UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta didáctica para fortalecer el aprendizaje de la Geometría Euclidiana en el bachillerato

T E S I S

Que para obtener el grado Académico de:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

Presenta:

Agustín González Flores.

Director de la tesis:

Dr. Carlos Torres Alcaraz

México, D. F. **Mayo del 2012**

A Vero
y a nuestros hijos:
Agustín, Andrés, Angel,
Camila y Arturito

Propuesta Didáctica para Fortalecer el Aprendizaje de

La Geometría Euclidiana en el Bachillerato

Lo que se pretende despertar
no es el deseo de creer
sino el deseo de encontrar,
que es todo lo contrario

Bertrand Russell

Si no puedo dibujarlo,
es que no lo entiendo

A. Einstein

Agradecimientos:

En primer lugar, quiero agradecer al Dr. Carlos Torres Alcaraz por haber aceptado la dirección de este trabajo así como por cada una de sus valiosas aportaciones para el mejoramiento del mismo. También quiero agradecer a la Mtra. Milagros Figueroa Campos, al Dr. Octavio Páez Osuna, al M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez, al Dr. Juan Fidel Zorrilla Alcalá y al Mtro. Mauro Solano Olmedo por sus valiosos comentarios para enriquecer el presente trabajo.

INDICE

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es una propuesta para fortalecer el aprendizaje de la geometría Euclidiana y también del álgebra, durante el primer semestre del bachillerato; está constituido por una secuencia didáctica formada por 99 actividades a realizar durante 24 sesiones. Dichas sesiones se desarrollan de la siguiente forma: 20 en el aula, dos prácticas de campo, una actividad experimental, y la observación y análisis de un video científico.

Para la elaboración de la propuesta consideré a la geometría Euclidiana como el tema central del cual se desprenden conceptos algebraicos a través de la *formalización* y *generalización* de conceptos geométricos (un ejemplo sería el planteamiento de la fórmula que generaliza el cálculo de áreas de triángulos al cálculo de áreas de polígonos regulares y posteriormente al de áreas de círculos).

Los objetivos de esta propuesta son que el alumno sea capaz de*: encontrar regularidades, generalizar, realizar analogías de algunas demostraciones geométricas y de otras algebraicas, razonar geométrica y espacialmente; y aplicar sus conocimientos para resolver problemas*. Dichos objetivos los pretendo alcanzar a través de una ***propuesta didáctica*** diseñada con actividades y acciones específicas, a ser realizadas por los estudiantes con diversos materiales, para que sean ellos quienes deduzcan los principales conceptos y resultados de la Geometría Euclidiana (por ejemplo: "*los ángulos opuestos por el vértice son iguales", "la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180° ", "el área de un triángulo es base por altura entre 2", "el área de un polígono regular de n lados es perímetro por apotema entre 2" y "el teorema de Pitágoras").* Lo anterior permite al estudiante, por un lado, comprobar los resultados por sí mismo *y no solo creerlos* porque los dice el maestro o porque están en los libros; y por otro lado, ***fortalecer*** el vínculo entre la geometría y el álgebra a través del proceso de *generalización* de algunos de dichos resultados.

Cada sesión de la propuesta es una oportunidad para que los estudiantes discutan, reflexionen y descubran los conocimientos respectivos a través de actividades de ***matemática recreativa*** (como por ejemplo: la determinación del área de un triángulo *doblando papel* o el trazo de parábolas *a través de marcas de dobleces sobre una hoja de papel albanene* o la construcción de polígonos regulares de ***n*** número de lados *a través de los reflejos de dos espejos* colocados estratégicamente sobre una hoja de papel con un segmento de recta dibujado en ella).

La propuesta también le permite al estudiante aprender a aplicar modelos matemáticos al enfrentarse a situaciones problemáticas reales (es decir, aprender a problematizar).

El trabajo consta de 3 capítulos. En el capítulo 1 describo el problema que pretendo combatir así como el contexto y la delimitación de la problemática de la educación matemática en nuestro país, además presento el marco teórico psicopedagógico sobre el que se sustenta esta tesis. En el capítulo 2 desarrollo la propuesta con la que pretendo contrarrestar la problemática especificada en el capítulo 1, ésta consiste en una secuencia didáctica y temática diseñada sobre los principales temas de la Geometría Euclidiana para ser implementada durante el primer semestre del bachillerato. En el capítulo 3 ofrezco un reporte sobre la aplicación de la propuesta en un grupo del plantel "José María Morelos y Pavón" del IEMS (Instituto de Educación Media Superior del D. F.), asimismo el capítulo incluye un comparativo (una tabla) sobre los resultados obtenidos al final del semestre entre 2 grupos (uno de aplicación, en el cual implementé la propuesta, y otro testigo al cual sólo le apliqué los instrumentos de evaluación diagnóstica y final y les impartí un curso que incluye menos temas de geometría Euclidiana y más de álgebra). El comparativo también contiene una tabla que nos permite contrastar el nivel de conocimientos y habilidades del grupo de aplicación antes y después de la implementación de la propuesta; lo que nos sirve para comprobar el grado de éxito de la aplicación de la presente tesis así como para ubicar algunos aspectos a mejorar en un futuro inmediato. La parte final del capítulo 3 incluye mis conclusiones con respecto a los resultados de la aplicación de la propuesta así como ciertas recomendaciones personales que considero podrían contribuir al perfeccionamiento de la misma y también incluyo una pequeña galería de imágenes en las cuales podemos apreciar los resultados de algunas de las actividades realizadas por los estudiantes durante las distintas sesiones..

Cabe mencionar que la primera sesión es un examen diagnóstico y la última un examen final y que los reactivos en ambos casos tienen la estructura de los contenidos en las pruebas de PISA, esto para tener instrumentos de evaluación equiparables (hasta cierto punto) con parámetros internacionales.

Este trabajo es resultado de las investigaciones realizadas a lo largo de los cuatro semestres de duración de la maestría Madems-Matemáticas (generación 2009 – 2010), así como durante nueve años de experiencia como docente de matemáticas a nivel medio superior. A través de este tiempo siempre he tenido como motivación personal el deseo de elevar la calidad educativa de la enseñanza de las matemáticas a nivel bachillerato en mi país.

Me parece muy importante fomentar la adquisición de cada conocimiento no como una receta sino más bien como una ***herramienta*** necesaria para que el estudiante pueda alcanzar, por sí mismo, la solución de determinados problemas utilizando sus conocimientos y sus habilidades lógicas y matemáticas.

Considero que gran parte de nuestra labor docente es recuperar y estimular esa curiosidad innata para comprender al mundo que todos tenemos desde pequeños, cuando somos muy “preguntones”, y que desafortunadamente la apatía de todo un sistema educativo se encarga de ir extinguiendo con el paso del tiempo.

CAPITULO I

En este capítulo expongo una de las principales problemáticas que prevalece durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en nuestro país a nivel bachillerato, así como sus principales consecuencias. Además presento **mi tesis** para contrarrestar dicha problemática a través del **fortalecimiento** del aprendizaje de la Geometría Euclidiana, lo que le permitirá a los estudiantes adquirir una base de conocimientos para alcanzar una mayor comprensión de los futuros cursos de Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo diferencial e integral.

1.1 Un problema en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en la EMS.

> **"**Respecto al estado de la investigación educativa en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en nuestro país, una de las características de las investigaciones de los niveles medios y superior que se realizan en México es que el énfasis se desplaza hacia ***la división de los contenidos*** de acuerdo con las disciplinas tradicionales, al mismo tiempo que **se abandonan los aspectos sociológicos, psicológicos y de interacción** en el aula propiamente dichos. Esta tendencia se nota más cuanto más se avanza en los niveles escolares. Así, en los estudios correspondientes al nivel de secundaria se empiezan a definir las disciplinas pero todavía están presentes algunos aspectos más generales del desarrollo individual, como son la resolución de problemas y el razonamiento matemático; mientras que en los estudios correspondientes al nivel superior, el trabajo está totalmente determinado por el contenido matemático definido de acuerdo con la división disciplinaria clásica. Así, para los niveles medios y superior, las temáticas abordadas son las siguientes: Álgebra, Geometría, Cálculo–análisis y Probabilidad. Las cuales se abordan mediante las siguientes herramientas didácticas: razonamiento matemático, comunicación en el aula, resolución de problemas, habilidades matemáticas, desarrollo curricular, estudios diagnósticos y evaluación del material didáctico" [1].

Como podemos apreciar en el párrafo anterior, el cual forma parte de los resultados de un estudio realizado por el IPN a nivel nacional en el año 2004, durante la enseñanza de las matemáticas en nuestro país prevalece una ***enseñanza fragmentada*** (es decir, cada rama por separado: *la geometría y el álgebra* principalmente). Una consecuencia

[1] García L. Angel y González P. Elsa. *Educación Matemática: Francia y México.* IPN (2004) p. 7

de esto es que la mayor parte de los estudiantes de nivel bachillerato en nuestro país *no alcanzan* los objetivos de aprendizaje ni de cada rama de las matemáticas por separado ni de éstas en su conjunto.

Para dar una idea de la magnitud de la problemática del aprendizaje de las matemáticas en nuestro país, recurrí a los resultados de las pruebas de la OCDE / PISA[2] para comparar el nivel de adquisición de las competencias matemáticas de nuestros estudiantes de 15 años con estudiantes (de la misma edad) de los demás países miembros de la OCDE.

El primer estudio PISA se llevó a cabo en el año 2000, éste centro su atención en la competencia lectora y reveló enormes diferencias entre unos países y otros a la hora de capacitar a los jóvenes para tener acceso a la información escrita, manejara, integrarla, evaluarla y reflexionar sobre ella.

> "El estudio PISA se concibe como una herramienta para contribuir al desarrollo del capital humano de los países miembros de la OCDE. Tal capital lo constituyen los conocimientos, destrezas y competencias (habilidades) que son relevantes para el bienestar personal, económico y social. La forma en que los sistemas educativos preparan a los estudiantes para desempeñar un papel como ciudadanos activos es un dato muy importante del *desarrollo* de una sociedad, y de un país. La evaluación de PISA permite obtener indicadores sobre la alfabetización de los escolares no tanto en término del currículo escolar como en el de los conocimientos y destrezas necesarios para la vida adulta" [3] .

---

2 La OCDE / PISA es: " El Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos; constituida por más de 30 países de todo el mundo a partir del año 1961. México ingresó a la OCDE en mayo de 1994 " .

3 http://www.Pisa-as-Problemas

(Tabla 1)[4] . Resultados de las pruebas PISA 2000, 2003 y 2006.

	Matemáticas				Competencia de lectura				Ciencias naturales			
	2000	**2003**	**2006**	**2009**	**2000**	**2003**	**2006**	**2009**	**2000**	**2003**	**2006**	**2009**
Alemania	490 (20)	503 (16)	504 (14)		484 (21)	491 (18)	495 (14)		487 (20)	502 (15)	516 (8)	
Luxem-burgo	446 (26)	493 (20)	490 (22)		441 (26)	479 (23)	479 (22)		443 (26)	483 (24)	486 (25)	
Austria	515 (11)	506 (15)	505 (13)		507 (10)	491 (19)	490 (16)		519 (8)	491 (20)	511 (12)	
Suiza	**529 (7)**	**527 (7)**	**530 (4)**		**494 (17)**	**499 (11)**	**499 (11)**		**496 (18)**	**513 (9)**	**512 (11)**	
Bélgica	520 (9)	529 (6)	520 (8)		507 (11)	507 (9)	501 (10)		496 (17)	509 (11)	510 (13)	
Finlandia	536 (4)	544 (1)	548 (1)		546 (1)	543 (1)	547 (2)		538 (3)	548 (1)	563 (1)	
Francia	517 (10)	511 (13)	496 (17)		505 (14)	496 (14)	488 (17)		500 (12)	511 (10)	495 (19)	
Italia	457 (24)	466 (26)	462 (27)		487 (20)	476 (25)	469 (24)		478 (23)	483 (24)	475 (26)	
Japón	557 (1)	534 (4)	523 (6)		522 (8)	498 (12)	498 (12)		550 (2)	548 (2)	531 (3)	
Canadá	533 (6)	532 (5)	527 (5)		534 (2)	528 (3)	527 (3)		529 (5)	519 (8)	534 (2)	
MÉXICO	387 (27)	385 (29)	406 (30)		422 (27)	400 (29)	410 (29)		422 (27)	405 (29)	410 (30)	
Países Bajos	-	538 (3)	531 (3)		-	513 (8)	507 (9)		-	524 (5)	525 (6)	
Turquía	-	423 (28)	424 (29)		-	441 (28)	447 (28)		-	434 (28)	424 (29)	
E U A	493 (19)	483 (24)	474(25)		504 (15)	495 (15)	-		499 (14)	-	489 (21)	

Nota: En la tabla anterior podemos apreciar el puntaje de algunos países miembros de la OCDE en cada área evaluada por la prueba PISA en los años 2000, 2003 y 2006 y, entre paréntesis, el lugar que ocupó cada país.

[4] http://www. Informe_PISA_Tablas_de_Clasificación

Los resultados de las pruebas PISA 2000, 2003, 2006 y 2009; muestran que nuestro país siempre ha ocupado el último lugar en adquisición y manejo de las competencias matemáticas, lectoras y científicas. Por otro lado, Finlandia, Japón, Canadá, Corea, Nueva Zelanda y Hong Kong se han mantenido a la cabeza. La estadística más atendida es aquélla que resume el rendimiento de los estudiantes mediante el promedio de los puntajes obtenidos.[5]

Veamos ahora, a qué se le llama competencias matemáticas. El investigador danés Mogens Niss propone la siguiente definición de competencia Matemática:

> "Es la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las Matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra matemáticos en los que las Matemáticas juegan o podrían jugar su papel"[6]

Traducido a un lenguaje más accesible, competencia matemática:

> "Es la habilidad para utilizar números y operaciones básicas, símbolos y formas de expresión del razonamiento matemático para producir e interpretar informaciones y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral".[7]

Las competencias sintetizan las diferentes *capacidades intelectuales* necesarias para resolver diversos tipos de problemas, solo cuando ciertas competencias formen parte del recurso intelectual de los estudiantes éstos podrán echar mano de ellas y resolver exitosamente determinados problemas.

Las competencias matemáticas identificadas por Niss y sus colaboradores en 1999, y en las cuales se basan las pruebas de PISA, son: *pensar y razonar matemáticamente* (incluye entender las preguntas y analizar los datos), *argumentar matemáticamente* (se refiere a desarrollar procedimientos intuitivos y construir y expresar argumentos matemáticos), *comunicarse en lenguaje matemático* (es la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático), *construir modelos matemáticos* (incluye estructurar la situación que se nos presenta como problema así como traducir la realidad a una estructura

---

[5] A nivel nacional también podemos apreciar una notable carencia de conocimientos matemáticos, así como de sus aplicaciones, en las pruebas nacionales ENLACE incluyendo la realizada en el año 2010 cuyos resultados ya han sido publicados.

[6] *www.edumat.uab.es/ipdmc/cap/PRESENTA**COMPETENCIAS**MAT.pdf*

[7] *www.juntadeandalucia.es/.../COMPETENCIAS_**BASICAS***

matemática y trabajar con ella), *plantear y resolver problemas* (comprende plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos; así como resolverlos utilizando una variedad de métodos), *hacer representaciones* (incluye codificar, traducir e interpretar entre diferentes tipos de objetos matemáticos y escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particular), *utilizar un lenguaje simbólico* (comprende interpretar el lenguaje simbólico y traducir del lenguaje natural al simbólico) así como *el uso de la tecnología de la información.*

"La evaluación PISA 2003 midió el rendimiento de los alumnos en cuatro subáreas matemáticas:

- Espacio y forma. Engloba los fenómenos espaciales y geométricos y las propiedades de las objetos.
- Cambio y relaciones. Engloba las relaciones entre variables y la comprensión de los modos en que se representan, incluyendo las ecuaciones.
- Cantidad; Engloba los fenómenos numéricos, así como los patrones y las relaciones cuantitativas; e
- Incertidumbre. Engloba los fenómenos estadísticos y de probabilidad" [8] .

PISA 2003 también evalúa la capacidad de resolución de problemas, veamos:

> "La evaluación OCDE / PISA 2003 se centra en medir la capacidad para resolver problemas del mundo real, de modo que va más allá de los casos y problemas que se plantean generalmente en las aulas. En el contexto del mundo real, a la hora de comprar, viajar, cocinar, gestionar su economía doméstica o valorar cuestiones políticas, entre otras cosas, los ciudadanos se enfrentan con frecuencia a situaciones en las que el utilizar un razonamiento cuantitativo, geométrico o espacial u otras aptitudes matemáticas les ayudará a aclarar, formular y/o resolver un problema"[9] .

[8] Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE). *Marcos Teóricos del proyecto de Pisa 2003.* España (2004). p. 14.

[9] Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE). *Marcos Teóricos del proyecto de Pisa 2003.* España (2004). p. 16.

El uso del lenguaje constituye un factor decisivo para el desarrollo de todas las personas, tanto para su comunicación social, para la expresión de sus pensamientos y sentimientos, como para la regulación de su conducta y para su representación del mundo.

> "La capacidad de leer, escribir, escuchar y hablar un lenguaje es la herramienta más importante de la sociedad humana. Cada lengua y cada utilización de la lengua posee un intrincado diseño que está vinculado de manera compleja a diferentes funciones. Que una persona sea competente en una lengua implica que conoce muchos de los recursos de diseño de la lengua y que sabe utilizar dichos recursos en muchas y variadas funciones sociales. De esta manera, considerar a las Matemáticas como un lenguaje implica que los estudiantes deben aprender los ***elementos característicos*** del Discurso Matemático (es decir: los términos, los signos, los símbolos, los procedimientos, las habilidades lógicas y matemáticas, etc.) y saber manejarlos para ***Resolver Problemas*** no rutinarios en una variedad de situaciones reales. Por desgracia, una persona puede conocer muy bien estos elementos característicos de las matemáticas y no entender su estructura ni saber cómo utilizarlos para resolver problemas" [10] **.**

PISA 2003 clasifica en 6 los niveles de adquisición de las competencias matemáticas, el nivel 3 está definido como: resolver problemas en los que haya que trabajar con representaciones múltiples que tengan que relacionarse entre sí (como, por ejemplo: un texto, una gráfica, una tabla o una fórmula), que incluyan algún tipo de interpretación así como la comunicación oral y por escrito de sus argumentos. De acuerdo con los resultados de las pruebas PISA 2003, 2006 y 2009, ***la mayoría de los estudiantes de EMS de nuestro país no alcanza este nivel.*** Es decir, entre otras cosas, les cuesta trabajo relacionar una tabla de datos con una fórmula o una fórmula con una gráfica para resolver un problema; así como relacionar sus conocimientos con aplicaciones prácticas.

[10] Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE). *Marcos Teóricos del proyecto de Pisa 2003. España (2004). p. 20.*

Frente a esta problemática, *ofrezco la siguiente alternativa para* ***fortalecer el aprendizaje de la Geometría Euclidiana*** *durante el primer semestre del bachillerato.*

1.2 Tesis

Mi propuesta es **una secuencia didáctica**[11] de estrategias de enseñanza, diseñada a partir de un orden sobre los principales temas de la geometría Euclidiana, que crea situaciones de aprendizaje que le permiten al estudiante **involucrarse** directa y permanentemente en la construcción de sus aprendizajes a través de actividades especialmente diseñadas para brindarle la oportunidad de pensar, crear, manipular, construir, proponer y contrastar sus propios resultados; además de mostrarle la enorme riqueza de las aplicaciones de las matemáticas al mundo real.

La secuencia también permite **fortalecer** el vínculo entre la Geometría Euclidiana y el Álgebra (que es la rama de las matemáticas con mayor grado de complejidad debido a la capacidad y el grado de abstracción que requiere) a través del estudio de ciertos temas que nos permiten **generalizar**[12] resultados aritméticos y geométricos. Por otro lado, para facilitar los aprendizajes durante la secuencia, los temas se encuentran ***enlazados*** conservando un orden de menor a mayor complejidad.

Mi propuesta está constituida por 24 sesiones y cada sesión consta de una breve exposición, del tema correspondiente, por parte mía y de ciertas actividades de aprendizaje diseñadas específicamente para que **sean los estudiantes** quienes *realicen cálculos, ordenen y analicen datos, construyan tablas, descubran patrones geométricos y algebraicos e incluso planteen fórmulas (es decir, generalicen).* En algunas sesiones, los estudiantes podrán relacionar distintas *representaciones matemáticas* de un mismo problema (particularmente, una tabla con una ecuación y así fortalecer el vínculo entre la Aritmética y el Álgebra; además de reforzar el nivel 3 de adquisición y manejo de las competencias matemáticas). En otras sesiones los estudiantes realizarán **analogías de demostraciones** (realizadas por el docente) de resultados geométricos muy conocidos (como "los ángulos opuestos por el vértice son iguales") a través de actividades como *el doblado de papel, el uso de espejos y las construcciones con regla y compás;* esto último para que comprueben los resultados y no solo los crean porque lo dice el maestro o un libro.

[11] "Didáctica" entendida como el conjunto sistemático de principios, normas, recursos, estrategias y procedimientos específicos para orientar a los alumnos hacia el aprendizaje, teniendo en cuenta los objetivos educativos.

[12] Estas ***generalizaciones*** representan el **vínculo** entre la *Geometría Euclidiana* y el *Álgebra,* pues al generalizar (por ejemplo) la fórmula para el área de un triángulo al área de un polígono regular surge la necesidad de introducir una expresión algebraica (fórmula) a partir de casos particulares.

Trabajé la propuesta sobre los siguientes tópicos (en este ***orden):***

- ***Igualdad de ángulos opuestos por el vértice*** (demostración geométrico – algebraica).
- **Suma de los ángulos internos de un triángulo** (demostración con doblado de papel) y de cualquier polígono (como *generalización).*
- **Áreas de rectángulos** (definición), **triángulos** (demostración con doblado de papel) **y polígonos regulares y círculos** (como *generalización).*
- **Criterios mínimos para construir un triángulo de forma única** (análisis de la posible construcción o no de cada caso).
- **La desigualdad del triángulo** (y su deducción al tratar de construir, con regla y compás, varios triángulos con longitudes propuestas para sus lados).
- **Los criterios de congruencia de triángulos** (y su deducción, al estudiar los criterios mínimos para construir un triángulo).
- **El concepto de "lugar geométrico"** y su utilidad para construir determinadas curvas con regla y compás o con doblado de papel.
- **Los conceptos de *Mediatríz, bisectríz, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola,* como lugares geométricos** y sus construcciones con regla y compás, doblado de papel o tachuelas e hilos, según corresponda.
- **Breve historia de Pitágoras y los Pitagóricos** (para brindar un contexto histórico del tema).
- **El teorema de Pitágoras** (y una de sus demostraciones geométrico-algebraica, así como algunas aplicaciones).
- **La medición de la Tierra, realizada por Eratóstenes hace 2300 años** (y su recreación, a escala, en el aula).
- **El teorema de Tales** (y una de sus demostraciones geométrico-algebraica, así como algunas aplicaciones).
- **La medición de altura de la pirámide de Keops, realizada por Tales de Mileto hace 2600 años** (y su recreación, a escala, en una pràctica de campo).

(además, se trabajan aplicaciones de todos estos conceptos en la solución de problemas)

Parte complementaria de esta propuesta es la recreación de dos experimentos en el salón de clases:

- El primero, realizado hace más de 2200 años por el griego Eratóstenes para *medir indirectamente* la circunferencia de nuestro planeta, es considerado uno de los resultados más impactantes de la historia de la ciencia. Para introducir el tema, inicio con la proyección y análisis del capítulo uno de la serie televisiva científica “Cosmos” (dirigida y producida por el astrónomo estadounidense Carl Sagan) en la cual se presenta el contexto histórico que rodeaba a nuestro personaje y cuáles fueron los razonamientos que originaron sus hipótesis y sus cálculos. Posteriormente, la parte experimental nos permite la recreación (a escala) de dicho experimento en el salón de clase, lo que nos brinda la oportunidad de que los estudiantes asuman el papel de un científico en busca de una verdad, manipulando materiales, realizando construcciones, haciendo mediciones, tomando decisiones, sugiriendo hipótesis y realizando comprobaciones o modificaciones.

- El segundo es la recreación (a escala) del experimento realizado por Tales de Mileto, hace aproximadamente 2600 años, como respuesta al problema planteado por el faraón (de aquel entonces) de determinar la altura de la gran pirámide de Egipto (la cual ya tenía unos 3000 años de antigüedad). Dicha recreación consiste en determinar *indirectamente,* de forma muy ingeniosa utilizando sombras y triángulos semejantes, la altura de distintos objetos que se encuentran en nuestro entorno como, por ejemplo, edificios, árboles, antenas y hastas de bandera.

1.3 Premisas

El plan de acción, la aplicación y la reflexión de una secuencia didáctica son componentes indispensables que influyen en los resultados del aprendizaje durante la práctica docente. Su ausencia o improvisación pueden conducir al fracaso o a una variedad de experiencias incongruentes con los propósitos académicos establecidos. Mediante ellas mi intensión es fortalecer una serie de conocimientos y habilidades por medio de una propuesta de trabajo en la que las estrategias didácticas y las formas de evaluación se organizaron en una secuencia temática cuyo orden fue dictado por un proceso de desarrollo lógico del aprendizaje, que va desde los más elementales hasta los más complejo. Además de destacarse la forma en que estos conocimientos se van entrelazando, se tomaron en consideración *los contenidos seleccionados, los aprendizajes esperados, los recursos didácticos, los tiempos disponibles, las características de los distintos desempeños académicos de los alumnos, así como algunas actividades alternativas ante posibles dificultades con determinados aprendizajes.*

La propuesta está concebida como un apoyo para el trabajo docente, el cual se complementa, verifica y enriquece a la luz del proceso de enseñanza-aprendizaje con los alumnos. De hecho, la propuesta es el resultado del trabajo desarrollado en tres distintas ocasiones. Inicialmente, en el primer semestre de la maestría, se trató de una propuesta puramente teórica (abstracta); posteriormente, en el segundo semestre, la implementé y en el proceso de reflexión la enriquecí dando lugar a una segunda versión; finalmente la segunda versión la implementé en el cuarto semestre, dando lugar la reflexión sobre esta última a la propuesta definitiva.

Es importante aclarar que el plan de acción de un curso no consiste en la distribución irreflexiva de contenidos y actividades; más bien, su elaboración debe considerar una filosofía y líneas de trabajo sustentadas en alguna teoría de enseñanza y aprendizaje. En mi caso, la propuesta está sustentada en el constructivismo y en los distintos niveles de desarrollo cognitivo estudiados por ***Piaget;*** así como en la solución de problemas. Estas consideraciones son las que han orientado mi actividad docente en forma permanente.

Mi plan de acción se centró en la aplicación de una secuencia didáctica que plantea situaciones de aprendizaje encaminadas al logro de los propósitos y aprendizajes esperados. La secuencia está integrada por 24 sesiones de trabajo (20 en el aula, dos prácticas de campo, una actividad experimental y la observación y el análisis de un video científico. Cada sesión didáctica ha sido elaborada tomando en consideración las actividades que constituyen cada uno de sus tres momentos:

Fase de inicio: Permite plantear la intención o propósito de la sesión, contextualizar e indagar sobre los conocimientos previos de los alumnos.

Fase de desarrollo: Está constituida por actividades de aprendizaje correlacionadas, que movilizan los conocimientos, habilidades y actitudes necesarios para lograr los aprendizajes esperados.

Fase de cierre: Constituye un espacio para concluir e identificar determinados aprendizajes, presentar resultados y hacer evaluaciones.

La presente propuesta está cimentada psicopedagógicamente en el enfoque **Constructivista** del aprendizaje, de modo que cada sesión inicia recordando los conocimientos previos específicos a partir de los cuales los estudiantes construirán, con apoyo del docente, los nuevos conocimientos a través, por ejemplo, de demostraciones de fórmulas geométricas y de ciertas actividades lúdicas y otras de matemática recreativa; asì como del análisis y la recreación de 2 de los experimentos màs conocidos de la historia. En cada sesión espero que los estudiantes comprueben la veracidad y el uso de sus aprendizajes más no su memorización sin sentido. Además cada clase se revisa el trabajo de los estudiantes y se les deja tarea para ser entregada la siguiente sesión, dicha tarea es revizada y devuelta con las indicaciones y comentarios pertinentes. De este modo intentamos fortalecer la adquisición de ciertas habilidades matemáticas como lo son *razonar, argumentar, comunicar, modelar, problematizar, encontrar patrones, generalizar y particularizar.*

El sustento psicopedagógico de mi propuesta son los distintos niveles de desarrollo cognitivo de un ser humano tal como los propuso **Jean Piaget .**

Jean Piaget (1896 - 1980)

El psicólogo suizo *Jean Piaget,* motivado por el deseo de entender y explicar la naturaleza del pensamiento y el razonamiento de los niños, dedicó más de 55 años de su vida al estudio de la conducta infantil.

> "Las investigaciones de Piaget, junto con el trabajo de su colega Barbel Inhelder, le llevaron a afirmar que el niño-adolescente normal atraviesa por una secuencia de cuatro etapas (cualitativamente diferentes) en su desarrollo cognitivo: la etapa senso-motora, la etapa preoperacional, la etapa de operaciones concretas y la etapa de operaciones formales[13] ".

> "Piaget descubrió que de la infancia a la adolescencia las operaciones mentales evolucionan del aprendizaje basado en la actividad sensorial y motora simple hasta el pensamiento lógico abstracto [14]"

[13] Oceano grupo editorial. *Enciclopedia de la psicopedagogía*. Oceano, España (1999). p. 69

[14] Papalia D. Olds. *Desarrollo Humano.* Mc. Graw Hill. México, (2005) p. 37

Justamente, este trabajo pretende fortalecer el dominio de las **operaciones formales,** que es la última etapa de dicho desarrollo cognitivo, a través de una secuencia didáctica y temática de estrategias de enseñanza que siguen un proceso gradual de desarrollo cognitivo de tal forma que se pueda sembrar la semilla de un pensamiento altamente lógico sobre conceptos abstractos e hipotéticos, así como sobre conceptos concretos.

Piaget identificó las características de las diferentes etapas de desarrollo cognitivo así:

- *Etapa de inteligencia senso-motora:* durante aproximadamente los 2 primeros años de vida los niños atraviesan esta etapa. Su aprendizaje depende casi por completo de experiencias sensoriales inmediatas y de actividades motoras. Es decir, durante estos primeros años los niños experimentan y exploran el medio ambiente confiando inicialmente en sus reflejos innatos y más adelante en sus capacidades motrices; así se preparan para luego poder *pensar* con imágenes y conceptos.
  "Elkind (1970) llama a la tarea cognitiva primordial de este período: *la conquista del objeto*[15] ".

> "Para Piaget el desarrollo cognitivo empieza con una habilidad innata para adaptarse al ambiente. Al buscar el pezón, palpar un guijarro o explorar los límites de una habilitación un niño pequeño desarrolla una imagen más precisa de su entorno, así como una mayor competencia para manejarlo [16]".

- *Etapa de pensamiento preoperacional:* en esta etapa (2 a 6 años) el niño utiliza un nivel superior de pensamiento respecto de la etapa anterior, llamado pensamiento simbólico conceptual, este consta de dos componentes: simbolismo no verbal y simbolismo verbal. Podemos apreciar el *simbolismo no verbal* cuando el niño utiliza los objetos con fines diferentes para los cuales fueron creados (esto significa que el niño puede utilizar objetos como *símbolo* de otros objetos). El *simbolismo verbal* aparece cuando el niño utiliza el lenguaje o signos verbales para representar objetos, acontecimientos y situaciones. Piaget afirmó que el lenguaje es esencial para el desarrollo intelectual.

---

[15] Rice P. *Adolescencia, desarrollo, relaciones y cultura.* Prentice Hall. España, (2000) p. 45
[16] Papalia D. Olds. *Desarrollo Humano.* Mc. Graw Hill. México, (2005) p. 39

"Elkind (1970) denomina a la tarea cognitiva primordial durante este período: *la conquista del símbolo*[17] *".*

> "Piaget descubrió, entre otras cosas, que un niño de cuatro años está convencido de que las monedas o las flores (por ejemplo) son más numerosas cuando se disponen en una línea recta que cuando se amontonan o apilan. Es decir, en esta etapa el niño carece de ciertas capacidades cognitivas [18]".

- *Etapa de operaciones concretas:* en esta etapa (7 a 11 años) el niño procesa la información de forma más ordenada que el niño de la etapa preoperacional; ya no solo utiliza el símbolo, es capaz de usar los símbolos de modo *más lógico* y, a través de la capacidad de *conservación,* llegar a generalizaciones atinadas. Es decir, el niño adquiere la capacidad intelectual de *conservar* cantidades numéricas: *longitudes y volúmenes líquidos*. Aquí por "conservación" se entiende la capacidad de comprender que la cantidad se mantiene igual aunque se varíe su *forma.* Antes, en la etapa preoperacional, por ejemplo, el niño ha estado convencido de que *la cantidad* de un litro de agua contenido en una botella alta y larga es mayor que la del mismo litro de agua en una botella baja y ancha. En cambio, un niño que a accedido a la etapa de las operaciones concretas está intelectualmente capacitado para comprender que la cantidad es la misma (por ejemplo un litro de agua) en recipientes de muy diversas formas.

El estudiante desarrolla también la capacidad de *conservar los materiales*. Por ejemplo: tomando una bola de arcilla y manipulándola para hacer varias bolitas ya es consciente de que reuniendo todas bolitas la cantidad de arcilla será prácticamente la bola original. A esta capacidad se le lama **reversibilidad.**

Se accede al último paso en la noción de conservación: *la conservación de superficies*. Por ejemplo, colocado frente a cuadrados de papel se puede dar cuenta que reúnen la misma superficie aunque estén esos cuadrados amontonados o aunque estén dispersos. Otra operación concreta es la *seriación (o el orden),* aquella que implica ordenar estímulos a lo largo de alguna dimensión (como la longitud).

---

[17] Rice P. *Adolescencia, desarrollo, relaciones y cultura.* Prentice Hall. España, (2000) p. 45
[18] Papalia D. Olds. *Desarrollo Humano.* Mc. Graw Hill. México, (2005) p. 40

"Elkind (1970) denomina a la tarea cognitiva primordial durante este período: *el dominio de las clases, las relaciones y las cantidades*[19] *".*

> "En matemáticas la idea de orden es fundamental pues aparece prácticamente en todos los conceptos y técnicas que se utilizan. Para los estudiantes que están en la etapa de las operaciones concretas es, junto con el de clasificación, esencial para comprender el concepto de número, así como para dominar las técnicas de conteo y conseguir una buena ejecución de las operaciones aritméticas. También es en este periodo cuando se aprende a reconocer las propiedades de las figuras geométricas, cuando se identifican las pequeñas como parte de otras más grandes, cuando se desarrolla la habilidad de describir verbalmente las propiedades que posee un cierto patrón, cuando se dibuja una cierta forma o figura a partir de información obtenida verbalmente y, en general, cuando se clasifica y se ordena [20] " .

- *Etapa de operaciones formales:* en esta etapa (12 a 17 años, que es la que nos preocupa fortalecer y utilizar en el presente trabajo), el adolescente empieza a realizar operaciones formales utilizando un pensamiento altamente lógico. El cerebro humano está potencialmente capacitado para formular pensamientos realmente abstractos y de tipo hipotético deductivo. Una vez dominadas las operaciones formales, sólo se producirá un *desarrollo cuantitativo.* En otras palabras, una vez que los adolescentes han aprendido las operaciones precisas para resolver problemas abstractos e hipotéticos, el aprendizaje posterior se refiere únicamente a cómo aplicar estas operaciones a nuevos problemas.

Un dato importante es saber que en la actualidad en los EEUU, el 50 % de los adolescentes no alcanzan este periodo de desarrollo e incluso el 50% de los adultos tampoco alcanzaron nunca esta etapa. El problema en nuestro país es aún más grave (como lo podemos comprobar en los resultados de las pruebas de la OCDE/PISA 2003, 2006 y 2009).

[19] Rice P. *Adolescencia, desarrollo, relaciones y cultura.* Prentice Hall. España, (2000) p. 46

[20] Alan Bishop. *Esculturación matemática.* Paidós. Barcelona, 2000. p. 7

"Elkind (1970) denomina a la tarea cognitiva central de este período: *la conquista del pensamiento, del uso de la lógica proposicional, del razonamiento inductivo, de los símbolos algebraicos, del planteamiento hipotético y del habla metafórica*[21] *".*

> "El periodo de operaciones abstractas o formales se caracteriza porque los jóvenes pueden pensar y razonar a partir de *sus propios pensamientos,* pueden, por tanto, realizar razonamientos abstractos, llegar a conclusiones teóricas y no necesitan utilizar siempre conceptos concretos para razonar. En esta etapa, los estudiantes ya tienen la capacidad de entender que los distintos conceptos y técnicas matemáticas que han aprendido están relacionados entre sí. Las matemáticas adquieren una estructura interna coherente que facilita al alumno trabajar con ellas, además de relacionarlas de manera clara con otras disciplinas [22]".

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe construirse a través de una gran diversidad de experiencias, si éstas se diseñan y estructuran de modo que ofrezcan al alumno la posibilidad de aprender los conceptos adecuados y desarrollar las habilidades necesarias, e incluso le permitan disfrutar del aprendizaje, este proceso se verá enriquecido.

> "Siempre se ha hecho énfasis en que aprender matemáticas es fundamental, pues con ellas se adquiere una *herramienta intelectual* muy útil para la vida cotidiana. Sin embargo, es importante enfatizar también que ***aprender matemáticas es (y debe ser) un fin en sí mismo***, porque contribuye de manera directa al desarrollo del *pensamiento lógico* del estudiante[23] " .

[21] Rice P. Adolescencia, desarrollo, relaciones i cultura. Prentice Hall. España, (2000) p. 47
[22] Alan Bishop. *Esculturación matemática.* Paidós. Barcelona, 2000. p. 9
[23] Alan Bishop. *Esculturación matemática.* Paidós. Barcelona, 2000. p. 10

El principio central de la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento es la *equilibración (* Piaget*,* 1990*;* García*,* 1997*).* Tal equilibración se lleva a cabo mediante dos procesos íntimamente relacionados y dependientes que son la *asimilación* y la *acomodación.*

Cuando un individuo se enfrenta a una situación nueva, por ejemplo a un problema matemático, se genera un desequilibrio en sus estructuras cognitivas y entonces inicia el proceso de *asimilación* de la situación con los esquemas cognitivos que posee. Es decir, intenta resolver tal problema mediante los conocimientos que ya tiene. Como resultado de la asimilación, el esquema cognitivo existente se reconstruye o expande para *acomodar* la situación en sus estructuras cognitivas.

La asimilación y la acomodación se muestran en la teoría piagetiana como herramientas cognitivas útiles y fundamentales en el restablecimiento del equilibrio cognitivo del individuo. El binomio asimilación-acomodación produce en los individuos una reestructuración y una reconstrucción de los esquemas cognitivos existentes. Cuando los individuos construyen su propio conocimiento, la equilibración expresa el proceso mediante el cual se produce tal construcción (señalándose así el *carácter dinámico* en la construcción del conocimientos por parte de los individuos).

El proceso de organización, adaptación y equilibración nos permite (en el caso de las *matemáticas*) partir del planteamiento y la solución de problemas *sencillos* para pasar con el desarrollo del curso a resolver problemas que presenten cada vez *un mayor grado de complejidad.* Esta forma de proceder la podemos aplicar en la construcción de estrategias didácticas no solo para el aprendizaje de las matemáticas, sino para el aprendizaje en cualquier área del conocimiento.

Lo anterior significa que basándonos en los conocimientos que los estudiantes ya poseen y junto con los recién adquiridos, podemos propiciar la *construcción conjunta* de nuevos aprendizajes y habilidades cada vez más complejos y así sucesivamente (como un remolino invertido pero constituido por conocimientos y habilidades).

En algunas de las estrategias de enseñanza utilizo una adaptación personal de la técnica didáctica conocida como ABP, mediante la cual el estudiante aprenderá a resolver problemas relativos a situaciones reales a través de lo que podemos llamar un modelo matemático (es decir, se plantea un problema y para resolverlo debemos primero dar una representación matemática a dicho problema, luego resolverlo matemáticamente y por último traducir dicha solución a la situación original).

Al respecto, cito las siguientes palabras:

> "El ABP es un formato educacional que se centra en la reflexión y aprendizaje que emanan de la base de un problema. Es una técnica que motiva el aprendizaje independiente y ejercita a los estudiantes a enfrentar situaciones complejas y a definir sus propias alternativas de comprensión en el contexto de problemas relevantes, con la intención de hacer lo más parecido a lo que ellos vivirán más tarde en el campo de trabajo. Es la forma de aprendizaje que propicia un entendimiento más profundo del material de conocimiento. El ABP es una estrategia que favorece el pensamiento crítico y las habilidades de solución de problemas junto con el aprendizaje de contenidos a través del uso de situaciones o problemas del mundo real [24] ".

[24] The Teaching Center, Belmont University . 2009.

1.4 Estrategias de Evaluación.

Uno de los factores más importantes del proceso de enseñanza aprendizaje es la forma de evaluar los aprendizajes de los estudiantes. En la práctica, la evaluación es un proceso sistemático que nos permite ubicar en 3 momentos (diagnóstica, formativa y compendiada) los distintos niveles de adquisición y manejo de los conocimientos y habilidades de los estudiantes. En el caso de la evaluación diagnóstica, ésta nos brinda la oportunidad de realizar las adecuaciones finales pertinentes (en nuestra propuesta) antes de iniciar el curso para reforzar aprendizajes específicos y así tratar de obtener los mejores resultados posibles.

La evaluación formativa la realizo en cada clase, a través de los siguientes puntos:

- La asistencia y la puntualidad,
- el cumplir con el material y con las actividades;
- la realización de los ejercicios y los problemas propuestos;
- la participación activa de los estudiantes durante las clases (lo cual indica un cierto grado de interés y un cierto nivel de comprensión del tema);
- el cumplimiento de las tareas sugeridas;
- los productos obtenidos realizados por los estudiantes (principalmente),
- la realización de las prácticas de campo; y
- la realización de las recreaciones en el aula.

Espero evaluar las competencias matemáticas correspondientes e indicadas en cada una de las sesiones. Asimismo pretendo evaluar, en su oportunidad, la habilidad mostrada por los estudiantes para resolver *problemas* cuya solución no sea obvia.

Para mí es muy importante evaluar productos realizados por los estudiantes, en ese sentido considero una práctica docente con una evaluación satisfactoria aquella que refleja los aprendizajes a través de resultados *visibles.* Por ejemplo, podemos comprobar que el área de un triángulo es “base por altura entre dos” mediante dobleces de papel, y con el producto final es muy claro comprobar si el alumno entendió plenamente o si le hace falta reforzar algún aprendizaje. Por tal motivo, la presente propuesta esta *llena de* ***actividades*** *que deben ser realizadas por los estudiantes* en las cuales se obtienen productos finales observables.

Desde esta perspectiva, con este trabajo espero contribuir a combatir la problemática educativa que en la actualidad enfrenta nuestro país.

1.5 Conclusiones:

En mi opinión, la importancia de un buen estudio de la *geometría euclidiana* radica en que permite fortalecer el aprendizaje del *álgebra, la geometría analítica y la trigonometría* (a través del estudio de las generalizaciones, las particularizaciones, las analogías y las abstracciones; así como del descubrimiento de patrones geométricos y aritméticos, el razonamiento geométrico y el planteamiento y la solución de problemas a través del lenguaje matemático).

La capacidad de abstracción constituye otro factor importante en el desarrollo intelectual del adolescente, el cual esperamos fomentar en este trabajo; puesto que se les brindará la oportunidad de representar aspectos cada vez más complejos y variados de la realidad.

Dada la gran importancia de las matemáticas como herramienta cognitiva que rige el proceso evolutivo de la especie humana *(su valor formativo)* y dado el hecho de poder servirnos de ellas en prácticamente todos los campos del conocimiento *(su valor utilitario),* me queda clara la importancia del lugar que ocupan dentro de los planes de estudio de todas las instituciones educativas.

La Geometría Euclidiana está incluida en los programas de estudio de los siguientes sistemas de bachillerato:

- primeros 2 semestres de las preparatorias del gobierno del D. F.,
- semestres 2 y 3 del CCH,
- tercer semestre del colegio de bachilleres y
- primeros 2 semestres del Conalep.

Capitulo II

Plan de desarrollo de la Secuencia Didáctica

La fuerza de las matemáticas radica en que son un medio para describir (y en muchas ocasiones resolver) problemas del mundo real mediante la interacción entre sus aspectos concreto y abstracto. Para cualquier profesor de matemáticas es un gran reto descubrir la simbiosis dialéctica entre estos dos aspectos y utilizarla en favor de un proceso gradual de su enseñanza-aprendizaje.

En los programas escolares de matemáticas existe una separación entre la parte concreta (la aritmética o los cálculos numéricos) y la parte abstracta (el álgebra o los cálculos simbólicos). A través de la presente propuesta pretendo disminuir dicha separación puesto que además de que la enseñanza de la geometría Euclidiana nos permite estimular *el razonamiento geométrico, las competencias matemáticas y los patrones matemáticos* que facilitan el aprendizaje del álgebra; también nos brinda la oportunidad de interpretar geométricamente algunos resultados algebraicos como, por ejemplo, las fórmulas para determinar el área del triángulo y de cualquier polígono regular, la fórmula para obtener el cuadrado de un binomio o el teorema de Pitágoras. Es decir, se fortalece el vínculo que existe entre la geometría Euclidiana y el álgebra.

Nociones tales como *construcciones con regla y compás, congruencia, semejanza, lugar geométrico y teorema de Pitágoras* (entre otras) son fundamentales para una gran cantidad de argumentos matemáticos posteriores y no debieran (en mi opinión) ser excluidas de los planes de estudio, como es el caso de las Preparatorias de la UNAM.

> "Las construcciones con regla y compás constituyen una buena forma de iniciar el análisis de una situación en un proceso matemático. Éstas pueden ser una buena forma de crear interés por las matemáticas en los estudiantes, desde su ingreso al bachillerato, puesto que hacer una construcción de este tipo es tanto creativo como inventivo, además si se deseara elaborar programas de computadora para dibujar figuras geométricas se requeriría saber cómo construirlas y cuáles son sus propiedades[25]"

Estoy consiente de que un hecho que es sorprendente para un estudiante podría no serlo para otro, pero aún así considero que existen bastantes hechos que podrían ser sorprendentes casi para cualquiera; lo cual depende en buena medida (según mi consideración) de nuestra habilidad para diseñar estrategias didácticas adecuadas.

---

[25] Hansen V. "Geometry in Nature". Wesley, Mass (2009) USA p.27

2.1 *LOS OBJETIVOS GENERALES DE LA SECUENCIA SON, QUE EL ESTUDIANTE:*

1. **Encuentre regularidades.** *Al descubrir patrones numéricos*, por ejemplo, a través de la elaboración de tablas de datos y del análisis de dichos datos (los cuales pueden ser, por mencionar un caso, *"la suma de los ángulos de un polígono regular*); y *al descubrir patrones geométricos* (al utilizar, por ejemplo, la fórmula del área del triángulo para encontrar el área de cualquier polígono regular).

2. **Aprenda a generalizar** (relacionando *elementos geométricos* con *cantidades numéricas* y *con expresiones algebraicas,* a través del descubrimiento de patrones y, como consecuencia, del planteamiento de fórmulas).

3. **Realice Analogías de demostraciones** de algunas fórmulas y resultados geométricos y algebraicos (como por ejemplo: *"los ángulos opuestos por el vértice son iguales" o "el teorema de Pitágoras"*).

4. **Razone geométrica y espacialmente** (al encontrar regularidades geométricas y algebraicas y al resolver problemas).

5. **Resuelva problemas** geométricos (y geométrico-algebraicos) en los que tenga que aplicar sus conocimientos (dándole un sentido a sus aprendizajes).

APRENDIZAJES ESPERADOS

> *" Un **aprendizaje esperado** es el elemento que define lo que esperamos (como docentes) que logren los estudiantes, expresado en forma concreta, precisa y visualizable. Es decir, es la desagregación operativa de una **competencia** para alcanzar su logro en forma sucesiva y ordenada"*

1. El estudiante aplica sus conocimientos y habilidades para resolver correctamente problemas geométricos (principalmente), pero también algebraicos.

2. El estudiante utiliza de forma adecuada fórmulas para calcular perímetros y áreas de figuras compuestas por círculos y polígonos.

3. El alumno organiza datos geométricos (como por ejemplo el números de lados de un polígono o la cantidad de triángulos en que se puede dividir un polígono) en *tablas* y como resultado del análisis de dichos datos descubre patrones y regularidades numéricas y crea *generalizaciones* a través del planteamiento de *una fórmula* o de *una ecuación.*

4. El estudiante utiliza la técnica de **doblado de papel** y se apoya en la aritmética y el álgebra para demostrar (es decir, comprobar por sí mismo) algunos de los resultados fundamentales de la geometría Euclidiana.

5. El estudiante utiliza la técnica de **doblado de papel** para visualizar conceptos propios de la geometría Euclidiana (como mediatrices, bisectrices, tangentes y parábolas).

6. El estudiante construye modelos matemáticos para encontrar la solución a problemas reales.

7. El estudiante utiliza de forma adecuada fórmulas y resultados propios de la geometría Euclidiana para resolver problemas geométrico – algebraicos.

SECUENCIA DIDÁCTICA

2.2 SESIÓN 1 - Aplicación de la evaluación diagnóstica

FASE DE APERTURA

ACTIVIDAD 1

Los objetivos para esta sesión son:

- identificar el nivel de adquisición y manejo de los conocimientos previos del estudiante con respecto a los requerimientos del curso.
- aprovechar la oportunidad de reestructurar determinadas estrategias de enseñanza de acuerdo con los resultados de la evaluación diagnóstica, en beneficio de los resultados finales a obtener.

ACTIVIDAD 2

Entrega del programa (contenidos, objetivos generales y criterios de evaluación.

FASE DE DESARROLLO

ACTIVIDAD 3

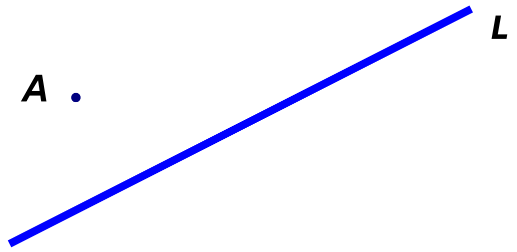
Aplicación de la evaluación diagnóstica, la cual se presenta a continuación.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA PARA MATEMATICAS 1

NOMBRE: ______________________ GRUPO: _________

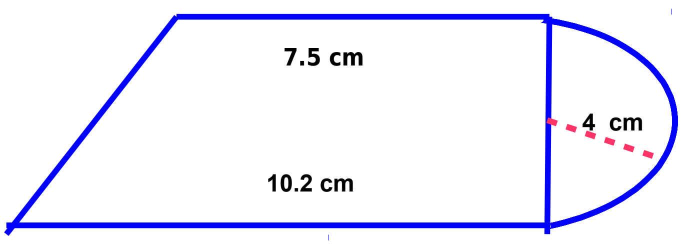
"La presente evaluación pretende que leas con atención, observes, razones y respondas a cada problema en forma individual. Representa una puerta de entrada al curso que me permitirá ubicar los distintos grados de adquisición y manejo de los conocimientos y las habilidades matemáticas a ser fortalecidos durante el desarrollo del mismo (como por ejemplo: razonamiento geométrico y espacial, descubrimiento y uso de patrones geométricos, resolución de problemas geométricos que implican construcciones con regla y compás, así como aplicación de fórmulas de áreas "

1) Construye, con regla y compás, la recta paralela a L que pase por el punto A



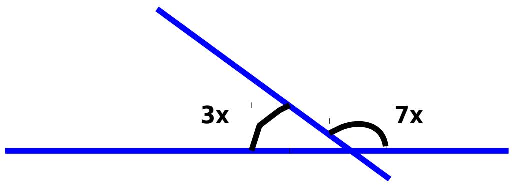
Las habilidades matemáticas a ser analizadas con el problema anterior, para ser desarrolladas durante el curso, son: Razonamiento geométrico, descubrimiento y uso de patrones geométricos y aplicación de sus conocimientos en la solución de problemas geométricos que implican construcciones con regla y compás.

2) ***Determina el área de la siguiente figura, sin utilizar calculadora. (considera pi = 3.1416)***



Las habilidades matemáticas a ser analizadas con este problema, para ser desarrolladas durante el curso, son: Razonamiento geométrico y espacial, aplicación de sus conocimientos para resolver problemas geométricos que implican el uso de fórmulas.

3) En la siguiente figura, ¿ cuántos grados vale x ? Explica porqué.



Las habilidades matemáticas a ser analizadas con este problema, para ser desarrolladas durante el curso, son: Razonamiento geométrico y algebraico, y resolución de problemas geométrico – algebraicos.

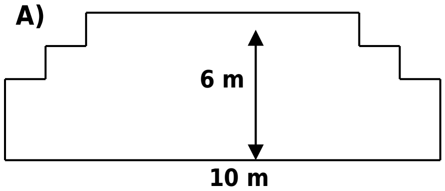
4) i) Enuncia el Teorema de Pitágoras y explícalo con un dibujo.

ii) Una pantalla de televisión mide 19 pulgadas de ancho y 15 de alto. ¿Cuántas pulgadas mide su diagonal, que es la medida que determina el tamaño de la TV ?

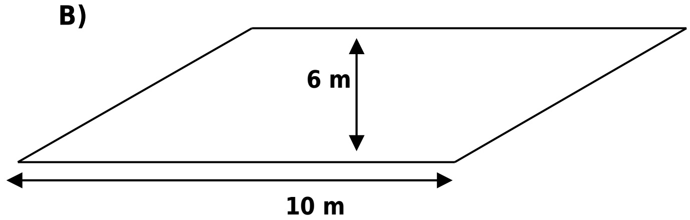
Las habilidades y competencias matemáticas a ser analizadas con este problema, para ser desarrolladas durante el curso, son: saber comunicar sus ideas por escrito, comprender el significado de generalización y aplicar sus conocimientos para resolver problemas.

5) De las siguientes figuras, menciona cuáles tienen igual área y justifica tu respuesta.

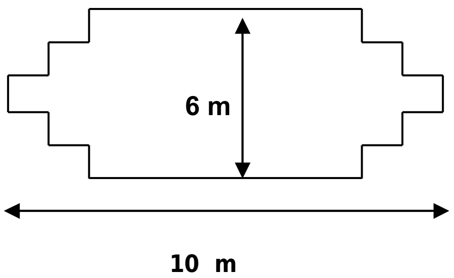
A)



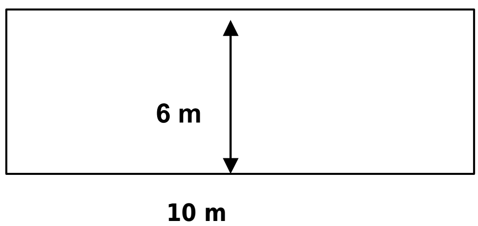
B)



C)



D)



Las habilidades y competencias matemáticas a ser analizadas con este problema, para ser desarrolladas durante el curso, son: pensamiento y razonamiento geométrico y espacial, descubrimiento y uso de patrones geométricos y resolución de problemas que involucren longitudes y perímetros.

FASE DE CIERRE

Reflexionar, con los estudiantes, sobre el nivel de complejidad del examen diagnóstico y encargarles su material para la siguiente clase:

Un cuaderno de cuadro grande, una hoja de color, tijeras y resistol.

2.3 SESIÓN 2 - TEMAS:

- *La Suma de los ángulos internos de cualquier triángulo,*
- *La Suma de los ángulos internos de cualquier cuadrilátero, y*
- *La Suma de los ángulos internos de cualquier polígono.*

Competencias y habilidades matemáticas a fortalecer:

Razonamiento geométrico, encontrar regularidades, generalizar y resolver problemas.

Material: Una hoja de color, regla, compás, escuadra, tijeras y resistol.

FASE DE APERTURA

ACTIVIDAD 4

Los objetivos para esta sesión son que el estudiante:

- Comprenda el significado **geométrico** de la propiedad:
  "los ángulos opuestos por el vértice son iguales".
- Comprenda que la suma de los 3 ángulos internos de todo triángulo es igual a 180º.
- Sea capaz de proponer una hipótesis sobre cuál es el resultado de sumar los ángulos internos de **cualquier** cuadrilátero *(generaliza).*
- Sea capaz de proponer una hipótesis sobre cuál es el resultado de sumar los ángulos internos de **cualquier** polígono de **n** lados *(generaliza).*
- Sea capaz de resolver algunos ejercicios que requieren de estos conocimientos.

FASE DE DESARROLLO

ACTIVIDAD 5

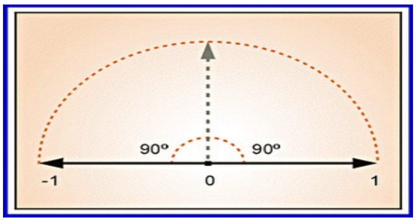
Utilizar la estrategia de *"lluvia de ideas"* para que los estudiantes recuerden los siguientes conocimientos:

a) ¿En cuántos grados se divide una circunferencia?

Respuesta: en 360º .

b) ¿Cuánto vale el ángulo que se forma sobre una recta?

Respuesta: 180º.



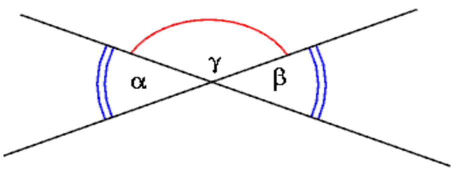
c) Si 2 o más ángulos forman una recta (éstos se conocen como ángulos suplementarios)

¿cuánto vale la suma de dichos ángulos? Respuesta = 180º.

(Necesarios para la comprensión del tema de esta sesión):

ACTIVIDAD 6

i) Demostrar *algebraicamente*, utilizando los conocimientos previos e interactuando con los estudiantes, que los ángulos opuestos por el vértice son iguales:



es decir: $\alpha + \gamma = 180°$

y $\beta + \gamma = 180°$

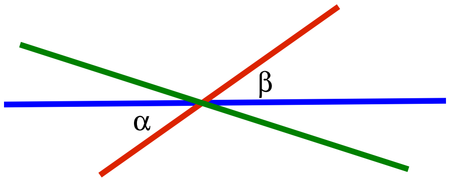
por lo tanto $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$

y en conclusión $\alpha = \beta$.

Analogía: invitar a algún estudiante a pasar al pizarrón a ***demostrar*** que los otros 2 ángulos, ***distintos*** de α y β, son iguales.

ii) (**Generalización** del resultado anterior). Preguntar:

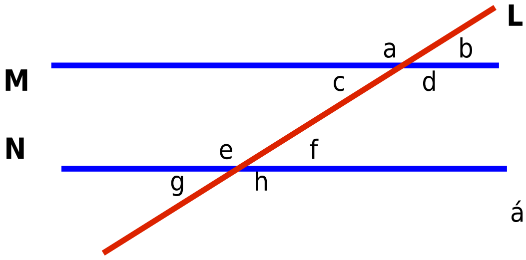
Dada la siguiente figura, ¿cómo demostrar que los ángulos α y β, son iguales.



(¿qué podemos concluir para *n* rectas que se cortan en un mismo punto?

)

iii) Preguntar: Dada la siguiente figura, ¿cuáles ángulos son iguales?

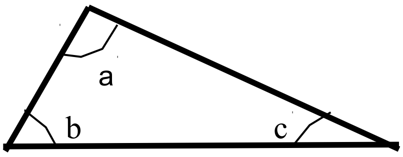


(M y N son paralelas, y L es transversal)

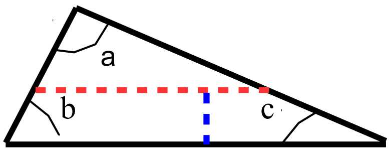
(**Respuesta :** por un lado son iguales los ángulos a, d, e, h; y por otro lo son b, c, f, g.

ACTIVIDAD 7 . Para propiciar el planteamiento de una **conjetura,** se pide a los estudiantes que dibujen en su cuaderno un triángulo con las medidas que gusten, que lo copien en una hoja de color, recorten este último en 3 partes (de modo que en cada parte quede un ángulo del triángulo) y que peguen dichas partes debajo del triángulo original de modo que cada ángulo esté enseguida de otro y de esa forma puedan comprobar **visualmente** que se forma una figura (¿Cuál?).

Veamos:

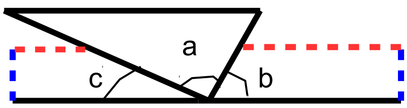


(triángulo original)



(sugerencia de marcas para los cortes)

La figura final deberá ser *parecida* a ésta :



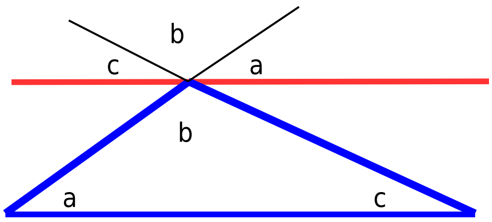
Después de esta actividad, qué podríamos *conjeturar* con respecto a la pregunta: ¿Cuál parece ser el valor de la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo?

Resp = 180 º .

ACTIVIDAD 8

Para demostrar que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es igual a 180°, primero dibujamos un triángulo cualquiera y nombramos sus ángulos como *a, b* y *c;* enseguida trazamos (con regla y compás) una recta paralela al lado horizontal del triángulo pero que pase por el vértice opuesto a dicho lado, finalmente prolongamos los dos lados del triángulo que forman dicho vértice (como se muestra en la siguiente figura):

Veamos:



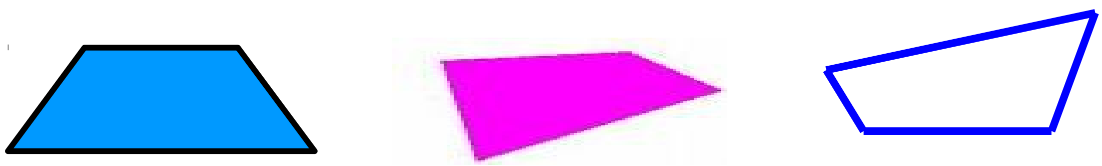
Por lo tanto, utilizando: *la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice,*
la igualdad de ángulos al cortar 2 paralelas con una transversal
y el valor de los ángulos suplementarios;
Concluimos que : $a + b + c = 180°$.

NOTA: Esta actividad refuerza el hecho de saber construir, *con regla y compás*, una paralela a un segmento de recta que pase por cierto punto dado.

ACTIVIDAD 9

Para evaluar la efectividad del proceso de aprendizaje de esta sesión los estudiantes tendrán que resolver el siguiente ejercicio:

Se dibujan en el pizarrón 3 cuadriláteros (un trapecio y 2 trapezoides, un rectángulo o un rombo no son recomendables porque la respuesta sería demasiado obvia) y se pide a los estudiantes que los copien en su cuaderno y que piensen cómo encontrar el valor de la suma de los ángulos internos de cada figura (***sin medir directamente*** los ángulos con un transportador).



Enseguida, trabajamos sobre la siguiente pregunta:

¿parecería haber algún ***patrón geométrico*** *y/o* ***numérico***?

ACTIVIDAD 10

Para llevarlos hacia las **generalizaciones,** se trabaja sobre las siguientes preguntas:

- ¿ Cuánto vale la suma de los ángulos internos de cualquier cuadrilátero?
- ¿ Cuánto vale la suma de los ángulos internos de todo pentágono?

FASE DE CIERRE

ACTIVIDAD 11 - ***[Hacia el Álgebra]***

En este caso, para apoyar el descubrimiento de la fórmula general, recomiendo que los estudiantes elaboren una tabla para observar con mayor claridad la existencia de un patrón numérico y así proponer un argumento algebraico. La tabla debe tener 3 columnas, en la primera colocamos el número de lados del polígono (empezando por el 3, que es el triángulo), en la segunda escribimos el número de triángulos que se pueden formar dentro del polígono correspondiente a cada renglón y en la tercera columna indicamos el valor de la suma de los ángulos internos del polígono correspondiente. A partir del análisis de dicha tabla, es muy probable que se alcancen los objetivos de aprendizaje.

Para concluir la elaboración de la tabla, una pregunta muy importante es:

¿Cuánto vale la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados ?

Veamos como deberá quedar la tabla:

Número de lados del polígono	Cantidad de triángulos que se pueden formar	Suma de ángulos internos del polígono
3	1	1 x 180º
4	2	2 x 180º
5	3	3 x 180º
. .	. .	. .
n	*n* - 2	***(n – 2) x 180º***

Sugerencias (para la actividad anterior):

1) considero más ***didáctico*** escribir los elementos de la tercera columna de la tabla anterior tal como de indica, para *facilitar* al máximo el descubrimiento del patrón y en consecuencia de la ***fórmula.*** *P*or ejemplo, no sería lo mismo escribir 180, 360, 540, ... ; y pedir a los estudiantes que descubran un patrón numérico que involucre a n.

2) Si se dispone de unos 15 minutos más de clase, es recomendable incluir una cuarta columna en la tabla que incluya el valor de cada ángulo en caso de que el polígono sea un polígono regular.

Para ello se puede trabajar sobre las siguientes preguntas:

(i) Tratándose de polígonos regulares de 3, 4 o 5 lados, ¿cuál es el valor de cada uno de sus ángulos?

(ii) Tratándose de un polígono regular de n lados, ¿cuál es el valor de cada uno de sus ángulos?

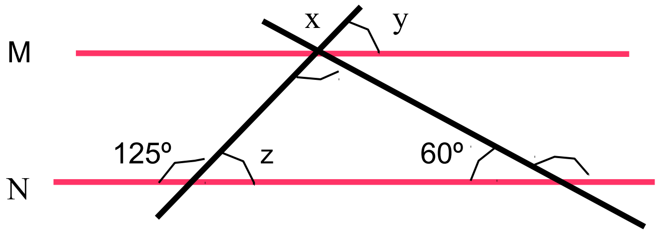
Veamos como deberá quedar la cuarta columna:

(SI EL POLÍGONO ES REGULAR) El valor de cada uno de sus ángulos es:	
(1 x 180º) / 3	triángulo equilátero
(2 x 180º) / 4	cuadrado
(3 x 180º) / 5	pentágono regular
. . .	
[(n – 2) x 180º] / n	***polígono regular de n lados***

Tarea 1. Observa y piensa.

En la siguiente figura, ¿cuántos grados miden los ángulos *x,* y, z ? Explica porqué.

(M y N son paralelas)



Hacia el Álgebra. Comentar con los estudiantes que, un problema *análogo es:*

Resuelve las siguientes ***ecuaciones*** de primer grado

125 + z = 180, 60 + 55 + x = 180 ; además y = z .

(Respuesta : z = 55º , y = 55º , x = 65º).

2.4 SESIÓN 3 - TEMA: CÁLCULO DE ÁREAS

(DE TRIÁNGULOS, POLÍGONOS REGULARES Y CÍRCULOS)

Competencias y habilidades matemáticas a fortalecer :

Razonamiento geométrico, encontrar regularidades, generalizar y resolver problemas.

Material: Una hoja de color tamaño carta, una regla y unas tijeras.

FASE DE APERTURA

ACTIVIDAD 12

Los objetivos para esta sesión son que el estudiante:

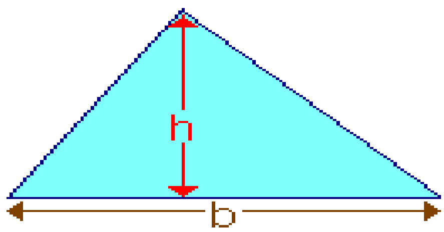
- comprenda el significado de la fórmula A = b h / 2 como expresión del área de un triángulo cuya base es (b) y cuya altura es (h);
- pueda deducir la formula para determinar el área de cualquier polígono regular y la fórmula para encontrar el área del círculo;
- sea capaz de resolver ejercicios que requieran de estos conocimientos.

FASE DE DESARROLLO

ACTIVIDAD 13

Utilizar la estrategia de *"lluvia de ideas"* para que los estudiantes recuerden los siguientes conocimientos:

- la fórmula para determinar el "área de un rectángulo" y
- la fórmula para determinar el "área de un triángulo" ;.



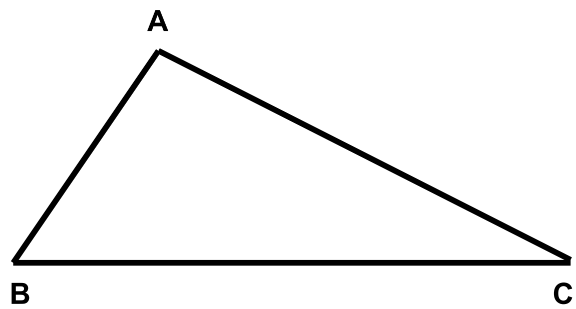
ACTIVIDAD 14

Solicitar a los alumnos su material didáctico y llevar a cabo la siguiente estrategia de enseñanza:

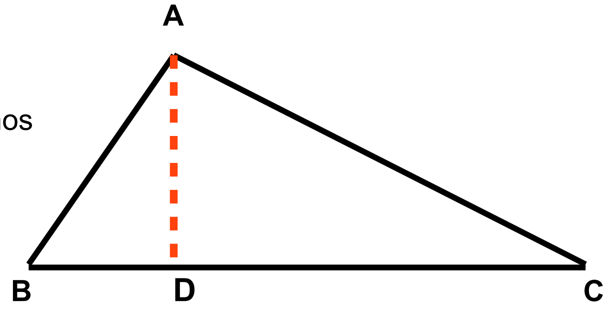
- se les pide que dibujen un triángulo en la hoja de color y que lo recorten;
- enseguida se les muestra visualmente la forma de hacer los dobleces (con el triángulo previamente recortado) para formar dos rectángulos iguales y así poder deducir la fórmula buscada a través del conocimiento del área del rectángulo.

Veamos las siguientes imágenes, que muestran los dobleces que debemos realizar para obtener 2 rectángulos *iguales* con cualquier triángulo:

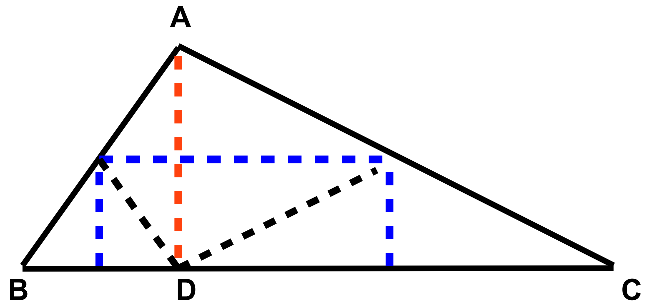
i) tenemos el triángulo (cuyos vértices son A, B y C) recortado:



ii) hacemos el doblez que representa la altura respecto de lado BC, desdoblamos y marcamos con D la intersección de dicha altura con BC.



iii) hacemos 3 dobleces, de modo que los vértices A, B y C coincidan con D.



Nota: de esta forma obtenemos 2 rectángulos iguales.

Hacia el Álgebra (Cálculos para obtener el àrea del triángulo).

El área del triángulo original es igual al área de 2 rectángulos iguales. Ahora bien, si b es la base del triángulo y h su altura; tenemos que la base de cada rectángulo es b/2 y su altura h/2.

Por lo tanto, el área del triángulo es igual a dos veces el área de uno de los rectángulos,

es decir $2 \cdot (b/2 \cdot h/2) =$

$= 2\,b\,h / 4 = b\,h / 2$ [base por altura, sobre 2]

que es justamente lo que queríamos demostrar.

ACTIVIDAD 15

Para propiciar que los estudiantes deduzcan la fórmula para el área de cualquier polígono regular, les ayudamos a notar que dicho polígono se puede dividir en tantos triángulos iguales como número de lados tiene.

Para lograr lo anterior, trabajamos sobre las siguientes preguntas:

¿ Cuál es la forma de calcular el área de un pentágono regular ?

Respuesta : $5 (b \cdot a) / 2 = 5 b (a/2) = (p \cdot a) / 2$ (a es el apotema y p el perímetro).

¿ Cuál es la forma de calcular el área de un hexágono regular ?

Respuesta : $6 (b \cdot a) / 2 = 6 b (a/2) = (p \cdot a) / 2$ (a es el apotema y p el perímetro).

ACTIVIDAD 16 - [*Hacia el Álgebra*]

En este caso, para apoyar el descubrimiento de una fórmula, es recomendable que los estudiantes elaboren una tabla para observar con claridad la existencia de un patrón numérico y así puedan proponer un argumento algebraico. La tabla contiene 3 columnas, en la primera colocamos el número de lados del polígono *regular* (empezando por el 5), en la segunda escribimos el número de triángulos *iguales* que se pueden formar dentro del polígono correspondiente a cada renglón y en la tercera columna escribimos la fórmula para calcular el área del polígono correspondiente. A partir del análisis de dicha tabla, es muy probable que se alcance uno de los objetivos de aprendizaje de esta clase.

Veamos como deberá quedar la tabla:

Número de lados del polígono regular	Cantidad de triángulos iguales que se pueden formar	Área del polígono regular
5	5	$5 b a / 2 = (5 b) a / 2$
6	6	$6 b a / 2 = (6 b) a / 2$
7	7	$7 b a / 2 = (7 b) a / 2$
. . .	. . .	. . .
n	n	$n b a / 2 =$ **$(n b) a / 2$**

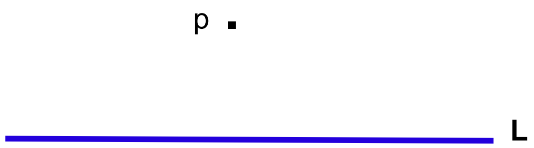
Nota: Observe que ***el área de cada polígono depende*** de su **apotema** y de su **perímetro**, y que en cada caso el área vale *perímetro* por *apotema* entre 2 (que es justamente la fórmula buscada).

ACTIVIDAD 17

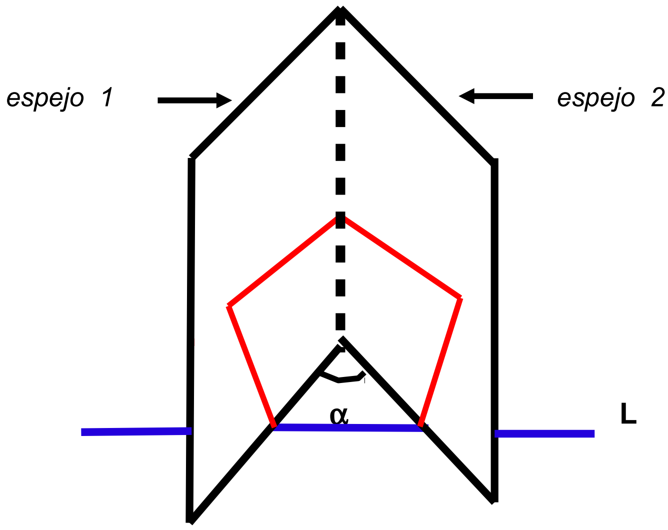
Para motivar la deducción de la fórmula del área del círculo de radio *r,* construimos un instrumento colocando 2 espejos encontrados de modo que podamos visualizar, a través de imágenes y reflejos, al cambiar el ángulo central (α) donde los espejos coinciden, distintos polígonos regulares (de 3, 4, 5, 6, ... lados).

Veamos:

i) primero dibujamos, en una hoja blanca, un punto p y una recta L, como se muestra enseguida:



ii) enseguida colocamos los dos espejos de modo que ambos coincidan en el punto p y atraviecen a L, como se muestra en la siguiente figura:



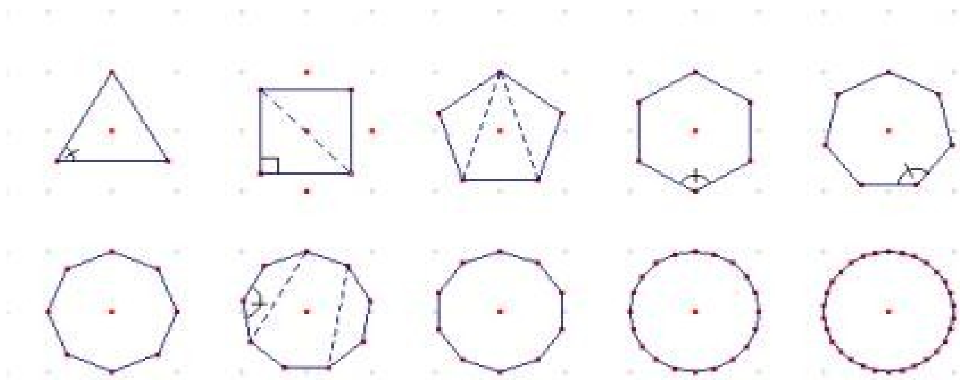
Nota: observe que al variar el ángulo central (α), cambia el polígono regular obtenido. Por ejemplo, si α = 90º obtenemos un cuadrado, si α = 72º obtenemos un pentágono regular (como se puede observar en la imagen anterior); si α = 60º obtenemos un hexágono regular. Por lo tanto, podemos hacer la siguiente pregunta a los estudiantes:

¿Cuánto debe valer α para obtener un polígono regular de n lados?

***Respuesta* =** 360º / n .

Lo anterior nos permite justificar, con los estudiantes, el hecho de considerar a un círculo como un polígono regular con una cantidad **infinita** de lados iguales. La idea es que los alumnos descubran la fórmula para determinar el área del círculo **generalizando** la fórmula que determina el área de un polígono regular de n lados cuando n crece ilimitadamente (es decir, cuando n *"tiende a* infinito").

Veamos:



Cálculos para el área del círculo:

El área del círculo es $(P \cdot a) / 2$ *, pero* $P = 2(\pi) r$ *y* $a = r$

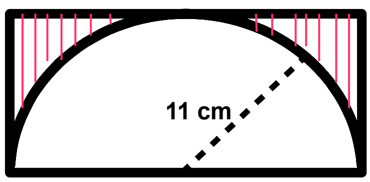
por lo tanto, el área del círculo es: $2(\pi) r \cdot r / 2 = \pi r^2$

FASE DE CIERRE

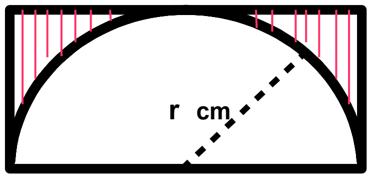
ACTIVIDAD 18

Para evaluar la efectividad del proceso de enseñanza en esta clase los estudiantes tendrán que resolver los siguientes problemas

1. Determinar el área de la parte sombreada de la siguiente figura.



2. Determinar el área de la parte sombreada de la siguiente figura.



TAREA 2. Descubre *la fórmula* para calcular el área de un trapecio rectangular.
(**Sugerencia:** recorta dos trapecios iguales y construye una figura cuya área sea fácil de determinar para así poder deducir el área buscada).

2.5 SESIÓN 4 - (Aplicaciones del cálculo de áreas – parte 1)

Competencias y habilidades matemáticas a fortalecer: Razonamiento geométrico y resolución de problemas.

Material: Regla y compás.

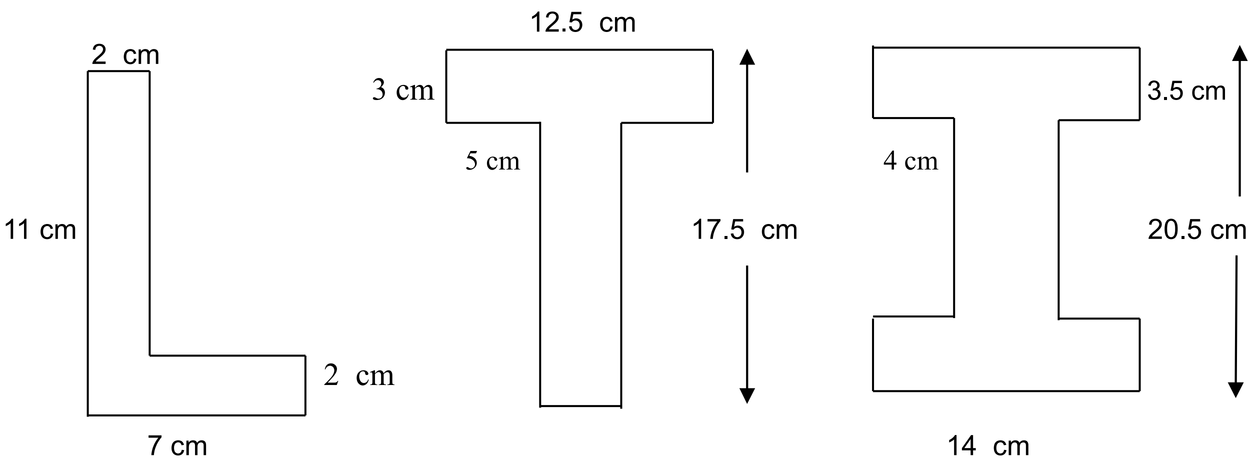
FASE DE APERTURA

ACTIVIDAD 19

El objetivo de esta sesión es: que el estudiante sea capaz de resolver ejercicios que requieren calcular el área de rectángulos.

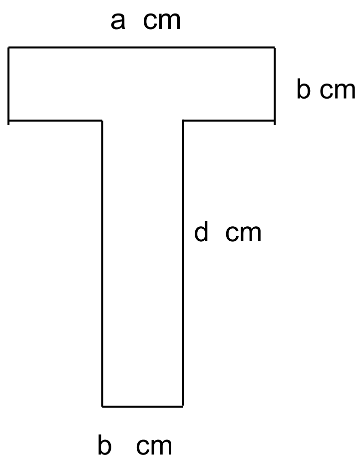
FASE DE DESARROLLO

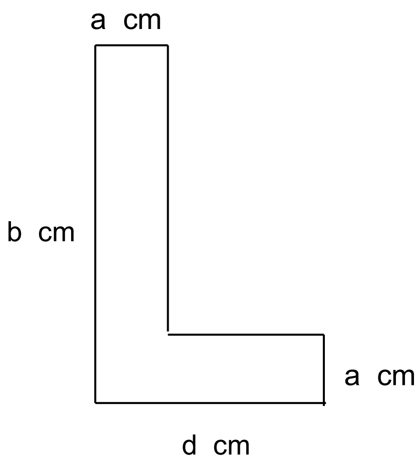
ACTIVIDAD 20 . Calcula el área de las siguientes figuras:



FASE DE CIERRE

ACTIVIDAD 21 - *[Hacia el Álgebra]* - Calcula el área de las siguientes figuras:





TAREA 3 (para entregar). Resuelve el siguiente problema.

Si el perímetro de un terreno rectangular es de 120 m y el largo del terreno mide el doble de su ancho. ¿Cuánto miden el largo y el ancho del terreno? (Traza un dibujo para explicar).

2.6 SESIÓN 5 - (Aplicaciones del cálculo de áreas – parte 2)

Competencias y habilidades: Razonamiento geométrico y resolución de problemas.

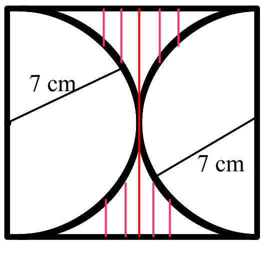
Material: Regla y compás.

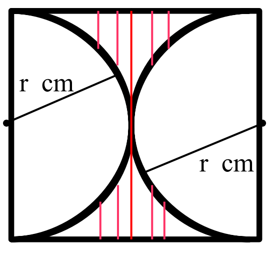
FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 22

El objetivo de esta sesión es que el estudiante sea capaz de resolver ejercicios que requieren calcular el área de cuadrados, rectángulos y círculos.

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 23

i) Calcular el área de la parte sombreada de las siguientes figuras:

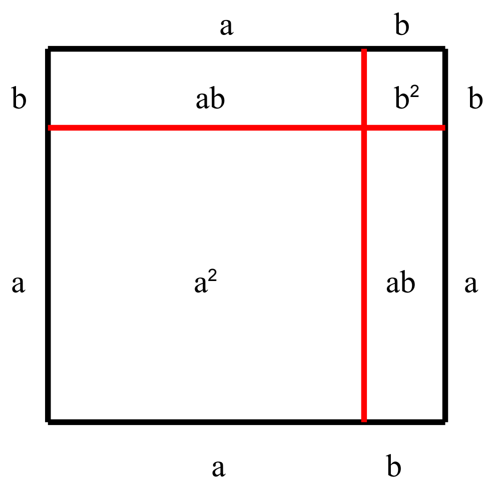




ii) ***Hacia el Álgebra.*** Deducir geométricamente, junto con los estudiantes, la fórmula del cuadrado de un binomio:

$$(a+b)^2 = ?$$

En primer lugar, construimos un cuadrado cuyos lados midan (a + b) ; enseguida dividimos dicho cuadrado en dos cuadrados (de áreas a^2 y b^2) y dos rectángulos (cada uno de área ab) como se muestra en la siguiente figura.



Por lo tanto, si consideramos el área de cada una de las partes obtenemos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2(ab) + b^2$$

que es justamente la fórmula que conocemos por el lado del álgebra.

FASE DE CIERRE

ACTIVIDAD 24

Analogía. Realizar un análisis geométrico que justifique las siguientes fórmulas (las cuales *parecen* puramente algebraicas):

i) $(a - b)^2 = a^2 - 2(ab) + b^2$

ii) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

TAREA 4. Investigar, para la siguiente clase, la propiedad conocida como:

"Desigualdad del triángulo".

2.7 SESIÓN 6 - (Construcciones con regla y compás – parte 1)

Competencias y habilidades: Razonamiento geométrico y construcciones con regla y compás

Material: Regla y compás.

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 25

Los objetivos de esta sesión son que el estudiante:

- aprenda a construir la mediatríz de un segmento, con regla y compás;
- sea capaz de construir (con regla y compás) figuras geométricas que requieran del trazo de mediatrices.

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 26

Explicar el concepto de *mediatríz de un segmento AB* así como la forma en que se construye con regla y compás (sin utilizar la regla para medir, sólo para unir puntos).

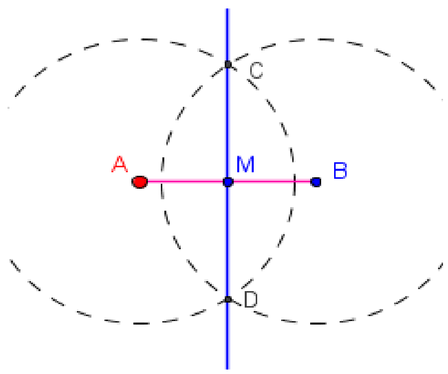
Definición.

La mediatríz de un segmento AB es la recta perpendicular a AB que pasa por el punto medio de dicho segmento.

Construcción:

La mediatríz se construye así: Dado un segmento AB, abrimos el compás con la longitud de AB y, colocándolo primero en A y luego en B, trazamos dos semicircunferencias; finalmente con la regla unimos los puntos en donde dichas semicircunferencias se cortan y esa recta es la mediatríz de AB.

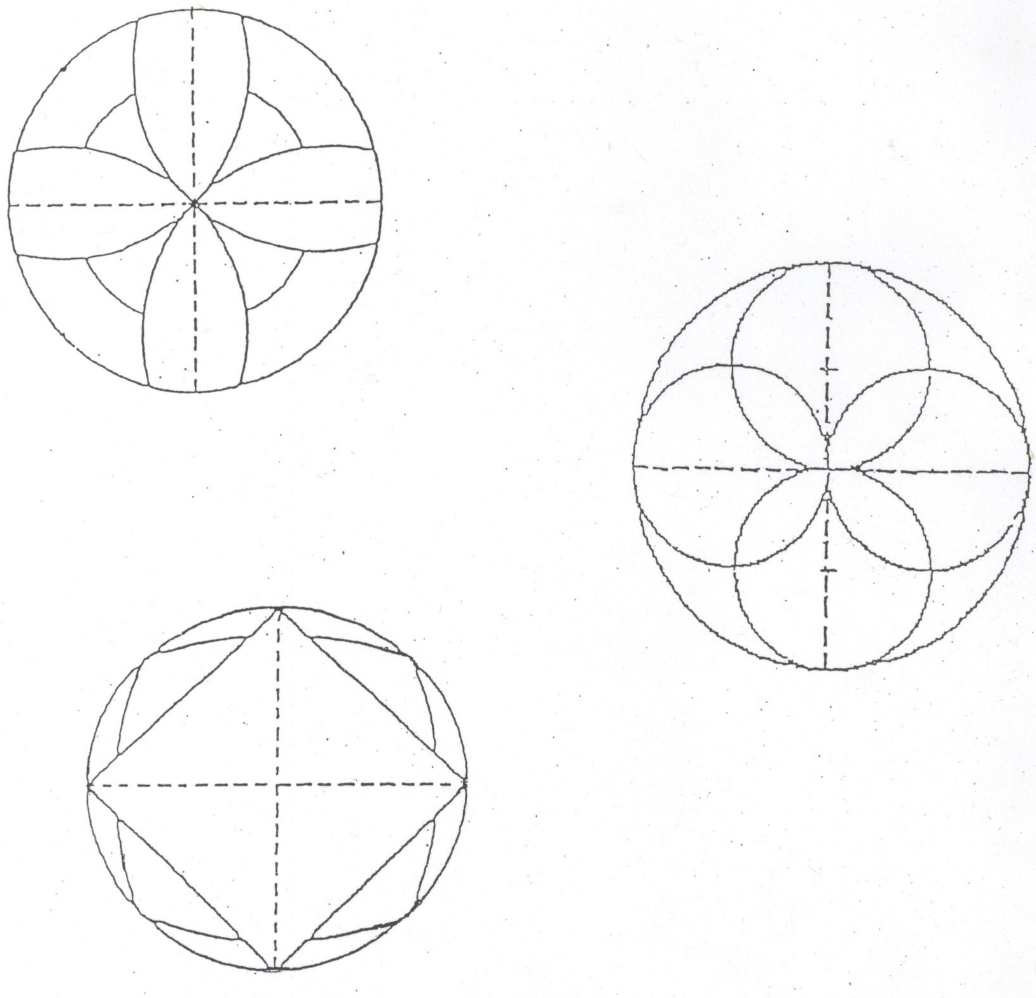
Veamos:



ACTIVIDAD 27

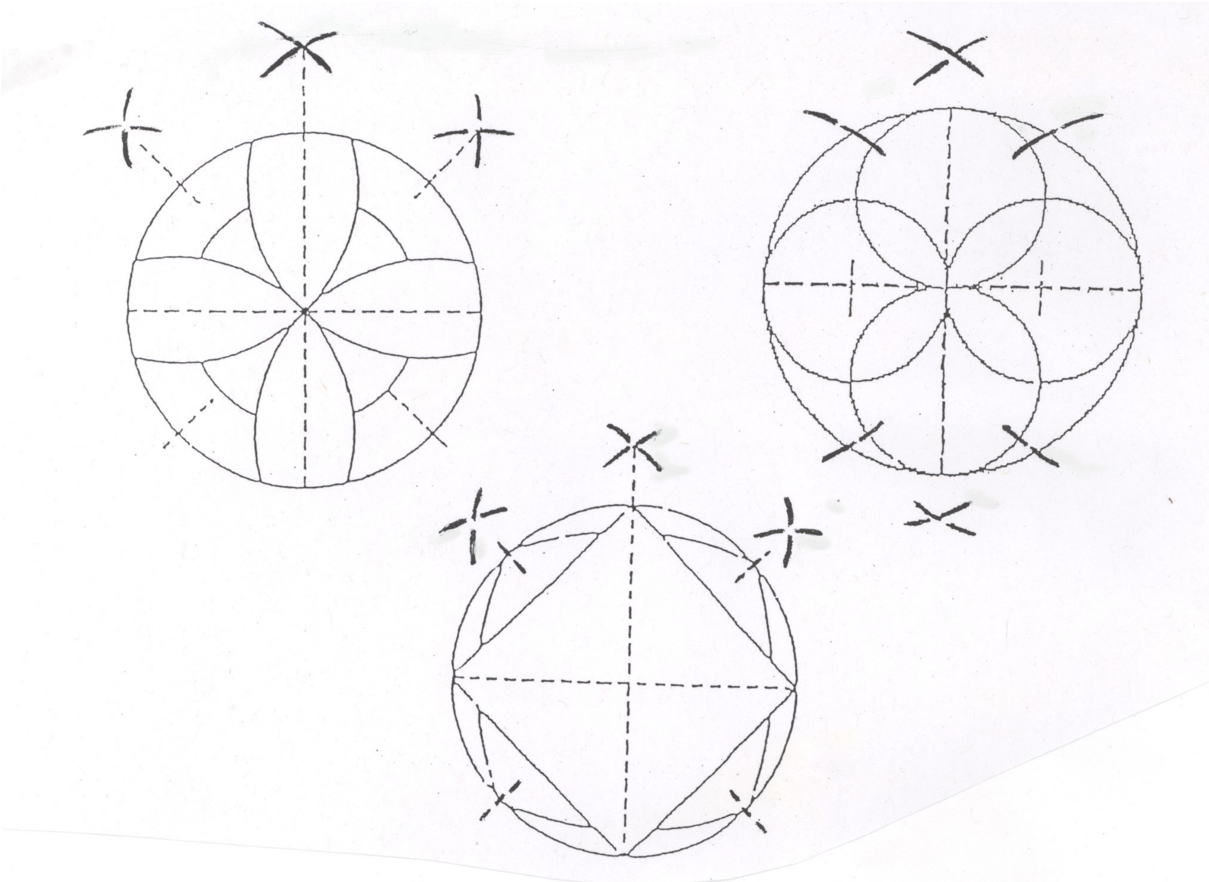
Construir las siguientes figuras, con regla y compás, de modo que el diámetro de cada figura sea el doble de la que se muestra.

Nota: *Observa que todas las figuras se pueden construir con ayuda del trazo de las mediatrices de ciertos segmentos.*



ACTIVIDAD 28 (Actividad Alternativa)

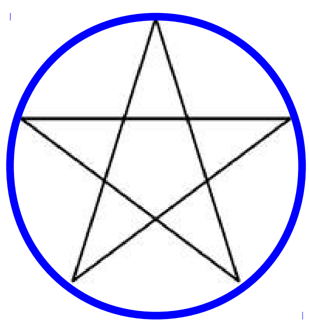
En caso de que observemos demasiada dificultad para realizar la actividad anterior, entonces invitamos a los estudiantes a construir dichas figuras pero auxiliándose de los trazos indicados a continuación.



FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 29

Revisar el trabajo de cada estudiante y dejar la siguiente tarea para la próxima clase.

TAREA 5. Construir la siguiente figura, con regla y compás y con ayuda de un transportador:



2.8 SESIÓN 7 - (Construcciones con regla y compás – parte 2)

Competencias y habilidades:

Razonamiento geométrico y construcciones con regla y compás.

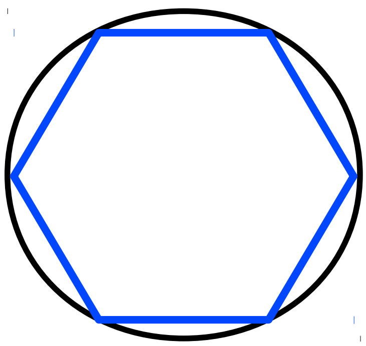
Material: Regla y compás.

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 30

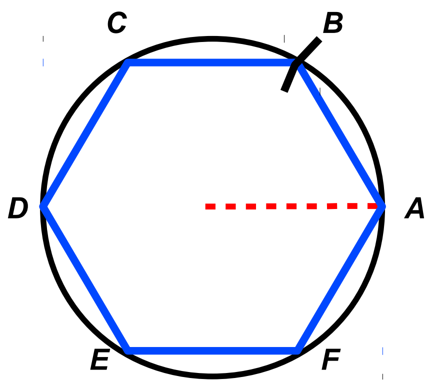
El objetivo de esta sesión es que el estudiante sea capaz de construir figuras geométricas utilizando una regla y un compás.

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 31

Explicar cómo se construye la siguiente figura:

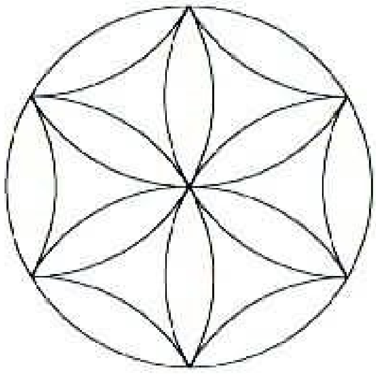


Explicación: *Trazamos una circunferencia y marcamos un radio para obtener el punto A, ahora colocamos el compás sobre A (con la abertura del radio) y trazamos el punto B, enseguida colocamos el compás en B y trazamos C y así sucesivamente; finalmente unimos los puntos A, B, C, D, E, F y A para obtener el hexágono regular.*

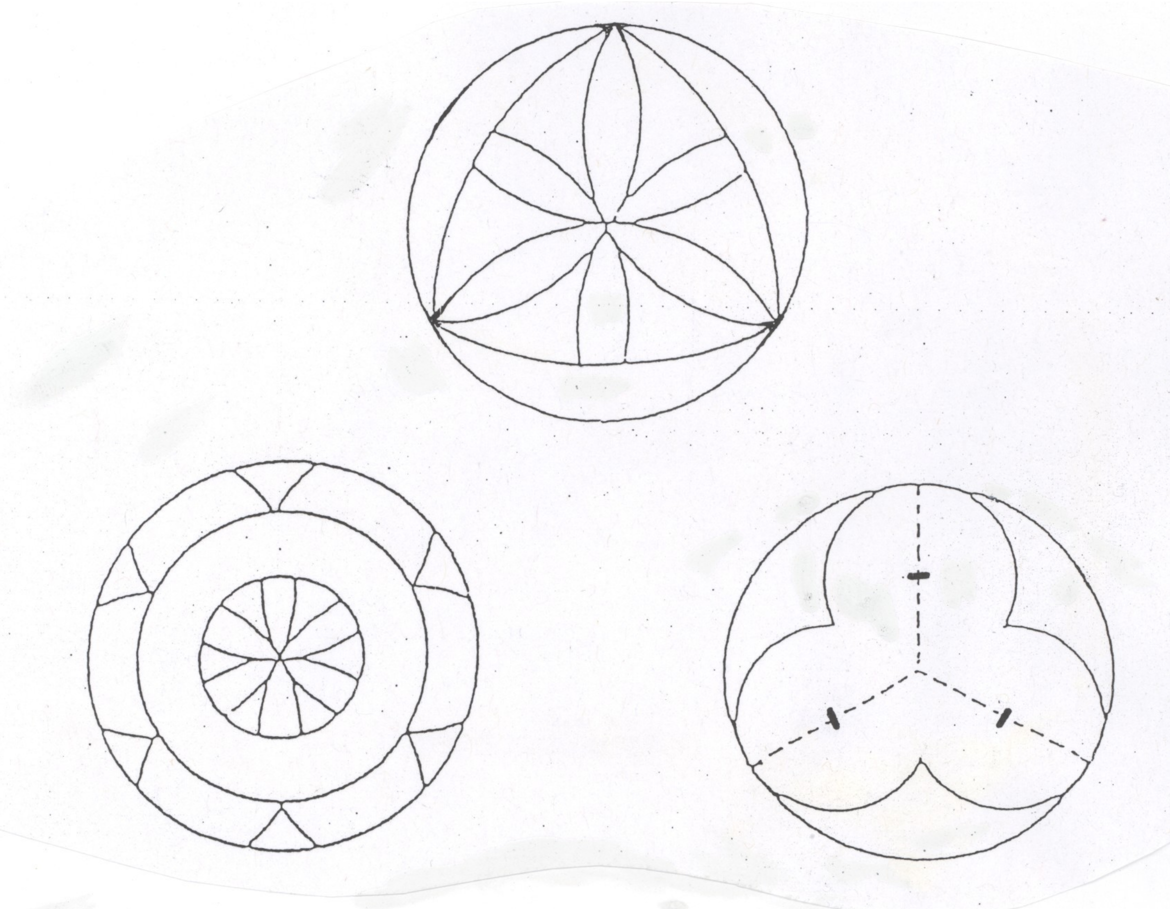


ACTIVIDAD 32

i) Construir la siguiente figura con regla y compás:



ii) Con base en la construcción anterior, construye las siguientes figuras:



FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 33

Revisar el trabajo de cada estudiante y dejar la siguiente tarea para la próxima clase.

TAREA 6.

Investigar, en tres cuartillas, quiénes fueron los Pitagóricos cuál era el símbolo que utilizaban para identificarse.

2.9 SESIÓN 8 - TEMAS: Criterios para la construcción de un triángulo, y la desigualdad del triángulo.

Comentario: Generalmente los criterios de congruencia de triángulos se enseñan simplemente enunciándolos, ***como receta,*** para enseguida pasar a la realización de ejercicios al respecto y ya (como lo podemos comprobar, por ejemplo, en la publicación 2009 del libro: ***"Geometría Elemental"*** *de Hemmerling.* Boston, USA. Uteha). Así como en la mayoría de las páginas electrónicas referentes a este tema, como por ejemplo:

www.es.wikipedia.org/wiki/Congruenciadetriángulos;

www.pps.k12.or.us/district/depts/.../SEC_37.HTM;

www.matebrunca.com/Contenidos/.../congruencia-triangulos.pdf;

www. mateblogtam.blogspot.com/.../congruencia-de-tringulos.html;

www.educarchile.cl/.../VerContenido.aspx.).

Pero, ¿cuál es el sentido didáctico de este tipo de enseñanza?.

Reflexionando el respecto de cómo poder enseñar este tema de una forma más sensata, se me ocurrió una estrategia (apegada al constructivismo) que nos permitirá *deducir l*os "criterios de congruencia de triángulos" a partir de las *reflexiones* a que nos conduce el trabajar conjuntamente con los estudiantes para responder a la siguiente pregunta:

¿cuáles son los datos mínimos con los que podemos garantizar la construcción de un triángulo de forma única?

Es decir, la cantidad y el tipo de datos que consideremos (en cada caso) no debe permitir la construcción más que de un solo triángulo.

Los casos a analizar son:

A, AA, AAA, L, AL, AAL, AAAL, LL, ALL, AALL, AA AL, LLL, ALLL, AALLL y AAALLL.

Competencias matemáticas a fortalecer: Razonamiento geométrico, encontrar regularidades, generalizar y resolución de problemas.

Material: Regla, compás y transportador.

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 34

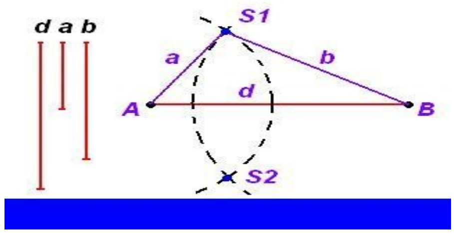
Los objetivos para esta sesión son que el estudiante:

- Deduzca cuáles son las condiciones mínimas para poder construir un triángulo,
- Comprenda el significado de la propiedad conocida como "desigualdad del triángulo" , y
- Es capaz de resolver algunos ejercicios que requieran de estos conocimientos.

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 35

Utilizar la estrategia de "lluvia de ideas" para que los estudiantes recuerden:

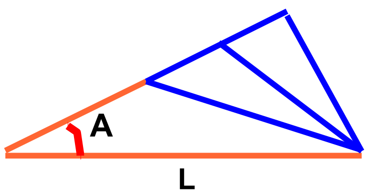
Cómo construir un triángulo, utilizando regla y compás, dadas las longitudes de sus tres lados.



ACTIVIDAD 36

Enseguida analizamos cada una de las posibles combinaciones de lados y ángulos de un triángulo (L, LA, LAL, A, AL, ALA, LL y LLL) y determinamos cuáles nos permiten asegurar la construcción de un triángulo de forma única con la *cantidad mínima* posible de datos. Así, por ejemplo, en el caso LA podemos mostrar con un dibujo (como el de abajo) que la construcción de un triángulo con esta combinación de datos **no es única.**

Veamos:



En este caso, dados un ángulo (A) y un lado (L) fijos, se puede construir más de un triángulo.

Conclusión: después de analizar cada posibilidad, pudimos comprobar que los únicos casos que cumplen la condición requerida son: **LAL, ALA y LLL .** Esto significa que si dos triángulos se pueden construir con la misma combinación de datos y tales datos son iguales, entonces dichos triángulos serán iguales.

ACTIVIDAD 37

Para evaluar el proceso de aprendizaje los estudiantes tendrán que resolver el siguiente ejercicio:

"Dadas 6 distintas ternas de números naturales como posibles lados de un triángulo, elegidas *estratégicamente* puesto que algunos de los triángulos no se podrán construir, los estudiantes deben proceder a construir un triángulo con cada terna (con regla y compás)".

Las ternas son: (3, 4 , 5) , (4, 5, 6) , (4, 4, 4), (2, 4, 6) , (1, 3, 5) y (1, 2, 9).

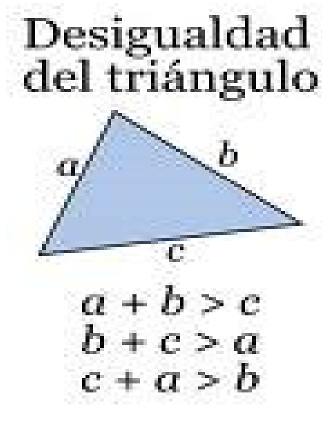
FASE DE CIERRE

ACTIVIDAD 38

Los estudiantes deberán *deducir* la propiedad geométrica que cumplen las ternas que sí permiten la construcción del triángulo:

" un triángulo se puede construir cuando la suma de sus dos lados más pequeños es mayor que el lado más grande".

Y comparar este resultado con ***La desigualdad del triángulo:*** "en todo triángulo, la suma de las medidas de dos cualesquiera de sus lados es siempre mayor que la medida del 3º ".



ACTIVIDAD 39

Revisar el trabajo de cada estudiante y dejar la siguiente tarea para la próxima clase.

TAREA 7 . Investigar para la siguiente clase: "Los criterios de congruencia de triángulos".

2.10 SESIÓN 9 - TEMA: Congruencia de triángulos

Competencias y habilidades matemáticas a fortalecer: Razonamiento geométrico, encontrar regularidades y resolución de problemas.

Material: Regla y compás.

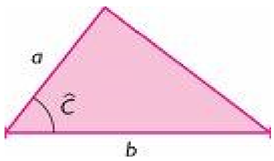
FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 40

Los objetivos para esta sesión son que el estudiante:

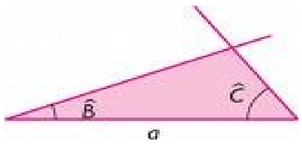
- Comprenda el significado de cada uno de los "criterios de congruencia de triángulos" ,
- Sea capaz de resolver algunos ejercicios que requieran de estos conocimientos.

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 41

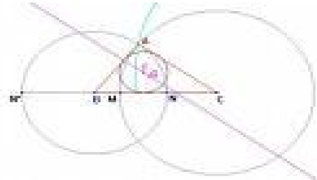
Discutir con los estudiantes las condiciones (o criterios) que deben cumplir dos triángulos para ser **congruentes** (iguales) . La conclusión a la que se ha de llegar es que éstas son justamente las mismas que fueron descubiertas la clase anterior. Veamos:



L A L



A L A

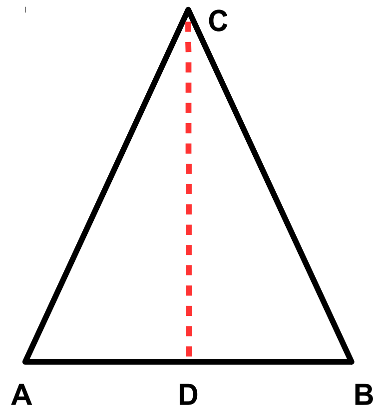


L L L

ACTIVIDAD 42

Ejemplo: Demostrar, utilizando alguno de los criterios de congruencia de triángulos, que *la bisectríz*[26] del ángulo desigual en un triángulo isósceles; divide al triángulo en 2 triángulos congruentes.

Sea ABC un triángulo isósceles, primero trazamos la bisectríz del ángulo C (con ayuda de un transportador) y marcamos el punto D sobre AB. Veamos:



[26] Recordemos que la ***bisectríz*** de un ángulo es la línea que lo divide en dos ángulos iguales.

Demostración:

Para comprobar que los triángulos ACD y BCD son congruentes, notemos que :

i) AC = BC porque el triángulo ABC es isósceles;

ii) como CD es bisectríz de C, tenemos que los ángulos ACD y BCD son iguales; y

iii) como CD pertenece a ambos triángulos, concluimos que (por el criterio LAL) los triángulos ACD y BCD son congruentes.

ACTIVIDAD 43

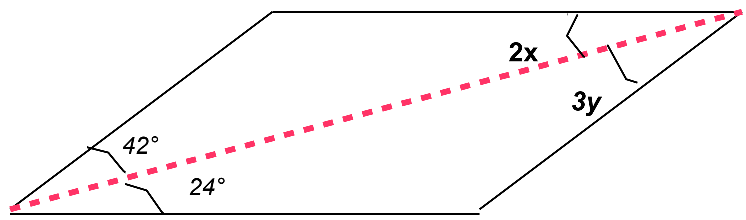
Ejercicio 1. Comprueba, utilizando alguno de los criterios de congruencia de triángulos, que cualquiera de las diagonales de un paralelogramo lo divide en 2 triángulos congruentes. Traza un dibujo para explicar.

Ejercicio 2. Demuestra que cualquier punto sobre la mediatríz de un segmento AB, se encuentra a la misma distancia *(equidista)* tanto del punto A como del punto B. Traza un dibujo para explicar.

FASE DE CIERRE

Revisar el trabajo de cada estudiante y dejar la siguiente tarea para la próxima clase.

TAREA 8 [*Hacia el Álgebra*]. En el siguiente paralelogramo, ¿cuántos grados valen los ángulos x e y?



2.11 SESIÓN 10 - TEMA: "LUGARES GEOMÉTRICOS" (PRIMERA PARTE)

Competencias y habilidades matemáticas a fortalecer: Razonamiento geométrico, encontrar regularidades y resolución de problemas.

Material: 3 hojas de color tamaño carta, regla y compás.

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 44

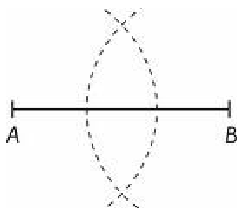
Los objetivos para esta sesión son que el estudiante:

- Comprenda el significado del concepto matemático de *" lugar geométrico"* (fundamental, en mi opinión, para el curso posterior de ***Geometría Analítica***).
- Sea capaz de resolver algunos ejercicios que requieran de este conocimiento.

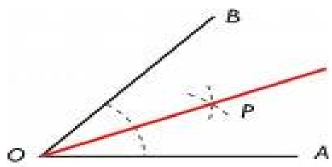
FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 45

Utilizar "lluvia de ideas", para que los estudiantes recuerden los conocimientos previos (necesarios para la comprensión del tema de esta sesión):

- Construcción de la Mediatríz de un segmento **(con regla y compás)**; y



- Construcción de la Bisectríz de un ángulo **(con regla y compás).**



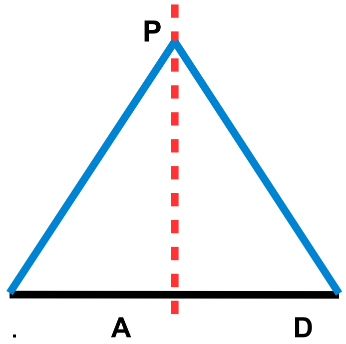
ACTIVIDAD 46

Solicitar a los alumnos su material y dar la definición de "**lugar geométrico"** como: *"un conjunto de puntos de un plano que satisfacen determinadas propiedades geométricas".*

Enseguida, analizar dos ejemplos de lugares geométricos:

- La **mediatríz** de un segmento de recta (AB), que es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio; se puede definir como *el lugar geométrico* de los puntos del plano que *equidistan* (es decir, están a la misma distancia) de los extremos del segmento (*A y B*). Esto significa que si P es cualquier punto sobre la mediatríz de AB, entonces la distancia de P a A es igual a la distancia de P a B. Veamos la siguiente figura:

PD es la mediatríz de AB . Ahora bien, si comparamos los triángulos ADP y BDP, tenemos que: AD = DB , DP = DP y los ángulos ADP y BDP son iguales; por lo tanto, por el criterio LAL de congruencia los triángulos son iguales y AP = DP .



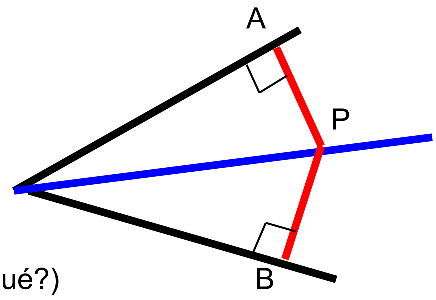
B

(La construcción de la mediatríz, con regla y compás, se puede consultar en la pagina 42).

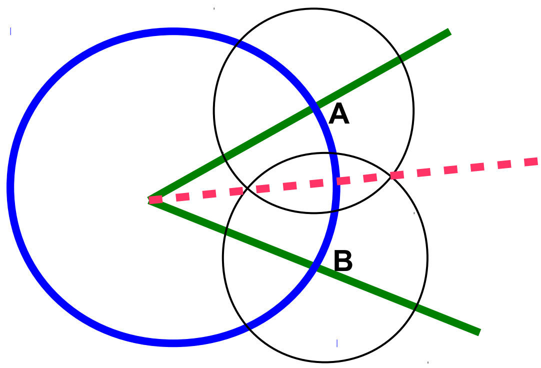
- La **Bisectríz** de un ángulo, que es la recta que lo divide en dos ángulos iguales; es *el lugar geométrico* de los puntos del plano que equidistan de las dos semirrectas que forman el ángulo. Esto significa que si P pertenece a la bisectríz de un ángulo, la distancia de P a cada una de las semirrectas que forman el ángulo es la misma.

Nota: recordemos que la distancia de un punto P a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta que pasa por P.

Veamos: si P pertenece a la bisectríz del ángulo formado por las semirrectas negras, entonces los segmentos PA y PB miden lo mismo (¿porqué?)



La construcción clásica de la bisectríz de un ángulo, con regla y compás, es así: Trazamos un ángulo (semirrectas verdes), enseguida colocando el compás en el vértice del mismo y con cualquier medida trazamos una circunferencia que corte ambas (en azul) y finalmente colocando el compás en cada punto de intersección (A y B) trazamos dos circunferencias que se intersecten y al unir dichos puntos de intersección obtenemos la bisectríz.



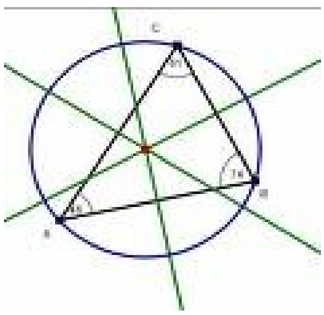
ACTIVIDAD 47

Para evaluar la efectividad del proceso de enseñanza de esta clase los estudiantes tendrán que: Dibujar 4 triángulos (2 acutángulos y 2 obtusángulos) cada uno en una hoja de color y trazar con *regla y compás* en dos de ellos (un acutángulo y un obtusángulo) las 3 mediatrices y en los otros dos las 3 bisectrices .

Enseguida se les invita a comprobar que en ambos casos dichas 3 rectas se intersectan en un mismo punto que:

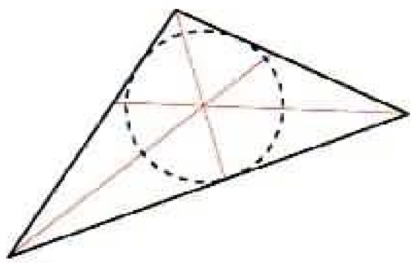
- En el caso de la intersección de las mediatrices, se llama circuncentro y es además el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo (es decir, la circunferencia más pequeña que contiene al triángulo).

  Veamos:



- En el caso de la intersección de las bisectrices, se llama incentro y es además el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo (es decir, la circunferencia más grande que está contenida en el triángulo).

  Veamos:



Para concluir esta parte, los estudiantes tendrán que resolver el siguiente ***problema:***

Utiliza el concepto de mediatríiz, como lugar geométrico, para explicar ¿ porqué las 3 mediatrices de un triángulo se intersectan en un punto que se encuentra a *la misma distancia* de los 3 vértices del triángulo?

FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 48

Reflexionar sobre las siguientes preguntas:

i) ¿el incentro siempre está dentro del círculo?

Respuesta = si . ¿Porqué?

ii) ¿el circuncentro siempre está dentro del círculo?

Respuesta = no siempre. ¿Porqué?

Dejar la siguiente tarea para la próxima clase.

TAREA 9. (Para entregar)

Trazar el circuncentro y la circunferencia circunscrita de un triángulo rectángulo e isósceles.

2.12 SESIÓN 11 – TEMA: Aplicación del concepto de "lugar geométrico" como un ejemplo del proceso de matematización.

Competencias matemáticas a fortalecer: Razonamiento geométrico, modelar, plantear y resolver problemas geométricos.

Material: lápiz de color, regla y compás.

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 49

El objetivo para esta sesión es que el estudiante:

Aplique en un caso particular el proceso conocido como "matematización" de un problema.

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 50

Reflexionar sobre el siguiente problema.

Alumbrado Público (adaptado de un problema propuesto en la prueba de OCDE/PISA 2006):

El consejo municipal de Tláhuac ha lanzado la siguiente convocatoria para estudiantes de bachillerato:

> *"Hemos decidido poner un único reflector en el nuevo jardín triangular (cuyos ángulos son todos menores de 90°) de manera que éste ilumine la mayor cantidad de área del parque que sea posible. ¿En qué punto deberá colocarse el reflector?.*
>
> *El estudiante que lo resuelva y que explique su solución, obtendrá una recompensa de 2 mil pesos".*

Este problema social se puede resolver siguiendo la estrategia general que se aplica en las matemáticas, es decir, a través de la *interpretación matemática **(o matematización)*** de un problema.

Dicha interpretación consta de 5 pasos:

- Se parte de un problema específico consistente en *establecer la ubicación óptima de un reflector en un parque.*
- Se formula el problema en términos de conceptos matemáticos. En este caso, *el parque se puede representar como un triángulo y la iluminación como un circulo con el reflector en el centro.*
- Gradualmente se *abstraen del caso específico los elementos esenciales y necesarios para resolver el problema.* De esta manera, el *problema real* se transforma en un *problema matemático* que representa la situación en forma fehaciente. En este caso, el problema se transforma en "ubicar el centro de un círculo que circunscriba a un triángulo específico".
- Se resuelve el problema geométrico basándose en el hecho de que el centro de un círculo que circunscribe un triángulo yace en el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo. Para ello, en este caso basta construir las tres mediatrices y determinar su punto de intersección.

- Se interpreta la solución matemática en términos de la situación real. Es decir, se relaciona el hallazgo con el parque real; se reflexiona sobre la solución y se reconoce por ejemplo, que si una de las 3 esquinas del parque fuera un ángulo obtuso la solución encontrada no funcionaría, puesto que el reflector quedaría *fuera* del parque.

Es este proceso el que caracteriza, en general, cómo se pueden utilizar las matemáticas para resolver problemas. Además nos ilustra el como una persona bien informada puede utilizar las matemáticas para resolver cuestiones prácticas en el mundo real.

ACTIVIDAD 51

El siguiente diagrama, para ser comentado con los estudiantes, esquematiza el proceso conocido como **"Matematización"** (o *interpretación matemática*) de un problema específico, "real":

Problema del mundo real ⟷ Problema **Matemático** al que da lugar

↓ ↓

Problema del Farol en el Parque ⟷ Encontrar el **circuncentro** de un triángulo que representa al parque (a escala)

↓ ↓

Solución al problema "Real": se localiza el punto que representa al circuncentro (en el parque real) y ese es el lugar para el farol. ⟷ ***Solución Matemática:*** Trazar las Mediatrices del triángulo y Determinar su punto de intersección

ACTIVIDAD 52

Los estudiantes tendrán que resolver el problema, en su cuaderno, haciendo un dibujo que represente al parque y utilizando un color para representar el área de la luminosidad del reflector.

FASE DE CIERRE

ACTIVIDAD 53

Trabajar con los alumnos, sobre las siguientes preguntas:

a) ¿qué pasaría si el jardín tuviera un ángulo mayor de 90°?

Respuesta = en ese caso, el circuncentro quedaría fuera del parque.

b) ¿qué punto propondrías como alternativa?

Respuesta = el incentro .

Dejar la siguiente tarea para la próxima clase.

TAREA 10. Encargar a los estudiantes 10 m de cuerda y gises de colores (para la próxima clase).

2.13 SESIÓN 12 - PRÁCTICA DE CAMPO

(una aplicación del concepto de lugar geométrico)

Competencias y habilidades: Razonamiento geométrico y resolución de problemas.

Material: 10 m de cuerda y una caja de gises de colores.

FASE DE APERTURA

ACTIVIDAD 54

El objetivo para esta sesión es que el estudiante:

sea capaz de resolver un problema real utilizando sus conocimientos, sus habilidades y sus recursos materiales.

FASE DE DESARROLLO

ACTIVIDAD 55

Resolver el siguiente problema en equipos formados por 4 estudiantes:

Habiendo dibujado, con un gis, un hipotético parque triangular (***en el patio de nuestra escuela,*** aproximadamente de 9, 12 y 16 metros por lado), pedimos a los estudiantes que localicen el punto que representa al **incentro** del parque (por sus propios medios, utilizando la cuerda y los gises de colores). El propósito es confirmar sus conocimientos analizando sus procedimientos, habilidades y actitudes.

Finalmente, les pedimos que comprueben que el punto encontrado equidista de los tres vértices del parque. En caso contrario, les indicamos como realizar las adecuaciones pertinentes.

FASE DE CIERRE

ACTIVIDAD 56

Reflexionar en forma grupal sobre los resultados obtenidos por los equipos durante la práctica.

Dejar la siguiente tarea para la próxima clase.

TAREA 11 .

Entregar un trabajo de investigación, en 2 cuartillas, sobre:

"Apolonio y las cónicas" .

2.14 SESIÓN 13 - TEMA: "LUGARES GEOMÉTRICOS" (SEGUNDA PARTE)

Competencias y habilidades a fortalecer: Razonamiento geométrico y resolución de problemas.

Material: Diez conos de papel, dos hojas de papel albanene, un hoja de tamaño carta de papel cascarón, un pedazo de hilo cáñamo de 20 cm, dos tachuelas y tijeras.

FASE DE APERTURA

ACTIVIDAD 57

Los objetivos para esta sesión son que el estudiante:

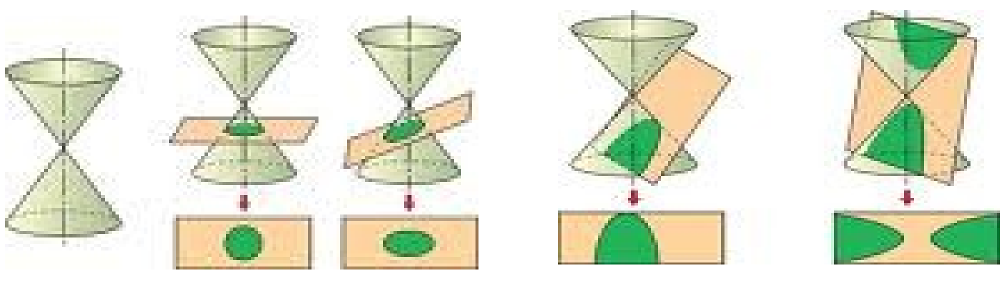
- Comprenda que las curvas conocidas como "cónicas" reciben ese nombre porque se pueden obtener como resultado de *intersectar* un cono con un plano.
- Sea capaz de construir parábolas utilizando la definición de parábola como "lugar geométrico".

FASE DE DESARROLLO

ACTIVIDAD 58

Para comprobar con los estudiantes que cada cónica se puede obtener *intersectando* un plano con un cono, los invitamos a realizar distintos cortes rectos a diversos conos de papel y a observar con detenimiento la orilla recortada. Dependiendo de la inclinación del corte será la cónica obtenida.

Veamos:



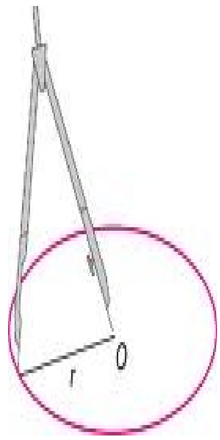
Cono Circunferencia Elipse Parábola Hipérbola

ACTIVIDAD 59

Solicitar a los alumnos su material didáctico y llevar a cabo la siguiente estrategia: dar la definición de cada una de las cónicas como **lugar geométrico:**

- Una circunferencia es *el lugar geométrico* de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo (O), llamado *centro,* es un valor dado r , llamado *radio.*

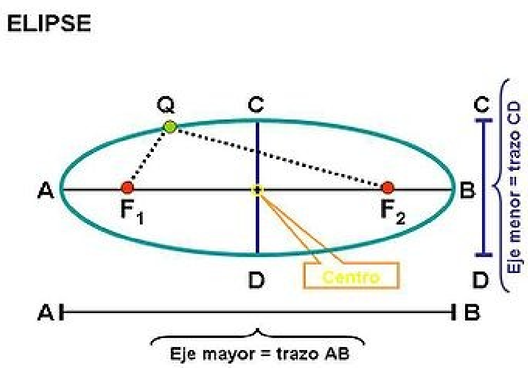
  Veamos:



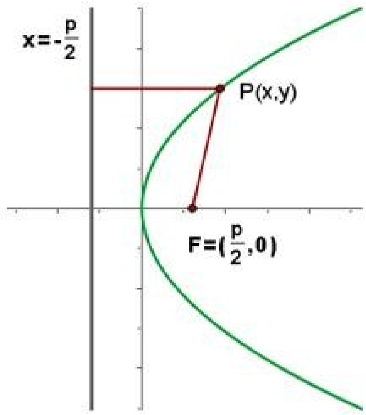
- Una elipse es *el lugar geométrico* de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es una constante dada equivalente a la longitud del *eje mayor* (AB) de la elipse.

  Es decir, $F_1Q + QF_2 = AB$ para todo punto Q sobre la elipse.

  Veamos:

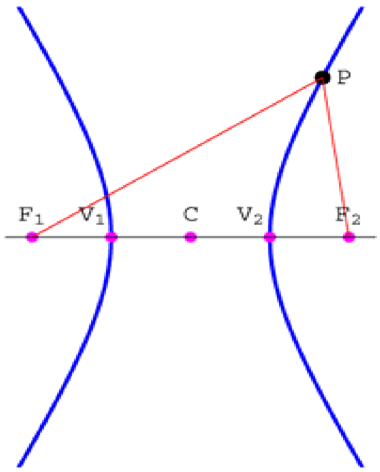


- La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo **F** (llamado foco) equivale a su distancia a una recta dada **L** (llamada directriz).



L

- La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es igual a una constante positiva que equivale a la distancia entre los vértices V_1 y V_2.

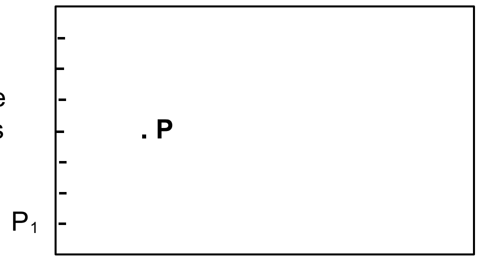


ACTIVIDAD 60

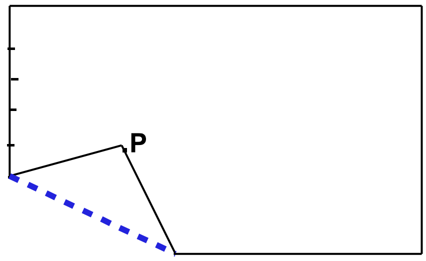
Como parte del proceso de enseñanza los estudiantes tendrán que resolver el siguiente ejercicio:

Construir (por parejas) 2 parábolas, con dobleces de papel, siguiendo las instrucciones dadas a continuación:

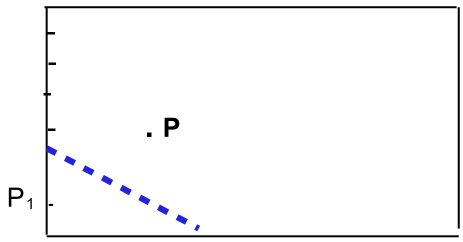
(i) Colocamos una hoja tamaño carta en forma horizontal y marcamos un punto P (que será el ***foco*** de la parábola) a 5 cm del límite izquierdo de la hoja (que será la ***directríz***) y aproximadamente a la mitad del alto de la misma. Enseguida marcamos puntos sobre todo el límite izquierdo de la hoja de modo que la distancia entre dos puntos consecutivos sea de 1 cm. Veamos:



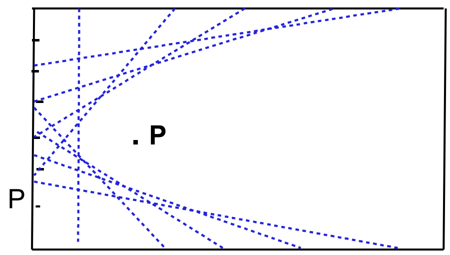
(ii) A continuación, doblamos la hoja haciendo coincidir cada punto marcado (sobre el límite de la hoja) con el punto P después marcamos el doblez y desdoblamos. Veamos (a la derecha) el doblez en el punto P_1 (P_1 y P coinciden):



(iii) Al desdoblar quedará marcado el doblez, como se puede apreciar en la figura de la derecha:



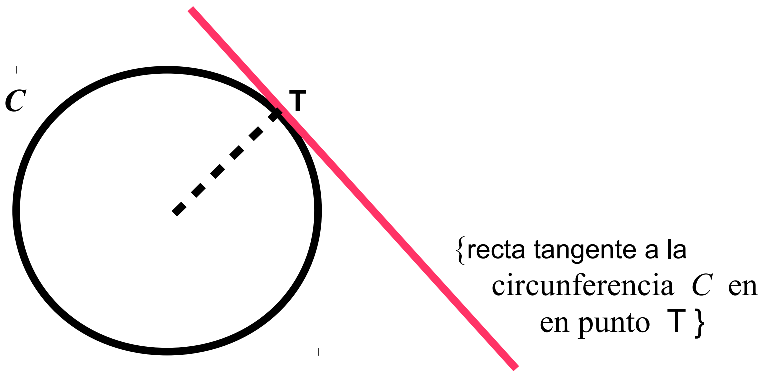
(iv) Después de haber marcado el doblez correspondiente a cada punto del borde de la hoja, tendremos una parábola formada con las ***rectas tangentes*** a distintos puntos de ésta. Veamos (a la derecha):



ACTIVIDAD 61

Podemos aprovechar esta actividad para mencionar (al menos intuitivamente) lo que significa que una recta sea ***tangente*** a una curva en un determinado punto. Es decir, una recta es tangente a una curva en un punto T, si es la recta que "más se parece" a la curva en T.

Por ejemplo, en la siguiente figura la recta roja es ***tangente*** a la circunferencia en el punto T justamente porque de todas las rectas que pasan por T ésta es la que más se parece a la curva en las cercanías de T.



ACTIVIDAD 62

Posteriormente, indicar a los estudiante que (por filas) construyan una nueva parábola (haciendo una ***analogía*** de la construcción de la actividad 60) pero colocando el punto P a diferentes distancias del borde izquierdo cada fila. Por ejemplo a 2.5, 3.5, 4 y 6 cm.

FASE DE CIERRE

ACTIVIDAD 63

Que cada estudiante, compare sus parábolas entre sí y con las de sus compañeros, y que reflexione sobre la siguiente pregunta:

¿Cuáles de las parábolas son más abiertas y cuáles más cerradas?

2.15 SESIÓN 14 - TEMA: "LUGARES GEOMÉTRICOS" (TERCERA PARTE)

Competencias y habilidades a fortalecer: Razonamiento geométrico y resolución de problemas.

Material: Un octavo de papel ilustración, un pedazo de hilo cáñamo de 20 cm, dos tachuelas y un lápiz.

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 64

Los objetivos para esta sesión son que el estudiante:

- Sea capaz de construir elipses utilizando la definición de elipse como "lugar geométrico".

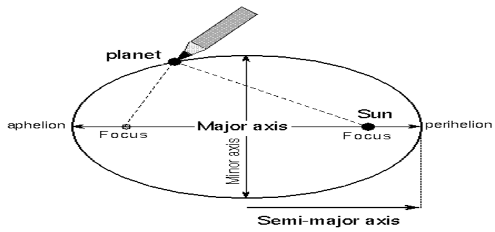
FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 65

Construir 3 elipses distintas sobre un mismo octavo de papel ilustración, representando los focos con 2 tachuelas y los puntos sobre la elipse con un lápiz que gira 360º tensando un pedazo de hilo cáñamo (o de estambre) cuya medida es igual al eje mayor de la elipse. Analizar qué pasa si la distancia entre los focos, en cada construcción, es menor y la longitud del hilo permanece constante. Al final comparar sus 3 elipses y reflexionar sobre las siguientes preguntas:

i) ¿Cuál de las elipses es más ovalada?

ii) ¿Cuál de las elipses es más redonda?

Nota: dibuja cada elipse con un color distinto y determina las medidas del eje mayor y de la distancia entre los focos de cada caso.



Drawing an **ellipse**: loop string around thumb tacks at each **focus** and stretch string tight with a pencil while moving the pencil around the tacks. The Sun is at one focus.

FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 66

Tras comparar sus resultados con los de sus compañeros, los alumnos deberán concluir que si en cada construcción mantienen *constante* la longitud del hilo y *disminuyen* la distancia entre los focos, entonces las elipses obtenidas se parecen cada vez más a una circunferencia con centro en medio de los focos.

2.16 SESIÓN 15 - TEMA: "PITÁGORAS Y LOS PITAGÓRICOS"

Competencias y habilidades matemáticas a fortalecer:

Pensar y razonar

FASE DE APERTURA

ACTIVIDAD 67

EL OBJETIVO PARA ESTA SESIÓN ES QUE EL ESTUDIANTE:

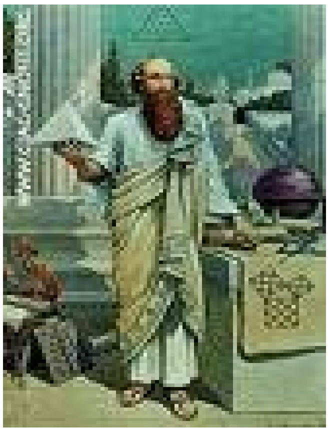
Conozca el contexto que rodeaba a Pitágoras y su escuela (conocida como *escuela Pitagórica*), así como sus principales contribuciones a la ciencia.

FASE DE DESARROLLO

ACTIVIDAD 68

Realizar la siguiente lectura:

Pitágoras fue el primer sabio de la antigüedad que aglutinó en torno a sí mismo a un círculo cerrado de discípulos (la escuela Pitagórica) quienes participaban tanto de su vida como de su doctrina. Dicha escuela estaba inspirada por la búsqueda del saber, así como por la investigación objetiva.



PITÁGORAS (582 a.C. - 500 a.C.)

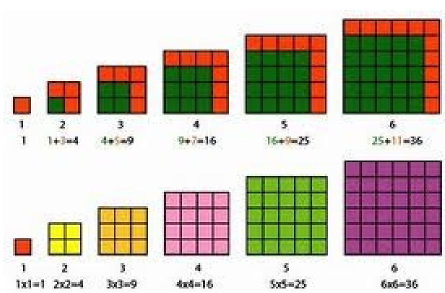
En el siglo V a.C., los pitagóricos figuraron entre los principales investigadores científicos. Se interesaron tanto por la ciencia como por el destino del alma. La religión y la ciencia no eran para ellos dos temas separados sino más bien constituían los dos factores inseparables de un único estilo de vida.

Los pitagóricos se dedicaron a las matemáticas con el entusiasmo propio de los primeros estudiosos de una ciencia en pleno progreso. Creían en la importancia de los números en el cosmos y creyeron poder explicar el orden manifestado en el universo mediante ellos. ***Todas las cosas están regidas por los números****, pensaban, y muchas las podemos expresar numéricamente. Así que según ellos la relación entre dos cosas se podía expresar por una* ***proporción numérica.*** *Pero lo que pareció impresionarlos más que nada fue el descubrir que los intervalos musicales que hay entre las notas de la lira pueden expresarse mediante proporciones numéricas. 2:1, 3:2 y 4:3 son las proporciones de los intervalos conocidos como octava, quinta y cuarta respectivamente.*

Así como la armonía musical depende de los números, creyeron que la armonía del universo dependía también de ellos. Pensaban en la existencia de una armonía cósmica y fueron más lejos al declarar que ***las cosas son números****. Eurito solía representar los números con piedrecillas, y por este procedimiento, obtenemos (por ejemplo) los números "cuadrados", "triangulares", "pentagonales", etc. Es decir, aquellos números que se pueden representar mediante arreglos con tales formas. Así fue como investigaron las propiedades de cada tipo de números. Por ejemplo, descubrieron que partiendo de la unidad se pueden obtener todos* ***los números cuadrados*** *añadiendo sucesivamente* ***los números impares.***

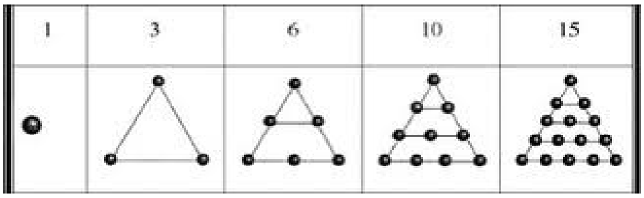
Observemos que: $1^2 = 1$, $2^2 = 1 + 3$, $3^2 = 1 + 3 + 5$, $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$, . . .

Veamos:



[Discutir cual sería una forma de expresar en n-ésimo cuadrado. Respuesta: $n^2 = 1 + 3 + \cdots + (2n-1)$]

Veamos los primeros cinco números triangulares:



¿Existirá alguna forma de calcular estos números?

Respuesta: el primero es el 1, el 2° es 1 + 2, el 3° es 1 + 2 + 3; por lo tanto, el n-ésimo es 1 + 2 + 3 + · · · + n **[** que se puede obtener con la fórmula **$n\,(n+1) / 2$** **]**.

"Por la yuxtaposición de puntos se obtiene la línea, la superficie es engendrada por la yuxtaposición de varias líneas y el cuerpo por la combinación de superficies. Puntos, líneas y superficies son las unidades reales que componen todos los cuerpos de la naturaleza y en este sentido todos los cuerpos pueden ser considerados como hechos por números. Cada cuerpo material es una expresión del número cuatro, puesto que resulta como un cuarto término de tres clases de elementos constitutivos (puntos, líneas y superficies)".

Respecto al teoremas de Pitágoras, éste aparece ya en los cálculos Sumerios, pero fueron los pitagóricos los que rebasaron los simples cálculos aritméticos y geométricos y supieron integrarlos en un ***sistema deductivo.*** *Posteriormente, la geometría pitagórica abarcaría los libros I, II, IV y VI de* ***"Los elementos de Euclídes",*** *quizá el más grande tratado de matemáticas que se conserva de la antigüedad.*

Fragmento de la obra: "Los Elementos de Euclides", en el cual se aprecia una ***demostración*** *del llamado "teorema de Pitágoras".*

*La **astronomía** de los pitagóricos marcó un importante avance en el pensamiento científico clásico, ya que fueron los primeros en considerar a la Tierra como una esfera que gira (junto a otros planetas), en órbitas circulares, alrededor de un fuego central o "corazón del Cosmos" (identificado con el número uno). Etas órbitas separaban un astro de otro mediante la longitud de cuerdas armónicas. Es decir, creían que los astros emitían un sonido en el transcurso de su órbita, cada uno de ellos diferente; por lo cual a estos movimientos los denominaron: **" La armonía de las esferas".***

Representación (aproximada) de la teoría del universo, según los Pitagóricos

Debemos a los pitagóricos el perfeccionamiento del álgebra y de la aritmética, la clasificación de los poliedros regulares, el teorema de Pitágoras, la inconmensurabilidad de la diagonal y del lado de un cuadrado (es decir, la existencia de los números irracionales), la doctrina de "Harmonía de las esferas", la definición de los números perfectos (aquellos que son iguales a la suma de sus divisores distintos de sí mismos), la razón áurea (tan utilizada en la arquitectura y en el arte) y una teoría del universo.

FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 69

Reflexionar detalladamente, a nivel grupal, sobre la lectura anterior.

TAREA 12. Investigar (para entregar) el teorema de Pitágoras, con un dibujo en el que expliquen de qué se trata.

2.17 SESIÓN 16 - TEMA: "UNA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS"

Competencias y habilidades matemáticas a fortalecer: Razonamiento geométrico y aplicación de los conocimientos y habilidades para resolver problemas.

FASE DE APERTURA

ACTIVIDAD 70

Los objetivos particulares para esta sesión son que el estudiante:

- Comprenda el significado geométrico y algebraico del teorema de Pitágoras a través de una demostración geométrica muy didáctica.
- Sea capaz de resolver algunos ejercicios que requieran de la aplicación de este conocimiento.

FASE DE DESARROLLO

ACTIVIDAD 71

Demostración del teorema[27] de Pitágoras, el cual afirma que:

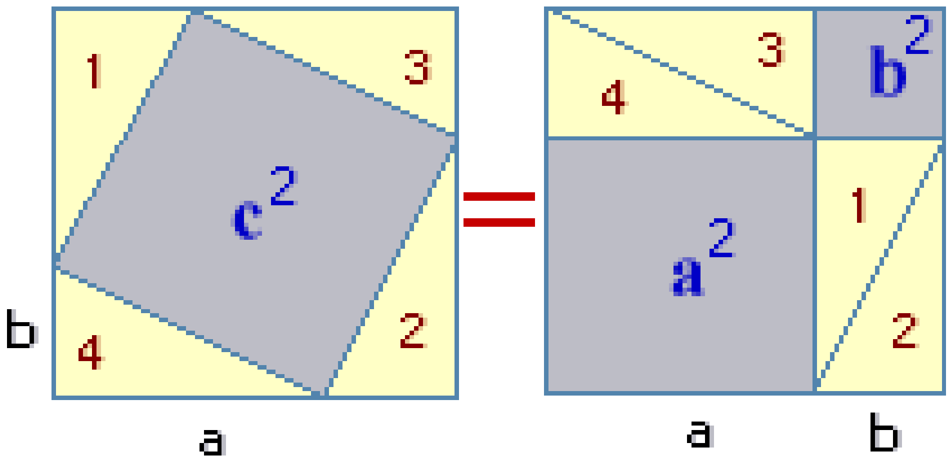
" En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre su hipotenusa ".

A lo largo de la historia han sido muchas las demostraciones que matemáticos y amantes de las matemáticas han dado sobre el Teorema de Pitágoras. A continuación muestro una de las demostraciones geométricas más conocidas, la cual se atribuye al propio Pitágoras .

[27] Toda proposición que se demuestra es un "teorema".

Demostración

Veamos la siguiente figura:



Geométricamente tenemos, a partir de la igualdad de los 8 triángulos rectángulos, que los 2 cuadrados mayores de la figura de arriba son iguales, pues ambos tienen área igual a (**a + b)** ^{2} .

Realizando los cálculos correspondientes, tenemos que:

$$4\,(ab/2) + c^2 = 4\,(ab/2) + a^2 + b^2$$

Por lo que, cancelando el término **[4 (ab / 2)] ,** en ambos lados de la igualdad, obtenemos que: $a^2 + b^2 = c^2$.

Que es lo que queríamos demostrar (Q.E.D)[28].

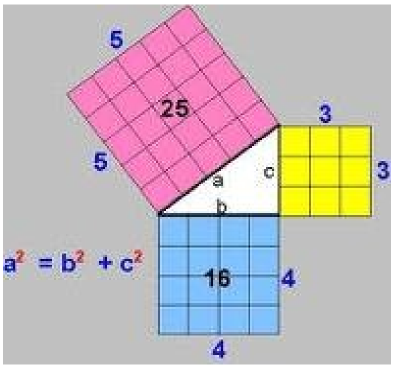
[28] Q.E.D. simboliza "quod erat demonstrandum", que en latín significa : "lo que queríamos demostrar", y que en los libros de geometría tradicionalmente marcaba el final de cada demostración.

ACTIVIDAD 72

Reflexionar con los estudiantes sobre los siguientes puntos:

1. El inverso del Teorema de Pitágoras también es cierto, es decir : " Si un triángulo tiene lados de longitudes ***a, b*** y ***c*** que satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo tiene un ángulo de 90º ".
2. Otras culturas, algunas anteriores a la época de los Pitagóricos, conocían este teorema o casos **particulares** de él **[**como fue el caso de los Egipcios, quienes sabían que construyendo un triángulo de lados iguales a 3, 4 y 5 unidades obtenían necesariamente un triángulo rectángulo (conocimiento que utilizaban para volver a trazar los límites de sus terrenos después de cada inundación del río Nilo, puesto que para sus trazos necesitaban ángulos rectos. O el caso de los chinos, de los que se conoce una demostración que data del 500 al 300 a d.C. Incluida en una obra matemática titulada *Chou Pei***].**

Veamos la siguiente figura:



FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 73

Ejemplo: Si un triangulo rectángulo tiene catetos de longitudes 5 y 12 cm respectivamente. ¿Cuál es la longitud de su hipotenusa?

Respuesta: aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que: $\mathbf{5^2 + 12^2 = c^2}$ (donde c es la hipotenusa). Por lo tanto, $c^2 = \mathbf{169}$ y $c = 13$ (¿porqué?) .

Ejercicio:

i) Si un triangulo rectángulo tiene catetos de longitudes 6 y 8 cm respectivamente. ¿Cuál es la longitud de su hipotenusa?

ii) Lo mismo, pero para un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7cm y 12cm.

2.18 SESIÓN 17 - TEMA: APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS (PARTE 1)

Competencias y habilidades matemáticas a fortalecer: Razonamiento geométrico y aplicación de los conocimientos y habilidades para resolver problemas.

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 74

El objetivo de esta sesión es que el estudiante:

Aplique el teorema de Pitágoras para resolver problemas.

FASE DE DESARROLLO

ACTIVIDAD 75

Nota: El teorema de Pitágoras proporciona una relación muy importante entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Este teorema constituye uno de los resultados más famosos y útiles de las matemáticas y de la física. Además es de gran utilidad en la resolución de problemas de ingeniería, matemáticas y tecnología en general.

Resolver los siguientes problemas utilizando el Teorema de Pitágoras.

1) La medida de la pantalla de un Televisor se determina por la longitud (en pulgadas) de sus diagonales. Si la pantalla de un TV mide 15´´ x 20´´. ¿ Cuánto mide su diagonal?

2) La escalera eléctrica que va del primer al segundo piso de una tienda departamental mide 5m en forma vertical y 9m en forma horizontal. Determina la distancia que recorre la escalera al ascender al 2º piso.

3) Se desea bajar frutos de un árbol de naranjas apoyando una escalera en el piso para alcanzarlos. Si los frutos se encuentran a una altura de 3.4 m y la distancia del árbol al punto donde se apoyará la escalera es de 1.1 m. ¿Cuántos metros deberá medir la escalera, con la medida mínima adecuada, para poder alcanzar los frutos?

FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 76

Plantear el siguiente problema:

Si en un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 20 cm y la base mide 9 cm. ¿Cúal es la medida de la altura del triángulo?

Nota: *En este problema y en el primero de la siguiente clase, seguramente más de un estudiante dirá que **no se pueden** calcular ni la altura ni la base, que sólo se puede calcular la hipotenusa. Esta situación nos brindará una oportunidad de explicarles que conociendo 2 de los lados de un triángulo rectángulo y realizando un despeje **se puede** determinar el valor del tercer lado, sin importar cual sea éste.*

Es decir, si $a^2 + b^2 = c^2$, *entonces* c = $\sqrt{a^2+b^2}$, a = $\sqrt{c^2-b^2}$ y b = $\sqrt{c^2-a^2}$.

2.19 SESIÓN 18 - TEMA: APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS (PARTE 2)

Competencias y habilidades matemáticas a fortalecer: Razonamiento geométrico y aplicación de los conocimientos y habilidades para resolver problemas.

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 77

El objetivo de esta sesión es que el estudiante aplique el teorema de Pitágoras para resolver problemas.

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 78

Plantear los siguientes problemas:

1) Si en un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 17.5 cm y la altura mide 12 cm. ¿Cúal es la medida de la base del triángulo?
2) ¿ Cuánto vale el área de un triángulo equilátero cuyos lados miden 10 cm. ?

FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 79

Plantear el siguiente problema:

(***Generalización*** del problema 2): ¿ Cuánto vale el área de un triángulo equilátero cuyos lados miden r cm. ?

2.20 SESIÓN 19 - TEMA: ALGUNAS *GENERALIZACIONES* DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Competencias y habilidades a fortalecer: Razonamiento geométrico, aplicación de los conocimientos para resolver problemas y generalizar.

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 80

El objetivo de esta sesión es que el estudiante:

Comprenda algunas ***generalizaciones*** del teorema de Pitágoras.

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 81

Plantear a los estudiantes las siguientes interrogantes y propiciar que hagan los desarrollos correspondientes:

1. Si multiplicamos los lados a, b, c de un triángulo rectángulo por una constante k (con $k>0$) ? ¿ Seguirá cumpliéndose el teorema de Pitágoras?

   Respuesta = pues sucederá que:

   $$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2 \cdot a^2 + k^2 \cdot b^2 = k^2 (a^2 + b^2) = k^2 \cdot c^2 = (kc)^2 ,$$

   Lo anterior significa que esta **Generalización** del Teorema de Pitágoras se cumple. (¿Podemos lograr que el estudiante explique geométricamente este resultado?)

2. Dado un triángulo rectángulo cualquiera, ¿podrías dibujar los casos : k = ½, k = ¼ y K = 2.

FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 82

¿ Qué pasaría si en lugar de dibujar cuadrados sobre los lados a, b, c de un triángulo rectángulo, dibujamos círculos o semicírculos o triángulos equiláteros? ¿Seguirán cumpliéndose éstas generalizaciones del Teorema de Pitágoras?

Respuesta = sí se cumplen estas generalizaciones.

Pidamos a los estudiantes que dibujen semicírculos (sobre los lados de un triángulo rectángulo con medidas fijas) y que calculen y comparen sus áreas. Es muy importante que apoyemos a los estudiantes para que lleguen a las conclusiones que esperamos.

2.21 SESIÓN 20 - TEMA: Historia de la Ciencia (parte 1).

[subtema: proporcionalidad; Competencias a desarrollar:
razonar, modelar y planteamiento y resolución de problemas]

FASE DE APERTURA

ACTIVIDAD 83

El objetivo de esta sesión es que el estudiante:

Conozca y analice la solución a un ***problema real*** gracias a la aplicación del concepto de proporcionalidad y al ingenio humano.

Introducción.

Esta sesión consiste en la proyección y el análisis de uno de los temas expuestos en el capítulo I de la serie científica titulada "COSMOS", la cual fue dirigida por el físico y astrónomo estadounidense Carl Sagan (1934-1996).

Este tema se estudiará durante dos sesiones de hora y media. La primera sesión consiste en la proyección del video y en el análisis del método, creado por el científico griego Eratóstenes hace aproximadamente 2300 años, para determinar la longitud de la circunferencia terrestre. La segunda sesión consiste en la recreación, en el aula, de dicho método al propiciar que los estudiantes calculen *indirectamente* el perímetro de una esfera de unicel.

En el video nos explican la forma en que Eratóstenes intuye que la Tierra debe ser curva y nos muestran cómo este mismo científico calcula, de forma extraordinaria, la longitud de la circunferencia de nuestro planeta (utilizando la proporcionalidad en forma de una sencilla **regla de tres** así como un prodigioso ingenio).

Por estos motivos, me parece un video muy ilustrativo y digno de ser analizado. Personalmente, considero que la principal aportación de este DVD (tanto en matemáticas como en física) es introducir al estudiante en el estudio de la ciencia.

Nota: Esta sesión, se puede trabajar conjuntamente con la academia de *física*, puesto que además de que estudiamos sistemas de medición indirectos (que es también uno de los conocimientos matemáticos que se utilizan en astronomía, para medir distancias inalcanzables), el video menciona cuestiones como el origen y la edad del universo así como la utilidad del año luz como unidad de medida para distancias interestelares.

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 84

Proyección del video (duración aproximada: 50 minutos).

ACTIVIDAD 85

Análisis del video:

Nos cuenta la historia que un día Eratóstenes al estar encargado de leer todos los papiros que ingresaban a la biblioteca de Alejandrìa (por ser su director), leyó un papiro que decía:

> “En un lugar llamado Siena, cerca de la primera catarata del Nilo, los días 21 de junio al mediodía sucede que los palos rectos colocados verticalmente no proyectan sombra alguna; es decir, el sol está directamente sobre dicho lugar en ese preciso momento (este fenómeno se conoce como que el sol alcanza el Cenit)”

Enseguida Eratóstenes, como buen científico, se preguntó si ese mismo día a la misma hora los palos verticales en Alejandría, lugar donde él vivía, proyectarían sombra o no, y en caso de ser afirmativa la respuesta cuál podría ser la consecuencia.

Con el paso del tiempo, Eratóstenes descubrió que los palos verticales en Alejandría, los días 21 de junio al mediodía, producían una sombra de 7.2 grados y dedujo:

- En primer lugar, puesto que sabía que el sol estaba lo bastante lejos como para suponer que sus rayos llegan en forma paralela a cualquier punto de nuestro planeta, que la única explicación posible para justificar la diferencia de sombras, comentada en el párrafo anterior, era que existe una **curvatura** en la superficie de la Tierra.
- y en segundo lugar, que dicha **curvatura** sería mayor mientras más grande fuese el valor de la sombra en Alejandría.

Además, Eratóstenes le pagó a una cierta persona para que midiera (caminando) la distancia entre Siena y Alejandría, y ésta resultó ser del equivalente actual a 800 Km.

Veamos la sorprendente forma de razonar de este científico para determinar la circunferencia de nuestro planeta:

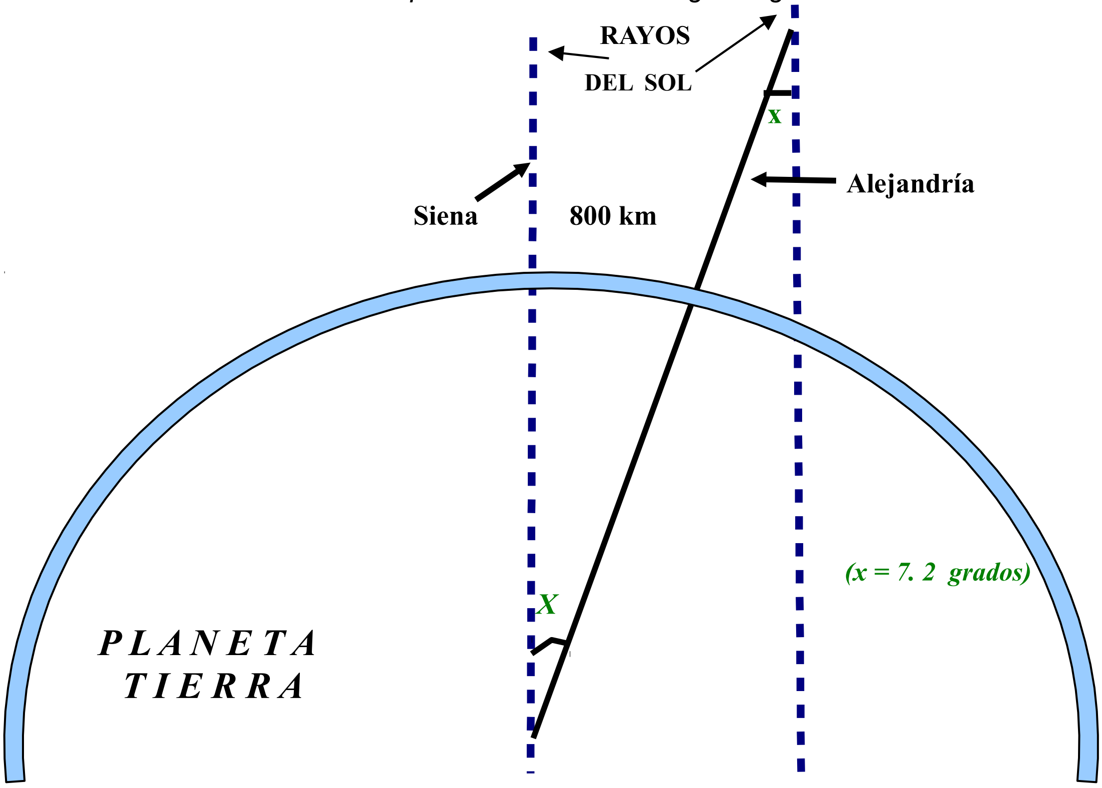
" 800 km representan una rebanada de 7.2 grados en el centro de la Tierra,

por lo tanto otros 800 km representarán otros 7.2 grados, y así sucesivamente".

Siguiendo este argumento, ¿ cuántas rebanadas habrá en total,

para cubrir toda la circunferencia Terrestre?

Nota: *En la siguiente figura,* ***x*** *es el valor del ángulo de la sombra que produce un palo vertical en Alejandría y al mismo tiempo es el valor del ángulo que se forma (en el centro de la Tierra) al prolongar las líneas que representan al palo en Alejandría y la línea que representa al palo vertical en Siena. Recordemos que toda transversal corta a dos líneas paralelas formando ángulos iguales.*



Ahora bien, si C representa el perímetro de la circunferencia de nuestro planeta, por regla de tres tenemos:

800 Km son a 7.2 grados como C es a 360 grados, es decir

$$\frac{800}{7.2} = \frac{C}{360}$$

Conclusión: *la Circunferencia Total de Nuestro Planeta es:*

$$C = (360)(800\ km) / 7.2 = 40\,000\ km.$$

Una Aproximación ***extraordinaria*** *para las herramientas utilizadas.*

Nota: *¡¡¡¡¡ La longitud de la circunferencia de la Tierra calculada en estos tiempos, es de 40, 070 km. !!!!!*

Comentario: *En el Fedón, Platón (423-347 a.C) ya menciona la esfericidad de la Tierra, y en el 430 a.C. Hipócrates de Cos había hecho la proyección de algunos cuerpos celestes sobre la Tierra presuponiendo su forma esférica (por ejemplo, la Luna). Por lo tanto, no podemos decir que Eratóstenes es el descubridor de la esfericidad de nuestro planeta aunque* ***si es el primero en*** *haber calculado la longitud de su circunferencuia.*

FASE DE CIERRE

ACTIVIDAD 86

Encargar a los estudiantes el material para la siguiente clase:

- una esfera de unicel,
- una lámpara de mano (podría ser un laser),
- un par de taquetes,
- un transportador
- y una cinta métrica.

2.22 SESION 21 - TEMA: Historia de la Ciencia (parte 2).

Competencias a fortalecer: *razonar, modelar, plantear problemas y resolverlos.*

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 87

El objetivo de esta sesión es que los estudiantes realicen una réplica del experimento que hizo Eratóstenes (para determinar la circunferencia de la Tierra) calculando de forma indirecta la circunferencia y el diámetro de un esfera de unicel.

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 88

Introducción

Este experimento se puede realizar en el salón de clase utilizando los siguientes materiales:

- una esfera de unicel,
- una lámpara de mano (podría ser un laser),
- un par de taquetes,
- un transportador
- y una cinta métrica.

La recreación:

Consiste en determinar indirectamente el perímetro de la esfera de unicel de la siguiente forma: medimos con la cinta métrica solo la distancia entre los taquetes (previamente colocados en la esfera simulando columnas verticales en las ciudades de Siena y Alejandría) y colocando la lampara de forma que uno de los taquetes no produzca sombra, medimos con el transportador el ángulo de inclinación del taquete que hace sombra; posteriormente aplicamos una regla de tres para determinar la longitud del perímetro de la esfera sin haber realizado dicha medida directamente. Finalmente medimos de forma directa el perímetro de la esfera para comparar nuestro resultado y damos paso a los comentarios de nuestros estudiantes.

FASE DE CIERRE

ACTIVIDAD 89

Reflexionar grupalmente sobre los resultados obtenidos por cada equipo.

2.23 SESION 22 - TEMA: Teorema de Tales de Mileto (parte 1).

Competencias a fortalecer: *razonamiento geométrico y resolución de problemas.*

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 90

El objetivo de esta sesión es que los estudiantes comprendan el significado geométrico y algebraico del teorema de Tales de Mileto así como que aprendan a utilizar dicho resultado para resolver ejercicios y problemas.

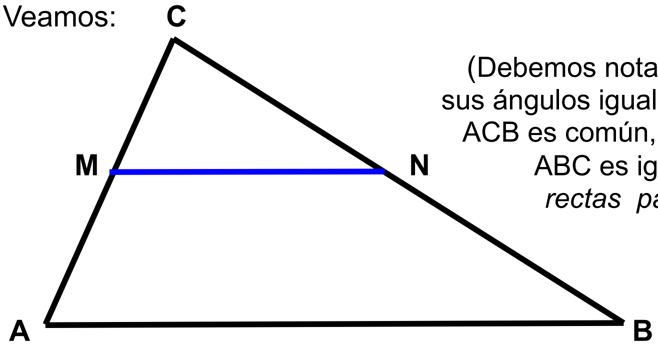
FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 91

(i) Enunciar el *teorema de Tales:* Si un triángulo tiene sus 3 ángulos iguales a los de otro triángulo, entonces los triángulos están en proporción. Es decir, cada uno de los 3 lados de uno de los triángulos se obtiene multiplicando el lado correspondiente del otro triángulo por un mismo número (llamado proporción).

(ii) Hacer la demostración en colaboración con los estudiantes:

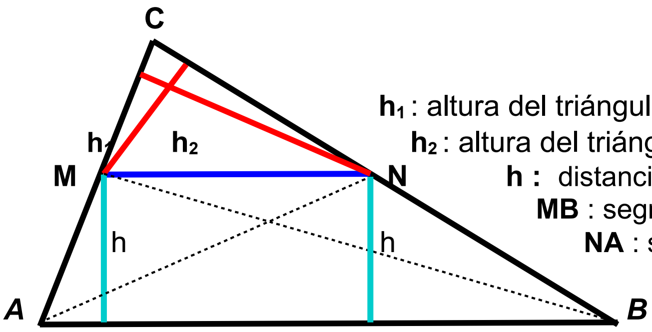
Dado un triángulo ABC (cualquiera), trazamos una recta paralela a AB que intersecte a los otros dos lados del triángulo (llamemos M y N a los puntos de intersección).

Veamos:



(Debemos notar que los triángulos ABC y MNC tienen sus ángulos iguales, por pares, puesto que el ángulo ACB es común, y tanto CAB es igual a CMN como ABC es igual a MNC por ser ángulos formados por *rectas paralelas cortadas por una transversal*)

Ahora trazamos las líneas auxiliares siguientes:



h_1 : altura del triángulo CMN tomando a CN como base,

h_2 : altura del triángulo CMN con CM como base.

h : distancia entre los segmentos MN y AB .

MB : segmento que une los puntos M y B.

NA : segmento que une los puntos N y A.

Ahora bien, el área del triángulo CMN es $\frac{1}{2} CM \cdot h_2$ *y también* $\frac{1}{2} CN \cdot h_1$ *, por lo tanto*

$$CM \cdot h_2 = CN \cdot h_1$$

, y de esta igualdad tenemos que

$$\frac{CM}{CN} = \frac{h_1}{h_2} \qquad \text{. . . . . . (\&)}$$

Enseguida observemos que los triángulos MNA y MNB tienen área igual a $\frac{1}{2} MN \cdot h$ *y en consecuencia los triángulos ACN y BCM también tienen áreas iguales.*

Por lo tanto, $\frac{1}{2}(CA \cdot h_2) = \frac{1}{2}(CB \cdot h_1)$ *, es decir*

$$\frac{CA}{CB} = \frac{h_1}{h_2} \qquad \text{. . . . . . (\& \&)}$$

Finalmente, de las igualdades (&) y (&&), tenemos que

$$\frac{CM}{CN} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{CA}{CB} \quad \text{es decir} \quad \frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB} \quad \text{y} \quad \frac{CB}{CN} = \frac{CA}{CM}$$

Análogamente, podemos obtener que

$$\frac{CA}{CM} = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{CN}$$

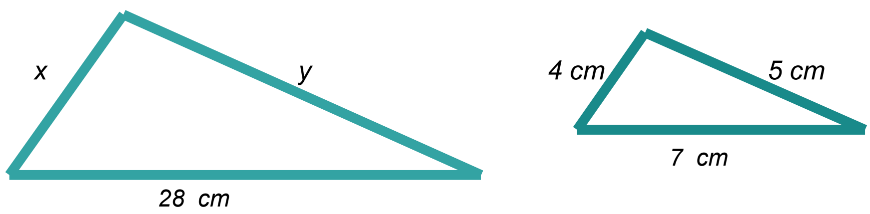
Por lo tanto, si un triángulo tiene sus ángulos iguales a los de otro, entonces los triángulos están en proporción.

FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 92

Ejemplo:

Si los siguientes triángulos tienen sus tres ángulos iguales (por parejas).

¿Cuánto valen los ángulos x e y ?

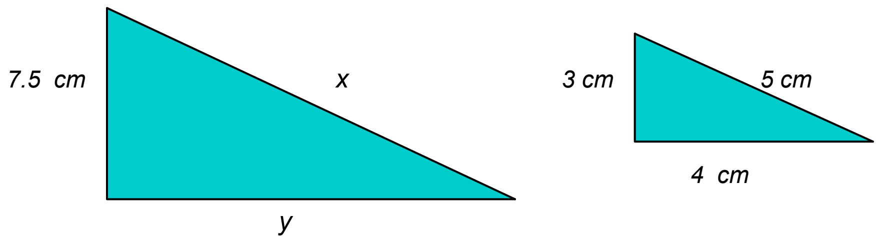


Solución. *Por el teorema de Tales, tenemos que:* $28 / 7 = x / 4 = y / 5$.

Por lo tanto, $x = 16$ *cm e* $y = 20$ *cm .*

ACTIVIDAD 93

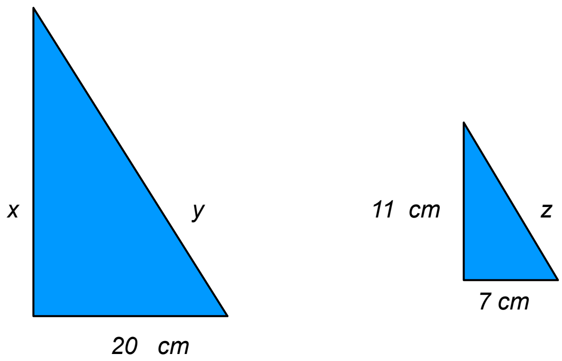
Ejercicios: 1) Si los siguientes triángulos tienen sus tres ángulos (respectivamente) iguales. ¿Cuánto valen los lados x e y?



Respuesta: *Por el teorema de Tales, tenemos:* $\frac{7.5}{3} = \frac{y}{4} = \frac{x}{5}$

Por lo tanto, $x = 12.5$ *cm* e $y = 10$ *cm.*

2) Si los siguientes triángulos tienen sus tres ángulos (respectivamente) iguales. ¿Cuánto valen los lados x, y, z ?



Respuesta: *Por el teorema de Tales, tenemos:* $\frac{x}{11} = \frac{20}{7} = \frac{y}{z}$

Por lo tanto, $x = 31.43$ *cm*, $y = 37.26$ *cm*, $z = 13.04$ *cm* .

Comentarios:

(i) Este último problema me parece doblemente interesante porque los estudiantes tendrán que aplicar además (del teorema de Tales) el teorema de Pitágoras.

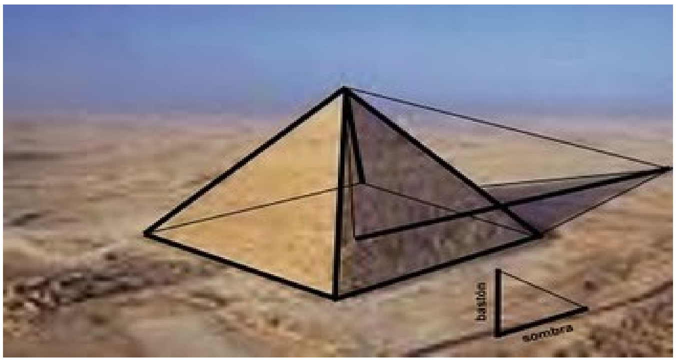
(ii) El teorema de Tales se cumple para cualquier par de triángulos (no solo para triángulos rectángulos) siempre y cuando tengan **sus 3 ángulos iguales por pares.**

2.24 SESION 23 - TEMA: Teorema de Tales de Mileto (parte 2).

Competencias a fortalecer: *razonamiento geométrico, modelar y resolución de problemas.*

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 94

El objetivo de esta sesión es que los estudiantes realicen una réplica del experimento que hizo Tales de Mileto, hace aproximadamente 2500 años, para determinar la altura de la gran pirámide de Egipto a petición del Faraón de aquel entonces. En este caso, lo que harán es determinar la altura de los edificios de la escuela así como del hasta bandera utilizando el famoso teorema de Tales.



"Cuenta la historia que en uno de los viajes de Tales a Egipto, el Faraón (conociendo la fama de éste como gran maestro de geometría) le preguntó si le era posible calcular (o aproximar) la altura de la gran pirámide de Keops. Tales respondió que sí e hizo lo siguiente:

*Colocó su bastón en forma vertical de modo que el triángulo formado por el bastón y su propia sombra, tuviera los mismos ángulos que el triángulo formado por la altura de la pirámide y la sombra de ésta. De forma que utilizando su propio teorema (puesto que podía determinar la longitud de su bastón, la de la sombra de éste y la longitud de la sombra de la pirámide) pudo obtener **fácilmente** la altura buscada (136 m aproximadamente) sin realizar dicha medición directamente, lo cual (por supuesto) habría resultado muy complicado"[29] .*

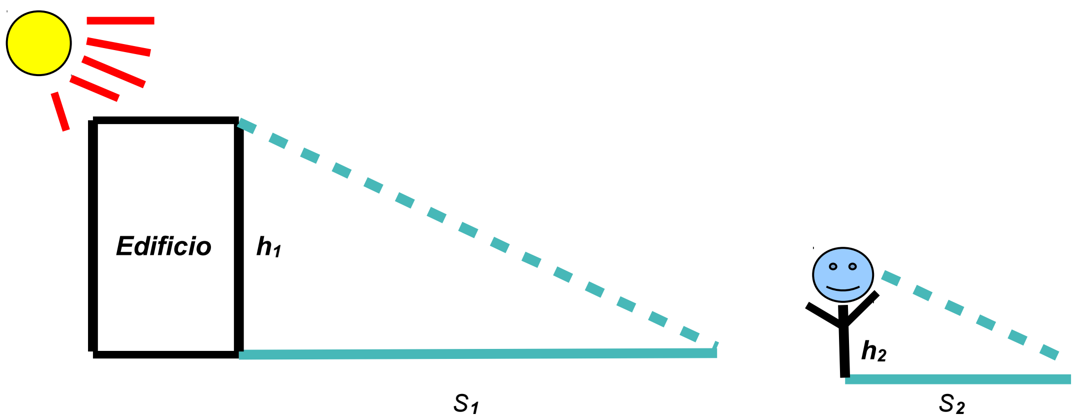
[29] http://www.profesorenlinea.cl/biografias/TalesdeMileto.htm

FASE DE DESARROLLO - ACTIVIDAD 95

Esta actividad se realiza en el patio de la escuela y el único requisito para llevarla a cabo es que sea un día soleado puesto que utilizaremos la longitud de ciertas sombras.

(i) Explicación :

Supongamos que queremos conocer la altura de uno de los edificios de la escuela, entonces le pedimos a uno de los estudiantes que se coloque a un lado del edificio para que su sombra quede junto a la del edificio. Veamos:



Por lo tanto, utilizando el teorema de Tales, tenemos que:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{S_1}{S_2} \qquad . \; . \; . \; . \; . \; (\&)$$

Ahora bien, como todos los datos anteriores son conocidos excepto h_1 pues solo despejamos h_1 y ya.

(ii) Realización práctica, de la actividad anterior, por parte de los estudiantes.

FASE DE CIERRE - ACTIVIDAD 96

Reflexionar sobre la actividad anterior.

Nota: Es muy importante, para su formación didáctica, que los estudiantes analícen y deduzcan que existen ***formas indirectas de medir distancias inalcanzables*** (que ellos pueden utilizar) y que están justificadas por determinados conocimientos matemáticos.

2.25 SESION 24 - Aplicación de la evaluación final

FASE DE APERTURA - ACTIVIDAD 97

El objetivo de esta sesión es evaluar (en cierta medida)[30] el nivel de adquisición y manejo de los conocimientos y habilidades matemáticas adquiridas durante el curso.

FASE DE DESARROLLO

ACTIVIDAD 98

Aplicación de la evaluación final.

EVALUACIÓN FINAL DE MATEMATICAS 1

NOMBRE: __________________________ GRUPO: __________

La presente evaluación pretende que leas con atención, observes, razones y respondas a cada problema en forma *individual*. Representa un referente que me permitirá ubicar los distintos grados de adquisición y manejo de los conocimientos y las habilidades matemáticas adquiridos durante el curso (como por ejemplo: razonamiento geométrico y espacial, descubrimiento y uso de patrones geométricos, resolución de problemas geométricos que implican construcciones con regla y compás, así como aplicaciones de fórmulas de áreas y perímetros.

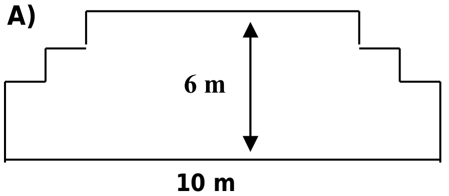
1) El consejo municipal de Tláhuac ha decidido poner un único reflector en un pequeño parque triangular, cuyos lados miden 15, 17 y 20 m. Si colocamos un triángulo en el plano cartesiano, con dichas medidas en centímetros, de modo que uno de sus vértices coincida con el origen y su lado mayor coincida con la parte positiva del eje X. ¿Cuáles serán las coordenadas del punto donde consideras que debería colocarse el reflector?

Las habilidades matemáticas a ser analizadas con este problema son: razonamiento geométrico y aplicación de los conocimientos en la solución de problemas geométricos.

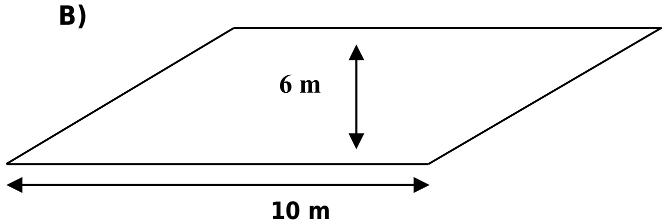
[30] Digo "en cierta medida" porque buena parte de la evaluación de adquisición y manejo de conocimientos y habilidades matemáticas se determinó durante el curso con las actividades realizadas en clase así como con la elaboración y entrega de las tareas.

2) De las siguientes figuras, menciona cuáles tienen igual perímetro y justifica tu respuesta.

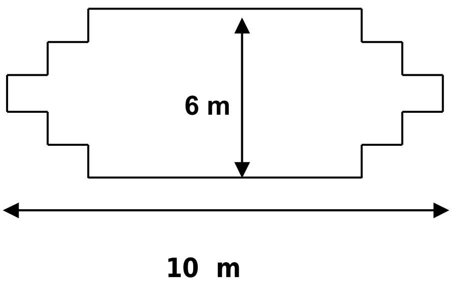
A)



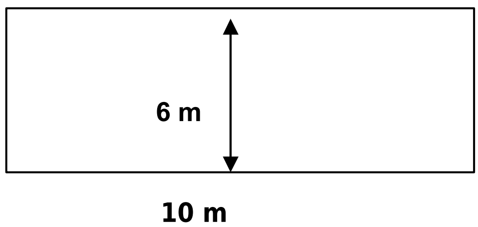
B)



C)



D)



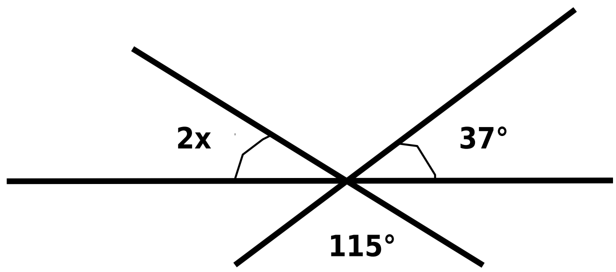
Las habilidades y competencias matemáticas a ser analizadas con este problema son: pensamiento y razonamiento geométrico y espacial, descubrimiento y uso de patrones geométricos y resolución de problemas que involucren longitudes y perímetros.

3) i) Enuncia el Teorema de Pitágoras y explícalo con un dibujo.

ii) Determina (sin calculadora) el área de un triángulo equilátero cuyo lados miden 10 cm. Traza un dibujo para explicar.

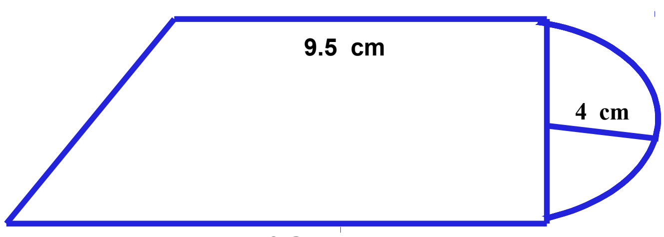
Las habilidades y competencias matemáticas a ser analizadas con este problema son: saber comunicar sus ideas por escrito, comprender el significado de generalización y aplicar sus conocimientos para resolver problemas geométricos.

4) ***En la siguiente figura, ¿ cuántos grados vale x ? Explica ¿porqué?***



Las habilidades matemáticas a ser analizadas con este problema son: razonamiento geométrico y algebraico, y resolución de problemas geométrico – algebraicos.

5) Determina el área de la siguiente figura, sin utilizar calculadora.
(Recuerda que pi = 3.1416)



Las habilidades matemáticas a ser analizadas con este problema son: razonamiento geométrico y espacial, aplicación de sus conocimientos para resolver problemas geométricos que implican el uso de fórmulas.

FASE DE CIERRE

ACTIVIDAD 99

Comentarios finales, agradecimientos y despedida del curso.

CAPITULO III

Descripción y reflexiones sobre la implementación de la propuesta.

Las 24 sesiones fueron impartidas en el plantel "José Ma. Morelos y Pavón" del Instituto de Educación Media Superior del D.F. (IEMS).

Duración de cada sesión: 1:30 hrs.

Materia: Matemáticas 1.

Nivel educativo: Primer semestre del Bachillerato

Estudiantes atendidos: 25.

Clase social de los estudiantes: media baja.

3.1 Descripción

El plan de acción, la aplicación y la reflexión de una secuencia didáctica son componentes indispensables que influyen en los resultados del aprendizaje durante la práctica docente. Su ausencia o improvisación pueden conducir al fracaso o a una variedad de experiencias incongruentes con los propósitos académicos establecidos. Mediante ellas mi intensión es *fortalecer* una serie de conocimientos y habilidades por medio de una propuesta de trabajo en la que *las estrategias didácticas*, *la participación de los estudiantes y las formas de evaluación* se organizaron en una secuencia temática cuyo orden fue dictado por un proceso de desarrollo lógico del aprendizaje, que va desde los más elementales hasta los más complejos. Además de destacarse la forma en que estos conocimientos se van entrelazando, se tomaron en consideración *los contenidos seleccionados, los aprendizajes esperados, los recursos didácticos, los tiempos disponibles, las características de los distintos desempeños académicos de los alumnos, así como algunas actividades alternativas ante posibles dificultades con determinados aprendizajes.*

La propuesta está concebida como un apoyo para el trabajo docente, el cual se complementa, verifica y enriquece a la luz del proceso de enseñanza-aprendizaje con los alumnos. De hecho, la propuesta es el resultado del trabajo desarrollado en dos distintas ocasiones. Inicialmente, en el primer semestre de la maestría, se trató de una propuesta puramente teórica (abstracta); posteriormente, en el segundo semestre, la implementé y en el proceso de reflexión la enriquecí dando lugar a una segunda versión; finalmente la segunda versión la implementé en el cuarto semestre, dando lugar la reflexión sobre esta última a la propuesta definitiva.

Es importante aclarar que el plan de acción de un curso no consiste en la distribución irreflexiva de contenidos y actividades; más bien, su elaboración debe considerar una filosofía y líneas de trabajo *sustentadas* en alguna teoría de enseñanza y aprendizaje. Esta propuesta está sustentada en el constructivismo y en los distintos ***niveles de desarrollo cognitivo*** estudiados por Piaget; así como en la resolución de problemas. Estas consideraciones son las que han orientado mi actividad docente en forma permanente.

Mi plan de acción se centró en la aplicación de una secuencia didáctica que plantea situaciones de aprendizaje encaminadas al logro de los propósitos y aprendizajes esperados. La secuencia está integrada por 24 sesiones de trabajo (20 en el aula, dos prácticas de campo, una actividad experimental y la observación y el análisis de un video científico. Cada sesión ha sido elaborada tomando en consideración las actividades que constituyen cada uno de sus tres momentos:

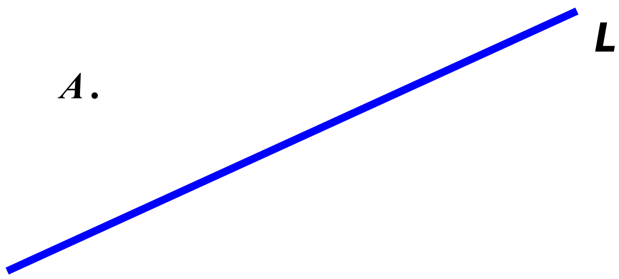
Fase de inicio: Permite plantear la intención o propósito de la sesión, contextualizar, motivar e indagar sobre los conocimientos previos de los alumnos.

Fase de desarrollo: Está constituida por actividades de aprendizaje correlacionadas, que movilizan los conocimientos, habilidades y actitudes necesarios para lograr los aprendizajes esperados.

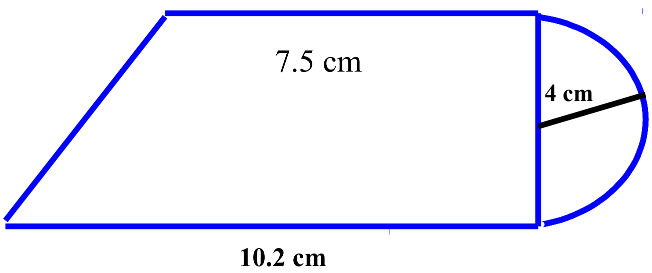
Fase de cierre: Constituye un espacio para concluir e identificar determinados aprendizajes, realizar generalizaciones, presentar resultados y hacer evaluaciones.

Comentario: Para analizar los resultados, considero prudente tener a la mano en esta parte los reactivos que constituyen la evaluación diagnóstica; los cuales reproduzco de nuevo:

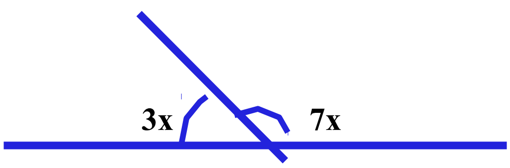
1) *Construye, con regla y compás, la recta paralela a* ***L*** *que pasa por el punto* ***A.***



2) *Determina el área de la siguiente figura:*



3) *En la siguiente figura, ¿cuántos grados vale "X"?*



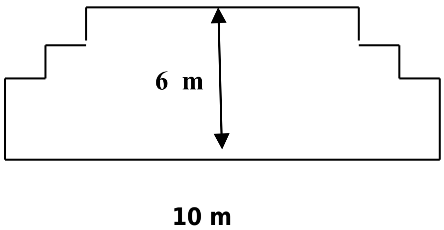
4) *i) Enuncia el Teorema de Pitágoras y explícalo con un dibujo.*

ii) Una pantalla de televisión mide 19 pulgadas de ancho y 15 de alto.

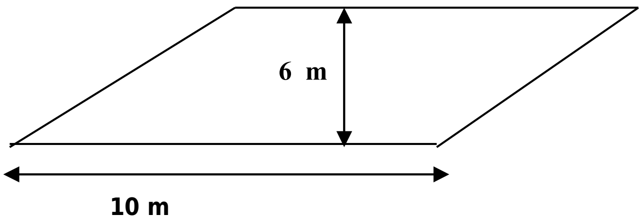
¿Cuántas pulgadas mide su diagonal, que es la medida que determina el tamaño de la TV ?

5) *De las siguientes figuras, menciona cuáles tienen igual área y justifica tu respuesta.*

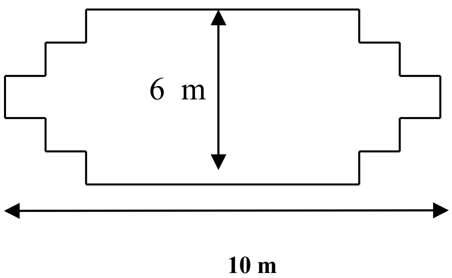
A)



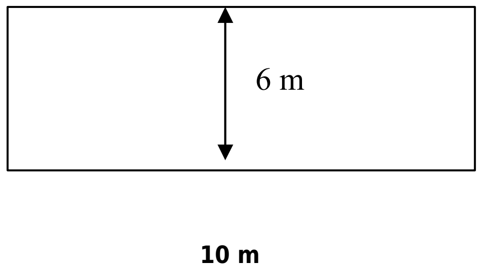
B)



C)



D)



Nota: Los reactivos que constituyen la evaluación final, se pueden consultar en las páginas 77, 78 y 79.

A continuación muestro la tabla que utilizo, como referente para ubicar a los estudiantes en tres distintos niveles de comprensión de conocimientos y de manejo de habilidades matemáticas, tras la aplicación (y análisis de los resultados) del examen diagnóstico. Esto es muy útil para adecuar la propuesta inicial antes de dar paso a su implementación en favor de la obtención de mejores resultados durante el proceso de enseñanza aprendizaje.

3.2 Resultados de la aplicación de la propuesta

La siguiente tabla muestra los distintos niveles de conocimientos y habilidades matemáticas a ser identificados a través de la aplicación de la evaluación diagnóstica.

Tabla 1. Niveles a ser identificados en el examen diagnóstico.

Número de reactivo	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	Hace intentos sin estar seguro adónde quiere llegar.	Construye un punto distinto de A, fuera de L. Pero no es el correcto para trazar la paralela.	Construye un punto distinto de A, fuera de L. Que es el correcto para trazar la paralela.
2	No maneja las fórmulas para el área del triángulo, el rectángulo y el círculo.	Maneja las fórmulas para el área del triángulo, el rectángulo y el círculo, pero carece de las habilidades matemáticas para resolver el problema.	Maneja las fórmulas para el área del triángulo, el rectángulo y el círculo y posee las habilidades matemáticas para resolver el problema correctamente.
3	No relaciona un concepto geométrico con un problema algebraico	Relaciona un concepto geométrico con un problema algebraico, pero el resultado es incorrecto	Relaciona un concepto geométrico con un problema algebraico, y el resultado es correcto
4	No ha entendido un resultado general, ni lo sabe utilizar para resolver problemas	Entiende un resultado general, no lo sabe expresar con claridad y lo utiliza para resolver problemas correctamente	Entiende un resultado general, lo sabe expresar y lo utiliza para resolver problemas correctamente
5	No ha comprendido el concepto de perímetro de una figura plana	Comprende el concepto de perímetro pero carece de las habilidades matemáticas para resolver el problema	Comprende el concepto de perímetro y posee las habilidades matemáticas para resolver el problema correctamente.

Tabla 2 . *Corresponde a los **resultados del grupo de aplicación** en el examen diagnóstico (columnas 1*

y 2) contrastados con sus resultados en el examen final (columnas 1 y 3).

[x indica el número de reactivo e y el nivel de complejidad alcanzado].

X	Y	Y
1	1	2.5
2	2	3
3	2	2.2
4	1	2.5
5	1	1.5

La siguiente gráfica nos muestra los resultados del grupo de aplicación en la evaluación diagnóstica (en azul) contrastados con sus resultados en la evaluación final (en rojo), con respecto a la tabla anterior:

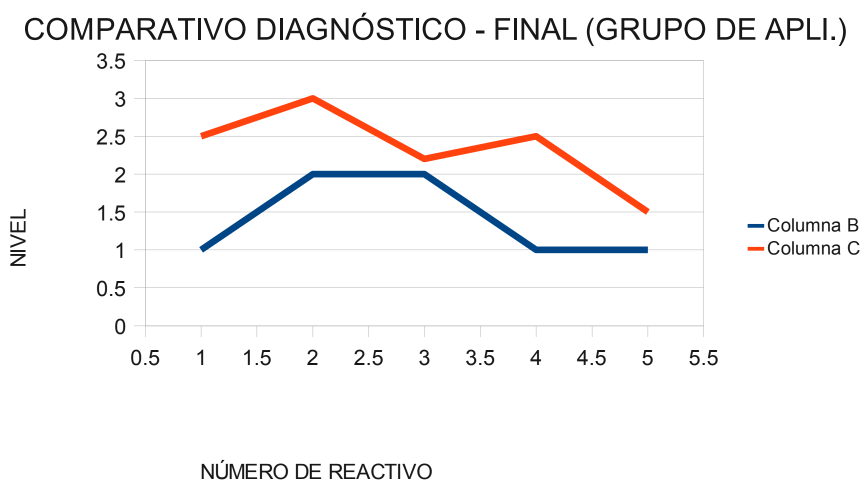
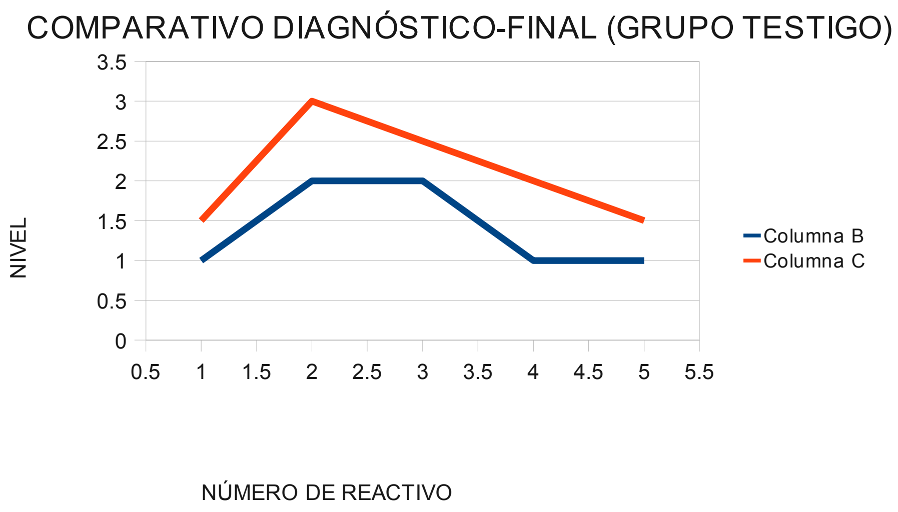


Tabla 3 . *Corresponde a los **resultados del grupo testigo** en el examen diagnóstico (columnas 1 y 2) contrastados con sus resultados en el examen final (columnas 1 y 3).*

[X indica el número de reactivo e Y el nivel de complejidad alcanzado].

X	Y	Y
1	1	1.5
2	2	3
3	2	2.5
4	1	2
5	1	1.5

La siguiente gráfica nos muestra los resultados del grupo testigo en la evaluación diagnóstica (en azul) contrastados con sus resultados en la evaluación final (en rojo), con respecto a la tabla anterior:



3.3 Conclusiones

- Respecto al alcance de los objetivos generales planteados al inicio de la propuesta, como resultado de la aplicación de la misma, logré que el grupo *"de aplicación"* mejorara su aprovechamiento un 14% con relación al aprovechamiento del grupo *"testigo".* Lo anterior se puede comprobar al contrastar los resultados de la evaluación diagnóstica con los de la evaluación final (de ambos grupos), el grupo de aplicación mejoró un 29 % con respecto a sus propios resultados (al inicio del semestre) y el grupo testigo mejoró un 15 % .

- Otra forma de apreciar que realmente **se fortalece** el aprendizaje de la Geometría Euclidiana, a través de la implementación de la presente propuesta, es observando los productos realizados por los estudiantes, para lo cual debieron:

  - Razonar geométrica y espacialmente al realizar las actividades de clase (tanto en el salón como fuera de él) así como las tareas.

  - Presenciar el surgimiento de los principales conceptos y resultados de la Geometría Euclidiana a través del doblado de papel, de las construcciones con regla y compás y de las demostraciones geométricas y algebraicas.

  - Valorar los conocimientos adquiridos al darse cuenta que dichos conocimientos, se han utilizado desde hace siglos, y ellos mismos los pueden utilizar para resolver problemas de la realidad.

  - Asumir el papel de verdaderos científicos en busca de una verdad (reproduciendo exitosos experimentos a escala).

  - Resolver acertadamente problemas Geométricos y Algebraicos.

- **Involucrar** a los estudiantes en la construcción de sus conocimientos (a través de estrategias como: "el doblado de papel" y "las construcciones con regla y compás") tiene un mayor impacto en su aprendizaje.

- Los productos obtenidos (realizados durante el desarrollo de las clases y a través de las tareas) me permitieron ubicar distintos niveles de comprensión y de desarrollo cognitivo en los estudiantes, de modo que ahora puedo perfeccionar las estrategias de clase considerando los conocimientos que necesitan ser más reforzados.

- Afortunadamente, he tenido la oportunidad de impartir este curso 3 veces con anterioridad, lo cual me ha permitido mejorar ciertos detalles (como el hecho de inducir el descubrimiento de patrones que den paso a las generalizaciones trabajando primero con triángulos, posteriormente cuadriláteros y pentágonos, para concluir con los polígonos de n lados).

- Reforzar el vínculo entre la geometría Euclidiana y el álgebra representa una ***fortaleza*** para alcanzar un adecuado nivel de comprensión y aplicación de los conocimientos en los futuros cursos de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.

- Es muy importante mencionar a los estudiantes, al inicio del semestre, que "en esta clase se trabaja en serio, se preparan las clases, se les escucha y se toman en cuentas sus opiniones; todo con el fin de que ellos **aprendan**". Pero a cambio, se les ***exige*** que acepten el reto de aprender y de cumplir con la parte de responsabilidad que les corresponde en su propia educación.

- No obstante la apatía (y la anómia) del sistema educativo en los últimos 40 años en nuestro país (fundamentada por el Dr. Zorrilla en su libro sobre "El bachillerato mexicano" citado en la bibliografía), lo más importante es que pese a todas las adversidades que existen para realizar nuestro desempeño docente, se nos permite **enseñar.** Es decir, la decisión y la responsabilidad de alcanzar verdaderos logros como docentes es nuestra y de nadie más.

- El llevar el aprendizaje más allá del aula contribuye a despertar en el estudiante ciertas inquietudes como: ¿De qué se va a tratar la clase de hoy ? o ¿porqué la clase es afuera del salón o no adentro? También les permite apreciar el valor de poseer ciertos conocimientos al momento de *enfrentar* ***el reto*** de resolver un problema.

- El carácter formativo de las matemáticas contempla el desarrollo de diferentes capacidades intelectuales: razonamiento geométrico y espacial, razonamiento lógico, generalización, particularización, análisis y ordenación; así como razonamiento por analogía. Se trata de un componente intelectual que contribuye a desarrollar las habilidades de la mente.

- Es muy importante que los estudiantes puedan comprobar que los procedimientos para enfrentar y resolver un problema pueden ser distintos pero todos ser válidos.

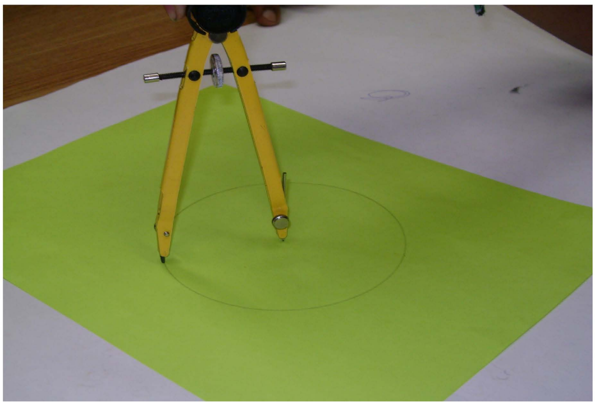
- La motivación es un factor fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

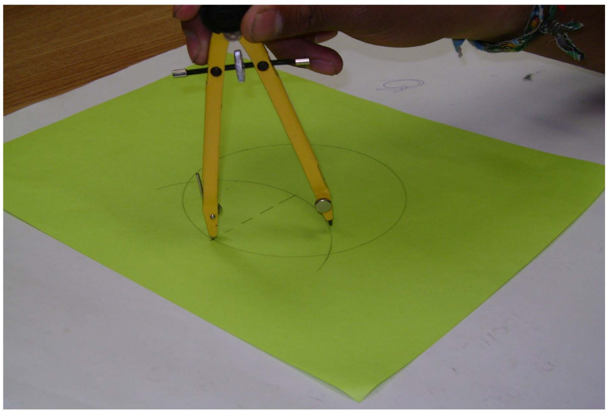
- El carácter instrumental de la matemáticas está fuera de toda duda. Pues se trata de una disciplina que nos ha permitido avanzar como especie en prácticamente todas las áreas del conocimiento.

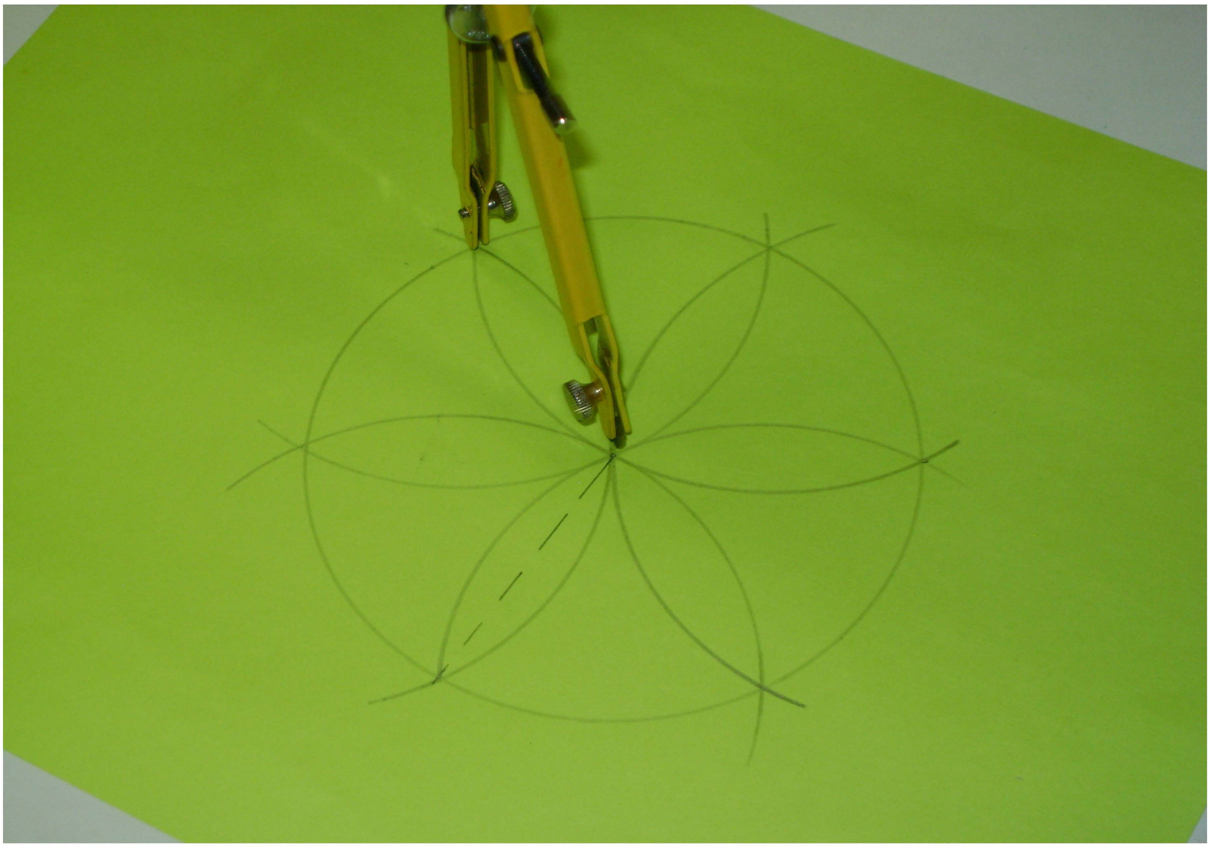
- Espero seguir perfeccionando el presente trabajo tomando en cuenta los comentarios de mis maestros y de mis compañeros, así como de los estudiantes.

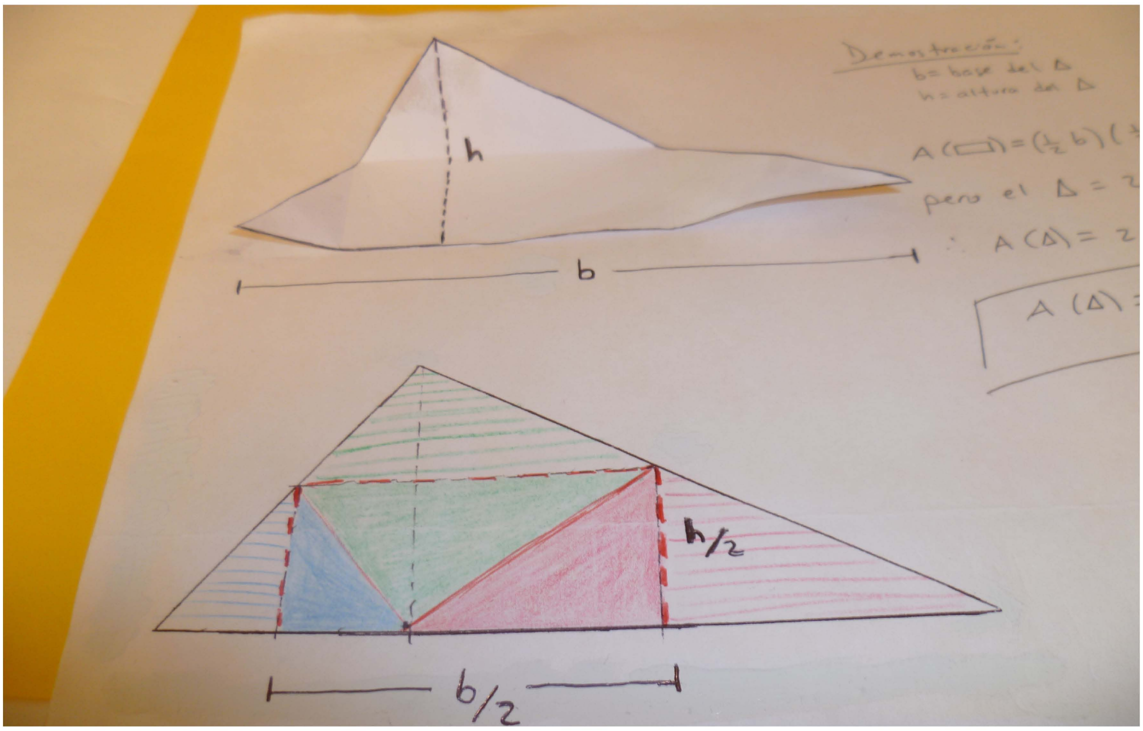
- Uno de mis principales propósitos es compartir la experiencia de haber implementado esta propuesta en un grupo real de nivel bachillerato.

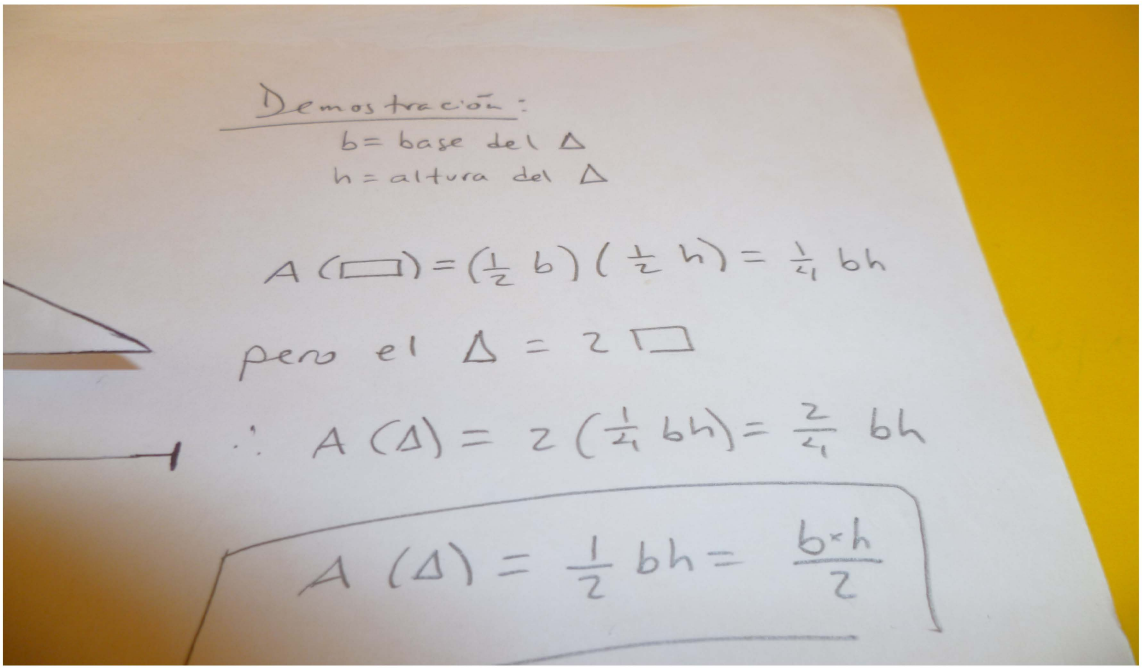
3.4 Galería

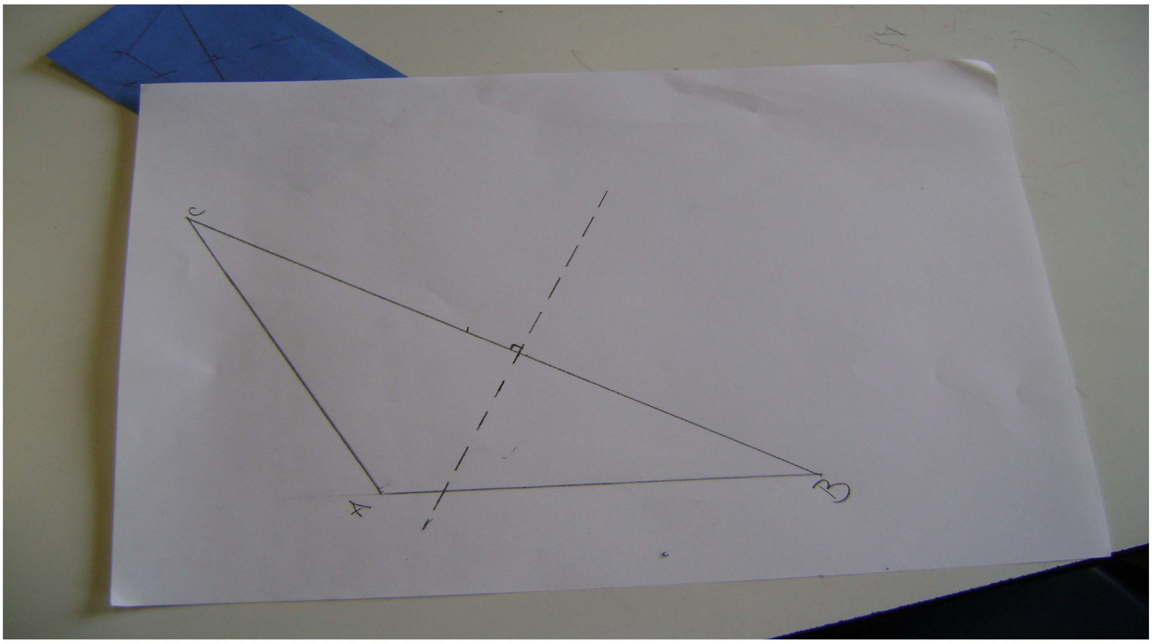


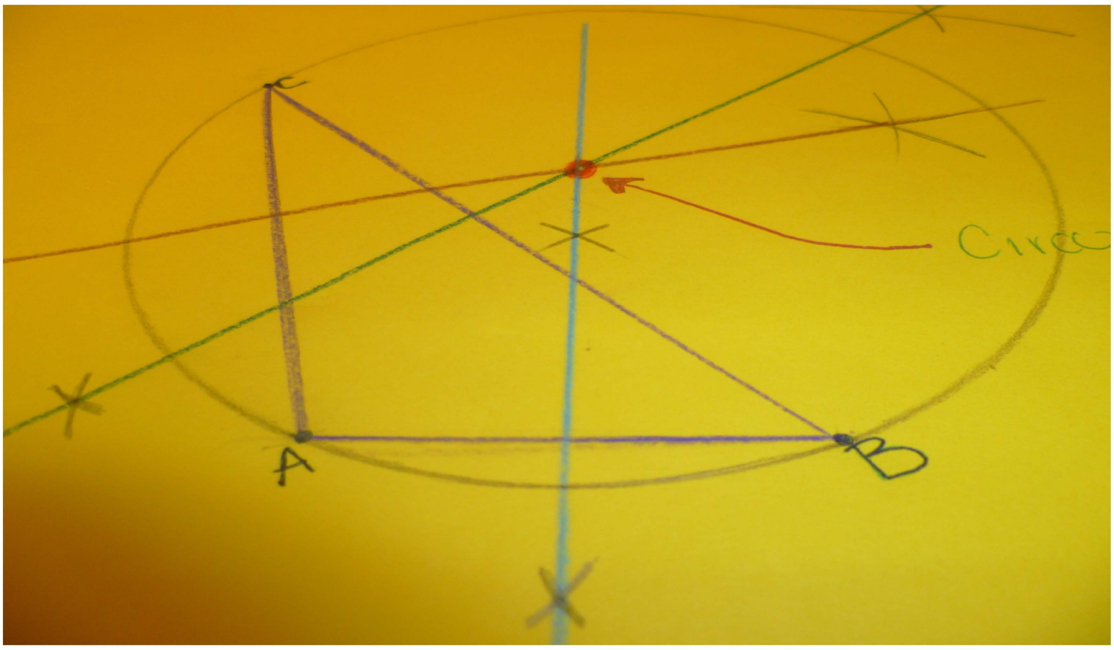


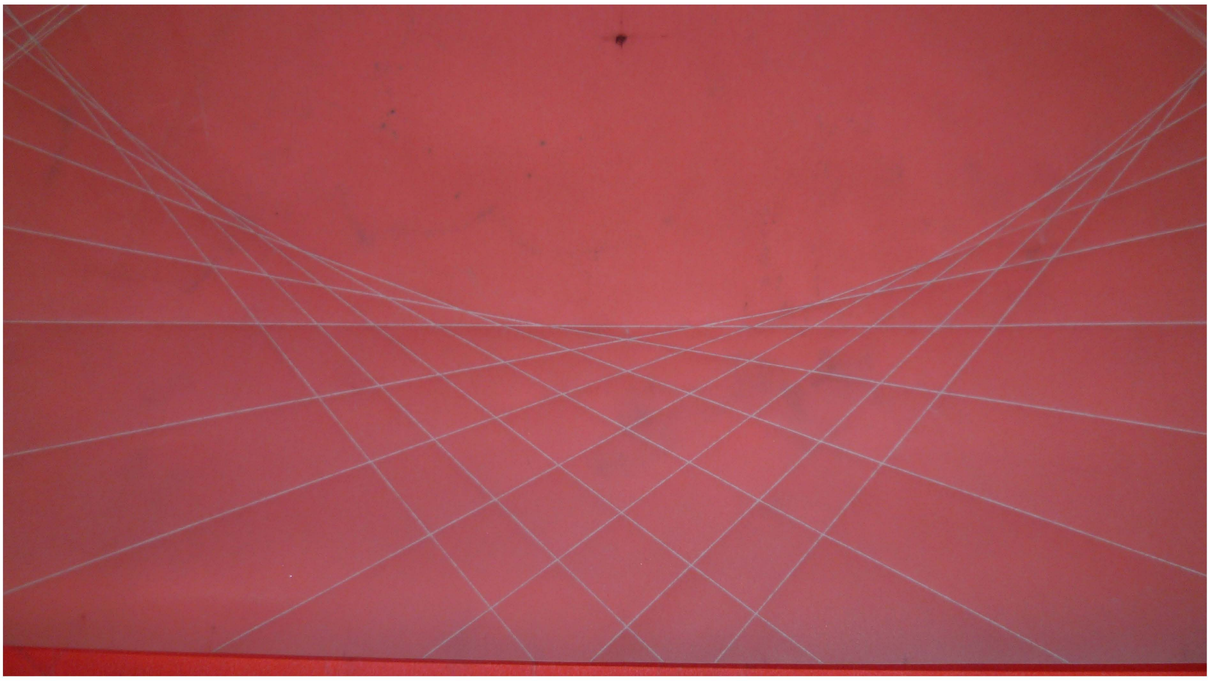


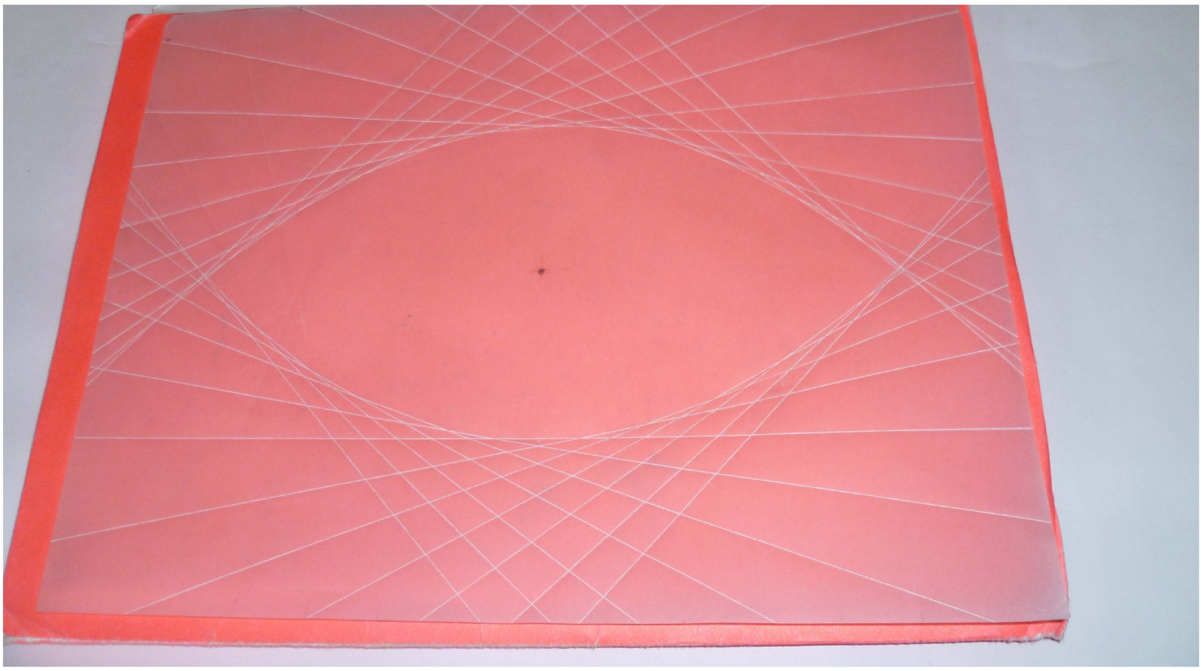

Demostración:
b= base del Δ
h= altura del Δ
h
b
h/2
b/2

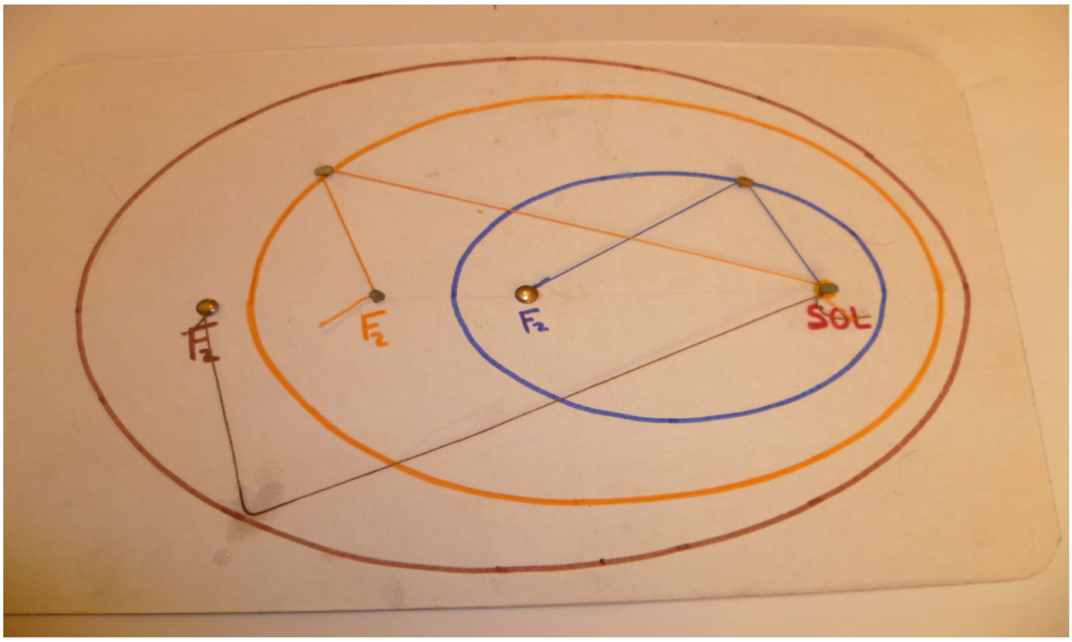

Demostración:
b= base del Δ
h= altura del Δ
A (▭) = (1/2 b) (1/2 h) = 1/4 bh
pero el Δ = 2 ▭
∴ A (Δ) = 2 (1/4 bh) = 2/4 bh
A (Δ) = 1/2 bh = b×h/2

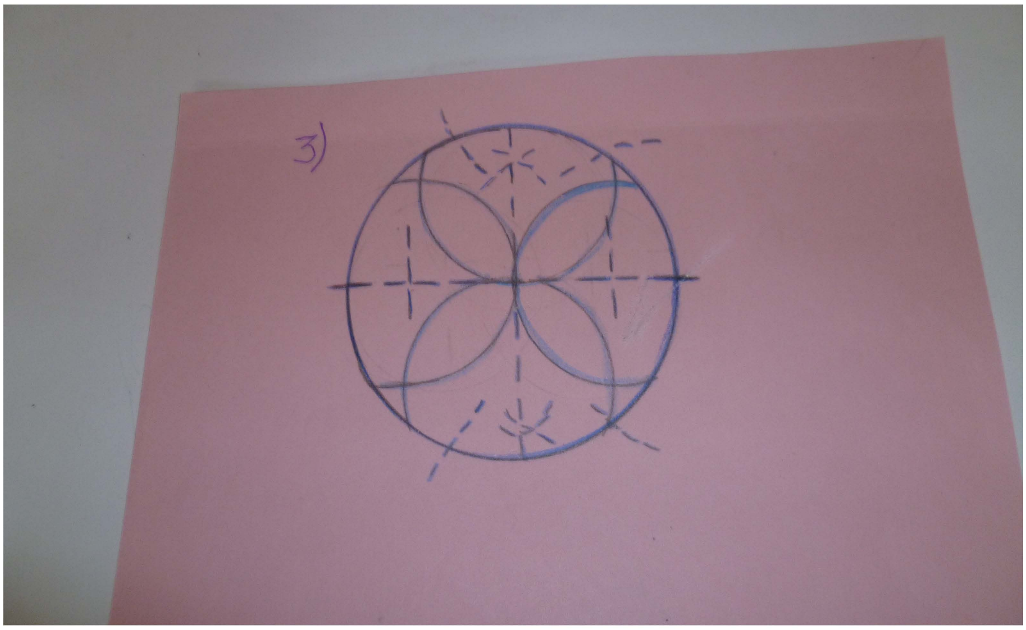

C
A
B


C
A
B






F2
F2
F2
SOL


3)

Bibliografía:

1. García L. Angel y González P. Elsa. "***Educación Matemática: Francia y México".*** IPN (2004)

2. Larson, R. And Hostetler, R. ***"Geometría"*** Toronto (Canada). Heath and Company. 3ª Edición. (2006).

3. Papalia D. Olds. ***"Desarrollo Humano".*** México, D.F. Mc. Graw Hill. (2005).

4. Rice P. ***"Adolescencia, desarrollo, relaciones y cultura".*** Madrid (España). Prentice Hall. (2000).

5. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE). "***Marcos Teóricos del proyecto Pisa 2003".*** España (2004).

6. ***"PISA para docentes".*** INEE - SEP, México (2007).

7. Zorrilla A. ***"El bachillerato mexicano. Un sistema académicamente precario. Causas y consecuencias".*** México D.F. IISUE-UNAM (2007).

8. Oceano grupo editorial. ***"Enciclopedia de la psicopedagogía Oceano".*** España (1999).

9. Nordby J. , Hall S. ***"Vida y conceptos de los psicólogos más importantes".*** Trillas, México (1997).

10. Gattegno Caleb . "***La pedagogía de las Matemáticas".*** Facultad de Ciencias de la UNAM, México (1999).

11. Douglas A. Grouws & Kristinn J. Cebulla. ***“Mejoramiento de la enseñanza en Matemáticas”.*** *IBE, UNESCO, CENEVAL, 2006.*

12. Sánchez Puente R. ***“Problematización del objeto de estudio”.*** Revista Perfiles Educativos, 1991.

13. Hornsby, ***“College Algebra (a graphical approach)”.*** Addison Wesley 1999 (USA).

14. Villella José. ***“Sugerencias para la clase de Matemáticas”.*** AIQUE. Argentina (1997).

15. Herbert J. Walberg, Susan Paik. ***“Prácticas Eficaces”.*** Illinois (USA). Educational Research Service. (2000).

16. Hansen V. L. ***“Geometry in Nature” .*** Wesley, Mass. 2009 (USA).

17. Viniegra Fermín. ***“Una Mecánica Sin Talachas”.*** Fondo de cultura económica. México D.F. (2007). 192 pp.

18. Hemmerling ***“Geometría Elemental”.*** Boston (USA). Uteha. 7ª Edición. (2007).

19. Alan Bishop. **“*Esculturación matemática”.*** Paidós. Barcelona, 2009.

20. Yakov Perelman. ***“Matemática Recreativa”.*** Paidós. Barcelona, 2010.

21. Michele Artigue. ***"Ingeniería Didáctica en Educación Matemática".***
Grupo editorial Iberoamérica. Bogotá, Colombia (1997).

22. Mario Albarrán Vázquez. ***"Métodos de investigación".***
Publicaciones Cultural. México (2009) .

23. Marisol Beltrán. ***"Desarrollo de habilidades del pensamiento".***
Grupo editorial Exodo. México, D.F. (2010).

24. Rocío Quesada. ***"Como planear la enseñanza estratégica".***
Editorial Limusa. México, D.F. (2010).

25. Richard Courant. ***"¿Qué son las Matemáticas?".***
Fondo de Cultura Económica. México, D.F. (2007).

26. Augusto Fernández. ***"¿Qué es la Ciencia?".***
Editorial Trillas. México, D.F. (2003).

27. Carl Sagan. ***"Cosmos".*** Editorial Planeta. México, D.F. (2009).

28. L. Galdós. ***"Matemáticas Galdós".***
Editorial Cultural. Madrid, España (2009).

29. Carlos Iborra. ***"Geometría".*** Editorial Cultural. Madrid, España (2010).

30. A. Guzmán. ***"Geometría".*** Editorial Cultural. Madrid, España (2010).

Bibliografía Digital:

1. http://www.Pisa-as-Problemas
2. *http://www.**pisa**.oecd.org*
3. *http://www.Informe_PISA_Tablas_de_Clasificacion*
4. *http://*www.edumat.uab.es/ipdmc/cap/presentacompetenciasmat.pdf
5. *http://www.juntadeandalucia.es/.../competencias_**basicas***
6. http://www.profesorenlinea.cl/biografias/TalesdeMileto.htm
7. http://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria.pdf
8. http://www.sectormatematica.cl/librosmat/mat-divertida.pdf
9. *http://*www.matebrunca.com/Contenidos/.../congruencia-triangulos.pdf
10. *http://www. mateblogtam.blogspot.com/.../congruencia-de-tringulos.html*
11. *http://www.educarchile.cl/.../VerContenido.aspx*
12. *http://www.es.wikipedia.org/wiki/Congruenciadetriángulos*
13. *http://*www.pps.k12.or.us/district/depts/.../SEC_37.HTM