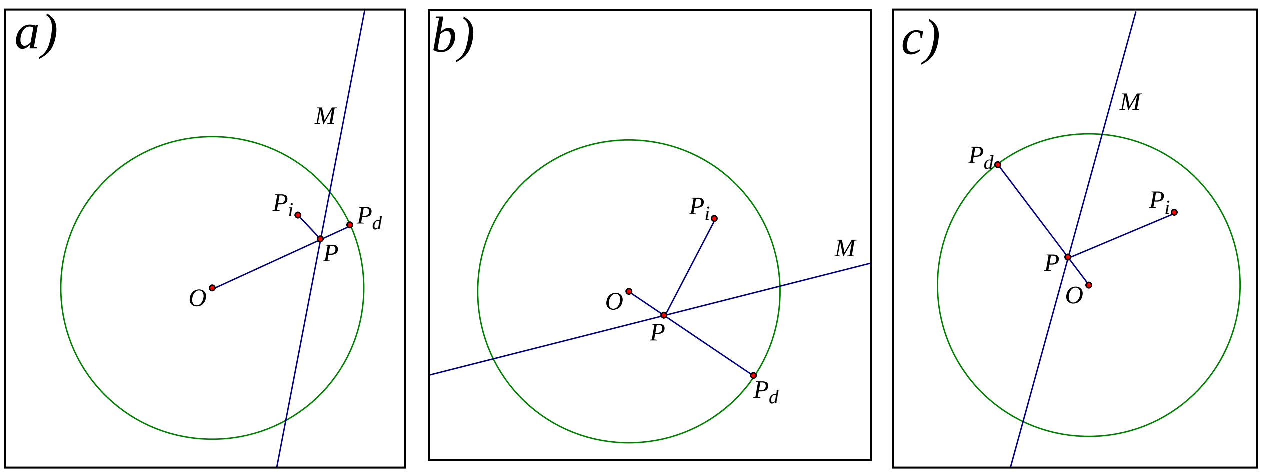
1.- Traza el radio a P_d, y encuentra la intersección del radio con la recta M, al cual llamarás P. Puedes ver los tres ejemplos que son los a), b) y c) en la siguiente página, Pon atención en que P_d puede ser cualquier punto que se mueve sobre la circunferencia.

Ahora bien, el punto P por ser la intersección del radio y la recta M, pertenece a ambas. Por lo tanto P pertenece al radio y podemos escribir

$$d(O,P)+d(P,P_d)=k \quad (1)$$ donde k es el radio de la circunferencia

él cual es la constante que nos define a la circunferencia, pero como ya habíamos visto que P es la intersección, P pertenece a la mediatriz M y cumple con la propiedad

$$d(P_i,P)=d(P,P_d) \quad (2)$$



2.- Para

$a)$ ¿$d(O,P)+d(P,P_i)=k$?

Si o no

¿Porqué?____

____

$b)$ ¿$d(O,P)+d(P,P_i)=k$?

Si o no

¿Porqué?____

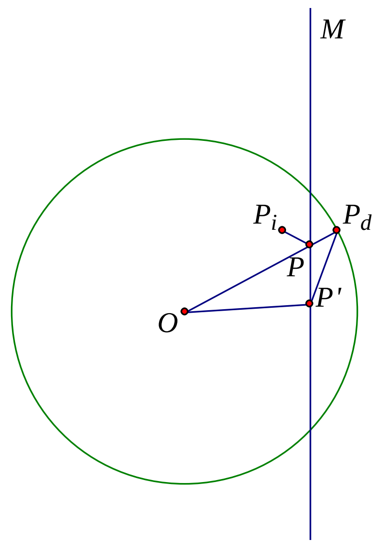
____

$c)$ ¿$d(O,P)+d(P,P_i)=k$?

Si o no

¿Porqué?____

____



3.- Si tomas otro punto cualquiera en la mediatriz, llámalo P', vemos que $d(O,P')+d(P',P_i)>k$

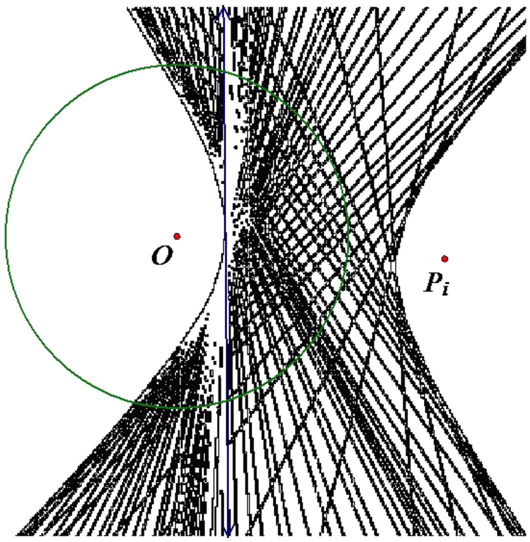
¿Porqué sucede esto?____
____
____

4.- ¿Podrías concluir con base en tus respuestas anteriores que los puntos P pertenecen a una elipse según su definición como lugar geométrico?
____
____

5.- ¿Cuáles de los puntos de los dibujos a), b) y c) son los focos de la elipse?____
____

Anexo 5 *Actividad 5 Definición de Hipérbola*

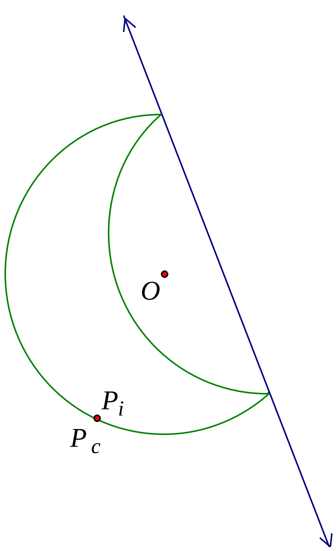
Nombre:______________________________________ Grupo:____________
Práctica Docente II 2009-1 Fecha______________________
Tiempo 50 min.

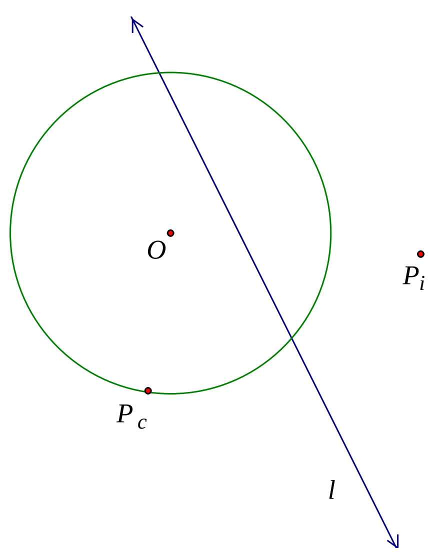


Para seguir las indicaciones en una hoja de papel albanene escribe tu nombre y nómbrala hoja 4.

1.- En la hoja 4, dibuja una vez más una circunferencia, marca su centro al cual llamaremos O y dibuja un punto fuera del círculo al que llamaremos P_i, de preferencia cerca de la circunferencia.

En esta ocasión sólo debes de marcar un doblez en el papel albanene al que nombraras l, e identificar el punto de la circunferencia que coincide con el punto P_i, al que llamarás P_c como se muestra a continuación.





2.- ¿Qué relación hay entre P_i y P_c, con respecto del doblez l?_______________

____

3.- Si marcas algunos puntos (A,B,C,D) sobre el doblez l, ¿qué relación hay entre las distancias de P_i con respecto de los puntos (A,B,C,D) y las distancias de P_c con respecto de los puntos (A,B,C,D)? ______________________________

____

____

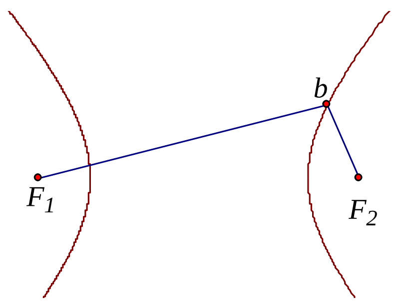
4.- ¿ l es mediatriz? si o no____

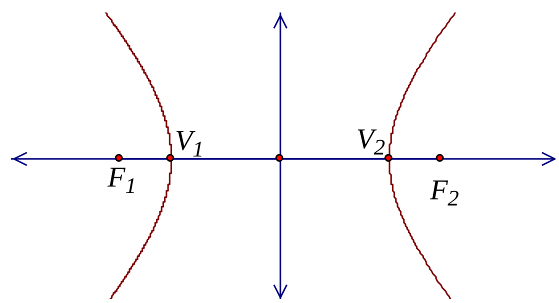
¿Por qué? ____

____

____

Definición: Una *hipérbola* es el lugar geométrico de un punto (b) que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos (F_1,F_2), es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos Lo anterior se escribe en matemáticas así $|d(F_1,b)-d(b,F_2)|=c$.



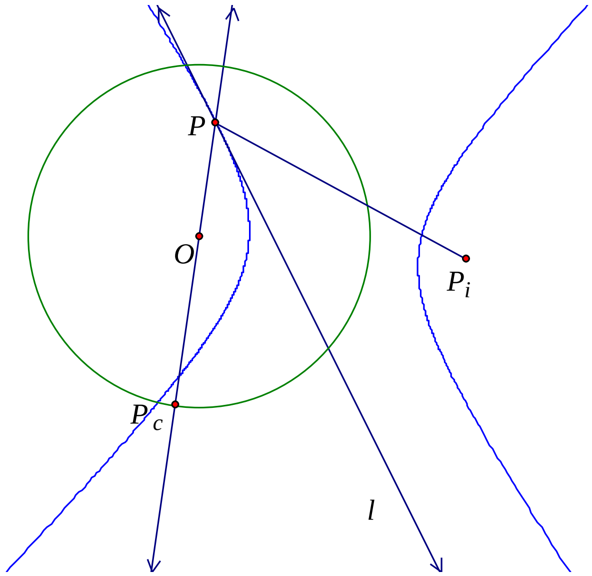


La recta que pasa por los focos la llamamos eje focal, donde se intersecta el eje focal con la elipse se llaman vértices (V_1,V_2).

Dada la definición de hipérbola, Verifica que la constante que nos define a la hipérbola dados dos puntos fijos, es el radio y que las curvas obtenidas al hacer el doblado del papel en la actividad 2 es en realidad una hipérbola.

Trazos auxiliares que te ayudaran en la argumentación de tu respuesta

Trazo 1: Traza la recta que une al centro O con el punto sobre la circunferencia P_c, y a la intersección de esta recta con la recta l y nómbrala P, como se muestra en la siguiente figura.
Trazo 2: Traza el segmento de recta que une a los puntos P y P_i, como se muestra en la siguiente figura.



5.- ¿Cómo son las distancias de P_c a P y de P a P_i? ______________________

____

____

¿Por qué?

____

____

____

6.- ¿Qué punto es el que pertenece a la hipérbola? ___________________________

____

7.- ¿Cuáles son los puntos fijos que menciona la definición de hipérbola en el esquema?____

____

8.- ¿Qué relación tienen los segmentos P_cP y P_iP?________________________

____

9.- Dado que O pertenece al segmento de recta P_cP, ¿Cómo puedes rescribir el segmento de recta P_cP de forma conveniente?____________________________

____

10.- Según la definición de hipérbola, el valor absoluto de la diferencia de qué distancias debe de ser igual a una cantidad constante, $|d(\_,\_)-d(\_,\_)|=k$.

____

____

11.- ¿Puedes concluir que el valor absoluto de la diferencia de las distancias es igual a una cantidad constante? No importando que punto de la circunferencia sea P_c.

Si ¿por qué?

____
____
____

No ¿por qué?

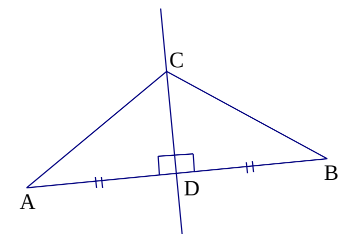
____
____
____

Anexo 6 Pretest Cuestionario

Alumno:____ Grupo:____________

Lee cuidadosamente el contenido del cuestionario y después responde en los espacios apropiados las respuestas que consideres adecuadas.

1. C es cualquier punto sobre la mediatriz del segmento AB. Kuri, Linda, Martín y Natalia están tratando de probar si la siguiente proposición es verdadera o falsa.

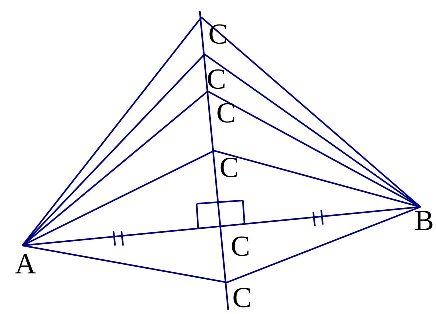


El triángulo ABC siempre es isósceles.

Respuesta de Kuri:

Muevo C a diferentes lugares sobre la mediatriz y mido AC y BC. Siempre son los mismos así que los triángulos fueron todos isósceles.

Así que Kuri dice que es verdadera.



Respuesta de Linda:

Proposición	Razón
AD = BD	Mediatriz
∡ ADC = 90º	Línea perpendicular
∡ BDC = 90º	Línea perpendicular
DC = DC	Misma línea
Δ ADC = Δ BDC	Dos lados y el ángulo entre ellos son iguales

∴ AC = BC.
Así que Linda dice que es verdadera.

Respuesta de Martín:

Por que CD bisecta a AB formando ángulos rectos, B es una imagen de A. Así que se puede pensar de ABC como hecho de dos triángulos rectángulos los cuales son imágenes uno del otro. Esto quiere decir que los lados AC y BC serán de la misma longitud.

Así que Martín dice que es verdadera.

Respuesta de Natalia:

Proposición	Razón
∡ ADC = 90º	Línea perpendicular
∡ BDC = 90º	Línea perpendicular
∡ CAB = ∡ CBA	Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales
∴ AC = BC	Así que Natalia dice que es verdadera.

De las respuestas anteriores elige la que más se apegue a lo que tú harías si se te pidiera que respondieras esta pregunta. ________________________________

De las respuestas anteriores elige la que consideres a la que tu maestro le daría la más alta calificación. ____

En cada una de las siguientes proposiciones señala con una cruz; estas de acuerdo; no sabes; o no estas de acuerdo.

La proposición es:

El triángulo ABC siempre es isósceles.

La respuesta de Kuri	Sí	No se	No
Tiene un error			
Muestra que la proposición siempre es verdadera			
Muestra que la proposición sólo es verdadera para algunos triángulos			
Te muestra por qué es verdadera la proposición			
Es una forma fácil de explicárselo a quién no está seguro			

La respuesta de Linda	Sí	No se	No
Tiene un error			
Muestra que la proposición siempre es verdadera			
Muestra que la proposición sólo es verdadera para algunos triángulos			
Te muestra por qué es verdadera la proposición			
Es una forma fácil de explicárselo a quién no está seguro			

La respuesta de Martín	Sí	No se	No
Tiene un error			
Muestra que la proposición siempre es verdadera			
Muestra que la proposición sólo es verdadera para algunos triángulos			
Te muestra por qué es verdadera la proposición			
Es una forma fácil de explicárselo a quién no está seguro			

La respuesta de Natalia	Sí	No se	No
Tiene un error			
Muestra que la proposición siempre es verdadera			
Muestra que la proposición sólo es verdadera para algunos triángulos			
Te muestra por qué es verdadera la proposición			
Es una forma fácil de explicárselo a quién no está seguro			

Anexo 7 Postest Cuestionario 2

Alumno:____ Grupo:____________

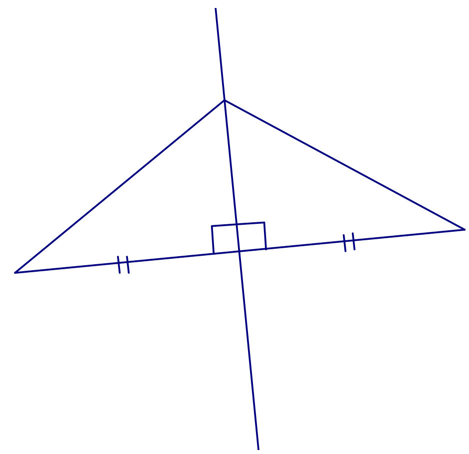
Lee cuidadosamente el contenido del cuestionario y después responde en los espacios apropiados las respuestas que consideres adecuadas.

1. En un ejercicio se les pregunta a los alumnos lo siguiente:

Si C es cualquier punto sobre la mediatriz del segmento AB. Entonces el triángulo ABC es siempre isósceles.

A continuación se presenta la respuesta de un estudiante

Paso	Proposición	Razón
1	AD = BD	Mediatriz
2	∡ ADC = 90º	Línea perpendicular
3	∡ BDC = 90º	Línea perpendicular
4	DC = DC	Misma línea
5	Δ ADC = Δ BDC	Dos lados y el ángulo entre ellos son iguales
6	$\therefore$ AC = BC. Así que Linda dice que es verdadera.	



Podrías en el diagrama de la derecha decir a que hace referencia en cada paso el alumno en su respuesta.

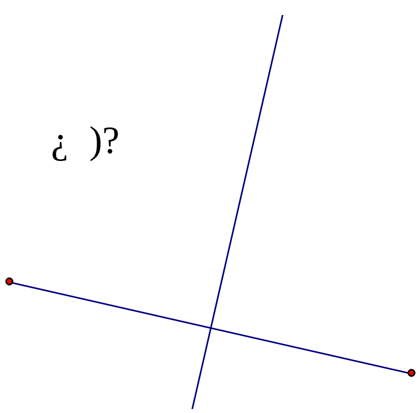
2. A continuación se presentan una forma de caracterizar a la mediatriz y a la bisectriz

a) Mediatriz: Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

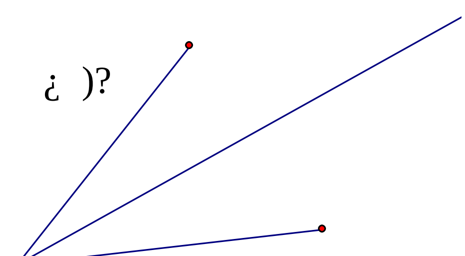
b) Bisectriz: Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan a los lados que forman el ángulo.

Puedes indicar a cual de las siguientes figuras corresponde cada inciso:

¿)?



¿)?



Anexo 8 *Encuesta de opinión*

Fecha:____________ Materia:______________ Grupo:____________

1.- ¿Cómo te parecieron las actividades que realizaste durante las tres clases pasadas? (Marca con una "x")

	a) tediosas	b) motivantes	c) indiferentes
Día 1			
Día 2			
Día 3			

2. Del nivel de dificultad, qué nos puedes decir: (Marca con una "x")

	a) fácil	b) adecuado	c) difícil
Día 1			
Día 2			
Día 3			

3.- ¿Si comparas la forma en que tradicionalmente se imparten las clases en que el maestro expone y los alumnos toman apuntes, con una clase del estilo en que el estudiante hace actividades similares a las hechas en las clases pasadas, cuál estilo de clase te agrada más?____
¿Porqué?____
____

4.- ¿En tu opinión qué crees que le falta o le sobra a las tres clases, para que sean de tu agrado?

____
____
____

5.- ¿Consideras que aprendiste algo nuevo en las tres clases pasadas? ¿Qué es?

____
____
____
____

6.- En las siguientes líneas puedes escribir sugerencias o comentarios para próximas actividades:

____
____
____
____
____
____
____

Bibliografía

Arsac, G.(1987) “El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica”, en Recherches en didactique des mathematiques, Vol. 8, Nº 3, pp. 267-312.

Balacheff, N. (1987). Processus de prueve et situations de validation; *Educational Studies in Mathematics* 18, 147-176.

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (1998) *Charting a course for secundary geometry, designing learning enviroments for developing understanding of geometry and space*, Ed. R. Lehrer and D. Chazan, p. 67-90.

DivulgaMat, Publicaciones de divulgación, Reseña aparecida en la revista SUMA nº 39 Feb 2002, Reseña a Kline (1976), El fracaso de la matemática moderna, http://divulgamat.ehu.es/weborriak/publicacionesdiv/libros/LiburuakDet.asp?Id=121

Duval, R. (1999b) Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Eggen, P. D., Kaucha, D. P.,(2001), Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento, México, Fondo de Cultura Económica, pp. 88-147.

Flores S., A. H. (2007), Prácticas argumentativas y esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. México, CINVESTAV IPN (Tesis de Doctorado).

Goldenberg, E., Cuoco, A. & Mark, J. (1998), A role for Geometry in General Education, en R. Lehrer and D. Chazan, *Designing Learning enviroments for developing understanding of geometry and space*.

Greeno, J. (1994) Comments on Susanna Epp´s chapter, en A. Schoenfeld (Editor), Mathematical thinking and problem solving, L. Erlbaum, Hillsdale, N. J.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.) The Nature of Advanced Mathematical Thinking. Advanced Mathematical Thinking. KAP, Pag 54-61.

Hanna, G. (1996).The ongoing value of proof. Procedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1. Valencia, España.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana & V. Villani, (Eds.), Perspectives of the teaching geometry for the 21st Century, an ICMI study, KAP, Netherlands, pp. 121-128.

Hoyles, C. & Jone, K.(1998). Proof in dynamic geometry context. In C. Mammana & V. Villani, (Eds.), Perspectives of the teaching geometry for the 21st Century, an ICMI study, KAP, Netherlands, pp. 121-128.

Itzcovich, H. (2005), Iniciación al estudio de didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones. Argentina, Libros del Zorzal.

Kline. M. (1976). El fracaso de la matemática moderna, Madrid, Siglo XXI Editores S.A.

La Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), Resumen Ejecutivo, http://www.sems.gob.mx/aspnv/video/Reforma_Integral.pdf

McGivney J. M. y T. C. De Franco (1995) The Mathematics Teachers, Vol 88, Num. 7, octubre, 552-555.

Mercado M., M.(2004), Del descubrimiento de resultados geométricos en un ambiente de geometría dinámica a la formulación de conjeturas y su prueba : un estudio con alumnos de bachillerato. México, CINVESTAV IPN (Tesis de Maestría).

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematcis, Reston, VA:NTCM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics, Reston, VA:NTCM.

Peirce, C. S. (1976). La escencia de la matemática. En Sigma. El mundo de las matemáticas. Tomo 5.

Polya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning (2 tomos). Princeton, N. J.

PRIMEROS RESULTADOS DE PISA 2003, Resumen Ejecutivo, www.SourceOECD.ORG, http://www.oei.es/quipu/mexico/informe_pisa2003.pdf

Salinas H., J.(2008), Estudio sobre la identificación de propiedades y relaciones geométricas en ambientes de regla y compás y de geometría dinámica con estudiantes de bachillerato, México, CINVESTAV IPN (Tesis de Doctorado).

Sandoval C., I. T. (2005),Estrategias argumentativas en la resolución de problemas geométricos en un ambiente dinámico, México, CINVESTAV IPN (Tesis de Doctorado).

Schoenfeld, A. (1994). What do you know about curricula, Journal of mathematical Behavior, v.13, n.1, 55-80.

Steen, L. A. (2001). La Enseñanza Agradable de las Matemáticas, Limusa Noriega Editores, México.