UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Matemáticas en el Tema de Funciones en el Bachillerato

T E S I S

Que para obtener el grado Académico de:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

Roberto Albino Benítez.

Directora de tesis:
M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza

México, D.F. Mayo, 2012

AGRADECIMIENTOS

La presente Tesis es un esfuerzo en el cual participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañándome en los momentos de dificultades y en los momentos de felicidad.

Agradezco a la M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza por haber confiado en mí, por la paciencia, por la dirección de este trabajo y por todo el apoyo que me bridó durante este tiempo. A la Mtra. Marcela Beatriz González Fuentes por los consejos, el apoyo, el ánimo que me brindó y sobre todo su completa disposición para asesorarme. Al Dr. Carlos Hernández Garciadiego por apoyarme durante este proceso, al Mtro. Mauro Sergio Solano Olmedo por sus atinadas observaciones y, por último pero no menos importante, al Dr. Sergio Cruz Contreras por su atenta lectura de este trabajo.

Gracias a todos.

DEDICATORIA.

Dedico este trabajo
con mucho cariño a
mis hermanas:
Norma Leticia, y
Ariana Cecilia.

ÍNDICE GENERAL. PÁGINA.

ÍNDICE GENERAL. PÁGINA.

ÍNDICE GENERAL. PÁGINA.

ÍNDICE DE GRÁFICAS, FIGURAS Y UN CUADRO. PÁGINA.

ÍNDICE DE ANEXOS. PÁGINA.

INTRODUCCIÓN.

Los resultados de las evaluaciones realizadas a los estudiantes por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) muestran que México es uno de los países con bajo rendimiento en Matemáticas. A este respecto, el Instituto Nacional de la Evaluación de la Educación (INEE, 2008) considera que algunas de las causas son: “el enfoque memorístico, los métodos de enseñanza obsoletos y la promoción de habilidades de rutina, que prevalecen en muchos casos, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las escuelas mexicanas, públicas y privadas, a pesar de que los planes de estudios prescriban el desarrollo de habilidades más complejas”.

Para enfrentar esta situación, los docentes pueden emplear Modelos de Enseñanza diseñados para optimizar las habilidades de pensamiento de los estudiantes, con base en la participación activa en el proceso de tomar la información y transformarla mentalmente en formas organizadas y comprensibles.

Así, el objetivo de este trabajo es presentar una Propuesta Didáctica en el Tema de Funciones[1] con el apoyo de dos Modelos de Enseñanza: el Inductivo[2] que se distingue por presentar, a los estudiantes, la información que ilustre los temas mientras el docente guía su aprendizaje por medio de preguntas y discusiones para la búsqueda de patrones; y por otra parte, el Modelo Cooperativo[3] que se caracteriza por la interacción de los estudiantes por medio del trabajo en equipo, en este caso el estudiante asume el rol de profesor y la responsabilidad junto con

---

1 El Tema de Funciones se origina y desarrolla simultáneamente durante el desarrollo en la historia de la matemática. La noción de una función aparece por primera vez en una forma más general durante el siglo XIV en las escuelas de filosofía. Las diferentes definiciones que se han proporcionado han sufriendo cambios, hasta llegar a la que aparece en la mayoría de los textos actuales, debida a Goursat en 1923.
Fuente: Historia del concepto de función. Por: Covadonga Escandón Martínez. Tomada de la página de internet: http://www.astroseti.org/articulo/4379/.

2 Paul D. Eggen, Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento. P. 88.

3 Ibid. Cit. P. 373.

el compromiso para comprender el tema y comunicarlo a sus compañeros. Ambas metodologías tienen como premisa la Enseñanza Activa, es decir, una enseñanza en la que los estudiantes interactúan durante el proceso de enseñanza aprendizaje y tienen tiempo para reflexionar, abstraer y desarrollar un trabajo intelectual.

Un elemento adicional en la Propuesta Didáctica es el uso de recursos didácticos, tales como: la Modelación Matemática y la tecnología, particularmente, el uso de la computadora. La idea de la Modelación es recrear el surgimiento de la matemática cuando el estudiante resuelve problemas, además de desarrollar una forma de pensamiento creativo. El uso de la tecnología es una herramienta que puede contribuir a facilitar el aprendizaje de las matemáticas, al respecto en la Propuesta Didáctica se incorpora el uso de tres programas: Excel, GeoGebra y Geometer´s Sketchpad.

Con esta Propuesta Didáctica se pretendía lograr que los estudiantes desarrollaran habilidades (tales como la realización de operaciones matemáticas, conectar ideas para resolver problemas sencillos y desarrollar un pensamiento de mayor amplitud) y aprendizajes más completos (por ejemplo, la compresión de conceptos, la representación de modelos matemáticos para la solución de problemas, el automonitoreo, el trabajo en equipo, etc.) en el Tema de Funciones, pero también proponer un modelo de trabajo que le permita a los docentes abordar otros temas de matemáticas.

Un aspecto trascendente en el proceso de enseñanza aprendizaje es, la evaluación. “PISA en el Aula: Matemáticas” sugiere considerar en la evaluación aspectos como: el trabajo individual, el trabajo en equipo, tareas, y el proceso y desarrollo de habilidades. Con base en esta propuesta de evaluación en este trabajo se generaron “Rúbricas de Evaluación” que permitieron: a) Obtener información detallada cuando los estudiantes resolvían un problema,[4] b) Identificar sus deficiencias, y c) Identificar sus habilidades para la solución de ejercicios.

El trabajo de tesis está estructurado en cuatro capítulos. En el primero se reportan algunas cifras y las posibles causas del rendimiento académico de los estudiantes mexicanos en las evaluaciones de PISA y ENLACE. También, se describen las premisas teóricas didáctico-educativos de la enseñanza para desarrollar la Propuesta Didáctica.

En el segundo capítulo, se presenta la aplicación de la Propuesta Didáctica la cual se divide en cuatro partes: a) Un Diagnóstico sobre temas básicos de Aritmética, Álgebra y Geometría Analítica, indispensables para abordar el Tema de Funciones; b) El Concepto de Función, en donde se abordan los conceptos teóricos relacionados al Tema de Funciones; c) El Trabajo en equipo, en este apartado los estudiantes realizan exposiciones sobre la solución de problemas de aplicación de funciones; y d) Una Evaluación final sobre temas de Aritmética, Álgebra, Geometría Analítica y problemas relacionados a Funciones.

El tercer capítulo contiene los resultados de la aplicación de la Propuesta Didáctica, la cual está dividida en cuatro partes: a) Diagnóstico, b) Concepto de Función, c) Trabajo en equipo y d) Evaluación final. En el último capítulo se presentan las conclusiones, las recomendaciones y las observaciones de este trabajo.

[4] Es importante mencionar que la calidad de un ejercicio o un problema no tiene que ver con el alto grado de dificultad. Contrario a lo que se podría pensar los ejercicios sencillos, pero bien elaborados, permiten observar las habilidades de los estudiantes, como se verá más adelante en la propuesta del trabajo.

CAPÍTULO 1. EL RENDIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES MEXICANOS EN MATEMÁTICAS Y LAS BASES PARA UNA PROPUESTA DIDÁCTICA EN EL TEMA DE FUNCIONES.

1.1. EL RENDIMIENTO ACADÉMICO DE LOS ESTUDIANTES EN MÉXICO.

1.1.1. PISA.

¿Cómo saber si nuestro Sistema Educativo tiene la calidad educativa que requiere el país? Para responder a esta pregunta se revisan los resultados sobre el rendimiento escolar proporcionados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), la cual desde el año 1997 impulsó el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), que evalúa las habilidades escolares y conocimientos de los estudiantes en edades comprendidas entre los 15 y 16 años, en tres áreas de conocimiento: Lectura, Matemáticas y Ciencias; el período de aplicación es cada tres años, la primera fue en el año 2000, la mayor parte de esta evaluación se centró en el área de lectura, la segunda fue en el 2003 en este caso se dio preferencia a matemáticas, la tercera fue en 2006 dando énfasis al área de ciencias y para el 2009 al área de lectura.

PISA realiza una evaluación objetiva con base en el enfoque *literacy*, que se refiere a la capacidad de los estudiantes para extrapolar lo que han aprendido y aplicar sus conocimientos y habilidades en nuevos escenarios; así como para analizar, razonar y comunicar de manera satisfactoria al plantear, resolver e interpretar problemas en diversas situaciones del mundo real.[5] La evaluación de PISA en el área de Matemáticas se organiza en tres dimensiones:

---

[5] Díaz, M. Antonieta; Flores, Gustavo y Martínez, Felipe. *PISA 2006 en México*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación INEE. Primera Edición 2007. México D.F. p. 18.

- *Contenidos*. Se refiere a las áreas de contenido matemático, sus conceptos se agrupan en cuatro grupos: Cantidad, Espacio y Forma, Cambio y Relaciones, e Incertidumbre,[6]
- *Procesos*. Se refieren a las habilidades necesarias para las matemáticas, se catalogan en: *Reproducción* (operaciones matemáticas sencillas), *Conexión* (conectar ideas para resolver problemas sencillos) y *Reflexión* (pensamientos matemático de mayor amplitud); y
- *Contexto y situación*. Son los ámbitos en los que se aplican los conocimientos y habilidades, se clasifican en: Personales, de Ambiente escolar o laboral, de Comunidad local o más amplia, y Científicas.

La medición del rendimiento en matemáticas está en función de estas tres dimensiones, y se divide en seis niveles, permitiendo catalogar el desempeño de los estudiantes para describir lo que son capaces de hacer, estos seis niveles se clasifican y caracterizan de la siguiente forma:

- *Insuficiente* (Nivel 0[7] y 1) se considera limitado para acceder a estudios superiores y desarrollar las actividades que exige la vida en la sociedad de conocimiento.
- *Bajo* (Nivel 2) identifica el mínimo adecuado para desempeñarse en la sociedad contemporánea.
- *Medio* (Nivel 3 y 4) está por arriba del mínimo necesario y, por ello, bastante bueno, aunque no del nivel deseable para la realización de las actividades cognitivas más complejas.
- *Alto* (Nivel 5 y 6) significa que un estudiante tiene potencial para realizar actividades de alta complejidad cognitiva, científica y otras.[8]

---

[6] De acuerdo con el Informe PISA 2003, Aprender para el mundo de mañana, de la OCDE, considera que los cuatro contenidos: Cantidad, Espacio y Forma, Cambio y Relaciones, e Incertidumbre, cubren "… el abanico de las necesidades matemáticas de los estudiantes de 15 años, como base para su vida y para ampliar su horizonte de las matemáticas." P. 39.

[7] Originalmente el nivel 0 no estaba considerado en los niveles de PISA 2003, sin embargo hubo países de la OCDE con un alto porcentaje de estudiantes que no cumplen con el mínimo requerido de habilidades para el nivel 1, tales como: México y Turquía y países asociados a PISA 2003: Indonesia, Túnez, Brasil y Tailandia. PISA 2003. Pp. 90-91.

[8] Op. Cit. PISA 2003. P. 80.

México ha formado parte de los países evaluados en los años 2000, 2003, 2006 y 2009, obteniendo los resultados más bajos, en todas las áreas. En el caso particular de matemáticas, el 57.8% de los estudiantes mexicanos en promedio (entre 2003 y 2009) se encuentran en el nivel *Insuficiente*,[9] son estudiantes que tienen dificultades para razonar, comunicar y argumentar sus respuestas o soluciones en relación a problemas que pueden ser geométricos, o aquellos que requieran la interpretación y decodificación de representaciones familiares de objetos matemáticos conocidos, o de la aplicación de una cierta técnica de capacidad espacial o visualización espacial, o de aquellos que requieran de la decodificación e interpretación de un lenguaje simbólico básico y el manejo de expresiones que contienen símbolos y fórmulas.[10]

En el área de *Cambio y Relaciones* engloba las relaciones de cambio, las funciones y la relación entre variables. Los resultados de los estudiantes mexicanos en este contenido son los más bajos (en comparación con las otras tres áreas: *Espacio y Forma*, *Cantidad* e *Incertidumbre*), pues el 71.3%[11] de los estudiantes se encuentran en el nivel *Insuficiente* (siendo el porcentaje del 47.2% en el nivel 0), es decir, son estudiantes que con base en estas cifras no pueden realizar una decodificación e interpretación de un lenguaje simbólico básico y el manejo de expresiones que contienen símbolos y fórmulas, aunado a una falta en el manejo para realizar despejes y en la realización de algunos cálculos; también tiene deficiencias para analizar representaciones gráficas y poder interpretarlas y sobre todo comunicar resultados que se pueden desprender de los mismos.

---

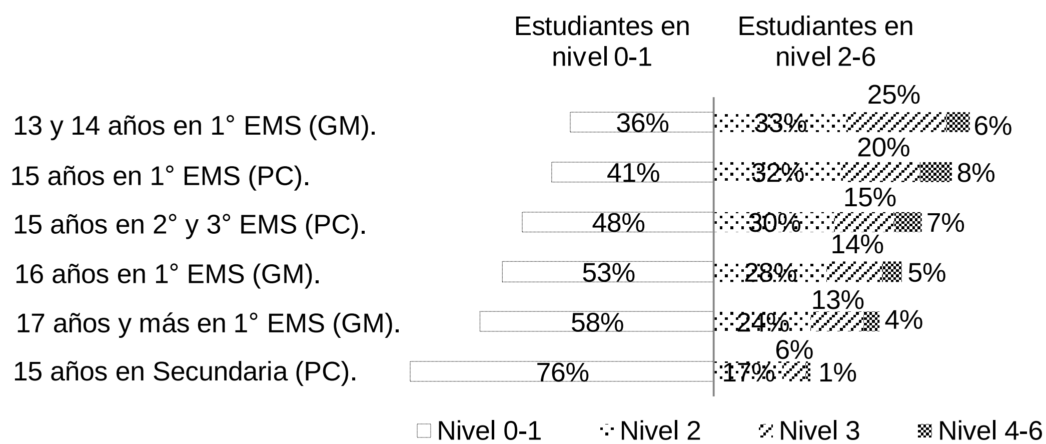
[9] Los resultados de PISA por niveles de desempeño en la escala global de matemáticas son a partir de 2003, en el cual el 66% de los estudiantes mexicanos se encuentran por debajo del nivel 2 (fuente: PISA 2003, p. 358), mientras que en el año 2006 fue del 56.5% (fuente: PISA 2006 en México, p. 274) y para el año 2009 fue del 50.8% (fuente: Información sobre México en PISA 2009, p. 11); por lo que se puede observar una disminución de casi 9.5 puntos porcentuales, de 2003 a 2006, y de 5.7 puntos porcentuales, de 2006 a 2009; pese a la disminución sigue siendo un porcentaje alto (50.8% en 2009) de estudiantes que se encuentran en este nivel.

[10] Estas características son deducidas al analizar las habilidades necesarias para resolver los ejercicios seleccionados para ejemplificar los niveles de dificultad en la evaluación de PISA 2003 en matemáticas. PISA 2003. Pp. 46-81.

[11] PISA 2003. P. 348. Anexo B1, Tabla 2.2a. Porcentaje de estudiantes en cada nivel de competencia en la escala de matemáticas Cambio y Relaciones.

PISA en 2006 consideró otra opción de evaluación llamada PISA *Grado Modal* (GM), que consistió en evaluar a estudiantes que se encuentran en el primer año de Educación Media Superior (EMS), lo cual permite analizar ampliamente el efecto del contexto institucional y su contribución en el desempeño. En la siguiente figura se muestran los porcentajes en México del desempeño de estudiantes en seis categorías por edad y/o grado.

GRÁFICA 1. PORCENTAJE DE ESTUDIANTES POR EL NIVEL DE DESEMPEÑO EN LA ESCALA GLOBAL DE MATEMÁTICAS, PISA 2006, CLÁSICO Y GRADO MODAL.



Fuente: Resultados Nacionales de la Opción de Grado Modal en PISA 2006. Reportes de investigación. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación INEE. Noviembre de 2008. P. 72.

Se puede observar que los estudiantes de 13 y 14 años que están en 1° de EMS (GM), tienen el mejor desempeño en matemáticas comparado con estudiantes mayores de 15 años en el mismo grado, igualmente tienen mejor desempeño los estudiantes de 15 años que están en EMS (PC) con estudiantes de la misma edad pero que se encuentran en secundaria (PC). A partir de estos datos pareciera que el rendimiento académico guarda una fuerte correlación con la edad.

Por otra parte, un hallazgo interesante es que los estudiantes de 15 años en 2° y 3° año de EMS (PC) no logran mejores desempeños que los estudiantes de 15 años en el primer año del mismo nivel, es decir, en promedio 1 de cada 2 estudiantes de 15 años en 2° y 3er año de EMS se ubican por debajo del nivel 2, estos resultados hacen suponer que los grados posteriores al primer año de EMS no aportan más a las habilidades de los estudiantes en matemáticas. En el siguiente apartado se revisan otros resultados del rendimiento escolar pero a nivel nacional en la EMS llevada a cabo por ENLACE.

1.1.2. ENLACE.

La Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) se pone en marcha a partir del año 2006 en planteles públicos y privados del país en nivel básico con estudiantes de 3° a 6° grado de educación primaria y 3° de educación secundaria, en la modalidad de Lectura y Matemáticas; para el año 2008 se incorporó una tercera área: Ciencias, la cual se alternaría en cada uno de los siguientes años con Educación Cívica y Ética, Historia y Geografía, para nuevamente comenzar con Ciencias. Para 2009 se amplió su cobertura a 1° y 2° de educación secundaria. A partir de 2008, ENLACE evaluó a estudiantes del último grado de Educación Medio Superior (EMS) en la modalidad de Lectura y Matemáticas.[12]

La importancia de la prueba ENLACE en EMS es:

*"*La prueba ENLACE MS fue creada con la intención de proporcionar un diagnóstico de fortalezas y debilidades en el desarrollo de habilidades básicas propias de los estudiantes del nivel medio superior. En 2011 y 2012 ese propósito se mantiene y se fortalece con una visión de competencias, de tal forma que los datos siguen siendo útiles para mejorar la calidad de este tramo educativo que resulta trascendente en la vida profesional y académica de los individuos. …*"*[13]

[12] Para conocer los resultados de ENLACE se puede consultar la página: http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/.

[13] Manual para docentes y directivos. Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares de Educación Media Superior (ENLACE EMS) 2010. Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A. C. P. 45. Fuente: http://www.enlace.sep.gob.mx/content/ms/docs/EMS_2012_Manual_Docente.pdf.

La prueba ENLACE en EMS evalúa el desempeño de los estudiantes en dos áreas de conocimiento: Lectura y Matemáticas.

El caso de Matemáticas se evalúa considerando:[14]

- Los *contenidos* matemáticos que engloban los temas o elementos conceptuales en los que un estudiante debe basarse para resolver un problema, se dividen en: *Cantidad, Espacio y Forma, Cambio y Relaciones,* y *Matemáticas básicas*.
- Los *procesos* matemáticos en que se agrupan las tareas cognitivas que el estudiante utiliza para responder un cuestionario o solucionar un problema, se clasifican en:
  - *Reproducción.* Se refiere a la utilización de conocimientos y procedimientos matemáticos a problemas directos, reconocer equivalencias, utilizar objetos y propiedades matemáticas y manejar representaciones numéricas, simbólicas y gráficas*;*
  - *Conexión.* Es el reconocimiento de la técnica matemática que se va a utilizar con el fin de solucionar problemas que impliquen equivalencias, uso de propiedades matemáticas y empleo de representaciones numéricas, simbólicas y gráficas; y
  - *Reflexión*. Consiste en la interpretación del problema así como el reconocimiento de la técnica matemática que se va a utilizar, el establecimiento de relaciones, la combinación e integración de información entre distintas formas de representación o diferentes aspectos de una situación y que utilice más de un paso o proceso al solucionar un problema.
- Como puede observarse sigue la misma estructura que en PISA. Por otra parte, la calificación de la prueba en la habilidad de matemáticas se hace tomando como referencias cuatro niveles de dominio: Insuficiente, Elemental, Bueno y Excelente. En el siguiente análisis de resultados se hace también una descripción de estos cuatro niveles.

[14] Ibid. Cit. Pp. 25-28.

En la evaluación de Matemáticas de la prueba ENLACE de los estudiantes de la EMS, en los años 2008, 2009, 2010 y 2011, el 46.5%, el 46.1%, el 40.6% y el 35.1%, respectivamente, se ubicaron en el nivel *insuficiente*,[15] quiere decir que estos estudiantes pudieron resolver problemas si la tarea se presenta directamente, también pudieron efectuar sumas y restas con números enteros, así como realizar una interpretación del lenguaje común al algebraico, y resolver problemas en los que se requiere identificar figuras planas y tridimensionales.[16]

En el nivel *elemental*, de los niveles de evaluación en matemáticas de ENLACE, en los años 2008, 2009, 2010 y 2011, el 37.8%, el 35.1%, el 39.1% y el 40.2%,[17] respectivamente, los estudiantes de Bachillerato comprendieron conceptos básicos de números decimales y de fracciones, también realizaron operaciones aritméticas con fracciones, o identificaron que hay una jerarquía entre la suma y la multiplicación cuando realizaron operaciones combinadas de fracciones, además pudieron simplificar fracciones. Por otra parte, la mayoría tuvo la habilidad para resolver una ecuación algebraica.[18]

Si pasamos al siguiente nivel de dominio, el porcentaje de estudiantes con un buen desempeño fue cada vez más pequeño de 12.2% en 2008, 13.9% en 2009, el 15.1%, en 2010 y de 16.7 en 2011,[19] corresponde a estudiantes que comprendieron el concepto de variable, además fueron capaces de relacionar dos o más variables de un proceso social o natural, también fueron capaces de

[15] Información tomada de la página: http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/estadisticas_de_resultados/ –Correspondiente a la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares 2012 (ENLACE) en Educación Media Superior (EMS). Estadísticas de resultados 2011. Por nivel de dominio–.

[16] Las características mencionadas corresponden a las descripciones dadas en los niveles de dominio de matemáticas de ENLACE, tomado de la página: http://www.enlace.sep.gob.mx/content/ms/pages/estructura_de_la_prueba/habilidad_matematica.html – Correspondiente a la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) 2011 en Educación Media Superior (EMS). Estructura de la prueba, en el último párrafo en la liga: "más información" correspondiente a la evaluación matemática.–

[17] Op. Cit. http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/estadisticas_de_resultados/.

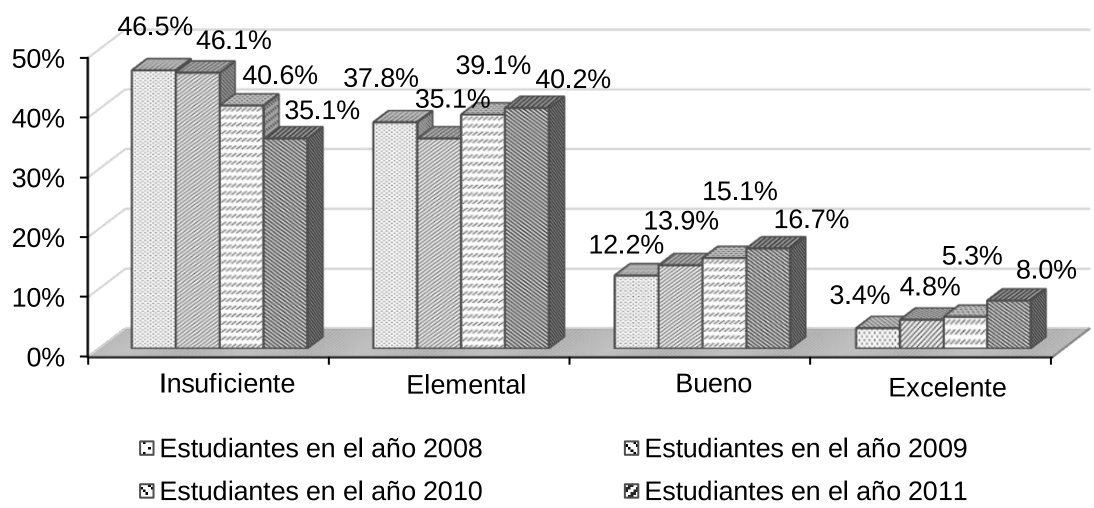
[18] Op. Cit. http://www.enlace.sep.gob.mx/content/ms/pages/estructura_de_la_prueba/habilidad_matematica.html.

[19] Op. Cit. http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/estadisticas_de_resultados/.

identificar cuándo una representación gráfica representa una Función, también identificaron la expresión algebraica que la representa, además reconocieron a partir de una ecuación el tipo de cónica y los elementos de la cónica a partir de su representación gráfica.[20]

El último nivel corresponde al porcentaje de estudiantes con excelente desempeño, los porcentajes son 3.4%, 4.8%, 5.3% y 8.0% para los años 2008, 2009, 2010 y 2011, respectivamente,[21] son estudiantes que pudieron identificar la relación entre gráficas y funciones lineales o cuadráticas, y pudieron representar algebraicamente una gráfica, también resolvieron problemas en donde tiene que aplicar el concepto de Función y las leyes trigonométricas.[22] La siguiente gráfica muestra la distribución del porcentaje de los estudiantes de Bachillerato en los cuatro niveles de evaluación de matemáticas de la prueba ENLACE.

GRÁFICA 2. PORCENTAJE DE ESTUDIANTES DEL ÚLTIMO GRADO DE BACHILLERATO A NIVEL NACIONAL EN LA HABILIDAD DE MATEMÁTICAS EN CADA NIVEL DE DOMINIO. ENLACE.



Fuente: http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/estadisticas_de_resultados/

[20] Op. Cit. http://www.enlace.sep.gob.mx/content/ms/pages/estructura_de_la_prueba/habilidad_matematica.html.
[21] Op. Cit. http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/estadisticas_de_resultados/.
[22] Op. Cit. http://www.enlace.sep.gob.mx/content/ms/pages/estructura_de_la_prueba/habilidad_matematica.html.

Con lo anterior, se tiene un panorama del nivel de conocimientos de los estudiantes de Bachillerato. En general, tienen deficiencias considerables en las áreas de Aritmética, Álgebra y Geometría Analítica. El siguiente apartado presenta las posibles causas del bajo rendimiento escolar en matemáticas, la finalidad es identificar la problemática que motivó la realización del presente trabajo de tesis.

1.1.3. PROBLEMÁTICA.

Algunas causas que contribuyen al bajo rendimiento escolar de los estudiantes en matemáticas son el enfoque memorístico,[23] los métodos de enseñanza obsoletos y la promoción de habilidades de rutina, que prevalecen en muchos casos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las escuelas mexicanas, públicas y privadas, a pesar de que los planes de estudio prescriban el desarrollo de habilidades más complejas.[24]

Se ha comprobado que los estudiantes mexicanos memorizan procedimientos para resolver ejercicios o que para recordar el método para resolver un problema repasan los ejemplos una y otra vez,[25] esto explica porque un estudiante cuando se le pide resolver un problema de aplicación matemática en algún contexto diferente, no es capaz de resolverlo pues requiere aplicar habilidades de razonamiento, comunicación y argumentación que no ha desarrollado en el salón de clase.

No obstante, el docente se puede apoyar en temas de *psicología de la educación* (entendida como la rama de la psicología que se especializa en estudiar la

---

[23] Op. Cit. PISA en el Aula: Matemáticas. INEE. P. 6.
Por otra parte en PISA 2003 con respecto al uso de las estrategias de memorización, México, tiene un alto porcentaje de estudiantes que están de acuerdo o muy de acuerdo en afirmar que cuando estudian matemáticas, intentan aprender de memoria las respuestas a los problemas. P. 146.

[24] Op. Cit. PISA en el Aula: Matemáticas. INEE. P. 6.

[25] En PISA 2003 además de medir el rendimiento académico de los estudiantes, se incluyeron otros instrumentos, para conocer algunas variables relacionadas en el aprendizaje de las matemáticas, una de ellas, es saber cuáles son las “Estrategias de aprendizaje de los estudiantes”. P. 145.

enseñanza y el aprendizaje en ambientes educativos),[26] para lograr una mejor comprensión de los procesos de aprendizaje en distintos contextos y que los estudiantes alcancen habilidades y aprendizajes más complejos, no memorísticos ni rutinarios en matemáticas.

Por lo que, el objetivo general de este trabajo es elaborar planeaciones de clase[27] como parte de una Propuesta Didáctica en el Tema de Funciones. La propuesta tiene como característica que el docente participe directamente guiando el aprendizaje mediante preguntas y discusiones, para que, los estudiantes al poner en práctica sus conocimientos de Álgebra y Geometría Analítica en situaciones prácticas, favorezca su comprensión en el Tema de Funciones.

1.2. MARCO TEÓRICO DIDÁCTICO-EDUCATIVO DE LA ENSEÑANZA.

La psicología de la educación se ha desarrollado desde finales del siglo XVIII, alcanzando su mayor auge y formalización durante la primera mitad del siglo XX. Uno de los más influyentes en esta área de estudio es el psicólogo estadounidense B. F. Skiner, quien desarrolló el concepto de aprendizaje programado, "que involucraba el reforzar al estudiante después de cada serie de pasos, hasta que alcanzara su meta de aprendizaje".[28] Sin embargo, este modelo puede no cumplir con las metas y necesidades reales de los educadores en el aula.

Pero, no es hasta los años ochenta en que la psicología empieza a tomar fuerza con "la revolución cognitiva",[29] retomando ideas de dos psicólogos de principios de

[26] Santrock, John W. *Psicología de la educación*. Editorial McGraw Hill Interamericana. Segunda edición 2006. Impreso en India. P. 4.
[27] Una aproximación conceptual de plan de clase: Es un proyecto de experiencias concretas de aprendizaje, organizadas y distribuidas, para ser desarrolladas en un tiempo determinado y en función de objetivos, habilidades y capacidades concretas pre-establecidas. Fuente: http://www.slideshare.net/marcel_galarza/el-plan-de-clase.
[28] Op. Cit. Santrock, John W. *Psicología de la educación*. P. 6.
[29] La revolución cognitiva es el nombre que se ha dado al paso del conductismo al cognitivismo como paradigma de la comunidad científica en psicología. Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Revoluci%C3%B3n_cognitiva.

siglo: William James y John Dewey que proponían básicamente dos ideas: observar la enseñanza y el aprendizaje en el aula para mejorar la educación, y considerar al estudiante como un aprendiz activo (Dewey creía que los niños aprenden mejor haciendo). De aquí que, la perspectiva cognitiva, se centre básicamente en comprender los procesos de aprendizaje de los estudiantes, en la aplicación de los conocimientos, que adquiere para la solución de problemas con la convicción de que los estudiantes construyan una comprensión propia de los temas que estudian.

Bajo el paradigma del cognitivismo se han desarrollado investigaciones, sobre Modelos de Enseñanzas, para incrementar los logros de los estudiantes en sus habilidades de pensamiento y para cumplir con metas de enseñanza particulares. Esencialmente en este trabajo se emplean dos modelos para el diseño de la Propuesta Didáctica en el Tema de Funciones: el Modelo Inductivo y el Cooperativo (en el siguiente apartado se describen).

La *Enseñanza Activa*[30] es la premisa en que se fundamentan los Modelos Inductivo y Cooperativo. La Enseñanza Activa es un enfoque positivo y proactivo de la educación, en el que los docentes participan directamente guiando el aprendizaje mediante preguntas y discusiones. El *docente activo*[31] como su nombre lo sugiere está comprometido directamente con el aprendizaje del estudiante mediante el proceso de:

- Identificar metas claras para sus estudiantes.
- Seleccionar estrategias en la enseñanza que permitan alcanzar efectivamente las metas de aprendizaje.
- Dar ejemplos o buscar alternativas para hacer representaciones de situaciones que quiera explicar y para una comprensión de los temas que se están estudiando.

[30] Op. Cit. Eggen, Paul; Kauchak, Donald. El enfoque "Enseñanza Activa" creado por Thomas Good, se refiere no sólo a una categoría de conductas docentes, sino también a una orientación filosófica en la enseñanza." P. 20.
[31] Ibid. Cit. P. 20.

- Monitorear en clase el progreso del estudiante para obtener evidencias de su aprendizaje.

La finalidad es lograr que los estudiantes desarrollen dos tipos de pensamiento:

- *Pensamiento de nivel superior*.[32] Es la generación de conclusiones basadas en la evidencia. Las conclusiones existen en dos formas primarias: encontrar patrones (conclusiones inductivas) y dar opiniones basadas en esos patrones (conclusiones deductivas).
- *Pensamiento crítico*.[33] Es el proceso de llegar a conclusiones basándose en la evidencia. Algunas formas son:
    - Confirmación de conclusiones con hechos.
    - Identificación de tendencias, estereotipos, clichés y propaganda.
    - Identificación de suposiciones implícitas.
    - Reconocimiento de sobregeneralizaciones y subgeneralizaciones.
    - Identificación de información relevante e irrelevante.

A continuación se describen cada uno de los Modelos de Enseñanza y el tema de la Modelación.[34]

1.2.1. EL MODELO INDUCTIVO.

El Modelo Inductivo se caracteriza por ayudar a los estudiantes a desarrollar el pensamiento de nivel superior y el pensamiento crítico mientras se enseñan temas con contenidos específicos. El papel del docente es ser líder activo en la tarea de ayudar a los estudiantes a procesar la información.[35] Las principales características del Modelo Inductivo son:

- Definir claramente el tema.
- Proponer ejemplos de casos particulares del tema a tratar.

[32] Ibid. Cit. P. 73.
[33] Ibid. Cit. P. 78.
[34] El concepto de Modelación es amplio, no se limita a la representación de un objeto de investigación mediante una ecuación, sino que puede ser mediante una tabla de valores o una combinación de expresiones algebraicas; y tampoco es aplicable únicamente para el Tema de Funciones sino en otras áreas de conocimiento.
[35] Op. Cit. Eggen, Paul; Kauchak, Donald. Pp. 88-89.

- Propiciar la aplicación de habilidades por parte de los estudiantes.
- Guiar a los estudiantes y ayudar a obtener conclusiones.

"El Modelo Inductivo está fundado en los principios del *constructivismo,*[36] *es una visión del aprendizaje que sostiene que los estudiantes desarrollen su propia comprensión acerca del mundo, en lugar de obtenerla provista de otros (en la mayoría por los docentes) de una manera previamente organizada*".[37] El enfoque de enseñanza del Modelo Inductivo está relacionado con otro modelo de aprendizaje cognoscitivo, el *procesamiento de la información*, el cual hace hincapié en que los estudiantes manipulan la información, verifican y forman estrategias con ellas, en donde los procesos de memoria y pensamiento son centrales en este modelo.[38]

El Modelo Inductivo es eficaz cuando se trabajan conceptos (son categorías con características comunes) y relación de conceptos (son principios, generalizaciones y reglas académicas), en los cuales los estudiantes ponen en práctica habilidades de observación, discriminan entre las características esenciales y las no esenciales, la generalización. Durante este proceso se pone en práctica el análisis del concepto que consiste en describirlo en términos de sus características, conceptos relacionados, ejemplos y definiciones.

La planeación mediante el Modelo Inductivo tiene tres etapas:

- Identificación del tema. Se refiere a determinar cuál contenido se va a enseñar.
- Identificación de una meta precisa. Consiste en saber qué queremos que los estudiantes sepan del contenido, es decir, que explicitemos nuestros objetivos hasta el punto de poder identificar qué queremos que los estudiantes puedan ser capaces de hacer o decir. La precisión de las metas permite al docente

[36] Ibid. Cit. El constructivismo tiene por raíz el trabajo de Jean Piaget. Quien "...advirtió que el aprendizaje real no es simplemente repetir la información como un loro. El aprendizaje real implica una invención o construcción personal, y el rol del docente… debe alentar las invenciones de los estudiantes porque si no ellos no las compartirán. Por otro lado, es necesario que el docente guíe a los estudiantes hacia una comprensión más madura." P. 100.
[37] Ibid. Cit. P. 99.
[38] OP. Cit. Santrock, John W. *Psicología de la educación*. P. 246.

elaborar preguntas adecuadas y lograr en los estudiantes el desarrollo del pensamiento de nivel superior y del pensamiento crítico.

- Selección de ejemplos. Una vez que el docente sabe exactamente qué es lo que quiere que los estudiantes hagan o digan, debe encontrar los ejemplos que los ilustren. Los ejemplos pueden ser reales, imágenes, modelos, estudios de casos, la simulación y dramatización. La selección de un buen ejemplo puede ayudar a los estudiantes en riesgo.[39]

Una vez cubierto lo anterior, el siguiente paso es la implementación en clase, la cual consiste en cinco etapas:

- Introducción. La clase inicia presentando a los estudiantes algunos ejemplos o problemas con el fin de que ellos los analicen para encontrar diferencias o patrones.
- Final abierto. En esta etapa los estudiantes ponen en práctica sus procesos cognitivos para construir significados a partir de sus conocimientos previos. Es aquí cuando el docente pone en práctica la Enseñanza Activa realizando preguntas en las que simplemente pide descripciones o comparaciones.
- Convergencia. Hay que recordar que existen objetivos del contenido perfectamente definidos durante la planeación, por lo que, la clase debe dirigirse hacia la caracterización del concepto o principio. En este caso se formulan preguntas que reduzcan las opciones de respuestas con el fin de particularizar. Un recurso puede ser el apuntalamiento.[40]
- Cierre. En esta etapa los estudiantes generan conclusiones a partir de las evidencias en la cual reorganizan toda la información generada en las etapas anteriores, de esta forma los estudiantes aplican un proceso: el pensamiento de nivel superior, es decir dado el contenido identifican el concepto por sus características o pueden establecer el principio, la generalización o la regla. También durante esta etapa proporciona oportunidad para ayudar a los estudiantes a desarrollar la habilidad de pensamiento crítico para reconocer

[39] Op. Cit. Eggen, Paul; Kauchak, Donald. Los estudiantes en riesgo se caracterizan por tener altos niveles de deserción, bajos logros y baja autoestima; a menudo carecen de las experiencias de las que gozan otros estudiantes más aventajados. P. 115.

[40] El apuntalamiento es una pregunta o consigna del docente que sonsaca la respuesta del estudiante si éste no ha respondido, o si ha dado una respuesta incorrecta o incompleta.

información relevante o irrelevante, o identificar suposiciones. Hasta aquí los estudiantes estarían en un nivel de comprensión, pero faltaría que ellos puedan consolidar estas ideas mediante la aplicación en el “mundo real”, esto corresponde a la siguiente etapa.

- Aplicación. En esta etapa los estudiantes están muy avanzados en la comprensión del concepto o la descripción de un principio, generalización o regla. Pero para que éste le sea significativo, el estudiante necesita ponerlo en práctica en situaciones distintas de la que se le enseñó (es decir, ejemplos o problemas que el docente empleó para explicar el contenido). Durante la práctica, el estudiante desarrolla su habilidad de pensamiento crítico porque reafirma su comprensión, de la etapa anterior, mediante la verificación de hechos, ejercicios o problemas, reconoce en qué situaciones es aplicable un concepto, así como sobregeneralizaciones y subgeneralizaciones. También desarrolla su pensamiento creativo al resolver un problema que requiera adoptarlo o transformarlo a un problema conocido, y para ello se requiere que el estudiante estimule su capacidad de invención.

Al finalizar estas etapas, los estudiantes tendrán la conciencia de y el control sobre sus procesos cognitivos, es decir la metacognición,[41] con lo cual habremos logrado la meta propuesta en la planeación de un contenido determinado.

También, durante las etapas de la implementación del Modelo Inductivo podemos observar las etapas de los procesos cognoscitivos:

- En las etapas de *Introducción* y *Final abierto*, se presenta el proceso de *Asimilación* que se refiere a incorporar nuevos conocimientos a los ya

[41] Op. Cit. Eggen, Paul; Kauchak, Donald. Cuando el estudiante hace uso correcto de las herramientas para pensar se puede considerar que se encuentra en otro nivel de pensamiento llamada metacognición, que es una combinación del pensamiento de nivel superior y del pensamiento crítico. Un aspecto importante de la metacognición es que el estudiante es consciente del pensamiento que está realizando. Pp. 80-81.

existentes, es decir, en la *asimilación* los estudiantes toman la información y la incorporan dentro de un esquema.[42]

- Durante la etapa de *Cierre* y *Aplicación*, se presenta otro proceso llamado *Acomodación*, que consiste en cambiar las estructuras cognoscitivas para incluir la nueva información.
- En la etapa de *Convergencia* ocurre el proceso de *equilibrio* en el cual el estudiante realiza un esfuerzo constante por alcanzar un balance estable, guía el paso de la asimilación a la acomodación.

1.2.2. EL MODELO COOPERATIVO.

El modelo de aprendizaje Cooperativo pertenece a un grupo de estrategias de enseñanza que compromete a los estudiantes a trabajar en colaboración para alcanzar metas comunes.[43] Mediante este modelo se logra aumentar la participación de los estudiantes, además de proporcionarles liderazgo y experiencia en la toma de decisiones en grupo. También es una oportunidad para que un estudiante interactúe y aprenda con sus compañeros de grupo, sobre todo en una materia como las matemáticas en que su enseñanza es de forma expositiva en la mayoría de los casos y lo que se pretende con este modelo es romper con esta tendencia.

De los beneficios que ofrece el Modelo Cooperativo son, que el estudiante adquiera el rol de *aprendiz* y de *instructor*, al mismo tiempo de adquirir responsabilidad en su aprendizaje. ¿Por qué funciona el aprendizaje Cooperativo? Las razones se pueden explicitar de la siguiente forma:

- Los estudiantes ven recompensada su labor por trabajar juntos.
- Se reconoce el poder de la cohesión social para construir y sostener los esfuerzos individuales. La cooperación es una habilidad interpersonal que no debe subvalorarse.

---

[42] Op. Cit. Santrock, John W. P. “Un *esquema* es un concepto o marco de referencia que existe en la mente de un individuo para organizar e interpretar información.” P. 39.
[43] Eggen, Paul; Kauchak, Donald. Op. Cit. P. 373.

- Las perspectivas cognitivas son:
  - Mediante el trabajo colaborativo los estudiantes aprenden más.
  - Permite que los estudiantes formen uniones de ideas, se promueve el aprendizaje y la retención a largo plazo.
  - En muchas ocasiones las explicaciones entre los mismos estudiantes pueden ser más efectivas.

Hay varios métodos que se pueden aplicar en el aprendizaje Cooperativo, uno es el método División de la Clase en Grupos de Aprendizaje (DCGA),[44] que está enfocado para enseñar formas específicas de contenido tales como: hechos, conceptos, generalizaciones, principios, reglas académicas y habilidades. La planificación de la clase según el método DCGA consiste en los siguientes pasos:

- Planificar la enseñanza. Es similar al Modelo Inductivo, los contenidos enseñados son: conceptos, principios, generalizaciones, reglas académicas. Los pasos en la planificación consiste en identificar un tema, especificar claramente las metas y preparar los ejemplos.
- Organizar grupos. Se forman los grupos con la recomendación de que tengan las mismas habilidades. Por ejemplo si se quiere formar equipos de cuatro integrantes se sugiere agrupar a los estudiantes de mayor a menor, es decir, se toma a los de calificaciones más altas de las dos primeras cuartas partes de la clase y ponerlos con los de calificaciones más bajas de la tercera y última cuarta parte.
- Planificar actividades para la consolidación de los equipos. Se refiere a la realización de actividades para que se conozcan los integrantes de cada equipo.
- Planificar el estudio en equipos. Se deben utilizar materiales de alta calidad y deben estar claras las metas que se quieren lograr. Los materiales de estudio deben implicar respuestas convergentes.

[44] Op. Cit. Eggen, Paul; Kauchak, Donald. P. 391.

- Cálculo de puntajes básicos. Los estudiantes al inicio tienen puntajes básicos que pueden aumentar con los puntos de superación que se obtienen de acuerdo a los desarrollos o progresos que puedan ir adquiriendo.

El método DCGA tiene algunas diferencias o ajustes: requiere alguna enseñanza “previa”, y ciertas partes integrables: pruebas, puntos de superación y reconocimientos del equipo. Para llevar a cabo el método se contemplan las siguientes etapas:

- *Enseñanza*. Se inicia la clase mediante la especificación de metas, presentación, explicación, modelación de las habilidades o aplicaciones de conceptos, principios, generalizaciones y reglas, y se inicia una práctica guiada.
- *La transición al trabajo en equipos*. Se refiere a las indicaciones claras para la realización del trabajo, es decir, cómo podrían trabajar los integrantes de cada equipo y cómo salvar algunos obstáculos.
- *Estudio en equipo y monitoreo*. Son las intervenciones que el docente puede hacer durante el trabajo en equipos de los estudiantes, teniendo en cuenta que las intervenciones apresuradas pueden ser contraproducentes, sin embargo pueden ser necesarias cuando los integrantes no están realizando correctamente el trabajo.
- *Pruebas*. Es necesario una prueba que evalúe adecuadamente los conceptos y las habilidades importantes, acordes a las metas.
- *Reconocimiento de logros*. Esta parte está interrelacionada con la anterior y puede servir como motivadores. Consiste en otorgarles puntajes a los integrantes de los equipos en relación con sus promedios iniciales.
- *Evaluación diagnóstica*. La evaluación debe tener relación con las metas del contenido de la clase, aunque es controvertida, el docente debe considerar los puntos de superación en las calificaciones finales para decidir si sube de calificación. Por último, la evaluación del trabajo del grupo y de cooperación,

para este caso se pueden formular las siguientes preguntas, para ayudar a evaluar:

- ¿Están mejorando los estudiantes en su trabajo en equipo?
- ¿Todos los miembros contribuyen?
- ¿Hay miembros dominantes?
- ¿Las mujeres y los varones contribuyen igualmente?
- ¿Es la integración grupal positiva y de apoyo?

1.2.3. LA MODELACIÓN.

¿Qué es un modelo? La explicación más aceptada es de Davidov, que dice: "Por modelo se entiende un sistema concebido mentalmente o realizado en forma material, que, reflejando o reproduciendo el objeto de la investigación, es capaz de sustituirlo de modo que su estudio nos dé una información sobre dicho objeto".[45] La Modelación es una estrategia didáctica que forma parte del trabajo a desarrollar por el estudiante durante la preparación de sus exposiciones.

A nivel Bachillerato hay ejercicios y problemas que pueden ser representados mediante un modelo en el cual pueden intervenir una combinación de variables matemáticas. Muchas de las relaciones entre esas magnitudes tienen un carácter funcional, y por lo tanto se modelan mediante funciones. Algunas de estas funciones son por ejemplo la relación costo-tiempo en un estacionamiento público y que puede ser representado de manera sencilla sin la necesidad de operadores matemáticos o variables, pero que a la vista de los estudiantes pueden verlas como algo ajeno a los contenidos matemáticos; sin embargo, este tipo de situaciones permitirá al estudiante tener un mejor panorama del concepto de Función y no limitarse a querer representar una situación mediante alguna ecuación conocida.

[45] Mederos A. Otilio; González R. Blanca Esther. *La Modelación en la educación Matemática.* Editor: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo Coahuila, México. 2005. P. 1.

La *Modelación Matemática* es un proceso complejo que está constituido por varios procesos más simples que dependen del tipo de modelo que se construya. A continuación se detallan las etapas que se siguen en el desarrollo del proceso de Modelación Matemática:[46]

- Primera etapa. Se comienza a partir de la comparación y el análisis de objetos particulares con el objetivo de seleccionar rasgos y características esenciales, para después mediante procesos de abstracción expresar esos rasgos y características esenciales en forma de propiedades matemáticas, es decir, a partir de la Modelación Matemática de los rasgos esenciales.
- Segunda etapa. Aquí intervienen dos procesos: uno de síntesis y otro de generalización. En el proceso de síntesis se agrupan en una clase las propiedades matemáticas obtenidas como resultado de la primera etapa. Mediante el proceso de generalización se consideran en una clase todos los objetos que fueron comparados, y que cumplan todas las propiedades que como resultado del proceso de síntesis se agruparon en una clase, así como de cualquier otro objeto que cumpla dichas propiedades.
- Tercera etapa. En esta etapa se realizan procesos deductivos con el objetivo de determinar nuevos elementos del modelo conceptual, así como nuevas propiedades de dichos elementos.
- Cuarta etapa. En la última etapa se realiza un proceso de transferencia de resultados abstractos en el ámbito del modelo, a rasgos y características de los objetos de partida.

[46] El informe PISA 2003 (P. 40) hace referencia a la Modelación como la matematización que sigue las etapas:

i) Identificar los conceptos matemáticos relevantes de un problema.
ii) Abstraer el problema en una forma matemática conocida o apta para una solución matemática directa.
iii) Aplicar los conocimientos, conceptos y habilidades matemáticas para resolverlo.
iv) Traducir el resultado matemático en una solución que responda al contexto del problema original, una comprobación de si la solución es completa y aplicable a la realidad.
v) Una reflexión sobre las consecuencias y la comunicación de los resultados que podría implicar la explicación y la justificación o prueba.

La Modelación Matemática exige la utilización de diferentes tipos y niveles de demandas cognitivas, dependiendo del grado de dificultad del problema, se tienen tres grupos:[47]

- El grupo de *Reproducción* que consiste en:
  - La reproducción de los conocimientos practicados, como el conocimiento de representaciones de hechos y problemas comunes.
  - El reconocimiento de equivalencias, el recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares y habilidades técnicas.
  - El manejo de expresiones que contienen símbolos y fórmulas familiares o estandarizadas.
  - La realización de operaciones sencillas.
- El grupo de *Conexión*, va más allá de la Reproducción, que consiste en:
  - Resolver problemas que todavía se sitúan en contextos familiares o bien se alejan de ellos en un grado relativamente menor.
  - Interpretar problemas que requieren del establecimiento de relaciones entre distintas representaciones de la situación o enlazar diferentes aspectos de la situación del problema con el fin de desarrollar una solución.
- El grupo de *Reflexión*, avanza aún más con respecto al grupo de Conexión, que consisten en:
  - Comprender, reflexionar y ser creativos para identificar conceptos matemáticos o enlazar con los conocimientos pertinentes para dar con las soluciones.
  - Resolver problemas que requieren más de un procedimiento, además que puedan generalizar y explicar, o justificar sus resultados.

En el siguiente capítulo se presenta la Propuesta Didáctica en el Tema de Funciones tomando como base el Modelo Inductivo, el Modelo Cooperativo y la Modelación.

---

[47] Los grupos de: Reproducción, Conexión y Reflexión, son abordados en el tema de matematización en PISA 2003. P. 40.y desde luego están relacionados con la Modelación Matemática.

CAPÍTULO 2. APLICACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

2.1. DISEÑO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL TEMA DE FUNCIONES EN EL BACHILLERATO.

2.1.1. OBJETIVO.

Proponer una metodología de trabajo para el Tema de Funciones basada en dos Modelos de Enseñanza: el *Inductivo* y el *Cooperativo*, para lograr los siguientes objetivos específicos: Que los estudiantes,

- Asocien y vinculen de forma significativa la información nueva con conocimientos existentes.
- Piensen de forma reflexiva, crítica y creativa.
- Aprendan a trabajar en equipo.
- Tengan expectativas positivas de aprendizaje y confianza en sus habilidades.
- Apliquen lo que aprenden a situaciones de la vida real.
- Se comuniquen de manera efectiva.

La *Modelación Matemática,*[48] forma parte de la Propuesta Didáctica, la cual contribuye al aumento de la eficacia en el aprendizaje de los estudiantes y favorece la interacción para el trabajo en equipo.

La Modelación Matemática y la resolución de problemas están ligados al surgimiento de la matemática, análogamente, pensado en el aula de clase se puede decir que, la Modelación Matemática es un recurso didáctico importante en los métodos modernos de enseñanza y aprendizaje para que el estudiante experimente un “resurgimiento de la matemática por sí mismo”, desarrollando sus potencialidades y pensamiento crítico para la solución de problemas.

[48]Op. Cit. Mederos A. Otilio; González R. Blanca Esther. “Uno de los objetivos de la Modelación Matemática es facilitar aspectos importantes del proceso de Enseñanza-aprendizaje tales como la motivación, la transferencia de conocimientos y la articulación con otras disciplinas.” P. 15.

Los Modelos Inductivo y Cooperativo, junto con la Modelación Matemática, son adecuados para el desarrollo de temas de matemáticas, en este caso, el Tema de Funciones. La importancia de haber elegido el Tema de Funciones reside en que es una noción fundamental y culminante en la formación matemática del estudiante durante sus estudios de nivel medio superior, –el Tema de Funciones se encuentra ubicado como parte de los temas de los programas de estudio en los últimos grados de estudios del Bachillerato–, pues interrelaciona los conocimientos adquiridos en Álgebra y Geometría Analítica.

Durante el desarrollo de la propuesta en el Tema de Funciones se pretende que el estudiante se enfrente a problemas matemáticos basados en un contexto del mundo real, en el que tiene que identificar las características de la situación del problema que podrían ser susceptibles de investigación matemática y activar sus habilidades matemáticas necesarias para resolverlo.

Por último, la aplicación de la "Propuesta Didáctica para la Enseñanza en el Tema de Funciones en el Bachillerato", fue realizada en una Preparatoria pública. La población promedio fue de 43 estudiantes (28 mujeres y 15 hombres) que estaban por concluir el segundo año de estudios de Bachillerato.

2.1.2. ORGANIZACIÓN Y CONTENIDOS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

La Propuesta Didáctica está organizada en cuatro etapas: Diagnóstico, Concepto de Función, Trabajo en equipo y Evaluación final.

Diagnóstico. La propuesta comienza con un Diagnóstico, el objetivo es conocer las habilidades de Reproducción de los estudiantes en los contenidos de: Operaciones con fracciones; Ecuación de primer grado; Desigualdad de segundo grado; Ecuación de primer grado con dos variables; Gráfica de la función seno; Gráfica de una circunferencia y Un problema de aplicación de funciones. Conocer sus habilidades de Reproducción permitirá a su vez activar sus habilidades en el desarrollo de procedimientos y el manejo de algoritmos algebraicos relacionados con el Tema de Funciones; así como procesos de Conexión al resolver problemas en escenarios geométricos para la interpretación y solución del problema. La duración es de una sesión de 50 minutos.

Concepto de Función. La segunda etapa de la propuesta está centrada en, que el estudiante desarrolle procesos de Reproducción y Conexión en el Tema de Funciones, en los siguientes contenidos:

- Gráfica de relaciones y funciones.
- Dominio y rango de una relación.
- Un problema de aplicación de función.
- Función continua y Función discontinua.
- Función creciente y Función decreciente.
- Operaciones con funciones.

Para el desarrollo de esta etapa me apoyé en los lineamientos del Modelo Inductivo que se caracteriza por presentar un ejemplo o un problema de aplicación representativo del concepto que se pretende desarrollar, para que durante el proceso el estudiante, con la orientación del docente, aplique procesos de observación, análisis, reflexión, generalización. La duración es de cinco sesiones de 50 minutos.

Trabajo en equipo. Es la tercera etapa de la Propuesta Didáctica, tiene como objetivo desarrollar en el estudiante procesos de Reflexión, así como un pensamiento de nivel superior y crítico por medio de la Modelación Matemática de problemas de funciones.[49] Esta etapa está centrada en el trabajo de los estudiantes por medio de exposiciones en equipos de cuatro o cinco personas, presentándose dos equipos en cada sesión; dando un total de cuatro sesiones y la mitad de una sesión más. A continuación se presentan los problemas del Tema de

[49] Un objetivo más específico es que los estudiantes"… puedan modelar matemáticamente una condición, esto es, que reconozcan y extraigan las Matemáticas de una situación y emplearlas para solucionar un problema, también para desarrollar sus propios modelos y estrategias, y presentar argumentos matemáticos." (PISA en el aula. P. 32).

Funciones, bajo la denominación de *Proyectos*,[50] agrupados por contenidos de acuerdo al tipo de Función que trata:

- Función lineal.
  - ✓ Proyecto 1. Cálculo de las dimensiones de un rectángulo con un alambre de 18 cm.
  - ✓ Proyecto 7. Proyecciones de la población en México para los años 2010 y 2020.
  - ✓ Proyecto 9. Determinación del perímetro de la circunferencia máxima de una esfera por el procedimiento de Eratóstenes.
- Función raíz cuadrada.
  - ✓ Proyecto 2. Cálculo del área de un triángulo isósceles con un alambre de 18 cm.
- Función cuadrática.
  - ✓ Proyecto 8. Lanzamiento de una canica por medio de una catapulta de clips.
- Función cúbica.
  - ✓ Proyecto 3. Cálculo del volumen de un canal abierto construido con una hoja de papel tamaño carta (21.5 cm $\times$ 28 cm)
  - ✓ Proyecto 4. Cálculo del volumen de una caja construida con una hoja de papel tamaño carta (21.5 cm $\times$ 28 cm).
- Función exponencial.
  - ✓ Proyecto 5. Depreciación de un automóvil.
  - ✓ Proyecto 6. Cálculo del monto de un depósito capitalizable anualmente.

Evaluación final. La cuarta etapa corresponde a la Evaluación final, el objetivo es saber cuánto aprendieron, los estudiantes, en los siguientes contenidos: Suma y

[50] La idea de presentar proyectos surge en gran medida del trabajo de tesis elaborado por Robledo, Roberto P. *Propuesta para el aprendizaje significativo de la función cuadrática para el Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades. Tesis.* Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). México 2008. Sin embargo, cabe mencionar que la aportación del presente trabajo de tesis es que los estudiantes realizaron exposiciones y fueron evaluados, con base en unas Rubricas, que más adelante se describirán en el apartado 2.1.3. Evaluación; p.31.

Multiplicación de fracciones, Función raíz cuadrada,[51] Concepto de Función y Un problema de aplicación de funciones.[52]

En esta Propuesta Didáctica, también están contemplados objetivos educacionales: el afectivo, el psicomotriz y el cognitivo. Con respecto al dominio afectivo están: el respeto, la tolerancia, el trabajo en equipo. Mientras que el psicomotriz está relacionado con el manejo de Excel (hoja de cálculo), el GeoGebra (software que permite hacer gráficas y al mismo tiempo visualizar las expresiones algebraicas de las cuales se generaron) y el Geometer´s Sketchpad (software para hacer gráficas), así como el manejo de material de apoyo como formar figuras con un alambre, recortar y doblar una hoja de papel. Por último, el objetivo cognitivo, en el cual se incluye la adquisición de habilidades tales como: el planteamiento y resolución de problemas, la argumentación, el manejo de técnicas y la comunicación.

2.1.3. LA EVALUACIÓN.

La evaluación es un elemento determinante en el proceso de Enseñanza-aprendizaje, pues proporciona a los docentes y a las autoridades educativas información para tomar decisiones en la planeación, y para mejorar la dirección de la enseñanza. La evaluación puede ser de dos tipos: la pedagógica y la social.[53] La primera tiene que ver con la comprensión, regulación y mejora de la situación de enseñanza y aprendizaje; mientras que la segunda tiene que ver con cuestiones tales como la selección, la promoción, la acreditación, la certificación y la información a otras organizaciones.

---

[51] En el contenido: Función raíz cuadrada, de la Evaluación final, el estudiante aplicará sus habilidades de Reproducción en Álgebra para plantear y resolver una desigualdad lineal.

[52] En el contenido: Problema de aplicación de función, de la Evaluación final, el estudiante proporcionará una representación algebraica o simbólica y gráfica, para la solución de un problema de aplicación de funciones, tal que, describa el costo por enviar por mensajería un paquete dependiendo de su peso.

[53] Díaz Barriga, Frida; Hernández, Gerardo. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo una interpretación constructivista.* 2ª edición. McGraw–Hill/Interamericaca editores, S.A. de C.V. Impreso en México 2002. P. 354.

Para el caso particular de este trabajo de tesis se realizó una Evaluación final (pedagógica) pues el objetivo fue conocer la efectividad de la Propuesta Didáctica en el Tema de Funciones. Así, los resultados de la evaluación proporcionaron información sobre qué tanto aprendieron los estudiantes y qué tanto influyó la Propuesta Didáctica.

Se han realizado algunos trabajos sobre evaluación en el área de matemáticas, tal es el caso del texto PISA en el Aula: Matemáticas (Pp. 54-56), la cual presenta una propuesta de evaluación pedagógica dividida en cuatro partes y con algunos indicadores que dan muestra del proceso enseñanza aprendizaje (ver Anexo 1; Pp. 113-114).

Sin embargo, el docente en ocasiones tiene que crear y generar sus propias Rúbricas de Evaluación (*Las Rúbricas son guías de puntaje que permiten describir el grado en el cual un estudiante está ejecutando un proceso o un producto*),[54] tal como sucede en este trabajo de tesis. En los siguientes párrafos se mencionan, de manera general, los criterios empleados en cada una de las cuatro etapas en que se ha organizado la Propuesta Didáctica.

Rúbricas del Diagnóstico. Para su diseño se consideran los siguientes criterios de evaluación:

- Respuestas en que el estudiante muestre el uso de conceptos básicos de Aritmética, Álgebra y Geometría Analítica para realizar operaciones y representaciones geométricas.
- Respuestas para resolver problemas que implica la conversión de moneda, de dólares a pesos, así como una generalización de la misma mediante alguna representación algebraica o gráfica, u otro tipo.

También, si se desea se puede utilizar diferentes escalas para ponderar los criterios de las Rúbricas.[55]

[54] Ibid. Cit. P. 390.
[55] En la mayoría de las Rúbricas que se emplearon en este trabajo de tesis no tienen una ponderación escrita, pero sí están organizadas en orden gradual de importancia de menos a más,

Rúbricas del Concepto de Función. Para su diseño se consideraron los siguientes criterios de evaluación:

- Respuestas completas o adecuadas.
- Respuestas que incluyen algún procedimiento de solución.
- Respuestas que impliquen una representación geométrica.
- Respuestas que requiera que el estudiante proporcione alguna explicación para justificar alguna respuesta.
- El uso de la notación matemática.

Se pueden utilizar diferentes escalas para ponderar los criterios de las Rúbricas.

Rúbricas del Trabajo en equipo. Para el diseño de la evaluación de la tercera etapa se consideraron los siguientes datos: Número de integrantes que participan en la exposición, Tiempo de duración de la actividad, Descripción del desarrollo de la exposición, Resultados alcanzados y Observaciones.[56] Cabe mencionar que, durante la aplicación de la Propuesta Didáctica se filmó a los estudiantes durante sus exposiciones, lo cual permitió tener más evidencia sobre lo que los estudiantes dicen o hacen durante las sesiones.[57] De esta manera, se contó con una fuente importante de datos para valorar lo que los estudiantes están comprendiendo, sus posibles estrategias, conocimientos previos, etcétera; además, es posible derivar información relevante sobre la dificultad de los contenidos o la ineficacia o inoperancia de los recursos didácticos empleados.

Rúbricas de la Evaluación final. Para su diseño se consideraron los siguientes criterios de evaluación:

- Respuestas que conciernen al uso de conceptos, así como procedimientos correctos e incorrectos.
- Respuestas en que el estudiante aplique algún algoritmo de solución.

---

claro que para el lector puede no ser tan objetiva, sin embargo en la práctica se pueden ponderar los criterios de acuerdo a los intereses de cada docente.

[56] Esta parte corresponde a algunas consideraciones tomadas de un artículo sobre cómo sistematizar experiencias: http://www.costarricense.cr/pagina/mcarvajal41/Como%20sistematizar%20una%20experiencia.pdf.

[57] Durante este proceso, la observación es una técnica de evaluación informal, y del tipo intencional pues los estudiantes sabían el objetivo de mi proyecto de tesis.

- Respuestas en que el estudiante requiera proporcionar un argumento para justificar su respuesta.
- Respuestas en que el estudiante generalice y pueda representar geométricamente la solución de un problema.

Para la Evaluación final se considera, en lo posible, los temas más representativos de las tres etapas anteriores. También aquí se presenta la situación de que un ejercicio puede tener diferentes casos de Rúbricas, por ejemplo: conceptos, procesos correctos, o las características del estudiante a cometer algún tipo de error en una parte del proceso de solución de un ejercicio. El objetivo es tratar de tener una mejor interpretación de lo que el estudiante hace cuando resuelve un ejercicio o problema. En los siguientes apartados se describen las planeaciones correspondientes a cada una de las etapas de la Propuesta Didáctica.

2.2. DIAGNÓSTICO.

Contenido.	Funciones.
Tema:	1. Diagnóstico. 2. Revisión del Diagnóstico.
Objetivo:	Identificar el nivel de conocimiento de los estudiantes así como sus habilidades para resolver ejercicios de Álgebra y Geometría Analítica, y para resolver problemas.
Habilidades a desarrollar:	Que el estudiante aplique algoritmos para realizar operaciones con fracciones de números, aplique correctamente propiedades para resolver una ecuación o una desigualdad, y que pueda plantear o resolver un problema el cual tenga que plantear alguna expresión algebraica.
Material de apoyo:	El estudiante contará con una hoja impresa del examen Diagnóstico.

Diagnóstico.[58]

Nombre. Grupo. Fecha.

<u>Objetivo</u>. Identificar el nivel de conocimientos de los estudiantes así como sus habilidades para resolver ejercicios con fracciones de números, ecuación de primer grado, desigualdad cuadrática, gráfica de una función trigonométrica y de una cónica, y la solución de un problema.

<u>Instrucciones</u>. Para la realización del Diagnóstico no es necesario que utilices calculadora. Escribe ordenadamente tus procedimientos y respuestas. Utiliza lápiz y goma. Sólo dispones de 20 minutos para realizarlo.

<u>Nota</u>: Los recuadros que se encuentran a la derecha o debajo de cada uno de los ejercicio son de uso exclusivo del evaluador.

Ejercicios.

1. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=$

E1-a					

b) $\frac{7}{6}-\frac{5}{4}=$

E1-b					

c) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}=$

E1-c			

d) $\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}=$

E1-d			

2. Resuelve la siguiente ecuación.

$$3x+8=9x-3$$

E2						

3. Resuelve la siguiente desigualdad.

$$-2x^2+7x\leq 7x-8$$

E3						

[58] Se sugiere que el docente proporcione al estudiante una copia del diagnóstico.

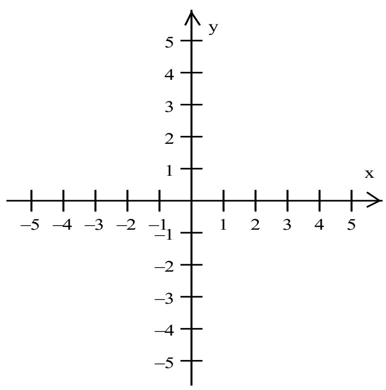
4. En la siguiente ecuación despeja la *variable* "*y*".

$$x^2y + 3xy + 7 = y - x^3$$

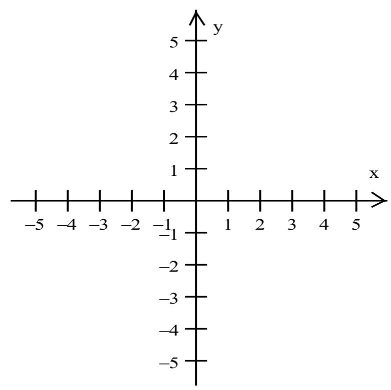
E4				

5. Representa geométricamente las siguientes *ecuaciones*.

a) $y = senx$



b) $x^2 + y^2 = 4$



E5-a				

E5-b				

6. Si el precio del dólar es de *$12.60*

- Busca una forma de realizar una conversión de dólares a pesos.
- Calcula el precio en pesos de una consola Wii que cuesta *199.99* dólares.

E6								

Al finalizar la aplicación del Diagnóstico se procederá a su revisión. Para este efecto, se solicita a los estudiantes que intercambien sus exámenes para que otro de sus compañeros lo revise con las indicaciones que el docente dará a conocer con base en las Rúbricas que se encuentran en el Anexo 2; pp. 115-116. (Los valores que se encuentran en las Rúbricas son las que se escribirán en los cuadros contenidos en el Diagnóstico).

La revisión del Diagnóstico tiene como finalidad que el estudiante comprenda el proceso de solución de algún ejercicio en caso de que se haya equivocado o que no hubiera resuelto.

Si al final de la revisión del Diagnóstico, el docente observa que, los estudiantes, no cuentan con los conocimientos necesarios en algunos temas del Diagnóstico, entonces se sugiere proponga actividades de reforzamiento mediante tareas en casa durante las primeras cuatro sesiones.

Para el cierre de esta actividad, el docente debe explicar a los estudiantes que la evaluación es con el fin de tener un punto de partida para el desarrollo de las sesiones correspondientes al Tema de Funciones; y que la revisión del Diagnóstico es un proceso de retroalimentación en la aplicación de algoritmos en la solución de ejercicios y en la resolución de problemas.

En una sesión adicional se procede a formar equipos de cuatro o cinco personas, el criterio es con base en los resultados del Diagnóstico; cada equipo estará integrado con estudiantes que obtuvieron notas altas, notas regulares y notas bajas. [59] Se asignarán los proyectos y se les solicita a los estudiantes que revisen los proyectos que les son asignados, para que, en caso de tener dudas las consulten al profesor durante los días previos a las exposiciones.

---

[59] Empleé una sesión adicional para organizar equipos de cuatro o cinco integrantes, además de entregarles los proyectos que desarrollarían para exponerlos al grupo durante la siguiente semana. El número de estudiantes que asistieron a esta sesión adicional fue de 39. La duración de la actividad fue de 58 minutos. Para la organización de equipos realicé lo siguiente:

- Una lista con los nombres de los estudiantes ordenados de acuerdo al puntaje obtenido en el Diagnóstico de mayor a menor.
- Hice una subdivisión de la lista en cinco partes y fui tomando un integrante de cada grupo para formar equipos de cinco personas, con excepción de un equipo que estuvo formado por 4 personas.
- De los tres primeros grupos de la subdivisión tomé a los estudiantes con puntajes más altos y los integraba con los estudiantes de los puntajes más bajos de los dos últimos grupos.
- En este orden fui formando a los equipos 8, 7, 6, 5, … , y 1.

2.3. CONCEPTO DE FUNCIÓN.

2.3.1. GRÁFICA DE RELACIONES Y FUNCIONES.

Contenido.	Funciones.
Tema:	Gráfica de relaciones y funciones.
Objetivo:	Que el estudiante identifique cuándo la gráfica de una relación es una Función; y que desarrolle procesos de Reproducción y Conexión que están implícitos en esta actividad.
Habilidades a desarrollar:	El estudiante al realizar la gráfica de relaciones y funciones desarrollará habilidades cognitivas, de Álgebra y Geometría Analítica. El estudiante desarrollará su habilidad motriz al realizar gráfica en el software Geogebra. El estudiante desarrollará habilidades afectivas, tales como: respeto, tolerancia y comunicación al resolver problemas y al argumentar sus soluciones a sus compañeros de grupo.
Material de apoyo:	El estudiante deberá contar con un cuaderno de apuntes para el desarrollo de la sesión.

Se sugiere que el docente proporcione al estudiante una copia de la actividad que va a desarrollar en esta sesión. También, es recomendable que esta sesión se desarrolle en una sala de cómputo, pues parte del objetivo de la actividad es presentar al estudiante el software GeoGebra[60] como una herramienta de trabajo. En caso de no contar con el lugar, el docente puede preparar las gráficas de las ecuaciones en el pizarrón, considerando que, puede llevarle más tiempo del estimado para esta sesión.

[60] El estudiante podrá descargar el software GeoGebra en la dirección http://geogebra.softonic.com/descargar en la opción descarga gratuita.

Actividad 1.

Ejercicio 1. ¿Cuál es la *gráfica* de las siguientes *ecuaciones*?

a) $x^2 + y^2 - 25 = 0$ b) $x^2 - y = 0$

Con respecto a las gráficas realizadas, responde a las siguientes preguntas:

i) En la gráfica de $x^2 + y^2 - 25 = 0$ traza una *recta vertical* que pase por el *punto (–3,0)*, ¿cuántos *puntos de intersección* tiene con la gráfica? y ¿cuáles son sus *coordenadas*?

ii) Si trazas otra recta vertical, pero ahora que pase por el punto *(3,0)*, ¿en cuántos puntos intersecta a la gráfica? y ¿cuáles son sus coordenadas?

iii) ¿Qué característica observas en las primeras coordenadas de los puntos de intersección de la recta vertical con la gráfica?

Observación. Dada la gráfica de una ecuación, si al trazar líneas verticales que intersectan a la gráfica en al menos dos puntos entonces la gráfica no es *Función*.

iv) La relación dada por la ecuación $x^2 + y^2 - 25 = 0$ ¿es una Función?

Nota. Una manera de verificar si una relación no es Función es si al despejar la variable *"y"* está determinada por una raíz cuadrada. Recuerda que "*x*" se le denomina variable independiente, mientras que *f(x)* se denomina variable dependiente y en algunas ocasiones se representa por "*y*".

v) La relación dada por la ecuación $x^2 - y = 0$. ¿Es una Función? ¿Por qué?

vi) ¿Cómo definirías una Función?, pero considerando las *coordenadas* de los puntos de su gráfica.

La actividad tiene como objetivo: que los estudiantes desarrollen procesos de Reproducción y Conexión por medio de la solución de ejercicios, conocidos por sus cursos anteriores de Álgebra y Geometría Analítica, para que logren comprender el concepto de Función.

El docente puede tener como contratiempo que el estudiante no identifique una circunferencia o una parábola a partir de su ecuación, por lo que, se sugiere que el docente tenga preparado algunos ejemplos resueltos que ayude a los estudiantes a recordar estas cónicas. Como actividad extra clase se solicitará al estudiante que realice la gráfica de las siguientes ecuaciones e identifique cuáles son funciones:

a) $2x - y - 3 = 0$ b) $4x^2 + 9y^2 = 36$ c) $4x^2 - 9y^2 = 36$

Como sugerencia el estudiante podrá emplear el GeoGebra.

2.3.2. DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN.

Contenido.	Funciones.
Tema:	Dominio y rango de una relación.
Objetivos:	Que el estudiante tenga una idea del concepto de dominio y rango de una relación y que pueda determinarlos mediante procedimientos algebraicos; además, que desarrolle procesos de Reproducción y Conexión.
Habilidades a desarrollar:	El estudiante desarrollará habilidades cognitivas al plantear soluciones algebraicas a los ejercicios de funciones. El estudiante desarrollará su habilidad motriz al realizar gráficas con el software Geogebra. El estudiante desarrollará habilidades afectivas, tales como: respeto, tolerancia y comunicación al resolver problemas y argumentar sus soluciones a sus compañeros de grupo.
Material de apoyo:	El estudiante deberá contar con un cuaderno de apuntes.

Actividad 2.[61]

Ejercicio 1. Considera las siguientes *funciones*:

$$f(x)=\sqrt{16-x^2} \qquad g(x)=\frac{2x+3}{3x+12}$$

i) En la Función con raíz cuadrada: $f(x)=\sqrt{16-x^2}$, para que esté *definida*, ¿cómo debe ser el radicando? __________________ , entonces para determinar el dominio ¿qué expresión tendrías que plantear para que se cumpla la condición anterior?

....

ii) En la Función racional: $g(x)=\frac{2x+3}{3x+12}$ "no" está *definida* cuando el denominador es igual a qué valor: ....; en este caso, ¿qué expresión plantearías para encontrar los valores que cumplan la condición anterior?

....

iii) Con base en los ejercicios anteriores, ¿Qué es el dominio de una Función?

....

Ejercicio 2. A continuación veremos cómo obtener el rango de *f* y *g*.

i) En la Función $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ cambia *f(x)* por *"y"*, ¿cómo quedaría la nueva expresión?:... Resuelve esta expresión para *x*.

....

ii) En la expresión obtenida anteriormente, determina para qué valores está definida "*y*", el resultado es el rango.

....

Nota: cuando hayas resuelto la ecuación para *x* recuerda que $\sqrt{16-x^2}$ es positivo, por lo que, ¿cómo debe ser *y*?............................

[61] Se sugiere que el docente proporcione al estudiante una copia de la actividad que va a desarrollar en esta sesión.

Esta sesión es una continuación de la actividad *1*, con la cual los estudiantes desarrollarán procesos de Reproducción y Conexión por medio de la solución de ejercicios que les son familiares por sus cursos anteriores, principalmente en Álgebra, aunado al concepto de Función se pretende que interprete el concepto de dominio natural.

El docente puede tener como contratiempos que el estudiante no pueda plantear una desigualdad y tampoco resolverla. Por lo que se sugiere que tenga preparado algunos ejemplos resueltos que ayuden a subsanar los conocimientos de los estudiantes.

Mediante una actividad extra clase se le solicitará al estudiante que determine el dominio y el rango de:

a) $2x-y-3=0$ b) $4x^2+9y^2=36$ c) $4x^2-9y^2=36$

Como sugerencia el estudiante podrá emplear el GeoGebra.

2.3.3. UN PROBLEMA DE APLICACIÓN DE FUNCIÓN, FUNCIÓN CONTINUA Y FUNCIÓN DISCONTINUA, Y FUNCIÓN CRECIENTE Y FUNCIÓN DECRECIENTE.

Contenido.	Funciones.
Tema:	· Un problema de aplicación. · Función continua y Función discontinua. · Función creciente y Función decreciente.
Objetivos:	Que el estudiante aplique procesos de Reproducción, Conexión y Reflexión para modelar matemáticamente la relación entre el tiempo y el costo en un estacionamiento, y que sea un ejemplo para ilustrar los conceptos de: · Función continua y Función discontinua. · Función creciente y Función decreciente.

Habilidades a desarrollar:	El estudiante desarrollará habilidades cognitivas al aprender a modelar matemáticamente una situación real, mediante la aplicación del concepto de Función, en el cobro de un estacionamiento público. El estudiante desarrollará habilidades afectivas pues comunicará sus ideas y argumentará sus soluciones ante el grupo.
Material de apoyo:	El estudiante deberá contar con un cuaderno de apuntes.

Actividad 3.[62]

· *UN PROBLEMA DE APLICACIÓN.*

En un estacionamiento público la tarifa es de $ *3* las dos primeras horas más $ *5* por cada hora adicional.

Encuentra:

a) Una gráfica que represente la relación entre el tiempo y el costo.
b) Una expresión algebraica o fórmula, el dominio y el rango.
c) ¿Cuál es el costo de estacionamiento si han transcurrido *3* horas y *4* minutos, y si han transcurrido *3* horas y *53* minutos?

· *FUNCIÓN CONTINUA Y FUNCIÓN DISCONTINUA.*

Con respecto a la gráfica del problema anterior, ¿será una Función continua o una Función discontinua? ...., explica por qué:

....

· *FUNCIÓN CRECIENTE Y FUNCIÓN DECRECIENTE.*

¿Será una Función creciente o una Función decreciente?.., explica por qué:

[62] Se sugiere que el docente proporcione al estudiante una copia de la actividad que va a desarrollar en esta sesión.

En esta sesión se rescata la importancia de la Modelación como un recurso para que el estudiante comprenda mejor el concepto de Función.

Para abordar el ejemplo de aplicación se sugiere seguir las siguientes etapas:

- Introducción. Problema: La tarifa de cobro de un estacionamiento
- Final abierto: Que el estudiante en un sistema de coordenadas represente gráficamente la variación del costo, en el estacionamiento, en relación al tiempo.
- Comprobación. Verificar si su solución cumple con: proporcionar el costo de estacionamiento si han transcurrido *3* horas y *4* minutos, y si han transcurrido *3* horas y *53* minutos.

Si el estudiante tiene dificultades para proponer una solución al problema de aplicación entonces el docente lo ayudara preguntándole: ¿Cuánto le costará a un automovilista si su automóvil estuvo en el estacionamiento *1* hora, *2* horas, *2* horas y media, *3* horas y 45 minutos?, y le pedirá al estudiante que lo represente gráficamente en un sistema de coordenadas.

A partir del ejemplo anterior los estudiantes analizarán la gráfica y observar si la Función es continua, Función discontinua, Función creciente, Función decreciente. El objetivo es que el estudiante tenga la idea intuitiva de que una Función continua es aquella que al realizar su gráfica no tiene rupturas; y la idea intuitiva de Función creciente como aquella en que su gráfica va en aumento si se ve la gráfica de izquierda a derecha y que quizá en algunos intervalos se mantenga constante.

Como actividad extra clase el estudiante realizará la siguiente actividad: Encuentra una Función y una gráfica que describa el costo por enviar un paquete si pagas *$35.00* cuando pesa hasta *1 kg* y si por cada *100 gr* arriba de *1* kg pagas *$3.00*, así hasta que un paquete pese como máximo *10* kg.

2.3.4. OPERACIONES CON FUNCIONES.

Contenido:	Funciones.
Tema:	Operaciones con funciones.
Objetivos:	Que al estudiante obtenga el dominio y la regla de correspondencia de la Función que resulta de sumar, restar, multiplicar y dividir dos funciones reales de variable real.
Habilidades a desarrollar:	El estudiante desarrollará habilidades cognitivas al resolver problemas al aplicar sus conocimientos de Álgebra y Geometría Analítica para realizar operaciones con funciones. El estudiante tiene como alternativa desarrollar su habilidad motriz al realizar operaciones con funciones mediante el uso del software Geogebra. El estudiante desarrollará habilidades afectivas, tales como: respeto, tolerancia y comunicación al realizar operaciones con funciones y argumentar sus soluciones con sus compañeros de grupo.
Material de apoyo:	El estudiante deberá contar con un cuaderno de apuntes. El docente presentará las actividades de la sesión en PowerPoint.

Actividad 4.[63]

Operaciones con funciones.

Ejercicio 1. Con las funciones $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x + 2$ realiza las siguientes operaciones.

[63] Se sugiere que el docente proporcione al estudiante una copia de la actividad que va a desarrollar en esta sesión.

Suma.

Para sumar dos funciones, se realiza la suma algebraica:

$$\begin{array}{rl} + & f(x) = 5x^2 + 2x + 1 \\ & g(x) = \qquad\quad x + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$f(x) + g(x) =$$

¿Cuál es el dominio de *f*?, $D_f =$.............., ¿cuál es el dominio de *g*?, $D_g =$...............

Si se sabe que, por regla, el dominio de la suma es la intersección de los dominios de las funciones que aparecen como sumandos, ¿Cuál es el dominio de $f + g$?

$D_{f+g} =$............................

Resta.

Para la diferencia se procede como sigue:

$$\begin{array}{rl} - & f(x) = 5x^2 + 2x + 1 \\ & g(x) = \qquad\quad x + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$f(x) - g(x) =$$

El dominio de la resta es la intersección de los dominios de las funciones *f* y *g*, escribe el dominio de $f - g$, $D_{f-g} =$..............................

Multiplicación.

En el caso de la multiplicación, se procede:

$$\begin{array}{rl} & f(x) = 5x^2 + 2x + 1 \\ \times & g(x) = \qquad\quad x + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} + & \\ \hline \end{array}$$

$$f(x) \times g(x) =$$

El dominio de la multiplicación es la intersección de los dominios de las funciones *f* y *g*. Escribe el dominio de $f \times g$, $D_{f \times g} =$.................................

División.

La división, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{5x^2+2x+1}{x+2}$, se puede resolver así: $x+2 \overline{\smash{\big)}\,5x^2+2x+1}$

Escribe el resultado:...

El dominio de la división es la intersección de los dominios de las funciones *f* y *g*, pero sin considerar aquellos valores para los cuales el denominador es cero, por lo tanto, cuál es el dominio de $\dfrac{f}{g}$, $D_{\frac{f}{g}}$: ....

Para la siguiente operación sigue considerando las funciones:

$$f(x) = 5x^2 + 2x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 2$$

Composición.

Otra operación es la composición de *f* con *g*, representada como $f \circ g$, la cual se resuelve remplazando la variable *x*, de *f*, por *g(x)*, en forma simbólica es: *f(g(x))*, cómo quedaría la expresión *f(g(x))* :...

El dominio de la composición está formado por elementos del dominio de *g* con la condición de que el rango de *g* esté en el dominio de *f*. En este caso se puede plantear la siguiente expresión.

$$x \in D_g \quad \text{y} \quad g(x) \in D_f$$

Remplazando $g(x)$ por $x+2$, tenemos que:

$$x + 2 \in \text{.....................}$$

¿Para qué valores de *x* se satisface la condición anterior?....................................

La respuesta anterior es el dominio de la composición de $f \circ g$.

Esta actividad se caracteriza por establecer una Conexión entre el Álgebra y el concepto de Función.

Para estos ejercicios se sugiere que el docente aplique las siguientes etapas:

- Introducción: Operaciones de suma, resta, multiplicación, división y composición con funciones polinomiales.
- Final abierto: Que el estudiante determiné el dominio de las funciones polinomiales así como de las funciones obtenidas al realizar las operaciones algebraicas.
- Comprobación. El estudiante después de aplicar la definición para obtener el dominio de las funciones (suma, resta, multiplicación y división) pueda comprobar si el dominio satisface la Función.

Se sugiere que el docente explique al estudiante que, la composición, en su parte operativa consiste en realizar una sustitución de la expresión algebraica que define la regla de correspondencia de una Función en la variable de la regla de correspondencia de la otra Función. El estudiante realizará operaciones de composición de funciones con la guía del docente, pues es una nueva operación.

Los estudiantes concluirán que para realizar las operaciones entre funciones no sólo consiste en una operación algebraica, sino también en determinar sus dominios.

Para concluir el docente recapitulará:

1. La importancia de tener la habilidad para realizar operaciones algebraicas.
2. Que las características principales de una Función son su regla de correspondencia y dominio.

Como actividad extra clase, el estudiante realizará la siguiente actividad. Dadas las siguientes funciones: $f(x) = \sqrt{x-5}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Obtén. $f+g$, $f-g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ y $g \circ f$, así como sus respectivos dominios.

2.4. TRABAJO EN EQUIPO.

La tercera fase de la Propuesta Didáctica corresponde a los proyectos que los estudiantes expondrán ante el grupo.

Los estudiantes en equipos de cuatro o cinco integrantes elaborarán una exposición de 15 minutos del proyecto que les fue asignado. Las exposiciones tienen como objetivo que expliquen cómo representar la solución al problema mediante una Función.

2.4.1. CÁLCULO DE LAS DIMENSIONES DE UN RECTÁNGULO CON UN ALAMBRE DE *18 cm*.

Proyecto 1.

Objetivo. El estudiante determinará una Función lineal que permita calcular la altura de un rectángulo en términos de la base, si su perímetro es de *18 cm*.

Habilidades a desarrollar. El estudiante desarrollará habilidades de pensamiento de nivel superior al aplicar el concepto de Función para modelar matemáticamente una situación real, poniendo en práctica técnicas algebraicas y geométricas, aprenderá a encontrar patrones para hacer generalizaciones.

El estudiante desarrollará habilidades afectivas, tales como: respeto, tolerancia y comunicación al argumentar sus soluciones con sus compañeros de grupo.

Material de apoyo. El estudiante deberá contar con un alambre de *18 cm* de largo y una regla graduada.

Problema. Construye rectángulos cuya base tenga por medida las indicadas en la primera columna de la tabla que se encuentra a continuación, auxíliate de la regla para medir su altura y anótala en la segunda columna de la tabla.

Encuentra

- Una Función que permita calcular la altura de un rectángulo en términos de la base, si su perímetro es de *18 cm*.

Tabla. Valores de la base y la altura de un rectángulo de *18 cm* de perímetro.

Base (*cm*).	Altura (*cm*).
1	
2	
3	
4	
6	
8	
0	
9	
10	

Desarrollo.

Con la ayuda del alambre y una regla podrás realizar el llenado de la segunda columna de la tabla.

¿Cuánto suma en cada renglón la medida de la base y la altura?.

El resultado anterior ¿tendrá que ver con la medida del perímetro del rectángulo?. Explícalo.

¿Existe algún valor para la altura cuando la longitud de la base es mayor a *9 cm*? ¿Por qué?

Cierre.

Con lo anterior podrás encontrar una expresión general para obtener la altura de un rectángulo de *18 cm* de perímetro y de base *x*. En el siguiente cuadro escribe la Función, además proporciona su dominio y rango.

Tipo de Función.	Regla de correspondencia.	Dominio.	Rango.
Función altura.	$f(x) =$		

2.4.2. CÁLCULO DEL ÁREA DE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES CON UN ALAMBRE DE *18 cm*.

Proyecto 2.

Objetivo. El estudiante determinará una Función raíz cuadrada que permita calcular el área de un triángulo isósceles en términos de su base, si su perímetro es de 18 cm.

Habilidades a desarrollar. El estudiante desarrollará su pensamiento de nivel superior al aplicar el concepto de Función para modelar matemáticamente una situación real, poniendo en práctica técnicas algebraicas y geométricas, también aprenderá a encontrar patrones para que a su vez descubra generalizaciones.

Aprenderá a comunicar sus ideas y las argumentará ante el grupo.

Material de apoyo. El estudiante deberá contar con un alambre de *18 cm* de largo y una regla graduada.

Problema. Construye triángulos isósceles cuya base tenga por medida igual a la dada en la primera columna de la tabla que se encuentra a continuación, con una regla mide su altura y anótala en la segunda columna de la tabla.

Encuentra.

Una Función que permita calcular el área de un triángulo isósceles en términos de su base, si su perímetro es de *18 cm*.

Tabla. Valores de la base y la altura de un rectángulo de *18 cm* de perímetro.

Base (cm).	Altura (cm).
5	
8	
9	
10	
4	
6	
7	

Desarrollo.

Con la ayuda de un alambre y una regla podrás realizar el llenado de la segunda columna de la tabla. Sin embargo, cuando la base mide *4 cm* la altura no será tan precisa. ¿Cómo la calculas?

Para calcular la altura, ¿tendrá que ver algo el teorema de Pitágoras? –Te sugiero que traces un eje de simetría al triángulo isósceles- Discútelo con tu equipo. En caso necesario pide asesoramiento del profesor.

¿Existe algún valor para la altura cuando la longitud de la base es mayor a *9 cm*? ¿Por qué?

Cierre.

Con lo anterior podrás encontrar una expresión general para obtener el área del triángulo de *18 cm* de perímetro y de base x. En el siguiente cuadro escribe la Función y proporciona su dominio y rango.

Tipo de Función.	Regla de correspondencia.	Dominio.	Rango.
Función área.	$f(x) =$		

2.4.3. CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UN CANAL ABIERTO CONSTRUIDO CON UNA HOJA DE PAPEL TAMAÑO CARTA (21.5 cm $\times$ 28 cm).

Proyecto 3.

Objetivo. El estudiante determinará una Función polinomial de grado tres para calcular el volumen de un canal abierto construido con una hoja de papel (*21.5 cm* $\times$ *28cm*) en términos de su altura.

Habilidades a desarrollar. El estudiante desarrollará su pensamiento de nivel superior al aplicar el concepto de Función para modelar matemáticamente una situación real, poniendo en práctica técnicas algebraicas y geométricas, también aprenderá a encontrar patrones para que a su vez descubra generalizaciones.

Aprenderá a comunicar sus ideas y las argumentará ante el grupo.

Material de apoyo. El estudiante deberá contar con una hoja de papel y una regla graduada.

Problema. Con una hoja de papel tamaño carta (*21.5cm* $\times$ *28cm*) construye un canal para la lluvia[64] doblándola de la siguiente forma.

Encuentra.

Una Función para calcular el volumen en términos de la altura.

Desarrollo.

Toma la hoja de forma horizontal y realiza dos dobleces horizontales de igual medida con las dimensiones dadas en la primera columna de la tabla que se presenta a continuación, estas serán las paredes del canal (altura). Con una regla

[64] Se elige una hoja de papel para efectos prácticos en el salón de clase para ser más accesible y manejable.

mide las dimensiones del ancho de la base del canal y escríbelas en la segunda columna. Completa la tabla calculando el área de la base y el volumen del canal.

Construcción de un canal con una hoja de papel tamaño carta (*21.5 cm* $\times$ *28 cm*).

Altura (cm).	Ancho de la base.	Área de la base.	Volumen del canal.
2			
4			
5			
8			
12			

¿Existe algún valor para la base cuando la longitud de la altura sea mayor a *11 cm*? ¿Por qué?

Cierre.

Con lo anterior podrás encontrar una expresión general para calcular el volumen de un canal que se puede construir con una hoja de papel (tamaño carta) y altura x. En el siguiente cuadro escribe la Función, además proporciona su dominio y rango.

Tipo de Función.	Regla de correspondencia.	Dominio.	Rango.
Función volumen.	$f(x) =$		

2.4.4. CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UNA CAJA CONSTRUIDA CON UNA HOJA DE PAPEL TAMAÑO CARTA (*21.5 cm* $\times$ *28 cm*).

Proyecto 4.

Objetivo. El estudiante determinará una Función polinomial de grado tres para calcular el volumen de una caja construida con una hoja de papel (*21.5 cm* $\times$ *28 cm*) en términos de su altura.

Habilidades a desarrollar. El estudiante desarrollará su pensamiento de nivel superior al aplicar el concepto de Función para modelar matemáticamente una situación real, poniendo en práctica técnicas algebraicas y geométricas, también aprenderá a encontrar patrones para que a su vez descubra generalizaciones.

Aprenderá a comunicar sus ideas y las argumentará ante el grupo.

Material de apoyo. El estudiante deberá contar con una hoja de papel, una regla graduada y unas tijeras.

Problema. Construye una caja con una hoja de papel realizando cortes en las esquinas (en forma de cuadrados) las partes salientes que quedan serán las paredes de la caja.

Encuentra

Una Función que permita calcular el volumen de una caja de papel (*21.5 cm* $\times$ *28cm*) en términos de su altura.

Desarrollo.

Los estudiantes realizarán cortes en forma de cuadrados en las esquinas de una hoja de papel tamaño carta –las medidas serán en el orden en que están indicados en la primera columna de la tabla que se encuentra a continuación-, después doblarán los bordes para formar las paredes de la caja, procederán a medir las dimensiones de la base y serán anotadas en la segunda y tercera columna de la tabla. Repetirán este procedimiento para cada una de las medidas de la primera columna. El profesor supervisará el proceso de llenado de la tabla.

Construcción de cajas con una hoja de papel tamaño carta (*21.5 cm* $\times$ *28 cm*).

Dimensión del cuadrado recortado en las esquinas (altura de la caja en *cm*).	Dimensiones de la base de la caja.		Volumen de la caja.
	Dimensión menor.	Dimensión mayor.	
2			
5			
8			
10			
12			

Responde las siguientes preguntas.

¿Será posible obtener el volumen de la caja únicamente considerando las dimensiones del papel y la altura de la caja (que corresponde a la longitud del lado del cuadrado recortado)?. Analízalos con algunos casos particulares, por ejemplo cuando la altura mide: *2 cm* y *5 cm.* Escribe tus observaciones.

¿Existe algún valor para la base (menor) cuando la longitud de la altura sea mayor a *11 cm*? ¿Por qué?

Cierre.

Con lo anterior podrás encontrar una expresión general para calcular el volumen de una caja que se puede construir con una hoja de papel (tamaño carta) y altura *x*. En el siguiente cuadro escribe la Función, además proporciona su dominio y rango.

Tipo de Función.	Regla de correspondencia.	Dominio.	Rango.
Función volumen.	$f(x) =$		

2.4.5. DEPRECIACIÓN DE UN AUTOMÓVIL.

Proyecto 5.

Objetivo. El estudiante determinará una Función exponencial para determinar la depreciación de un automóvil si cada año pierde el *8%* de su valor.

Habilidades a desarrollar. El estudiante desarrollará su pensamiento de nivel superior al aplicar el concepto de Función para modelar matemáticamente una situación real, poniendo en práctica técnicas algebraicas y geométricas, también aprenderá a encontrar patrones para que a su vez descubra generalizaciones.

Al exponer su solución ante el grupo estará desarrollando habilidades de comunicación y argumentación.

Material de apoyo. Su cuaderno para hacer operaciones.

Problema. Supongamos que un automóvil tiene un valor de *$180,000* en enero del 2003, y pierde el 8% de su valor para cada año posterior con respecto a su valor del año anterior.

Encuentra.

- El valor del automóvil en el quinto año posterior al inicial.
- Una expresión para calcular el valor que ha perdido al final de *n* años.

Desarrollo.

Primero calcularán la depreciación que se obtiene en el primer año, para ello escribe el valor del automóvil en la segunda columna de la tabla que se encuentra a continuación, en la tercera columna calcula el porcentaje del valor que pierde durante el año, y en la última columna escribe el valor que tiene el automóvil al final del año. En el segundo renglón de la segunda columna el valor es el obtenido al final del primer año; posteriormente, realiza las mismas operaciones descritas anteriormente, el resultado será el valor del automóvil en el segundo año. Se repite este procedimiento para los siguientes años.

Cálculo del valor de un automóvil que se deprecia su valor el *8%* por año.

Año.	Valor del automóvil a principio del año.	Porcentaje del valor perdido.	Valor del automóvil menos el porcentaje del valor perdido al final del año.
1	*180,000*		
2			
3			
4			
5			

Resuelve.

En la realización del llenado de la tabla, qué observaciones tienes.

Cómo calcularías el valor del automóvil al final de los cinco años sin tener que realizar el llenado completo de la tabla. Te sugiero que primero calcules su valor para el primer año y luego para el segundo año, recuerda que la información de que dispones es el valor del automóvil de *180,000,* y el porcentaje de devaluación es del *8%*. ¿Cuáles serían las operaciones?

Propón una generalización para calcular el valor del automóvil al final de los cinco años.

(En caso de no obtener el resultado correcto, vuelve a analizar los casos particulares para los años *1* y *2*).

Cuando tengas la expresión general, calcula el valor del automóvil al final de los *20* años.

Cierre

Vamos a generalizar, para el valor de un automóvil que costó *$180,000*, que pierde su valor del *8%* por año, en un período de *n* años. Para esto observa la siguiente tabla, revisa los dos primeros renglones y complétalo para los siguientes años.

Generalización del cálculo para la depreciación del valor de un automóvil.

Año.	Valor del automóvil a inicio de año.	Porcentaje del valor perdido.	Valor del automóvil menos el porcentaje del valor perdido al final del año.
1	*180000*	*180000(0.08)*	*180000–180000·(0.08)* *=180000 (1–0.08)= 180000 (0.92)*
2	*1000(0.92)*	*180000(0.92)(0.08)*	*180000(0.92)+180000(0.92)(0.08)* *=180000 (0.92)(1–0.08)* *= 180000 (0.92)(0.92)* *=180000* $(0.92)^2$
3	*1000*$(0.92)^2$		
4			
5			

El valor del automóvil al final de *x* años, representado por *f(x)*, será la expresión que representa el caso general para calcular la depreciación en cualquier año de un automóvil que tiene un valor inicial de $180,000 y si cada año pierde el 8% de su valor.

2.4.6. CÁLCULO DEL MONTO DE UN DEPÓSITO CAPITALIZABLE ANUALMENTE.

Proyecto 6.

Objetivo. El estudiante determinará una Función exponencial para calcular el monto de un depósito que se invierte a una tasa de interés del *10%* con capitalización anual.

Habilidades a desarrollar. El estudiante desarrollará su pensamiento de nivel superior al aplicar el concepto de Función para modelar matemáticamente una situación real, poniendo en práctica técnicas algebraicas y geométricas, también aprenderá a encontrar patrones para que a su vez descubra generalizaciones.

Comunicará sus ideas y las argumentará ante el grupo.

Material de apoyo. Su cuaderno para hacer operaciones.

Problema. Un banco ofrece una tasa del *10%* para los depósitos en cuenta de inversión. Calcula el monto de un depósito de *$1000* (llamado capital) al cabo de *5* años.

Encuentra.

- Una expresión para calcular el monto de una inversión de *$1000* a una tasa de interés del *10%* con capitalización anual al final de cinco años.
- Una Función para calcular el monto de una cantidad depositada, a una tasa de interés i, capitalizable anualmente, al final de x años.

Desarrollo.

Primero calcula el monto que se obtiene en el primer año, para ello escribe la cantidad a invertir en la segunda columna de la tabla que se encuentra a continuación, en la tercera columna calcula el interés generado durante ese año, y en la última columna escribe el nuevo capital que es la cantidad depositada más los intereses. En el segundo renglón de la segunda columna la cantidad es el nuevo capital obtenido en el primer año, al realizar las mismas operaciones descritas anteriormente obtendrás el monto de la inversión al segundo año. Se repite este procedimiento para los siguientes años.

Cálculo del monto de *$1000* invertidos a una tasa del *10%* con capitalización anual.

Año.	Capital a principio de año.	Intereses en el año.	Capital más intereses al final del año.
1	*1000*		
2			
3			
4			
5			

En la realización del llenado de la tabla, qué observaciones tienes.

Cómo calcularías el monto al final de los cinco años sin tener que realizar el llenado de la tabla. Te sugiero que primero calcules el monto para el primer año y luego para el segundo año, recuerda que la información que dispones es el capital de *$1000* y la tasa de interés del *10%*. ¿Cuáles serían las operaciones?

Propón una generalización para calcular el monto de la inversión *$1000* al final de los cinco años.

(En caso de no obtener el resultado correcto, vuelve a analizar los casos particulares para *1* y *2* años)

Cuando tengas la expresión general, calcula el monto al final de los *20* años.

Cierre

Vamos a generalizar para una cantidad de *$1000*, llamado capital, que se invierte a una tasa de interés del *10%*, en un período de *n* años. Para esto observa la siguiente tabla, revisa los dos primeros renglones y complétalo para los siguientes años.

Cálculo del monto de un capital invertidos a una tasa de interés con capitalización anual.

Año.	Capital a principio de año.	Intereses en el año.	Capital más intereses al final del año.
1	1000	$1000\cdot(0.1)$	$1000+1000\cdot(0.1)=1000(1+0.1)$ $=1000(1.1)$
2	$1000(1.1)$	$1000(1.1)\cdot(0.1)$	$1000(1.1)+1000(1.1)\cdot(0.1)$ $=1000(1.1)(1+0.1)=1000(1.1)(1.1)$ $=1000(1.1)^2$
3	$1000(1.1)^2$		
4			
5			

Escribe la Función *f(x)* que permita calcular el monto de un depósito de $1000 para cualquier año a una tasa de interés del 10% con capitalización anual.

2.4.7. PROYECCIONES DE LA POBLACIÓN EN MÉXICO PARA LOS AÑOS *2010* Y *2020*.

Proyecto 7.

Objetivo. El estudiante estimará la población en México para el año *2010* y *2020*.

Habilidades a desarrollar. El estudiante desarrollará su pensamiento de nivel superior al aplicar el concepto de Función para modelar matemáticamente una situación real, poniendo en práctica técnicas algebraicas y geométricas, aprenderá a utilizar herramientas de computo como el Excel para apoyarse en el desarrollo del trabajo.

Asimismo, desarrollará la habilidad de comunicar sus ideas y las argumentará ante el grupo.

Material de apoyo. Para llevar a cabo esta actividad será necesario contar con un equipo de cómputo, con office 2010.

Problema. La población en México de *1950* al *2000* de acuerdo al INEGI (Instituto Nacional de Estadística y Geografía) es el siguiente.[65]

Año.	*1950*	*1960*	*1970*	*1980*	*1990*	*2000*
Población total –en millones-	*25.8*	*34.9*	*48.2*	*66.8*	*81.2*	*97.5*

Fuente. http.//cuentame.inegi.gob.mx/poblacion/habitantes.aspx

[65] Nota: La población total en el año 2010 fue de 112.337 millones (Fuente: http://www.inegi.org.mx/Sistemas/temasV2/Default.aspx?s=est&c=17484). En el momento de realizar esta actividad no se contaba con la información.

Encuentra.

a) Una Función lineal y una cuadrática que se aproxime al comportamiento del crecimiento poblacional. Elije la Función que mejor se aproxime verificando cuál de las dos funciones se aproxima a *103.3* millones de habitantes en el año *2005*.[66]

b) Con la Función elegida, en el inciso anterior, calcula el número de habitantes que habrá en el año *2010* y *2020.*[67]

Desarrollo

El procedimiento para ajustar los datos a una curva es por medio de una hoja de cálculo Excel. Sigue los pasos listados a continuación.

Abre una hoja de cálculo Excel y copia los siguientes datos.

Año.	Población (en millones).
1950	*25.8*
1960	*34.9*
1970	*48.2*
1980	*66.8*
1990	*81.2*
2000	*97.5*

- Paso 1. Abre una Hoja de cálculo Excel, escribe los datos que aparecen en la tabla anterior. Marca los pares de datos, luego en la cinta de opciones elije la ficha *Insertar*, selecciona el grupo *Gráficos* y luego elige el botón de comando *Dispersión* y en subcomando elige *Dispersión sólo con marcadores*.
- Paso 2. De la cinta de opciones selecciona la ficha *Diseño*, del grupo *Diseños de gráfico* elige el comando *Diseño 1* en *Títulos de gráfico* escribe:

66 Fuente: http://cuentame.inegi.gob.mx/poblacion/habitantes.aspx.

67 En Wikipedia se tiene que para el 2010 y el 2020 se estimaba que la población en México era de 112 y 122 millones, respectivamente (ver: http://es.wikipedia.org/wiki/Demograf%C3%ADa_de_M%C3%A9xico). Por otra parte, CONAPO (Consejo Nacional de Población) estimó que para los años 2010 y 2020 se tendría una población de 108 396 211 y 115 762 289, respectivamente tomando en cuenta aspectos demográficos tales como: tasas de mortalidad, de fecundidad y de migración internacional. (ver: http://www.conapo.gob.mx/00cifras/proy/Proy05-50.pdf, P. 20).
Finalmente INEGI da a conocer que total de población en el año 2010 es de 112.337 millones. Ver: http://www.inegi.org.mx/Sistemas/temasV2/Default.aspx?s=est&c=17484.

Crecimiento poblacional en México 1950-2000; en *Título del eje (X)*, escribe: Año. y en *Título del eje (Y)*, escribe: Población. Por último en la gráfica coloca el cursor sobre el recuadro que dice: “Series 1”, pulsa el botón izquierdo del *Ratón* para que quede seleccionado y con la tecla *Supr* podrás eliminarlo.

Para ajustar los puntos a una curva se realiza lo siguiente. Se *selecciona uno de los puntos* en la gráfica obtenida en la primera parte, al pulsar el botón derecho del *Ratón* se abre una ventana, elige *Agregar línea de tendencia*, en Tipo de tendencia o regresión selecciona la opción *Lineal*, luego en *Opciones* activa la opción *Personalizado* y escribe en el recuadro: $f_1(x)$, activa la opción *Presentar ecuación en el gráfico*. En la columna izquierda selecciona *Color de línea*, luego en la columna derecha elige *Línea sólida* y en *Color* selecciona el rojo y elige *Cerrar*. Después, en la gráfica sobre la ecuación pulsa el botón izquierdo del *Ratón* para seleccionar la ecuación, colocándote en un borde puedes arrastrar la ecuación para colocarla cerca de la línea que se encuentra a la derecha de la gráfica.

Ahora para obtener una Función polinomial de grado dos se *selecciona uno de los puntos* en la gráfica obtenida inicialmente (tiene que ser uno de los puntos que no esté muy cerca de la línea obtenida anteriormente), con *clic derecho* se abre una ventana, elige *Agregar línea de tendencia*, en Opciones de línea de tendencia, en Tipo de tendencia o regresión selecciona la opción *Polinómica* y en *orden* escribe *2*, luego en *Nombre de la línea de tendencia* activa la opción *Personalizada* y escribe en el recuadro: $f_2(x)$, activa la opción *Presentar ecuación en el gráfico*. En la columna izquierda selecciona *Color de línea*, luego en la columna derecha elige *Línea sólida* y en *Color* selecciona el azul y elige *Cerrar*. Después, en la gráfica sobre la ecuación pulsa el botón izquierdo del *Ratón* para seleccionar la ecuación y llévala a la derecha en la línea que se encuentra a la derecha de la gráfica.

En el siguiente cuadro escribe las funciones que obtuviste, además proporciona su dominio y rango.

Tipo de Función.	Regla de correspondencia.	Dominio.	Rango.
Función lineal.	$f_1(x) =$		
Función polinomial.	$f_2(x) =$		

Cierre

Todo lo anterior será útil para lograr nuestro objetivo principal que es estimar el número de habitantes en los años *2010* y *2020*, para ello primero se seleccionará cuál de las dos líneas de tendencia es la más adecuada.

Evalúa las dos funciones en el valor *2005*.

Año x.	Función lineal. $f_1(x) =$	Función polinomial. $f_2(x) =$	Valor real (en millones).
2005			*103.3*

De lo anterior cuál es la Función más adecuada y por qué.

Por último, con la Función elegida estima cuántos habitantes habrá en *2010* y *2020*.

Año.	Población (en millones).
2010	
2020	

2.4.8. LANZAMIENTO DE UNA CANICA POR MEDIO DE UNA CATAPULTA DE CLIPS.

Proyecto 8.

Objetivo. El estudiante determinará una Función polinomial de grado dos, que permita obtener la altura de la canica, en términos de la distancia recorrida, al ser lanzada por una catapulta.

Habilidades a desarrollar. El estudiante desarrollará su pensamiento de nivel superior al aplicar el concepto de Función para modelar matemáticamente una situación real, poniendo en práctica técnicas algebraicas y geométricas, aprenderá a utilizar herramientas de computo como el Excel para apoyarse en el desarrollo de trabajos de matemáticas.

Aprenderá a comunicar sus ideas y las argumentará ante el grupo.

Material de apoyo. El estudiante cuenta con una imagen que describe los diferentes lugares que va alcanzando la canica después de ser lanzada con una catapulta.

El estudiante se apoyará de una regla graduada para obtener las coordenadas de la canica en algunas de las diferentes posiciones que va teniendo durante su trayectoria.

El estudiante por medio del Excel determinará la Función polinomial que mejor se ajuste al movimiento de una canica lanzada por una catapulta.

Problema. Se realiza el siguiente experimento, se lanza una canica mediante una catapulta construida con dos clips y una liga como la siguiente:

FIGURA 1. ESQUEMA DE UNA CATAPULTA CONSTRUIDA CON DOS CLIPS.

Fuente:

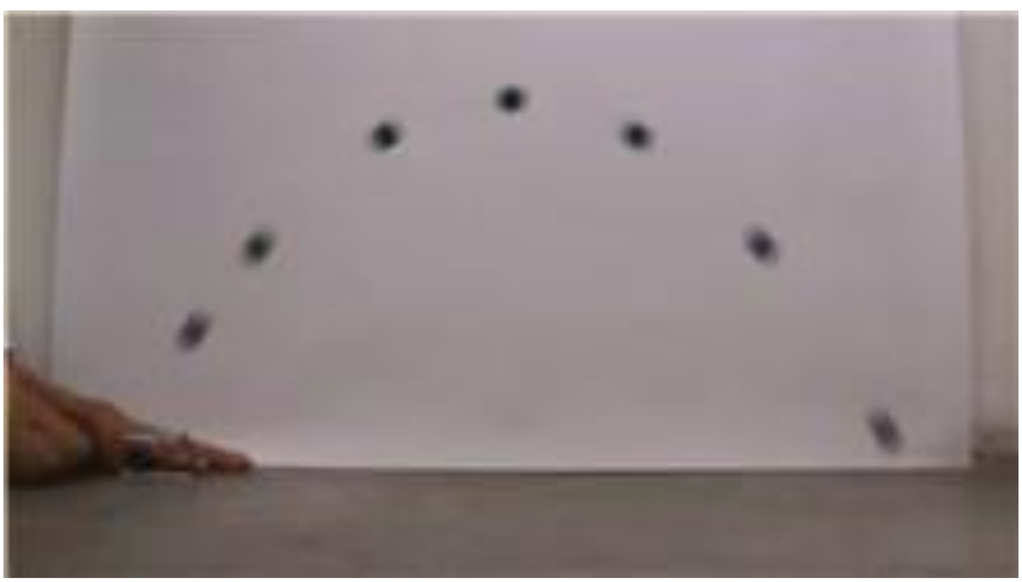
http://3.bp.blogspot.com/_Ckh_Ow3ucgs/TDaUKj4YxEI/AAAAAAAAAz8/dwNIhr-MzAM/s400/1.jpg

Para su elaboración se puede consultar la siguiente página:

http://www.ikkaro.com/capatapulta-clips

A continuación se presenta una imagen que muestra los diferentes lugares que la canica va teniendo en su recorrido, un dato adicional es que la distancia que hay del punto inicial –en donde está la catapulta- y el punto final -en donde la canica toca por primera vez el piso- es de *55.7 cm*.

FIGURA 2. RECORRIDO DE UNA CANICA DESPUÉS DE SER LANZADA POR UNA CATAPULTA.



Fotografía editada tomada de un video que grabé al realizar el experimento.

Encuentra:

- Una Función que permita obtener la altura de la canica en términos de la distancia recorrida.

Desarrollo.

Para determinar la Función que describe la trayectoria de una canica al ser lanzada por una catapulta, primero se determinan las coordenadas cartesianas de la canica durante su trayecto, luego estos datos serán empleados para ajustar una curva en una hoja de cálculo Excel. Para lo anterior se sugiere que se sigan los pasos:

1. Abre una Hoja de cálculo Excel, y sigue los pasos:
   - Paso 1. Copia las coordenadas de los puntos y ordénalas en dos columnas. luego en la cinta de opciones elije la ficha *Insertar*, selecciona el grupo *Gráficos* y luego elige el botón de comando *Dispersión* y en subcomando elige *Dispersión sólo con marcadores*.
   - Paso 2. De la cinta de opciones selecciona la ficha *Diseño*, del grupo *Diseños de gráfico* elige el comando *Diseño 1* en *Títulos de gráfico* escribe: Lanzamiento con una canica de una catapulta; en *Título del eje (X)*, escribe: Distancia, y en *Título del eje (Y)*, escribe: Altura. Por último en la gráfica coloca el cursor sobre el recuadro que dice: “Series 1” pulsa el botón izquierdo del *Ratón* para que quede seleccionado y con la tecla *Supr* podrás eliminarlo.

Para ajustar los puntos a una curva se realiza lo siguiente. Se *selecciona uno de los puntos* en la gráfica obtenida en la primera parte, al pulsar el botón derecho del *Ratón* se abre una ventana, elige *Agregar línea de tendencia*, en Opciones de línea de tendencia, en Tipo de tendencia o regresión selecciona la opción *Polinómica* y en *orden* escribe *2*, luego en *Nombre de la línea de tendencia* activa la opción *Personalizada* y escribe en el recuadro: $f(x)$, activa la opción *Presentar ecuación en el gráfico*. En la columna izquierda selecciona *Color de línea*, luego en la columna derecha elige *Línea sólida* y en *Color* selecciona el rojo y elige

Cerrar. Después, en la gráfica sobre la ecuación pulsa el botón izquierdo del *Ratón* para seleccionar la ecuación y llévala a la derecha en la línea que se encuentra a la derecha de la gráfica.

De esta manera habrás obtenido la gráfica de los puntos que representa las posiciones que tuvo la canica en su recorrido, además una Función polinomial que se aproxima a dichos puntos.

Cierre.

Lo anterior tiene como finalidad modelar mediante una Función cuadrática el lanzamiento de una canica mediante una catapulta de clips.

Con la gráfica obtenida en la Hoja de cálculo Excel determina cuál es el punto más alto que alcanza la canica:...

En el siguiente cuadro escribe la Función que obtuviste, además proporciona su dominio y rango.

Tipo de Función.	Regla de correspondencia.	Dominio.	Rango.
Función altura.	$f(x) =$		

Para reflexionar.

¿Cómo calcularías la altura de la canica en el tiempo $\frac{2}{30}$ *de segundo?*

2.4.9. DETERMINACIÓN DEL PERÍMETRO DE LA CIRCUNFERENCIA MÁXIMA[68] DE UNA ESFERA POR EL PROCEDIMIENTO DE ERATÓSTENES.

Proyecto 9.

Objetivo. El estudiante determinará una Función para calcular el perímetro de la circunferencia máxima de una esfera, en términos del ángulo que se forma con los rayos de luz y dos palillos clavados perpendicularmente en la superficie de la esfera, y de la distancia entre los dos palillos.

Habilidades a desarrollar. El estudiante desarrollará su pensamiento de nivel superior al aplicar el concepto de Función para modelar matemáticamente una situación real, poniendo en práctica técnicas algebraicas y geométricas, también aprenderá a encontrar patrones para que a su vez descubra generalizaciones.

Aprenderá a comunicar sus ideas y las argumentará ante el grupo.

Material de apoyo. Una esfera, dos palillos (estacas), un transportador, una regla graduada y una lámpara.

Problema. En una esfera de unicel del tamaño de una pelota, de 20 a 25 cm de diámetro, coloca dos palillos clavados perpendicularmente en la superficie de la esfera a una distancia de separación de *3 cm*. Si colocas la esfera bajo los rayos de luz de una lámpara tal que una de las estacas no proyecte sombra, pero en la otra sí, calcula en esta última el ángulo que se forma con los rayos de luz en la dirección de la estaca.

[68] Circunferencia que se obtiene al cortar una esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera. Fuente: http://www.kalipedia.com/glosario/circunferencia-maxima.html?x=2955.

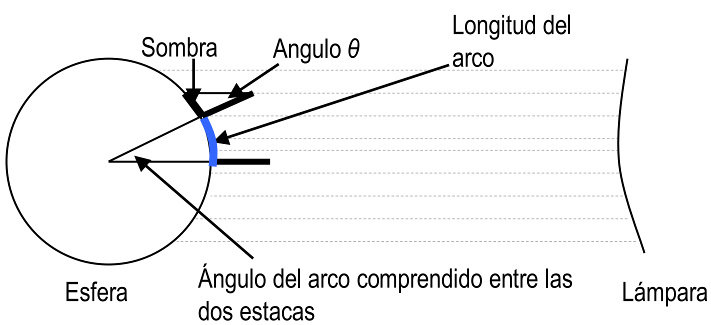
Encuentra.

- El ángulo del arco comprendido entre las dos estacas, y el perímetro de la esfera.
- Determina una Función que permita calcular el perímetro de una esfera.[69]

Desarrollo.

En una esfera de unicel coloca dos palillos separados a una distancia de *3 cm* e insértalos perpendicularmente sobre la superficie de la esfera. Si colocas la esfera bajo los rayos de luz de tal manera que en una de las estacas no proyecte sombra, mientras que en otra, sí debe proyectar sombra, siendo esta última la que emplearás para medir con un transportador el ángulo θ que se forma con los rayos de luz en la dirección de la estaca (Ver figura 3).

FIGURA 3. VISTA PARCIAL DE LA ESFERA PARA ILUSTRAR EL ÁNGULO QUE SE FORMA CON UNA ESTACA.



¿Cuánto mide el ángulo del arco comprendido entre las dos estacas? (observa que los rayos de luz siguen trayectorias paralelas y recuerda la propiedad de ángulos alternos internos)..

[69] Hay un antecedente histórico en la cual me basé para la realización de esta actividad, para mayor información se puede consultar: http://personales.ya.com/casanchi/rec/eratos.htm.

Cierre.

Con el ángulo del arco comprendido entre las dos estacas y la longitud del arco, ¿Cómo calcularías el perímetro de la circunferencia máxima de la esfera?

Generaliza la expresión que obtuviste, considerando la siguiente notación:

x: Longitud del arco;

θ_x : Ángulo del arco *x* (el que esta comprendido entre las dos estacas); y

$f(x)$: La Función *f*.

2.5. EVALUACIÓN FINAL.

Contenido:	Funciones.
Tema.	Evaluación final.
Objetivos:	Conocer el progreso de los estudiantes para resolver ejercicios de Aritmética, Álgebra, Geometría Analítica, y para resolver problemas relacionados al Tema de Funciones.
Habilidades a desarrollar:	Que el estudiante aplique algoritmos para la solución de ejercicios y que resuelva problemas y grafique.
Material de apoyo:	Para el Diagnóstico el estudiante contará con una hoja impresa.

Evaluación Final.[70]

Nombre. Grupo. Fecha.

<u>Objetivo</u>. Conocer el progreso en el desarrollo de habilidades de los estudiantes para resolver ejercicios de Aritmética, Álgebra, Geometría Analítica, y para resolver problemas relacionados al Tema de Funciones.

<u>Instrucciones</u>. Para la realización de la Evaluación final no es necesario que utilices calculadora. Escribe ordenadamente tus procedimientos y respuestas. Utiliza lápiz y goma. Sólo dispones de 20 minutos para realizarlo.

Ejercicios.

1. Realiza la siguiente operación.

$$\frac{5}{6}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}=$$

Caso 1									
Caso 2									
Caso 3									

2. Cuál es el dominio de la Función.

$$f(x)=\sqrt{2x-8}$$

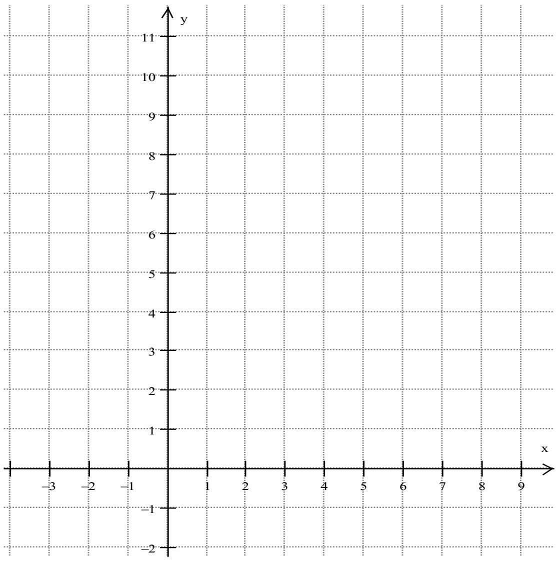
Caso 1						
Caso 2						
Caso 3						
Caso 4						

3. Explica qué es una Función.

E3											

[70] Se sugiere que el docente proporcione al estudiante una copia de la Evaluación final.

4. Encuentra una Función y una gráfica que describa el costo por enviar un paquete si pagas $*3* cuando pesa hasta *4 kg* y si por cada *kg* arriba de *4 kg* pagas $*2*, hasta *8 kg*.



“Función”									
Gráfica									

Al término del Diagnóstico se procederá a su revisión con base en las Rúbricas[71] que se encuentran en el Anexo 3; pp. 117-119.

[71] En este caso las Rúbricas están clasificadas en casos; el objetivo es tener información lo más objetiva posible para posteriormente hacer un análisis cualitativo de la Evaluación final.

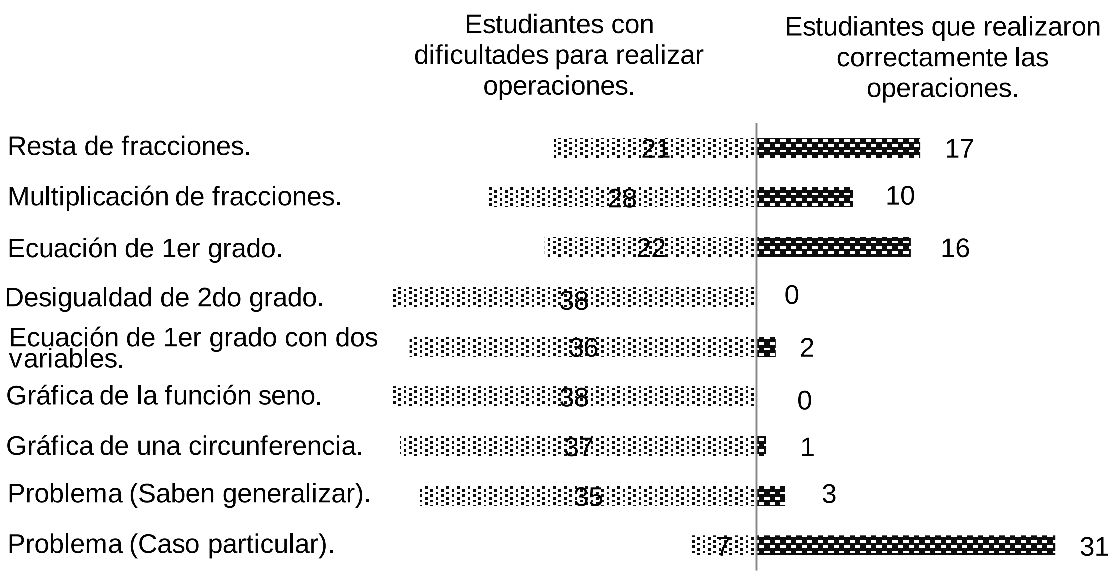
CAPÍTULO 3. RESULTADOS.

Los resultados obtenidos de la Propuesta Didáctica son, presentados en este capítulo, agrupados en cuatro partes: Diagnóstico, Concepto de Función, Trabajo en equipo y Evaluación final.

3.1. DIAGNÓSTICO.

Los resultados generales del examen Diagnóstico son presentados en la gráfica 3.

GRÁFICA 3. RESULTADOS GENERALES DEL DIAGNÓSTICO.



Nota: Los resultados son de un grupo de 38 estudiantes. Ver Anexo 4: pp. 120-122.

El Diagnóstico se divide en tres partes, la primera es Aritmética en la cual se observa que menos del *50%* de los estudiantes saben sumar y restar fracciones; mientras que aproximadamente sólo una cuarta parte sabe multiplicar y dividir fracciones. Aunque en los resultados hay aparentemente más estudiantes que pueden resolver una suma de fracciones, es la resta, la operación que permite saber cuáles son las habilidades de Reproducción pues implica determinar, el mínimo común múltiplo (*mcm*) de los denominadores; mientras que en la suma (en este ejercicio) el mcm se obtiene multiplicando los denominadores (ver Anexo 4, Tabla 1; p. 120).[72]

En los ejercicios de multiplicación y división se tiene que los estudiantes confunden el algoritmo de la multiplicación de fracciones con el de la división. Sólo hay 25 y 23 estudiantes que saben multiplicar y dividir fracciones, respectivamente, de un total de 38; de la multiplicación sólo 10 simplificaron la fracción obtenida, la división no requería ser simplificada (ver Anexo 4, Tabla 2; p. 120).

En la segunda parte, Álgebra, en el ejercicio de la ecuación de primer grado, más del 50% de los estudiantes, no pudieron resolverla correctamente porque no aplican bien el principio de igualdad, particularmente cuando tienen que despejar a la variable "*x*" cuando está multiplicada por un número negativo pues al pasarlo al segundo miembro hacen un cambio de signo (ver Anexo 4, Tabla 3; p. 121). En el caso de la desigualdad cuadrática, sucede lo mismo, además de no aplicar los procesos de solución para resolver una ecuación de segundo grado (ver Anexo 4, Tabla 4; p. 121).

En el caso de la resolución de la ecuación de primer grado, en la que intervienen dos variables, se les pidió que despejaran a "*y*", pues se tiene que sólo 2 estudiantes pudieron resolverla, aplicando correctamente el principio de igualdad y de un proceso de factorización: factor común (ver Anexo 4, Tabla 5; p. 121).

En la tercera parte, Geometría Analítica y Funciones, los estudiantes tenían que representar la gráfica de la Función seno y de la circunferencia, a partir de sus

[72] Los estudiantes al resolver una operación con fracciones pone en práctica procesos de Reproducción, tales como la realización de operaciones básicas con números enteros (suma, resta, multiplicación y división), también la determinación del mcm (para el caso de la suma y resta), además de los algoritmos que se siguen para realizar las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) y la comprensión del concepto de fracción equivalente (para simplificar una fracción); de esta manera el estudiante requiere saber manejar más de dos habilidades de reproducción, y en algunos casos, de manera simultánea.

ecuaciones. El resultado fue que ninguno pudo realizar la gráfica de la Función seno, en el caso de la circunferencia únicamente un estudiante fue capaz de realizarla correctamente (para mayor detalle de estos resultados se puede revisar el Anexo 4, Tablas 6 y 7; p. 122), cabe aclarar que los estudiantes que realizaron el Diagnóstico estaban finalizando su curso de Geometría Analítica, de lo anterior se puede suponer que los estudiantes no asimilaron estos nuevos conocimientos debido a que no tienen las bases suficientes en Aritmética y Álgebra; y también que los docentes no cuentan con estrategias de Enseñanza-aprendizaje adecuadas para estos temas.

Con respecto al problema de la conversión de dólares a pesos, la mayoría de los estudiantes tenían la idea de resolver el problema empleando una regla de tres simple directa, y no mediante una expresión algebraica pues no identifican la variable independiente (en este caso, el valor que representa el dólar). Otra observación es que, los estudiantes pueden resolver el caso particular de un problema, más no logran generalizar y menos representarlo simbólicamente (ver Anexo 4, tabla 8; p. 122).

Así, en esta primera parte se puede observar que más de la mitad de los estudiantes no pueden llevar a cabo dos o más habilidades de Reproducción en un proceso aritmético de operaciones con fracciones, tampoco saben aplicar habilidades de Reproducción y Conexión en Álgebra porque no cuentan con las bases de la Aritmética.

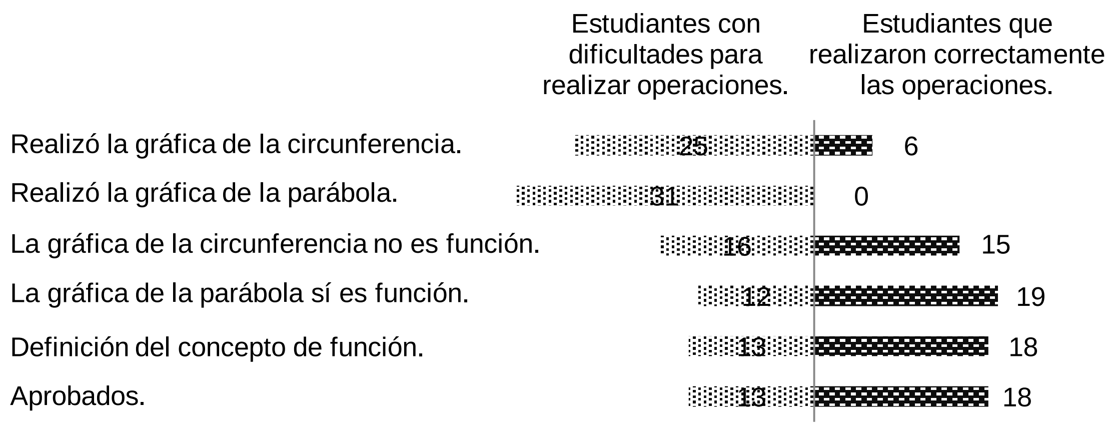
En el siguiente apartado se presentan los resultados de la segunda etapa de la Propuesta Didáctica.

3.2. CONCEPTO DE FUNCIÓN.

3.2.1. GRÁFICA DE RELACIONES Y FUNCIONES.

Los resultados generales del tema Gráfica de relaciones y funciones se presentan en la gráfica 4.

GRÁFICA 4. RESULTADOS GENERALES DEL TEMA GRÁFICAS DE RELACIONES Y FUNCIONES.



Nota: Los resultados son de un grupo de 31 estudiantes. Ver Anexo 5; pp. 123-126.

En relación a los resultados obtenidos en el tema de Gráfica de relaciones y funciones, se observa que la mayoría de los estudiantes identificó que la primera ecuación correspondía a la circunferencia y la segunda a la parábola de un total de 31 estudiantes; sin embargo son 6 los estudiantes que al realizar la gráfica de la circunferencia consideró una escala en los ejes de coordenadas; y sólo un estudiante al realizar la gráfica de la parábola consideró una escala en los ejes de coordenadas, pero los puntos por donde pasa la parábola no corresponden con la ecuación (ver Anexo 5, tabla 1; p. 123).

Por otra parte, se tiene que 22 estudiantes respondieron que en la recta vertical que pasa por el punto (-3, 0) y la circunferencia hay dos puntos de intersección, y 21 estudiantes escribieron las coordenadas de dichos puntos de intersección (de los cuales 17 son del grupo de 22 estudiantes mencionados previamente). De lo anterior se puede observar que los estudiantes no han sido cuidadosos en responder correctamente el ejercicio, y no han sido coherentes por lo que se puede sospechar que se intercambiaron la información (ver Anexo 5, tabla 2; p. 123).

Los estudiantes al preguntarles, ¿Qué características observas en las primeras coordenadas de los puntos de intersección de la recta vertical con la gráfica?, hubo 14 estudiantes que para responder hacen la observación de que las primeras coordenadas de los puntos de intersección son iguales, al considerar la recta vertical que pasa por el punto (-3, 0) y la circunferencia, y análogamente para la recta vertical que pasa por el punto (0, 3) y la circunferencia (ver Anexo 5, tabla 4; p. 124).

Después, al preguntarles si la gráfica de la circunferencia es una Función sólo 15 estudiantes respondieron que: “no”, además proporcionaron una justificación acertada, algunas de ellas fueron las siguientes:

- “No porque hay dos puntos de intersección”.
- “No porque pasa por dos puntos”.
- “No, intersecta en dos puntos”.

Hubo 11 estudiantes que sólo se limitaron a decir que la gráfica no es una Función (ver Anexo 5, tabla 5; p. 125).

En el caso de la parábola, 19 estudiantes verificaron geométricamente que la expresión $x^2 - y = 0$, es una Función, al trazar rectas verticales y que éstas las intersectan en un sólo punto, algunas justificaciones fueron:

- “Sí porque sólo hay un punto de intersección”. (ver Anexo 5, tabla 6; p. 125)
- “Sí porque cuando trazas una línea vertical sólo tocas 1 punto”.
- “Sí porque cumple con las características de una Función”.
- “Sí ya que no hay 2 puntos de intersección en su gráfica”.

Continuando; se tiene que 5 estudiantes[73] definieron el concepto de Función en términos de las coordenadas de los puntos de su gráfica (ver Anexo 5, tabla 7; p. 125). La respuesta que dieron fue:

- "Una Función es si una relación no tiene 2 o más puntos dados por la misma coordenada". (5 estudiantes coincidieron en la misma respuesta).

Mientras que, algunos estudiantes que proporcionaron una respuesta incorrecta, escribieron:

- "Es una Función cuando ninguna coordenada es la misma".
- "Es una Función cuando la coordenada "*x*" no es la misma".
- "Cuando ninguna sea la misma" (3 estudiantes dieron esta respuesta).
- "Cuando tiene una coordenada en común y tiene 2 puntos de intersección" (2 estudiantes dieron esta respuesta).

Por último, en los resultados generales de la actividad se tiene que, 18 estudiantes lograron resolver bien más de la mitad de la actividad del tema Gráficas de relaciones y de funciones, de los cuales 3 estudiantes respondieron bien a toda la actividad (ver Anexo 5, tabla 8; p. 126).

3.2.2. DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN.

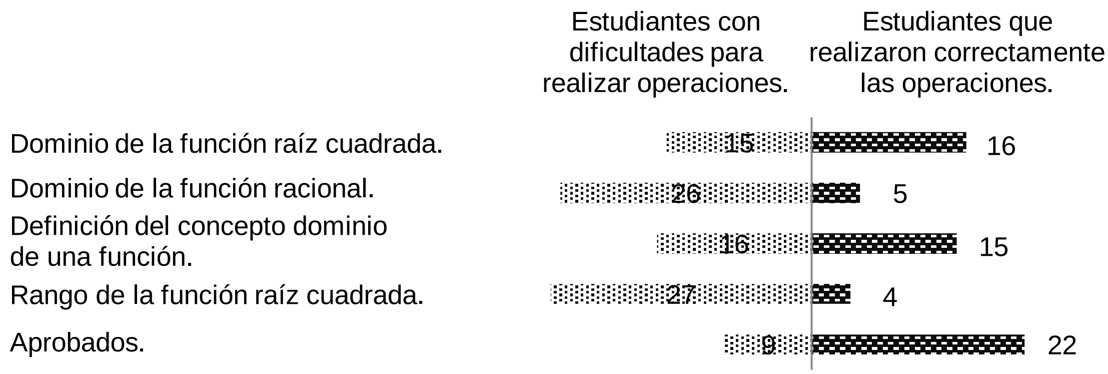
Los resultados generales del tema Dominio y rango de una relación son presentados en la gráfica 5 (ver siguiente página).

En el tema Dominio y rango de una relación se tiene que la mayoría identificó que la expresión algebraica $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ está definida cuando el radicando es positivo, pero sólo 18 estudiantes plantearon correctamente la expresión algebraica que permite determinar el dominio: $16-x^2 \geq 0$. Los restantes 13 estudiantes tuvieron contratiempos, dos no escribieron ninguna respuesta,

[73] Estos estudiantes forman parte del total de 18 estudiantes que también dieron una respuesta correcta, pero que además hicieron referencia a su representación geométrica

3 estudiantes plantearon la desigualdad: $16 - x^2 \leq 0$, y 8 estudiantes se equivocaron en un signo o en algún número (ver Anexo 6, tablas 1 y 2; p. 127).

GRÁFICA 5. RESULTADOS GENERALES DEL TEMA DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN.



Nota: Los resultados son de un grupo de 31 estudiantes. Ver Anexo 6; pp. 127-130.

Mientras que, 16 estudiantes determinaron correctamente el dominio de la Función *f*, e incluyeron el proceso de solución (ver Anexo 6, tabla 3; p. 127); otros 9 estudiantes no realizaron ninguna operación y otros 6 estudiantes tuvieron las siguientes fallas:

- Sólo escribió el dominio de la Función sin un procedimiento algebraico. (4 estudiantes)
- Realizó todo el procedimiento algebraico pero el dominio de la Función lo escribió así: $4 \leq x \leq 4$.
- Sólo escribió el procedimiento algebraico pero no el dominio.

En el caso de la Función *g*, se tiene que 29 estudiantes identificaron que el denominador no debe ser cero para que la fracción algebraica esté definida; de todos ellos sólo 21 pudieron plantear la ecuación algebraica $3x + 12 = 0$ y de estos, 5 estudiantes proporcionaron la respuesta correcta además de escribir el proceso de solución. De 26 estudiantes que tuvieron inconvenientes para responder, 16 no proporcionaron ningún procedimiento y otros 10 únicamente proporcionaron la solución sin ningún procedimiento (ver Anexo 6, tablas 4 y 5; p. 128).

El objetivo del trabajo realizado hasta el momento era para que el estudiante se aproximara a la idea del concepto de dominio de una Función, y que lo pudiera definir con sus propias palabras (ver Anexo 6, tabla 6; p. 129). Algunas respuestas satisfactorias fueron las siguientes:

- “Valores para los cuales está definida la Función” (3 estudiantes)
- “Son aquellos valores para los cuales está definida la Función” (4 estudiantes)
- “Todos los valores para los cuales está definida la Función” (3 estudiantes)
- “Valores que al sustituir en x está definida la Función”(4 estudiantes)
- “Es el conjunto de todos los posibles valores de ingreso que la Función acepta los valores de salida son llamados rango” (1 estudiante)

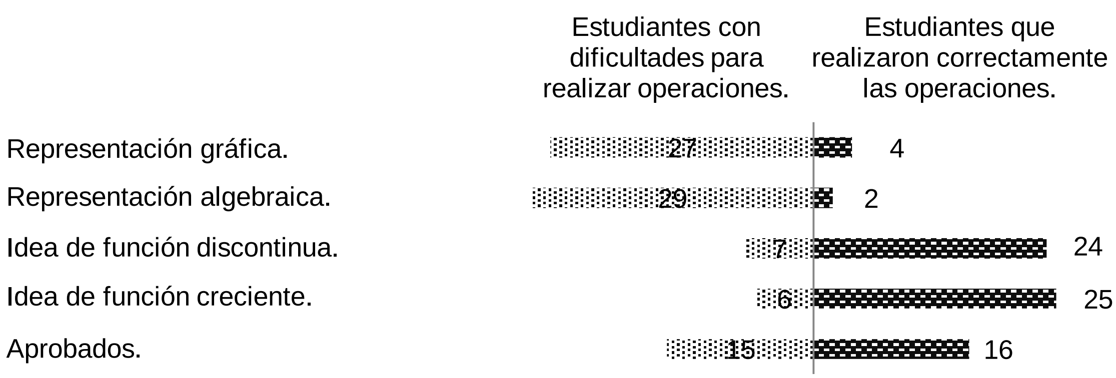
La siguiente parte de la actividad consiste en determinar el rango de la Función $f(x)=\sqrt{16-x^2}$. El paso inicial es sustituir la $f(x)$ por *“y”*, de los cuales 27 estudiantes lo realizaron satisfactoriamente. Después, 21 estudiantes despejaron a *“x”* de la ecuación $y=\sqrt{16-x^2}$ e incluyeron el procedimiento de solución. Para determinar el rango de la Función, el estudiante debe tomar en cuenta que los valores de la Función *f* es positiva, como al inicio se le explicó, de aquí que únicamente 4 estudiantes concluyeron satisfactoriamente el ejercicio (ver Anexo 6, tablas 7, 8 y 9; pp. 129-130).

En los resultados generales se tiene que 22 estudiantes tuvieron correctas más de la mitad de sus respuestas, y únicamente 3 estudiantes respondieron correctamente a todo el ejercicio (ver Anexo 6, tabla 10; p. 130).

3.2.3. UN PROBLEMA DE APLICACIÓN DE FUNCIÓN, FUNCIÓN CONTINUA Y FUNCIÓN DISCONTINUA, Y FUNCIÓN CRECIENTE Y FUNCIÓN DECRECIENTE.

Los resultados generales del tema Problema de aplicación; Función continua y Función discontinua; y Función creciente y Función decreciente se presentan en la gráfica 6.

GRÁFICA 6. RESULTADOS GENERALES DEL TEMA UN PROBLEMA DE APLICACIÓN Y CLASES DE FUNCIONES.



Nota: Los resultados son de un grupo de 31 estudiantes. Ver Anexo 7; pp. 131-132.

En el tema un problema de aplicación, el problema del estacionamiento, se tiene que para realizar la gráfica que muestre la relación entre el tiempo y el costo, 25 estudiantes representaron algunos puntos correspondientes al tiempo de 2, 3, 4 y 5 horas respectivamente y en otros casos las gráficas las relacionaban con una recta. De estos 25 estudiantes, 16 se dieron cuenta que la gráfica estaba formada por segmentos de recta, pero sólo 9 estudiantes representaron correctamente los segmentos de recta. Finalmente, fueron 4 los estudiantes que lograron hacer la gráfica correctamente pues ellos a diferencia de los anteriores consideraron los puntos que no pertenecen a la gráfica (ver Anexo 7, tabla 1; p. 131). En este ejercicio se puede afirmar que los estudiantes no comprendieron el problema. Una observación al respecto es que, los estudiantes al considerar casos particulares no tienen dificultades, pero en las fracciones de tiempo es cuando ellos no logran relacionarlo geométricamente con el costo, de ahí que la cantidad de estudiantes haya disminuido.

Por otra parte, 2 estudiantes proporcionaron correctamente la expresión que modela el problema de la tarifa de un estacionamiento (ver Anexo 7, tabla 2; p. 131), estos estudiantes son 2 de los 4 estudiantes que habían representado correctamente la gráfica de la tarifa del estacionamiento público, sus respuestas son:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & si \;\; x\in(0{,}2] \\ 8 & si \;\; x\in(2{,}3] \\ 13 & si \;\; x\in(3{,}4] \\ 18 & si \;\; x\in(4{,}5] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(x)=\begin{cases} 3 & si \;\; x\in(0{,}2] \\ 8 & si \;\; x\in(2{,}3] \\ 13 & si \;\; x\in(3{,}4] \\ 18 & si \;\; x\in(4{,}5] \\ 21 & si \;\; x\in(5{,}6] \end{cases}$$

Como se puede observar en este problema casi todos los estudiantes tienen dificultades para representar simbólicamente el comportamiento de un fenómeno, es decir, no están concibiendo la simbología en matemáticas como un medio de comunicación.

Cuando se le preguntó al estudiante ¿Cuál es el costo de estacionamiento si han transcurrido: 3 horas y 4 minutos, y en otro caso 3 horas y 53 minutos? se tiene que 8 estudiantes respondieron acertadamente que el costo sería de $ 13 si el automóvil está 3 horas y 4 minutos; y 14 estudiantes respondieron que un automovilista pagaría $ 13 si está 3 horas y 53 minutos (ver Anexo 7, tabla 3; p. 131). Como lo mencioné anteriormente, los estudiantes tienen dificultades para saber cuánto tiene que pagar un automovilista cuando se trata de fracciones de tiempo; incluso hubo un estudiante que consideró que el costo se distribuye uniformemente durante una hora.

En el caso de la gráfica continua o discontinua, 24 estudiantes respondieron correctamente, y sólo un estudiante se equivocó al responder que es continua (ver

Anexo 7, tabla 4; p. 132). Las justificaciones, de los estudiantes, más repetidas fueron:

- “porque no se unen los segmentos” (5 estudiantes)
- “No está unida” (5 estudiantes)
- “porque en la gráfica hay cortes” (3 estudiantes)

Finalmente, se tiene que 25 estudiantes proporcionaron una justificación de que la gráfica, que representa la tarifa del estacionamiento público, es creciente (ver Anexo 7, tabla 5; p. 132), siendo algunas respuestas más frecuentes:

- “por que aumenta el tiempo y costo” (5 estudiantes)
- “como va creciendo el tiempo, también crece el costo” (4 estudiantes)
- “porque se presenta de forma ascendente” (7 estudiantes)

Como se puede observar, los estudiantes se copiaron las respuestas, pues hay repetición de respuestas de hasta 7 estudiantes.

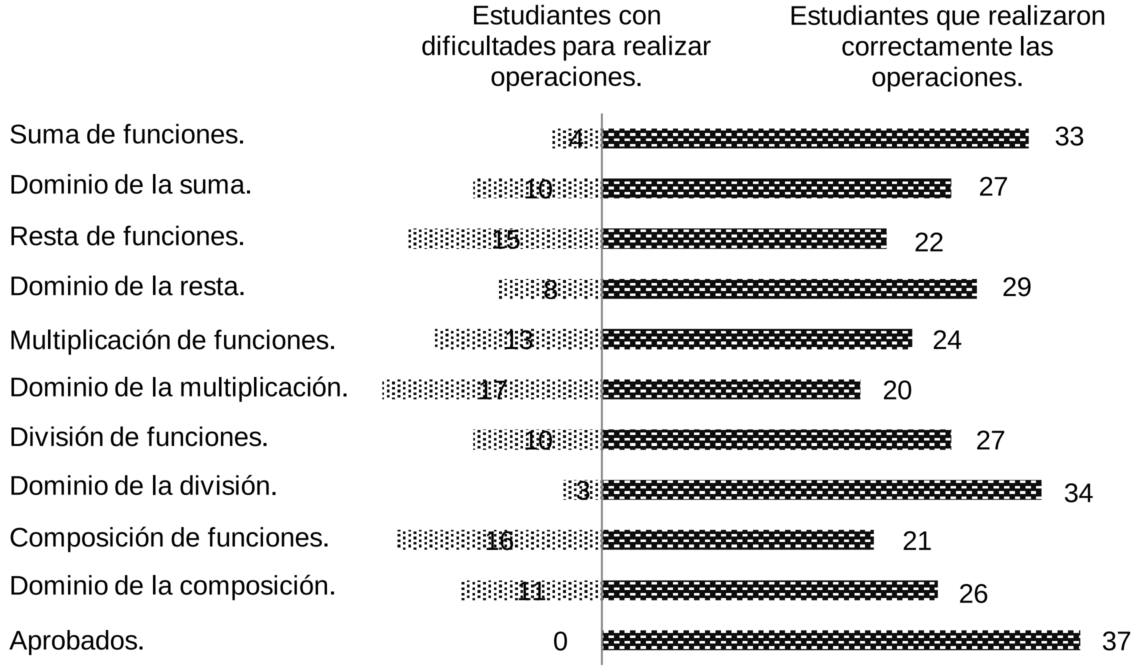
En los resultados generales de las actividades realizadas por los estudiantes en el tema: Un problema de aplicación; Función continua y Función discontinua; y Función creciente y Función decreciente, se tiene que, 16 estudiantes resolvieron bien más de la mitad de la actividad, y únicamente 1 estudiante tuvo correcta todas las respuestas (ver Anexo 7, tabla 6; p. 132).

3.2.4. OPERACIONES CON FUNCIONES.

Los resultados generales del tema Operaciones con funciones son presentados en la gráfica 7 (ver siguiente página).

Los estudiantes, al sumar funciones polinomiales tienen que aplicar sus conocimientos de Álgebra, en este caso, no tuvieron ninguna dificultad pues 33 estudiantes, de un total de 37, saben reducir términos semejantes y escribieron correctamente sus resultados (ver Anexo 8, tabla 1; p. 133). La segunda parte es determinar el dominio de la suma de $f+g$,[74] a lo cual sólo 27 estudiantes respondieron correctamente (ver Anexo 8, tablas 2, 3 y 4; p. 133).

GRÁFICA 7. RESULTADOS DEL TEMA OPERACIONES CON FUNCIONES.



Nota: Los resultados son de un grupo de 37 estudiantes. Ver Anexo 8; pp. 133-137.

En el caso de la resta de polinomios se sigue un procedimiento similar al de la suma; se tiene que 22 estudiantes obtuvieron correctamente la regla de correspondencia, en contraparte 14 estudiantes se equivocaron y escribieron (ver Anexo 8, tabla 5; p. 134):

- “$5x^2+2x-1$” (3 estudiantes)
- “$5x^2-x-1$” (3 estudiantes)

Mientras que, 29 estudiantes obtuvieron correctamente el dominio de la diferencia; 7 estudiantes no escribieron ninguna respuesta (ver Anexo 8, tabla 6; p. 134).

[74] Los estudiantes tuvieron que determinar el dominio de f, a lo cual 35 estudiantes respondieron que el dominio son los números reales representado por R. De la misma manera, 35 estudiantes determinaron que el dominio de g son los números reales.

Por otra parte, en la multiplicación de funciones el proceso comienza por multiplicar término a término, en el cual se puede observar que, sólo 24 obtuvieron correctamente sus resultados de 36 estudiantes, algunos cometieron errores como el siguiente (ver Anexo 8, tabla 7; p. 134):

- $(x)(5x^2)=5x^2$ (6 estudiantes)

En tanto que, 20 estudiantes determinaron correctamente el dominio de la multiplicación; y hubo 10 respuestas que no tienen que ver con el dominio de la multiplicación, siendo la más frecuente (ver Anexo 8, tabla 8; p. 135):

- $(R \cap R) \cap (R \cap R)$ (8 estudiantes)

En el caso de la división de polinomios se tiene que 27 estudiantes la resolvieron correctamente y 33 estudiantes escribieron la respuesta como una fracción mixta (ver Anexo 8, tabla 9 y 10; p. 135), se observa un aumento de 6 estudiantes y corresponde a aquellos que no habían resuelto correctamente la división porque no sabían multiplicar monomios o no sabían reducir términos semejantes o ambas cosas. Se puede decir que el aumento de estudiantes se debe a que se intercambiaron información (ver Anexo 8, tabla 11; p136).

La última operación que los estudiantes resolvieron fue la composición de funciones. En este caso se tiene que 21 estudiantes respondieron correctamente al ejercicio (ver Anexo 8, tabla 12; p. 136), y 11 estudiantes se equivocaron al escribir sus resultados, siendo el problema más frecuente el uso de notación.

Finalmente, en la pregunta: ¿Para qué valores de x se satisface la condición anterior? (del dominio de la composición de f con g), 26 estudiantes respondieron correctamente, siendo que, 36 habían proporcionaron una respuesta a la condición para determinar el dominio de $f \circ g$ (ver Anexo 8, tabla 13 y 14; pp. 136).

Como se puede observar hay cambios muy marcados en los totales de estudiantes que responden en cada uno de los puntos del proceso de solución de las operaciones, esto es, no hay continuidad, la explicación es que los estudiantes para esta actividad nuevamente intercambiaron información, o quizá se dieron otras situaciones como:

- no alcanzaron a copiar toda la respuesta, o
- ser descuidados a la hora de copiar.

En los resultados generales de las actividades realizadas por los estudiantes en el tema: Operaciones con funciones, se tiene que todos resolvieron bien más de la mitad de la actividad, y sólo 3 estudiantes tuvieron correcta todas las respuestas (ver Anexo 8, tabla 15; p. 137).

3.3. TRABAJO EN EQUIPO.

La tercera etapa de la propuesta consiste en la exposición de Trabajos en equipo y es el siguiente cuadro que contiene los resultados generales.

CUADRO 1. RESULTADOS GENERALES DEL TRABAJO EN EQUIPO.

Equipo	El equipo demostró haber compren-dido el tema.	El material de apoyo que utilizó el equipo fue adecuado.	El equipo despertó interés en el grupo por el tema de exposición.	Los integrantes se auxiliaron de una hoja para leerla durante la exposición.	El equipo aclaró las dudas de sus compañeros en clase	El equipo hizo buen uso del pizarrón.
1er.	2	1	3	5/5	1	3
2o.	3	2	3	4/5	2	2
3er.	2	3	2	4/5	2	3
4o.	2	3	2	4/4	3	2
5o.	1	2	1	3/3	1	1
6o.	1	2	1	3/4	3	2
7o.	2	3	1	3/4	3	2
8o.	1	1	1	5/5	1	3
9o.	3	3	3	3/5	3	3

La escala empleada para cuantificar un indicador es la siguiente: 1: regular; 2: bien, y 3: excelente. En la columna: “Los integrantes se auxiliaron de una hoja para leerla durante la exposición”, los resultados se deben interpretar como: “Estudiantes que leyeron / Del total de estudiantes que conformaban el equipo”.

A continuación se detallan los resultados de cada uno de los proyectos.

3.3.1. CÁLCULO DE LAS DIMENSIONES DE UN RECTÁNGULO CON UN ALAMBRE DE *18* cm.

El proyecto 1:[75] "Cálculo de las dimensiones de un rectángulo con un alambre de *18 cm*". El equipo estuvo conformado por 5 integrantes y su exposición tuvo una duración de: *4:17* minutos.

La exposición del proyecto 1 se caracterizó por ser muy rápida y por enunciar básicamente los resultados solicitados en el problema; sin permitir que los asistentes pudieran expresar sus dudas durante la exposición.[76] Lo anterior causó el disgusto de algunos asistentes; cuando el equipo finalizó la exposición intervine para solicitarles a todos los equipos ser tolerantes y respetuosos.

Quizá la exposición pudo haber sido más clara si hubieran empleado el material de apoyo que se sugería en el proyecto. Además, evitar leer textualmente unas hojas para sus exposiciones; algunos integrantes no dieron argumentos a preguntas como:

- ¿Existe algún valor para la altura cuando la longitud de la base es mayor a 9 cm? ¿por qué?. A lo que una estudiante respondió: "pues no existe ningún valor porque…no se pueden poner valores negativos, sería que el rectángulo si se construyera, este, como dentro de sí para hacer la operación, sería imposible de hacerlo".
- En relación a la explicación sobre como se obtiene el rango, una integrante explicó que: "Para obtener el rango debe de… de la Función que serían que entre nueve y cero deben estar los datos que se están midiendo, ya que no puede ser mayor que nueve ya que el resultado no puede ser menor que cero".

[75] Para mayor detalle del desarrollo del proyecto 1 se puede revisar en el capítulo 2; pp. 47-49.
[76] Un estudiante, que estaba como asistente, realizó la siguiente pregunta: "tengo una pregunta, … y por qué va a ser, este, en la última… por qué todas tienen solución". Él se refería a cómo se habían obtenido los valores de las medidas de las alturas del rectángulo. A lo que Expositor en turno dijo: "Me permites, hasta el último son las preguntas". Los compañeros del grupo se rieron y algunos hicieron "sonidos" de burla hacia el Estudiante que había realizado la pregunta.

Por otra parte, los integrantes del equipo utilizaron bien el pizarrón, sus explicaciones las dirigían a los compañeros del grupo y el volumen de voz fue adecuado.

3.3.2. CÁLCULO DEL ÁREA DE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES CON UN ALAMBRE DE *18* cm.

El proyecto 2:[77] "Cálculo del área de un triángulo isósceles con un alambre de *18 cm*". El equipo estuvo conformado por 5 integrantes y su exposición tuvo una duración de: *13:34* minutos.

La exposición del proyecto 2 en general estuvo bien, hicieron uso del material sugerido en el proyecto, también se observó una aceptable planeación y organización del tema, aunque algunos integrantes leían durante la exposición, sin embargo, sobresalió uno de los integrantes del equipo porque apoyaba a sus compañeros en las explicaciones cuando ellos titubeaban.

Por otro lado, la explicación del tema no llevaba un orden secuencial por ejemplo, cuando uno de los integrantes del equipo hacía referencia a las medidas del triángulo isósceles, de base *5 cm* y las longitudes de los otros dos lados es de *6.5 cm*, (hay que recordar que el perímetro es de *18 cm*), su siguiente idea fue hablar del teorema de Pitágoras, más no aclaró que la finalidad era para determinar la altura del triángulo.

También, se puede observar que algunos integrantes tienen dificultades para argumentar, por ejemplo en la pregunta: ¿Existe algún valor para la altura cuando la longitud de la base es mayor a *9 cm*? ¿Por qué?, a lo cual dijeron: "El perímetro que tenemos es de 18, obviamente este… si que queda la base es mayor a 9 no se puede porque a 18 se le tiene que restar el 9 y después al resultado que queda

[77] Para mayor detalle del desarrollo del proyecto 2 se puede revisar en el capítulo 2; pp. 49-50.

se le tiene que quitar la mitad para cada uno de los lados entonces no se puede realmente”.

La última integrante tuvo dificultades para explicar la siguiente expresión, porque había considerado la variable *x* como la altura, en lugar de la base:

$$\sqrt[2]{\left(\frac{18-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Además, les faltó explicar cómo obtuvieron esta expresión algebraica. Pese a lo anterior, hubo una buena disposición de los integrantes para trabajar en equipo.

3.3.3. CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UN CANAL ABIERTO CONSTRUIDO CON UNA HOJA DE PAPEL TAMAÑO CARTA (*21.5 cm* × *28 cm*).

El proyecto 3[78] se titula: “Cálculo del volumen al doblar una hoja de papel de tamaño carta (*21.5 cm* × *28 cm*) para hacer un canal abierto”. El equipo estuvo formado por 5 integrantes y el tiempo de exposición fue de: *5:53* minutos.

Las observaciones acerca de la exposición del proyecto 3 son que fue clara y ordenada, emplearon el material de apoyo que consistió en algunos canales construidos con hojas de papel. Lograron despertar el interés del grupo. Quizá, los inconvenientes fueron que llegaron tarde dos de sus integrantes y que leían durante sus exposiciones, salvo una de ellas, quien explicó, cómo calcular el área de la base del canal.

En el caso particular de este equipo, explicaron cómo se interpretan cada uno de los factores que intervienen en la siguiente expresión algebraica:

$$f(x)=(21.5-2x)(28)(x)$$

Pero se equivocaron al definir el dominio pues dijeron que consiste en: los valores de 2, 4, 5, 8 hasta 10; y que “el rango es la imagen del dominio, por lo tanto, es el volumen”.

---

[78] Para mayor detalle del desarrollo del proyecto 3 se puede revisar en el capítulo 2; pp. 51-52.

En esta exposición se observó que no habían comprendido el concepto de dominio y rango, y que no lo relacionaron con los elementos del problema.

3.3.4. CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UNA CAJA CONSTRUIDA CON UNA HOJA DE PAPEL TAMAÑO CARTA (*21.5 cm* × *28 cm*).

El proyecto 4[79] se titula: "Cálculo del volumen de una caja que se puede construir con una hoja de papel tamaño carta (*21.5 cm* × *28 cm*)". El equipo estuvo conformado por 4 integrantes y el tiempo de exposición fue de: *7:09* minutos.

Algunas observaciones, de la exposición del proyecto 4, fueron que no hubo una distribución equitativa de los temas, pues a una integrante le tocó cubrir dos aspectos: la presentación del problema y el cierre, mientras que a los demás sólo les tocó un aspecto. También, fue una exposición muy rápida; todos leyeron sus hojas durante la exposición, en particular, una integrante leyó muy rápido, a lo que una estudiante del grupo le solicitó que leyera un poco más despacio. En general, el grupo mostró poco interés por la exposición.

Una característica de la exposición es que prepararon su material de apoyo, que consistió en cajas de papel con las medidas de las alturas, previamente definidas en una tabla, contenido en el proyecto. En relación a las preguntas los estudiantes argumentaron bien sus respuestas.

El cierre de la presentación consistió en proporcionar la regla de correspondencia de la Función para determinar el volumen de la caja:

$$f(x) = (a-2x)(b-2x)(x),$$

Lo único que se les olvidó fue proporcionar el dominio y rango de la Función *f*.

[79] Para mayor detalle del desarrollo del proyecto 4 se puede revisar en el capítulo 2; pp. 53-54.

3.3.5. DEPRECIACIÓN DE UN AUTOMÓVIL.

El proyecto 5[80] se tituló: “Depreciación de un automóvil”. El equipo estuvo formado por tres integrantes, y la duración de la exposición fue de *9:02* minutos.

Las observaciones, acerca de la exposición del proyecto 5, fueron que abusaron del uso de hojas para leer durante la presentación del tema. No lograron que el grupo se interesara por el tema, por lo que, se perdió el orden y disciplina en el grupo. El material de apoyo consistió en una presentación en PowerPoint.

Aunque abordaron y explicaron los puntos contemplados en el proyecto, perdió importancia porque sus argumentos no eran con la intención de convencer, sino de enunciarlos. Aunque sí se mostraron seguros durante la exposición de su tema.

En cuanto al tema, no explicaron claramente cómo se obtiene la expresión que permite calcular la depreciación de un automóvil, y sigue prevaleciendo el problema de que no identifican y relacionan, el dominio y el rango de la Función, con el problema que están resolviendo. Un integrante definió el dominio, leyendo en sus hojas, que son los valores de 1, 2, 3, hasta 20 años, y el rango es, dijo, “ $f(x)$ de 1, 2, 3 así hasta 20” lo cual es incorrecto.

3.3.6. CÁLCULO DEL MONTO DE UN DEPÓSITO CAPITALIZABLE ANUALMENTE.

El proyecto 6[81] se tituló: “Cálculo del monto de un depósito capitalizable anualmente”. El equipo estuvo integrado por 4 estudiantes, y el tiempo de exposición fue de *7:36* minutos.

[80] Para mayor detalle del desarrollo del proyecto 5 se puede revisar en el capítulo 2; pp. 55-57.
[81] Para mayor detalle del desarrollo del proyecto 6 se puede revisar en el capítulo 2; pp. 58-60.

Las observaciones acerca de la exposición del proyecto 6 son que, los integrantes leyeron durante la presentación del tema, con excepción de una integrante, que sólo se auxiliaba de sus resumen cuando se le olvidaba algún dato; por otra parte, sus explicaciones no estaban dirigidas al grupo por lo que no lograron que ellos se interesaran por el tema, además de que hubo una falta de orden y disciplina.

En cuanto a las respuestas a las preguntas incluidas en el proyecto sus argumentos fueron correctos, llevaban un orden y guardaban relación con cada una de las explicaciones que iban dando anteriormente, pero no fueron convincentes porque abusaron del lenguaje técnico (matemático) y no lo relacionaban completamente con el problema. Hicieron uso del pizarrón para escribir las operaciones de los cálculos para determinar la cantidad que va ganando la inversión, aunque les faltó orden y claridad en lo que escribían. El último integrante presentó en el pizarrón la expresión $f(x)=1000(1.1)^{x}$, que representa el monto al final de x años, y definió el dominio y el rango en términos de conjuntos, es decir: dominio $\{1,2,3,...20\}$ y rango $\{f(x)/x\in\{1,2,3,...20\}\}$.

3.3.7. PROYECCIONES DE LA POBLACIÓN EN MÉXICO PARA LOS AÑOS 2010 Y 2020.

El proyecto 7[82] se titula: “Proyecciones de la población en México para los años *2010* y *2020*”. Fueron 4 los integrantes que conformaron el equipo y su exposición tuvo una duración de *10:45* minutos.

El equipo se mostró seguro durante la exposición del tema, al inicio indicaron los objetivos que se lograrían, aunque se adelantaron en la presentación de los resultados de las funciones que tenían que encontrar, y después justificaron porque esos resultados.

[82] Para mayor detalle del desarrollo del proyecto 7 se puede revisar en el capítulo 2; pp. 61-64.

Este tema requiere de una habilidad en el manejo de Excel para determinar las funciones lineal y cuadrática, y fue precisamente una de las integrantes, la encargada, de explicar paso a paso el procedimiento para obtener las funciones. Algo que se debe destacar es que no leyó durante su explicación.

En relación al uso del pizarrón fue regular porque faltó orden para escribir las funciones que representan el comportamiento del crecimiento poblacional, y las estimaciones, de la población para el año *2010* y *2020*. No hubo orden y disciplina en el grupo. Por último, aunque la mayor parte de la presentación se centraba en la explicación de aspectos técnicos, también, proporciono un buen argumento al señalar que, la Función lineal, era la más adecuada para estimar la población en el año *2020,* porque tiene una mejor aproximación, a la población real para el año *2005*.

3.3.8. LANZAMIENTO DE UNA CANICA POR MEDIO DE UNA CATAPULTA DE CLIPS.

El proyecto 8[83] titulado: “Lanzamiento de una canica por medio de una catapulta de clips”. El equipo estuvo formado por cinco integrantes, y el tiempo de exposición fue de: *9:02* minutos.

Este proyecto era el más ambicioso pues involucraba el manejo de dos programas: Excel y Geometer´s Sketchpad. Sin embargo, los integrantes del equipo se dedicaron a leer las indicaciones del proyecto por lo que no lograron despertar el interés del grupo, y como consecuencia se perdió el orden y la disciplina del grupo.

En la exposición, fue evidente que, a una integrante la hicieron responsable del manejo de los programas, sin embargo, la velocidad con la que los otros integrantes leían las instrucciones no le daban tiempo para que ella ejecutara las

[83] Para mayor detalle del desarrollo del proyecto 8 se puede revisar en el capítulo 2; pp. 65-68.

instrucciones. Quizá lo recomendable es que, la persona encargada del manejo de los programas, hubiera sido quien explicara, conforme ejecutaba, cada una de las instrucciones.

En relación al uso del pizarrón fue adecuado, sin embargo se les olvidó hacer referencia a él para indicar cuál es el dominio y rango de la Función que determina la altura de la canica.

3.3.9. DETERMINACIÓN DEL PERÍMETRO DE LA CIRCUNFERENCIA MÁXIMA DE UNA ESFERA POR EL PROCEDIMIENTO DE ERATÓSTENES.

El proyecto 9[84] se tituló: “Determinación del perímetro de la circunferencia máxima de una esfera por el procedimiento de Eratóstenes”. El equipo lo integraron 5 estudiantes, y la duración de la exposición fue de *0:07:36* minutos.

La exposición del proyecto 9 tuvo como característica que, sus integrantes leían durante sus presentaciones, salvo dos de ellas, una estaba al pendiente de que sus compañeras explicaran bien, y cuando alguna titubeaba les ayudaba, también, se pudo observar que tenía bien estudiado el tema, aunque una integrante tuvo dificultades en el orden de su exposición, pues, primero presentó los resultados y luego explicó el procedimiento.

Hicieron uso del pizarrón para representar gráficamente un corte de la esfera, que corresponde a una parte de la circunferencia máxima, para representar la propiedad de ángulos alternos-internos, el único inconveniente fue que hicieron algunas anotaciones muy pequeñas que no se podían ver.

Durante la exposición, usaron una esfera de unicel para ilustrar lo que se pretendía resolver. Al final, definieron el dominio y rango con ciertas dificultades

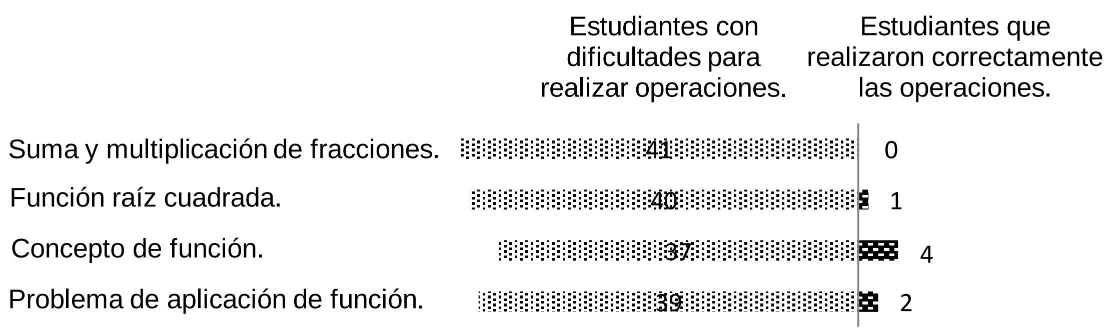
[84] Para mayor detalle del desarrollo del proyecto 9 se puede revisar en el capítulo 2; pp. 69-71.

pues era evidente que no habían asimilado bien el concepto y más aún no podían relacionarlo con los parámetros del problema.

3.4. EVALUACIÓN FINAL.

Por último, se presentan los resultados de la Evaluación final, cuyo objetivo fue conocer los avances logrados en algunos de los temas: Aritmética y Funciones.

GRÁFICA 8. RESULTADOS GENERALES DE LA EVALUACIÓN FINAL.



Nota: Los resultados son de un grupo de 41 estudiantes. Ver Anexo 9; pp. 138-140. Los ejercicios se encuentran en las páginas 72 y 73 del capítulo 2.

En Aritmética, como se puede apreciar en la gráfica 8 ningún estudiante resolvió correctamente el ejercicio de fracciones, siendo la principal causa no saber jerarquizar la operación de multiplicación con respecto a la suma. Más adelante se hará una revisión detallada de este ejercicio.

También en la tabla se observa que en el contenido: Función raíz cuadrada, sólo 1 estudiante pudo determinar el dominio; prácticamente todos no saben determinar los valores que satisfacen la Función pues para lograrlo tenían que plantear una desigualdad; por lo tanto los estudiantes tienen dificultades para manejar dos o más habilidades de Conexión y Reproducción en la solución de un ejercicio.

En el contenido, Concepto de Función, hay 4 estudiantes que mencionaron las principales características que definen dicho concepto. Este es un indicador de que los estudiantes no asimilaron dicho concepto, además, tienen dificultades para comunicar sus ideas. Esto se confirma, ya que, pocos estudiantes pudieron encontrar el dominio de una expresión algebraica en el ejercicio anterior.

El último contenido es un problema de aplicación que consiste en determinar una expresión algebraica que relacione el costo y el precio en el envío de un paquete, sólo hay 2 estudiantes que pudieron modelarlo matemáticamente y representarlo geométricamente. Las causas son la mala asimilación del concepto de Función y por lo tanto de su aplicación, sin olvidar los procesos necesarios que debería manejar en Álgebra y en Geometría Analítica, y como se ha mencionando son habilidades que los estudiantes aún no han mejorado.

A continuación, se hace un análisis detallado y se enunciarán algunas conclusiones de los ejercicios correspondientes a los temas de Aritmética y Funciones.

En el ejercicio 1. $\frac{5}{6}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}=$ se presentaron diferentes situaciones la primera corresponde a los casos en que el estudiante siguió un procedimiento incorrecto, Casos A y B (ver Anexo 9, tabla 1; p. 138) –son precisamente estos casos en donde se encuentran agrupados la mayoría de los estudiantes–, y por otra parte, en el Caso C están los procedimientos correctos (ver Anexo 9, tabla 1; p. 138).

Caso A.

Este caso corresponde a problemas de concepto, se contemplan cuatro situaciones; la primera se refiere a que el estudiante al observar tres fracciones, consideró que parte de la solución consistía en determinar el mínimo común múltiplo (mcm) de las tres fracciones como si la única operación fuera la suma. Luego obtuvieron como numerador la siguiente expresión: $10+20\times 3$, de la cual sólo un estudiante resolvió correctamente, los otros dos estudiantes realizaron primero la suma: $10+20$, y el resultado: 30 lo multiplicaron por 3, obteniendo 90 como resultado final, de aquí que no saben jerarquizar operaciones.

El segundo problema, adicional a la jerarquía de operaciones, es con respecto al principio de igualdad, se refiere a que 29 estudiantes cuando tienen un ejercicio en que intervienen dos operaciones de suma y multiplicación, por ejemplo: $10+20\times 3$, lo resuelven por partes: $10+20=30\times 3=90$. Primero suman $10+20$, y cuando obtienen el resultado lo multiplican por *3*, de tal manera que al realizar la multiplicación obtienen *90*. Ahora si tomamos la primera expresión: $10+20$ y la última: *90*, observamos que no son iguales y es esto a lo que me refiero a que no respetan el principio de igualdad. El problema no es que los estudiantes no sepan realizar las operaciones sino que lo escriben mal y no jerarquizan.

El tercer punto es que los estudiantes tienen problemas con el concepto de multiplicación de fracciones, aunque sean dos los estudiantes, vale la pena mencionarlos pues para realizar la multiplicación, uno de ellos lo resolvió como si fuera una suma, determinando en primer lugar un común denominador, y el otro estudiante realiza el producto “cruzado” pero en lugar de colocar los resultados en el numerador y denominador, invierte los lugares.

El cuarto aspecto del caso A es que hay estudiantes que confunden el algoritmo de la multiplicación por el de la división, es decir, en lugar de hacer el producto “directo” lo realizan en forma “cruzada”.

Para terminar con el caso A, se puede decir que hay estudiantes que no saben aplicar más de dos habilidades de Reproducción de manera simultánea. Además, tienen problemas en la aplicación del principio de igualdad, y no saben manejar propiedades matemáticas así como sus representaciones numéricas y simbólicas.

Caso B.

El caso B se refiere a los estudiantes que no realizaron bien la operación porque no saben jerarquizar las operaciones de suma y multiplicación, pero que pueden realizar bien algunas operaciones la suma o multiplicación (15 estudiantes). Por otra parte, bajó considerablemente el número de estudiantes que resolvieron correctamente la operación de suma en la Evaluación final (1 estudiante) que en el Diagnóstico (17 estudiantes), en el caso de la multiplicación, también disminuyó el número de estudiantes en la Evaluación final (7 estudiantes) a comparación de los que lo realizaron en el Diagnóstico (25 estudiantes). Lo anterior se debe a que se les dificultan las operaciones de suma y multiplicación cuando están interrelacionadas entre sí. No obstante en este caso, aunque no hayan sabido jerarquizar, se tiene que una sexta parte de los estudiantes obtuvieron un resultado “correcto”.

Nuevamente se puede identificar que tienen dificultades en sus habilidades de Reflexión y Reproducción, pues al no saber jerarquizar no están poniendo en práctica las propiedades matemáticas de la suma y la multiplicación.

Caso C

Aquí se encuentran 3 estudiantes que identificaron que la operación de multiplicación tiene preferencia respecto a la suma, pero de ellos sólo 2 obtuvieron el resultado y lo único que les faltó fue simplificar la expresión para considerarlo correcto.

La siguiente parte corresponde al Tema de Funciones. El ejercicio trata de encontrar los valores que pueden sustituirse en la expresión, $\sqrt{2x-8}$ de tal manera que sus resultados sean números reales, para esto se puede plantear la desigualdad: $2x-8 \geq 0$ y proceder a resolverla para encontrar de esta forma los valores buscados; los resultados que proporcionaron los estudiantes se agrupan en los que no resolvieron correctamente el ejercicio correspondientes al Caso A y B (ver Anexo 9, tabla 2; p. 139) y el de estudiantes que lo resolvieron bien corresponde al Caso C (ver Anexo 9, tabla 2; p. 139). En seguida se presentan los resultados de cada uno de los casos.

Caso A

Aquí se encuentra la mayoría de los estudiantes que escribieron una ecuación o una expresión algebraica en términos de desigualdades, y de algunas expresiones que no tienen que ver con el ejercicio, por ejemplo:

- La raíz cuadrada la tomaron como una división de polinomios, o
- Escribieron una desigualdad como, $4 \leq 0 \leq -4$, o
- Escribieron expresiones como, $f = x < 1$.

Caso B.

Son estudiantes que en lugar de plantear una desigualdad escribieron alguna de las siguientes ecuaciones:

- $y = \sqrt{2x-8}$ e intentan despejar a "x" o
- $2x - 8 = 0$ y también intentan despejar a la variable "x"

De estos estudiantes, 2 de ellos, plantearon una de las siguientes ecuaciones $2x-8=0$ o $y^2 = 2x-8$, realizaron su "procedimiento de solución" y sin más escriben como resultado $4 \leq x$, lo cual es correcto.

Caso C.

Este caso corresponde a los estudiantes que plantearon y resolvieron correctamente la desigualdad, $2x-8 \geq 0$, y únicamente fue 1 estudiante.

Como se puede observar en el ejercicio se requiere que los estudiantes apliquen procesos de Conexión, para plantear una desigualdad que les permita encontrar los valores que satisfaga la raíz cuadrada, y luego aplicar sus habilidades de Reproducción, es decir, resolver la desigualdad, y nuevamente aplicar un proceso de Conexión para interpretar el resultado obtenido. Sólo 1 estudiante resolvió correctamente el ejercicio; el resto de los estudiantes tienen deficiencias en Álgebra, sin olvidar los problemas en Aritmética que ya se había mencionado.

El tercer ejercicio trata del concepto de Función, en el cual se pide que el estudiante lo explique con sus propias palabras, sólo 4 de ellos proporcionaron las características propias del concepto (ver Anexo 9, tabla 3; p. 139). Otros hicieron referencia a la propiedad geométrica de la gráfica de una Función que dice que al trazar cualquier recta vertical ésta la intersectará en un sólo punto.

A continuación se presentan los resultados del problema de aplicación del concepto de Función, el ejercicio 4 que consiste en determinar la expresión que describe el costo en Función del peso en el envío de un paquete. Para este caso se tienen aproximaciones de expresiones algebraicas (cerca del *50%* de los estudiantes), pero sólo 2 de ellos proporcionan dos características importantes: el dominio y la imagen (ver Anexo 9, tabla 4; p. 140). Como se puede observar, son pocos los estudiantes que logran asimilar el concepto de Función, es decir, son estudiantes que aplican procesos de análisis y reflexión para comprender nuevos conceptos.

Una parte complementaria de la solución del problema es su representación gráfica, los estudiantes realizaron aproximaciones de casos particulares representados como puntos en el plano, pero solo una cuarta parte pudo representar la gráfica como segmentos de recta, y finalmente, fueron sólo dos estudiantes los que cumplieron con la condición de asignar a cada punto del dominio un entero como resultado (ver Anexo 9, tabla 5; p. 140).

De esta forma se concluye este capítulo correspondiente a los resultados de la aplicación de la Propuesta Didáctica.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES.

4.1. CONCLUSIONES.

A continuación se presentan las conclusiones de este trabajo, las cuales se han organizado en cuatro partes: las del Diagnóstico, en seguida las del Concepto de Función, las del Trabajo en equipo y la Evaluación final.

Si bien el propósito de la evaluación Diagnóstica, inicialmente fue tener un criterio homogéneo para formar grupos de trabajo para las exposiciones, también permitió identificar que la mayoría de los estudiantes carecen de habilidades matemáticas básicas para aplicar:

- El concepto de fracción equivalente al simplificar una fracción.
- Procedimientos mínimos de factorización, y resolver una desigualdad cuadrática.
- Procesos de Conexión entre una expresión algebraica y su representación geométrica.
- Procedimientos para realizar una interpretación del lenguaje común al algebraico.

A pesar de lo anterior y debido a las limitaciones de tiempo para cubrir los temas, no fue posible la realización de actividades con intensión de subsanar estas carencias, sólo se realizaron algunos ajustes a los ejercicios de las actividades de las sesiones subsiguientes, tratando de adecuarlas, de manera tal que se ajustaran, a los conocimientos de los estudiantes.

Con respecto al Concepto de Función, los estudiantes tuvieron un buen desempeño en las habilidades/conocimientos básicos requeridos, no obstante en el trabajo en clase presentaron algunas dificultades como:

- El manejo de la notación y nomenclatura en conceptos tales como puntos y coordenadas, desigualdades y ecuaciones.

- La argumentación de respuestas empleando las propiedades o definiciones de los conceptos que intervienen en la solución del ejercicio o problema.
- La aplicación de procesos de Conexión al resolver problemas, al plantear expresiones algebraicas, así como su proceso de solución.

Con relación al Trabajo en equipo, a pesar de que los estudiantes ya se habían adaptado a la forma de trabajo y de tener una buena disposición para organizarse en la exposición de temas, presentaron problemas para:

- Aplicar la modelación matemática en la solución de ejercicios de aplicación en el tema de funciones.
- Presentar exposiciones sin leer gran parte del contenido del proyecto.

El resultado de estas dificultades se hizo evidente en la Evaluación final, pues tuvieron problemas para:

- Jerarquizar las operaciones en que intervienen suma y multiplicación.
- Encontrar el dominio de una Función dada su regla de correspondencia, pues no cuentan con las habilidades para resolver una ecuación o una desigualdad.
- Identificar algunas variables que intervienen en el problema, tales como: puntos que no pertenecen a la gráfica o segmentos de recta que no están relacionados con el problema a resolver.

Aunque no todos los estudiantes lograron las metas propuestas, la mayoría desarrolló habilidades para:

- Asociar y vincular de forma significativa la información nueva con conocimientos existentes, la cual pudo observarse sobre todo en las actividades de Operaciones con funciones y en el trabajo en equipo.
- Tener expectativas positivas de aprendizaje y confianza en sus habilidades, muestra de esto es que durante las exposiciones hubo estudiantes dispuestos a apoyar a sus compañeros cuando estos titubeaban durante la exposición.

En el siguiente apartado se presentan algunas recomendaciones, producto de la reflexión sobre esta experiencia, las cuales de considerarse pueden corregir algunas de las deficiencias descritas en este trabajo.

4.2. RECOMENDACIONES.

La principal recomendación es, realizar una evaluación Diagnóstica, para identificar los conocimientos y habilidades necesarias para el desarrollo de contenidos específicos de un curso. Si al realizar un examen diagnóstico se identifican fallas, es imperativo comenzar por subsanar estas carencias y no por impartir el curso con la esperanza de que los estudiantes solucionen las deficiencias por su cuenta, pues esto, lejos de corregirlas puede contribuir a empeorar su rendimiento académico, así mismo su motivación y lo que puede ser una causa de deserción escolar. Por lo que, resulta menester la creación de talleres, trabajo individualizado, asesorías, o bien tutorías disciplinarias.

Además, abordar nuevos temas de matemáticas puede resultar para el docente una labor ardua de conseguir y en algunas ocasiones poco conveniente, sobre todo cuando el estudiante carece de los conocimientos básicos de matemáticas o si los ha olvidado, ya que lejos de aprender, el estudiante, puede sentirse frustrado. También, los tiempos no son suficientes, para el desarrollo de habilidades de aprendizaje, porque algunas escuelas cuentan con períodos de clases de 50 minutos, con 50 a 60 alumnos. Además, en la mayoría de los programas de matemáticas se le da prioridad a cubrir los extensos temas, sin considerar que los estudiantes tienen que atender otras asignaturas del currículo académico que se manejan en las diferentes instituciones del Bachillerato en México.

Así que, es importante que los sistemas educativos, las autoridades y el docente, en coalición, asignen tiempos y espacios para que los estudiantes desarrollen y fortalezcan habilidades básicas de aprendizaje, no sólo en matemáticas sino, en todas las materias que cursan, y no solo en el bachillerato, también en niveles básicos: primaria y secundaria. Integrando, además, actividades de clases bien organizadas y planeadas, con base en algún modelo de enseñanza, para que el estudiante interactúe durante el desarrollo de la misma, y desarrollar habilidades de utomonitoreo para que él mismo se dé cuenta de los avances que va teniendo.

La técnica DCGA (División de la Clase en Grupos de Aprendizaje) puede ser muy efectiva para equilibrar las habilidades de los estudiantes en cada equipo de trabajo. Mientras que para apoyar a los estudiantes a presentar exposiciones viables se recomienda que:

- Lean previamente los temas que van a exponer, asegurar que manejen el tema durante la presentación.
- Realicen una planeación de la exposición, evitando sólo dividirse los temas en partes, y si es posible que efectúen una prueba o ensayo de la exposición para corregir algunos detalles de la misma.

Para finalizar este apartado considero relevante sugerir a los docentes tratar de que sus estudiantes se sientan en confianza en clase, para lo cual se requiere evitar evidenciar sus errores frente al grupo o avergonzarlos; hay que tener en cuenta que los estudiantes tienen distintas habilidades y distintos ritmos de aprendizaje por lo que hay que buscar un equilibrio para ir dosificando los temas enseñados para optimizar su aprendizaje. También, es importante que exista respeto y tolerancia en el salón de clase, esto a la larga hace que el estudiante se sienta seguro. Hay que enfatizar en que el objetivo de la enseñanza es que los estudiantes realmente aprendan y no únicamente cumplan con obtener una calificación aprobatoria.

4.3. LIMITACIONES.

Para la aplicación de la propuesta didáctica conté con el apoyo de las autoridades de la escuela para ocupar una de las aulas de cómputo. Sin embargo, una realidad es que no todos los salones de clase cuentan con: proyector y/o computadora; esto puede ser una limitante para desarrollar actividades en que el estudiante pueda hacer uso de software de matemáticas. A pesar de haber contado con un espacio en el cual los estudiantes podían hacer uso del programa Geogebra hubo otra limitante: el tiempo, dado que el software era nuevo para ellos implicó dedicarle un espacio adicional a las planeaciones de la propuesta para explicar cómo usar las herramientas básicas del programa.

Otra limitante fue que, durante la aplicación de la Propuesta Didáctica no se realizaron las evaluaciones señaladas al final de cada una de las planeaciones, algunas causas fueron que iniciaba tarde la sesión porque el aula estaba cerrada, o no había encargados, o que los equipos de cómputo no estaban disponibles; por lo que dichas actividades de clase se cambiaron por tareas.

En cuanto a las tareas se observó que los estudiantes intercambiaron información, pues hubo casos de hasta 7 estudiantes con la misma respuesta, este comportamiento pudo deberse a una falta de interés o de conocimiento de la actividad realizada. También se observó que no hubo continuidad en el proceso de solución de las operaciones, esto es, hubo quienes escribían correctamente la respuesta pero no realizaban bien la operación.

Finalmente, la aportación de esta tesis es compartir, con los docentes, la experiencia adquirida al realizar un examen diagnóstico, y las recomendaciones que puede considerar para lograr los objetivos de sus clases, garantizando así un mayor éxito en el desarrollo de las mismas.

BIBLIOGRAFÍA

Araoz, Edith; Guerrero, Patricia; Villaseñor, R Angélica; Galindo, M. de los Ángeles. *Estrategias para aprender a aprender. Reconstrucción del conocimiento a partir de la lectoescritura.* Primera edición. Pearson Educación. México. 2008. ISBN: 978-970

De la Mora, José Guadalupe. *Esencia de la filosofía de la Educación.* Cuarta reimpresión. Progreso. México. 2004. ISBN: 968-436-141-6.

De la Mora, José Guadalupe. *Psicología del aprendizaje.* Sexta reimpresión. Progreso. México. 2004. ISBN: 968-436-100-9.

De Oteyza, Elena. *Conocimientos fundamentales de Matemáticas, Cálculo Diferencial e Integral.* Primera edición. Pearson Educación. México 2006. ISBN: 978-970-26-0962-9.

Días-Barriga, Frida; Hernández, Gerardo. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista.* Segunda edición. McGrawHill Interamericana. México. 2002. ISBN 10: 970-10-3526-7.

Díaz, María Antonieta; Flores, Gustavo; Martínez, Felipe. *PISA 2006 en México.* Primera edición. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). México. 2007. ISBN: 968-5924-23-6.

Eggen, Paul D. *Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento.* Segunda reimpresión. Fondo de Cultura Económica. México. 2005. ISBN: 968-16-6468-X.

Escaño, José; Gil, María. *Cómo se aprende y cómo se enseña.* Primera edición. Multimedios Libros Comunicaciones. México. 2003. M ISBN: 84-85840-17-8.

García, José Luis; Fontán, Pedro. *Metamorfosis de la educación. Pedagogía prospectiva.* Primera reimpresión. Progreso. México. 2004. ISBN: 968-436-647-7.

Giry Marcel. *Aprender a razonar aprender a pensar.* Tercera edición. Siglo XXI. México. 2005. ISBN: 968-23-2355-X.

Guevara, Niebla. *Lecturas para maestros.* Cuarta reimpresión. México. Cal y Arena. 2005. ISBN 968-7711-57-4.

Haaser, Norman B.; La Salle, Joseph P.; Sullivan, Joseph A. *Análisis Matemático. Curso de Introducción*, *Volumen 1.* Segunda edición. Trillas. México. 1990. ISBN: 968-24-3837-3.

Hernández, Gerardo. *Miradas constructivistas en psicología de la educación.* Primera edición. Paidós Mexicana. México. 2006. ISBN: 968-853-659-8.

Indicadores del Sistema Educativo Nacional 2008. Primera edición. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). México. 2008. ISBN: en trámite.

Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). España. 2004. ISBN: 84-294-0580-1.

Maisner, Erik. *Algebra Elemental, Lógica y Conjuntos, Tomo I.* Facultad de ciencias. UNAM. México. 1994. ISBN: 968-36-3931-3.

Mayor, Juan; Suengas, Aurora; Gónzalez, Javier. *Estrategias metacognitivas. Aprender a aprender y aprender a pensar*. Primera reimpresión. Editorial Síntesis. España. 1995. ISBN: 84-7738-202-6.

Mederos A. Otilio; González R. Blanca Esther. *La Modelación en la educación Matemática.* Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo Coahuila, México. 2005.

Papalia, Diane E; Wendkos, Sally; Duskin, Ruth. *Desarrollo Humano.* Novena edición. McGrawHill Interamericana. México. 2005. ISBN 10:970-10-4921-7.

PISA en el Aula: Matemáticas. Primera edición. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). México. 2008. ISBN: 978-607-7675-04-4.

Reid, Martha; Pardo, Federico; Moreno, Manuel; Moreno, Ernesto; Suárez, Benigno. *Evaluación Continua.* Quinta reimpresión. México. 2003. ISBN: 968-436-051-7.

Resultados Nacionales de la Opción de Grado Modal en PISA 2006. Primera edición. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). México. 2008. ISBN: en trámite.

Rice, F. Philip. *Adolescencia. Desarrollo, relaciones y cultura.* Novena edición. Prentice Hall. España. 2000. ISBN: 84-8322-049-0.

Robledo, Roberto P. *Propuesta para el aprendizaje significativo de la Función cuadrática para el Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades. Tesis.* Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). México 2008.

Santrock, John W. *Psicología de la educación.* Segunda edición. McGrawHill Interamericana. México. 2006. ISBN 978-970-10-5635-6.

Vázquez, Josefina Z. *Nacionalismo y educación en México.* 2ª. Ed. corr. y aum. El Colegio de México. Centro de Estudios Históricos. México. 2005, c1975. ISBN 968-12-0029-2.

Zorrilla, Juan F. El bachillerato mexicano: un sistema académicamente precario. Causas y consecuencias. Primera edición. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Instituto de Investigaciones Sobre la Universidad y la Educación (IISUE). México. 2008. ISBN: 978-970-32-5440-8.

Zorrilla, Juan. Desarrollo de habilidades Verbales y Matemáticas. I y II. Primera edición. AGO. México. 2008. ISBN: 978-968-9317-01-2.

MESOGRAFÍA.

Cantoral, Ricardo; Farfán Rosa María. *Matemática educativa: una visión de su evolución*. http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/5953/5363

Chaucanés, Alfonso; Amaya, Tulio; López, Albeiro; Therán, Eugenio. *Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento variacional.* http://es.scribd.com/doc/17188603/Estrategias-didacticas-para-potenciar-el-pensamiento-variacional

Desarrollo de habilidades metacognitivas para mejorar la comprensión de lectura. http://www.monografias.com/trabajos17/desarrollo-habilidades-metacognitivas/desarrollo-habilidades-metacognitivas.shtml

Díaz, Verónica; Poblete, Álvaro. *Competencias de profesores y estrategias didácticas en contextos de reforma educativa.* http://www.sinewton.org/numeros/numeros/68/investigacion_01.php

Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares 2011 (ENLACE) en Educación Media Superior (EMS). Estadísticas de resultados 2010. Por nivel de dominio. http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/?p=estadisticas2010

Grupo “El Paraíso”. Aplicaciones de las funciones reales. http://www.matematicas.net/paraiso/temas.php?id=0400afr

Información sobre México en PISA 2009, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). http://www.inee.edu.mx/archivosbuscador/2011/02/INEE-201102297-informacion_pisa2009.pdf

Maturano, Carla Inés; Soliveres, María Amalia; Macías, Ascensión. *Estrategias cognitivas y metacognitivas en la comprensión de un texto de ciencias.* http://ensciencias.uab.es/revistes/20-3/415-425.pdf

Montano, Alexis. *Estrategia didáctica para estimular el aprendizaje de Matemática en la secundaria básica.* http://www.monografias.com/trabajos67/estrategia-didactica-estimular-aprendizaje-matematica/estrategia-didactica-estimular-aprendizaje-matematica.shtml

Obaya, Adolfo; Ponce, Rubén. *La secuencia didáctica como herramienta del proceso enseñanza aprendizaje en el área de Químico Biológicas.* http://www.izt.uam.mx/contactos/n63ne/secuencia_v2.pdf

Raso, Arturo. *Los problemas en el área de matemáticas. Estrategias didácticas para su resolución.* http://www.cepgranada.org/~inicio/formacion/iiiencuentroggtt/comunicaciones/g170.pdf

Reforma Integral de la Educación Media Superior en México: La creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad. Enero 2008. http://www.profordems.cfie.ipn.mx/profordems3ra/modulos/mod1/pdf/modulo1/Sistema_Nacional_Bachillerato.pdf

Servicios Informativos y Publicitarios del Sureste, SIPSE. Artículo. Martes, 9 de Junio de 2009 "El 40 por ciento de los jóvenes que cursan Bachillerato desertan en el primer y segundo año no por causas económicas sino porque los programas de estudio no responden a sus intereses y necesidades…". http://www.sipse.com/noticias/2794-deserta-40-estudiantes-bachillerato.html

Viteri, Telmo. *Video: Educación por competencias.* http://www.youtube.com/watch?v=q_yk_KBiQg0

A N E X O S

ANEXO 1.
PROPUESTA DE EVALUACIÓN E INDICADORES, DEL TEXTO: PISA EN EL AULA. MATEMÁTICAS.

Trabajo individual.

Lista de estudiantes.	Elige adecuadamente las operaciones o procesos al resolver un problema.	Tiene iniciativa para proponer estrategias de solución.	Identifica, plantea y resuelve distintos tipos de problemas.	Resuelve problemas empleando más de un procedimiento.	Comunica con claridad las ideas matemáticas encontradas.
1.					
2.					
3.					

Fuente: PISA en el Aula: Matemáticas. Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto Nacional de la Evaluación de la Educación (INEE). Primera edición 2008. Impreso en México. P. 55.

Trabajo en equipo.

Lista de estudiantes.	Se interesa por el trabajo y se integra con sus compañeros.	Escucha las aportaciones de los compañeros con respeto y participa continuamente.	Propone soluciones a los problemas que se le presentan al equipo.	Argumenta para explicar, mostrar o justificar el problema.	Presenta, junto con su equipo, estrategias correctas de solución.
1.					
2.					

Fuente: PISA en el Aula: Matemáticas. Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto Nacional de la Evaluación de la Educación (INEE). Primera edición 2008. Impreso en México. P. 55.

ANEXO 1. (CONTINUACIÓN).
PROPUESTA DE EVALUACIÓN E INDICADORES, DEL TEXTO: PISA EN EL AULA. MATEMÁTICAS.

Tareas.

Lista de estudiantes	Realizó completa y autóno–mamente su tarea.	Empleó las herramientas matemáticas que conoce, para realizar su tarea y la hizo correctamente.	Reafirmó los conocimientos y habilidades mediante la tarea y la entregó a tiempo.	Realizó su tarea y comunica al grupo sus procedi–mientos de solución.	Profundizó en la tarea solicitada investigando en otras fuentes y esforzándose por presentarla de una manera creativa.
1.					
2.					
3.					

Fuente: PISA en el Aula: Matemáticas. Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto Nacional de la Evaluación de la Educación (INEE). Primera edición 2008. Impreso en México. P. 56.

Proceso y desarrollo de habilidades.

Lista de estudiantes	¿Muestra autonomía en la resolución de proble–mas?	¿Presenta avance para pasar de los procedi–mientos informales a los procedi–mientos expertos?	¿Reproduce procedimientos conocidos para resolver problemas, incluye la definición de hechos, la realización de cálculos y procedimientos de rutina?	¿Requiere la reunión de ideas y procedimientos matemáticos para resolver problemas no rutinarios en escenarios familiares?	Desarrolla una aproxima–ción matemática y capacidad de generaliza–ción.
1.					
2.					
3.					

Fuente: PISA en el Aula: Matemáticas. Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto Nacional de la Evaluación de la Educación (INEE). Primera edición 2008. Impreso en México. P. 54.

ANEXO 2.

RÚBRICAS PARA LA REVISIÓN DEL DIAGNÓSTICO.

Ejercicio 1, incisos a y b.

Escala.	Descripción.
1	En lugar del mcm, obtuvo un múltiplo del mcm.
2	Determinó bien el numerador o un múltiplo del mismo.
3	Determinó el mínimo común múltiplo (mcm).
4	Estudiantes que obtuvieron el resultado correcto.

Ejercicio 1, inciso c y d.

Escala.	Descripción.
1	Para la multiplicación realizó el producto "directo"; o en la división realizó el producto "cruzado".
2	Estudiantes que simplificaron la fracción obtenida y es correcta.

Ejercicio 2: $3x+8=9x-3$.

Escala.	Descripción.
1	Realizó cambio de signo (suma o resta) de los términos al pasarlos de un miembro a otro.
2	Realizó la reducción de términos semejantes.
3	Al despejar *"x"* su coeficiente lo escribió como denominador sin realizar cambio de signo.
4	El resultado es un número positivo.
5	El resultado es correcto.

Ejercicio 3: $-2x^2+7x\leq 7x-8$.

Escala.	Descripción.
1	Realizó cambio de signo (suma o resta) de los términos al pasarlos de un miembro a otro.
2	Realizó la reducción de términos semejantes.
3	Al despejar "x^2" su coeficiente lo escribió como denominador sin realizar cambio de signo, pero sí realizó cambio en el sentido de la desigualdad.
4	El resultado es la unión de dos intervalos.
5	El resultado es correcto.

ANEXO 2. (CONTINUACIÓN).
RÚBRICAS PARA LA REVISIÓN DEL DIAGNÓSTICO.

Ejercicio 4: $x^2y + 3xy + 7 = y - x^3$

Escala.	Descripción.
1	Al cambiar los términos de un miembro a otro realizó su cambio de signo.
2	Factorizó tomando a "*y*" como factor común.
3	El resultado es correcto.

Ejercicio 5, inciso a: $y = senx$

Escala.	Descripción.
1	Realizó una "buena" aproximación de la gráfica.
2	La gráfica tiene amplitud *1*.
3	El período de la gráfica es 2π.
4	El resultado es correcto.

Ejercicio 5, inciso b: $x^2 + y^2 = 4$.

Escala.	Descripción.
1	La gráfica es una circunferencia.
2	El radio es igual a *2* y su centro está en el origen.
3	El resultado es correcto.

Ejercicio 6: Consola Wii.

Escala.	Descripción.
1	Determinó una expresión general.
2	El resultado es correcto.
3	Resolvió el caso de aplicación.
4	Dio muestras de qué es lo que tiene que hacer y cómo lo va a realizar para encontrar la solución.
5	Reunió ideas y procedimientos matemáticos para resolver el problema.
6	Es claro y ordenado en su proceso de solución.
7	El resultado es correcto.

ANEXO 3.

RÚBRICAS PARA LA REVISIÓN DE LA EVALUACIÓN FINAL.

EJERCICIO 1.

Caso A. Problemas de concepto.

Valor 1. Determinó el mínimo común múltiplo (*mcm*) de las tres fracciones, como si el único operador fuera la suma.

Valor 2. No respetó el principio de igualdad.

Valor 3. Tiene problemas en el concepto de multiplicación.

Valor 4. La multiplicación la confunden con la división.

Caso B. Procedimiento equivocado.

Valor 1. Realizó la suma y el resultado lo multiplicó por $\frac{1}{4}$.

Valor 2. Simplificó la fracción.

Valor 3. Realizó bien el producto.

Valor 4. En la suma, en lugar del *mcm*, obtuvo un múltiplo del *mcm*.

Valor 5. Determinó bien el numerador o un múltiplo del mismo.

Valor 6. En la suma, determinó el *mcm*.

Valor 7. La suma es correcta.

Valor 8. El resultado es correcto.

Caso C. Procedimiento correcto.

Valor 1. Simplificó las fracciones.

Valor 2. Realizó primero la multiplicación de fracciones.

Valor 3. Después del producto, en lugar del *mcm*, obtuvo un múltiplo del *mcm*.

Valor 4. Después del producto, determinó bien el numerador o un múltiplo del mismo.

Valor 5. Después del producto, determinó el *mcm*.

Valor 6. El resultado es correcto.

ANEXO 3. (CONTINUACIÓN).

RÚBRICAS PARA LA REVISIÓN DE LA EVALUACIÓN FINAL.

EJERCICIO 2.

Caso A. Problemas de concepto.

Valor 1. No hay procedimiento sólo una respuesta equivocada.

Valor 2. Planteó una solución sin que tenga relación con el problema.

Caso B. Procedimiento equivocado (una ecuación).

Valor 1. Planteó una ecuación.

Valor 2. Al realizar el despeje de la variable realizó correctamente las operaciones en ambos miembros de la ecuación.

Valor 3. El resultado es correcto.

Caso C. Procedimiento equivocado (Una desigualdad).

Valor 1. Planteó una desigualdad en que el radicando es menor que cero.

Valor 2. Realizó cambio de signo (suma o resta) de los términos al pasarlos de un miembro a otro.

Valor 3. Al despejar *"x"* su coeficiente lo escribió como denominador sin realizar cambio de signo.

Valor 4. El resultado es correcto.

Caso D. Procedimiento correcto (Una desigualdad).

Valor 1. Planteó una respuesta "casi" correcta.

Valor 2. Planteó una desigualdad en la que el radicando es mayor que cero.

Valor 3. Realizó cambio de signo (suma o resta) de los términos al pasarlos de un miembro a otro.

Valor 4. Al despejar *"x"* su coeficiente lo escribió como denominador sin realizar cambio de signo.

Valor 5. El resultado es correcto.

EJERCICIO 3.

Valor 1. Hizo referencia a una ecuación.

Valor 2. Hizo referencia a la gráfica.

Valor 3. Mencionó una de las variables dependiente o independiente.

Valor 4. Hizo referencia a una fórmula.

Valor 5. Sólo se refirió a conceptos relacionados: dominio o rango.

Valor 6. Explicó con casos particulares o ejemplos.

Valor 7. Hizo referencia a que la gráfica de una Función sólo se intersecta con una recta vertical en un punto.

Valor 8. La caracterizó mediante los puntos de la gráfica en que la abscisa aparece sólo una vez.

Valor 9. La definió como una regla que asigna a cada elemento del dominio exactamente un elemento del contradominio.

Valor 10. El resultado es correcto.

ANEXO 3. (CONTINUACIÓN).
RÚBRICAS PARA LA REVISIÓN DE LA EVALUACIÓN FINAL.

EJERCICIO 4 “Función” (Regla de correspondencia).

Valor 1. Proporcionó una expresión algebraica.
Valor 2. Representó la Función por partes.
Valor 3. Escribió una parte de las imágenes de la Función.
Valor 4. Identificó correctamente las imágenes de la Función.
Valor 5. Indicó en algunos casos el dominio para la imagen.
Valor 6. Indicó correctamente el dominio de la Función.
Valor 7. El resultado es “casi” correcto.
Valor 8. El resultado es correcto.

EJERCICIO 4. (Gráfica)

Valor 1. Graficó algunos puntos de la Función.
Valor 2. Representó la gráfica con algunos segmentos de recta.
Valor 3. Representó la gráfica con segmentos de recta.
Valor 4. Indicó que algunos puntos no pertenecen a la gráfica.
Valor 5. Indicó los puntos que no pertenecen a la gráfica.
Valor 6. La gráfica es “casi” correcta.
Valor 7. La gráfica es correcta.

ANEXO 4.
RESULTADOS DEL DIAGNÓSTICO.

ARITMÉTICA.

TABLA 1. Estudiantes que realizaron el ejercicio 1, incisos a y b

Descripción / Operación	En lugar del mcm, obtuvo un múltiplo del mcm.	Determinó bien el numerador o un múltiplo del mismo.	Determinó el mínimo común múltiplo (mcm).	Estudiantes que obtuvieron el resultado correcto.
a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=$	32	28	32	27
b) $\frac{7}{6}-\frac{5}{4}=$	31	22	6	17 *

* Se consideró correcto si el estudiante simplificó la fracción.
Nota: Los resultados son tomados de un total de 38 estudiantes.

TABLA 2. Estudiantes que realizaron el ejercicio 1, inciso c y d

Descripción / Operación	Para la multiplicación realizó el producto “directo”. Para el caso de la división realizó el producto “cruzado”.	Estudiantes que simplificaron la fracción obtenida y es correcta.
c) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}=$	25	10 *
d) $\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}=$	23	23

* Se consideró correcto si el estudiante simplificó la fracción.
Nota: Los resultados son tomados de un total de 38 estudiantes.

ANEXO 4. (CONTINUACIÓN).
RESULTADOS DEL DIAGNÓSTICO.

ÁLGEBRA.

TABLA 3. Estudiantes que realizaron el ejercicio 2: $3x+8=9x-3$

Descripción	Total
Realizó cambio de signo (suma o resta) de los términos al pasarlos de un miembro a otro.	27
Realizó la reducción de términos semejantes.	23
Al despejar *"x"* su coeficiente lo escribió como denominador sin realizar cambio de signo.	20
El resultado es un número positivo.	16
El resultado es correcto.	16

Nota: Los resultados son tomados de un total de 38 estudiantes.

TABLA 4. Estudiantes que realizaron el ejercicio 3: $-2x^2+7x\leq 7x-8$

Descripción.	Total.
Realizó cambio de signo (suma o resta) de los términos al pasarlos de un miembro a otro.	9
Realizó la reducción de términos semejantes.	7
Al despejar "x^2" su coeficiente lo escribió como denominador sin realizar cambio de signo, pero sí realizó cambio en el sentido de la desigualdad.	2
El resultado es la unión de dos intervalos.	0
El resultado es correcto.	0

Nota: Los resultados son tomados de un total de 38 estudiantes.

TABLA 5. Estudiantes que realizaron el ejercicio 4: $x^2y+3xy+7=y-x^3$

Descripción.	Total.
Al cambiar los términos de un miembro a otro realizó su cambio de signo.	19
Factorizó tomando a "*y*" como factor común.	3
El resultado es correcto.	2

Nota: Los resultados son tomados de un total de 38 estudiantes.

ANEXO 4. (CONTINUACIÓN).
RESULTADOS DEL DIAGNÓSTICO.

GEOMETRÍA ANALÍTICA Y FUNCIONES.

TABLA 6. Estudiantes que realizaron el ejercicio 5, inciso a: $y = sen x$

Descripción.	Total.
Realizó una “buena” aproximación de la gráfica.	4
La gráfica tiene amplitud 1.	2
El período de la gráfica es 2π.	0
El resultado es correcto.	0

Nota: Los resultados son tomados de un total de 38 estudiantes.

TABLA 7. Estudiantes que realizaron el ejercicio 5, inciso b: $x^2 + y^2 = 4$

Descripción.	Total.
La gráfica es una circunferencia.	10
El radio es igual a 2 y su centro está en el origen.	1
El resultado es correcto.	1

Nota: Los resultados son tomados de un total de 38 estudiantes.

TABLA 8. Estudiantes que realizaron el ejercicio 6: Consola Wii

Descripción.	Total.
Determinó una expresión general.	3
El resultado es correcto.	3
Resolvió el caso de aplicación.	32
Dio muestras de qué es lo que tiene que hacer y cómo lo va a realizar para encontrar la solución.	0
Reunió ideas y procedimientos matemáticos para resolver el problema	0
Es claro y ordenado en su proceso de solución.	0
El resultado es correcto.	31

Nota: Los resultados son tomados de un total de 38 estudiantes.

ANEXO 5.

RESULTADOS DE LA SESIÓN: GRÁFICA DE RELACIONES Y DE FUNCIONES.

TABLA 1. Estudiantes que realizaron el ejercicio 1: ¿Cuál es la gráfica de las siguientes ecuaciones? a) $x^2 + y^2 - 25 = 0$ b) $x^2 - y = 0$

Descripción.	Total.
Realizó la gráfica en el programa GeoGebra y entregó una impresión.	1
Realizó la gráfica de la circunferencia considerando una escala en los ejes de coordenadas, pero no en la parábola.	6
Realizó la gráfica de la circunferencia y la parábola, pero no seleccionó una escala en los ejes de coordenadas.	22
El resultado es correcto. El estudiante realizó un bosquejo de las gráficas de la circunferencia y la parábola.	28

Observaciones: Un estudiante fotocopió la actividad ya resuelta de otro compañero. Un estudiante no realizó ninguna gráfica.

Nota: – Se considera correcto si el estudiante realizó la gráfica sin tomar en cuenta si seleccionó una escala en los ejes de coordenadas.

–Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 2. Estudiantes que realizaron el ejercicio 1: i) En la gráfica de $x^2 + y^2 - 25 = 0$ traza una *recta vertical* que pase por el *punto* (–3,0), ¿cuántos *puntos de intersección* tiene con la gráfica? y ¿Cuáles son sus *coordenadas*?

Descripción.	Total.
No indicó ninguna cantidad de puntos de intersección.	5
Escribió que el total de puntos de intersección son: dos.	22
Escribió correctamente las coordenadas de uno de los puntos de intersección y se equivocó en el otro.	2
Escribió correctamente las coordenadas de los dos puntos de intersección.	21

Observaciones: Un estudiante escribió que el total de puntos de intersección son: cuatro. Tres estudiantes escribieron equivocadamente las coordenadas de los dos puntos de intersección.

También, se tiene que de los 21 estudiantes que escribieron correctamente las coordenadas de los puntos de intersección sólo 17 habían reportado que la circunferencia y la recta vertical tienen dos puntos de intersección.

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

ANEXO 5. (CONTINUACIÓN).

RESULTADOS DE LA SESIÓN: GRÁFICA DE RELACIONES Y DE FUNCIONES.

TABLA 3. Estudiantes que realizaron el ejercicio 1: ii) En la gráfica de $x^2 + y^2 - 25 = 0$ traza una *recta vertical* que pase por el *punto* (3,0), ¿cuántos *puntos de intersección* tiene con la gráfica? y ¿Cuáles son sus *coordenadas*?

Descripción.	Total.
No indicó ninguna cantidad de puntos de intersección.	6
Escribió que el total de puntos de intersección son: dos.	22
Escribió correctamente las coordenadas de los dos puntos de intersección.	21

Observaciones: Un estudiante escribió que el total de puntos de intersección son: cuatro. Y cuatro estudiantes escribieron equivocadamente las coordenadas de los dos puntos de intersección.

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 4. Estudiantes que realizaron el ejercicio: 1 iii) ¿Qué característica observas en las primeras coordenadas de los puntos de intersección de la recta vertical con la gráfica?

Descripción	Total
No proporcionó ninguna explicación.	4
El estudiante hizo referencia a la diferencia en los signos que tienen las primeras coordenadas de los puntos de intersección de la recta vertical que pasa por el punto (–3, 0) y la recta vertical que pasa por el punto (0, 3), cuando ambas intersectan a la gráfica de la circunferencia.	8
El estudiante hizo referencia a que son iguales las primeras coordenadas de los puntos de intersección, cuando una recta vertical que pasa por el punto (–3, 0), intersecta a la gráfica de la circunferencia; y de manera análoga a la recta vertical que pasa por el punto (3, 0).	17
El estudiante respondió que son iguales las primeras coordenadas de los puntos de intersección, sin considerar aquellos que hacen referencia a la diferencia de signos que tienen las primeras coordenadas. (Ver nota 1).	14

Observaciones: Dos estudiantes no proporcionaron una explicación clara con respecto a las coordenadas, sólo escribieron: "*x*" o "la variable *x*". Y tres proporcionaron una respuesta correcta en relación a las coordenadas equivocadas que escribieron.

Nota: 1.– Los 14 estudiantes que caracterizaron las coordenadas de intersección como aquellas que tienen las mismas primeras coordenadas, se obtiene de restar de la diferencia 17 menos 3, estos 3 estudiantes proporcionaron una observación más: las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia con la recta vertical que pasa por el punto (–3,0) y la recta que pasa por el punto (3,0) son diferentes.

2.– Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

ANEXO 5. (CONTINUACIÓN).

RESULTADOS DE LA SESIÓN: GRÁFICA DE RELACIONES Y DE FUNCIONES.

TABLA 5. Estudiantes que respondieron: sí es Función, al ejercicio 1: iv) La relación dada por la ecuación $x^2 + y^2 - 25 = 0$ ¿es una Función?

Descripción.	Total.
No proporcionó ninguna respuesta.	4
Proporcionó una respuesta equivocada, pero una justificación válida.	1
Sólo proporcionó una respuesta negativa.	11
Proporciona una respuesta negativa, y una justificación acertada.	15

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 6. Estudiantes que respondieron: no es Función, al ejercicio 1: v) La relación dada por la ecuación $x^2 - y = 0$. ¿Es una Función? ¿Por qué?

Descripción	Total
No proporcionó ninguna respuesta.	6
Proporcionó una respuesta que no guarda una relación directa con el concepto de Función, pues escribió: “por que al despejar y no esta dada por una raíz cuadrada” (esta respuesta la escribieron todos los estudiantes, en este rubro).	6
Proporcionó una respuesta afirmativa, además una justificación correcta.	19

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 7. Estudiantes que realizaron el ejercicio 1: vi) ¿Cómo definirías una Función?, pero considerando las *coordenadas* de los puntos de su gráfica.

Descripción	Total
No proporcionó ninguna respuesta.	7
El estudiante proporcionó una definición de Función incorrecta.	6
Definió el concepto de Función haciendo referencia a la representación geométrica, bajo la condición de que al trazar una recta vertical ésta intersecta a la gráfica en exactamente un punto.	13
Definió el concepto de Función haciendo referencia al conjunto de puntos (pares ordenados) tal que no hay dos diferentes con la misma coordenada.	5
Se considera correcto si el estudiante define el concepto de Función.	18

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

ANEXO 5. (CONTINUACIÓN).

RESULTADOS DE LA SESIÓN: GRÁFICA DE RELACIONES Y DE FUNCIONES.

TABLA 8. Total de estudiantes que respondieron exactamente una cantidad determinada de ejercicios.

	Aciertos.							
	Ninguno.	1	2	3	4	5	6	7
Total de estudiantes.	1	3	2	1	6	9	6	3

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

ANEXO 6.

RESULTADOS DE LA SESIÓN: DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN.

TABLA 1. Estudiantes que realizaron el ejercicio 1, i): En una Función con raíz cuadrada, como $f(x)=\sqrt{16-x^2}$, para que esté *definida*, ¿cómo debe ser el radicando?

Descripción	Total
No escribió respuesta alguna	1
La respuesta que proporcionó consistió en escribir el símbolo: "+", en lugar de la palabra "positivo".	1
La palabra que escribió fue: "positivo"	29
Se considera correcto si el estudiante escribió "+" o "positivo"	30

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 2. Estudiantes que realizaron el ejercicio 1, i) –continuación–: Para determinar el dominio $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ ¿qué expresión tendrías que plantear para que se cumpla la condición anterior?

Descripción	Total
No escribió ninguna respuesta.	2
El estudiante escribió la expresión: $16-x^2 \leq 0$.	3
Al escribir su respuesta, se equivocó en un signo o en algún número.	8
El estudiante escribió la expresión: $16-x^2 \geq 0$.	18

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 3. Estudiantes que indicaron en el ejercicio 1, i) –continuación–: Proceso de solución para determinar el dominio $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ y llegaron a la solución : $-4 \leq x \leq 4$.

Descripción	Total
Escribió el procedimiento de solución.	18
Está incompleto el procedimiento de solución, sin embargo los límites del intervalo es correcto.	20
Escribió el proceso de solución y el intervalo de solución es correcto.	16

Observación. Un estudiante al escribir el dominio se equivocó en el signo del límite inferior.
Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

ANEXO 6. (CONTINUACIÓN).

RESULTADOS DE LA SESIÓN: DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN.

TABLA 4. Estudiantes que respondieron “cero” al ejercicio 1, ii): En una Función racional $g(x)=\frac{2x+3}{3x+12}$ para que “no” esté *definida*, es cuando el denominador sea igual qué valor.

Descripción	Total
La respuesta que escribió fue: “cero”.	3
La respuesta que proporcionó consistió en escribir el símbolo “0”, en lugar de la palabra “cero”.	26
El estudiante proporcionó una respuesta correcta: cero o “0”.	29

Observación: Un estudiante escribió la expresión algebraica: “$3x+12=0$”. Y otro no escribió ninguna respuesta.

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 5. Estudiantes que realizaron el ejercicio 1, ii) –continuación– ¿qué expresión plantearías para encontrar los valores que cumplan la condición anterior? (cuando el denominador sea igual a qué valor)

	Caso 1: planteamiento de una ecuación.			Caso 2: Solución de la ecuación.		
Descripción / Solución.	No escribió ningún resul–tado	Al escribir su resultado, se equivocó en un signo o en algún número.	Escribió la expresión algebraica $3x+12=0$	No escribió ningún procedi–miento.	El dominio es correc–to	Escribió el dominio y su proceso de solución.
x =–4	5	5	21	16	15	5

Observación: Un estudiante no escribió ninguna caracterización del concepto Función.

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

ANEXO 6. (CONTINUACIÓN).
RESULTADOS DE LA SESIÓN: DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN.

TABLA 6. Estudiantes que realizaron el ejercicio 1, iii) Con base a los ejercicios anteriores, ¿Qué es el dominio de una Función?

Descripción	Total
El estudiante, en su definición, hizo referencia a números ("reales", "valores" para los cuales está definida la expresión algebraica.	30
El estudiante, en su definición, hizo referencia a la expresión algebraica por medio de la palabra "ecuación".	11
El estudiante, en su definición, hizo referencia a la expresión algebraica por medio de la palabra "Función".	19
El estudiante no escribió ninguna caracterización del concepto de Función.	1
Se considera correcto si la definición que proporcionó el estudiante cumple con al menos dos de las características mencionadas anteriormente para referirse al concepto de Función.	15
El estudiante proporcionó sólo una característica del concepto de Función.	15

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 7. Estudiantes que realizaron el ejercicio 2, i) En la Función $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ cambia *f(x)* por *y*, ¿cómo quedaría la nueva expresión?

Descripción. / Solución.	Se equivocó al escribir el cambio de variable y escribió: "$x=\sqrt{16-y^2}$" o "$x=\sqrt{16-x^2}$" o "$y \quad \sqrt{16-x^2}$"	Realizó correctamente el cambio de variable: $f(x)=y$.
$y=\sqrt{16-x^2}$	4	27

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 8. Estudiantes que respondieron $-4 \le y \le 4$ al ejercicio 2. i) –continuación– Resuelve la expresión $y=\sqrt{16-x^2}$, en x.

Descripción	Total
No escribió ninguna respuesta	4
Escribió la solución sin ningún proceso de solución.	6
El estudiante resolvió la ecuación para "*x*" y escribió el proceso de solución.	21

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

ANEXO 6. (CONTINUACIÓN).
RESULTADOS DE LA SESIÓN: DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN.

TABLA 9. Estudiantes que respondieron $0 \leq y \leq 4$ en el ejercicio 2, ii) En la expresión obtenida anteriormente, determina para que valores está definida "y", el resultado es el rango.

Descripción	Total
No escribió ningún resultado.	5
El estudiante se equivocó al definir el rango de f y escribió: "RANGO $\leq y \leq 4$".	3
Escribió el proceso de solución para determinar el rango de f.	19
El estudiante escribió correctamente el rango de f: "$0 \leq y \leq 4$".	4

Observación: Un estudiante no escribió el rango de f, pero sí la idea: "Resultados correspondientes al dominio de la Función".
Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 10. Total de estudiantes que respondieron exactamente una cantidad determinada de ejercicios.

	Aciertos.										
	Ninguno.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Total de estudiantes.	0	0	0	0	3	6	5	10	3	1	3

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

ANEXO 7.

RESULTADOS DE LA SESIÓN: UN PROBLEMA DE APLICACIÓN, FUNCIÓN CONTINUA Y FUNCIÓN DISCONTINUA, Y FUNCIÓN CRECIENTE Y FUNCIÓN DECRECIENTE.

TABLA 1. Estudiantes que realizaron la gráfica del problema de la tarifa del estacionamiento público: Encuentra una gráfica que represente la relación entre el tiempo y el costo.

Descripción	Total
Graficó algunos puntos de la Función	25
Representó la gráfica con “algunos” segmentos de recta.	16
Indicó que algunos puntos no pertenecen a la gráfica.	15
Representó la gráfica con segmentos de recta.	9
Indicó los puntos que no pertenecen a la gráfica	8
Graficó los segmentos de recta e indicó los puntos que no están en la gráfica.	4

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 2. Estudiantes que en el problema de la tarifa del estacionamiento público proporcionaron una expresión algebraica o fórmula, el dominio y el rango.

Descripción	Total
Proporcionó una expresión algebraica.	8
Representó la Función por partes.	8
Indicó correctamente las imágenes de la Función o se aproximó en su respuesta.	5
Indicó correctamente el dominio de la Función o se aproximó en su respuesta.	5
Son estudiantes escribieron una expresión algebraica, que incluyera todas las características mencionadas anteriormente.	2

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 3. Estudiantes que en el problema de la tarifa del estacionamiento público respondieron \$13 a la pregunta: ¿Cuál es el costo de estacionamiento si han transcurrido:

3 horas y 4 minutos?			3 horas y 53 minutos?		
No escribió ningún resultado.	El resultado que escribió es \$8.	El resultado que escribió es \$13.	No escribió ningún resultado.	El resultado que escribió es \$8.	El resultado que escribió es \$13.
11	10	8	15	2	14

Observación: En el caso 3 horas y 4 minutos, un estudiante escribió \$14, y otro escribió como resultado $\$3.\overline{3}$, este mismo estudiante en el caso de 3 horas y 53 minutos escribió como resultado: $\$7.4166 \approx \$7.42$

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

ANEXO 7. (CONTINUACIÓN).

RESULTADOS DE LA SESIÓN: UN PROBLEMA DE APLICACIÓN; FUNCIÓN CONTINUA Y FUNCIÓN DISCONTINUA; Y FUNCIÓN CRECIENTE Y FUNCIÓN DECRECIENTE.

TABLA 4. Estudiantes que a la pregunta: ¿será una Función continua o Función discontinua? respondieron: “discontinua”. (Problema: tarifa de estacionamiento público).

Respuestas.			Justificación de su respuesta.	
No escribió ningún resultado	Escribió como respuesta: “continua”.	Escribió como respuesta: “discontinua”	Escribió una justificación que no tiene que ver con “cortes”.	Justificó su respuesta con frases como: “porque hay cortes” o una respuesta análoga.
6	1	24	2	24

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 5. Estudiantes que a la pregunta: ¿será una Función creciente o Función decreciente? respondieron: “creciente”. (Problema de la tarifa del estacionamiento público).

Respuestas.			Justificación de su respuesta
El estudiante no escribió ninguna respuesta.	El estudiante escribió como respuesta: “decreciente”.	El estudiante escribió como respuesta: “creciente”.	El estudiante justificó su respuesta con frases como: “incrementos” o una respuesta análoga.
6	5	20	25

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

TABLA 6. Total de estudiantes que respondieron exactamente una cantidad determinada de ejercicios.

	Aciertos.							
	Ninguno.	1	2	3	4	5	6	7
Total de estudiantes.	0	0	1	1	6	12	3	1

Nota: Los resultados son tomados de un total de 31 estudiantes.

ANEXO 8.

RESULTADOS DE LA SESIÓN: OPERACIONES CON FUNCIONES.

TABLA 1. Estudiantes que escribieron una expresión algebraica en la suma de funciones polinomiales.

Descripción	Total
En su respuesta se equivocó en algún término.	4
Sabe reducir términos semejantes.	37
Su resultado es correcto.	33

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

TABLA 2. Estudiantes que respondieron: R, como dominio de la Función f.

Descripción	Total
No escribió nada.	1
Escribió otra respuesta.	1
El dominio de f escribió R.	35

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

TABLA 3. Estudiantes que respondieron: R, como dominio de la Función g.

Descripción	Total
Escribió otra respuesta.	2
El dominio de g escribió R.	35

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

TABLA 4. Estudiantes que respondieron: $R \cap R$ o R, como dominio de la Función f+g.

Descripción	Total
No escribió nada.	1
Escribió como respuesta R.	34
En el dominio de f+g escribió $R \cap R$.	27

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

ANEXO 8. (CONTINUACIÓN).

RESULTADOS DE LA SESIÓN: OPERACIONES CON FUNCIONES.

TABLA 5. Estudiantes que escribieron una expresión algebraica en la resta de funciones.

Descripción	Total
No escribió ningún resultado.	1
En su respuesta se equivocó en algún término.	14
Sabe reducir términos semejantes.	25
Su resultado es correcto.	22

Observación: los 22 estudiantes, que respondieron correctamente en la resta de polinomios, se obtienen de restarle 3 (estudiantes que se equivocaron al escribir algún término) a los 25 estudiantes que saben reducir términos semejantes.

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

TABLA 6. Estudiantes que respondieron: R∩R o R, como dominio de la Función f–g.

Descripción	Total
No escribió ningún resultado.	7
Escribió otra respuesta.	1
Escribió como respuesta R.	21
En el dominio de f–g escribió R∩R.	11
El resultado es correcto, si escribió R o R∩R.	29

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

TABLA 7. Estudiantes que escribieron una expresión algebraica en la operación de multiplicación de funciones polinomiales.

Descripción	Total
No escribió ningún resultado.	1
En su respuesta se equivocó en algún término.	5
Sabe multiplicar monomios.	26/(10)
Sabe ordenar sus productos.	28/(5)
Sabe reducir términos semejantes.	26/(7)
Su resultado es correcto.	24/(9)

Observaciones:
- Los estudiantes que tiene correcto su resultado son aquellos que cumplen con tres características: saben multiplicar, saben ordenar sus productos y saben reducir términos semejantes.
- Los números entre paréntesis corresponden a la cantidad de estudiantes que no saben realizar las operaciones.

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

ANEXO 8. (CONTINUACIÓN).
RESULTADOS DE LA SESIÓN: OPERACIONES CON FUNCIONES.

TABLA 8. Estudiantes que escribieron como respuesta R o R∩R, en la multiplicación de funciones polinomiales f×g.

Descripción	Total
No escribió nada.	7
Escribió otra respuesta.	10
Escribió como respuesta R.	20
En el dominio de f×g escribió R∩R	4
El resultado es correcto.	20

Observación: El total de los estudiantes que tienen resultado correcto son aquellos que escribieron como respuesta R o R∩R, pero hubo estudiantes que escribieron ambas respuestas las cuales están consideradas en el total de estudiantes que escribieron como respuesta R.
Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

TABLA 9. Estudiantes que escribieron una expresión algebraica en la división de funciones polinomiales.

Descripción	Total
En su respuesta se equivocó en algún término.	8
Faltó que escribiera algunos términos.	8
Sabe multiplicar monomios.	32
Sabe reducir términos semejantes.	28
Su resultado es correcto.	27

Observación: Los 27 estudiantes que tiene correcto su resultado son aquellos que saben multiplicar monomios y también saben reducir términos semejantes, pero sin considerar aquellos estudiantes que les faltó que escribiera algunos términos.
Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

TABLA 10. Estudiantes que respondieron en la operación de división de funciones polinomiales.

Descripción	Total
En su respuesta se equivocó en algún término.	4
El resultado es correcto.	33/(4)

El número entre paréntesis corresponde a la cantidad de estudiantes que no saben realizar las operaciones.
Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

ANEXO 8. (CONTINUACIÓN).
RESULTADOS DE LA SESIÓN: OPERACIONES CON FUNCIONES.

TABLA 11. Estudiantes que escribieron como dominio: $D_{\frac{f}{g}} = R - \{2\}$, de la división de las funciones f y g.

Descripción	Total
Escribió otra respuesta.	1
En su respuesta se equivocó en algún término.	2
Sólo escribió R	3
Escribió correctamente el resultado.	34

Observación: El estudiante que escribió otra respuesta fue la siguiente: *R={2}*.
Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

TABLA 12. Estudiantes que respondieron en la operación de composición de funciones.

Descripción	Total
Faltó que escribiera algunos términos.	5
En su respuesta se equivocó en algún término.	11
Realizó correctamente la sustitución de la variable x de f por g(x).	21
Hizo un desarrollo de la expresión.	1

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

TABLA 13. Estudiantes que proporcionaron una respuesta a la condición para determinar el dominio de f∘g.

Descripción	Total
En lugar de R escribió otra respuesta.	1
Relacionó la expresión $g(x) \in D_f$ con $x+2 \in R$.	36

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

TABLA 14. Estudiantes que proporcionaron el dominio de la composición de f∘g.

Descripción.	Total.
Se equivocó en su respuesta	11
Respondió correctamente a la pregunta.	26

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

ANEXO 8. (CONTINUACIÓN).
RESULTADOS DE LA SESIÓN: OPERACIONES CON FUNCIONES.

TABLA 15. Total de estudiantes que respondieron exactamente una cantidad determinada de ejercicios.

	Aciertos.								
	Ninguno.	1 a 8	9	10	11	12	13	14	15
Total de estudiantes.	0	0	2	2	7	7	11	5	3

Nota: Los resultados son tomados de un total de 37 estudiantes.

ANEXO 9.
RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN FINAL.

TABLA 1. Estudiantes que proporcionaron una respuesta al ejercicio 1: $\frac{5}{6}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}=$.

Descripción.	Total.
Caso A. Problemas de concepto.	
Determinó el mínimo común múltiplo (mcm) de las tres fracciones, como si el único operador fuera la suma.	3
No respetó el principio de igualdad.	29
Tiene problemas en el concepto de multiplicación.	2
La multiplicación la confunden con la división.	10
Caso B. Procedimiento equivocado.	
Realizó la suma y el resultado lo multiplicó por ¼.	36
Simplificó la fracción.	15
Realizó bien el producto.	21
En la suma, en lugar del mcm, obtuvo un múltiplo del mcm.	34
Determinó bien el numerador o un múltiplo del mismo.	32
En la suma, determinó el mcm.	20
La suma es correcta.	1 [*1]
La multiplicación y el resultado final son correctos.	7 [*2]
Caso C. Procedimiento correcto.	
Simplificó fracciones.	1
Realizó primero la multiplicación de fracciones.	3
Después del producto, en lugar del mcm, obtuvo un múltiplo del mcm.	3
Después del producto, determinó bien el numerador o un múltiplo del mismo.	3
Después del producto, determinó el mcm.	3
El resultado es correcto.	0 [*3]

Observaciones:

[*1] Se considera correcto si el estudiante simplificó la fracción. Los estudiantes que realizaron bien el algoritmo de suma fueron de 32.

[*2] Se considera correcto si el estudiante simplificó la fracción. Los estudiantes que realizaron bien el algoritmo de multiplicación fueron de 22.

[*3] Se considera correcto si el estudiante simplificó la fracción. El número de estudiantes que obtuvieron el resultado pero no simplificaron fueron 2

Nota: Los resultados son tomados de un total de 41 estudiantes.

ANEXO 9. (CONTINUACIÓN).
RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN FINAL.

TABLA 2. Estudiantes que proporcionaron una respuesta al ejercicio 2. $f(x)=\sqrt{2x-8}$.

Descripción.	Total.
Caso A. Problemas de concepto.	
No hay procedimiento sólo una respuesta equivocada.	27
Planteó una solución sin que tenga relación con el problema.	15
Caso B. Procedimiento equivocado (una ecuación).	
Planteó una ecuación.	7
Al realizar el despeje de la variable realizó correctamente las operaciones en ambos miembros de la ecuación.	3
El resultado es correcto de la ecuación.	1
El resultado es correcto del ejercicio.	2
Caso C. Procedimiento correcto (Una desigualdad).	
Planteó una respuesta “casi” correcta.	2
Planteó una desigualdad en que el radicando es mayor que cero.	2
Realizó cambio de signo (suma o resta) de los términos al pasarlos de un miembro a otro.	1
Al despejar *“x”* su coeficiente lo escribió como denominador sin realizar cambio de signo.	1
El resultado es correcto.	1

Nota: Los resultados son tomados de un total de 41 estudiantes.

TABLA 3. Estudiantes que explicaron que es una Función.

Escala	Descripción.	Total.
1	Hizo referencia a una ecuación.	13
2	Hizo referencia a la gráfica.	13
3	Mencionó una de las variables dependiente o independiente.	17
4	Hizo referencia a una fórmula.	11
5	Sólo se refirió a conceptos relacionados: dominio o rango.	4
6	Explicó con casos particulares o ejemplos.	1
7	Hizo referencia a que la gráfica de una Función sólo se intersecta con una recta vertical en un punto.	4
8	La caracterizó mediante los puntos de la gráfica en que la abscisa aparece sólo una vez.	0
9	La definió como una regla que asigna a cada elemento del dominio exactamente un elemento del contradominio.	0
10	El resultado es correcto.	4

Nota: Los resultados son tomados de un total de 41 estudiantes.

ANEXO 9. (CONTINUACIÓN).
RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN FINAL.

TABLA 4. Estudiantes que proporcionaron una respuesta al ejercicio 4. a) Encuentra una Función que describa el costo por enviar un paquete.

Descripción.	Total.
Proporcionó una expresión algebraica.	14
Representó la Función por partes.	18
Escribió una parte de las imágenes de la Función.	24
Identificó correctamente las imágenes de la Función.	2
Indicó en algunos casos el dominio para la imagen.	23
Indicó correctamente el dominio de la Función.	2
El resultado es “casi” correcto.	4
El resultado es correcto.	2

Nota: Los resultados son tomados de un total de 41 estudiantes.

TABLA 5. Estudiantes que proporcionaron una respuesta al ejercicio 4. b) Encuentra una gráfica que describa el costo por enviar un paquete.

Descripción.	Total.
Graficó algunos puntos de la Función.	41
Representó la gráfica con algunos segmentos de recta.	12
Representó la gráfica con segmentos de recta.	6
Indicó que algunos puntos no pertenecen a la gráfica.	10
Indicó los puntos que no pertenecen a la gráfica.	3
La gráfica es “casi” correcta.	10
La gráfica es correcta.	2

Nota: Los resultados son tomados de un total de 41 estudiantes.