UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El Equilibrio Económico General y sus Propiedades de Bienestar: el Caso Intercambio Puro

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULODE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

FERNANDO SÁNCHEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
MAT. RAYBEL ANDRÉS GARCÍA ANCONA
2012

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno	**1. Datos del Alumno**
Apellido Paterno	Sánchez
Apellido Materno	López
Nombre	Fernando
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de Cuenta	095217475
2. Datos del Tutor	**2. Datos del Tutor**
Grado	Mat
Nombres	Raybel Andrés
Apellido Paterno	García
Apellido Materno	Ancona
3. Datos del Sinodal 1	**3. Datos del Sinodal 1**
Grado	Dr
Nombre	Octavio
Apellido Paterno	Páez
Apellido Materno	Osuna
4. Datos del Sinodal 2	**4. Datos del Sinodal 2**
Grado	Act
Nombre	Jaime
Apellido Paterno	Vázquez
Apellido Materno	Alamilla
5. Datos del Sinodal 3	**5. Datos del Sinodal 3**
Grado	Mtro
Nombres	Emmanuel Gerardo
Apellido Paterno	Salas
Apellido Materno	González
6. Datos del Sinodal 4	**6. Datos del Sinodal 4**
Grado	Mat
Nombres	Héctor
Apellido Paterno	Bustos
Apellido Materno	Castro
7. Datos del Trabajo Escrito	**7. Datos del Trabajo Escrito**
Título	El Equilibrio Económico General y sus Propiedades de Bienestar: el Caso Intercambio Puro.
Número de Páginas	92 p
Año	2012

Agradecimientos

Deseo agradecer a todas las personas que me apoyaron a la realización de esta tesis, en particular a mi tutor, Mat. Raybel Andrés García Ancona, por el tiempo invertido en la revisión. Asimismo, a los sinodales que con sus comentarios y correcciones enriquecieron este trabajo.

Este trabajo está dedicado a mis padres y a mi tía la profesora María Teresa López Lozano por todo su apoyo. Del mismo modo, le agradezco a todas y cada una de las personas que fueron parte de mi formación como matemático, incluyendo, por supuesto, a todos los amigos que hice a lo largo de estos años.

Por último, agradezco en especial a Manuel Díaz, Emiliano Geneyro y Zázil Santizo, por todos estos años de amistad y colaboración.

Índice general

Introducción

El equilibrio económico, es uno de los aspectos más relevantes en cuanto a teoría económica, pues este nos señala el precio (o precios) a los que se vacían todos los mercados, lo cual quiere decir que es "*el punto*" en que se igualan la oferta y la demanda. El hecho anterior, aunado a las propiedades de eficiencia económica que posee han hecho que sea uno de los temas más estudiados en la literatura económica.

Este trabajo tiene por objetivo explicar las propiedades de bienestar que poseen los equilibrios walrasianos, sin prestar atención a los detalle filosóficos que atañen a las cuestiones del bienestar. Es decir se pretende presentar los teoremas que unen la teoría del equilibrio general en un esquema de intercambio puro con la eficiencia en el sentido de Pareto.

Para cumplir con el objetivo planteado, este trabajo se ha divido en tres capítulos, en el primero, a modo de premisas, se plantea la teoría del consumidor clásica y se da una introducción a aquellos conceptos de la teoría de la demanda que resultan imprescindibles para el estudio de la teoría del equilibrio con intercambio puro. En el siguiente capítulo se presenta la teoría del equilibrio general, se presentan el simplex de los precios y la ley de Walras. Asimismo, se demuestran dos teoremas de existencia, el primero que hace referencia a soluciones interiores, mientras que el segundo toma en cuenta la posibilidad de que los precios se encuentren en la frontera del simplex de los precios. En el último capítulo se relaciona la teoría del equilibrio walrasiano con la eficiencia en el sentido de Pareto, lo que se conoce como las propiedades de bienestar del equilibrio general.

Capítulo 1

La Teoría del Consumidor

En este capítulo se presentan las principales definiciones y los resultados más relevantes de la teoría del consumidor, tales como la función de utilidad y el problema de la maximización del beneficio. Asimismo, se presenta un apartado sobre la teoría de la demanda, donde se exponen los resultados fundamentales para el estudio del intercambio puro.

1.1. Las Cestas de Consumo y el Conjunto de Consumo.

Cuando hablamos de una cesta de consumo nos estamos refiriendo a una lista de productos en la que el consumidor anota las cantidades que de éstos adquiere. Un ejemplo sencillo podría ser la lista del supermercado de algún sujeto. Matemáticamente dicha lista de cantidades se escribe a manera de un vector de cantidades, como se precisa a continuación:

Definición 1. *Se le llama cesta de consumo al vector* $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^n)$, *donde la entrada* x_i^j *representa la cantidad que el agente* i *obtiene del bien* j.

Un supuesto simplificador es pensar que todas las entradas de una cesta de consumo son no negativas, por lo que nos conviene dar la siguiente definición:

Definición 2. *Llamaremos* $\mathbb{R}_+^n$ *al subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *tal que si* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, *entonces* $x_i \geq 0 \ \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Para este trabajo supondremos en todo momento que las cestas de consumo se encuentran contenidas en $\mathbb{R}_+^n$.

Así pues, un consumidor puede no poseer una única cesta de consumo ya que puede variar las cantidades que las conforman. La no unicidad de las cestas de consumo de un individuo hace necesario definir un conjunto que las contenga a todas, a tal conjunto se le denomina conjunto de consumo.

Definición 3. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$ un conjunto diferente del vacío. Entonces, se dice que X es el conjunto de consumo de un agente cualquiera si contiene a todas sus cestas de consumo.*

Ahora bien, algunos supuestos que suelen hacerse sobre el conjunto de consumo, son los dos siguientes:

- Es cerrado y convexo.
- Sólo contiene las cestas que son indispensables para la supervivencia del consumidor.

1.2. Las Preferencias y los Axiomas de la Teoría del Consumidor.

Antes de enunciar los llamados axiomas de la teoría del consumidor, es necesario introducir el concepto de preferencia débil con el fin de establecer un criterio de orden y comparación entre cestas.

Cuando hablamos de preferencia débil, nos referimos a que dadas dos cestas de consumo, el consumidor piensa que una cesta es al menos tan buena como la otra, para representarla se utiliza el símbolo $\precsim$. Así pues, dadas $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, la afirmación: "la cesta de consumo $\mathbf{x}$ es al menos tan buena como la $\mathbf{y}$", se escribirá como $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$.

Ahora bien, a los tres supuestos que enunciaremos a continuación son a los que suele llamárseles *axiomas de la teoría del consumidor* debido a la importancia que dentro de esta tienen.

Axioma de Completitud: *Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, entonces $\mathbf{x} \precsim \mathbf{y}$, o bien $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$.*

Este supuesto nos dice que siempre es posible comparar cualesquiera dos cestas de consumo.

Axioma de Reflexividad: *Sea* $\mathbf{x} \in X$*, entonces* $\mathbf{x} \precsim \mathbf{x}$*.*

Este axioma es trivial en el sentido de que sólo expresa que una cesta debe ser al menos tan buena como ella misma.

Axioma de Transitividad: *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$*, entonces si* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ *y* $\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$ *se tiene que* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{z}$*.*

La relevancia del tercer supuesto se halla en que sin él, nos podríamos encontrar en el caso en que no hubiera una cesta de consumo que fuera la mejor de todas las asequibles para el consumidor.

Ahora bien, un término que se usará frecuentemente, y que se define a continuación, es el de preferencias racionales.

Definición 4. *Se dice que las preferencias son racionales si cumplen los axiomas de transitividad y completitud.*

Ahora bien, es posible que existan preferencias estrictas, esto es, que exista una cesta que se prefiera siempre a alguna otra, este tipo de preferencias se define a continuación:

Definición 5. *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ *diremos que* $\mathbf{x}$ *se prefiere estrictamente a* $\mathbf{y}$ *si y sólo si* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$*, pero no* $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$*. La preferencia estricta de una cesta por otra se representa con el símbolo* $\prec$*.*

Hasta aquí hemos dicho únicamente que una cesta puede ser mejor que otra, ya sea de manera débil o estricta. Sin embargo, es posible que existan cestas que otorguen el mismo nivel de satisfacción al consumidor, por lo que le dé lo mismo adquirir una u otra. A este fenómeno se le conoce como relación de indiferencia.

Definición 6. *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$*, diremos que* $\mathbf{x}$ *es indiferente a* $\mathbf{y}$ *si y sólo si* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$*. La indiferencia se denota con el símbolo* $\sim$*. A manera de conjunto se representa a las cestas indiferentes entre sí como:*

$$\mathrm{I} = \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{x} \sim \mathbf{y}\}$$

A partir de las definiciones hasta aquí presentadas, es posible enunciar la siguiente proposición, la cual engloba las principales propiedades de las preferencias racionales:

Proposición 1.1 *Si las preferencias* $\succsim$ *son racionales, entonces:*

a) $\prec$ *cumple el axioma de transitividad, pero no el de reflexividad.*

b) $\sim$ *define una relación de equivalencia.*

c) *Sí* $\mathbf{x}\succ\ \mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$*, entonces* $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$*.*

DEMOSTRACIÓN.

a) Primero demostremos que $\prec$ no cumple el axioma de reflexividad. Para hacerlo supongamos que si lo hace, es decir existe $\mathbf{x} \in X$ tal que $\mathbf{x} \prec \mathbf{x}$, pero entonces tendríamos que $\mathbf{x} \precsim \mathbf{x}$, y al mismo tiempo $\mathbf{x} \not\succsim \mathbf{x}$ lo cual no puede ser.

Probaremos ahora que cumple el axioma de transitividad. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ tales que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$. Entonces tendremos que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$, pero no $\mathbf{x} \precsim \mathbf{y} \precsim \mathbf{z}$, y por hipótesis se tendrá que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{z}$, pero no $\mathbf{x} \precsim \mathbf{z}$, por lo que $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$.

b) Demostraremos que $\sim$ es reflexivo, transitivo y simétrico.

- ***Reflexividad***.$\sim$ es claramente reflexivo, pues una cesta es indiferente a sí misma.
- ***Transitividad.*** Consideremos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ tales que $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$, entonces se tendrá que $\mathbf{x} \precsim \mathbf{y} \precsim \mathbf{z}$ y al mismo tiempo $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$. Pero entonces $\mathbf{x} \succsim \mathbf{z}$ y $\mathbf{z} \succsim \mathbf{x}$, por lo que $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$.
- ***Simetría***. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ tales que $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, entonces tendremos que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$, pero esto es lo mismo que escribir $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ de donde $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$.

c) Para demostrar este inciso supongamos que $\mathbf{z} \succsim \mathbf{x}$. Entonces tendremos que $\mathbf{x}\succ\ \mathbf{y} \succsim \mathbf{z} \succsim \mathbf{x}$, de donde $\mathbf{x}\succ\ \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$, lo cual no puede ser. $\square$

Junto a los axiomas del consumidor, existen otros supuestos que se toman también de manera axiomática y que resultan imprescindibles para el desarrollo de esta teoría, los cuales se listan a continuación:

Continuidad: *Dadas* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$*, los conjuntos* $\{\mathbf{x} \in X : \mathbf{x} \succsim \mathbf{y}\}$ *y* $\{\mathbf{x} \in X : \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}\}$ *son cerrados, por lo que* $\{\mathbf{x} \in X : \mathbf{x} \succ \mathbf{y}\}$ *y* $\{\mathbf{x} \in X : \mathbf{y} \succ \mathbf{x}\}$ *son abiertos.*

El supuesto de continuidad nos dice que si $\{\mathbf{x}_n\}$ es una sucesión de cestas de consumo tales que todas ellas son al menos tan buenas como una cesta $\mathbf{y}$, entonces si tal sucesión converge a una cesta $\mathbf{x}^*$, se tendrá que $\mathbf{x}^*$ es al menos tan buena como $\mathbf{y}$.

La consecuencia más importante del supuesto de continuidad es que si $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$, y si $\mathbf{x}$ es lo suficientemente cercana a $\mathbf{y}$, entonces $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$.

A continuación se presenta una definición con base en la cual se pueden enunciar los supuestos de monotonía débil y fuerte:

Definición 7. *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$*, diremos que* $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$*, si* $x_i \geq y_i \; \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

La definición nos dice que si una cesta de consumo es mayor o igual entrada por entrada a alguna otra, entonces podemos establecer una relación de mayor o igual entre ellas.

Monotonía débil: *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$*, si* $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$*, entonces* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$.

El supuesto de monotonía débil establece que si una cesta de consumo tiene al menos la misma cantidad de todos los bienes que la otra, entonces ésta se preferirá débilmente a la segunda.

Monotonía fuerte: *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$*, si* $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ *y* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$*, entonces* $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

El supuesto de monotonía fuerte nos dice que si una cesta de consumo tiene al menos la misma cantidad de todos los bienes en todas sus entradas, y tiene al menos una entrada en la que tiene más, entonces esta se preferirá estrictamente a la otra.

En otras palabras, la monotonía fuerte establece que un consumidor preferirá las cestas que contengan mayor cantidad de los bienes que las conforman, siempre con el supuesto de que un bien significa la ausencia de males.[1]

Ahora bien, un supuesto más débil que los dos anteriores es el de la insaciabilidad local, el cual nos dice que siempre que haya una variación positiva en las cantidades de una cesta de consumo se mejorará, no importa lo pequeña que esta sea.

Insaciabilidad local:[2] *Para cualquier* $\mathbf{x} \in X$ *y cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe* $\mathbf{y} \in X$ *tal que* $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon$ *y* $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

Antes de continuar con la exposición de los supuestos de la teoría del consumidor, es necesario hacer notar, como se probará en la siguiente proposición, que el supuesto de insaciabilidad local es consecuencia de suponer que se tienen preferencias monótonas en sentido estricto.

Proposición 1.2 *El supuesto de monotonía fuerte implica el de insaciabilidad local.*

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in X$ tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, y sea $\varepsilon > 0$. Definimos la cesta de consumo $\mathbf{y} = (x_1 + \delta, x_2, ..., x_n)$, con $\delta > 0$, dado que $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \delta$ bastará tomar $\delta < \varepsilon$. Ahora bien, se cumple que $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, entonces, por hipótesis $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. $\square$

Otros supuestos que se acostumbra hacer sobre las preferencias del consumidor son la convexidad y la convexidad estricta.

Convexidad: *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$, *tales que* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{z}$ *y* $\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$, *entonces* $t\mathbf{x} + (1-t)\,\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$ *para toda* $t \in [0, 1]$.

Convexidad Estricta: *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$, *tales que* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \succsim \mathbf{z}$ *y* $\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$, *entonces* $t\mathbf{x} + (1-t)\,\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$ *para toda* $t \in (0, 1)$.

La consecuencia económica más importante de la convexidad, es que con ella se puede probar que dadas dos cestas, bajo ciertas condiciones, la cesta media se prefiere a las extremas.

[1] Se define un mal como una mercancía que no le agrada al consumidor.

[2] En la definición $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, es decir se trata de la norma euclidiana.

Proposición 1.3 *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ *tales que* $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. *Entonces si las preferencias son convexas se tendrá que la cesta media se prefiere a las extremas.*

Demostración. Por definición, $\mathbf{x}$ es indiferente a $\mathbf{y}$ si y sólo si $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$. Luego, por el axioma de reflexividad tenemos que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}$, por lo que usando la hipótesis de convexidad en las preferencias se obtiene:

$$t\mathbf{x} + (1-t)\,\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}\ \forall t \in [0,1]$$

Pero entonces, tomando $t = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} \succsim \mathbf{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\mathbf{x} + \mathbf{y}\right) \succsim \mathbf{x}$$

y como $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ se tendrá que la cesta media también se prefiere a la cesta $\mathbf{y}$. □

Debe observarse que la proposición 1.3 también es válida cuando se tiene el supuesto de convexidad estricta, y de hecho, como se verá más adelante, este caso es más relevante para la teoría de la demanda.

1.3. El Conjunto Presupuestario

El objetivo de este apartado es estudiar la forma en que se comporta el presupuesto que una persona destina al consumo, suponiendo que no existe ningún tipo de crédito.

El conjunto presupuestario de un consumidor, es aquel que contiene a todas las cestas que puede adquirir dados los precios del mercado y su ingreso. A dichas cestas se les conoce como *cestas factibles*.

Definición 8. *Al conjunto dado por* $\{\mathbf{x} \in X : \mathbf{px} \leq m\}$ *se le llama conjunto presupuestario del consumidor, donde* $\mathbf{p}$ *es un vector de precios y* m *representa el ingreso. A este conjunto se le denota como* $B(\mathbf{p}, m)$.

Un subconjunto muy importante del conjunto presupuestario es aquel dado por las cestas factibles que hacen que la renta del consumidor se agote por completo, esto es $\{\mathbf{x} \in X : \mathbf{px} = m\}$, a este subconjunto se le conoce como *hiperplano presupuestario.*

Una observación importante sobre el conjunto presupuestario es que se trata de un conjunto convexo, lo cual se prueba en seguida:

Proposición 1.4 *El conjunto presupuestario es convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{p}, m)$, entonces, por definición, se tiene que

$$\mathbf{px}_1 \leq m \text{ y } \mathbf{px}_2 \leq m$$

Por lo que

$$t\mathbf{px}_1 \leq tm \text{ y } (1-t)\,\mathbf{px}_2 \leq (1-t)\,m \;\; \forall t \in [0,1]$$

Sumando

$$t\mathbf{px}_1 + (1-t)\,\mathbf{px}_2 \leq tm + (1-t)\,m = m \;\; \forall t \in [0,1]$$

Por lo que el conjunto presupuestario es convexo. □

Es frecuente que el conjunto presupuestario se analice para el caso en que sólo existen dos bienes, ya que en este contexto se suele suponer que uno de los bienes es simple y que el otro es compuesto.[3]

Ahora bien, si suponemos que sólo tenemos dos bienes, podemos asumir que la cesta de consumo de nuestro agente es (x, y), y que los precios de estos bienes son p_1 y p_2 respectivamente, lo cual se puede escribir a manera de vector como (p_1, p_2).

Luego el consumo debe estar restringido a la desigualdad $p_1x + p_2y \leq m$, y cuando las cestas agotan por completo el ingreso del consumidor tendremos $p_1x + p_2y = m$, a esta ecuación se le conoce como *recta presupuestaria*.

Así pues, si ponemos la recta presupuestaria en términos del bien y, obtenemos:

$$y = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x$$

[3]Se dice que un bien es compuesto si representa a más de una mercancía.

lo que muestra que tiene pendiente negativa igual a $-\frac{p_1}{p_2}$. Esta pendiente representa lo que se deja de consumir del bien y cuando el consumo del bien x aumenta en una unidad.

Gráficamente la recta presupuestaria y el conjunto presupuestario se muestran en la figura 1.1.

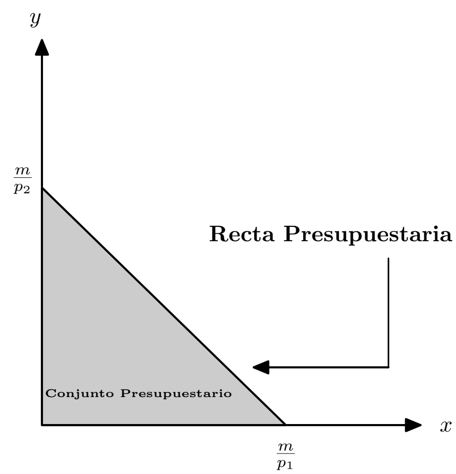

Figura 1.1: La Recta Presupuestaria

Los valores $\frac{m}{p_1}$ y $\frac{m}{p_2}$, en la figura 1.1, representan la cantidad que se obtiene de un bien cuando no se consume el otro en lo absoluto.

Ahora bien, dado que los precios y la renta pueden variar, entonces la recta presupuestaria puede desplazarse.

El primer desplazamiento que estudiaremos será el de la renta cuando se mantienen fijos los precios. En este caso lo que obtenemos es un par de rectas paralelas.

Si m' representa la variación en la renta, y además $m < m'$, la recta presupuestaria se desplazará hacia fuera a la derecha. Por el contrario, si $m' < m$, entonces el desplazamiento será hacia dentro a la izquierda. Es claro que la pendiente de la nueva recta presupuestaria será la misma que la de la original.

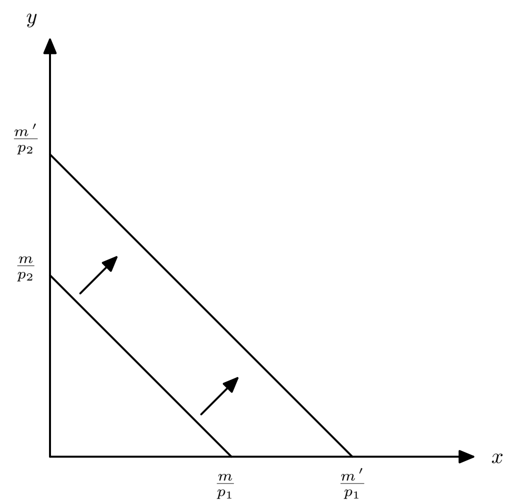

Figura 1.2: Aumento del Ingreso

En la figura 1.2, se muestra el caso en que $m < m'$, en el caso en que $m' < m$ el desplazamiento se da en sentido contrario.

Ahora bien, el segundo caso es cuando uno de los precios aumenta mientras que el otro y la renta se mantienen fijos. Bajo tales supuestos tendremos que la recta presupuestaria se volverá más inclinada, por lo que el cambio se da en la pendiente de la recta.

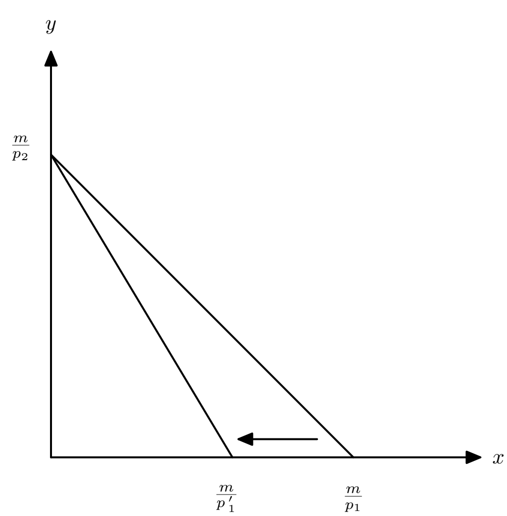

Figura 1.3: Aumento del Precio p_1

En la figura 1.3 se muestra el caso particular cuando el precio del bien x aumenta de p_1 a ${p'}_1$. Lo que ocurre, de acuerdo con la figura 1.3, es que la cantidad que se puede adquirir del bien x disminuye, mientas que la cantidad que se puede adquirir del bien y se mantiene constante.

El tercer caso es aquel en el que los precios varían en la misma cantidad. Si tal variación es una cantidad $t > 1$, entonces el efecto será el mismo que el de una reducción en el ingreso, ya que

$$tp_1x + tp_2y = m \Leftrightarrow p_1x + p_2y = \frac{m}{t}$$

Es claro entonces que si ambos precios varían en una cantidad $0 < t < 1$, el efecto será el de un aumento en el ingreso.

1.4. Las Curvas de Indiferencia

Debemos comenzar esta sección dando una definición formal de curva de indiferencia.

Definición 9. *Se le llama curva de indiferencia al lugar geométrico de los puntos (cestas de consumo), que otorgan la misma satisfacción al consumidor, de tal manera que a este le es indiferente la combinación particular que obtiene.*

La figura 1.4 muestra la forma geométrica con la que los economistas acostumbran representar las curvas de indiferencia.[4]

[4] Existen diferentes formas geométricas que puede adoptar una curva de indiferencia, en realidad la forma de la curva depende del tipo de bienes que se pretenda representar.

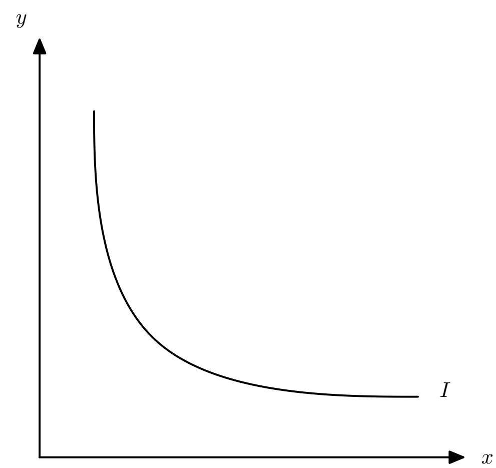

Figura 1.4: Forma General de una Curva de Indiferencia

Por otro lado, la cantidad que una cesta de consumo contiene de ambos bienes determina si una cesta determinada pertenece o no al misma curva (conjunto) de indiferencia que alguna otra.

Definición 10. *Al conjunto* $\{\mathbf{y} \in X : \ \mathbf{y} \succsim \mathbf{x} \, p.\,a.\ \mathbf{x} \in X\}$ *se le llama conjunto preferido débilmente.*

En otras palabras, el conjunto preferido débilmente es aquel que contiene todas las cestas de consumo que son al menos tan buenas como alguna otra del conjunto de consumo. Cuando sólo se tienen dos bienes podemos representarlo como en la figura 1.5.

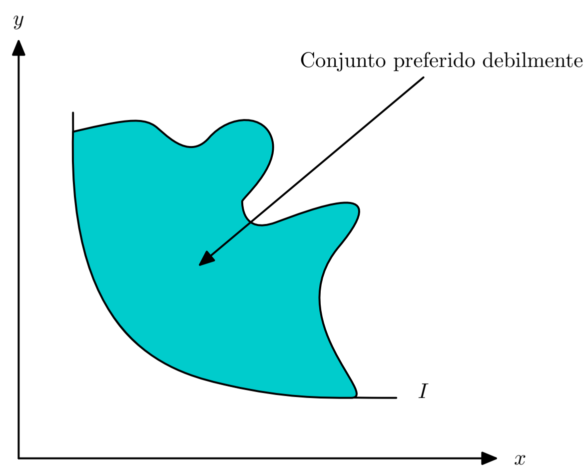

Figura 1.5: Conjunto Preferido Débilmente

Se sigue de la definición 10 que los puntos de la frontera del conjunto preferido débilmente forman las curvas de indiferencia.

Ahora bien, dado que no todas las cestas de consumo le dan el mismo nivel de satisfacción al consumidor, es claro que deben existir diferentes curvas de indiferencia asociadas a tales niveles de agrado, hecho del que se puede intuir que no pueden intersecarse. A continuación se establece formalmente tal hecho.

Proposición 1.5 *Las curvas de indiferencia que representan distintos niveles de preferencia no pueden cortarse.*

DEMOSTRACIÓN. Sean I y II curvas de indiferencia que representan distintos niveles de preferencia, y sean $\mathbf{x} \in \mathrm{I}$ y $\mathbf{y} \in \mathrm{II}$.

Supongamos que $\mathrm{I} \bigcap \mathrm{II} \neq \emptyset$, entonces existe $\mathbf{z} \in \mathrm{I} \bigcap \mathrm{II}$, lo que implica que $\mathbf{z} \sim \mathbf{x}$ y $\mathbf{z} \sim \mathbf{y}$, pero entonces, por la reflexividad y transitividad de $\sim$, se tiene que $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, lo cual no puede ser. $\square$

Una vez probada la proposición 1.5, podemos dar la siguiente definición.

Definición 11. *Se le llama mapa de indiferencia a la gráfica que muestra todas las curvas de indiferencia según las cuales se ordenan las preferencias del consumidor.*

Gráficamente, por la proposición 1.5, y dada la forma general de las curvas de indiferencia, un mapa de indiferencia se puede dibujar como muestra la figura 1.6.

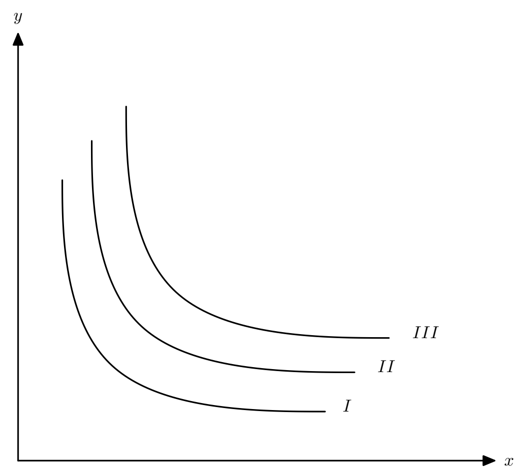

Figura 1.6: Mapa de Indiferencia

Una observación que se puede hacer a la forma general de las curvas de indiferencia es que tienen pendiente negativa. Tal hecho es consecuencia del supuesto de monotonía en las preferencias.

Proposición 1.6 *Si las preferencias son fuertemente monótonas, entonces las curvas de indiferencia tienen pendiente negativa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbf{x} \in X$ tal que $\mathbf{x} = (x, y)$, entonces si se hace variar el bien x en una cantidad $k > 0$, dejando constante al bien y, se tendrá, por hipótesis, que $(x + k, y) \succ (x, y)$, o bien $(x, y) \succ (x - k, y)$ con $x - k \geq 0$.

Pero entonces las cestas en las que se ha variado x no pueden estar en la misma curva de indiferencia que la cesta $\mathbf{x}$, con lo que se elimina la posibilidad de que la curva de indiferencia tenga pendiente cero.

Ahora bien, el caso en que se deja constante el bien x y varía el bien y es análogo, pero en este caso se eliminaría la posibilidad de una pendiente infinita.

Si se varían tanto x como y en una cantidad $k > 0$ y $k^{'} > 0$ respectivamente, entonces, volviendo a aplicar la hipótesis, se tendrá que $(x + k, y + k') \succ (x, y)$, o bien $(x, y) \succ (x - k, y - k')$ con $x - k \geq 0$ y $y - k^{'} \geq 0$.

Por lo que las cestas en que las cantidades de ambos bienes aumentan o disminuyen, tampoco pueden estar en la misma curva de indiferencia que la cesta $\mathbf{x}$, con lo que se elimina el caso de la pendiente positiva.

Por lo tanto, las únicas cestas que pueden pertenecer a la misma curva de indiferencia que la cesta son aquellas en que un bien aumenta y el otro disminuye, pero entonces la curva de indiferencia a la que pertenece la cesta de consumo $\mathbf{x}$, tiene pendiente negativa. □

En otras palabras, la proposición 1.6 nos dice que las cestas de consumo indiferentes a una cesta arbitraria deben hallarse, cuando se tiene el supuesto de monotonía en las preferencias, arriba a la izquierda y abajo a la derecha de ésta. Pero no nos dice como encontrar las cestas que forman tal curva.

El reciproco de la proposición 1.6 no es necesariamente cierto, ya que si en lugar de tener dos bienes tuviésemos dos males,[5] entonces tendríamos una curva de indiferencia con pendiente negativa, pero no podría haber preferencias monótonas.

También es posible notar que las mejores cestas se encontrarán arriba a la derecha en el plano, pues estas contendrán más de ambos bienes, y al contrario, las peores cestas estarán abajo a la izquierda.

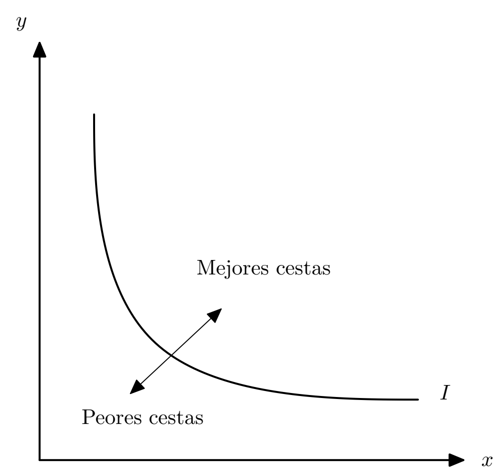

Figura 1.7: Representación de las Cestas de Consumo bajo Monotonía Fuerte

Sin embargo, hasta el momento, no hemos establecido ningún criterio que nos diga cuál es la mejor cesta para nuestro consumidor.

[5]Se define un mal como una mercancía que no le agrada al consumidor.

1.5. La Función de Utilidad

1.5.1. Definición y Condiciones Necesarias de Existencia

Uno de los instrumentos más importantes con que cuenta la teoría económica para poder llevar a cabo el análisis de las preferencias del consumidor es la función de utilidad, cuya definición se precisa formalmente en seguida.

Definición 12. *Se dice que una función* $u : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función de utilidad que representa una relación de preferencias* $\succsim$*, si para toda* $\mathbf{x} \in X$ *se tiene que* $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ *si y sólo si* $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$.

La definición nos dice que una función de utilidad respeta el orden de las preferencias en el sentido de que a las cestas de consumo mayormente preferidas les asigna un valor (un número real) más alto que a aquellas que se prefieren en menor medida.

El siguiente resultado nos da condiciones necesarias para poder representar las preferencias del consumidor a través de una función de utilidad.

Proposición 1.7 *Una relación de preferencias* $\succsim$ *se puede representar con una función de utilidad sólo si es racional.*

DEMOSTRACIÓN. Partimos entonces de que nuestras preferencias se pueden representar con una función de utilidad $u(\cdot)$. Demostraremos primero que si esto pasa las preferencias deben ser completas.

Completitud: como $u(\cdot)$ es un número real, entonces para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ se tiene que $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$, o bien $u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{y})$, pero como u es función de utilidad se tiene que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$, o bien $\mathbf{x} \precsim \mathbf{y}$.

Transitividad: sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ tales que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$. Entonces, como u es una función de utilidad, tendremos que $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$, del mismo modo $u(\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{z})$, pero entonces debe cumplirse que $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{z})$, y por lo tanto $\mathbf{x} \succsim \mathbf{z}$. □

De acuerdo a la proposición 1.7 la racionalidad en las preferencias es condición necesaria pero no suficiente para que estas se puedan representar con una función de utilidad. Pero entonces debe haber algún tipo de preferencias que cumplan con la racionalidad y que pese a ello no se puedan representar mediante una función de utilidad. Un ejemplo de tal tipo de preferencias son las lexicográficas.

La definición que se da a continuación es para el caso en que sólo existe un par de bienes. Sin embargo, con ella es suficiente para nuestros intereses.

Definición 13. *Sea $X = \mathbb{R}^2_+$. Entonces dadas las cestas (x_1, x_2) y (y_1, y_2) se define la relación $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ si "$x_1 > y_1$", o bien "$x_1 = y_1$ y $x_2 > y_2$", a la cual se le llama relación de preferencias lexicográficas.*

De la definición 13 se puede intuir que las preferencias lexicográficas no pueden representarse con una función de utilidad, ya que con dichas preferencias no es posible que dos cestas de consumo distintas sean indiferentes. Sin embargo, para poder corroborar de manera formal que son un contraejemplo al regreso de la proposición 1.7, lo primero que debemos probar es que cumplen la definición de racionalidad.

Proposición 1.8 *Las preferencias lexicográficas son racionales.*

Demostración. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X = \mathbb{R}^2_+$ tales que $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ y $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, con una relación de preferencias lexicográficas.

Completitud: consideremos a las cestas $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ como se definieron, entonces como x_1 y y_1 son números reales deben cumplir exactamente una de las tres afirmaciones siguientes: $x_1 > y_1$, $x_1 < y_1$ o $x_1 = y_1$. Análogamente para x_2 y y_2.

Entonces por ser las preferencias lexicográficas se tendrá que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ en caso de que se cumpla la primera afirmación, o bien $\mathbf{x} \precsim \mathbf{y}$ en caso de que sea la segunda. En caso de que se cumpliera la tercera afirmación se seguiría el mismo procedimiento pero con la segunda entrada de las cestas de consumo, y en caso de que también $x_2 = y_2$, se tendría $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$.

Transitivas: consideremos $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$ tales que $x_1 > y_1$ y $y_1 \geq z_1$, entonces como estos son números reales se cumple que $x_1 > z_1$ y dado que las preferencias son lexicográficas se tiene que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{z}$.

Los otros casos son análogos, por lo que podemos decir que las preferencias lexicográficas cumplen con la definición de transitividad. $\square$

Una vez que hemos probado que las preferencias lexicográficas son racionales, debemos probar que efectivamente no es posible representarlas con una función de utilidad.

Proposición 1.9 *Las preferencias lexicográficas no se pueden representar con una función de utilidad.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las cestas de consumo $(x_1, 1)$, $(x_1, 2)$ y las cestas $(x_1', 1)$ y $(x_1', 2)$, entre las cuales hay una relación de preferencias lexicográficas.

Supongamos ahora que existe una función de utilidad u que representa las preferencias entre dichas cestas.

Ahora bien, por la densidad de los racionales,[6] $\mathbb{Q}$, en los reales se tiene que para x_1 siempre es posible encontrar un número racional tal que

$$u(x_1, 2) > r(x_1) > u(x_1, 1)$$

Análogamente para x_1'.

Pero por el carácter lexicográfico de las preferencias se tiene que

$$x_1 > x_1' \Rightarrow r(x_1) > r(x_1')$$

Ya que

$$r(x_1) > u(x_1, 1) > u(x_1', 2) > r(x_2)$$

Pero entonces tendríamos que r es una función $1 - 1$ tal que $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$, lo cual no puede ser. $\square$

El supuesto que no satisfacen las preferencias lexicográficas es el de continuidad, el cual, como se verá más adelante, es parte del conjunto de condiciones suficientes para que exista una función de utilidad continua.

[6]Se dice que un conjunto E es denso en un espacio métrico X, si cada punto de X es un punto límite de E, un punto de E o ambos.

Ahora bien, para corroborar que las preferencias lexicográficas no cumplen dicho supuesto utilizaremos el siguiente par de sucesiones ya que nos proporcionan un contraejemplo sencillo.
Así pues, consideremos:

$$\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \text{ y } \mathbf{y}_n = (0,1)$$

Bajo el supuesto de preferencias lexicográficas tenemos que $\mathbf{x}_n \succ \mathbf{y}_n$. Sin embargo, a medida que n crece tenemos que las preferencias se invierten.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = (0,0) \prec (0,1) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n$$

Por lo que las preferencias lexicográficas no pueden ser continuas.

La última proposición que se presenta en este apartado, hace referencia a la necesidad de tener preferencias continuas para así poder contar con una función de utilidad continua, propiedad que resultará muy relevante más adelante en este capítulo.

Proposición 1.10 *Si $u : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de utilidad continua, entonces las preferencias que representa son continuas.*

Demostración. Consideremos las sucesiones de cestas de consumo $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ y $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$ tales que $\mathbf{x}_n \succsim \mathbf{y}_n$, entonces como u es una función de utilidad se tendrá que $u(\mathbf{x}_n) \geq u(\mathbf{y}_n)$, y como u es una función continua se tendrá que $u(\mathbf{x}_n) \to u(\mathbf{x})$, y también $u(\mathbf{y}_n) \to u(\mathbf{y})$, pero entonces $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$, y por ser u función de utilidad se tiene que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$. □

1.5.2. Condiciones de Suficiencia para la Función de Utilidad

Una vez que hemos definido y explicado a que nos referimos por función de utilidad, y que hemos probado que no siempre podemos contar con tal función para ordenar las preferencias, aun cuando estas sean racionales, es necesario que demos condiciones de suficiencia para su existencia.

La primera proposición que probaremos nos remite a que la manera en que una función cualquiera asigna a las preferencias determina que se le pueda o no considerar como función de utilidad.

Proposición 1.11 *Si las preferencias* $\succsim$ *son racionales y* $u : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $u(\mathbf{x}_i) > u(\mathbf{x}_j) \Rightarrow \mathbf{x}_i \succ \mathbf{x}_j$, *y que* $u(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_j) \Rightarrow \mathbf{x}_i \sim \mathbf{x}_j$, *entonces* u *es una función de utilidad que representa las preferencias* $\succsim$.

Demostración. Partimos entonces de que si $u(\mathbf{x}_i) > u(\mathbf{x}_j)$ entonces $\mathbf{x}_i \succ \mathbf{x}_j$ y de que $u(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_j) \Rightarrow \mathbf{x}_i \sim \mathbf{x}_j$, entonces dado que $u(\cdot)$ está en los reales tenemos que si $u(\mathbf{x}_i) > u(\mathbf{x}_j)$ o $u(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_j)$, entonces $\mathbf{x}_i \succ \mathbf{x}_j$ o $\mathbf{x}_i \sim \mathbf{x}_j$ pero esto es lo mismo que escribir $u(\mathbf{x}_i) \geq u(\mathbf{x}_j) \Rightarrow \mathbf{x}_i \succsim \mathbf{x}_j$.

Falta probar que $\mathbf{x}_i \succsim \mathbf{x}_j \Rightarrow u(\mathbf{x}_i) \geq u(\mathbf{x}_j)$. Para ello supongamos que $u(\mathbf{x}_i) < u(\mathbf{x}_j)$, pero entonces, por hipótesis, $\mathbf{x}_i \prec \mathbf{x}_j$, lo cual es una contradicción. $\square$

La proposición 1.7 señala que si las preferencias se pueden representar por medio de una función de utilidad entonces son racionales. Mientras que la proposición 1.9 muestra que el reciproco de dicha proposición es falso en términos generales.

No obstante, como se verá con la siguiente proposición, es posible que se encuentre una función de utilidad únicamente bajo la hipótesis de racionalidad, si se permite que el conjunto de consumo sea finito.

Teorema 1.12 *Si el conjunto de consumo es finito y las preferencias son racionales, entonces existe una función de utilidad que representa esas preferencias.*

Demostración. Consideremos el conjunto de consumo finito $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k\}$.

Partamos del caso en que las preferencias son estrictas, es decir aquel en que no existen cestas indiferentes. Así, por la finitud de X, y dado que no hay cestas indiferentes, podemos suponer que $\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}_2 \prec ... \prec \mathbf{x}_k$. Luego definimos:

$$u : X \longrightarrow \{1, 2, ..., k\}$$
$$x_i \longmapsto i$$

Es claro que de esta manera le corresponde un solo valor del contradominio a cada elemento del dominio. Además, se garantiza que a las mejores cestas se les otorga siempre un valor más alto.[7]

Falta probar que $u(\mathbf{x}_i) < u(\mathbf{y}_j) \Rightarrow \mathbf{x}_i \prec \mathbf{y}_j$. Como $u(\mathbf{x}_i) < u(\mathbf{y}_j)$ tendremos por la definición de u que $i < j$, y por el orden dado a las cestas $\mathbf{x}_i \prec \mathbf{y}_j$.

Ahora necesitamos generalizar el argumento al caso en que existen cestas de consumo indiferentes en X.

En este caso, podemos asignar cada colección de cestas indiferentes entre ellas a un único subconjunto $\mathrm{I}_j \subseteq X$, $j = 1, 2, ..., l$, que contenga a todas las cestas pertenecientes a alguna colección.

Obsérvese que los conjuntos I_j, si son diferentes del vacío, deben contener al menos dos cestas de consumo para toda $j = 1, 2, ..., l$, y que además si $i \neq j$ entonces la intersección de los conjuntos I_i e I_j será vacía, ya que las cestas de ambos conjuntos deben ser diferentes en cuanto al nivel de utilidad que le otorgan al consumidor. De esta forma, dada la finitud de X y la racionalidad de las preferencias, podemos ordenar las cestas de tal manera que las mejores para el consumidor reciban un subíndice más alto.

Así pues, definimos la función:

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} i & si\, \mathbf{x}_i \notin \mathrm{I}_j \; \forall\, j \in \{1, 2, ..., l\} \\ \min\{i : x_i \in I_j\} & si\, \mathbf{x}_i \in \mathrm{I}_j \; p.\, a.\, j \in \{1, 2, .., l\} \end{cases}$$

Hemos definido a u como la función que le da el valor de su subíndice a una cesta que no se encuentra contenida en ninguno de los conjuntos de indiferencia, y que a las cestas de consumo que pertenecen a alguno de los subconjuntos de indiferencia les asigna el valor del subíndice más pequeño de las cestas en él contenidas.

Ahora bien, así definida aseguramos que el valor que reciben las cestas no contenidas en los conjuntos de indiferencia es único, y por el orden que se les dio a estas se garantiza que las mejores reciben siempre el valor más alto. Mientras que en el caso de las cestas que sí pertenecen a dichos conjuntos, dado que la intersección es el vacío, también reciben un valor único, el cual, por la forma en que se definió u, es igual para todas ellas.

Así pues, debemos corroborar que se cumple $u(\mathbf{x}_i) > u(\mathbf{x}_j) \Rightarrow \mathbf{x}_i \succ \mathbf{x}_j$, y que $u(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_j) \Rightarrow \mathbf{x}_i \sim \mathbf{x}_j$. Así pues en el primer

[7] Nótese que ninguna cesta puede recibir un valor más alto que el de $\mathbf{x}_k$

caso debe notarse que si $u(\mathbf{x}_i) > u(\mathbf{x}_j)$ entonces siempre tendremos que $i > j$, y además implica que $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_j$ no pueden estar en el mismo conjunto de indiferencia, en caso de que estén en alguno, de donde $\mathbf{x}_i \succ \mathbf{y}_j$. Debe observarse que existen diversos casos, ya que puede ser que alguna de las cestas se encuentre en algún conjunto de indiferencia y la otra no, que ambas estén en los conjuntos de cestas indiferentes entre sí, o bien que ninguna esté en dichos conjuntos. Sin embargo, en todos estos casos la definición de u nos garantiza que el subíndice de aquella que se prefiere estrictamente siempre será mayor.

En el segundo caso, si $u(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_j)$, entonces tenemos, por un lado, que si $i = j$ se trata de la misma cesta, y por tanto son indiferentes. Pero si $i \neq j$, entonces $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_j$ deben estar en el mismo conjunto de indiferencia, ya que de otro modo se tendría que la diferencia entre los subíndices daría como resultado que $u(\mathbf{x}_i) \neq u(\mathbf{x}_j)$. □

El teorema 1.12 nos muestra que el problema de las preferencias lexicográficas no sólo se encuentra en el hecho de que no cumplan con el supuesto de continuidad, sino que están definidas cuando $X = \mathbb{R}^2_+$.

Ahora bien, el teorema que se presenta a continuación nos da condiciones, no sólo para que la función de utilidad exista, sino también para que esta sea continua, propiedad, que como ya se mencionó, será de gran ayuda más adelante en este capítulo.

Teorema 1.13 (Existencia de una Función de Utilidad Continua) *Supongamos que las preferencias son racionales, reflexivas, continuas y monótonas en sentido fuerte. En este caso existe una función de utilidad $u : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continua que representa esas preferencias.*

Demostración. Consideremos el vector $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n_+$ formado solamente por unos, y sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ y $u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{x} \sim u(\mathbf{x})\,\mathbf{e}$.

Debemos probar que el número $u(\mathbf{x})$ efectivamente existe y es único, para lo cual consideraremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{t \in \mathbb{R} : t\mathbf{e} \succsim \mathbf{x}\} \text{ y } B = \{t \in \mathbb{R} : t\mathbf{e} \precsim \mathbf{x}\}$$

Ahora bien, $A \neq \emptyset$ por el supuesto de monotonía en las preferencias, y $B \neq \emptyset$, pues al menos tiene al elemento $t = 0$. Asimismo, los conjuntos A y B son cerrados por el supuesto de continuidad en las preferencias.

Ahora demostraremos que $\mathbb{R} = A \bigcup B$, y lo haremos por doble contención.

$\subseteq$) Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces por el supuesto de completitud en las preferencias tenemos que $t\mathbf{e} \succsim \mathbf{x}$, o bien $t\mathbf{e} \precsim \mathbf{x}$ por lo que $t \in A$ o $t \in B$, es decir $t \in A \bigcup B$.

$\supseteq$) Sea $t \in A \bigcup B$, entonces $t \in A$ o $t \in B$, pero entonces, por la forma en que tales conjuntos se definieron, se tiene que $t \in \mathbb{R}$.

Con lo que se demuestra que bajo el supuesto de completitud en las preferencias $\mathbb{R} = A \bigcup B$, además con esto se prueba que los conjuntos A y B no pueden ser disjuntos dado que $\mathbb{R}$ es un conjunto conexo.

Lo anterior significa, aunado a que ambos conjuntos son cerrados y no vacíos, que $A \bigcap B \neq \emptyset$, por lo que existe algún escalar t_x tal que $t_x\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$.

Para probar la unicidad de t_x, supongamos que existe t'_x tal que $t'_x\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$, por la reflexividad y transitividad de las preferencias se tendrá que $t_x\mathbf{e} \sim \mathbf{x} \sim t'_x\mathbf{e}$ lo que implica $t_x\mathbf{e} \sim t'_x\mathbf{e}$, y por el supuesto de monotonía fuerte podemos asegurar que $t_x = t'_x$. Por lo que es único.

Ahora debemos probar que dicha función de utilidad representa las preferencias subyacentes, para lo cual consideramos:

$$u(\mathbf{x}) = t_x \text{ donde } t_x\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$$

$$u(\mathbf{y}) = t_y \text{ donde } t_y\mathbf{e} \sim \mathbf{y}$$

En caso de que $t_x < t_y$, por la monotonía fuerte en las preferencias se tendrá $t_x\mathbf{e} \prec t_y\mathbf{e}$, pero entonces $\mathbf{x} \sim \mathbf{t_x e} \prec t_y\mathbf{e} \sim \mathbf{y}$, de donde $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$. Y si ahora partimos de que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, entonces tendremos que $t_x\mathbf{e} \succ t_y\mathbf{e}$, por lo que $t_x > t_y$.

Con lo que se demuestra que es una función de utilidad. Falta probar que es continua, y para hacerlo consideraremos una sucesión de cestas de consumo $\{\mathbf{x}_n\}$ tal que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$. Entonces debemos demostrar que $u(\mathbf{x}_n) \longrightarrow u(\mathbf{x})$.

Supongamos que la sucesión $u(\mathbf{x}_n)$ diverge. Entonces existe $\varepsilon > 0$ para todo entero N tal que para $n \geq N$ se tiene que $|u(\mathbf{x}_n) - u(\mathbf{x})| \geq \varepsilon$. Pero entonces $u(\mathbf{x}_n) \geq \varepsilon + u(\mathbf{x})$, o $u(\mathbf{x}_n) \leq u(\mathbf{x}) - \varepsilon$.

Consideremos que estamos en el caso en que $u(\mathbf{x}_n) \geq \varepsilon + u(\mathbf{x})$, entonces se tiene que $\mathbf{x}_n \sim u(\mathbf{x}_n)\,\mathbf{e} \succsim \varepsilon\mathbf{e} + u(\mathbf{x})\,\mathbf{e} \sim \varepsilon\mathbf{e} + \mathbf{x}$, y por transitividad $\mathbf{x}_n \succsim \varepsilon\mathbf{e} + \mathbf{x}$, pero entonces, para una n lo suficientemente grande, dada la monotonía fuerte en las preferencias, se tendrá que $\mathbf{x}_n \prec \varepsilon\mathbf{e} + \mathbf{x}$, lo que contradice el supuesto de que las preferencias son continuas.

El otro caso es análogo, por lo que podemos concluir que $u(\mathbf{x}_n) \longrightarrow u(\mathbf{x})$, y por tanto que la función de utilidad encontrada es continua. $\square$

Las funciones de utilidad halladas en los teoremas 1.12 y 1.13 son de carácter ordinal, es decir el número que asigna la función de utilidad a una cesta de consumo por sí mismo carece de significado, ya que lo verdaderamente importante es la diferencia entre los valores, pues así nos podemos dar cuenta de cuáles son las cestas que el consumidor prefiere. No obstante, ninguno de los dos teoremas nos dice algo sobre la unicidad de la función que hemos hallado. En realidad, la función de utilidad no es única, y la siguiente proposición lo prueba.

Proposición 1.14 *Supongamos que la relación de preferencias del consumidor es representable por una función de utilidad* $u : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$. *Entonces cualquier función de la forma* $v = f(u(\mathbf{x}))$, *donde* f *es una función monótona creciente,*[8] *también es una función de utilidad que representa la misma relación de preferencias. Más aún, si* f *y* u *son continuas, entonces* v *es continua.*

Demostración. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \subseteq \mathbb{R}^n_+$ y u una función de utilidad que representa las preferencias del consumidor, entonces por definición tenemos que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ si y sólo si $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$, pero dado que f es una función monótona creciente, lo anterior ocurrirá si y sólo si $f(u(\mathbf{x})) \geq f(u(\mathbf{y}))$.

[8] Recordemos que una función real sobre (a, b) es monótona creciente si $a < x < y < b$ implica que $f(x) < f(y)$.

Lo anterior significa que f respeta las preferencias $\succsim$, por lo que cumple con la definición de función de utilidad.

Finalmente, si u y f son continuas, la continuidad de v se sigue de que la composición de dos funciones continuas es continua. $\square$

De la proposición 1.14 resulta obvio que dos funciones de utilidad que representan las mismas preferencias no necesariamente deben asignarle el mismo valor a una misma cesta, lo único que deben hacer es preservar el orden.[9]

Ejemplo 1.1
Construcción de una Función de Utilidad cuando sólo Existen dos Bienes

Antes de construir una función de utilidad debemos probar la siguiente proposición, ya que como veremos más adelante nos permitirá asignar un solo valor a las curvas de indiferencia de algún mapa.

Proposición 1.15 *Si las preferencias son monótonas, entonces una diagonal por el origen de un mapa de indiferencia cortará una sola vez a las curvas de indiferencia.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe una curva de indiferencia que es cortada por la diagonal más de una vez, entonces existe al menos una cesta de consumo que contiene mayor cantidad de ambos bienes que alguna otra en la misma curva, lo cual es particularmente claro para las cestas que quedan sobre la diagonal.

Pero entonces, dada la monotonía en las preferencias, se tendrá que la cesta de consumo con mayor cantidad de ambos bienes se preferirá sobre la otra, lo cual contradice el hecho de que ambas cestas están en la misma curva de indiferencia. $\square$

[9] Debe observarse que la proposición 1.14 nos muestra que para que una función pueda ser usada como función de utilidad basta probar que esta es monótona creciente.

Para ver más claramente la demostración consideremos la figura 1.8.[10]

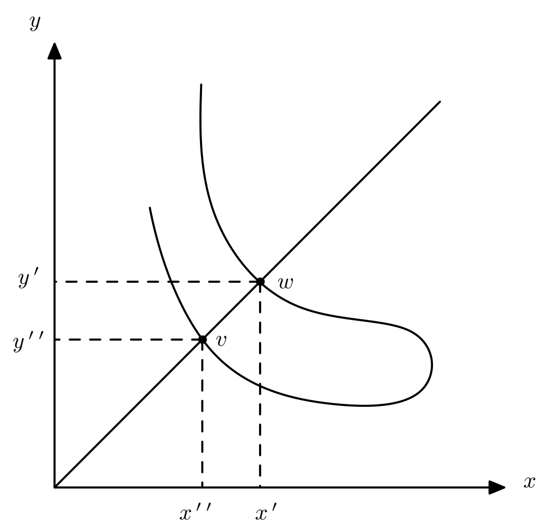

Figura 1.8: Curva de Indiferencia con una Torcedura

Esta figura muestra que es necesario que la curva de indiferencia tenga al menos una torcedura para que pueda ser cortada más de una vez por la diagonal, pero entonces resulta claro que la cesta w tiene mayor cantidad de ambos bienes que la cesta v, pero entonces dada la monotonía se tendría que $w \succ v$, lo que contradice el hecho de que $w \sim v$.

Ahora bien, para construir nuestra función de utilidad consideremos el mapa de indiferencia de la figura 1.9.

[10]Es necesario notar que la proposición 1.6 nos permite dibujar las curvas de indiferencia con pendiente negativa

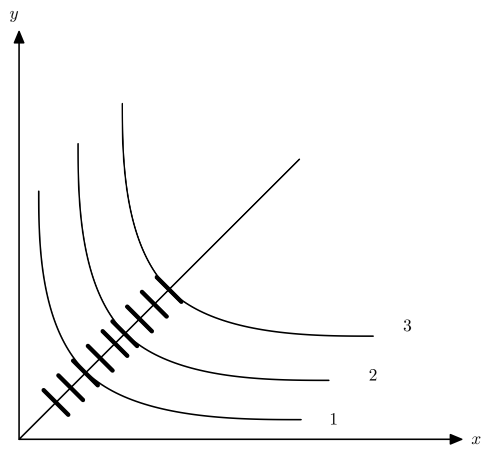

Figura 1.9: Función de Utilidad con dos Bienes

Así pues, para obtener la función de utilidad, primero se traza una diagonal por el origen del mapa de indiferencia, y posteriormente se le asigna un valor a las curvas de indiferencia según su distancia al origen medida a lo largo de la diagonal.

Ahora bien, la proposición 1.15 nos garantiza que el valor que se asigne a la curva de indiferencia será único, luego podemos asegurar que se respeta el orden de las preferencias, y que por tanto hemos encontrado una función de utilidad cuando las preferencias son monótonas y sólo tenemos dos bienes.

Ejemplo 1.2
Obtención de una Curva de Indiferencia a partir de una Función de Utilidad.

Uno de los principales provechos que se pueden obtener de la función de utilidad es que a través de ellas se pueden trazar las curvas de indiferencia.

Lo anterior es posible ya que por la definición 9, basta que la función de utilidad se iguale a un valor constante, luego todos los valores que tomen las variables y que igualen a la función a la constante asignada serán las cestas que formen la curva de indiferencia.

Lo anterior nos dice que las curvas de indiferencia son los valores de un conjunto de nivel formado por la función de utilidad. Así pues, si f representa una función de utilidad, entonces las cestas de consumo que forman una curva de indiferencia serán los elementos del siguiente conjunto:

$$\{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) = k, \ k \in \mathbb{R}\}$$

Para nuestro ejemplo numérico consideremos una función de utilidad Cobb – Douglas en su forma $f(\mathbf{x}) = x_1 x_2$ y consideremos $k = 1$. [11]

x_1	x_2
6	1/6
5	1/5
4	1/4
3	1/3
2	1/2
1	1
1/2	2
1/3	3
1/4	4
1/5	5
1/6	6

Cuadro 1.1: Valores para $x_1 x_2 = 1$

Así pues, para un consumidor cuyas preferencias estén representadas por una función Cobb – Douglas como las antes señaladas, en el caso de dos bienes, los valores del cuadro 1 muestran las cestas de consumo que le serán indiferentes cuando obtiene una unidad de utilidad.

La siguiente gráfica muestra la forma que tienen la curva de indiferencia de este consumidor particular.

[11] La forma general de una función de utilidad Cobb – Douglas está dada por $u(\mathbf{x}) = x_1^a x_2^b$ donde a y b son valores positivos que describen las preferencias del consumidor.

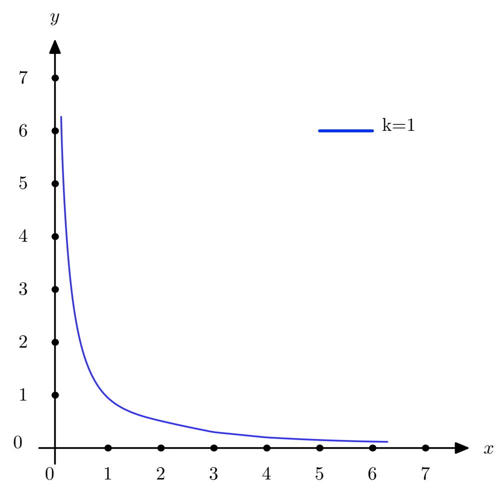

Figura 1.10: Curva de Indiferencia para $x_1 x_2 = 1$

1.6. La Maximización del Beneficio

El problema de la maximización del beneficio del consumidor tiene su origen en dos de los supuestos que la teoría económica neoclásica hace sobre el comportamiento del consumidor, los cuales son:

Racionalidad. Se considera que el consumidor es un ser racional, que procura la maximización de su beneficio tomando como base su ingreso y los precios de mercado.

Información. El consumidor posee pleno conocimiento de todo aquello que sea relevante para sus decisiones, es decir tiene certidumbre.

Así pues, podemos decir que los principales rasgos del consumidor son la racionalidad y la posesión de información en el sentido mencionado.

Ahora bien, el supuesto de la racionalidad del consumidor se puede expresar de manera matemática como un problema de maximización de la función de utilidad que queda de la siguiente manera:

$$\max u(\mathbf{x})$$

$$\textit{sujeta a } \mathbf{px} \leq m$$

Para saber si este problema tiene solución debemos comprobar que la función objetivo es continua y que el conjunto de restricciones es compacto.

La función de utilidad es continua bajo las hipótesis del teorema 1.13, y el conjunto presupuestario es cerrado, por lo que, dado que es un subconjunto $\mathbb{R}^n$, sólo falta probar que es acotado, lo cual se sigue si se toma $p_i > 0\ \forall i \in \{1, .., n\}$. Ya que si $p_i = 0$ $p.a.$ $i \in \{1, .., n\}$ podría ocurrir que el consumidor deseara una cantidad infinita de algún bien.

Ahora bien, debemos observar que la elección de la cesta maximizadora es independiente de la función de utilidad que se elija, pues si a dicha cesta la representamos como $\mathbf{x}^*$ se debe cumplir que $\mathbf{x}^* \succsim \mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ factible.

Por otro lado, el conjunto de elecciones óptimas es homogéneo de grado cero en los precios y la renta, ya que si multiplicamos todos los precios y la renta del conjunto presupuestario por una constante positiva no lo alteramos, y por tanto tampoco se altera al conjunto de elecciones óptimas.

La siguiente proposición ilustra la forma en que se comporta la elección óptima cuando asumimos el supuesto de insaciabilidad local.

Proposición 1.16 *Sea $\mathbf{x}^*$ la cesta de consumo que maximiza la utilidad del consumidor. Entonces si las preferencias cumplen el supuesto de insaciabilidad local, no es posible que $\mathbf{px}^* < m$.*

Demostración. Sea $\mathbf{x}^*$ la elección que maximiza la utilidad del consumidor. Supongamos que se cumple $\mathbf{px}^* < m$, pero entonces, dado que el costo de $\mathbf{x}^*$ es estrictamente menor que m, tendremos que para toda $\mathbf{x}$ lo suficientemente cercana a $\mathbf{x}^*$ se cumple que su costo será estrictamente menor que m, por lo tanto serán cestas factibles.

Sin embargo, por el supuesto de insaciabilidad local y por el argumento anterior, existirá alguna $\mathbf{y} \in X$ lo suficientemente cercana a $\mathbf{x}^*$ para ser factible y que además cumple que $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}^*$, lo cual no puede ser. □

La importancia de la proposición 1.16 radica en que una cesta maximizadora, dado el supuesto de insaciabilidad local, debe cumplir la restricción presupuestaria en igualdad. Por lo que podemos replantear el problema de maximización de la siguiente manera:

$$v(\mathbf{p}, m) = \max u(\mathbf{x})$$

$$\textit{sujeta a } \mathbf{px} = m$$

Donde v, la función que relaciona los precios y el ingreso, se denomina *función de utilidad indirecta*, y es la que nos indica la utilidad máxima alcanzable. Por otra parte, el valor de $\mathbf{x}$ que resuelve el problema es la cesta demanda por el consumidor.

Así pues, si la función de utilidad es diferenciable, entonces es posible que el problema de optimización se caracterice a través del cálculo. Para lo cual es necesario obtener el lagrangiano del problema de maximización, el cual quedará como:

$$\mathcal{L} = u(\mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{px} - m)$$

Diferenciando el lagrangiano con respecto a x_i, e igualando a cero se obtienen las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0$$

Ahora bien, para poder interpretar estas condiciones es posible dividir la condición de primer orden i-ésima por la j-ésima, con el supuesto de que $p_j \neq 0$, para obtener la siguiente expresión:

$$\frac{\dfrac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j}$$

Al término de la izquierda se le llama Relación Marginal de Sustitución (RMS), y sirve para medir la relación en que el consumidor está dispuesto a sustituir un bien por otro. Por su parte, al término de la derecha se le conoce como Relación Económica de Sustitución (RES), y la maximización implica que son iguales.

Cuando estamos en el caso en que sólo tenemos dos bienes, la relación marginal de sustitución representa la pendiente de las curvas de indiferencia, mientras que la relación económica de sustitución sería la pendiente de la recta presupuestaria, de donde la cesta óptima debe ser el punto de tangencia entre la recta presupuestaria y una curva de indiferencia.

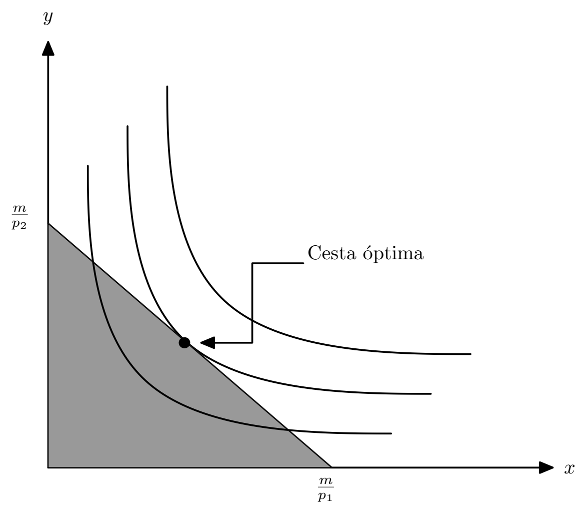

Figure 1.11: Cesta de Consumo Óptima

Es claro que un consumidor informado y racional buscará siempre consumir la cesta óptima.

1.7. La Demanda

Este apartado tiene como objetivo presentar las definiciones y resultados básicos referentes a la teoría de la demanda del consumidor y la demanda de mercado para nuestro objetivo de estudiar el intercambio.

Así pues, debemos comenzar por definir la función de demanda.

Definición 14. *A la función que relaciona la cesta demandada con los precios y la renta se le llama función de demanda y se le denotará como* $x(\mathbf{p}, m)$.

Una de las principales propiedades de la función de demanda es la de ser homogénea de grado cero en los precios,[12] es decir

[12]Se define una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como homogénea de grado k si cumple que $f(tx) = t^k f(x)\ \forall t > 0$.

$x(\mathbf{p}, m) = x(t\mathbf{p}, tm)$ $\forall t > 0$. Esto ocurre porque el conjunto presupuestario no se altera cuando los precios y la renta se multiplican por una constante positiva.

Ahora bien, para nuestro objetivo de estudiar el intercambio es necesario que se tome en cuenta la forma en que se determina la renta. Para cubrir esta necesidad consideraremos que el consumidor cuenta con una dotación inicial de bienes $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, los cuales puede vender a los precios de mercado $\mathbf{p}$. Por lo que la renta estará determinada por la expresión $m = \mathbf{p}\omega$.

Debido a lo anterior, el problema de optimización se convertirá en el siguiente:

$$\max_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})$$

$$sujeta\ a\ \mathbf{px} = \mathbf{p}\omega$$

El problema de optimización arriba descrito dice que el consumidor intenta maximizar su función de utilidad con la restricción de que el valor de su ingreso debe ser igual al valor de su consumo. La solución a este problema está dada por la función de demanda $x(\mathbf{p}, m)$.

Por otra parte, uno de los conceptos más importante en economía es el de demanda bruta, el cual se da a continuación:

Definición 15. *Se le llama demanda bruta a la cantidad total que un agente desea de un bien en particular a los precios vigentes.*

La siguiente definición relaciona en una ecuación la dotación inicial con la cantidad demanda de un bien.

Definición 16. *A la diferencia entre lo que el consumidor demanda del bien i, y lo que inicialmente posee de dicho bien se le llama demanda neta del bien i, y se le representa como $z_i(\mathbf{p}) = x_i - \omega_i$.*

Obsérvese que la demanda neta es la diferencia entre la demanda bruta y la dotación inicial del consumidor. Asimismo, nótese que de la definición se desprende que la demanda neta de un consumidor puede ser negativa, lo cual nos indicaría que lo que se demanda de un bien está por debajo de lo que se tiene inicialmente.

Ahora bien, uno de los principales supuestos que se suelen hacer sobre la función de demanda es que esta es continua, pero para que esto ocurra necesitamos que la cesta demandada sea única, lo cual, como a continuación se demuestra, ocurre cuando las preferencias son estrictamente convexas.

Proposición 1.17 (Unicidad de la Demanda) *Si las preferencias son estrictamente convexas, entonces en el caso en que* $\mathbf{p} > 0$ *hay una única cesta* $\mathbf{x}$ *que maximiza en el conjunto presupuestario del consumidor.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que las cestas $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$, maximizan $u(\cdot)$ en el conjunto presupuestario del consumidor. Pero entonces, por la proposición 1.4, se tendrá que $\frac{1}{2}\mathbf{x}' + \frac{1}{2}\mathbf{x}'' \in B(\mathbf{p}, m)$ y, por la proposición 1.3, se preferirá estrictamente a las cestas $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$, lo cual no puede ser. $\square$

Así pues, la proposición 1.17 nos da condiciones de suficiencia para que la demanda sea única, con lo que se cumplen las condiciones para que de acuerdo al teorema del máximo la utilidad sea continua.[13]

Por el momento nos hemos referido a la demanda del consumidor, sin embargo, por la naturaleza de este trabajo, necesitamos hacer referencia a la demanda de mercado, pues es la base para el estudio del consumidor.

Definición 17. *Se le llama demanda de mercado o demanda agregada a la suma de las funciones de demanda de todos los consumidores, es decir* $\sum_{i=1}^{n} x_i(\mathbf{p}, m)$.

Se sigue inmediatamente que si las funciones de demanda de todos los consumidores son continuas, entonces la demanda agregada también será continua.

Por otro lado, cada consumidor tiene una dotación inicial de bienes, los cuales al sumarse nos dan el total de bienes a ofertarse en el mercado.

Definición 18. *A la suma de las dotaciones iniciales de todos los consumidores se le llama oferta agregada u oferta de mercado, es decir* $\sum_{i=1}^{n} \omega_i$.

Una vez dadas las definiciones 17 y 18, se puede enunciar la definición de la ecuación exceso de demanda.

[13] Véase apendice B, pág. 91.

Definición 19. *A la ecuación dada por* $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ *se le denomina ecuación exceso de demanda.*

Obsérvese que la ecuación de exceso de demanda es el equivalente a nivel agregado de la demanda neta. Asimismo, dado que la función de demanda es homogénea de grado cero, también lo es la ecuación exceso de demanda.

Antes de concluir este apartado, y con ello este capítulo, es necesario aclarar que suponer la existencia de una dotación inicial sin preocuparnos de la forma en que el consumidor la obtuvo hace omisión de la producción, lo que hace que el análisis del siguiente capítulo sea en lo que se conoce como intercambio puro.

Capítulo 2

El Equilibrio General con Intercambio Puro

Antes de comenzar el estudio de la teoría del intercambio, es necesario que se den algunas definiciones y resultados que nos proveerán de los conceptos y hechos necesarios para que el estudio se pueda hacer de manera fluida.

2.1. Preliminares

2.1.1. Los Conceptos de Intercambio Puro y Equilibrio General

2.1.1.1. La Definición de Intercambio Puro

Para definir el intercambio puro, partimos de que en la mayoría de las economías ocurren tres actividades básicas: producción, consumo e intercambio.

En el intercambio puro se hace omisión de la producción, por lo que el análisis queda restringido al consumo y al intercambio. Es por ello que los bienes que se consumen son aquellos que los individuos, también llamados agentes, poseen en forma de dotaciones iniciales. Así pues, los agentes intercambian estos bienes en el mercado buscando siempre obtener ventaja mutua.

De esta manera, una economía de intercambio puro se puede definir como aquella en que no existen oportunidades de producción.

De acuerdo con Gale (2000), si bien el intercambio puro representa una simplificación drástica, permite, por otro lado, que el análisis pueda centrarse en la formación de precios y en el comercio mismo, sin tener que preocuparnos por preguntas como: ¿Cuál es la función objetivo de la empresa? ¿Cómo y cuando los consumidores reciben su ingreso de la firma? Las cuales, reconoce, merecen ser contestadas.

2.1.1.2. El Concepto de Equilibrio General

La metodología del equilibrio general consta de dos partes centrales. En primer lugar, nos hace ver a la economía como un sistema cerrado e interrelacionado en el cual se determina de manera simultanea el equilibrio de todas las variables endógenas del modelo. Por lo que si se da una perturbación en el modelo, el equilibrio debe volverse a calcular. En segundo lugar, el equilibrio general trata de disminuir las variables exógenas al mínimo.

Citando a Mas-Collel et al (1995), el equilibrio general puede ser definido del modo siguiente:

> *"Desde un punto de vista sustantivo, la teoría del equilibrio general tiene un sentido específico: es la teoría de la determinación de los precios y cantidades en un sistema de mercados perfectamente competitivos".*[1]

Asimismo, es importante mencionar que la teoría del equilibrio general pretende predecir el vector final de consumo tomando como premisas los elementos básicos de la economía, tales como: las dotaciones iniciales, los bienes, el supuesto sobre el comportamiento de los agentes acerca de que estos son tomadores de precios, y el supuesto de que para cada bien existe un precio dado.

Por otro lado, a la teoría del equilibrio general se le suele denominar *"teoría walrasiana del equilibrio"* en honor del celebre economista francés Léon Walras.

2.1.2. Las Asignaciones

Hasta este momento nos habíamos preocupado solamente por el caso en que existe un consumidor en el mercado, por ello no había existido la necesidad de definir un conjunto que contuviera a las cestas de consumo cuando existe un número mayor de agentes. A tales conjuntos se les denomina asignaciones, formalmente se les define como sigue:

[1] Traducción propia.

Definición 20. *Una asignación es un conjunto* $a = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$ *de* n *cestas de consumo que indica lo que tiene cada agente.*

Es decir, cuando se toma el elemento $i-\acute{e}simo$ de una asignación, estamos tomando la cesta de consumo del agente $i-\acute{e}simo$.

Por otro lado, lo que se puede consumir de un bien debe estar restringido a lo que se oferta del mismo, es decir, un agente no puede adquirir más de lo que haya disponible en el mercado, y es claro que a lo más podrá tener la misma cantidad que se oferta. Por lo que necesitamos una definición que nos ayude a decir cuando una asignación es viable.

Definición 21. *Se dice que una asignación es viable si es físicamente posible.*

Lo que esta definición nos dice es que las cestas de consumo contenidas en una asignación viable deben ser congruentes con las cantidades totales disponibles. Para el caso del intercambio puro se suele dar la siguiente definición:

Definición 22. **(Asignación Viable en el Caso del Intercambio Puro)** *Se dice que una asignación es viable si agota todos los bienes, es decir una asignación tal que:*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \ \forall i \in \{1, .., n\}$$

No obstante, la definición 21 es muy estricta por lo que en algunos casos, se acostumbra suavizarla al considerar una cesta viable como aquella que cumple la condición siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i \ \forall i \in \{1, ..., n\}$$

2.2. El Simplex de los Precios

En el apartado referente a las características de la función de demanda se mencionó que la ecuación exceso de demanda es homogénea de grado cero en los precios. Esta propiedad es de gran importancia para el estudio del intercambio, ya que entonces es posible normalizar los precios.

Para tal fin se usa la normalización dada por:[2]

$$\hat{p}_i = \frac{p_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j}$$

Ya que con esta se garantiza que $\sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i = 1$. Luego es posible restringir el estudio a los vectores que conforman el simplejo unitario, el cual se define a continuación:

Definición 23. *Se define el simplex unitario de los precios de dimensión $k-1$, como el conjunto:*

$$S^{k-1} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+}^{n} : \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i = 1 \right\}$$

En adelante supondremos que todos los precios pertenecen al simplex unitario, por lo que se utilizará simplemente p para denotarlos.

El simplex unitario cumple con las propiedades de ser convexo y compacto, y esto se prueba en seguida

Proposición 2.1 *El simplex unitario de los precios es un conjunto convexo y compacto.*

Demostración. Sean $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \in S^{k-1}$ entonces, por definición, se tendrá que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{ y } \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$

Por lo que:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} p_i = \lambda \text{ y } (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} p_j = (1-\lambda)$$

Para toda $\lambda \in [0,1]$, de donde se sigue que:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} p_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} p_j = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

[2]Debe suponerse que $\sum_{j=1}^{n} p_j \neq 0$, es decir que al menos existe un precio diferente de cero.

Con lo que se prueba que el simplex unitario de los precios es convexo.

Una vez que hemos visto que efectivamente se trata de un conjunto convexo, debemos verificar que se trata de un conjunto compacto. Para ello, debe observarse que el simplex es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ por lo que, por el teorema de Heine – Borel, basta probar que es un conjunto cerrado y acotado.

Observemos que el simplex unitario está formado por la intersección del primer ortante de $\mathbb{R}^n$, con el hiperplano del mismo $\mathbb{R}^n$ formado por vectores cuyas entradas suman uno, es decir:

$$S^{k-1} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i = 1 \right\} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0\} \cap \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

Ahora bien, los dos conjuntos que lo forman se sabe que son cerrados, por lo que el simplex de los precios es un conjunto cerrado.

Por otro lado, el simplex unitario se halla contenido en la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$, por lo que es un conjunto acotado. □

Por otra parte, los conjuntos interior y frontera del simplex unitario son de gran importancia en el estudio de la existencia del equilibrio, y respectivamente están dados por:

$$Int\, S^{k-1} = \left\{ \mathbf{p} \in S^{k-1} : p_i > 0 \; \forall i \in \{1, ..., k\} \right\}$$

$$Fr\, S^{k-1} = \left\{ \mathbf{p} \in S^{k-1} : p_i = 0 \; p.a. \; i \in \{1, ..., k\} \right\}$$

Así pues, resulta claro que el interior del simplex unitario está compuesto por los vectores de precios cuyas entradas son estrictamente positivas, mientras que la frontera está formada por los vectores de precios que tienen al menos una entrada igual a cero.

Económicamente, lo anterior significa que en el interior del simplex no es posible que existan bienes gratuitos, en tanto que en la frontera si lo es.

2.3. La Ley de Walras y sus Corolarios

La ley de Walras, uno de los resultados más importantes de la teoría económica, parte de considerar que los consumidores maximizan su función de utilidad con la restricción de que su consumo debe ser igual a su ingreso. Es decir cada consumidor maximiza un problema de la forma:

$$\text{máx}\; u(\mathbf{x}_i)$$
$$\textit{sujeto a}\; \mathbf{p}\mathbf{x}_i = \mathbf{p}\omega_i$$

Este problema de maximización es el mismo que el del consumidor con $\mathbf{p}\omega_i = m$, y con $i \in \{1, ..., n\}$.

Teorema 2.2 (Ley de Walras) *Sea $\mathbf{p} \in S^{k-1}$ un vector de precios, entonces $\mathbf{pz}(\mathbf{p}) = 0$.*

Demostración. Por definición de la ecuación de exceso de demanda se tiene que:

$$\mathbf{pz}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\sum_{i=1}^{n} x_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega_i) - \mathbf{p}\sum_{i=1}^{n}\omega_i = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{p}\mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega_i) - \mathbf{p}\omega_i\right] = 0$$

Lo anterior ocurre ya que la función de demanda, $x_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega_i)$, debe cumplir con la restricción presupuestaria $\mathbf{p}\mathbf{x}_i = \mathbf{p}\omega_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. □

La ley de Walras dice que si todos los consumidores satisfacen su restricción presupuestaria de tal modo que el exceso de demanda de cada uno de ellos es cero, entonces su suma debe serlo también.

El primer corolario que se sigue de la ley de Walras, nos habla de la igualdad entre la oferta y la demanda en los mercados.

Corolario 2.3 *Si la demanda es igual a la oferta en $k-1$ mercados, y $p_k > 0$, entonces la demanda debe ser igual a la oferta en el k-ésimo mercado.*

Demostración. Supongamos que la oferta es diferente a la demanda en el $k - \textit{ésimo}$ mercado, entonces se tiene que $z_k(\mathbf{p}) \neq 0$, pero entonces $p_k z_k(\mathbf{p}) \neq 0$, por lo que $\mathbf{pz}(\mathbf{p}) \neq 0$, lo que es una contradicción a la ley de Walras. □

Los siguientes resultados que se desprenden del teorema 2.2 necesitan de la definición de equilibrio walrasiano, el cual es un vector de precios que hace que el exceso de demanda sea menor o igual a cero en todos los bienes.

Definición 24. *El equilibrio walrasiano es un par de vectores* $(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ *tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \omega_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

Es decir, un vector de precios es un equilibrio walrasiano si no existe exceso de demanda positivo de ningún bien.

El siguiente corolario nos da condiciones para que el mercado se vacíe, y es por ello uno de los más importantes en economía.

Corolario 2.4 *Si* $\mathbf{p}^*$ *es un equilibrio walrasiano y* $z_j (\mathbf{p}) < 0$*, entonces* $p_j^* = 0$*.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathbf{p}^*$es un equilibrio walrasiano se tiene que $\mathbf{z} (\mathbf{p}^*) \leq 0$, y por la no negatividad de los precios se tiene que $\mathbf{p}^* \mathbf{z} (\mathbf{p}^*) \leq 0$. Supongamos ahora que $p_j^* > 0$, entonces $\mathbf{p}^* \mathbf{z} (\mathbf{p}^*) < 0$, lo que es una contradicción a la ley de Walras. □

Lo que el corolario 2.4 nos dice es que en un equilibrio walrasiano un exceso de oferta sólo puede ser causado por bienes gratuitos.

Para poder exponer el siguiente corolario es necesario que se enuncie el llamado supuesto de deseabilidad.

Deseabilidad de los Bienes: Si $p_i = 0$, entonces $z_i (\mathbf{p}) > 0$.

Corolario 2.5 (Igualdad de la Oferta y la Demanda) *Si todos los bienes son atractivos y* $\mathbf{p}^*$ *es un equilibrio walrasiano, entonces* $\mathbf{z} (\mathbf{p}^*) = 0$*.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se hará por doble desigualdad.

$\leq$) Es claro que $\mathbf{z} (\mathbf{p}^*) \leq 0$, ya que $\mathbf{p}^*$ es un equilibrio walrasiano.

$\geq$) Debemos probar que $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \geq 0$.

Para demostrarlo, supongamos que $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) < 0$, entonces $z_i(\mathbf{p}^*) < 0$ para alguna i, lo que por el corolario 2.4 implica que $p_i^* = 0$, pero entonces por la hipótesis de deseabilidad se tiene que $z_i(\mathbf{p}^*) > 0$, lo cual no puede ser. $\square$

En este apartado, hemos definido lo que debe entenderse por equilibrio walrasiano, e incluso hemos visto, mediante los corolarios de la ley de Walras, algunas de las propiedades que estos deben cumplir. No obstante, no nos hemos preocupado por saber si en verdad existen, en la siguiente sección se plantean dos teoremas sobre la existencia de estos equilibrios.

2.4. Existencia de Equilibrios Walrasianos

Los dos teoremas que se enuncian y demuestran a continuación son los que de manera tradicional se presentan para probar la existencia de los equilibrios walrasianos. El primero se basa en el teorema del punto fijo de Brower, mientras que el segundo usa el teorema de punto fijo de Kakutani.

En ocasiones al teorema 2.6 se le llama *"teorema principal de la existencia de equilibrios"*.

Teorema 2.6 *Si* $\mathbf{z} : S^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una función continua que cumple la ley de Walras, entonces existe* $\mathbf{p}^* \in S^{k-1}$ *tal que* $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq 0$.

Demostración. Definamos la función $g : S^{k-1} \longrightarrow S^{k-1}$ como a continuación:

$$g_i(\mathbf{p}) = \frac{p_i + \max\{0, z_i(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(\mathbf{p})\}}$$

Obsérvese que la función g es continua, pues por hipótesis z lo es, además el máximo es una función continua también. Asimismo,

$g(\mathbf{p}) \in S^{k-1}$ ya que claramente $\sum_{i=1}^{n} g_i(\mathbf{p}) = 1$. Asimismo, el denominador nunca es cero.

Ahora bien, por el teorema del punto fijo de Brouwer, se tiene que existe $\mathbf{p}^* \in S^{k-1}$, tal que $g(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$, lo que implica que:

$$p_i^* = \frac{p_i^* + \max\{0, z_i(\mathbf{p}^*)\}}{1 + \sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(\mathbf{p}^*)\}}$$

Debemos demostrar que $\mathbf{p}^*$es un equilibrio walrasiano. Así pues, de la ecuación anterior se sigue que:

$$p_i^* \sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(\mathbf{p}^*)\} = \max\{0, z_i(\mathbf{p}^*)\}$$

Ahora bien, multiplicando ambos lados de la ecuación por $z_i(\mathbf{p}^*)$, y aplicando la suma obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^* z_i(\mathbf{p}^*) \left[\sum_{j=1}^{n} \max\{0, z_j(\mathbf{p}^*)\}\right] = \sum_{i=1}^{n} z_i(\mathbf{p}^*) \max(0, z_i(\mathbf{p}^*))$$

Pero z cumple la ley de Walras, lo que implica que

$$\sum_{i=1}^{n} z_i(\mathbf{p}^*) \max(0, z_i(\mathbf{p}^*)) = 0$$

Pero entonces todos los valores de la suma deben ser cero, o bien $(z_i(\mathbf{p}^*))^2$, pero si existiese un valor estrictamente mayor que cero no se cumpliría la igualdad. Por lo que todos los valores deben ser nulos.

Lo anterior implica que $z_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, lo que significa que $\mathbf{p}^*$ es un equilibrio walrasiano. $\square$

Ahora bien, es necesario que ahondemos en la generalidad de este teorema, ya que suponer que la demanda agregada es continua aun cuando el precio de algún bien es cero es poco razonable.

Para clarificar lo anterior supongamos que el precio de algún bien es cero y que las preferencias son monótonas, entonces tendríamos que la demanda de dicho bien podría ser infinita, lo que implicaría que la función exceso de demanda podría no estar bien definida ni siquiera en $Fr\, S^{k-1}$.

El siguiente teorema resuelve este problema con un tratamiento matemático más complejo.

Teorema 2.7 *Supongamos que* $\mathbf{z}(\cdot)$ *es una función bien definida para todo vector de precios cuyas entradas son estrictamente positivas, y que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Es continua.*
2. *Es homogénea de grado cero.*
3. *Cumple la ley de Walras.*
4. *Existe* $\delta > 0$ *tal que* $z_i(\mathbf{p}) > -\delta$ *para toda* i *y todo vector de precios* $\mathbf{p}$.
5. *Si* $\mathbf{p}^n \longrightarrow \mathbf{p}$ *donde* $\mathbf{p} \neq 0$ *y* $p_i = 0$ *para alguna* i*, entonces* $\max\{z_1(\mathbf{p}), ..., z_n(\mathbf{p})\} \longrightarrow \infty$.

Entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ *tiene solución. Por lo que existe un equilibrio walrasiano en una economía de intercambio puro en la cual* $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \gg 0$ *y donde cada consumidor tiene preferencias continuas, estrictamente convexas, y fuertemente monótonas.*

Demostración. Debemos notar primero que la función está bien definida sólo para vectores de precios en $Int\, S^{k-1}$.

Para demostrar el teorema procederemos en cinco pasos. Asimismo, por claridad, al definir $f(\mathbf{p}) \subset S^{k-1}$ denotaremos a sus elementos con la letra $\mathbf{q}$.

Paso 1
Construcción de una correspondencia de punto fijo para $\mathbf{p} \in Int\, S^{k-1}$.

Cuando nuestro vector de precios tiene entradas estrictamente positivas definimos al conjunto:

$$f(\mathbf{p}) = \left\{\mathbf{q} \in S^{k-1} : \mathbf{z}(\mathbf{p})\,\mathbf{q} \geq \mathbf{z}(\mathbf{p})\,\mathbf{q}' \;\forall\, \mathbf{q}' \in S^{k-1}\right\}$$

Esta correspondencia, significa que dado el precio $\mathbf{p}$, la correspondencia $f(\mathbf{p})$ asigna un precio $\mathbf{q}$, de entre aquellos de S^{k-1}, tal que maximiza el exceso de demanda de la ecuación $\mathbf{z}(\mathbf{p})$.

Lo anterior tiene sentido económico cuando se piensa a $f(\mathbf{p})$ como una regla mediante la cual se ajustan los precios en una dirección que elimina cualquier exceso de demanda. De hecho, la correspondencia $f(\cdot)$, como se definió, asigna el precio más alto a los bienes con mayor exceso de demanda.

En particular se tiene que:

$$f(\mathbf{p}) = \left\{\mathbf{q} \in S^{k-1} : q_i = 0 \; si \; z_i(\mathbf{p}) < \max\{z_1(\mathbf{p}), ..., z_n(\mathbf{p})\}\right\}$$

Ahora bien, si $\mathbf{z}(\mathbf{p}) \neq 0$, entonces por la ley de Walras se tiene que $z_i(\mathbf{p}) > 0$ para alguna i, y además $z_j(\mathbf{p}) < 0$ para alguna $j \neq i$.

Para un vector de precios tal, debe ocurrir que toda $\mathbf{q} \in f(\mathbf{p})$ tenga $q_j = 0$ para alguna j. Por lo que si $\mathbf{z}(\mathbf{p}) \neq 0$, entonces $f(\mathbf{p}) \subset Fr\, S^{k-1}$, y si $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$, entonces $f(\mathbf{p}) = Int\, S^{k-1}$.

Paso 2

Construcción de una correspondencia de punto fijo para $\mathbf{p} \in Fr\, S^{k-1}$*.*

Si $\mathbf{p} \in Fr\, S^{k-1}$ definimos:

$$f(\mathbf{p}) = \left\{\mathbf{q} \in S^{k-1} : \mathbf{pq} = 0\right\} = \left\{\mathbf{q} \in S^{k-1} : q_i = 0 \; si \; p_i > 0\right\}$$

Como $p_i = 0$ para alguna i, entonces $f(\mathbf{p}) \neq \emptyset$. Obsérvese que ningún precio de la frontera puede ser punto fijo. Es decir, no puede ser que $\mathbf{p} \in Fr\, S^{k-1}$ y que $\mathbf{p} \in f(\mathbf{p})$, pues $\mathbf{pp} > 0$.

Paso 3

Un punto fijo de $f(\cdot)$ *es un equilibrio.*

Supongamos que $\mathbf{p}^* \in f(\mathbf{p}^*)$, entonces por el paso 2 debe cumplirse que $\mathbf{p}^* \notin Fr\, S^{k-1}$, de donde $\mathbf{p}^* \in Int\, S^{k-1}$.

Ahora bien, si $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \neq 0$, entonces $f(\mathbf{p}^*) \subset Fr\, S^{k-1}$ lo cual no puede ser, por lo tanto debe cumplirse que $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$.

Paso 4
La correspondencia $f(\cdot)$ es convexa y superiormente semicontinua.

La convexidad de $f(\cdot)$, ya sea que $\mathbf{p} \in Fr\, S^{k-1}$ o que $\mathbf{p} \in Int\, S^{k-1}$, se sigue de observar que la correspondencia iguala a un conjunto de nivel, esto es:

$$f(\mathbf{p}) = \left\{\mathbf{q} \in S^{k-1} : \lambda\mathbf{q} = k,\ \lambda \in \mathbb{R}^n\ y\ k \in \mathbb{R}\right\}$$

Ahora debemos probar que la correspondencia de punto fijo es superiormente semicontinua, para lo cual consideramos las sucesiones $\mathbf{p}^n \to \mathbf{p}$ y $\mathbf{q}^n \to \mathbf{q}$ con $\mathbf{q}^n \in f(\mathbf{p}^n)$ para toda n. Debemos probar que $\mathbf{q} \in f(\mathbf{p})$. De nuevo tenemos dos casos $\mathbf{p} \in Int\, S^{k-1}$ y $\mathbf{p} \in Fr\, S^{k-1}$.

Si $\mathbf{p} \in Int\, S^{k-1}$, entonces para n lo suficientemente grande se tendrá $\mathbf{p}^n \gg 0$, y como $\mathbf{z}(\mathbf{p}^n)\,\mathbf{q}^n \geq \mathbf{z}(\mathbf{p}^n)\,\mathbf{q}'\ \forall\, \mathbf{q}' \in S^{k-1}$, y ya que $\mathbf{z}(\cdot)$ es continua se tiene que $\mathbf{z}(\mathbf{p})\,\mathbf{q} \geq \mathbf{z}(\mathbf{p})\,\mathbf{q}'\ \forall\, \mathbf{q}' \in S^{k-1}$, lo que implica que $\mathbf{q} \in f(\mathbf{p})$.

Si por el contrario $\mathbf{p} \in Fr\, S^{k-1}$, entonces considerando $p_i > 0$ para alguna i, debemos probar que para n lo suficientemente grande tendremos que $q_i^n = 0$, y por tanto $q_i = 0$. De donde se sigue que $\mathbf{q} \in f(\mathbf{p})$. Ahora bien, dado que $p_i > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $p_i^n > \varepsilon$ para n lo suficientemente grande.

Si además $\mathbf{p}^n \in Fr\, S^{k-1}$, entonces $q_i^n = 0$ por definición de la $f(\mathbf{p}^n)$. Pero si $\mathbf{p}^n \gg 0$, entonces por las condiciones (4) y (5), para n lo suficientemente grande, se tendrá que $z_i(\mathbf{p}^n) < \max\{z_1(\mathbf{p}^n), ..., z_n(\mathbf{p}^n)\}$ por lo que de nuevo se tiene que $q_i^n = 0$.

Debemos probar que esta última desigualdad efectivamente se cumple. Lo primero que debemos notar es que el término de la derecha tiende a infinito cuando $n \to \infty$, ya que $\mathbf{p} \in Fr\, S^{k-1}$ y algunos precios convergen a cero cuando n crece. Sin embargo, el término de la izquierda es acotado por arriba si es positivo, y la cota es la siguiente:

$$z_i(\mathbf{p}^n) < \frac{1}{\varepsilon} p_i^n z_i(\mathbf{p}^n) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n z_{i'}(\mathbf{p}^n) < \frac{\delta}{\varepsilon} \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n < \frac{\delta}{\varepsilon}$$

Debemos probar que cada uno de los términos de esa desigualdad es verdadero. Así pues, comenzaremos probando que $z_i(\mathbf{p}^n) < \frac{1}{\varepsilon} p_i^n z_i(\mathbf{p}^n)$, lo cual hacemos de la siguiente manera:

$$p_i^n > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} p_i^n > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} p_i^n z_i(\mathbf{p}^n) > z_i(\mathbf{p}^n)$$

Con lo que queda probada la primera desigualdad.

Ahora probaremos que $\frac{1}{\varepsilon} p_i^n z_i(\mathbf{p}^n) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n z_{i'}(\mathbf{p}^n)$, y lo haremos de igual manera que la demostración anterior

$$\frac{1}{\varepsilon} p_i^n z_i(\mathbf{p}^n) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n z_{i'}(\mathbf{p}^n) \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}\left(p_i^n z_i(\mathbf{p}^n) + \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n z_{i'}(\mathbf{p}^n)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_i p_i^n z_i(\mathbf{p}^n) = 0$$

La última expresión es cierta pues cumple con la ley de Walras. Con lo que queda probada esta parte de la desigualdad.

Para probar que $-\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n z_{i'}(\mathbf{p}^n) < \frac{\delta}{\varepsilon} \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n$ partimos de la hipótesis (4) hecha sobre $\mathbf{z}(\cdot)$.

$$z_{i'}(\mathbf{p}^n) > -\delta \Leftrightarrow p_{i'}^n z_{i'}(\mathbf{p}^n) > -\delta p_{i'}^n \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i \neq i'} p_{i'}^n z_{i'}(\mathbf{p}^n) > -\delta \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n \Leftrightarrow -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n z_{i'}(\mathbf{p}^n) < \frac{\delta}{\varepsilon} \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n$$

Debe observarse la necesidad de que $p_{i'}^n > 0$ para preservar la desigualdad.

Ahora bien, para comprobar que $\frac{\delta}{\varepsilon} \sum_{i \neq i'} p_{i'}^n < \frac{\delta}{\varepsilon}$, basta observar que esto ocurre sí y sólo si $\sum_{i \neq i'} p_{i'}^n < 1$, lo cual es cierto ya que $p_i^n > 0$, y son precios del simplex unitario.

Con esto queda probado que es acotado por arriba y por tanto se cumple que $z_i(\mathbf{p}^n) < \max\{z_1(\mathbf{p}^n), ..., z_n(\mathbf{p}^n)\}$.

En resumen, para $\mathbf{p}^n$ lo suficientemente cercana a la frontera del simplex de los precios, el máximo de la demanda corresponde a alguno de los bienes cuyo precio es cercano a cero. Por ello podemos concluir que cualquier $\mathbf{q}^n \in f(\mathbf{p}^n)$ pondrá un valor diferente de cero sólo en bienes cuyos precios se aproximen a cero, esto para una n lo suficientemente grande. Pero entonces $\mathbf{pq} = 0$ por lo que $\mathbf{q} \in f(\mathbf{p})$.

Paso 5

Existe un punto fijo.

Se sigue directamente del teorema del punto fijo de Kakutani que existe $\mathbf{p}^* \in S^{k-1}$ tal que $\mathbf{p}^* \in f(\mathbf{p}^*)$. $\square$

Con este teorema queda demostrada de manera más general la existencia de equilibrios walrasianos.

2.5. La Unicidad del Equilibrio

En la sección 2.4 presentamos dos teoremas sobre la existencia de equilibrios walrasianos. En el primero excluíamos el caso de los bienes gratuitos, mientras que el segundo era una generalización a través de teorema de Kakutani.

Ahora bien, en el caso de la unicidad, el tema de los bienes gratuitos carece de interés, pues podemos excluirlo mediante el supuesto de la deseabilidad de los bienes, es decir suponemos que el exceso de demanda es positivo cuando el precio relativo de dichos bienes es cero, (Varian, 1992).

La consecuencia inmediata del supuesto anterior es que en cualquier vector de precios de equilibrio, el precio de cualquier bien debe ser estrictamente mayor que cero.

Para este trabajo se presenta únicamente una proposición basada en los bienes denominados como *sustitutivos brutos* con el fin de ejemplificar que es posible, bajo ciertas condiciones, hallar un equilibrio walrasiano único.[3] Así pues, debemos partir de dar una definición formal de tales bienes.

Definición 25. *Dos bienes i y j, son sustitutivos brutos dado el vector de precios $\mathbf{p}$, si* $\dfrac{\partial z_j(\mathbf{p})}{\partial p_i} > 0$ *siendo* $i \neq j$.

La definición nos dice que dos bienes son sustitutivos brutos si un aumento en el precio del bien i causa un aumento en el exceso de demanda del bien j.

Proposición 2.8. *Si todos los bienes son sustitutivos brutos a todos los precios, entonces si $\mathbf{p}^*$ es un vector de precios de equilibrio, es único.*

Demostración. Supongamos que existe otro vector de precios de equilibrio $\mathbf{p}'$. Dado que $\mathbf{p}^* \gg 0$ podemos definir $m = \max \dfrac{p_i'}{p_i^*} \neq 0$.

[3] Para profundizar en la unicidad del equilibrio walrasiano véanse: Varian, 1992, Mas-Collel et al, 1995 y Martínez-Giralt, 2008.

Como la función $\mathbf{z}$ es homogénea de grado cero, y $\mathbf{p}^*$ es un vector de precios de equilibrio, entonces tendremos que $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{z}(m\mathbf{p}^*) = 0$. Ahora bien, para algún precio p'_k, tendremos $mp^*_k = p'_k$, por la definición de m.
Bajemos ahora todos los precios mp^*_i, con excepción de p_k, sucesivamente a p'_i, entonces dado que el cambio de $m\mathbf{p}^*$ a $\mathbf{p}'$ baja todos los precios menos del bien k, entonces la demanda de dicho bien debe descender, de donde $z_k(\mathbf{p}') < 0$, por lo que $\mathbf{p}'$ no puede ser un equilibrio. □

De manera intuitiva, la proposición 2.8 nos dice que si estamos en una economía donde todos los bienes son sustitutivos brutos, entonces cualquier variación en el precio de alguno de ellos provocará un cambio en el nivel de demanda de los otros, pudiendo aumentar o disminuir, lo que hará que la función exceso de demanda se altere. Es por ello, que una vez que estemos en el equilibrio cualquier perturbación en los precios hará que salgamos de él.

2.6. La Caja de Edgeworth

2.6.1. El Intercambio

La caja de Edgeworth es un instrumento gráfico que, en el caso bidimensional, tiene la forma de un rectángulo cuyo ancho y largo muestran la cantidad total de alguno de los dos bienes que se hallan en el mercado, y cuyos lados paralelos representan la misma mercancía.[4]

Así pues, la caja de Edgeworth se trata de la representación gráfica y simultanea de dos mapas de indiferencia, donde cada uno corresponde a un distinto agente, y que se utiliza para mostrar los resultados del intercambio comercial entre ellos.

Asimismo, cabe señalar que, como hemos venido suponiendo, la cantidad total de los bienes disponibles está dada por la suma de lo que los consumidores posean del bien en cuestión, es decir depende de la dotación inicial de cada uno de ellos.

De modo general, una caja de Edgeworth se puede representar con la siguiente figura 2.1.

[4] Aunque este instrumento gráfico es nombrado Caja de Edgeworth, se cree que fue realmente inventado por Vilfredo Pareto, (Binmore, 2007).

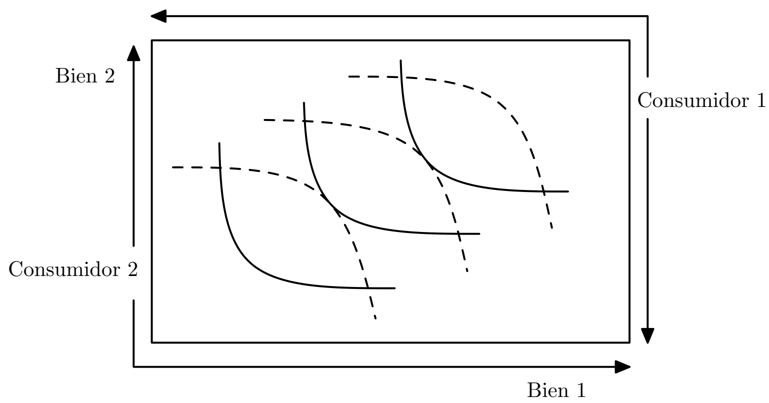

Figura 2.1: Caja de Edgeworth

La caja representa los mapas de indiferencia sobrepuestos de los dos consumidores. En la esquina inferior izquierda está el origen del mapa del consumidor 1, mientras que en la esquina superior derecha se encuentra el origen del mapa del consumidor 2.

Ahora bien, para entender la forma en que la caja de Edgeworth nos ayuda a estudiar el intercambio entre dos agentes, supongamos que el consumidor 1 tiene una dotación inicial de Q_y unidades del bien y, y que el consumidor 2 tiene una dotación de Q_x unidades del bien x.

A través del intercambio nuestros agentes pueden mejorar su nivel de satisfacción, pues perfeccionan su cesta de consumo, está claro que lo anterior sólo ocurrirá si llegan a algún acuerdo. Así pues, consideremos la caja de la figura 2.2.

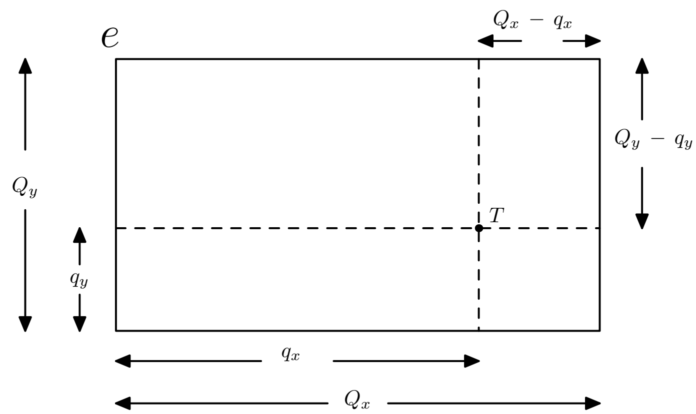

Figura 2.2: Asignaciones en la Caja de Edgeworth

Por un lado, nos muestra que el punto **T** es la cesta de consumo (q_x, q_y) que obtiene el consumidor 1, y por el otro, el punto **T** también simboliza la cesta $(Q_x - q_x, Q_y - q_y)$ que es la que obtiene el consumidor 2.

Por lo que el punto T representa una asignación de la forma:

$$A_T = \{(q_x, q_y), (Q_x - q_x, Q_y - q_y)\}$$

Obsérvese que la asignación A_T es viable, pues es físicamente posible.

Debe notarse que las curvas de indiferencia de los consumidores 1 y 2 no necesariamente poseen la misma forma ya que las funciones de utilidad que corresponden a estas cestas están dadas, respectivamente, por:

$$u_1(q_x, q_y) = k$$

$$u_2(Q_x - q_x, Q_y - q_y) = k'$$

Por otra parte, el punto e es el punto sin acuerdo en el intercambio, ya que representa la dotación inicial del consumidor 1, es decir $(0, Q_y)$, pero de la misma manera simboliza la dotación inicial del consumidor 2, o sea $(Q_x, 0)$.

Es muy importante mencionar que en la figura 2.2 se ha hecho el supuesto simplificador de que el punto e se encuentra en la esquina superior izquierda. No obstante, tal punto puede encontrarse en cualquier lugar de la caja, y de hecho de aquí en adelante se le considerará como un punto arbitrario.

Así pues, el punto e representa la asignación dada por:

$$A_e = \{(0, Q_y), (Q_x, 0)\}$$

Por otro lado, si bien es cierto que en el intercambio puro hacemos abstracción de la forma en que se producen los bienes, la riqueza de un consumidor no está determinada de manera externa, pues esta depende de la dotación inicial que de ambos bienes posean los agentes y de los precios de mercado. Así pues, si $(\omega_{1i}, \omega_{2i})$ es la dotación inicial del consumidor i, entonces su riqueza estará dada por $p_1\omega_{1i} + p_2\omega_{2i} = \mathbf{p}\omega_i$, que no es más que el valor de sus bienes a los precios de mercado, y por otro lado es su recta presupuestaria.

Ahora bien, en el capítulo anterior vimos que el consumidor maximiza su utilidad, en el caso de dos bienes, en el punto en que la curva de indiferencia se vuelve tangente a la recta presupuestaria. En el caso de la caja de Edgeworth, para representar la recta presupuestaria de ambos consumidores, trazamos una línea a través del punto de las dotaciones iniciales e , así dibujada, la recta presupuestaria debe tener pendiente $-\frac{p_1}{p_2}$.

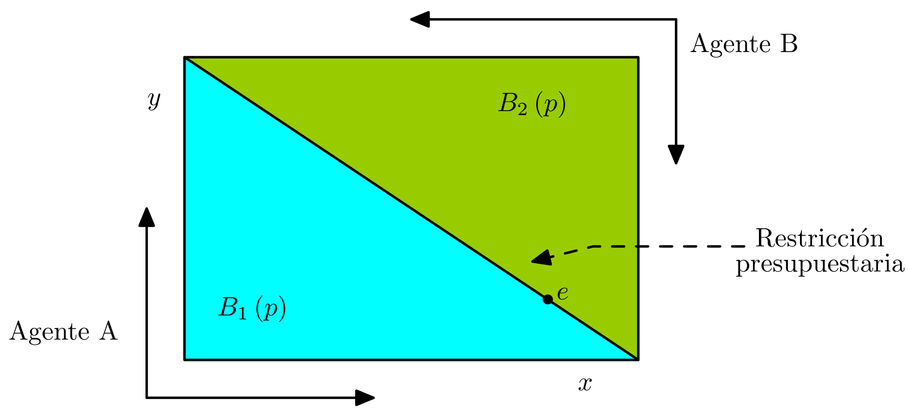

Figura 2.3: Restricción Presupuestaria en la Caja de Edgeworth

Debe notarse que sólo las asignaciones que se encuentran sobre la línea de presupuesto son factibles para ambos consumidores al mismo tiempo a los precios $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$.

Con lo dicho hasta aquí estamos en condiciones de analizar el intercambio de forma general dentro de la caja de Edgeworth. Para ello, ocuparemos los siguientes supuestos:

1. Existen únicamente dos bienes y dos consumidores en la economía.
2. Los dos consumidores son tomadores de precios.

Así pues, supongamos primero que la asignación asociada a la dotación inicial está dada por:

$$A_e = \left\{ \left(\omega_x, \omega_y\right), \left(\omega_x', \omega_y'\right) \right\}$$

Consideremos entonces la figura 2.4:

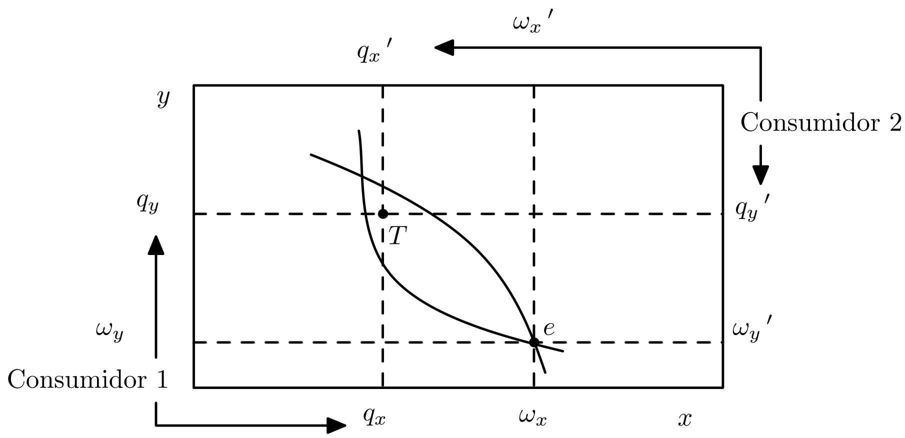

Figura 2.4: Área Mutuamente Ventajosa

Lo primero que debemos notar es que el punto **T** no tiene nada en particular, salvo que otorga un nivel de satisfacción mayor a los consumidores 1 y 2 con respecto a su dotación inicial. Lo anterior ocurre porque las curvas de indiferencia de ambos agentes que pasan por el punto **T** se hallan por encima del punto e.

Ahora bien, a la región en forma de canoa que se crea con las curvas de indiferencia que se cortan, se le conoce como *área mutuamente ventajosa*, ya que ambos agentes incrementan su nivel de satisfacción consumiendo las cestas que se encuentran dentro de esta.

Así pues, con el fin de analizar el proceso mediante el cual los consumidores llegan al punto **T** permítase ahora que dicho punto tenga asociada la asignación:

$$A_T = \left\{ \left(q_x, q_y\right), \left(q_x', q_y'\right) \right\}$$

El desplazamiento al punto **T** implica que el consumidor 1 tiene que renunciar a $|q_x - \omega_x|$ unidades del bien 1 para obtener $|q_y - \omega_y|$ unidades del bien 2. Por su parte, el consumidor 2 obtiene $|q'_x - \omega'_x|$ unidades del bien 1, y sacrifica $\left|q'_y - \omega'_y\right|$ unidades del bien 2.

Podemos afirmar entonces que la razón del comercio se encuentra en la posibilidad de hallar una asignación que sea mejor para ambas partes con respecto a una que ya se posee. Se sigue entonces que el comercio puede extenderse hasta que ningún intercambio sea provechoso para los dos consumidores.

Uno de los inconvenientes que presenta el comercio así estudiado, es que no indica el punto final al que llegan los agentes, por lo que es necesario utilizar un modelo de intercambio que sea más concreto y que llegue a los mismos resultados.

Así pues, supongamos ahora la existencia de un tercer agente al cual se le denominará subastador ya que estará dispuesto a actuar como tal con respecto a los bienes de los consumidores 1 y 2.

La forma en que intervendrá el subastador será eligiendo un precio para el bien x y otro para el bien y. Mediante este proceso los agentes 1 y 2 saben cuanto vale su dotación a los precios escogidos y deciden cuanto comprar.

Una dificultad que presenta el modelo es el del número de agentes que participan en el intercambio, pues si sólo son dos no tendría sentido que se comportaran de manera competitiva, ya que tendrían la posibilidad de negociar los precios elegidos por el subastador.

La dificultad anterior se supera si se supone que en vez de los dos agentes existen dos grupos formados por muchas personas, por lo que ahora en lugar de agentes o consumidores los llamaremos grupos A y B.

Obsérvese que los precios que elige el subastador son totalmente arbitrarios, por lo que dada la pareja de precios (p_x, p_y), no existe nada que nos garantice que la oferta de un grupo se igualará con la demanda del otro. Es claro con lo visto hasta este punto que cuando la oferta de un grupo no se iguale con la demanda del otro, se dirá que el mercado está en desequilibrio.

Desde el punto de vista de la demanda neta el desequilibrio significa que la cantidad que quiere adquirir un grupo no es igual a la que quiere vender el otro. Por su parte, para la demanda bruta, el desequilibrio significa que la cantidad total que quieren tener los dos grupos no es igual a la cantidad total disponible.

La siguiente figura 2.5 ilustra el caso de un mercado en desequilibrio:

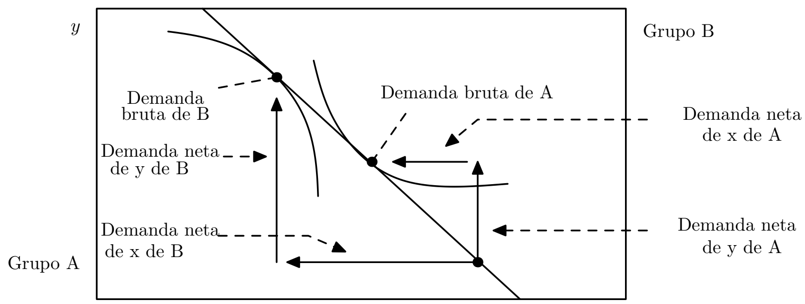

Figura 2.5: Desequilibrio de Mercado

Cuando el mercado se encuentra en desequilibrio el subastador interviene para ajustar los precios. El mecanismo consiste en aumentar el precio de un bien si es que hay exceso de demanda, y en reducirlo si existe sobreoferta. Este proceso puede prolongarse hasta que la demanda se iguale con la oferta.

En la figura 2.6, la cual se muestra a continuación, se ilustra el caso en que el mercado se encuentra en equilibrio.

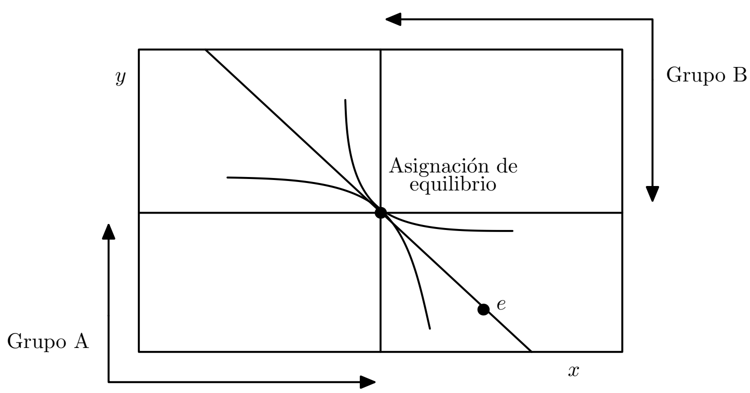

Figura 2.6: Asignación de Equilibrio

La figura nos muestra el caso en que un grupo desea comprar justamente la cantidad que desea vender el otro grupo a los precios vigentes, en este caso diremos que el mercado se encuentra en equilibrio.

Es claro, que el equilibrio así encontrado es un equilibrio walrasiano, pues el exceso de demanda del bien en cuestión será cero.

2.6.2. Análisis Geométrico del Equilibrio

En el apartado 2.6.1, vimos que en la caja de Edgeworth un equilibrio walrasiano corresponde al punto en que las curvas de indiferencia de un grupo vuelven tangentes con las del otro sobre la recta presupuestaria. Con este ejemplo pretendemos dejar en claro porque lo anterior es necesariamente cierto.

Lo que ocurre es que dado un vector de precios arbitrario siempre es posible determinar la recta presupuestaria de cada uno de los consumidores y usar las curvas de indiferencia para encontrar las cestas demandadas por cada uno a tales precios. Posteriormente se busca un par de precios a los cuales las cestas demandadas de los dos agentes sean compatibles.

Es evidente que el equilibrio se alcanza en el punto de tangencia de las curvas de indiferencia, ya que cada uno de los consumidores maximiza su utilidad en su recta presupuestaria. Además, la maximización de la utilidad exige que la RMS de cada agente se iguale a la RES.

Por otro lado, el equilibrio walrasiano también es representable a través de las curvas de oferta. La curva de oferta de un consumidor describe el lugar geométrico de los puntos de tangencia entre las curvas de indiferencia y la recta presupuestaria cuando varían los precios relativos, esto es el conjunto de cestas demandadas, por lo que en un punto de equilibrio de la caja de Edgeworth las curvas de oferta se cortan.

Lo anterior nos permite afirmar que cualquier punto dentro de la caja de Edgeworth donde se corten las curvas de oferta del consumidor, y que sea diferente al punto de dotaciones iniciales, será un equilibrio walrasiano. Luego, el equilibrio walrasiano en la caja de Edgeworth se puede representar mediante la siguiente figura

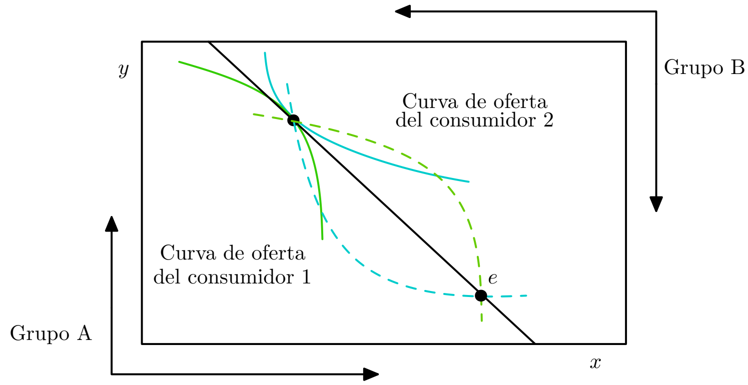

Figura 2.7: Asignación de Equilibrio con las Curvas de Oferta

.

Capítulo 3

Las Propiedades de Bienestar del Equilibrio General

3.1. La Ciencia Económica y la Economía del Bienestar

Viendo a la economía del bienestar como una rama de ciencia económica, se puede definir como aquella que da respuesta a los problemas normativos de la economía. En general, intenta resolver el problema económico, es decir aquel que viene de las preguntas ¿cuánto producir?, ¿cómo producir? y ¿para quién producir?

Las preguntas anteriores nos llevan a la que quizás sea la más importante: ¿cómo debe gestionarse una economía? y más aún ¿quién debe tomar esas decisiones?

En general, los economistas defienden la idea de la llamada *"eficiencia en el sentido de Pareto"*, la cual es llamada así por el economista italiano Vilfredo Pareto, y será el concepto que se desarrollará en este capítulo, pues es en el que se basan las propiedades de bienestar del equilibrio general.

3.2. La Eficiencia en el Sentido de Pareto.

La eficiencia en el sentido de Pareto (eficiencia económica) es uno de los conceptos más importantes que hay en economía, aun cuando la eficiencia no guarda relación con la forma en que se distribuyen los bienes.

La importancia de tal concepto se encuentra en que nos permite ubicar la asignación en que no es posible que alguien mejore sin causar daño a los demás.

3.2.1. La Eficiencia Débil y Fuerte en el Sentido de Pareto

Existen una forma débil y una fuerte de definir la eficiencia en el sentido de Pareto, y bajo ciertas condiciones se demostrará que son equivalentes

Definición 26. *Se dice que una asignación* $\mathbf{x}$ *viable es débilmente eficiente en el sentido de Pareto si no existe ninguna asignación* $\mathbf{x}'$ *viable tal que todos los agentes la prefieran estrictamente a* $\mathbf{x}$.

La definición nos dice que una asignación será débilmente eficiente de Pareto si no existe una cesta que mejore estrictamente el bienestar de todos los agentes.

Definición 27. *Se dice que una asignación viable* $\mathbf{x}$ *es fuertemente eficiente en el sentido de Pareto si no existe ninguna asignación* $\mathbf{x}'$ *viable tal que todos los agentes la prefieran débilmente a la asignación* $\mathbf{x}$, *y alguno la prefiera estrictamente.*

La definición 26 nos dice que una asignación es fuertemente eficiente en el sentido de Pareto si no es posible mejorar el bienestar de un agente sin empeorar el de los otros, es decir cuando uno de los agentes mejora los otros deben quedar al menos como hasta antes de tal mejora se produjera.

El siguiente teorema nos da condiciones para que las definiciones 25 y 26 sean equivalentes.

Teorema 3.1 *Si las preferencias son continuas, fuertemente monótonas, y existe además un número finito de agentes, entonces las definiciones 25 y 26 son equivalentes.*

Demostración. Es claro que la definición 26 implica la 25, pues se sigue directamente de las definiciones, ya que si no es posible mejorar el beneficio de una sola persona sin empeorar el del resto, claramente no será posible mejorar el de todos los agentes.
Demostraremos ahora que la definición 25 implica la 26.

Supongamos entonces que se puede mejorar el bienestar de una sola persona sin empeorar el del resto.

Sea x_i la cesta de consumo del agente i, y sea x'_i la cesta que mejora su bienestar sin empeorar el del resto. Ahora bien, dado el supuesto de continuidad en las preferencias, la cesta x_i se puede sustituir por la cesta θx_i, con $0 < \theta < 1$. Esto ocurre ya que siempre es posible encontrar θ lo suficientemente cercana a 1 para que el consumidor, a pesar de la reducción, incremente su bienestar.

Distribuyamos ahora de manera equitativa lo que se le quitó al consumidor i entre el resto de los consumidores, esto se hace considerando la cesta de consumo x_j, la cual se sustituye por la nueva cesta $x'_j = x_j + \dfrac{1-\theta}{n-1}x'_i$ para toda $j \neq i$. Finalmente, la monotonía fuerte en las preferencias garantiza que todos los agentes ven mejorar estrictamente su bienestar. $\square$

Debe observarse que si bien es cierto que la eficiencia de Pareto no guarda una relación directa con la forma en que se distribuyen los bienes, si la tiene con los niveles de bienestar que pueden llegar a alcanzar los consumidores, la siguiente proposición nos permite demostrar con facilidad tal hecho, ya que es consecuencia directa de la definición:

Proposición 3.2 *No existe ninguna asignación no eficiente en el sentido de Pareto en la que todos los agentes disfruten de un mayor bienestar con respecto a una que si lo es.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{x}$ es una asignación eficiente en el sentido de Pareto y sea $\mathbf{x}'$ una asignación viable que da un mayor nivel de bienestar a todos los agentes.

Dada nuestra suposición es claro que debe cumplirse que $\mathbf{x}' \succ_i \mathbf{x}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, pero entonces $\mathbf{x}$ no puede ser eficiente en el sentido de Pareto, lo cual es una contradicción. $\square$

Es frecuente también que para definir una asignación eficiente en el sentido de Pareto se utilice alguna de las siguientes definiciones:

- *Una asignación es eficiente en el sentido de Pareto si se han agotado todas las ganancias derivadas del comercio.*

- *Una asignación es eficiente en el sentido de Pareto si no es posible realizar ningún intercambio mutuamente ventajoso.*

Es claro que estas dos afirmaciones son equivalentes entre sí. Más aún, es claro que son equivalentes con la definición 26. Entonces bajo las hipótesis del teorema 3.1 deben ser equivalentes a la definición 27.

Una vez que hemos visto a que nos referimos por "asignación eficiente en el sentido de Pareto", podemos dar la siguiente definición:

Definición 28. *Al conjunto formado por todas las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto, se le denomina conjunto de Pareto.*

Para concluir este apartado, es necesario mencionar que dado que los supuestos bajo los cuales se da la equivalencia los utilizaremos de aquí en adelante de manera implícita, nos referiremos únicamente a tales cestas como eficientes en el sentido de Pareto, sin preocuparnos por si es de manera débil o fuerte, a menos que se especifique lo contrario.

3.2.2. La Eficiencia de Pareto en la Caja de Edgeworth

En el apartado anterior dimos las definiciones generales a través de las cuales se caracteriza a las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto. Ahora, debemos preocuparnos por encontrar una forma que nos permita hallar las asignaciones que en la caja de Edgeworth sean eficientes.

Dado que en la caja de Edgeworth bidimensional sólo existen dos agentes, entonces dada la función de utilidad de uno ellos, el nivel de utilidad que dicho consumidor quiere alcanzar puede fijarse, por lo que es suficiente que se optimice la función de utilidad del otro agente sujeta a tal restricción. Esto es:

$$\begin{aligned} &\max_{x_1 x_2} u_1(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeta a } u_2(\mathbf{x}) \geq \overline{u}_2 \\ &\qquad x_1 + x_2 = \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$

En el problema de maximización hemos supuesto que la utilidad que se fija es la del agente 2, y también se ha impuesto la restricción de que la suma de las dotaciones iniciales de ambos bienes debe ser igual a la suma de las entradas de la cesta que maximice la utilidad.

En la caja de Edgeworth, la solución del problema se alcanza encontrando el punto sobre la curva de indiferencia de alguno de los agentes en que el otro maximiza su utilidad, lo que significa que tal punto estará determinado por una condición de tangencia, ya que de esta manera se garantiza que las RMS de ambos consumidores sean iguales.

Por lo que una vez fijada la utilidad de uno de los consumidores siempre es posible hallar una asignación en la que el otro consumidor maximice su utilidad. En este caso, el conjunto de Pareto está dado por todos los puntos de tangencia entre las curvas de indiferencia, el cual será único si se permite la convexidad estricta. El siguiente diagrama muestra el conjunto de Pareto en la caja de Edgeworth bajo los supuestos de monotonía fuerte, continuidad y convexidad estricta.

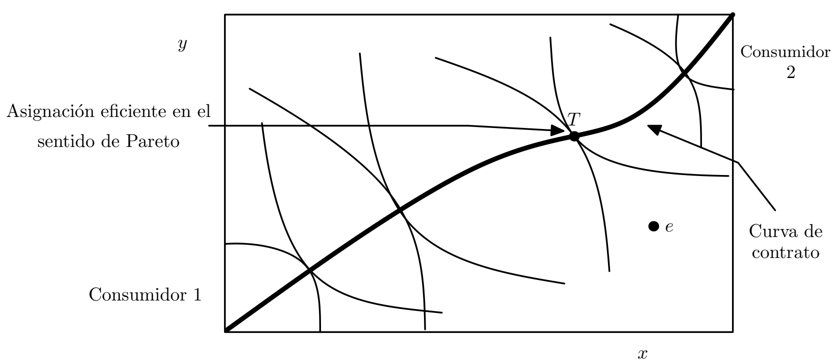

Figura 3.1: Conjunto de Pareto Conexo

Obsérvese que bajo estos supuestos el conjunto de Pareto es conexo.

A continuación se muestra a manera de proposición el hecho de que los puntos de tangencia de las curvas de indiferencia son eficientes en el sentidos de Pareto.

Proposición 3.3 *Si las curvas de indiferencia de los agentes son tangentes en una asignación en el interior de la caja de Edgeworth, entonces son eficientes en el sentido de Pareto.*

Demostración. Basta observar que si las curvas de indiferencia son tangentes se habrán agotado las posibilidades de comercio entre los agentes. $\square$

De la proposición 3.3 se sigue inmediatamente que existen varias asignaciones eficientes en el sentido de Pareto. Más aún, dada cualquier curva de indiferencia dentro de la caja de Edgeworth siempre es posible hallar la curva tangente a esta.

Adviértase que dada la asignación inicial es posible estudiar el subconjunto de Pareto que prefieren los consumidores, y que no es otro sino el área mutuamente ventajosa de las curvas de indiferencia que pasan por el punto que tiene asociada dicha asignación, a este subconjunto se le conoce como *curva de contrato*.

Por otro lado, en el apartado anterior, definimos la eficiencia de Pareto en sentido fuerte y débil, el siguiente diagrama nos ayuda a ubicar los conjuntos fuertes y débiles de Pareto dentro de la caja de Edgeworth, para un casa específico.

Ejemplo 3.1
Conjuntos Fuertemente y Débilmente Eficientes en el sentido de Pareto.

Supongamos que tenemos dos agentes A y B que tienen funciones de utilidad idénticas $u_A = (x_1, x_2) = u_B = (x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$ y que existe una unidad del bien 1 y dos unidades del bien 2.

En ese caso los conjuntos fuertemente y débilmente eficientes en el conjunto de Pareto se ejemplifican en la siguiente caja.

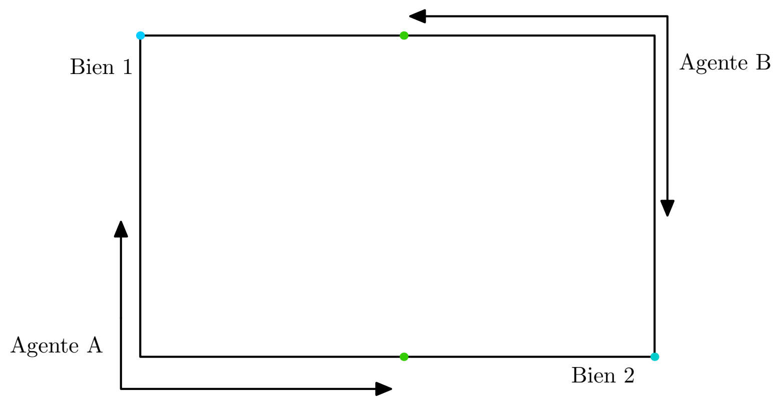

Figura 3.2: Conjuntos Eficientes en el Sentido de Pareto

Con azul se representan los puntos del conjunto fuertemente eficiente en el sentido de Pareto, mientras que con verde los del conjunto débilmente eficiente. Así pues, el conjunto fuertemente eficiente en el sentido de Pareto está dado por las cestas en las que un consumidor lo posee todo de un bien. Por su parte, el conjunto débilmente eficiente está dado por las cestas en las que un consumidor posee una unidad del bien 1, y el otro al menos una cesta del bien 2. □

Por otro lado, debe observarse que si bien la eficiencia de Pareto está relacionada con el bienestar, el hecho ya mencionado de que no guarde relación con la manera en que se distribuyen los bienes entre los agentes, hace posible que sea eficiente la situación en que una persona lo tiene todo y otra no tenga nada, tal como se puede ver en la siguiente proposición:

Proposición 3.4 *Bajo el supuesto de insaciabilidad local, los orígenes de ambos mapas de indiferencia en la caja de Edgeworth son asignaciones eficientes en el sentido de Pareto.*

Demostración. Si se toma el origen del consumidor 1 se tiene que este no posee nada de ambos bienes, mientras que el consumidor 2 lo tiene todo. Pero entonces si se mejorara el nivel de bienestar del consumidor 1 empeorará el del 2, pues habría que quitarle algo. El caso en que se toma el origen del mapa de indiferencia del consumidor 2 es análogo. □

La proposición 3.4 no sólo muestra que el concepto de distribución justa no está directamente asociado a la definición de eficiencia económica, sino que además muestra que existen óptimos de Pareto que proporcionan distintos niveles de bienestar a los agentes que participan en el intercambio.

En este sentido, Joseph E. Stiglitz, premio Nobel de economía, menciona lo siguiente:[1]

> *"Un cambio que mejorara mucho el bienestar de los ricos sin empeorar a los pobres sería una mejora en el sentido de Pareto. Sin embargo, algunas personas creen que no es bueno aumentar las diferencias entre ricos y pobres. Piensan que crea, por ejemplo, tensiones sociales negativas".*

Un hecho importante sobre esta cuestión es que cuando las naciones atraviesan por periodos de crecimiento, en general, suele mejorar el bienestar de todo el mundo, pero el bienestar de los más ricos crece más rápidamente. A esto el profesor Stiglitz plantea la siguiente pregunta:

> *¿Basta con decir simplemente que mejora el bienestar de todo el mundo?*

A lo que responde:

No hay unanimidad sobre esta cuestión.

Plantea entonces que lo realmente importante es la percepción que la gente tenga de su propio bienestar, lo que está relacionado con el siguiente principio:

***Principio General de la Soberanía del Consumidor*:** *Son los individuos quienes mejor pueden juzgar sus propias necesidades y deseos, pues son los que saben qué redunda en su propio beneficio.*

Por lo que la decisión de si el bienestar ha aumentado o no, dependerá de la concepción que tenga la persona de su situación dado el cambio.

[1] Párrafo tomado de Stiglitz, (2000).

3.3. Los Teoremas de la Economía del Bienestar

Los dos teoremas del bienestar están entre los resultados más importantes que existen en economía, pues con ellos se establece la relación que existe entre el equilibrio económico y la eficiencia económica, permitiendo de este modo introducir los conceptos de distribución de los bienes al concepto de eficiencia en el sentido de Pareto.

3.3.1. El Primer Teorema de la Economía del Bienestar

En el apartado 3.2 hablamos sobre la eficiencia en el sentido de Pareto, a la que también se le suele llamar eficiencia económica, concepto que no está ligado directamente con la distribución de los bienes. Sin embargo, el primer teorema del bienestar nos da condiciones de suficiencia para que una asignación sea eficiente en el sentido de Pareto.

Teorema 3.5 (Primer Teorema del Bienestar) *Si* $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ *es un equilibrio walrasiano,* $\mathbf{x}$ *es eficiente en el sentido de Pareto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathbf{x}$ no es eficiente en el sentido de Pareto, y que $\mathbf{x}'$ es la asignación que prefieren todos los agentes a $\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{p}\mathbf{x}'_i > \mathbf{p}\omega_i$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Luego, sumando y usando el hecho de que $\mathbf{x}'$ es viable se tendrá que $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}\mathbf{x}'_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}\omega_i > \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}\omega_i$, lo que no pude ser. $\square$

Es claro que el primer teorema del bienestar se deduce directamente de las definiciones de equilibrio walrasiano y eficiencia económica, pues prácticamente no existen supuestos explícitos. A pesar de lo anterior, hay supuestos implícitos, los cuales se enuncian a continuación:

1. A los agentes no les importa lo que consumen los demás.
2. Los agentes se comportan competitivamente.

Con respecto al supuesto 1, supongamos que a un agente le importase lo que consumen los demás, en este caso una vez que cada uno de ellos ha seleccionado su cesta de consumo, y por tanto se tiene la asignación de mercado, aún sería posible que el consumidor a quien le importa el consumo del resto mejorara su bienestar influyendo sobre los demás para que cambiaran su consumo, por lo que la asignación no sería eficiente en el sentido de Pareto.

Por su parte, el supuesto 2 está relacionado con el hecho de que el equilibrio general sólo tiene sentido cuando existen los suficientes agentes para que estos se comporten de manera competitiva, ya que si sólo hay dos, uno de ellos puede considerar el precio de la dotación del otro como dado.[2]

Una vez expuestos los supuestos implícitos que pudieran llegar a apreciarse como salvedades al primer teorema del bienestar, es necesario notar que es un resultado muy poderoso de la teoría económica, pues nos permite ver que una asignación en la que cada uno de los agentes maximiza su bienestar es un óptimo de Pareto. Así pues, la importancia del resultado radica en que nos proporciona al mercado competitivo como un mecanismo adecuado para hallar asignaciones eficientes.

No obstante, la principal ventaja que resulta de contar con el mercado competitivo como tal herramienta, es la poca cantidad de información que necesitan los agentes, pues basta que conozcan los precios para que puedan tomar sus decisiones, es decir, no necesitan saber quién los produjo, o cómo fueron producidos, o más aún, no necesitan saber su procedencia. Es por esto, que el mercado competitivo se considera un poderoso mecanismo para la asignación de recursos.

Es pertinente hacer notar ahora que la proposición 3.3 es un caso especial del teorema 3.5, pues sabemos que en la caja de Edgeworth el equilibrio walrasiano está representado por la asignación en que las curvas de indiferencia de los agentes son tangentes, con la condición de optimización impuesta por la restricción presupuestaria de cada agente.

3.3.1.1. El caso Excepcional de Arrow

Es muy importante notar que el reciproco del primer teorema del bienestar no es necesariamente cierto. Un contraejemplo famoso es el llamado *"caso excepcional de Arrow"*. [3]

[2]Es por el supuesto 2, que en el apartado referente a la caja de Edgeworth fue necesario hacer la suposición de comportamiento competitivo de manera explícita.

[3]Se presenta este caso siguiendo a Varian (1999).

Así pues, considérese un diagrama como el siguiente:

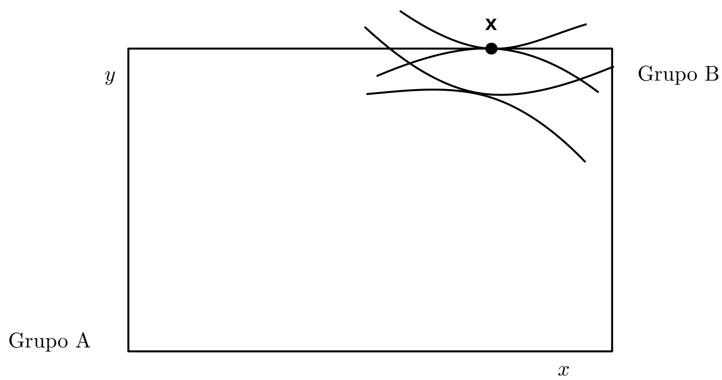

Figura 3.3: Caso Excepcional de Arrow

Tenemos que la asignación $\mathbf{x}$ es un punto eficiente en el sentido de Pareto. Sin embargo, no existe ningún precio al que dicha cesta sea un equilibrio walrasiano. Lo que ocurre en la asignación $\mathbf{x}$, es que el consumidor 2 no posee nada del bien 2.

En efecto, una de las condiciones para que una asignación eficiente en el sentido de Pareto sea equilibrio walrasiano es que todos los consumidores tengan cantidades estrictamente positivas en cada uno de los bienes, y es el segundo teorema del bienestar el que nos da las condiciones para que una asignación eficiente en el sentido de Pareto pueda ser también un equilibrio walrasiano.[4]

3.3.2. El Segundo Teorema de la Economía del Bienestar

Como ya se mencionó, el segundo teorema del bienestar tiene la finalidad de proporcionar las condiciones de suficiencia para que una asignación óptima en el sentido de Pareto sea considerada como un equilibrio walrasiano.

[4]Obsérvese también que la proposición 3.4 también nos proporciona un caso en el que una asignación óptima en el sentido de Pareto no puede ser equilibrio walrasiano.

Teorema 3.6 (Segundo Teorema del Bienestar) *Supongamos que* $\mathbf{x}^*$ *es una asignación eficiente en el sentido Pareto en la que cada uno de los agentes posee una cantidad positiva de cada uno de los bienes. Supongamos también que las preferencias son convexas, continuas y monótonas. Entonces,* $\mathbf{x}^*$ *es un equilibrio walrasiano en el caso de las dotaciones iniciales* $\omega_i = \mathbf{x}^*$*, con* $i \in \{1, ..., n\}$*.*

Demostración. Definamos el conjunto de las cestas que el agente prefiere estrictamente a $\mathbf{x}^*$ como:

$$P_i = \left\{ \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^k : \mathbf{x}_i \succ \mathbf{x}_i^* \right\}$$

A partir del conjunto P_i definimos el siguiente conjunto:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \left\{ \mathbf{z} : \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i, \ \textit{con}\ \mathbf{x}_i \in P_i \right\}$$

Así definido, P es el conjunto de todas las cestas de los k bienes que pueden distribuirse entre los n agentes con el fin de mejorar el bienestar de cada uno de ellos. Dado que P_i es un conjunto convexo por hipótesis, entonces P debe serlo también.

Sea $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^*$. Ahora bien, dado que $\mathbf{x}^*$ es eficiente en el sentido de Pareto, no existe ninguna redistribución de los bienes que mejore el bienestar de todos los agentes, por lo que ω no es un elemento de P, entonces el teorema del hiperplano separador[5] nos garantiza que existe un vector de precios $\mathbf{p} \neq 0$ tal que:

$$\mathbf{pz} \geq \mathbf{p} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^* \ \forall \mathbf{z} \in P$$

Lo cual es claramente equivalente a escribir:

$$\mathbf{p} \left(\mathbf{z} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^* \right) \geq 0 \ \forall \mathbf{z} \in P$$

Debemos probar que $\mathbf{p}$ es un vector de precios de equilibrio walrasiano. Para probar este hecho dividiremos la demostración en cuatro pasos.

[5] Véase apéndice B, pág. 91.

1. Probaremos que $\mathbf{p} \geq 0$

Consideremos el vector $\mathbf{e}_i = (0, ..., 0, 1, 0.., 0)$, por la monotonía de las preferencias tenemos que $\omega + \mathbf{e}_i$ pertenece a P, ya que ahora se tiene una unidad más del bien i, que es posible redistribuir para mejorar el bienestar de todos los agentes. Pero entonces tendremos que

$$\mathbf{p}\left(\omega + \mathbf{e}_i - \omega\right) \geq 0, \text{ con } i \in \{1, ..., k\}$$

Entonces, esta ecuación implica que $p_i \geq 0$ con $i \in \{1, ..., k\}$

2. Si $y_j \succ x_j^*$, entonces $\mathbf{p}\mathbf{y}_j \geq \mathbf{p}\mathbf{x}_j^*$, en el caso de todos los agentes $i \in \{1, ..., k\}$.

Si todos los agentes prefieren $\mathbf{y}_i$ a $\mathbf{x}_i$ debe ocurrir que:

$$\mathbf{p}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i \geq \mathbf{p}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^*$$

Supongamos ahora que solamente el agente j prefiere la cesta $\mathbf{y}_j$ a la $\mathbf{x}_j$. Construyamos una asignación $\mathbf{z}$ distribuyendo alguna cantidad del agente j en favor del resto de los agentes, esto es:

$$z_j = (1-\theta)\, y_j$$

$$z_i = x_i^* + \frac{\theta y_j}{n-1}, \quad i \neq j$$

Con $0 < \theta < 1$, ya que así, para θ lo suficientemente pequeña, el supuesto de monotonía fuerte implica que $\mathbf{z}$ se prefiere estrictamente a $\mathbf{x}$, por todos los agentes, luego $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{z}_i$ pertenece a P. Por lo que:

$$\mathbf{p}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{z}_i \geq \mathbf{p}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{p}\left[(1-\theta)\,\mathbf{y}_j + \sum_{i\neq j}\mathbf{x}_i^* + \theta\mathbf{y}_j\right] \geq \mathbf{p}\left[\mathbf{x}_j^* + \sum_{i\neq j}\mathbf{x}_i^*\right]$$

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j \geq \mathbf{p}\mathbf{x}_j^*$$

Por lo que si un agente prefiere una cesta estrictamente, no es posible que esta cueste menos. Debemos probar que la desigualdad es estricta.

3. Si $y_j \succ x_j^*$, entonces $\mathbf{p}\mathbf{y}_j > \mathbf{p}\mathbf{x}_j^*$, en el caso de todos los agentes $i \in \{1, ..., k\}$.

Supongamos que $\mathbf{p}\mathbf{y}_j = \mathbf{p}\mathbf{x}_j^*$, entonces, por el paso 2, sabemos que $\mathbf{p}\mathbf{y}_j \geq \mathbf{p}\mathbf{x}_j^*$, entonces la continuidad de las preferencias nos permite hallar $0 < \theta < 1$ tal que $\theta\mathbf{y}_j$ se prefiera estrictamente a $\mathbf{x}_j^*$, y tendremos que $\theta\mathbf{p}\mathbf{y}_j \geq \mathbf{p}\mathbf{x}_j^*$.

Dado que todos las entradas de $\mathbf{x}_j^*$ son estrictamente mayores que cero, entonces $\mathbf{p}\mathbf{x}_j^* > 0$. Pero entonces, dado que $\mathbf{p}\mathbf{y}_j - \mathbf{p}\mathbf{x}_j^* = 0$, tendremos $\theta\mathbf{p}\mathbf{y}_j < \mathbf{p}\mathbf{x}_j^*$, lo que es una contradicción. $\square$

El segundo teorema de la economía del bienestar establece que bajo ciertas condiciones las asignaciones que sean óptimos paretianos, pueden lograrse mediante el criterio del equilibrio de mercados competitivos.

Este teorema implica que es posible separar los problemas relacionados con la distribución de aquellos ligados a la eficiencia. Además, muestra que los mercados competitivos son neutrales en cuanto a la asignación recursos, ya que no toma en cuenta los criterios que se tengan sobre distribución justa.

Es así que los precios juegan dos roles en los mercados competitivos:

1. Asignar los recursos.
2. La distribución de los recursos.

El primer punto se refiere a la escasez relativa, mientras que el segundo hace referencia a la cantidad que los consumidores pueden adquirir de cada bien.

3.4. La Maximización del Bienestar.

3.4.1. Condiciones de Primer Orden del Equilibrio Walrasiano y de la Eficiencia de Pareto.

En esta subsección daremos las condiciones de primer orden que caracterizan a los equilibrios walrasianos y a la eficiencia en el sentido de Pareto.

Las condiciones de primer orden para el equilibrio son sencillas de obtener toda vez que se desprenden del hecho de que cada consumidor maximiza su utilidad en este, bajo las condiciones del siguiente proposición:

Proposición 3.7 *Si* $(\mathbf{x}^{*},\mathbf{p})$ *es un equilibrio walrasiano en el que cada uno de los consumidores tiene una cantidad positiva de todos los bienes, existe un conjunto de números* $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$*, tales que* $\mathbf{D}u_i(\mathbf{x}^{*}) = \lambda_i \mathbf{p}$ *con* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*.*

Demostración. Cuando los agentes están en el equilibrio de mercado están maximizando su utilidad, de manera restringida a su conjunto presupuestario, por lo que los λ_i no son más que la condición de primer orden de la maximización de la utilidad para cada agente. Por lo que λ_i no es más que la utilidad marginal de la renta del agente $i-\acute{e}simo$. $\square$

Ahora debemos formular las condiciones de primer orden para la eficiencia en el sentido de Pareto, lo cual implica que debemos buscar una manera que nos permita redefinir los óptimos de Pareto a través del cálculo, lo cual hacemos con la siguiente proposición:

Proposición 3.8 *Una asignación viable* $\mathbf{x}^{*}$ *es eficiente en el sentido de Pareto si y sólo si* $\mathbf{x}^{*}$ *es la solución de los siguientes problemas de maximización con* $i \in \{1, 2, .., n\}$:

$$\max_{\left(x_i^g, x_j^g\right)} u_i(\mathbf{x}_i)$$

$$\text{s. a.} \sum_{h=1}^{n} x_h^g \leq \omega^g \quad g = 1, ..., n$$

$$u_j\left(\mathbf{x}_j^{*}\right) \leq u_j(\mathbf{x}_j) \quad i \neq j$$

Demostración. Demostraremos primero el regreso de esta proposición, para lo cual supondremos que la asignación $\mathbf{x}^*$ no es eficiente en el sentido de Pareto.

Así pues, debe existir $\mathbf{x}'$ en la que todo el mundo disfrute de un mayor bienestar. Pero entonces $\mathbf{x}^*$no podría ser solución de los problemas de optimización.

Ahora, para demostrar la primera parte de la proposición supongamos que $\mathbf{x}^*$no es solución de alguno de los problemas de maximización, y sea $\mathbf{x}'$ la solución de tal problema. En este caso $\mathbf{x}'$ mejora el bienestar del agente al que le corresponde ese problema sin empeorar el de ningún otro, lo que contradice que $\mathbf{x}^*$ sea un óptimo de Pareto. $\square$

Ahora bien, para obtener el lagrangiano de los problemas de optimización permítase que q^g, con $g = 1, ..., k$, sean los multiplicadores de Lagrange de las restricciones de los recursos y que a_j sean los multiplicadores de Kuhn - Tucker de las restricciones de utilidad, con $i \neq j$. Siendo así, el lagrangiano de los problemas de uno de los agentes de la proposición 3.8 se pueden expresar como:

$$\mathcal{L} = u_i(\mathbf{x}_i) - \sum_{g=1}^{k} q^g \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^g - \omega^g \right] - \sum_{j \neq i} a_j \left[u_j\left(\mathbf{x}_j^*\right) - u_j(\mathbf{x}_j) \right]$$

Diferenciando el lagrangiano obtenemos:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}_i^*)}{\partial x_i^g} - q^g = 0$$

$$a_j \frac{\partial u\left(\mathbf{x}_j^*\right)}{\partial x_j^g} - q^h = 0$$

Si bien, las condiciones de primer orden parecen asimétricas, esto se resuelve cuando se observa que los valores relativos de q son independientes de la elección de i. Lo anterior puede considerarse como evidente ya que las condiciones indican que:

$$\frac{\dfrac{\partial u_i(\mathbf{x}_i^*)}{\partial x_i^g}}{\dfrac{\partial u_i(\mathbf{x}_i^*)}{\partial x_h^g}} = \frac{q^g}{q^h}$$

Pero dado que $\mathbf{x}_i^*$ está dada se tiene que $\frac{q^g}{q^h}$ debe ser independiente del problema de maximización que se resuelva. Por lo que la solución del problema de asimetría es que si maximizamos la utilidad del agente i y utilizamos como restricciones las utilidades de los demás consumidores, es lo mismo que asignar un multiplicador de Kuhn - Tucker $a_i = 1$.

Ahora bien, aplicando el teorema 3.5, podemos decir que si $\mathbf{x}^*$es un equilibrio walrasiano entonces:

$$\mathbf{D}u_i\left(\mathbf{x}_i^*\right) = \lambda_i \mathbf{p}^*$$

Pero como cualquier equilibrio de mercado es un óptimo de Pareto:

$$a_i \mathbf{D}u_i\left(\mathbf{x}_i^*\right) = \mathbf{q}$$

esta ecuación muestra que siempre es posible elegir $a_i = \frac{1}{\lambda_i}$ y $\mathbf{p}^* = \mathbf{q}$, por lo que los multiplicadores de Kuhn-Tucker de las restricciones de los recursos son los precios competitivos y los multiplicadores de Kuhn-Tucker de las utilidades del agente son las inversas de sus utilidades marginales de la renta. Por lo que, al eliminar los multiplicadores se obtiene:

$$\frac{\dfrac{\partial u_i\left(\mathbf{x}_i^*\right)}{\partial x_i^g}}{\dfrac{\partial u_i\left(\mathbf{x}_i^*\right)}{\partial x_h^g}} = \frac{p_g^*}{p_h^*} = \frac{q^g}{q^h}$$

La expresión anterior nos señala que los óptimos de Pareto deben satisfacer la condición de que las RMS entre los pares de bienes debe ser la misma para cada uno de los agentes. Esto cobra sentido cuando se piensa que si las RMS entre un par de agentes fueran diferentes, entonces podrían hacer algo para mejorar su bienestar, lo que contradiría que son óptimos de Pareto.

Una observación muy importante, para el objetivo de estudiar el bienestar, es que las condiciones de primer orden para la existencia de un óptimo de Pareto, son iguales a las condiciones de primer orden para la maximización de una suma ponderada de las utilidades, para ello considérese el siguiente problema de optimización:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\left(\mathbf{x}_i\right)$$

$$s.\,a.\,\sum_{i=1}^{n} x_i^g \leq \omega^g$$

Las condiciones de primer orden son:

$$a_i \mathbf{D} u_i \left(\mathbf{x}_i^*\right) = \mathbf{q}$$

que son las mismas para que haya eficiencia en el sentido de Pareto.

Ahora bien, a medida que varían los ponderadores del bienestar, $(a_1, a_2, ..., a_n)$ se obtienen las diferente asignaciones eficientes en el sentido de Pareto. Sin embargo, dado que nos interesa conocer las condiciones que caracterizan a la asignaciones que son óptimos paretianos, entonces necesitamos eliminar tales términos, lo que se reduce a expresar las las condiciones en función de las RMS.

Lo anterior se logra usando la función de utilidad del consumidor, ya que si esta es $u_i\left(\mathbf{x}_i\right)$, entonces, la proposición 1.14 nos permite rescribirla como $v_i(\mathbf{x}_i) = a_i u_i\left(\mathbf{x}_i\right)$. De este modo las condiciones de primer orden resultantes serán las de la suma de utilidades, en el caso de una determinada representación de la utilidad, y manipulándolas para expresarlas en términos de las RMS obtenemos una condición que caracteriza todas las asignaciones eficientes.

En realidad, esta caracterización se trata de una versión sencilla del segundo teorema del bienestar. Así pues, supongamos que todos los consumidores tienen funciones de utilidad cóncavas. Entonces si $\mathbf{x}^*$ es una asignación eficiente en el sentido de Pareto. Por las condiciones de primer orden tenemos que:

$$\mathbf{D} u_i\left(\mathbf{x}^*\right) = \frac{1}{a_i}\mathbf{q} \qquad i \in \{1, ..., n\}$$

Por lo que el gradiente de la función de utilidad es proporcional a algún vector fijo $\mathbf{q}$. Ahora bien, sea $\mathbf{q}$ el vector de precios de equilibrio, es necesario verificar que cada agente maximiza su utilidad en su conjunto presupuestario $\{\mathbf{x}_i : \mathbf{q}\mathbf{x}_i \leq \mathbf{q}{\mathbf{x}_i}^*\}$, lo cual es inmediato de la concavidad, pues las funciones cóncavas cumplen que:

$$u\left(\mathbf{x}_i\right) \leq u\left(\mathbf{x}_i^*\right) + \mathbf{D}u\left(\mathbf{x}_i^*\right)\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^*\right)$$

Por lo que se sigue que:

$$u\left(\mathbf{x}_i\right) \leq u\left(\mathbf{x}_i^*\right) + \frac{1}{a_i}\mathbf{q}\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^*\right)$$

Pero entonces se tiene que $u(\mathbf{x}_i) \leq u(\mathbf{x}_i^*)$, si $\mathbf{x}_i$ pertenece al conjunto presupuestario.

Una vez que hemos visto la caracterización que tiene la eficiencia de Pareto a través del cálculo, podemos establecer los criterios de optimización del bienestar, lo cual se hará en la siguiente sección.

3.4.2. La Optimización del Bienestar

Sin embargo, aún no sabemos como encontrar una asignación eficiente en el sentido de Pareto, pues la caracterización mediante el cálculo no es muy precisa como criterio normativo. La forma más apropiada para resolver este problema es tomar una función social de bienestar. Una función de bienestar social, es una función que agrega las funciones de bienestar de todos los agentes, y que se suele interpretar como una función que representa las preferencia de aquellos que estén a cargo de tomar las decisiones en materia del intercambio de utilidades en la sociedad.

Definición 29. *Una función de utilidad social,* $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *tal que* $W(u_1(x_1), ..., u_n(x_n))$, *es aquella que indica la utilidad social resultante de una distribución cualquiera* $(u_1(x_1), ..., u_n(x_n))$ *de las utilidades privadas.*

Por lo general se suele suponer que la función W es creciente en cada uno de sus términos, y que si se eleva el nivel de utilidad de uno de los miembros manteniendo el del resto de los agentes igual, entonces aumenta el bienestar social.

Supondremos que estamos en un punto en el cual la sociedad maximice su bienestar social, es decir, en aquel en que se elige una asignación $\mathbf{x}^*$que resuelve el problema:

$$\begin{gathered} \text{máx } W(u_1(x_1), ..., u_n(x_n)) \\ s.\,a. \sum x_i^g \leq \omega^g \quad g = 1, ..., k \end{gathered}$$

La siguiente proposición relaciona la utilidad social, con la eficiencia económica.

Proposición 3.9 *Si* $\mathbf{x}^*$ *maximiza una función de bienestar social, entonces* $\mathbf{x}^*$ *es eficiente en el sentido de Pareto.*

Demostración. Supongamos que no es así, entonces existe $\mathbf{x}'$ tal que $u_i(\mathbf{x}_i') > u_i(\mathbf{x}_i^*)$, con $i \in \{1, ..., n\}$. Pero entonces:

$$W(u_1(x_1'), ..., u_n(x_n')) > W(u_1(x_1^*), ..., u_n(x_n^*))$$

Lo que es una contradicción. □

A lo largo de este apartado, hemos visto que todo máximo de bienestar es eficiente en el sentido de Pareto. Sin embargo, no hemos indagado en si lo contrario es cierto, la siguiente proposición nos da las condiciones para que eso sea verdad.

Proposición 3.10 *Sea* $\mathbf{x}^*$ *una asignación eficiente en el sentido de Pareto en la que* $\mathbf{x}^* \gg 0$ *con* $i \in \{1, ..., n\}$. *Supongamos que las funciones de utilidad* u_i *son cóncavas, continuas y monótonas. Entonces, existen ponderaciones* a_i *tales que* x *maximiza* $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(\mathbf{x}_i^*)$ *sujeta a las restricciones de recursos. Por su parte, las ponderaciones* a_i *son tales que* $a_i^* = \frac{1}{\lambda_i^*}$, *donde* λ_i^* *es la utilidad marginal de la renta del agente* i *a los precios de equilibrio* $\mathbf{p}^*$, *entonces.*

$$\lambda_i^* = \frac{\partial v_i(\mathbf{p}, m_i)}{\partial m_i}$$

Demostración. Dado que $\mathbf{x}^*$ es eficiente en el sentido de Pareto, entonces, bajo las hipótesis mencionadas, es un equilibrio walrasiano. Por lo tanto existe un vector de precios $\mathbf{p}$ tal que cada uno de los agentes maximiza su utilidad dado su conjunto presupuestario, lo que implica a su vez que:

$$\mathbf{D}u_i(\mathbf{x}_i^*) = \lambda_i \mathbf{p}$$

Considérese ahora el siguiente problema de maximización del bienestar:

$$
\begin{aligned}
&\text{máx} \sum_{i=1}^{n} a_i u_i\left(\mathbf{x}_i\right) \\
s.\,a &\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{1*} \\
&\vdots \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i^k \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{k*}
\end{aligned}
$$

Pero entonces, de acuerdo con el teorema de las condiciones de suficiencia del teorema de Kuhn - Tucker, $\mathbf{x}$ es la solución de este problema si existen números no negativos $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_k)$, tales que:

$$a_i \mathbf{D} u_i\left(\mathbf{x}_i^*\right) = \mathbf{q}$$

Si elegimos $a_i = \frac{1}{\lambda_i}$, los precios $\mathbf{p}$ sirven de números no negativos, con lo que la proposición queda demostrada. □

La interpretación económica de las ponderaciones como las inversas de las utilidades marginales tiene sentido, pues si algún agente tiene renta elevada en alguna asignación eficiente en el sentido de Pareto, su utilidad marginal de la renta será pequeña, por lo que su ponderación en la función social de bienestar será grande.

Las proposiciones 3.9 y 3.10, completan la relación que existe entre los equilibrios walrasianos (equilibrios de mercado) y las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto en el marco del intercambio puro.

En este capítulo hemos encontrado las propiedades de bienestar que poseen los equilibrios walrasianos, las cuales se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Los equilibrios competitivos siempre son eficientes en el sentido de Pareto.

2. Los máximos de bienestar siempre son eficientes en el sentido de Pareto.

3. Las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto son máximos de bienestar partiendo de los supuestos de concavidad, en el caso de una elección de las ponderaciones de bienestar.

Así pues, la principal conclusión que se puede extraer de este estudio es que si bien un mercado competitivo genera asignaciones eficientes no nos dice nada sobre la distribución. Por otro lado, la elección de la distribución de la renta es igual que la elección de una reasignación de las dotaciones, lo que es lo mismo a la elección de una función de utilidad social.

Es por la primera conclusión que, para concluir este trabajo se presenta la siguiente proposición, la cual da condiciones para que una asignación equitativa sea eficiente en el sentido de Pareto.

Proposición 3.11 *Supóngase que se tienen n agentes con idénticas funciones de utilidad estrictamente cóncavas, y que ω es la dotación inicial. Entonces, una distribución igualitaria es eficiente en el sentido de Pareto.*

Es claro que bajo las condiciones anteriores, no es posible que se mejore el bienestar de un agente sin empeorar a otro.

Bibliografía

[1] Apostol, T. M., (2001), CALCULUS: *Cálculo con Funciones de Varias Variables y Álgebra Lineal, con Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales y a las Probabilidades*, Tomo II, 2a. ed., México: Editorial Reverté.

[2] Binmore, K., (2007), *Playing for Real: a Text on Game Theory*, New York: Oxford University Press.

[3] Debreu, G., (1959), *Theory of Value: an Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Cowles Monographs, New Haven: Yale University Press.

[4] Gale, D., (2000), *Strategic Foundations of General Equilibrium: Dynamic Matching and Bargaining Games,* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[5] Gould, J. P. y Lazear, E. P., (1994), *Teoría Microeconómica*, 3a. ed. (en español), México: Fondo de Cultura Económica.

[6] Koutsoyiannis, A., (1995), *Microeconomía Moderna*, Buenos Aires: Amorrotu Editores.

[7] Martínez-Giralt, X., (2008), *Microeconomía Avanzada*, Texto en Internet, Dirección: http://pareto.uab.cat/xmg/Docencia/MonographMicroAv.pdf

[8] Mas-Colell, A., Whinston, M. D. and Green, J., (1995), *Microeconomic Theory*, New York: Oxford University Press.

[9] Peressini, A. L., Sullivan, F. E. and Uhl, J. J. (Jr.), (1988), *The Mathematics of Nonlinear Programming*, New York: Springer–Verlag.

[10] Rudin, W., (1976), *Principles of Mathematical Analysis*, 3th. edition, Tokio: McGraw-Hill Kogakusha.

[11] Stiglitz, J. E., (2000), *La Economía del Sector Público*, 3a. ed., Barcelona: Antoni Bosch, Editor.

[12] Varian, H. R., (1992), *Análisis Microeconómico*, 3a. ed., Barcelona: Antoni Bosch, Editor.

[13] ________, (1999), *Microeconomía Intermedia: un Enfoque Actual*, 5a. ed., Barcelona: Antoni Bosch, Editor.

[14] Zapata Lillo, P., (2007), *Economía, Política y otros Juegos: una Introducción a los Juegos no Cooperativos*, México: Las Prensas de Ciencias, UNAM.

Apéndice A

El Teorema Fuerte de Existencia y Continuidad de la Función de Utilidad.

A.1. Existencia de la Función de Utilidad: el Teorema de Debreu

En el año de 1959, Gérard Debreu, premio Nobel de economía, en su libro *"Theory of Value: an Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium"* presentó el siguiente teorema de existencia y continuidad de la función de utilidad, el cual es mucho más fuerte que el presentado en el capítulo 1 de este trabajo.[1]

Teorema de Debreu de Existencia y Continuidad. *Sea X un conjunto conexo de $\mathbb{R}^l$, completamente preordenado por $\underset{i}{\precsim}$. Entonces, bajo el supuesto de continuidad en las preferencias*[2] *existe sobre X una función de utilidad continua.*

El teorema de Debreu, a diferencia del presentado por Varian (1992), omite el supuesto de la monotonía fuerte en las preferencias, aunque echa mano de los axiomas del consumidor y de la continuidad.

[1] Para una demostración de este teorema véase Debreu (1959), o Mas-Collel et al (1995).

[2] En este caso el supuesto de continuidad corresponde al axioma de continuidad presentado en la página 7.

Apéndice B

Teoremas Citados

B.1. Teoremas de Optimización

B.1.1. El Teorema de Kuhn - Tucker

El teorema de Kuhn - Tucker es útil cuando necesitamos resolver problemas de optimización cuyas restricciones son desigualdades, en este apartado se presenta la forma que deben tener las condiciones primer orden, dado que estas son las que han sido utilizadas en este trabajo.

Para formular el teorema de Kuhn - Tucker supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$, examinemos el problema de optimización

$$\text{máx } f(\mathbf{x})$$
$$\text{sujeta a } g_i \leq 0 \quad i \in \{1, 2, ..., n\}$$

y damos las siguientes definiciones:

Definición B1 *Al conjunto* $\{\mathbf{x} : g_i \leq 0 \; i \in \{1, 2, ..., n\}\}$*, se le denomina conjunto factible.*

Definición B2 *Si existe* $\mathbf{x}$ *tal que* $g_i = 0$*, decimos que la restricción* $i -$ *ésima es una restricción efectiva o saturada. De otro modo se dice que es no efectiva o pasiva.*

Definición B3 *Sea* $B(\mathbf{x}^*)$*el conjunto de restricciones efectivas en* $\mathbf{x}^*$ *y* $G(\mathbf{x}^*)$ *el conjunto de gradientes de las restricciones en* $\mathbf{x}^*$

$$G(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{D}g_i(\mathbf{x}^*) : g_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$$

Entonces decimos que se cumplen las restricciones de cualificación si el conjunto de vectores $G(\mathbf{x}^*)$ *es linealmente independiente.*

Teorema B1 (Kuhn - Tucker) *Si* $\mathbf{x}^*$ *es la solución del problema de optimización arriba mencionado y se cumplen las restricciones de cualificación en* $\mathbf{x}^*$*, existe un conjunto de multiplicadores de* $\lambda_i \geq 0$ *con* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *tales que*

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{D}g_i(\mathbf{x}^*)$$

Tenemos además, las condiciones de holgura complementarias

$$\lambda_i \geq 0 \text{ para toda } i$$

$$\lambda_i = 0 \text{ si } g_i < 0$$

La principal característica es que los multiplicadores de Kuhn - Tucker son no negativos, mientras que los de Lagrange si pueden serlo. Además, es claro que este teorema sólo da las condiciones necesarias para un máximo, pero el siguiente nos da condiciones de suficiencia.

Teorema B2 (Suficiencia de Kuhn - Tucker) *Supongamos que* f *es una función cóncava y que* g_i *es una función convexa con* $i \in \{1, 2, ..., k\}$*. Sea* $\mathbf{x}^*$ *un punto viable y supóngase que se pueden hallar números no negativos* λ_i *tales que* $\mathbf{D}f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{D}g_i(\mathbf{x}^*)$*. Entonces,* $\mathbf{x}^*$*es la solución del problema de maximización arriba presentado.*

Demotración. Sea $\mathbf{x}$ un punto factible, entonces dado que f es cóncava podemos formular la siguiente desigualdad:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{D}f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

y, por hipótesis, podemos escribir:

$$f\left(\mathbf{x}\right) \leq f\left(\mathbf{x}^{*}\right)+\sum_{i=1}^{k} \lambda_{i} \mathbf{D} g_{i}\left(\mathbf{x}^{*}\right)\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{*}\right)$$

y como $g_i\left(\mathbf{x}\right)$ es convexa:

$$g_i(\mathbf{x}) \geq g_i\left(\mathbf{x}^{*}\right)+\mathbf{D} g_i\left(\mathbf{x}^{*}\right)\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{*}\right)$$

Si la restricción i es efectiva, $g_i(\mathbf{x}) \leq g_i\left(\mathbf{x}^{*}\right)=0$ con $i \in \{1,2,...,k\}$ y como $\lambda_i \geq 0$, se tiene $\lambda_i \mathbf{D} g_i\left(\mathbf{x}^{*}\right)\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{*}\right) \leq 0$, para todas las restricciones efectivas. Si la restricción i es pasiva , entonces$\lambda_i=0$, y aplicando esta observación tenemos $f\left(\mathbf{x}\right) \leq f\left(\mathbf{x}^{*}\right)$. Con lo que queda demostrado. □

B.1.2. Planteamiento de un Problema de Kuhn - Tucker

La forma en que hemos planteado las condiciones de Kuhn - Tucker de un problema de maximización son las siguientes:

$$\max_{\mathbf{x}} f\left(\mathbf{x}\right)$$

$$\text{sujeta a } g_i\left(\mathbf{x}\right) \leq 0 \text{ con } i \in \{1,2,...,k\}$$

El lagrangiano de este problema es:

$$\mathcal{L}=f\left(\mathbf{x}\right)-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i\left(\mathbf{x}\right)$$

Cuando el problema queda expresado de esta manera se garantiza que los multiplicadores de Kuhn - Tucker no pueden ser negativos.

Cuando se presenta el caso en que una de las restricciones debe ser mayor o igual que cero, se deben multiplicar todos los términos de la restricción por -1, para que de esta manera se puedan aplicar las condiciones de Kuhn - Tucker. Considerese el siguiente ejemplo:

$$\max_{\mathbf{x}} f\left(\mathbf{x}\right)$$

$$\text{s. a } h_i\left(\mathbf{x}\right) \geq 0 \text{ con } i \in \{1,2,...,k\}$$

Este problema es equivalente a:

$$\max_{\mathbf{x}} f\left(\mathbf{x}\right)$$

$$\text{s. a } -h_i\left(\mathbf{x}\right) \leq 0 \text{ con } i \in \{1,2,...,k\}$$

Así, el lagrangiano de este problema es:

$$\mathcal{L} = f\left(\mathbf{x}\right) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(-h_i\left(\mathbf{x}\right)\right) = f\left(\mathbf{x}\right) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i\left(\mathbf{x}\right)$$

Con lo que queda garantizado que los multiplicadores serán no negativos.

B.1.3. Existencia y Continuidad de un Máximo.

A lo largo de la tesis se demostraron diferentes teoremas relacionados con maximización, es por ello que se presentan los siguientes teoremas que mencionan la existencia y la continuidad de un máximo. Para ello consideremos el siguiente problema de optimización paramétrica:

$$M\left(a\right) = \max\ f\left(\mathbf{x}, a\right)$$

$$\text{s. a. } \mathbf{x} \in G\left(a\right)$$

A partir de la especificación del problema anterior podemos enunciar los siguientes dos resultados:

Teorema B1 (Existencia de un Óptimo). *Si el conjunto de restricciones $G(a)$ es no vacío y compacto, y la función f es continua, entonces el problema tiene solución.*

Teorema B2 (Unicidad del Óptimo). *Si la función f es estrictamente cóncava y el conjunto de restricciones es convexo, la solución, de existir, es única.*

Ahora bien, si permitamos que $x(a)$ sea la solución del problema anterior podemos enunciar el siguiente resultado:

Teorema B3 (Teorema del Máximo). Supongamos que $f(\mathbf{x}, a)$ es una función continua y que el rango es compacto. Asimismo, supongamos que el conjunto de restricciones $G(a)$ es una correspondencia de a no vacía, compacta y continua. En ese caso:

(a) $M(a)$ es una función continua.

(b) $x(a)$ es una correspondencia semicontinua superior.

Teorema B4 (Teorema del Hiperplano Separador) *Supongase que C es un conjunto cerrado y convexo en $\mathbb{R}^n$ y que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{y} \notin C$. Entonces existe un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ diferente de cero y un número real α tales que:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq \alpha < \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}$$

Para toda $\mathbf{x} \in C$

Para una demostración de este teorema véase Peressini et al (1988).

B.2. Teorema de Heine-Borel y Teoremas de Punto Fijo.

Teorema B4 (Teorema de Heine-Borel) *Un conjunto E en $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Teorema B5 (Teorema del Punto Fijo de Brower) *Sea X un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$. Sea f una función continua que asocia a cada punto x de X un punto $f(x)$ de X,*

$$f : X \to X$$

$$x \mapsto f(x)$$

Entonces existe un punto $\hat{x}$ que satisface $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Teorema B6 (Teorema de Punto Fijo de Kakutani) *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto y convexo, y sea $f : A \to A$ una correspondencia superiormente semicontinua con la propiedad de que $f(x) \subset A$ es no vacío y convexo para toda $x \in A$. Entonces $f(\cdot)$ tiene un punto fijo.*

Para una explicación de la lógica del funcionamiento del teorema de Kakutani, véase Mas-Collel et al (1995) y Zapata Lillo (2007).