Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Valuación Actuarial de Credit Spread Options

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
EDUARDO ALEJANDRO ESPINOSA CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:
MTRO. MIGUEL ÁNGEL SÁNCHEZ BARQUÍN

Julio 2013

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

ACTUARÍA

TESIS

VALUACIÓN ACTUARIAL DE CREDIT SPREAD OPTIONS

AUTOR: EDUARDO ALEJANDRO ESPINOSA CRUZ

ASESOR: MIGUEL ÁNGEL SÁNCHEZ BARQUÍN

JULIO 2013

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mi máma y a mi hermana, dos grandes personas en mi vida.
Les agradezco todo su apoyo, su comprensión, el haberme soportado a lo largo de todo este proceso; también les agradezco su ejemplo y todas las cosas que me han dejado como enseñanzas.
También agradezco a Dios todo su apoyo, porque sin Él nada podría hacer.
Muchas gracias.

AGRADECIMIENTOS

En este apartado quiero dar las gracias por la ayuda y el apoyo aportado al autor para la realización de esta tesis a todas aquellas personas que directamente o indirectamente colaboraron en este proyecto.

Principio agradeciendo a mi familia, en especial a mi mamá y a mi hermana por su comprensión y apoyo.
Les agradezco también a las siguientes personas que, a través de asesorías, entrevistas de trabajo, (que me han resultado inspiradoras), y consultorías me permitieron enriquecer esta obra: a Ricardo García, a Rosé Ripoll, al profesor Daniel López, a Nabucodonosor Roffe, al Dr. Arturo Erdely, al profesor Miguel Ángel Macías, a Marco Fuentes, a mi asesor el Mtro. Miguel Ángel Sánchez; también agradezco a los profesores Dr. John Hull y Dr. Edward Altman por sus consejos en lo tocante al tema de la tesis.
También les agradezco a mis amigos, en especial a Ulises, a Betanzos y a Carlos. Muchas gracias también Álan, por la idea de tener algunas sesiones de trabajo en nuestras respectivas tesis en un Starbucks.

Finalizo también dando gracias a las demás personas, compañeros de trabajo y amigos, que me brindaron su apoyo y sus palabaras de apoyo para la realización de esto.

A todos, ex toto corde, muchas gracias.

Índice general

RESUMEN

En esta tesis se aborda la valuación de los Credit Spread Options (opciones de spread crediticio), que son derivados sobre el diferencial de tasas de interés de un bono corporativo y de un bono soberano. El enfoque con el que se maneja la valuación es mediante ecuaciones diferenciales estocásticas, partiendo de procesos de Ornstein-Uhlenbeck.
En el trabajo se presentan dos modelos: el primero es el modelo clásico de Longstaff y Schwartz de dos factores. Éste parte de dos ecuaciones diferenciales estocásticas, una para el spread de crédito y otra para la tasa libre de riesgo. Partiendo del supuesto de que el spread presenta reversión a la media y es estacionario, llegan a una fórmula de valuación. El segundo modelo es el de Nicolas Mougeot de 3 factores. Mougeot parte también del modelo de dos factores y demuestra que es fundamental modelar cada uno de los factores del spread por separado. Su modelo parte de tres ecuaciones diferenciales estocásticas, mediante las cuales se obtiene una fórmula cerrada de valuación. Este es el modelo principal que se aborda en la tesis.
La valuación se maneja mediante un contraste con el modelo clásico de opciones plain vanilla de Black-Scholes-Merton. Al final se presenta un ejemplo de valuación de opciones tomando en cuenta instrumentos de renta fija de México.

PREFACIO

La presente tesis versa en la valuación de las opciones de spread crediticio o credit spread options. El enfoque que tiene la valuación es mediante ecuaciones diferenciales estocásticas.
El origen del tema de este trabajo proviene de la búsqueda que para ese momento yo estaba haciendo sobre derivados financieros, en particular sobre opciones que no fueran las plain vanilla ya que buscaba hablar sobre otro tipo de opciones. Como en esa época mi interés estaba centrado en profundizar en temas de riesgo de crédito, comencé investigando sobre derivados de crédito. Fue así como llegué a los credit spread options.
Lo primero que me llamó la atención fue el activo subyacente de estos contratos, tema poco conocido para mí. Y al adentrarme al estudio de la valuación como tal, me dí cuenta de la posibilidad de hacer un estudio conjunto del modelo clásico de Black-Scholes-Merton y el de los CSO's y los beneficios que esto tendría. Era también para mí un objetivo el poder estudiar de manera más detallada dicho modelo clásico: túve la idea de que sería posible conjuntar dicha profundización con la investigación de un tema nuevo pero relacionado. Fue esta idea la que me llevó a revisar varios artículos clásicos de finanzas cuantitativas y la que condujo la forma de estudiar los dos modelos de valuación que aquí se presentan. Y por otro lado también durante este período se fue moldeando la parte de mi plan de vida que tiene que ver con el desarrollo profesional, en particular lo tocante al sector laboral donde busco crecer, teniendo como base los fundamentos profesionales que obtuve durante la licenciatura. Este aspecto también influyó de manera importante en este trabajo.
De esta forma fue que nació esta tesis. Espero que el lector sea atrapado por el presente tratado, justo como yo lo fui por el desarrollo de la obra.

INTRODUCCIÓN

En plena década de los 60 del siglo XX el profesor Paul Samuelson es invitado a visitar la Sorbona, una universidad en París. En el recorrido clásico que se hace por la biblioteca de la institución el profesor encuentra un peculiar libro empolvado, abandonado desde hacía mucho tiempo en uno de los estantes de este lugar.

En 1900 se presenta un examen para obtención de doctorado mediante la defensa de una tesis. El trabajo se llama “Théorie de la Spéculation” (Teoría de la Especulación). En este documento el autor realiza una propuesta de cómo se puede obtener el valor de cierto tipo de valor financiero, las opciones (un tipo de instrumento financiero derivado), en presencia de incertidumbre por el cambio en el valor de los instrumentos financieros que se manejan en los mercados financieros. No obstante el avance que implica la investigación que realiza el doctor, su aportación no es tomada en serio durante varias décadas. El trabajo de Louis Bachelier pasa desapercibido durante algún tiempo.

Pero Samuelson se encuentra precísamente con el trabajo de Bachelier. Al darle lectura, cae en la cuenta del tesoro que yace en sus manos, así que él mismo comienza a estudiar el tema tratado en la tesis. La fórmula del precio de las opciones dada por Bachelier contiene una imprecisión que hace que se obtengan valores incorrectos al aplicarla. Samuelson se da cuenta de ello y, basado en la obra de Bachelier, hace una nueva propuesta. Pero también tiene un detalle su trabajo: que para poder aplicar su formulación es necesario trabajar con dos componentes desconocidos en ésta. No obstante lo anterior, el camino ya estaba dado, se había perfilado ya que el problema podía ser resuelto.

En mayo de 1973 los profesores Fisher Black y Myron Scholes publican el artículo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" (Valuación de Opciones y Obligaciones Corporativas) tras varios intentos infructuosos para que su trabajo fuera aceptado por alguna editorial de trabajos de investigación. Mediante el desarrollo de los dos autores y, con la ayuda de Robert Merton (quien también funge como revisor del artículo), quien a su vez refuerza un argumento del trabajo mediante la investigación del doctor Kiyoshi Itô, que estudió una forma de poder predecir la trayectoria que tomará un cohete al ser lanzado a algún punto en particular, dan en el clavo del problema de Samuelson y llegan a una nueva fórmula. La "fórmula perfecta" se había hallado. Esta fórmula es conocida como *la fórmula de Black y Scholes*.

Por lo anterior, Louis Bachelier goza ya de reconocimiento internacional por su legado, siendo considerado como el padre de las Finanzas Matemáticas Modernas. Paul Samuelson también ha sido reconocido por la importancia de las investigaciones que hizo a lo largo de su vida. Y Robert Merton y Myron Scholes fueron laudeados con el premio Nóbel de Economía en 1997. Desafortunadamente el profesor Fisher Black había muerto añós atrás, razón por la cual no se le otorgó el premio a él también. Pero en la ceremonia de premiación fue mencionada su importante aportación a la investigación.

La fórmula de Black y de Scholes es utilizada en todo el mundo financiero por su simplicidad y por los resultados que da. Y por otro lado, el trabajo de Black, Scholes y Merton han dado lugar a nuevas investigaciones y nuevas propuestas en el ámbito de las finanzas. Un ejemplo de ello es lo que se desarrollará en el presente trabajo.

En esta tesis estudiaremos la valuación de un tipo de opción financiera en particular, la de las opciones de spread crediticio o Credit Spread Options (CSO's). La metodología que seguiremos viene dada por el objetivo de este trabajo, que es, a saber: *Valuar, mediante una metodología análoga al modelo de Black-Scholes y Merton, los Credit Spread Options, ubicándolos dentro del contexto de la Administración del Riesgo.*
En este sentido, nos basaremos en el Cálculo Estocástico, la teoría que aplica Merton en el trabajo de Black y de Scholes. Y para el desarrollo del estudio, contrastaremos la propuesta que presentamos, desarrollada por Nicolas Mougeot, con el modelo mismo de Black-Scholes y Merton.

El trabajo estará dividido en 5 capítulos. Los tres primeros concentran el marco teórico de la tesis, y los últimos dos representan el desarrollo de la tesis.

En el primer capítulo haremos un breve estudio sobre la Administración del Riesgo, en donde vemos que esta asignatura se nutre de dos fuentes. Una es, por un lado, la Administración misma y por el otro está el análisis financiero de riesgos.
En el segundo capítulo daremos un resumen de algunos tipos de riesgos financieros, en especial el Riesgo de Mercado y de Crédito, que son las principales instancias que influyen en el comportamiento de nuestro objeto de estudio. Y también en este capítulo estudiamos lo que son los Instrumentos Financieros Derivados. Veremos allí su definición, cómo se clasifican, y varios ejemplos de derivados. Con esto motivaremos lo que son las opciones de spread de crédito.
Algunos fundamentos de Cálculo Estocástico serán proporcionados en el capítulo tercero. Esta rama de la Teoría de la Probabilidad representa la base sobre la cual daremos la valuación del intrumento derivado en cuestión.
Para el capítulo cuarto se tendrá la presentacion de la valuación de los CSO's. Aquí presentaremos dos modelos. El primero será el del artículo de Longstaff y Schwartz, que representa el zócalo para el modelo central de la tesis, la propuesta de Mougeot. Y con el fin de presentar de una forma más completa el esquema de valuación y teniendo en cuenta la importancia histórica de los trabajos previos, presentamos varios detalles del proceso de valuación de Black-Scholes y Merton, que nos permirán hacer el contraste con la propuesta del presente trabajo. Presentamos también aquí un ejemplo de valuación de estas opciones tomando en cuenta instrumentos financieros de México.
Y en el último capítulo tendremos las conclusiones que en lo general y en lo particular se tendrán en este desarrollo. En este marco conjuntaremos todos los elementos relevantes que a lo largo del trabajo mencionaremos y desarrollaremos. También presentaremos algunas alternativas para la valuación de nuestro derivado, caminos que representan otros temas de investigación completos.

En mayo del presente año (2013), se conmemorará el cuadragésimo aniversario de la publicación del artículo seminal de Black y Scholes. Desde ese momento el mercado de derivados ha cambiado por completo. Se han desarrollado muchos productos nuevos y se han robustecido los instrumentos que ya existían. Este trabajo representa un punto de inflexión en el desarrollo

mismo de las Finanzas Matemáticas. Y en la primavera de este año se celebrará también el cuadragésimo aniversario de la publicación del también fundamental artículo de Robert Merton "Theory of Rational Option Pricing" (Téoría de Valuación Racional de Opciones). Este artículo generalizó y reforzó varios aspectos del trabajo anterior.
Sirva este marco para iniciar un punto de reflexión sobre la importancia que tienen estos dos trabajos en los mercados financieros del día de hoy. La presente tesis y las dos propuestas de valuación que se darán están inspiradas en estas obras. Sirva pues este preámbulo para principiar nuestro estudio.

Capítulo 1

FUNDAMENTOS DE ADMINISTRACIÓN DEL RIESGO

1.1. Conceptualización de la Administración del Riesgo

La cobertura mediante Instrumentos Derivados es una de las ideas centrales de la Administración del Riesgo. La cobertura de riesgos es en sí misma parte de la esencia de esta entidad. Pero, ¿qué es la Administración del Riesgo?. Se proporciona enseguida la definición; no obstante, el trabajo mismo arrojará luces sobre su significado y su valía para todas y cada una de las instituciones y personas que viven estos entes: los riesgos.

Para los fines de esta primera parte de la tesis, entendamos a los derivados como un producto financiero. Llegado el momento se proporcionará su definición formal, habiendo establecido el contexto en donde estos productos actúan.

Los conceptos que mencionaremos provienen de Jorion [33], Venegas [57] y de De Lara [19], [20].

La Administración del Riesgo misma ha ido desarrollándose a lo largo del tiempo, evolucionando conforme han ido generándose más modelos de riesgo, más complejos y enfocados a resolver alguna problemática pendiente del área. En consecuencia, se tienen subdivisiones-especializaciones de la Administración del Riesgo, como son la Administración Empresarial del Riesgo (Enterprise Risk Management), Administración Actuarial del Riesgo (Actuarial Risk Management), una que es realmente un sinónimo, la Administración del Riesgo Financiero (Financial Risk Management), entre otras.

Comencemos mencionando lo que es la Administración del Riesgo.

Definición 1.1.1 (Administración del Riesgo)**.** *La Administración del Riesgo Financiero es el proceso de lidiar con la incertidumbre que se genera en los mercados financieros. Conlleva la evaluación de los diversos riesgos financieros que encara una institución y la elaboración de estrategias administrativas que estén acorde con las prioridades de la institución y las políticas que ésta sigue. Un manejo proactivo de los riesgos financieros puede derivar en una ventaja competitiva para la institución.*

Veamos ahora la siguiente

Definición 1.1.2 (Administración del Riesgo Corporativo)**.** *La Administración del Riesgo Corporativo es el proceso de identificar los riesgos que tiene una firma, pronosticar la severidad de dichos riesgos en los procesos de negocio, trabajar los riesgos organizadamente, minimizando las pérdidas que estos pudieren ocasionar y lograr que los riesgos generen oportunidades de crecimiento y progreso para las firmas.*

Aunque en esencia ambas definiciones son la misma, el elemento que las distingue es la entidad que debe de seguir los procesos mencionados. Con esto queremos recalcar que el tipo de acciones que se tengan que establecer para manejar adecuadamente los riesgos, estarán en función del tipo de compañía o institución de la que se trate. En este punto surge una aclaración importante, que se vislumbra a partir de las dos definiciones anteriores: este trabajo está dedicado al estudio de los riesgos cuya ocurrencia implica una pérdida financiera en instrumentos financieros, así como todas las herramientas, procesos, clasificaciones que se mencionen. Por lo tanto, temas como riesgo arquitectónico, vistos intrínsecamente, no serán tratados aquí.

Como se mencionó líneas pretéritas, por una parte, la Administración del Riesgo ha ido evolucionando a lo largo del tiempo, especializándose en el tipo de instituciones que requiere implantar la disciplina; por otro lado, también ha ido incorporando a su objeto de estudio más tipos de riesgo, que se han hecho presentes en los recientes acontecimientos históricos: algunos que eran ya conocidos pero no se les había puesto su debida atención e importancia, y otros nuevos, que se generan por las vicisitudes que atraviesa el mundo. Tomando en cuenta esto, los estudiosos de la materia han establecido una taxonomía, han clasificado a los diversos tipos de riesgo de acuerdo a ciertas características, con el fin de hacer más eficiente el estudio de la Administración del Riesgo. Mencionaremos posteriormente la principal clasificación de las variantes de los riesgos financieros y situaremos a los Credit Spread Options en los escaques que le corresponden.

Hasta ahora hemos hablado de lo que es la Administración del Riesgo y hemos establecido algunas de las vertientes sobre las cuales la disciplina está avanzando, en cuanto a especializaciones se refiere. Hemos dicho cosas acerca de los riesgos; empero, qué es en sí el Riesgo.
Etimológicamente hablando, la palabra riesgo viene del latín risicare, que significa atreverse o transitar por un terreno peligroso. En términos del ámbito financiero y corporativo el riesgo es...

Definición 1.1.3 (Riesgo)**.** *Riesgo es la posibilidad de ocurrencia de un evento al que se está expuesto, cuyas consecuencias derivan en pérdidas financieras.*

Dado que a lo largo del presente trabajo se hablará sobre inversiones financieras y consecuentemente de la Administración de Inversiones, es conveniente dar una segunda definición de riesgo, que refleje el objetivo del producto financiero a analizar. La definición es, a saber:

Definición 1.1.4 (Segunda definición de Riesgo)**.** *Es la probabilidad de que el rendimiento real de una inversión sea menor al rendimiento esperado por el inversionista.*

Esta definición, aunque reduce el alcance del concepto previo de riesgo, enmarca la naturaleza de los productos financieros derivados, es decir, el ambiente en el cual se analiza su objeto de estudio. Posteriormente se analizará lo que se acaba de mencionar, en un apartado específico.

Ahora que se ha explicitado qué es el riesgo y qué es la administración del riesgo, procedemos a analizar el proceso de la administración del riesgo y la clasificación de los riesgos financieros.

1.2. Principios de la Administración del Riesgo

Para entender la manera en que la administración de riesgos funciona en las organizaciones, es conveniente tener en cuenta los principios rectores de su labor. A partir de dichos principios, podremos ver con mayor claridad la forma en que se debe de proceder en el tratamiento de los riesgos.

La Organización Internacional para la Estandarización, que es un organismo que promulga normas de propiedad industrial y comercial (generalmente los estándares que divulga se convierten en leyes), emitió un listado de los principios que deben regir a la administración del riesgo. Estos siguen a continuación.

Principios de la Administración del Riesgo

La Administración de Riesgos debe:

- crear valor (a la firma)
- ser una parte integral del proceso organizacional
- ser parte de la toma de decisiones
- abordar de manera explícita la incertidumbre
- ser sistemática y ordenada
- estar basada en la mejor información disponible
- ser adaptada
- tomar en cuenta los factores humanos
- ser transparente e incluyente

- ser dinámica, iterativa y respondiente a los cambios
- ser capaz de generar mejoras continuas e inovaciones

Estas propiedades que enmarcan la administración del riesgo están estrechamente vinculadas con una parte de la razón de ser misma de la disciplina, esta es, como en su nombre se exhibe, la Administración. Proporcionamos enseguida su definición, de acuerdo a Peña [49]:

Definición 1.2.1 (Administración)**.** *La Administración es el conjunto sistemático de reglas para lograr la máxima eficiencia en las formas de coordinar un organismo social y obtener resultados en el mismo sentido.*

Es en este amalgama de conceptualizaciones: adminstración-riesgo que la adminstración del riesgo alcanza su óptima localización dentro de las corporaciones. Es en la aplicación de esta dualidad que se pueden obtener los mejores resultados en el manejo de riesgos, que se traduzcan al final en la generación de ganancias a las empresas. Ese es el fin último de la administración del riesgo: *la generación de ganancias para las firmas, mediante la obtención de resultados de máxima eficiencia en el tratamiento óptimo de los riesgos inherentes a sus negocios.*

Acabamos de mostrar la definición de la Administración y señalamos la estrecha relación con los riesgos, para lograr la consecución de los objetivos de la disciplina. Para culminar con la explicación de la dualidad administración-riesgo, procedemos a mencionar las etapas del proceso administrativo que, como veremos, tienen un fuerte vínculo con los principios y el proceso de la administración del riesgo. Los conceptos y las ideas que estudiaremos provienen de Peña [49].

Etapas del proceso administrativo

- Previsión
- Planeación
- Organización
- Integración
- Dirección

- Control

Como acabamos de ver, en las etapas del proceso administrativo se engloba la forma en que se debe de llegar a la meta de la administración. Dichas etapas se dividen en dos: una fase mecánica que engloba las primeras tres partes, y una fase dinámica que abarca las últimas tres. Como sus divisiones indican, en la fase mecánica se trata de asentar las formas en que se pretenden lograr los objetivos, y en la fase dinámica se establecen las entidades que llevarán a cabo los procesos que permitirán que se alcancen las metas y se establece quiénes dirigirán y cómo se controlarán dichos procesos. Y es de esta forma en la que se llega a la consecución de los objetivos en la administración del riesgo: primero estableciendo qué es lo que se puede hacer y cómo se hará, para posteriormente establecer quiénes realizarán las actividades, quiénes los dirigirán y cómo se controlarán dichas actividades. Esta es la esencia del proceso de administración de riesgos que, como vemos, se nutre de la forma en que opera la administración.

Habiendo entendido el estrecho vínculo entre la administración y el riesgo, podemos analizar cómo es el proceso de la administración del riesgo. Para su explicación aprovecharemos la explicación que se dará de los principios de la administración del riesgo. Esta parte viene de De Lara [19] y de Jorion [33].

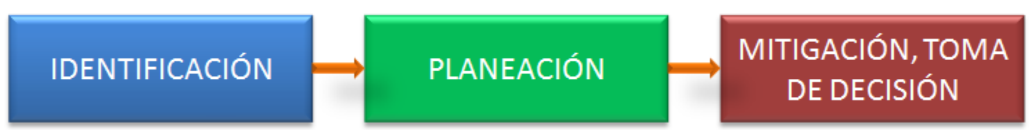

Figura 1.1: Proceso de la Administración del Riesgo.
Fuente: De Lara [19].

La primera parte del proceso, la identificación, se refiere a que hay que ver cuáles son los tipos de riesgos financieros a los que la firma está expuesta por el negocio al que se dedica, hay que hacer una *previsión* de los posibles factores cuya ocurrencia implicaría pérdidas financieras a la empresa. Para lograr esto hay que establecer cuál es la naturaleza de los productos que genera, su papel en el mercado en cual participa, así como las tendencias del sector, su administración, su situación financiera, entre otros. Y no menos importante es el análisis de la estructura del consejo de administración y de su tolerancia al riesgo. Para tales propósitos, se ha elaborado una clasificación de los tipos de riesgos financieros, obteniendo así una forma más provechosa para su administración.

La siguiente parte, la planeación, es el proceso de estipular *cómo* es que se logrará la identificación de los riesgos y, en general, su mitigación, su cobertura, para lograr los objetivos que la empresa se ha planteado: el crear valor-utilidades. Es precísamente por esto que la administración del riesgo debe de estar en estrecho contacto con las demás áreas conformantes de la entidad. Y por estar tratando con los riesgos financieros de la empresa, cuyo mal manejo bien podría llevar a la quiebra, el área debe ser tomada como uno de los fundamentos de la organización y como tal debe formar parte de la toma de decisiones que en ésta se haga.

Entre la etapa de planeación y mitigación, está inmerso un proceso fundamental, que es el núcleo de la aministración del riesgo, siendo éste la razón de la tesis: la cuantificación.

Para la cuantificación, se han de emplear las técnicas mátemáticas - actuariales que se consideran pertinentes para el modelado de los riesgos. Es muy importante recalcar que, por la naturaleza aleatoria de muchos de los procesos en las finanzas, se debe de entender claramente la incertidumbre que se pudiera generar por las actividades que la firma hace, por sus estrategias de inversión, sin perder de vista la relación que la incertidumbre tiene con el riesgo, entendiéndola y así trabajar con ella para el logro de los resultados.

Para los fines de la cuantificación, se debe de tratar de contar con la mejor información posible: que sea completa, que esté ordenada, que esté actualizada, que sea pertinente, veraz, oportuna. Entre mejor sean cumplidas estas características, mejores resultados serán provistos por los modelos y luego, mejores decisiones se podrán tomar. Pero hay que tomar en cuenta que muchas veces no se cuenta con la cuantía ni con la calidad de información que uno deseara o que más aún que el modelo necesita, es así que el analista de riesgos debe de estar preparado para afrontar este tipo de dilemas con planteamientos alternativos o con ajustes a los modelos que le permitan tener cuantificados los riesgos.
Por otro lado, algo que también está relacionado con lo anterior, el análisis de riesgos debe estar siempre observando los cambios en los mercados, la

realidad sobre la cual está la compañía, para poder asertivamente mejorar sus procesos, aplicar nuevos modelos, que estén preparados para tratar con dichos cambios, que los integrantes del área actualicen sus conocimientos. En breves palabras esto significa: entender al entorno y moverse y tranformarse junto con él.

La última parte del proceso de la administración del riesgo es la mitigación, que es la puesta en marcha de los pasos anteriores que conduzcan a la *toma de decisiones*, que es la forma en que se enfrentarán en los hechos a los riesgos financieros. Implica organizar la manera en que se pondrán en prácticas dichas determinaciones y como se dirigirán y controlarán las decisiones y las personas que las ejecuten, cerrando el ciclo de la gestión de riesgos y llegar así a los resultados de máxima eficiencia que se plantearon.

A partir de lo anterior hemos visto cómo el análisis del riesgo se entrelaza con la administración para lograr su misión y cómo esto se logra tomando en cuenta los principios sobre los cuales la administración del riesgo se sostiene. En los siguientes capítulos veremos la cuantificación de los Credit Spread Options, que a partir de ahora se abreviarán como CSO's, a través de los apartados que le anteceden, sin olvidar la esencia del capítulo que principió el presente trabajo: la misión de la Administración del Riesgo.

Para abordar la clasificación de los riesgos, se tiene dispuesto un capítulo que los explica, centrando su atención en los dos principales tipos de riesgos a los cuales los Credit Spread Options están expuestos: al riesgo de mercado y al riesgo de crédito. Por medio de lo que se mencionará sobre el riesgo de mercado y el de crédito, se introducirán los derivados, que es la forma en que éstos han nacido y es una de las razones por las cuales se emplean.

Y es que para poder abordar en forma a los CSO's, es necesario conocer las herramientas que se requieren y conocer el entorno en el cual se emplean y sobre todo el entorno en el cual se plantea su necesidad. Para entender la segunda herramienta está el siguiente capítulo, consagrado a la parte estocástica de los derivados financieros, en específico del derivado que nos atañe.

Capítulo 2

RIESGO DE MERCADO. RIESGO DE CRÉDITO. DERIVADOS.

En el capítulo pretérito establecimos en su justa dimensión a la administración del riesgo, vimos la forma en que ésta opera para lograr las metas que se tienen, además de que se analizó la definición misma de riesgo. Ahora nos centraremos en entender cómo es la taxonomía de los riesgos financieros, elemento del cual parte la teoría de los derivados, como también de los derivados de crédito, pues es en la existencia de distintos tipos de riesgo que una entidad enfrenta donde surge la necesidad de contar con una estrategia de cobertura (y también una forma de obtener ganancias pues el riesgo es oportunidad) que mitigue dichos riesgos.

En la siguiente figura (2.1) tenemos una forma en la que se clasifican los riesgos financieros. El presente capítulo se centrará en el riesgo de mercado y el riesgo de crédito, ya que son las principales fuentes de riesgo que influencian a los derivados. Empero, cabe mencionar que el riesgo de liquidez y el riesgo operacional también pueden representar en ciertos casos vicisitudes que en la modelación y en la operativa de los derivados se debe de considerar.

En la primera parte del capítulo estableceremos el riesgo de mercado; en la segunda parte hablaremos del riesgo de crédito, y se cerrará el capítulo hablando sucíntamente de los demás tipos de riesgo, que vienen explicitados en la figura.

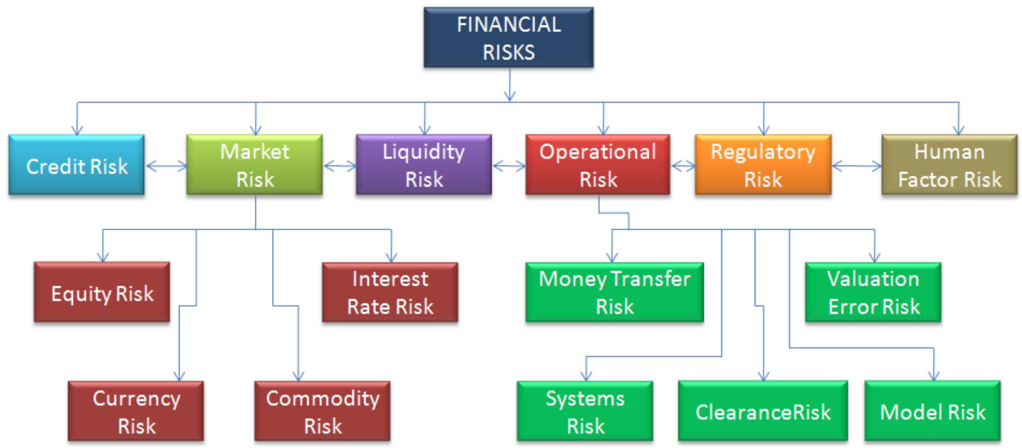

Figura 2.1: Taxonomía de la Administración del Riesgo
Fuente: Schmid [35].

Antes de principiar la siguiente sección, cabe mencionar que los diversos típos de riesgos están estrecha e íntimamente relacionados entre sí, de ahí que una buena política de administración de riesgos debe de tratar a todas las fuentes de riesgo que afectan las operaciones de la firma. Dicha interrelación quedará exhibida a lo largo de la tesis y constantemente nos referiremos a ella.

2.1. Riesgo de Mercado

Los instrumentos financieros derivados, así como las inversiones financieras en general, son comercializadas en un espacio, una entidad que asocia a las personas interesadas en obtener ganancias al presindir de su capital, en un período de tiempo determinado, al entablar un acuerdo con otras personas que requieren de dicho dinero, ya sea para iniciar un proyecto de inversión que haga crecer una empresa, ya sea para obtener dinero con el cual afrontar sus obligaciones. Al recibir dicho dinero entregan un bien, un valor, que es el que le generará dichas ganancias o rendimientos a la contraparte. Estos bienes pueden ser bonos, acciones comunes o preferentes, e incluso pueden ser riesgos, que una de las partes quiere transferir, por así convenir a sus intereses.
En torno a estas actividades, el valor de los contratos y de los valores es in-

fluenciado por diversos riesgos, ya que las circunstancias en que se dan estos movimientos es incierta y conllevan un nivel de incertidumbre. Un tipo de riesgo que las afecta es el generado por la actividad misma de estos lugares que hemos mencionado juntan a las personas. Estos lugares son llamados mercados, y en el caso que nos atañe, se le conoce como mercados financieros, ya que las activiades están alrededor del capital. Luego, los diversos tipos de riesgos, *factores de riesgo*, que afectan el valor de dichos bienes y contratos, son englobados en lo que se nombra *Riesgo de Mercado*.
Varios de los elementos que mencionaremos en este apartado están inspirados en Izquierdo [32], en Alexander [1], en Jorion [33] y en De Lara [19].

La definición de riesgo de mercado es, a saber:

Definición 2.1.1 (Riesgo de Mercado)**.** *Es la posibilidad de que un inversionista tenga pérdidas (o ganancias) generadas por movimientos en los precios que se registran en los mercados financieros, o movimientos adversos (o benéficos) en los factores de riesgo, como tasa de interés, tipo de cambio. También se considera como la posibilidad de que el valor presente neto de un portafolios de inversión se mueva adversamente (benéficamente) ante cambios en las variables macroeconómicas que determinan el precio de los intrumentos que conforman a dicha cartera de valores.*

De la definición pretérita notamos que se nos habla también de la posibilidad de tener ganancias: obtener ganancias también es un riesgo. No obstante que en la administración de riesgos nos enfocamos en analizar las potenciales pérdidas que genere una inversión, mas también consideramos la maximización de utilidades. De esto se desprende la relevancia de la llamada ecuación riesgo-recompensa (beneficio).

Como nos podemos dar cuenta, son variados los tipos de factores que pueden afectar el valor y la naturaleza de las inversiones. Ejemplos de factores de riesgo son la tasa de interés, el valor de los llamados commodities (o materias primas), el tipo de cambio de las divisas, el valor de una acción de una institución, la volatilidad, el spread de crédito, entre otros más.
Ahora, estos ejemplos recalcan las condiciones particulares que afectan a un producto financiero, dependiendo de su especificidad, i.e. su esencia y su alcance. No perdamos de vista este hecho, ya que este elemento jugará un papel fundamental para nuestro objeto de estudio. Conforme avancemos, se

hará cada vez más clara y evidente la razón.

Hasta el momento, hemos estado hablando de los mercados financieros como las entidades donde las personas se reunen para operar con valores financieros y poder de este modo cumplir ciertos objetivos; no obstante, no hemos aterrizado formalmente el concepto. Es adecuado tratar esta parte en la sección de riesgo de mercado, ya que la esencia misma de este riesgo se genera y está presente en el mercado financiero. Y, por otro lado, es necesario entender de manera general cómo se clasifican las entidades en donde se operan los instrumentos financieros y su interrelación. Esta parte está basada en el libro de Arturo Rueda [51], en el artículo Sistema Financiero del Banco de México [5] y en la página web de Mexder [44].
Comencemos con la definición de Sistema Financiero.

Definición 2.1.2 (Sistema Financiero)**.** *Es la estructura, el mecanismo mediante el cual se equilibran los recursos monetarios de las personas. Es el gran mercado donde se compra y se vende el dinero, es el lugar donde se intercambian productos y se establecen los precios de éstos. Es, en sí, el lugar donde se intercambia dinero y se establece su precio.*

Con este concepto en mente, analicemos la manera en que se divide el Sistema Financiero Mexicano, que es corresponde a la estructura que tienen en general los sistemas financieros de todos los países del mundo.

Definición 2.1.3 (El Sistema Financiero Mexicano)**.** *El Sistema Financiero Mexicano se divide de la siguiente forma, a saber:*

- *El sector bancario*
- *Las entidades no bancarias*
- *El mercado de valores*
- *El mercado de derivados*
- *Las instituciones de seguros y fianzas*
- *Las instituciones del Sistema del Ahorro para el Retiro*

De esta clasificación, los elementos relevantes de esta disquisición sobre los mercados son el mercado de valores y el mercado de derivados, mismos que a continuación ampliamos.

Definición 2.1.4 (Mercado de Valores)**.** *Es el conjunto de normas y participantes en una entidad definida, con el fin de llevar a cabo la operación (emisión, colocación, distribución e intermediación) de valores financieros que sean objeto de oferta pública o de intermediación. El objetivo es el de poner en contacto a personas que tienen distintos tipos de necesidades financieras, como por ejemplo la obtención de capital, con personas o contrapartes que buscan un beneficio por ayudar a éstas.*

Definición 2.1.5 (Mercado de Derivados)**.** *Es la entidad en donde las personas se reunen para la operativa de instrumentos financieros derivados, que se diferencía del mercado de valores por ser la instancia donde se negocian contratos que no son en sí el valor (financiero) mismo, como sucede en el segundo.*

Ahora que hemos estudiado estos dos importantes conceptos, veamos una clasificación de los mercados financieros, que es particularmente relevante para el presente trabajo dada la importancia que tienen los bonos en los credit spread options. En esta clasficación conjuntaremos a los mercados de valores y a los de derivados.

Definición 2.1.6 (Una clasificación de los Mercados Financieros)**.** *La siguiente es una forma de clasificar a los distintos mercados del Sistema Financiero:*

- *Mercado de Dinero*
  Es la infraestructura financiera donde se emiten y negocian instrumentos de deuda, los cuales son títulos que representan el compromiso por parte del emisor de pagar los recursos prestados más un interés pactado o establecido previamente, al poseedor del título (o inversionista), en una fecha de vencimiento dada. Al mercado de dinero también se le conoce como mercado de deuda o como mercado de renta fija.

- *Mercado de Capitales*
  Es la instancia en donde se da la operativa de acciones, que son instrumentos financieros emitidos por empresas con fines de levantamiento de capital, como medio de inversión para las contrapartes de éstas, que pagan dividendos (rendimientos) solamente si la firma genera utilidades. En el mercado de capitales también se negocian valores de deuda de mediano y largo plazo. También se le conoce como mercado accionario o mercado de renta variable.

- *Mercado de Derivados*
  Es la instancia definida anteriormente. En ella se operan (trading, como se conoce el término en inglés) los instrumentos financieros derivados. En el caso mexicano, Mexder es el Mercado Mexicano de Derivados, instancia que, como menciona en su visión, ofrece instrumentos, opciones y futuros, que permiten planear, cubrir y administrar riesgos financieros, así como optimizar el rendimiento de los portafolios de inversión. Es una sociedad anónima de capital variable, autorizada por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), que permite la operación y liquidación de los instrumentos mencionados.

La estructura anterior conforma al Mercado Financiero (de valores) Mexicano, el sistema que engloba los tres tipos de mercados que explicitamos. Y como comentábamos, esta clasificación es capital para efectos del presente trabajo. Baste por el momento mencionar que los bonos, instrumentos financieros que formalmente definiremos en otro capítulo, son instrumentos de renta fija; no obstante, existen algunos tipos de bonos, como los certificados bursátiles, que se negocian en el mercado de capitales. Con todo, generalmente cuando se habla de bonos, se están considerando instrumentos del mercado de dinero.
Con esto terminamos esta reflexión necesaria sobre los mercados financieros.

Antes de proseguir, consideremos la siguiente definición de volatilidad. Este concepto es también de gran importancia en el tema de la administración del riesgo. Más adelante se tratará más a fondo la volatilidad.

Definición 2.1.7 (Primera definición de volatilidad). *La volatilidad es la desviación estándar de los rendimientos de un activo o de un portafolios. Indica cuantitativamente qué tanto fluctuan los rendimientos alrededor de la media de los mismos.*

Una forma para tratar el riesgo de mercado es mediante la identificación de cinco tipos de riesgo, asociando éstos con algunas medidas de sensibilidad; por otro lado, estas medidas son utilizadas para analizar la sensibilidad de las opciones, un tipo de derivado, que analizaremos más adelante. Dichas medidas son llamadas las *letras Griegas*. Se presentan a continuación los conceptos, mismos que provienen de Alexander [1].

Definición 2.1.8 (Los cinco tipos de riesgo de mercado)**.** *La siguiente definición enmarca las cinco dimensiones que modelan al Riesgo de Mercado.*

- Delta. *Delta es el riesgo de que el valor de una exposición se deteriore al cambiar el precio o valor de algún factor de riesgo subyacente, ceteris paribus.*

- Gama. *Es el riesgo de que delta cambie cuando el valor de un factor de riesgo subyacente cambie. A este riesgo también se le conoce como riesgo de convexidad o riesgo de cambio.*

- Vega. *Es el riesgo de que cambios en la volatilidad del factor de riesgo subyacente provoque a su vez cambios en el valor de una exposición. A esta griega también se le nombra lambda, kappa o tao.*

- Theta. *Mide el riesgo de ciertas exposiciones por efecto del paso del tiempo, esto es, que el valor de dicha exposición se vea afectado en el período de vigencia del contrato.*

- Rho. *Rho es el riesgo de que las tasas de interés, que son usadas para descontar flujos de efectivo futuros en cálculos de valor presente, cambien y por ende generen pérdidas no esperadas para la firma.*

Otra fuente de riesgo, que no es menos importante que las anteriores, es el riesgo de correlación, que es la posibilidad de un cambio inesperado en la correlación de dos factores que afectan el valor de un contrato. Esto que se acaba de mencionar cobrará gran importancia en el momento en que hablemos de los Credit Spread Options, así que es importante no perder de vista la definición dada.

La agrupación que acabamos de definir es muy importante en términos del valor y el alcance de una inversión de capital, ya que el conocimiento de los diversos factores de riesgo que la afectan, y visto desde esta perspectiva, proporciona un panorama robusto de la naturaleza de dicha inversión que, además de reflejar la naturaleza de la exposición, explicita la recompensa que se puede obtener del producto financiero. A esta recompensa se le llama *prima de riesgo*. A la luz del estudio previo que daremos de derivados, comprenderemos la importancia de esto último.

Resaltamos ahora otras dos clases de riesgo de mercado que son importantes para la administración de las inversiones, basándonos en Jorion [33] y De Lara [19]. Consideremos un portafolios de inversión constituido por N cantidad de activos o instrumentos financieros. Para administrar el riesgo de este portafolios el administrador de riesgos debe tomar el cuenta el riesgo total que el portafolios conlleva. Este riesgo total se divide en dos tipos de riesgo: por un lado está el *riesgo sistemático o diversificable* que es el riesgo que proviene directamente del mapeo del portafolios a los factores de riesgo que lo conforman, es decir, de relacionar a los instrumentos financieros integrantes del portafolios con sus respectivos factores de riesgo, empleando otros activos que equivalgan a la posición generada por éstos. Por otro lado se tiene el *riesgo específico o no diversificable*, el riesgo que no es capturado por el mapeo del portafolios. Una medida de sensibilidad fundamental que se deriva de lo anterior es β, que es la razón que mide el riesgo de mercado del portafolios con respecto al del mercado financiero en general. Esta medida se puede calcular mediante la teoría de CAPM (Capital Asset Pricing Model) o Modelo de Valoración de Activos de Capital, considerando un portafolios cuya composición de posiciones diversifique los riesgos, es decir, un portafolios que posea instrumentos financieros cuyos riesgos se compensen unos con otros. Esta sensibilidad corresponde al riesgo diversificable. Dicha medida, junto con el *Valor en Riesgo* VaR, son algunas de las herramientas más empleadas para la administración del riesgo de mercado de manera general; no obstante, el valor en riesgo se ha convertido en el paradigma de la administración del riesgo de mercado, ya que permite capturar el riesgo de mercado total del portafolios, que proviene de los diversos factores de riesgo que posee, en una sola cifra, resultado que puede ser fácilmente interpretado y reportado a la alta dirección y al director ejecutivo de riesgos (Chief Risk Officer CRO). Este método de análisis del riego de mercado fue publicado por el banco JP Morgan en 1994 en su documento técnico Riskmetrics. Haremos mención del VaR más adelante en esta tesis.

2.2. Riesgo de Crédito

Hemos analizado que, por una parte, existen diversos factores que afectan el valor de una posición financiera, por entidades que se generan dada la naturaleza misma de su negociación. No obstante, hay otros componentes de riesgo que afectan dichas posiciones, que se clasifican en otros rubros, como se

vio en la figura presentada líneas pretéritas. En esta sección comprenderemos el significado del riesgo de crédito y entenderemos su relevancia. Más aún, el riesgo de crédito es parte del origen de los Credit Spread Options. Los mencionados conceptos provienen de de Lara [19], de Jorion [33] y de Schimd [53].
Principiamos con una defnción:

Definición 2.2.1 (Riesgo de Crédito)**.** *Es la exposición a una pérdida derivada de un decremento en el valor de mercado que a su vez viene dada por una disminución en la calificación crediticia de un emisor de deuda o de una contraparte.*

Hemos visto que para el riesgo de mercado existen diversos modelos analíticos para su estudio, siendo el VaR el más importante. El riesgo de crédito no es excepción. Existen diversas y variadas metodologías para su tratamiento. El método que se desee emplear depende en buena medida del tipo de negocio que tiene exposición a este riesgo, su estrategia de generación de rendimientos, su estructura de administración de riesgos, entre otros. Pero algo muy importante es el tipo de clientes con los cuales quiera establecer negocios, lo que se conoce como el *mercado objetivo*. Y es que es con la relación con los clientes que cobran vida los mercados financieros y el ciclo económico. Luego, es importante tener un procedimiento que enlace estos puntos con el objetivo de la firma. Un ejemplo de procedimiento es lo que se conoce como las «cinco Ces del crédito» que, de acuerdo con de Lara [19] son, a saber:

- *Conocer al sujeto de crédito*
  En este rubro tenemos varios aspectos del carácter del cliente, como son su solvencia moral, su reputación, su disposición a honrar sus obligaciones, su historial crediticio (proveniente de un buró de crédito, que es el equivalente a una agencia calificadora, como veremos).

- *Capacidad de pago*
  Refleja la volatilidad de las utilidades que se han generado, así como los flujos de efectivo de la entidad, que exhiben si la entidad tiene recursos financieros para hacer frente a sus obligaciones. Esto se deduce de un exhaustivo análisis financiero.

- *Capital de la firma*
  Conocer cuál es la contribución del cuerpo de accionistas de la firma

en la asunción de sus riesgos. Por otro lado, comprende analizar la capacidad de endeudamiento o apalancamiento que tiene la empresa.

- *Colateral o garantía del crédito*
  Son los valores financieros que la contraparte recibe en caso de que el sujeto de crédito no pueda cumplir con sus obligaciones. Dichas garantías deben de ser suficientes para que la firma recupere la pérdida implicada por el evento de incumplimiento. Cuanto más alto sea el valor de mercado del colateral cuanto menor será la exposición al riesgo de crédito.

- *Condiciones del ciclo económico*
  Se refiere a las condiciones del entorno en la cual se establece una relación de negocios entre el cliente y la compañía. Estos factores inciden directamente en la exposición al riesgo de crédito de la entidad. Es por ello que conocer la dependencia de ésta a los ciclos económicos es básico para manejar dicha exposición.

Respecto a lo mencionado en la definición pretérita de calificación crediticia, con el fin de ponderar por riesgo la calidad de deuda de una institución financiera o de la deuda soberana de un país, dicha calificación es una escala de clasificación cuantitativa de la deuda por cuanto es la probabilidad de que el emisor de la misma incumpla con sus obligaciones contractuales. Para tales efectos, existen agencias calificadoras que se dedican a desarrollar modelos analíticos que permitan hacer la valoración de la calidad creditica de dichos emisores. Ejemplos de algunas de las empresas calificadoras más representativas son: Moodys, Standard & Poors y Fitch.

Como decíamos, los burós de crédito son el equivalente a las agencias calificadoras. Su diferencia radica en que los clientes de las agencias son empresas y el de los burós son personas, ya sean físicas o morales.

La siguiente tabla es un ejemplo de dos escalas de calificación de deuda. Una escala proviene de Standard & Poors y la otra de Moody's.

Por ejemplo, la calificación de la deuda soberana de los Estados Unidos de América es $AA+$, de acuerdo a Standard & Poors. Anteriormente la nación ostentaba la calificación máxima AAA, pero el 5 de agosto de 2011 la agencia, tras una revisión de su calidad de deuda y de sus fundamentales

Cuadro 2.1: Escala de calificación crediticia para deuda senior de largo plazo. Fuente: Schmid [53].

S&P	Moody's	Interpretación
AAA	Aaa	La más alta calidad, extremádamente fuerte
$AA+$	$Aa1$	Alta calidad
AA	$Aa2$	
$AA-$	$Aa3$	
$A+$	$A1$	Fuerte capacidad de pago
A	$A2$	
$A-$	$A3$	
$BBB+$	$Baa1$	Adecuada capacidad de pago
BBB	$Baa2$	
$BBB-$	$Baa3$	
$BB+$	$Ba1$	Probable que cumpla las obligaciones; continua incertibumbre
BB	$Ba2$	
$BB-$	$Ba3$	
$B+$	$B1$	Obligaciones con alto riesgo
B	$B2$	
$B-$	$B3$	
$CCC+$	$Caa1$	Actual vulnerabilidad a incumplimiento
CCC	$Caa2$	
CC		
C	Ca	En bancarrota o incumplimiento; otra marcada deficiencia
D		Default. En calidad de "bono basura"

financieros, rebajó su calificación a $AA+$.

Del esquema anterior, es importante mencionar una clasificación - agrupación de las califaciones crediticias. El primer bloque, que comprende desde la nota AAA hasta la BBB-, es llamada *categoría de grado de inversión*. El segundo escaque, que principia por la escala BB+ y llega hasta la calificación de default o incumplimiento D, se le nombra *cateogría de grado especulativo*. El que un intrumento de deuda esté en el grupo de grado de inversión implica que éste posee una probabilidad de incumplimiento baja y que, por ende, la inversión sea bastante segura. Y por otro lado, que el valor pertenezca al grupo de grado especulativo, significa que éste posee un rendimiento mayor al de un instrumento similar que pertenezca al otro bloque, debido a que como tiene un riesgo de crédito mayor (en específico de contraparte, como veremos), el inversionista debe de ser compensado con más rendimiento. Esto quiere decir que el agente financiero asume más riesgo por tomar una posición así y, luego, estaría especulando con la situación crediticia de la firma emisora del valor.

Además de esta escala crediticia, siguiendo a Schmid [53] y Hull [29], existen otras clasificaciones de los instrumentos de deuda, como el mencionado en la tabla pasada, de deuda senior, que hace referencia a la madurez del valor financiero y de los fundamentales financieros de la firma emisora. Otros ejemplos de esta taxonomía son los instrumentos de deuda junior, subordinada, bursatilizada, no bursatilizada, y combinaciones entre estos términos.

Estas clasificaciones son relevantes en términos del spread de crédito, dada la dependencia que existe con la calificación crediticia y los cambios en dicho spread. En el capítulo de valuación de nuestro derivado quedará exhibido la dimensión que tienen estos conceptos.

Como una definición segunda para riesgo de crédito se tiene que:

Definición 2.2.2 (Riesgo de Crédito, segunda definición)**.** *Es la pérdida que se genera por la posibilidad de que las contrapartes no quieran o no puedan llevar a debido cumplimiento sus obligaciones contractuales.*

Por un lado, la primera definición, que es llamada de «visión de mercado», se refiere a pérdidas en mercados financieros que son provocadas por revisiones a la baja de la calificación creditica de la firma que emite deuda, implicando con ello que la probabilidad de que incumpla con sus obligaciones es mayor. Es así que la parte que tomó dicha deuda de la firma exige una compensación mayor al haber aumentado el riesgo de perder capital. Luego, los valores emitidos pierden valor, con las consecuentes pérdidas. Por otro lado, la segunda definición se enfoca en el incumplimiento de la contraparte de sus obligaciones, como puede ser el no pagar el valor de redención de un bono, el pago de dividendos de una acción, etc., ya sea que ésta afronta una situación adversa que se lo impide, ya sea por negligencia. Así que el enfoque de dicha definición es sobre el «paradigma del incumplimiento» y sus consecuencias financieras.
La definición segunda que hemos comentado da origen a lo que se conoce como *Riesgo de Contraparte*, mientras que la primera se corresponde con el *Riesgo de Spread Crediticio*. Consecuentemente, el riesgo de Crédito se com-

pone de dos partes: el riesgo de spread y el riesgo de incumplimiento.

Con respecto a los Credit Spread Options, nuestro objeto de estudio, el factor primordial del riesgo de crédito que contiene nuestro derivado es el riesgo de spread crediticio. A lo largo del presente trabajo se irá haciendo más evidente el fundamento de esto.

2.3. Otras fuentes de riesgo

En esta sección hablaremos de otras fuentes de riesgo relevantes para la Administración de Riesgo. El riesgo de liquidez, junto con el riesgo de mercado y el de crédito, constituyen las fuentes de riesgo más importantes dentro de una inversión. No obstante, habría que hacer dos observaciones: que primeramente, muchos autores consideran que el riesgo operacional pertenece a este grupo, debido a la importancia que tiene en términos de que un mal manejo de este riesgo puede llevar fácilmente a una empresa a la bancarrota; y segundo, el riesgo de liquidez es una fuente de riesgo que muy recientemente ha cobrado relevancia capital en términos de la Administración del Riesgo, por el impacto que la falta de liquidez tuvo en la crisis financiera de 2007. Baste mencionar que el acuerdo de Basilea III, que en término llanos constituye un acuerdo internacional que sus miembros deben de cumplir con el fin de fortalecer sus sistemas financieros, le da bastante importancia a la gestión de este riesgo (véanse dentro de este documento los conceptos de razón de cobertura de capital, liquidity coverage ratio, y la razón de fondeo estable neta, net stable funding ratio). Los conceptos que aquí comentamos provienen de Jorion [33] y de Pérez [48].

Riesgo de Liquidez

El riesgo de liquidez ha cobrado una importancia sustancial en el riesgo financiero, baste mencionar que en la última crisis financiera internacional (que inició en el 2007), la crisis de confianza que fue iniciada por las pérdidas de los créditos subprime se aceleró súbitamente por la bancarrota de Lehman Brothers. Muchos tenedores de deuda no quisieron refinanciar sus inversiones, creando problemas de fondeos masivos para las instituciones financieras aunado a las dificultades de éstas por vender activos para satisfacer sus necesidades de fondos.

El riesgo de liquidez es menos dócil de cuantificar formalmente en términos de riesgo, a diferencia del riesgo de mercado, de crédito y operacional. De acuerdo con Jorion [33], el riesgo de liquidez se define como *la posibilidad de que no se pueda vender una participación en un instrumento en particular a su precio teórico.* A su vez, el *riesgo de liquidez de un activo* se define como el riesgo de que una posición no pueda ser fácilmente contrarrestada sin influenciar significativamente el precio de mercado, a corto plazo, debido a un transtorno del mercado. El *riesgo de financiamiento de liquidez* es el riesgo actual o prospectivo que se origina de la incapacidad de una institución de afrontar sus pasivos y sus obligaciones al llegar éstos a su vencimiento sin incurrir en pérdidas inaceptables.
El riesgo de liquidez de un activo y el riesgo de financiamiento de liquidez consituyen al riesgo de liquidez. Estas fuentes de riesgo interactuan entre sí si un portafolio posee activos alíquidos que deben ser vendidos a precios estresados para cumplir los requerimientos de financiamiento.

Por la influencia importante que tiene el comportamiento de los mercados financieros con el riesgo de liquidez, se desprende el hecho de que este riesgo y el riesgo de mercado tengan una interrelación importante. Esta característica también se manifiesta entre el riesgo de crédito y el de mercado. Es por ello que una de las tareas de un buen administrador de riesgos es identificar las diversas fuentes de riesgos que su posición financiera tiene para después separarlos y lograr así un manejo adecuado del riesgo.

Riesgo Operacional

El *riesgo operacional*, de acuerdo con Jorion [33], se define como el riesgo de pérdidas provenientes de procesos internos fallidos o inadecuados, sistemas, y personas, o de eventos externos.
Los riesgos operativos han provocado pérdidas significativas y en ocasiones mayores que las derivadas de riesgo de mercado y crédito. Sin embargo, el desarrollo de los modelos para medir y controlar riesgo operativo no son del todo fáciles de implementar debido a dos factores fundamentales que están interrelacionados:

1. La rareza del evento (muy baja frecuencia y severidad desproporcionada) y las herramientas para observarlo.

2. La capacidad de reunir información sobre los eventos. Por ejemplo, en el caso de error humano, es difícil reunir la información que caracterice las causas y el impacto.

Retomando la discusión anterior del significado del riesgo operacional, existen en la literatura otras definiciones de riesgo operativo. Aquí mencionamos algunas de ellas (Jorion [33] y Pérez [48]):

1. Es la incertidumbre relacionada con las pérdidas que resultan de sistemas inadecuados, falta de controles, errores humanos o de administración

2. Es la incertidumbre relacionada con los siguientes factores de riesgo: personal (como el fraude), tecnología (fallas en sistemas), relaciones de negocios (disputas legales) y factores externos o regulatorios (cambio en algún marco regulatorio o fraudes externos a la firma)

El problema principal del riesgo operativo es la cuantificación y la falta de información suficiente para analizarlo (y de forma deseable construir una distribución de pérdidas y calcular el VaR). Este riesgo se caracteriza por ser contingente y que requiere de una inversión significativa para su medición (establecimiento de controles y auditorías).

En la práctica, se emplean distribuciones de colas pesadas (Pareto) y factores (proporciones) sobre las medidas de riesgo de crédito y mercado.

Riesgo de Contagio

En períodos turbulentos de alarma, una falla crea muchas, y la mejor manera de prevenir las fallas derivadas es detener la falla primaria que las causa.
Bahegot, Lombard Street (1873, pp. 51-2).

Para tratar este tema, revisemos una definición preliminar de este tipo de riesgo, de acuerdo con Jorion [33] y Pérez [48]. El riesgo de contagio, (que es similar en concepto al riesgo sistémico), es el riesgo de que las dificultades financieras de una o más empresas se esparza sobre una gran cantidad de firmas o sobre el sistema financiero como un todo. De aquí podemos advertir la importancia que este tipo de riesgo tiene con el riesgo de crédito, de mercado y de liquidez.

Se entiende por riesgo de contagio la posibilidad de que los problemas que afectan a una institución se transmitan a otras. Este riesgo puede materializarse cuando el incumplimiento de las obligaciones por parte de una institución afecte a otra (contagio directo). Adicionalmente, el deterioro de la situación financiera de una institución particular podría afectar a otras instituciones (contagio indirecto), por ejemplo, cuando el mercado perciba que el contagio directo puede ocurrir o que otras instituciones están en una situación financiera similar a la del banco que experimenta problemas. Para las autoridades financieras siempre es importante acotar el riesgo de contagio entre las entidades por las implicaciones negativas que tendría sobre la economía un incumplimiento simultáneo de obligaciones por parte de varias contrapartes.
Un mecanismo de propagación son los préstamos interbancarios. En este caso, la exposición entre las contrapartes varía diariamente y en gran magnitud.

Debido a las características del riesgo de contagio, en los últimos años se han empleado modelos de redes para modelar este riesgo. Un modelo de redes se caracteriza por tener nodos que se encuentran conectados entre sí. Lo anterior va acompañado de un modelo de simulación que represente las pérdidas potenciales que pueden sufrir las contrapartes.

Riesgo Sistémico

Existen varias definiciones de riesgo sistémico. Una de ellas afirma lo siguiente: es el riesgo de experimentar un evento que afecte el buen funcionamiento de todo el sistema financiero.

Con esto damos por terminada la sección sobre los diversos tipos de riesgos financieros en el marco de la Administración del Riesgo. Aunque en la figura se hablan de más tipos de riesgo, nos hemos avocado a revisar los fundamentales. Al lector interesado en estos temas, lo conminamos a revisar la bibliografía del presente trabajo.

En la última sección de este capítulo haremos una breve disertación sobre los derivados financieros, para enter su naturaleza y su importancia en la Administración del Riesgo. Con ello prepararemos un preámbulo adecuado para los Derivados de Crédito, tema del cual hablaremos en el capítulo capital de la tesis, y que derivará en el estudio de los CSO's, que es un derivado de crédito.

2.4. Fundamentos de Derivados

Definición 2.4.1 (Definición formal de los derivados)**.** *Un instrumento financiero derivado es un contrato privado cuyo valor se desprende,* se deriva*, del precio de algún activo subyacente, como es la tasa de referencia o un índice accionario, de un bono, de un tipo de cambio o de algún commodity. Además, dichos contratos deben también especificar un principal, o monto nocional, que se define en términos de una moneda, acciones, bushels, o alguna otra unidad. Los movimientos en el valor del derivado dependen del nocional y el precio del subyacente o índice.*

En la definición que ha sido dada, y que proviene de Jorion [33] y de McDonald [42], encontramos la esencia de lo que es un derivado, un instrumento cuyo valor se deriva de otro activo, de esta relación proviene su nombre. Los derivados son contratos financieros que se pueden negociar en mercados privados, que en inglés se conoce como over-the-counter (OTC, sobre el mostrador), o en mercados de valores organizados (exchange-traded derivatives, ETD). Por mercado privado se debe entender que es aquel en el cual las dos partes que quieren establecer un contrato derivado se ponen de acuerdo para tal fin directamente, de una manera privada. Las operaciones de derivados OTC se hacen generalmente con vendedores de derivados, que son firmas especializadas y que usualmente están asociadas con instituciones financieras mayores, para vender y comprar estos valores. Una de las diferencias entre los mercados OTC y los ETD, además de que los primeros se operan en mercados especializados y los segundos de manera privada, es que los derivados OTC se manejan mediante contratos estandarizados y los derivados ETD se manejan mediante contratos "hechos a la medida", de acuerdo a las necesidades de las contrapartes.

Existen diversas formas de clasificar a los derivados financieros. Una de ellas es la que mencionamos antes, por el tipo de mercado en donde se negocian los instrumentos, ya en mercados privados, ya en mercados de valores organizados. Otro criterio se refiere a la relación funcional del valor del derivado con respecto al valor subyacente. Bajo este criterio se clasifican a los derivados como instrumentos lineales o instrumentos no lineales. En el primer grupo recaen los instrumentos cuyo valor es una función lineal del activo subyacente. Ejemplos de estos son los acuerdos de tasas adelantadas, o en anglicismos, forward rate agreements (FRAs), futuros y permutas financieras (swaps). Un ejemplo de un derivado no lineal son las opciones.

Antes de proseguir con la sección actual, hacemos mención de que en el resto del presente trabajo se apelarán a los anglicismos para los términos financieros, ya que son la forma más común en el argot financiero de llamarlos, aunque no es la forma correcta del uso de la lengua española.

Otra clasificación versa en la forma en que se han ido produciendo y negociando nuevos derivados a través del tiempo. Por un lado tenemos a los derivados convencionales, o plain vanilla en el argot financiero, y por el otro a los derivados exóticos. Ejemplos de derivados plain vanilla son los futuros, forwards, swaps y opciones. Ejemplos de derivados exóticos son las opciones barrera, las opciones lookback, las notas estructuradas, los swaptions, los derivados asiáticos, entre otros. Aunque no se han explicado aún qué son estos instrumentos, más adelante tendrá lugar su explicación, enfocándonos en las opciones.

Un considerando imporante en los derivados financieros es la razón por las cuales se emplean. A continuación aparecen algunos motivos, de acuerdo con McDonald [42]:

- *Administración del riesgo*
  Los derivados permiten cubrir los riesgos que se generan a raíz de alguna exposición en algún instrumento financiero, o en algún activo en general. Son una forma de seguro al mitigar dichas exposiciones a los riesgos.

- *Especulación*
  Los derivados son instrumentos con alto nivel de apalancamiento financiero, ie., por un costo bajo se pueden obtener ganancias cuantionas, con el riesgo de poder tener grandes pérdidas. Es así que los especuladores hacen apuestas sobre los movimientos en el precio de algún instrumento con el fin de lograr altos rendimientos, asumiendo el riesgo

de tomar dicha posición. La actividad especulativa es de gran beneficio para los mercados financieros, ya que a mayor número de especuladores mayor liquidez.

- *Reducción en los costos de transacción*
  A veces los derivados proveen una forma menos costosa de efecuar una transacción financiera. Por ejemplo, el director de un fondo de inversión que quiere vender acciones y comprar bonos. Dichos movimientos implican pagar los honorarios de los agentes de bolsa y pagar otros costos por las negociaciones. Alternativamente, se pueden negociar derivados y obtener el mismo efecto económico que si se vendieran las acciones y se reemplazaran por bonos.

- *Arbitraje*
  Consiste en realizar una operación en los mercados financieros para obtener una ganacia sin riesgo, proveniente de la diferencia de precios en distintos mercados que vienen dadas por imperfecciones en los mismos. El riesgo es eliminado por dicha diferencia en los precios.
  El arbitraje también consiste en evitar restricciones regulatorias, impuestos y reglas contables al negociar con derivados.
  Los derivados se utilizan a menudo para, por ejemplo, lograr la venta económica de una acción, esto es, recibir el dinero y elmiminar el riesgo de mantener la acción, mientras se mantiene la posesión física de ésta. De esta forma, el tenedor puede diferir los impuestos generados por la compra de la acción, o retener los derechos de votar, sin el riesgo de mantener dicha instrumento.

Retornando a la diferenciación entre los lugares en donde se pueden negociar los derivados, es conveniente analizar una diferencia entre éstos (Jorion [33]). Mientras que en los derivados negociados en mercados OTC el riesgo de crédito es de consideración, dependiendo dicha exposición en la calificación crediticia de las partes. Sin embargo, los derivados que se negocian en mercados organizados ETD, el riesgo de crédito es mitigado. Esto se debe a la existencia de las cámaras de compensación o clearing houses. Empero, cabe mencionar que hay mercados OTC que cuentan con cámaras de compensación.

Las cámaras de compensación son instituciones financieras que proveen de liquidaciones y compensaciones en las operaciones con derivados. Son las contrapartes reales en los contratos y garantes de todas las obligaciones financieras que se desprenden de dichos contratos que se cotizan en las bolsas organizadas. La forma en que adminstran el riesgo de crédito es mediante la formación de márgenes o depósitos de colateral (garantía que se considera en ciertos contratos que será entregada a una de las partes si la contraparte incumple con sus obligaciones). Dichos márgenes son ajustados diariamente o con mayor frecuencia, para saber su valor y si tienen al menos el capital mínimo establecido. A esta valuación periódica se le conoce como marca a mercado o mark-to-market. La lógica de los márgenes es la de garantizar que el miembro del contrato que deba de dar flujos de efectivo a la contraparte los tenga. Y es por esta necesidad de garantizar los pagos que se actualiza el valor del colateral periódicamente al actualizar el valor de mercado del derivado y de la posición. Si por estos movimientos en el valor del derivado el márgen queda por debajo del monto mínimo que debe tener, se realiza una *llamada de márgen* para que se deposite el capital necesario para nivelar el márgen. Si la parte responsable del colateral no puede realizar dicho depósito, la cámara tiene el derecho de liquidar la posición.

Las cámaras de compensación dependen de *fondos de garantía*, que son provistas por miembros de la cámara de compensación. Dicho fondo puede ser empleado para cubrir pérdidas por eventos de incumplimiento o default. Para calcular la cuantía del márgen, se suele recurrir al paradigma de la administración del riesgo, el *Valor en Riesgo* o VaR.
En México el mercado de derivados organizado se llama Mexder S.A. de C.V., su cámara de compensación es Asigna, que cuenta con un socio patrimonial S.D. Indeval (De Lara [20] y Mexder [44]).

Para finalizar este punto, es importante hacer notar que la mayor parte de las operaciones derivadas en el mundo se hacen en mercados OTC. Normalmente, derivados como los forwards y los swaps se negocian en estos mercados; alrededor del 25 % de los swaps de tasas de interés están asociados a cámaras de compensación, de acuerdo con Jorion [33].

Para terminar este capítulo, procederemos a definir algunos productos derivados. En particular, la definición de las opciones será dada. En el capítulo de la valuación de los CSO's se abordará con más detalle a las opciones, ya que por su relevancia es mejor tratarles allí. No es la intención del trabajo la de profundizar en cada derivado, sino de establecer la idea central que versa en cada instrumento, mas nos enfocaremos en los derivados vinculados con los CSO's.

Para efecto de las definiciones, éstas serán clasificadas por uno de los criterios mencionados antes. Éstas están basadas en Jorion [33], en McDonald [42] y en De Lara [20].

Definición 2.4.2 (Derivados plain vanilla)**.** *Algunos derivados de tipo plain vanilla:*

- Forward
  Es un contrato que se celebra con el fin de intercambiar un activo financiero dado por un flujo de capital, es decir, su valor, en una fecha fija en el futuro. El objetivo es obtener una cobertura por las fluctuaciones en el precio del activo en el tiempo. Si dicho contrato es estandarizado en su clausulado, el derivado se llama Futuro *o si por el contrario el contrato se puede personalizar acorde a las necesidades de las partes, se le conoce como* Forward*. En la literatura existente, si el carácter del contrato es relevante en el contexto en donde se les refiere, se les llama por su nombre. En caso opuesto, se les llama indistintamente Forwards.*

- Swap
  Es un acuerdo entre dos partes para intercambiar flujos de efectivo en diversas fechas futuras con base en una fórmula predeterminada. Entre los tipos de permutas más comunes están los swaps de tipo de cambio, que permiten el intercambio de capital en tipos cambiarios distintos, swaps de tasa de interés (IRS's), en donde una parte cede una tasa de interés fija para recibir una tasa variable o flotante. Por tratarse de intercambios de flujos en varias fechas, se pueden construir mediante varios contratos forward.

- FRA's
  Son contratos celebrados en mercados OTC que permiten a las contrapartes fijar la tasa de interés a partir de un determinado momento en el futuro. A las tasas de interés que regirán los contratos en el futuro y que se les modela en el presente, se les suele llamar tasas adelantasas o forward.

- *Opción*
  Es un instrumento financiero que otorga el derecho de comprar o vender

un activo, mas no la obligación, sujeto a ciertas condiciones, dentro de un período de tiempo específico. Una Opción Americana *es aquella que se puede ejercer en cualquier momento, hasta la fecha de expiración de la opción. Una* Opción Europea *es aquella que sólo puede ser ejercida en una fecha futura específica.*
El precio que se paga por el activo cuando la opción se ejerce se le llama precio de ejercicio (precio strike). El contrato que otorga el derecho de comprar, se le denomina opción de compra u opción call. Al contrato que da el derecho de vender, se le conoce como opción de compra u opción put.

La fórmula siguiente, que permite valuar el precio de las opciones, o prima, es la celebrada fórmula de Black y Scholes, que representa un gran avance en la teoría matemática de las finanzas.

$$C(S, K, \sigma, r, T, \delta) = Se^{-\delta T}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$P(S, K, \sigma, r, T, \delta) = Ke^{-rT}N(-d_2) - Se^{-\delta T}N(-d_1)$$

La fórmula primera permite valuar las opciones call, mientras que la segunda corresponde a las opciones put. Ambas fórmulas son aplicables a opciones europeas. Son soluciones a la ecuación diferencial de Black y Scholes. Se proveen en este momento porque el esquema de Black y Scholes, también llamado de Black, Scholes y Merton, es el referente para valuar los CSO's, el tema del presente trabajo. La valuación de opciones de Black y Scholes (B-S) será entonces tratada con lujo de detalles en el capítulo de valuación de los Credit Spread Options.

Existe una clasificación de las opciones, de acuerdo a quién es el emisor del derivado. Los warrants son opciones que son emitidas por empresas, cuyos subyacentes son generalmente bonos o acciones preferentes; y las opciones son derivados emitidos por particulares especializados o instituciones financieras, no empresas. También los warrants pueden tener diferentes tipos de ejercicio, por lo cual existen warrants americanos, europeos, etc.

Definición 2.4.3 (Derivados exóticos)**.** *Algunos ejemplos de instrumentos financieros derivados con "características exóticas" son:*

- *Opción Asiática*
  Es una opción (en el sentido definido líneas pretérito pasadas) que otorga el derecho mas no la obligación de comprar o vender un subyacente, cuyo valor depende no sólo del precio del activo sino también del valor medio de éste durante la vida del contrato, ya sea aritmético ya sea geométrico.

- *Opción Bermuda*
  Es una opción que se puede ejercer tempranamente, pero solamente en momentos específicos.

- *Opción Compuesta*
  Es la opción que permite comprar una opción. Si pensamos en una opción ordinaria como un activo, entonces una opción compuesta es similar a una opción. Es así que las opciones put y call ordinarias representan el activo subyacente de la opción compuesta.

- *Opción Barerra*
  Es aquella opción cuyo valor intrínseco depende de si el precio del activo subyacente ha alcanzado una barrera durante la vida de la opción. Cuando la barrera es alcanzada y se considera que comienza a existir la opción se le llama opción knock-in. Y cuando al alcanzarse se anula la opción, se le conoce como opción knock-out. El valor intrínseco se refiere a la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio strike $K - S$ *si se trata de una opción put (corta), o* $S - K$ *si se trata de un call (larga).*

Existen otros derivados exóticos, como las opciones peroni y las notas estructuradas, pero no serán comentados aquí. Empero, sí hablaremos de los derivados de crédito, que son un tipo muy especial de derivados exóticos. Recordemos que habíamos comentado que los credit spread options son un tipo de derivado de crédito.
Si el lector está interesado en conocer otros instrumentos, puede hallar referencias a éstos en la bibliografía. En específico, puede revisar el libro de *Derivative Markets*, de Robert L. McDonald [42].

Hacemos mención de dos términos pertenecientes al vagaje financiero. Se refieren a las 2 formas que hay para operar productos derivados y en general valores financieros. Cuando decimos que se tiene una **posición larga** sobre un activo o subyacente, queremos decir que vamos a comprar dicho activo; mientras que estamos en una **posición corta** sobre un valor financiero cuando vendemos dicho activo.

Para la valuación de los productos financieros derivados son fundamentales tres propiedades, que están basadas en McDonald [42]. Las citamos a continuación, mencionando que hablaremos de ellas explícitamente en el capítulo de la valuación de los credit spread options, que las requieren como supuestos para poder hallar su precio.

Definición 2.4.4 (Tasa libre de riesgo)**.** *La tasa de interés libre de riesgo representa el interés que un inversionista espera obtener de una inversión absolutamente libre de riesgo, libre de riesgo de contraparte. Esto aplica para el horizonte de tiempo de dicha tasa de interés.*
Si el inversionista tuviere una inversión sobre una tasa con riesgo, esperaría un rendimiento mayor al que generaría la tasa libre de riesgo para compensarlo por el riesgo que tomará. A este rendimiento extra se le conoce como ***prima de riesgo****.*

Definición 2.4.5 (Valuación bajo ausencia de arbitraje)**.** *La valuación bajo no arbitraje significa que, si dos diferentes inversiones (activos) generan la misma ganancia (o payoff), entonces ambas deben de tener el mismo costo (precio).*

Definición 2.4.6 (Valuación neutral al riesgo)**.** *La valuación neutral al riesgo implica que cualquier inversionista que compre o venda un valor financiero no busca un premio o prima, que matemáticamente se define como $v = \mu - r$ donde μ es el rendimiento medio esperado y r es la tasa libre de riesgo, para querer participar en los mercados financieros. Así, bajo neutralidad al riesgo, la prima es nula, implicando que $\mu = r$, esto es, que el rendimiento esperado es la tasa libre de riesgo.*

Con esto se culmina el presente capítulo, que ha sido dedicado a presentar algunos fundamentos del riesgo de mercado, del riesgo de crédito y de los derivados. En el siguiente capítulo se analizarán y presentarán algunas herramientas necesarias para poder tratar el capítulo que corona esta tesis: la valuación de los CSO's. Se estudiarán los fundamentos preparatorios del Cálculo Estocástico, la teoría que permitirá la valuación de nuestro derivado de crédito. Esta teoría aplica naturalmente al desarrollo de Black y Scholes, modelo que, como hemos mencionado, está estrechamente ligado con la valuación de los CSO's.

Capítulo 3

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO

3.1. Preámbulo

Uno de los aspectos fundamentales para la valuación de algunos instrumentos financieros derivados, en particular el caso de las opciones, ya sean de crédito, ya sean plain vanilla, es la Teoría de los Procesos Estocásticos y, derivada de ésta, la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. En esta parte del libro se proporcionarán los fundamentos teóricos necesarios para afrontar debidamente el tema generador de la tesis.
Los elementos que aquí presentaremos están basados en las obras de Kuo [36], Oksendal [47], Kallenberg [34], Venegas [57] y Hernández [26], de tal forma que en esta bibliografía se pueden consultar las demostraciones de los resultados que aquí aparecen.

Comenzaremos haciendo un recordatorio de lo que son los Procesos Estocásticos, a modo de "profesión de fe", para después enfocarnos en las herramientas que habremos de usar. Esta definición está basada en Rincón [50] y Feller [23].

Definición 3.1.1 (Proceso Estocástico)**.** *Sea dado el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *y* T *un conjunto de índices. Un* Proceso Estocástico *es una función* $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$*, tal que para toda* $t \in T$ *la función* $X_t : \omega \to X(\omega, T)$ *es* $\mathscr{F}-$*medible, esto es,* $X_t^{-1}\left((-\infty, x)\right)$ *pertenece a la sigma-álgebra* $\mathscr{F}$*.*

Al conjunto T también se le denomina espacio parametral, y sus elementos se interpretan como tiempos. Si la cardinalidad de T es finita o a lo más numerable, el proceso estocástico se dice que es a tiempo discreto. Si T tiene la potencia del continuo o en general es un conjunto no numerable, se dice que el proceso es a tiempo continuo.

Consideremos los siguientes hechos, siguiendo a Rincón [50]:

- Si $t \in T$ es fija, entonces de la apliacación $\omega \to X(t,\omega)$, $X(t,\omega)$ es una variable aleatoria.
- Si $\omega \in \Omega$ es fija, de la aplicación $t \to X(t,\omega)$, $X(t,\omega)$ es una función determinística que depende de t. También se le conoce como *trayectoria o realización del proceso*.
- Sea S el conjunto de todos los posibles valores que el proceso estocástico $X(t)$ puede tomar. A S se le llama *espacio de estados*. Si la cardinalidad de S es finita o finita numerable, se dice que el espacio de estados es discreto. Si la cardinalidad es no numerable se dice que el espacio de estados es continuo. Luego, se pueden tener 4 combinaciones entre el espacio parametral y el espacio de estados, dependiendo de la cardinalidad de cada cual.

Se recibe enseguida la definición de movimiento Browniano, de Kuo [36].

Definición 3.1.2 (Movimiento Browniano estándar y unidimensional)**.** *Se dice que el proceso estocástico $\{W(t) : t \in T, T = [0,\infty)\}$ es un movimiento Browniano, si satisface las siguientes propiedades:*

- $W(0) = W_0 = 0$ *casi en todas partes, esto es,* $\mathbb{P}(\omega \in \Omega | W_0(\omega) = 0) = 1$.
- *Para cualquier* $0 \leq s < t$*, la variable aleatoria* $W_t - W_s$ *tiene distribución normal con media nula y varianza* $t - s$.
- $W(t)$ *posee incrementos independientes, i.e., para cualesquier conjunto de tiempos* $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$*, las variables aleatorias* $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *son estocásticamente independientes.*
- *Casi todas las trayectorias muestrales de* W_t *son continuas:*

$$\mathbb{P}(\omega | W(\cdot,\omega) \text{ es continua}) = 1.$$

En ocasiones, la condición última no es necesaria para definir al movimiento Browniano. Para tener un movimiento Browniano no estándar, basta pedir que en la condición tercera $W_t - W_s \sim N(0, c(t-s))$ con c una constante positiva.
Para efectos del presente trabajo, apelaremos a la notación $N(\mu, \sigma^2)$ para referirnos a la distribución normal con media μ y varianza σ^2.

Por el objetivo de esta tesis, es conveniente considerar las siguientes propiedades del movimiento Browniano (Kuo [36]).

Propiedades del movimiento Browiano.

Proposición 3.1.1. *Para cualquier $t > 0$, W_t posee distribución normal con media nula y varianza t. Para cualesquier $s, t > 0$ se tiene que* $\mathbb{E}[W_s W_t] = \text{mín}\{s, t\}$.

Proposición 3.1.2 (Invarianza del movimiento browniano ante traslaciones)**.** *Sea dado $t_0 > 0$ fijo y W_t. Entonces, el proceso estocástico $\widetilde{W_t} = W(t+t_0) - W(t)$ es también un movimiento Browniano.*

Proposición 3.1.3 (Invarianza ante escalamientos)**.** *Para cualquier número real $\lambda > 0$, el proceso estocástico $\widetilde{W_t} = W_{\lambda t}/\sqrt{\lambda}$ es también un movimiento Browniano.*

Para proceder a estudiar los fundamentos de cálculo estocástico, es necesario revisar varios elementos del llamado cálculo en $\mathscr{L}_2$, término de acuerdo a Hernández [25]. De este libro están basados los resultados de esta sección.

Recordemos que, dado el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $\mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ es el conjunto de todas las variables aleatorias que satisfacen $\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{1/p} < \infty$. Por simplicidad denotamos $\mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \equiv \mathscr{L}_p(\Omega)$

Definición 3.1.3 (Procesos de segundo orden)**.** *Se dice que un proceso estocástico $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso de segundo orden, denotándose como $X(\cdot) \in \mathscr{L}_2$, si $X(t) \in \mathscr{L}_2$ para todo $t \geq 0$, es decir,* $\mathbb{E}\left[|X(t)|^2\right] < \infty$.

Definición 3.1.4 (Procesos gaussianos)**.** *Se dice que el proceso estocástico $X(\cdot)$ es un proceso gaussiano si las combinaciones lineales* $\sum_{k=1}^{n} a_k X(t_k)$

son variables aleatorias normalmente distribuidas, para cualesquier colección finita de índices $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ *y cualquier colección de números reales* $a_1, \ldots, a_n$.

Para denotar a la función de covarianza de un procéso estocástico $X(\cdot)$ en los tiempos t y s se empleará: $K_X(s,t) := Cov\left(X(s), X(t)\right)$. Consideremos también la siguiente definición, $r_X(t) := K_X(0,t)$. Para el caso de dos procesos estocásticos $X(\cdot)$ y $Y(\cdot)$, se denotará su función de covarianza conjunta por $K_{XY}(s,t) := Cov\left(X(s), Y(t)\right)$ para todo s y t elementos de T.

Definición 3.1.5. *Se dice que los procesos estocásticos* $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ *y* $Y(\cdot) = \{Y(t), t \in T\}$ *tienen las mismas distribuciones (finito - dimensionales) si para cualquier conjunto de índices* $t_1, \ldots, t_n$ *en* T*, las variables aleatorias* $X(1), \ldots, X(t)$ *poseen la misma distribución conjunta que* $Y(1), \ldots, Y(t)$.

Conviene que destaquemos los siguientes elementos de los espacios métricos.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una *norma* sobre V es una función $\|\cdot\|$ de V en $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ que cumple con lo siguiente:

- $x = 0$ si y sólo si $\|x\| = 0$.
- (homogeneidad absoluta) $\|ax\| = |a| \, \|x\|$ para toda $a \in \mathbb{R}$ y toda $x \in V$.
- (desigualdad del triángulo) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$.

En el caso de que en la primera propiedad no se cumpla el recíproco de la proposición lógica, se dice que la función $\|\cdot\|$ es una seminorma. A la pareja $(V, \|\cdot\|)$ se le conoce como espacio lineal normado.

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio lineal normado. La función $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$ definida como $d(x,y) := \|x - y\|$ es una métrica. A la pareja (V, d) se le conoce como espacio métrico.

Se dice que el espacio anterior es completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente (respecto a d), ie., si $\{x_n\} \subset V$ es una sucesión tal que $d(x_n, x_m) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, entonces existe x en V tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Se dice que un espacio es de Banach si resulta ser un espacio vectorial normado y completo.

Un *producto interno* sobre un espacio vectorial V es una función $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ de $V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple con:

- $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$ para toda $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $x, y \in V$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para toda $x, y \in V$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ para toda $x \in X$
- $\langle x, x \rangle = 0$ si y solamente si $x = 0$ para x elemento de V.

Al par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le llama espacio vectorial con producto interno. Si dicho espacio vectorial es completo con respecto a la norma $\|x\|$, se le denomina espacio de Hilbert.
Así, todo espacio de Hilbert es de Banach, mas no todo espacio de Banach es de Hilbert.

También tomemos en cuenta la definición de topología.

Definición 3.1.6 (Topología). *Sea X un conjunto. Una* Topología *(o estructura topológica) en X es una familia τ de subconjuntos de X que satisface:*

- *Cada unión de miembros de τ es también elemento de τ.*
- *Cada intersección finita de elementos de τ es también un elemento de τ.*
- *El conjunto vacío $\emptyset$ y X son elementos de τ.*

A la pareja (X, τ), que consiste del conjunto X y una topología τ, se le conoce como espacio topológico.

Para poder trabajar con derivación e integración en $\mathscr{L}_2$, es necesario establecer primeramente las nociones de límite y continuidad en $\mathscr{L}_2$ (Hernández [26] y Kuo [36]).

Definición 3.1.7. *Se dice que el proceso estocástico $\widetilde{X}(t)$ es una versión de $X(t)$ si $\mathbb{P}\left[\widetilde{X}(t) = X(t)\right] = 1$ para cada t elemento del espacio parametral.*

Es sencillo verficar que $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}\left[XY\right]$ define un producto interno, y que $\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2\right]}$ define una norma en $\mathscr{L}_2$. En ambos casos, hay que considerar la definición anterior para que la primera identidad de una norma y la última propiedad de un producto interno se satisfagan.

La convergencia en $\mathscr{L}_2$ se da de la siguiente forma:
X_n converge a X, $X_n \to X$, en $\mathscr{L}_2$ si y solamente si $\|X_n - X\|_2 \to 0$ si y sólo si $\mathbb{E}\left|X_n - X\right|^2 \to 0$.

Lema 3.1.1. *Si las variables aleatorias X_n y Y_m son convergentes en $\mathscr{L}_2$, esto es, $X_n \to X$ y $Y_m \to Y$, entonces $\langle X_n, Y_m\rangle = \mathbb{E}\left[X_nY_m\right] \to \mathbb{E}\left[XY\right] = \langle X, Y\rangle$.*

Lema 3.1.2 (Criterio para la existencia de un límite en $\mathscr{L}_2$)**.** *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico en $\mathscr{L}_2$ y sea $t_0 \in T$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- *Existe una variable aleatoria $X \in \mathscr{L}_2$ tal que $X(t) \to X$ en $\mathscr{L}_2$ cuando $t \to t_0$.*
- *Existe un número $l \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}\left[X(t_n)X(t'_m)\right] \to l$ cuando $m, n \to \infty$ para cualesquiera dos sucesiones convergentes $t_n \to t_0$ y $t'_m \to t_0$.*

Definición 3.1.8 (Continuidad en $\mathscr{L}_2$)**.** *Se dice que el proceso estocástico $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ es $\mathscr{L}_2$-continuo en $t \in T$ si $X(t+h) \to X(t)$ en $\mathscr{L}_2$ cuando $h \to 0$. Se dice que el proceso estocástico $X(\cdot)$ es $\mathscr{L}_2$-continuo si es $\mathscr{L}_2$-continuo en todo punto t de T.*

Teorema 3.1.1 (Criterio de continuidad en $\mathscr{L}_2$)**.** *Supóngase que $m_x : T \to \mathbb{R}$ definida como $m_X(t) := \mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es una función continua. Entonces $X(\cdot)$ es un proceso $\mathscr{L}_2$-continuo si y sólo si K_X es continua en (t, t).*

Definición 3.1.9 (Diferenciabilidad en $\mathscr{L}_2$)**.** *Sea dado el proceso estocástico $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ en $\mathscr{L}_2$. Se dice que $X(\cdot)$ es $\mathscr{L}_2$-diferenciable en el punto t de T si existe una variable aleatoria $X'(t)$ en $\mathscr{L}_2$ tal que*

$$\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \to X'(t) \text{ en } \mathscr{L}_2 \text{ cuando } h \to 0. \tag{3.1.1}$$

Esto se denota de la siguiente forma:

$$X'(t) = \frac{d}{dt}X(t) \text{ en } \mathscr{L}_2. \tag{3.1.2}$$

Respecto a la integración en $\mathscr{L}_2$, consideremos lo siguiente:

Sea el proceso estocástico $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ en $\mathscr{L}_2$ y $[a,b]$ un intervalo contenido en T. Sea dada además la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tomemos la partición del intervalo $[a,b]$ $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ con la convención de que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$; sea $\|\Delta_n\| = \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1})$ la norma de la partición y sea τ_i un punto de evaluación intermedio sobre el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Se define

$$I(\Delta_n) := \sum_{i=1}^{n} g(\tau_i)X(\tau_i)\,(t_{i-1} - t_i). \tag{3.1.3}$$

Si existe una variable aleatoria I en $\mathscr{L}_2$ tal que $I(\Delta_n) \to I$ en $\mathscr{L}_2$ cuando $\|\Delta_n\| \to 0$ y además se cumple que dicho límite es independiente de la selección de las particiones Δ_n; se dice entonces que $g(\cdot)X(\cdot)$ es $\mathscr{L}_2$-integrable sobre el intervalo $[a,b]$. Esto se denota como

$$I := \int_a^b g(t)X(t)dt. \tag{3.1.4}$$

Una consecuencia de lo anterior es el siguiente

Teorema 3.1.2. *Supóngase que m_X y g son funciones continuas sobre $[a,b]$.*

- *Si $g(\cdot)X(\cdot)$ es $\mathscr{L}_2$-integrable sobre el intervalo $[a,b]$, entonces la esperanza de I, $\mathbb{E}[I]$, satisface que*

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b g(t)X(t)dt\right] = \int_a^b g(t)m_x(t)dt. \tag{3.1.5}$$

- *Si además de la continuidad de las funciones m_x y g se tiene que K_X es continua sobre $[a,b]\times[a,b]$, entonces $g(\cdot)X(\cdot)$ es $\mathscr{L}_2$-integrable sobre $[a,b]$ y la integral I tiene esperanza matemática $\mathbb{E}[I]$ como en el postulado anterior. Su segundo momento y su varianza, son, a saber:*

$$\mathbb{E}\left[I^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b g(t)X(t)dt\right)^2\right] = \int_a^b\int_a^b g(s)g(t)\mathbb{E}\left[X(s)X(t)\right]dsdt, \tag{3.1.6}$$

$$Var(I) = \int_a^b\int_a^b g(s)g(t)K_X(s,t)dsdt. \tag{3.1.7}$$

Habiendo estudiado los puntos anteriores, podemos formalmente tocar el tema del Cálculo Estocástico y la resolución de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. Para tal fin, es conveniente ver la razón que motiva al cálculo estocástico, que es una integral muy particular, la integral de Wiener.
El resto del presente capítulo está basado principalmente en Kuo [36].

3.2. La integral de Wiener

Como punto inicial de la disquisición, queremos encontrarle sentido a la siguiente función sobre el movimiento browniano (de acuerdo con Kuo [36]):

$$\int_a^b f(t)dW(t,\omega) \text{ para } f(t) \text{ una función} \tag{3.2.1}$$

Recordemos el fundamento de la integral equivalente a ésta, en un sentido "totalmente determinístico", la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(t)dg(t). \tag{3.2.2}$$

3.2.1. La integral de Riemann-Stieltjes

Sea dada la función g monótona creciente sobre el intervalo cerrado $[a,b]$. Se dice que una función acotada f definida sobre $[a,b]$ es *Riemann-Stieltjes integrable* con respecto a g si el siguiente límite existe:

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\left(g(t_k) - g(t_{k-1})\right), \tag{3.2.3}$$

donde la partición Δ_n y los puntos de evaluación τ_k son como se definieron en la sección pretérita.
Es un hecho bastante conocido que las funciones continuas sobre $[a,b]$ son Riemann-Stieltjes integrables con respecto a cualquier función monótona creciente en $[a,b]$. Recordemos además, que la *integral de Riemann* es un caso particular de la integral de Riemann-Stieltjes, tomando como la función g a $g(t) := t$, que claramente cumple el hecho anterior.

Supongamos que f es una función monótona decreciente y g es una función continua. Entonces, mediante la fórmula de integración por partes se puede definir

$$\int_a^b f(t)dg(t) \equiv f(t)g(t)\mid_a^b - \int_a^b g(t)df(t), \tag{3.2.4}$$

donde el integrando del lado derecho está definido como en 3.2.2 con f y g intercambiados. Esto conduce al siguiente cuestionamiento: para cualesquiera funciones f y g sobre $[a, b]$, ¿se puede definir la integral $\int_a^b f(t)dg(t)$ en el sentido de Riemann-Stieltjes?

Consideremos el caso especial $f = g$, esto es, la integral

$$\int_a^b f(t)df(t). \tag{3.2.5}$$

Sea Δ_n una partición de $[a, b]$. Sean L_n y R_n las correspondientes sumas de Riemann con puntos de evaluación $\tau_k = t_{k-1}$ y $\tau_k = t_k$,

$$L_n := \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})\left(f(t_k) - f(t_{k-1})\right), \tag{3.2.6}$$

$$R_n := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left(f(t_k) - f(t_{k-1})\right). \tag{3.2.7}$$

Al siguiente límite, si existe,

$$R_n - L_n = \sum_{k=1}^{n} \left(f(t_i) - f(t_{k-1})\right)^2, \tag{3.2.8}$$

se le conoce como variación cuadrática de f en $[a, b]$.
Es claro que $\lim_{\|\Delta_n\|\to 0} L_n \neq \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} R_n$ si y sólo si la variación cuadrática de f es no nula.

Veamos el siguiente ejemplo:
Sea dada la función f continua que satisface la siguiente condición:

$$|f(t) - f(s)| \approx |t - s|^{1/2}. \tag{3.2.9}$$

Para este caso en particular se sigue que

$$0 \leq R_n - L_n \approx \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = b - a. \tag{3.2.10}$$

Luego, para a distinto de b, $\lim_{\|\Delta_n\|\to 0} L_n \neq \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} R_n$. Consecuentemente, la integral $\int_a^b f(t)df(t)$ no se puede definir en el sentido de Riemann-Stieltjes. Es así que definir la integral $\int_a^b f(t)dg(t)$ aún en el caso en que f es igual a g no es un problema trivial. Más aún, no hay una respuesta simple al cuestionamiento que nos hicimos. Por estos detalles, se tienen varios desarrollos en la Teoría de Integración, en la cual se han definido nuevos tipos de integral, como la conocida integral de Lebesgue, e integrales como la de Henstock-Kurzweil y la de McShane. Este tipo de teorías están fuera de los objetivos del presente trabajo, mas el desarrollo anterior nos permitirá poner en un contexto adecuado al cálculo estocástico.

3.2.2. Formulación de la Integral de Wiener

Siguiendo a Kuo [36], para definir la integral de Wiener, consideremos el espacio $\mathscr{L}_2[a,b]$, que denota el espacio de Hilbert de todas las funciones real valuadas cuadrado-integrables, esto es $\int_a^b |f^2| < \infty$, en el conjunto $[a,b]$.

Paso uno

Súpóngase que f es una función escalonada dada por $f = \sum_{k=1}^n a_k 1_{[t_{k-1},t_k]}$, con $t_0 = a$ y $t_n = b$.
$1_{[t_{k-1},t_k]}$ es una función indicadora "usual":

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Se define la siguiente función

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(W(t_k) - W(t_{k-1})\right). \tag{3.2.11}$$

$W(\cdot)$ es un movimiento browniano. La citada función es lineal: $I(af+bg) = aI(f)+bI(g)$ para cualesquiera a y b números reales y cualesquiera funciones escalonadas f y g. A partir de lo anterior se obtiene el siguiente resultado:

Lema 3.2.1. *Para la función escalonada f, la variable aleatoria $I(f)$ es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza dada por*

$$\mathbb{E}\left[I\left(f\right)^2\right] = \int_a^b f\left(t\right)^2 dt. \tag{3.2.12}$$

Paso dos

Consideremos el espacio $\mathscr{L}_2(\Omega)$ con el producto interno $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}\left[XY\right]$. Como mencionamos antes, dicho espacio con el producto interno dado es un espacio de Hilbert. Sea f una función perteneciente al espacio $\mathscr{L}_2[a, b]$. Elijamos una sucesión de funciones escalonadas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_n \to f$ en $\mathscr{L}_2[a, b]$. A consecuencia del lema anterior, la sucesión $\{I\left(f_n\right)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Más aún, la sucesión es convergente en $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Ahora definamos

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I\left(f_n\right),\ \text{en } \mathscr{L}_2(\Omega). \tag{3.2.13}$$

La función $I(f)$ está bien definida: sea $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ otra sucesión de funciones escalonadas tal que $g_m \to f$ en $\mathscr{L}_2[a, b]$. Por la linealidad de $I(\cdot)$ y por el lema, se recibe

$$\mathbb{E}\left[\left|I\left(f_n\right) - I\left(g_m\right)\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|I\left(f_n - g_m\right)\right|^2\right] = \int_a^b \left(f_n(t) - g_m(t)\right)^2 dt. \tag{3.2.14}$$

Escribiendo el argumento del integrando como $f_n(t)-g_m(t) = [f_n(t) - f(t)] - [g_m(t) - f(t)]$ y empleando la desigualdad $(x - y)^2 \le 2\left(x^2 + y^2\right)$ para x y y números reales, se sigue que

$$\int_a^b \left[f_n(t) - g_m(t)\right]^2 dt \le 2\int_a^b \left\{\left[f_n(t) - f(t)\right]^2 - \left[g_m(t) - f(t)\right]^2 dt\right\} \to 0,\ \text{conforme } n, m \to \infty. \tag{3.2.15}$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} I\left(f_n\right) = \lim_{m\to\infty} I\left(g_m\right)$ en $\mathscr{L}_2(\Omega)$.

Por lo anterior, podemos formalmente establecer la siguiente

Definición 3.2.1 (Integral de Wiener)**.** *Sea f una función perteneciente al espacio $\mathscr{L}_2[a,b]$. Al límite de $I(f)$ definido antes se le nombra* integral de Wiener de f*. La integral de Wiener $I(f)$ se denota como*

$$I(f)(\omega) = \left(\int_a^b f(t)dW(t) \right)(\omega) \text{ con } \omega \in \Omega, \text{ casi seguramente.} \quad (3.2.16)$$

Por simplicidad, la integral de Wiener se denotará por

$$I(f) = \int_a^b f(t)dW(t). \quad (3.2.17)$$

Algunas consecuencias de lo que hemos estudiado son, a saber:

Teorema 3.2.1. *Para cada f función en $\mathscr{L}_2[a,b]$, la integral de Wiener*

$$I(f) = \int_a^b f(t)dW(t) \quad (3.2.18)$$

es una variable aleatoria Gaussiana con media nula y varianza

$$Var(f) = \|f\|^2 = \int_a^b f(t)^2 dt. \quad (3.2.19)$$

Corolario 3.2.1. *Si f y g son funciones definidas en $\mathscr{L}_2[a,b]$, entonces se cumple que*

$$\mathbb{E}\left[I(f)I(g)\right] = \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (3.2.20)$$

En particular si f y g son ortogonales, esto es $\langle f, g\rangle = 0$, entonces las variables aleatorias Gaussianas $I(f)$ e $I(g)$ son independientes.

El siguiente resultado es importante. Nos lleva a concluir que si la función f sobre la cual se define la integral de Wiener es de variación acotada, entonces dicha integral puede ser desarrollada mediante integración por partes en el sentido de Riemann-Stieltjes.

Teorema 3.2.2. *Sea f una función en $\mathscr{L}_2[a,b]$ y de variación acotada. Entonces*

$$\left(\int_a^b f(t)dW(t) \right)(\omega) = (RS) \int_a^b f(t)dW(t,\omega) \text{ c.s.,} \quad (3.2.21)$$

donde la expresión del lado derecho derecho de la igualdad es una integral en el sentido de Riemann-Stieltjes (RS) de f.

Es así que, para f función de variación acotada se cumple la regla de integración por partes:

$$(RS)\int_a^b f(t)dW(t,\omega) = f(t)W(t,\omega)\mid_a^b - (RS)\int_a^b W(t,\omega)df(t). \quad (3.2.22)$$

Dicha igualdad es válida para cada ω de Ω.

3.3. Martingalas

Prosiguiendo con el estudio de las integrales estocásticas, es conveniente analizar una propiedad importante e interesante de éstas: la propiedad de martingala. Esta propiedad es fundamental para la valuación de opciones y en general de los derivados, cuando se plantea un modelo estocástico. Esta parte proviene de Kuo [36] y de Kallenberg [34].
Recordemos la definición de esperanza condicional.

Definición 3.3.1. *Sea X una variable aleatoria en $\mathscr{L}_1(\Omega,\mathscr{F})$. Supongamos que G es una σ-álgebra y que $\mathcal{G}\in\mathscr{F}$. La* esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$ *se define como la única variable aleatoria Y que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Y es $\mathcal{G}$-medible*
2. *$\int_A XdP = \int_A YdP$ para toda A subconjunto de $\mathcal{G}$.*

La esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$ se denota como $\mathbb{E}[X\mid\mathcal{G}]$.

Citamos enseguida el Teorema de Radon-Nikodym.

Teorema 3.3.1 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Si υ_1,υ_2 y μ son medidas σ-aditivas en el espacio medible $(\Omega,\mathscr{F})$ con υ_1 y υ_2 μ-continuas y si $\upsilon=\upsilon_1-\upsilon_2$ está bien definida sobre $\mathscr{F}$, esto es $\upsilon_1\{\Omega\}$ y $\upsilon_2\{\Omega\}$ no son ambas igual a ∞, entonces existe una función f $\mathscr{F}$-medible tal que*

$$\upsilon\{A\} = \int_A f d\mu, \text{ con } A\in\mathscr{F} \quad (3.3.1)$$

y f es única dentro de conjuntos de medida cero respecto a μ.

También tengamos presente la siguiente definición.

Definición 3.3.2. *Una* filtración *sobre T es una familia creciente $\{\mathscr{F}_t \mid t \in T\}$ de σ-álgebras. Se dice que un proceso estocástico $\{X_t|t \in T\}$* está adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t \mid t \in T\}$ *si para cada t, la variable aleatoria X_t es $\mathscr{F}_t$-medible.*

Con respecto a la última definición, con familia creciente de σ-álgebras queremos decir que $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2 \subseteq \ldots$. La *filtración canónica o natural* de un proceso estocástico es aquella sucesión de σ-álgebras que se definen de la siguiente forma: $\mathscr{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$.
La definición siguiente es un punto fundamental para el presente trabajo, ya que, como mencionamos, gran parte de la valuación estocástica de los derivados depende de que la siguiente propiedad se cumpla. He aquí la

Definición 3.3.3 (Martingala)**.** *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}$ y $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ para toda $t \in T$. Entonces, X_t es llamado* Martingala *con respecto a $\{\mathscr{F}_t\}$ si para cada $s \leq t$ de T, se cumple que*

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathscr{F}_s] = X_s \ c.s. \tag{3.3.2}$$

De la definición también se desprenden dos alternativas. Suponiendo que se cumplen las hipótesis hechas en la definición anterior, se define la *submartingala* y la *súpermartingala*:

- Se dice que el proceso estocástico $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ es *submartingala* si $\mathbb{E}[X_t \mid \mathscr{F}_s] \geq X_s$ c.s.

- Se dice que el proceso estocástico $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ es *súpermartingala* si $\mathbb{E}[X_t \mid \mathscr{F}_s] \leq X_s$ c.s.

El siguiente teorema es un resultado muy importante que relaciona el concepto de martingala con el de integral de Wiener.

Teorema 3.3.2. *Sea f función de $\mathscr{L}_2[a,b]$. Entonces el proceso estocástico*

$$M_t := \int_a^t f(s)dW(s), \ \text{con } a \leq t \leq b, \tag{3.3.3}$$

es martingala respecto a la filtración canónica $\mathscr{F}_t = \sigma\{W(s); s \leq t\}$.

Hasta este momento hemos hablado del movimiento Browniano como un proceso estocástico y hemos podido definir a través de él a la integral de Wiener, pero aún no hemos mencionado algún resultado que demuestre su existencia. El siguiente teorema afirma que el movimiento Browniano existe, de acuerdo con Kuo [36] y Kallenberg [34].

Teorema 3.3.3 (Existencia del movimiento Browniano, Wiener)**.** *Existe un proceso Gaussiano continuo W en $\mathbb{R}$ con incrementos estacionarios e incrementos independientes que cumple que $W(0) = 0$ tal que $W(t)$ posee distribución normal con media nula y varianza t para cada $t \geq 0$, $t \in T$.*

3.4. Integral de Itô

En la pretérita sección desarrollamos los fundamentos de la integral de Wiener: $\int_a^b f(t)dW(t)$ para f una función determinística en $\mathscr{L}_2[a,b]$. Queremos extender el resultado para $f(t,\omega)$ un proceso estocástico. Tal integral $\int_a^b f(t,\omega)dW(t,\omega)$ es llamada *Integral de Itô* (esta sección se basa en Kuo [36] y Kallenberg [34]).

Como vimos, el proceso estocástico $M_t = \int_a^t f(s)dW(s)$ es martingala. Es así que nos surge el siguiente cuestionamiento: ¿es el proceso estocástico $M_t = \int_a^t f(s,\omega)dW(s,\omega)$, con $f(t,\omega)$ un proceso estocástico, martingala?

Principiemos con la definición que se dá a continuación:

Definición 3.4.1. *Sea $\mathscr{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ el espacio de todos los procesos estocásticos $f(\cdot) = \{f(t,\omega), t\in T \wedge \omega\in\Omega\}$, con $a\le t\le b$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$f(t,\omega)$ está adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}$*
2. *$\int_a^b \mathbb{E}\left[|f(t)|^2\right] dt < \infty$*

Para definir la integral de Itô, procedemos a su construcción en tres pasos.

Paso 1. f es un proceso estocástico escalonado en $\mathscr{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$

Supongamos que f es un proceso estocástico escalonado que viene dado por

$$f(t,\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1}(\omega)1_{[t_{k-1},t_k)}(t), \tag{3.4.1}$$

donde ξ_{k-1} es $\mathscr{F}_{t_{k-1}}$-medible y que satisface que $\mathbb{E}\left[\xi_{k-1}^2\right] < \infty$.

Lema 3.4.1. *Sea dada la siguiente función*

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} \xi_{i-1}\left(W(t_k) - W(t_{k-1})\right). \tag{3.4.2}$$

Entonces, $\mathbb{E}[I(f)] = 0$ *y*

$$\mathbb{E}\left[|I(f)|^2\right] = \int_a^b \mathbb{E}\left[|f(t)|^2\right] dt \tag{3.4.3}$$

Cabe destacar que $I(f)$ es lineal, esto es $I(af+bg)=aI(f)+bI(g)$ para cualquier a y b en $\mathbb{R}$ y cualesquier procesos estocásticos escalonados f y g.

Paso 2. Un lema de aproximación.

El siguiente lema nos permitirá definir la integral estocástica $\int_a^b f(t)dW(t)$ para f procesos estocásticos generales en $\mathscr{L}^2_{ad}\left([a,b]\times\Omega\right)$.

Lema 3.4.2. *Supóngase que f pertenezca a $\mathscr{L}^2_{ad}\left([a,b]\times\Omega\right)$. Entonces, existe una sucesión de procesos estocásticos escalonados $\{f_n(t); n\geq 1\}$ en $\mathscr{L}^2_{ad}\left([a,b]\times\Omega\right)$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \mathbb{E}\left[|f(t)-f_n(t)|^2\right]dt=0. \tag{3.4.4}$$

Este lema nos permite establecer la siguiente

Definición 3.4.2 (Integral de Itô)**.** *El límite $I(f)$,*

$$I(f)=\lim_{n\to\infty}I(F_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_{i-1}\left(W\left(t_k\right)-W\left(t_{k-1}\right)\right) \tag{3.4.5}$$

se denomina Integral de Itô de f *y se denota como*

$$\int_a^b f(t)dW(t). \tag{3.4.6}$$

Cabe hacer un comentario respecto a la definición anterior, para clarificar que la integral de Itô está bien definida.
Por los dos pasos que acabamos de desarrollar, tenemos la integral estocástica $\int_a^b f(t)dW(t)$ para f función elemento de $\mathscr{L}^2_{ad}\left([a,b]\times\Omega\right)$. Si aplicamos el lema 3.4.2 para obtener una sucesión $\{f_n(t,\omega); n\geq 1\}$ de procesos estocásticos adaptados tales que la ecuación 3.4.4 es válida, podemos verificar que para cada n, $I\left(f_n\right)$, que viene dada por 3.4.2, cumple con lo siguiente, invocando al lema 3.4.1:

$$\mathbb{E}\left[\left|I\left(f_n\right)-I\left(f_m\right)\right|^2\right]=\int_b^a \mathbb{E}\left[|f_n(t)-f_m(t)|^2\right]dt\to 0, \tag{3.4.7}$$

conforme $n,m\to\infty$.
Así, la sucesión $\{I\left(f_n\right)\}$ es de Cauchy en $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Y más aún, el límite de

la ecuación 3.4.5 es independiente de la elección de la sucesión $\{f_n\}$. Esto significa que el límite es único.

El siguiente teorema establece dos propiedades deseables que tenga la integral de Itô.

Teorema 3.4.1. *Supóngase que $f(\cdot) = \{f(t), t \in T\}$ es un proceso estocástico en $\mathscr{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Entonces la integral de Itô $I(f) = \int_a^b f(t)dW(t)$ es una variable aleatoria con media nula, esto es $\mathbb{E}[I(f)] = 0$ y que cumple también con*

$$\mathbb{E}\left[|I(f)|^2\right] = \int_a^b \mathbb{E}\left[|f(t)|^2\right] dt. \tag{3.4.8}$$

Otra propiedad viene dada por el siguiente corolario.

Corolario 3.4.1. *Para cualesquiera f y g procesos estocásticos en $\mathscr{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$, la siguiente igualdad es válida:*

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b f(t)dW(t)\int_a^b g(t)dW(t)\right] = \int_a^b \mathbb{E}[f(t)g(t)]\,dt. \tag{3.4.9}$$

Una propiedad importante que se desprende del teorema pasado es que la integral de Itô $I : \mathscr{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega) \to \mathscr{L}_2(\Omega)$ es una isometría. Esto significa que se cumple la siguiente igualdad $\|I(f)\|_2 = \|f\|_1$, donde $\|\cdot\|_1$ representa la norma con respecto a f y $\|\cdot\|_2$ es la norma con respecto a $I(f)$. La norma de f es $\sqrt{\int_a^b \mathbb{E}[f^2(t)]\,dt}$ y la norma de $I(f)$ es $\sqrt{\mathbb{E}\left[\left|\int_a^b f(t)dW(t)\right|^2\right]}$. También se puede verificar que la esperanza matemática conmuta con la integral de Itô. Lo que queremos decir con esto se verá en lo que sigue. Mediante la última disquisición establecemos la siguiente definición, basada en Kuo [36] y Hernández [26].

Definición 3.4.3 (Isometría de Itô)**.** *A la siguiente propiedad*

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b f(t)dW(t)\right]^2 = \int_a^b \mathbb{E}\left[f^2(t)\right] dt = \mathbb{E}\left[\int_a^b f^2(t)dt\right] \tag{3.4.10}$$

se le llama Isometría de Itô*, si ésta es válida.*

El siguiente teorema representa una propiedad que esperábamos también se cumpliera para las integrales de Itô: la propiedad de martingala.

Teorema 3.4.2. *Sea* $f(\cdot) = \{f(t), t \in T\}$ *un proceso estocástico en* $\mathscr{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. *Entonces el proceso estocástico definido como*

$$X_t = \int_a^t f(t)dW(t), \ \ \text{para } a \le t \le b, \tag{3.4.11}$$

es martingala con respecto a la filtración $\{\mathscr{F}_t; a \le t \le b\}$.

Un detalle importante que hay que tomar el cuenta es el que a continuación sigue. La integral estocástica de Itô no está definida para cada ω fijo, como es el caso de las integrales de Riemann, Riemann-Stieltjes o incluso de la integral de Lebesgue. Esto también sucede para la integral de Wiener. Luego, la continuidad de la integral de Itô no es un hecho trivial, como lo es en análisis real elemental. Es así que para verificar la continuidad, nos ayudamos con el siguiente teorema.

Teorema 3.4.3. *Sea* $f(\cdot) = \{f(t), t \in T\}$ *un proceso estocástico en* $\mathscr{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. *Entonces, el proceso estocástico*

$$X_t = \int_a^t f(t)dW(t), \ \ \text{para } a \le t \le b, \tag{3.4.12}$$

es continuo si dicho proceso tiene trayectorias continuas en $[a,b]$ *casi seguramente.*

Para establecer un vínculo entre las sumas de Riemman y la integral de Itô tenemos el siguiente teorema. Recordemos que $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ representa una partición del intervalo $[a,b]$ y que $\|\Delta_n\| = \text{máx}_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1})$ es la norma de la partición.

Teorema 3.4.4. *Sea dado el proceso estocástico*$f(\cdot) = \{f(t), t \in T\}$ *en* $\mathscr{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ *y supongamos que* $\mathbb{E}[f(t)f(s)]$ *es una función continua de* t *y de* s. *Entonces*

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \lim_{\|\Delta_n\|\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})(W(t_k) - W(t_{k-1})), \tag{3.4.13}$$

en $\mathscr{L}_2(\Omega)$.

3.5. La regla de Itô

En esta sección (Kuo [36]) estableceremos el mecanismo que nos ayudará a resolver las ecuaciones diferenciales estocásticas. Dicho mecanismo es la celebrada fórmula o *regla de Itô*. Primeramente haremos mención de la fórmula análoga en Cálculo.

La regla de la cadena del cálculo de Newton-Lebnitz establece que la derivada de la función $f(g(t))$ se puede calcular como sigue:

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t) \tag{3.5.1}$$

para las funciones diferenciables f y g. Mediante el teorema fundamental del cálculo, la ecuación anterior dice que:

$$f(g(t)) - f(g(a)) = \int_a^t f'(g(s))g'(s)ds. \tag{3.5.2}$$

El cálculo de Itô trata con funciones aleatorias, es decir, procesos estocásticos. Consideremos a un movimiento browniano $W(t)$ y a una función f diferenciable. Hacemos la composición de las funciones anteriores para obtener $f\left(W(t)\right)$. ¿Qué podríamos decir de la derivada de la ecuación?

$$\frac{d}{dt}f\left(W(t)\right) = f'\left(W(t)\right)W'(t) \tag{3.5.3}$$

Como $W(t)$ es un proceso estocástico cuya mayor parte de sus trayectorias muestrales son no diferenciables en parte alguna, la derivada $f\left(W(t)\right)$ carece de sentido. No obstante, hemos estado empleando el diferencial $dW(t)$ para definir a las integrales estocásticas. Su uso ha sido meramente notacional, que proviene del cálculo de las sumas

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left(W\left(t_k\right) - W\left(t_{k-1}\right)\right) \tag{3.5.4}$$

y su posterior paso al límite.

El siguiente teorema es un primer resultado sobre la fórmula de Itô. Este teorema también es conocido como lema o regla de Itô. Para esta parte apelamos a Kuo [36], Kallenberg [34] y Hernández [26].

Teorema 3.5.1 (Regla de Itô)**.** *Sea $f(t)$ una función de clase C^2, i.e, $f(t)$ posee segunda derivada continua. Entonces*

$$f\left(W(t)\right)-f\left(W(a)\right)=\int_a^t f'\left(W(s)\right)dW(s)+ \frac{1}{2}\int_a^t f''\left(W(s)\right)ds, \tag{3.5.5}$$

donde la primer integral es una integral de Itô y la segunda integral es una integral en el sentido de Riemann para cada trayectoria de $W(s)$.

El último término de la ecuación anterior proviene de la variación cuadrática del movimiento browniano, que es no nulo. Este término extra, distingue al cálculo de Itô del cálculo de Newton-Leibniz.

El siguiente lema habla sobre la partición Δ_n. Este resultado es parte de los requerimientos para la demostración del teorema que continúa.

Lema 3.5.1. *Sea $g(t)$ una función continua en $\mathbb{R}$. Para cada $n \geq 1$, sea $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, t]$. Entonces la sucesión*

$$\sum_{k=1}^{n} g\left(W\left(t_{k-1}\right)\right)\left(\left(W\left(t_k\right)-W\left(t_{k-1}\right)\right)^2-\left(t_k-t_{k-1}\right)\right) \tag{3.5.6}$$

converge a cero en probabilidad conforme $\|\Delta_n\| \to 0$.

El siguiente postulado es una primera generalización de la fórmula o regla de Itô.

Teorema 3.5.2. *Sea $f(t,x)$ una función continua con derivadas parciales continuas $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Entonces*

$$f\left(t,W(t)\right)=f\left(a,W(a)\right)+\int_a^t \frac{\partial f}{\partial x}\left(s,W(s)\right)dW(s)+ \int_a^t\left(\frac{\partial f}{\partial t}\left(s,W(s)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(s,W(s)\right)\right)ds \tag{3.5.7}$$

Mediante el siguiente teorema se establece la fórmula de Itô en su forma general. Para proceder a establecerlo, veamos algunas definiciones alrededor del mismo.

Definición 3.5.1. *Sea* $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, \mathscr{L}_1[a,b])$ *el espacio de todas los procesos estocásticos* $f(\cdot) = \{f(t), t \in T\}$ *adaptados a la filtración* $\{\mathscr{F}_t\}$ *tales que* $\int_a^b |f(t)|\, dt < \infty$ *casi seguramente.*
Sea $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, \mathscr{L}_2[a,b])$ *el espacio de los procesos estocásticos* $f(\cdot) = \{f(t), t \in T\}$ *adaptados a la filtración* $\{\mathscr{F}_t\}$ *tales que* $\int_a^b |f(t)|^2\, dt < \infty$ *casi seguramente.*

Definición 3.5.2 (Proceso de Itô)**.** *Un* proceso de Itô *es un proceso estocástico de la forma*

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s)dW(s) + \int_a^t g(s)ds, \text{ para } a \leq t \leq b, \tag{3.5.8}$$

donde X_a *es* $\mathscr{F}_a$*-medible,* f *pertenece a* $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, \mathscr{L}_2[a,b])$ *y* g *pertenece a* $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, \mathscr{L}_1[a,b])$.

La última ecuación se puede escribir como una "diferencial estocástica"

$$dX_t = f(t)dW(t) + g(t)dt. \tag{3.5.9}$$

Recordemos que, como habíamos mencionado, la diferencial estocástica carece de sentido en sí misma debido a que las trayectorias del movimiento Browniano son diferenciables en ninguna parte. Pero la ecuación en la forma integral sí tiene sentido, como lo hemos estado estudiando.

A continuación se recibe la fórmula de Itô en su forma general.

Teorema 3.5.3 (Regla de Itô, Forma General)**.** *Sea* X_t *un proceso de Itô dado por*

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s)dW(s) + \int_a^t g(s)ds, \text{ para } a \leq t \leq b. \tag{3.5.10}$$

Supóngase que $\theta(t,x)$ *es una función continua con derivadas parciales* $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$*. Entonces* $\theta(t, X_t)$ *es también un proceso de Itô y*

$$\begin{aligned} \theta(t, X_t) = \theta(a, X_a) &+ \int_a^t \frac{\partial \theta}{\partial x}(s, X_s) f(s)dW(s) \\ + \int_a^t \left[\frac{\partial \theta}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial \theta}{\partial x}(s, X_s) g(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(s, X_s) f(s)^2 \right] ds. \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

A partir de la regla de Itô se obtiene la llamada *tabla de Itô*, que establece el resultado de multiplicar $dW(t)$ y dt.

Cuadro 3.1: Tabla de Itô

$\times$	$dW(t)$	dt
$dW(t)$	dt	0
dt	0	0

Para fines de cálculo y empleo del lema de Itô, tenemos a continuación una forma de derivar la fórmula. Aplicando el teorema de Taylor y la tabla de Itô, tenemos que

$$d\theta\left(t, X_t\right) = \frac{\partial \theta}{\partial x}\left(t, X_t\right) f(t) dW(t) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\left(t, X_t\right) + \frac{\partial \theta}{\partial x}\left(t, X_t\right) g(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\left(t, X_t\right) f(t)^2\right) dt. \tag{3.5.12}$$

Hacemos incapie en el hecho de que por cuanto las trayectorias muestrales del movimiento Browniano son derivables en ninguna parte, el expresar a las ecuaciones diferenciales estocásticas en forma diferencial sólo se hace para simplificar la notación. La manera correcta y formal de expresarlas es mediante su forma integral.
Por otro lado, el cálculo anterior no es una demostración de la regla de Itô, sino sólo una receta para recordar la fórmula.

Extendemos ahora el lema de Itô al caso multidimensional.

Sean $W_1(t), W_2(t), \ldots, W_m(t)$ m movimientos Brownianos, no necesariamente independientes. Sean n procesos de Itô $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \ldots, X_t^{(n)}$ dados por

$$X_t^{(i)} = X_a^{(i)} + \sum_{j=1}^{m} \int_a^t f_{ij}(s) dW_j(s) + \int_a^t g_i(s) ds, \tag{3.5.13}$$

para $1 \leq i \leq n$.
Las funciones f_{ij} pertenecen al espacio $\mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, \mathscr{L}_2[a,b]\right)$ y g_i pertenece a $\mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, \mathscr{L}_1[a,b]\right)$ para toda $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$.

Podemos reescribir lo anterior en términos matriciales de la siguiente forma:

$$W(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ \vdots \\ W_m(t) \end{bmatrix}, X_t = \begin{bmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \\ \vdots \\ X_t^{(n)} \end{bmatrix},$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1m}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nm}(t) \end{bmatrix}, g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

Así, podemos reescribir a los procesos de Itô en forma matricial:

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s)dW(s) + \int_a^t g(s)ds, \text{ para } a \leq t \leq b. \tag{3.5.14}$$

Y con estas consideraciones, podemos formular el siguiente teorema.

Teorema 3.5.4 (Lema de Itô, versión multidimensional)**.** *Sea la función $\theta(t, x_1, \ldots, x_n)$ continua en el espacio $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ tal que tiene defivadas parciales continuas $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$, y $\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Entonces, la diferencial estocástica de $\theta\left(t, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\right)$ viene dada por lo que sigue, a saber*

$$\begin{aligned} d\theta\left(t, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\right) = \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(t, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\right)dt + \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\left(t, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\right)dX_t^{(i)} + \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j}\left(t, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\right)dX_t^{(i)}dX_t^{(j)}. \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

En el caso de que las dinámicas estocásticas sean independientes entre sí, el valor de los términos $dX_t^{(i)}dX_t^{(j)}$ se puede calcular mediante la tabla de Itô multidimensional:

La función $\delta_{i,j}$ es la expresión conocida como Delta de Kronecker:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Cuadro 3.2: Tabla de Itô multidimensional

$\times$	$dW_j(t)$	dt
$dW_i(t)$	$\delta_{i,j}dt$	0
dt	0	0

De manera general, la manera de calcular los diferenciales $dX_t^{(i)}dX_t^{(j)}$ dependerá de la hipótesis que se haga sobre la estructura de dependencia entre los distintos procesos de Itô. En nuestro caso de estudio de los CSOs, se tendrá una hipótesis sobre dicha estructura, misma que será relevante a lo largo del proceso de valuación.

3.6. El Teorema de Girsanov

El resultado siguiente es el *teorema de Girsanov*, que tiene como una de sus aplicaciones el transformar un movimiento Browniano con tendencia a un movimiento Browniano sin tendencia. Esto permite además generar un ambiente de neutralidad al riesgo en la valuación de derivados; esto significa que el precio del producto derivado no depende de las preferencias al riesgo de los agentes financieros. Como veremos más adelante, este supuesto, la neutralidad al riesgo, será un factor importante en la valuación de los CSO's. Esta sección está basada en Oksendal [47].

Primeramente definimos lo que es un proceso exponencial

Definición 3.6.1 (Proceso Exponencial)**.** *El* proceso exponencial *dado por la función h que pertenece a $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, \mathscr{L}_2[0,T])$ se define como el proceso estocástico que viene dado por, a saber,*

$$\mathcal{E}_h(t) = \exp\left\{\int_0^t h(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2 ds\right\}, \tag{3.6.1}$$

para $0 \leq t \leq T$.

El teorema siguiente establece las condiciones que se deben de satisfacer para que un proceso exponencial sea una martingala.

Teorema 3.6.1. *Si la función h que pertenece a $\mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, \mathscr{L}_2[0,T]\right)$ satisface la condición siguiente*

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_h(t)\right] = 1 \text{ para toda } t \text{ en } [0,T], \tag{3.6.2}$$

entonces el proceso exponencial $\mathcal{E}_h(t)$, para $0 \leq t \leq T$, dado por h es una martingala.

A continuación se recibe el teorema de Girsanov. Como los resultados alrededor del teorema versan sobre cambios de medida de probabilidad, es necesario explicitar sobre qué medida de probabilidad se está operando, es por ello que para denotar el valor esperado con respecto a la medida de probabilidad Q se emplea la notación $\mathbb{E}_Q\left[\cdot\right]$.

Teorema 3.6.2 (Teorema de Girsanov)**.** *Sea h elemento de $\mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, \mathscr{L}_2[0,T]\right)$; supongamos que $\mathbb{E}_P\left[\mathcal{E}_h(t)\right] = 1$ para toda t en $[0,T]$. Entonces, el proceso estocástico*

$$X(t) = W(t) - \int_0^t h(s)ds, \text{ para } 0 \leq t \leq T \tag{3.6.3}$$

es un movimiento Browniano con respecto a la medida de probabilidad $dQ = \mathcal{E}_h(T)dP$ que viene dada por

$$Q(A) = \int_A \mathcal{E}_h(t)dP, \text{ para } A \text{ elemento de } \mathscr{F}. \tag{3.6.4}$$

Como se aprecia, el teorema de Radon-Nikodym juega un papel crucial en el teorema de Girsanov.

3.7. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En esta última sección del presente capítulo, basada en Kuo [36], presentamos algunos resultados que nos servirán para la valuación de los CSO's, en lo tocante a las ecuaciones diferenciales estocásticas. El enfoque que se tomará para su valuación será precísamente el de las ecuaciones diferenciales estocásticas, el mismo enfoque empleado en la valuación Black-Scholes-Merton.
Inmediatamente surge la pregunta, ¿qué son las ecuaciones diferenciales estocásticas?.

Definición 3.7.1 (Ecuación Diferencial Estocástica)**.** *Sea $W(\cdot)$ elemento de $\mathbb{R}^d$ un movimiento Browniano, $X(\cdot)$ y $f(t,x)$ elementos de $\mathbb{R}^m$, $\sigma(t,x)$ elemento de $\mathbb{R}^{m\times d}$. Sea ξ, ξ en $\mathbb{R}^m$, una variable aleatoria independiente de $W(t)-W(a)$ para $t\geq t_0$. La ecuación*

$$dX(t) = f\left(t, X(t)\right) dt + \sigma\left(t, X(t)\right) dW(t), \tag{3.7.1}$$

para toda $a\leq t\leq T$, es denominada Ecuación Diferencial Estocástica (de Itô)*, con condición inicial $X(a)=\xi$.*

Como explicamos antes, este tipo de ecuaciones deben de ser entendidas en su forma integral $X(t)=\xi+\int_a^t f\left(s,X(s)\right)ds+\int_a^t \sigma\left(s,X(s)\right)dW(s)$ para toda $a\leq t\leq T$. A $f(t,x)$ se le denomina vector o coeficiente de tendencia o deriva y a $\sigma(t,x)$ matriz o coeficiente de dispersión. En el caso de estar trabajando con sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas se les denomina vectores.

La siguiente definición habla sobre lo que es la solución a una ecuación diferencial estocástica.

Definición 3.7.2 (Solución de una Ecuación Diferencial Estocástica)**.** *Un proceso estocástico conjuntamente medible X_t, con $a\leq t\leq b$ es llamado* solución a la ecuación diferencial estocástica

$$X(t) = \xi + \int_a^t f\left(s, X(s)\right) ds + \int_a^t \sigma\left(s, X(s)\right) dW(s) \tag{3.7.2}$$

si ésta satisface las siguientes condiciones:

1. *El proceso estocástico $\sigma\left(t,X(t)\right)$ pertenece a $\mathcal{L}_{ad}\left(\Omega,\mathscr{L}_2[a,b]\right)$ tal que $\int_a^t \sigma\left(s,X(s)\right)dW(s)$ es una integral de Itô para cada t en $[a,b]$;*
2. *Casi todas las trayectorias muestrales del proceso estocástico $f\left(t,X(t)\right)$ pertenecen a $\mathscr{L}_1[a,b]$;*
3. *Para cada t en $[a,b]$ la ecuación anterior es válida casi seguramente.*

Para lo que sigue, conviene recordar la *condición de Lipschitz*.

Definición 3.7.3. *Se dice que una función medible $g(t,x)$ en $[a,b]\times\mathbb{R}$ satisface la* condición de Lipschitz *en x si existe una constante $K>0$ tal que*

$$\left|g(t,x)-g(t,y)\right| \leq K\left|x-y\right|, \text{ para toda } a\leq t\leq b, \quad x,y\in\mathbb{R}. \tag{3.7.3}$$

Definición 3.7.4. *Se dice que una función medible $g(t,x)$ en $[a,b] \times \mathbb{R}$ satisface la* condición de crecimiento lineal *si existe una constante $K > 0$ tal que*

$$|g(t,x)| \leq K\left(1 + |x|\right), \ \textit{para toda } a \leq t \leq b, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.7.4}$$

Lema 3.7.1. *Sean $\sigma(t,x)$ y $f(t,x)$ funciones medibles en $[a,b]\times\mathbb{R}$ que satisfacen la condición de Lipschitz 3.7.3 en x. Supóngase que la variable aleatoria ξ es $\mathscr{F}_a$-medible y que cumple que $\mathbb{E}\left[\xi^2\right] < \infty$. Entonces la ecuación integral estocástica tiene a lo más una solución continua X_t.*

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede establecer el siguiente

Teorema 3.7.1. *Sean $\sigma(t,x)$ y $f(t,x)$ funciones medibles en $[a,b]\times\mathbb{R}$ que satisfacen las condiciones de Itô, esto es, $\sigma(t,x)$ y $f(t,x)$ satisfacen la condición de Lipschitz 3.7.3 y la condición de crecimiento lineal 3.7.4, en x. Supongamos que ξ es una variable aleatoria $\mathscr{F}_a$-medible que cumple que $\mathbb{E}\left[\xi^2\right] < \infty$. Entonces, la ecuación integral estocástica tiene una única solución $X(t)$.*

Terminamos el capítulo dando un ejemplo de una ecuación diferencial estocástica y su solución.

Consideremos la ecuación de Langevin

$$dX(t) = \alpha dW(t) - \beta X(t)dt \tag{3.7.5}$$

con condición inicial $X(0) = x_0$, donde α es un número real y β es un número positivo. La cantidad $X(t)$ denota la velocidad al tiempo t de una partícula libre conducida por un movimiento Browniano. La ecuación diferencial estocástica se interpreta en su forma integral

$$X(t) = x_0 + \alpha W(t) - \beta \int_0^t X(s)ds. \tag{3.7.6}$$

Aplicando la regla de Itô se encuentra la solución a la ecuación.
Tomando $\theta(t,x) = e^{\beta t}x$, tenemos que $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta e^{\beta t}x$, $\frac{\partial \theta}{\partial x} = e^{\beta t}$ y $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$. Luego, por la regla de Itô recibimos

$$\begin{gathered} d\left(e^{\beta t}X(t)\right) = \beta e^{\beta t}X(t)dt + e^{\beta t}dX(t) = \\ \beta e^{\beta t}X(t)dt + e^{\beta t}\left(\alpha dW(t) - \beta X(t)dt\right) = \alpha e^{\beta t}dW(t). \end{gathered} \tag{3.7.7}$$

Transformando la ecuación diferencial anterior en una ecuación integral, vemos que

$$e^{\beta t}X(t) = e^{\beta s}X(s) + \int_s^t \alpha e^{\beta u} dW(u), \text{ con } s \leq t. \tag{3.7.8}$$

Por lo tanto, $X(t)$ viene dado por

$$X(t) = e^{-\beta(t-s)}X(s) + \alpha \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dW(u), \text{ para } s \leq t. \tag{3.7.9}$$

Si tomamos el caso particular $s = 0$ se obtiene la solución a la ecuación de Langevin:

$$X(t) = e^{-\beta t}x_0 + \alpha \int_0^t e^{-\beta(t-u)} dW(u). \tag{3.7.10}$$

Dada la importancia del resultado anterior, establecemos la siguiente definición.

Definición 3.7.5. *La solución $X(t)$ de la ecuación de Langevin 3.7.5, dada por la ecuación 3.7.10, se le denomina* proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck tiene una importancia capital en el método de valuación de las opciones de spread crediticio, como veremos más adelante.

El siguiente capítulo es el que corona la presente tesis. En él se verá la valuación de los credit spread options. Dicho capítulo principia con algunos fundamentos de los derivados de crédito. También se mencionarán algunos modelos estocásticos de tasas de interés. Procedamos al tema.

Capítulo 4

VALUACIÓN DE LOS CREDIT SPREAD OPTIONS

4.1. Derivados de Crédito

De acuerdo con Schmid [53], el volumen de los derivados de crédito ha crecido considerablemente desde que fueron introducidos por vez primera en el mercado en 1992 en la Asociación Internacional de Swaps y Derivados. Gran parte del crecimiento del mercado de los derivados de crédito ha sido generado por el creciente uso de las curvas swap LIBOR (London Interbank Offered Rate) como la referencia de tasas de interés. Dicho marco de referencia representa la tasa bajo la cual bancos comerciales con calificación crediticia AA pueden pedir prestado en el mercado de capitales; refleja la calidad crediticia del sector bancario y el costo bajo el cual pueden cubrir sus riesgos de crédito. Es, por lo tanto, un marco de referencia para la valuación. Además de que los derivados de crédito también han cobrado relevancia por el aumento del riesgo de crédito en las últimas décadas, así como de sus consecuencias.
Empero, en gran medida el crecimiento de estos derivados no habría sido posible sin el desarrollo de modelos que permitan valuarlos y la generación de modelos de administración del riesgo de crédito. Se han generado plataformas electrónicas de negociación como CreditTrade y CreditEx derivados online, que han resultado exitosos y que han tenido un impacto significativo en el descubrimiento del precio y de liquidez en el mercado de derivados de crédito. También hay que tomar en cuenta que los derivados

de crédito permiten transferir este riesgo a contrapartes que quieran aumentar su exposición al mismo, por así convenir a sus intereses. Así, los agentes que quieran mitigar su riesgo de crédito lo pueden transferir a entidades que lo puedan emplear para su beneficio. Este hecho claramente ha sido otro factor para el crecimiento del mercado de derivados de crédito.

Para lo que sigue tomemos como definición de spread el diferencial entre dos tasas de interés. En su momento daremos una definición formal de este concepto, tal y como el presente trabajo lo requiere.
Esta primera sección está basada en Schmid [53], Jorion [33] y Finnerty [24].

Los derivados de crédito son uno de los nuevos tipos de productos financieros más importantes introducidos en las últimas décadas. Existen una gran variedad de este tipo de productos. A continuación desplegamos una clasificación de los mismos, a saber (de Schmid [53]):

- Permutas de incumplimiento de crédito o Credit Default Swaps (CDS)
- Swaps de rendimiento total o Total Return Swaps
- Swaps de intermediación de crédito o Credit Intermediation Swaps
- Opciones de spread crediticio. Credit Spread Options
- Opciones de incumplimiento de crédito o Credit Default Options
- Notas de vinculación crediticia o Credit Linked Notes
- Créditos estructurados

Conviene que revisemos la siguiente definición dadas las refencias que al concepto tendremos más adelante. Esta definición proviene de Schmid [53].

Definición 4.1.1 (Credit Default Swap)**.** *Un Credit Default Swap es un swap donde una de las partes del contrato, el beneficiario, paga a su contraparte, el garante o fiador, cuotas regulares, montos que están basados en una tasa de interés genérica llamada default swap spread o prima del default spread. Este es un intercambio por la promesa del fiador de realizar un pago fijo o variable si se da el evento de incumplimiento o default en uno o más de los activos de referencia, para cubrir la pérdida total por el default.*

Los derivados de crédito pueden estar basados en un amplio umbral de subyacentes sensibles al crédito:

1. Derivados basados en bonos soberanos, como los derivados de bonos Brady que permiten a los inversionistas ver el estrechamiento de spreads de crédito soberano

2. Derivados basados en bonos corporativos; por ejemplo, derivados basados en bonos de una compañía son frecuentemente empleados para la administración de pasivos

3. Derivados basados en préstamos bancarios. Los derivados basados en préstamos son empleados por los bancos para diversificar o neutralizar concentraciones de un riesgo específico del emisor y ofrecer a los inversionistas el perfil favorable de riesgo-rendimiento

Siguiendo a Finnerty [24] y Schmid [53], tradicionalmente, la exposición al riesgo de crédito era administrada mediante la negociación del activo subyacente per se, o cuando un bono era hecho en el pasado, el riesgo de crédito permanecía en el balance general del prestatario hasta la maduración de la obligación, o hasta que era pagada o cancelada. Como otros derivados, los derivados de crédito facilitan la negociación separada de atributos individuales de un activo subyacente, en aislamiento del activo mismo. Han sido desarrollados para transferir, reempaquetar, replicar y cubrir el riesgo de crédito. Pueden cambiar el perfil de riesgo de crédito de un activo subyacente al aislar aspectos específicos del riesgo de crédito sin tener que vender dicho activo. Incluso es esto posible para instrumentos altamente no líquidos (que muy difícilmente se pueden vender) que no podrían ser negociados regularmente de otra forma. Por lo tanto, permiten que el riesgo de crédito sea segregado o negociado. Porque hay agentes financieros que buscan mitigar este riesgo y otros que quieren obtener rendimientos al tomarlo.
Los bancos en particular están usando los derivados de crédito para cubrirse del riesgo de crédito, reducir concentraciones de riesgos de sus hojas del balance y liberarse de requerimientos de capital en el proceso. Su ganancia depende usualmente del riesgo de crédito de contrapartes particulares o de un grupo de contrapartes, o se basa en el desempeño crediticio de algunos instrumentos sensibles al crédito. El desempeño crediticio se mide por los spreads o diferenciales del rendimiento relativos a marcos de referencia, como pueden ser puntos base (un punto base es la centésima parte de un punto

porcentual) sobre rendimientos de bonos del tesoro de los Estados Unidos o de la tasa LIBOR, o también a calificaciones crediticias o estatus de incumplimiento.

Además de lo anterior, los derivados de crédito

- Han tenido un impacto amplio en el mercado. Éstos
    - han alentado a que aumenten las partipaciones en varios mercados, como el de deuda de alto rendimiento, el de préstamos bancarios y productos que mejoran el crédito
    - han ayudado a los mercados de riesgo de crédito puro a volverse más líquidos y a desarrollarse adecuadamente
    - han logrado una más eficiente valuación a lo largo de diversos sectores del mercado
    - han llevado a una reducción de los spreads de crédito
    - han mejorado la diversificación de portafolios institucionales
- permiten que los bancos mantengan relaciones bancarias y diversificación al mismo tiempo
- crean nuevas oportunidades de arbitraje
- permiten que haya inversiones basadas en perpectivas del crédito
- se pueden usar para
    - la protección de riesgos, el intercambio de un conjunto de riesgos por otros y para especulación
    - compensar la exposición de la contraparte a mercados over-the-counter
    - la cobertura de portafolios de préstamo
    - extender las líneas del negocio
    - cambiar la maduración o el tipo de cambio de riesgos de crédito
    - acceder a clases de activos, sin el cual una institución encontraría difícil invertir u operar

Por otro lado, tenemos la situación de que los derivados de crédito aún padecen problemas de descubrimiento de métodos de valuación. Este segmento de los derivados de crédito sigue en desarrollo.

Existen básicamente tres enfoques empleados por los participantes del mercado para valuar los derivados de crédito. Estos son como siguen:

1. Valuación basada en mercados de garantía de producto:
   El monto bajo el cual un fiador o garante debería ser compensado es calculado mediante la búsqueda de otras formas de realce de la referencia. Tomemos el siguiente ejemplo: si la contraparte A desea pagar a la contraparte B 100 puntos base anualmente para garantizar la deuda de la contraparte C, un credit default swap debería ser valuado de manera similar ya que éste provee en cierta medida la misma protección.

2. Valuación basada en los costos de replicación o de fondeo:
   Este enfoque valúa a los derivados de crédito basándose en el precio de las posiciones financieras (de compra o de venta) necesarias para cubrir el contrato del derivado y cuánto cuesta entrar en dichas posiciones. El costo de la cobertura neta más las reservas y la ganancia y pérdida del negociante conforman el precio del derivado de crédito. La fortaleza de este método es que es fácil de usar además de ser muy intuitivo.

3. Valuación basada en modelos estocásticos como los modelos estructurales, los basados en intensidad o los modelos híbridos:
   Aunque los modelos estructurales tienen un atractivo intuitivo, no son ampliamente utilizados en los pisos de mercados o trading rooms. Los modelos basados en intensidad son muy comunes en las salas de negociaciones al día de hoy. Este enfoque es el que se empleará para la valuación de nuestro derivado de crédito.

Antes de explicar los modelos mencionados en el tercer enfoque, consideremos la definición formal de derivado de crédito y otras definiciones que se desprenden de ésta. Estas definiciones están basadas en Schmid [53].

Definición 4.1.2 (Derivado de Crédito)**.** *Es un instrumento que posee al menos un valor intrínseco que está condicionado a la ocurrencia de un evento crediticio (pago incumplimiento o default). El evento creciticio está definido con respecto a la referencia crediticia o a la canasta de referencias crediticias* *y los activos de la referencia crediticia emitidos por la referencia de crédito. La fecha de maduración de un derivado de crédito se considera el evento que suceda primero: la fecha de maduración originalmente acordada o el evento crediticio relacionado con la fecha de pago.*

Definición 4.1.3 (Evento Crediticio)**.** *Es el evento de incumplimiento definido de manera precisa, determinado por las negociaciones entre las partes al principio del derivado de crédito. Los estándares del mercado normalmente especifican la existencia de información pública que confirme la ocurrencia, con respecto a la referencia crediticia, de la bancarrota, de insolvencia, cancelación, reestructuración, moratoria, suspensión de pagos, entre otros.*

Definición 4.1.4 (Referencia Crediticia)**.** *Es el emisor cuyo incumplimiento dispara el evento de crédito.*

Definición 4.1.5 (Activos de la Referencia Crediticia)**.** *Son el conjunto de activos emitidos por la referencia crediticia*

Definición 4.1.6 (Pagos de Incumplimiento)**.** *Son los pagos que deben de efectuarse en caso de la ocurrencia de un evento crediticio.*

Existe una clasificación del riesgo de crédito, en términos de los tipos de riesgo que lo conforman. Dicha clasificación no la habíamos tratado en la sección del riesgo de crédito, porque es más conveniente tratarla en esta sección de los derivados de crédito y justo antes de iniciar el tema de la valuación. Los tipos de riesgo de crédito son el riesgo de incumplimiento, el riesgo de spread de crédito y el riesgo de degradación. Procedamos con las definiciones.

Definición 4.1.7 (Riesgo de Incumplimiento)**.** *Es el riesgo de que el emisor de un bono o el deudor de un préstamo no pague su deuda pendiente completamente. El riesgo de default puede ser completo en el sentido de que nada del valor del bono o de la deuda se pagará, o puede ser parcial en el sentido de que alguna proporción de la deuda original se recuperará.*

Definición 4.1.8 (Riesgo de Degradación)**.** *Es el riesgo de que una organización estadística nacionalmente reconocida, como es la agencia Standard & Poors, Moody's Investors Services o Fitch Ratings, reduzca la calificación crediticia actual de un emisor, basado en la evaluación del poder adquisitivo de éste versus su capacidad de poder honrar sus obligaciones a su vencimiento.*

Definición 4.1.9 (Riesgo de Spread Crediticio). *Es el riesgo de que el spread o diferencial sobre una tasa de referencia se incrementará para una deuda (obligación) pendiente. El riesgo de spread de crédito y el riesgo de degradación difieren en que el segundo pertenece a una revisión crediticia formal que proviene de una agencia calificadora, mientras que el primero refleja la reacción de los mercados financieros al percibido deterioro del crédito.*

En lo que concerne a las opciones de spread crediticio, es el riesgo de spread crediticio el factor de riesgo más importante. De ahí se desprende que la definición de riesgo de crédito conocida como visión de mercado es la que aplica para este derivado. Por lo tanto, el riesgo de mercado es también de suma importancia para los CSO's, en especial el factor de riesgo de tasa de interés. No hay que perder de vista ésta observación para la valuación de nuestro derivado.

Respecto a lo que mencionamos acerca del modelo de valuación estocástico para los derivados de crédito, los definiciones de algunos modelos integrantes de este enfoque son, a saber:

Definición 4.1.10 (Modelos Estructurales). *Los modelos estructurales o modelos basados en activos relacionan el incumplimiento con el valor de los activos subyacentes de una firma. A esta clasificación pertenece el modelo KMV de Robert Merton, que hace una analogía del valor de los activos, los pasivos y el capital de una firma determinada, con algunos de los parámetros que determinan el precio de una opción europea, como el precio de ejercicio, el valor del activo subyacente y el valor intrínseco de la opción.*

Definición 4.1.11 (Modelos basados en Intensidad). *Los modelos basados en intensidad relacionan el tiempo al incumplimiento al tiempo de paro, con respecto a una filtración dada, de algunos procesos de tasa de peligro exógenamente especificados.*

Con esto damos por concluída la sección de derivados de crédito. A continuación pasamos a la valuación de los credit spread options, principiando por la definición formal de éstos.

4.2. Principios preparatorios para la Valuación

Se ha hablado ya de la importancia que tienen los derivados de crédito en los mercados financieros. Hay portafolios de inversión cuyos valores son áltamente sensibles a cambios en el spread entre tasas de rendimiento riesgosas y rendimientos libres de riesgo. Es en estos escenarios que los derivados de crédito se presentan como una nueva herramienta para la cobertura y administración de las exposiciones que se tienen a este tipo de riesgo.

Antes de hablar en forma sobre los credit spread options, haremos mención de las opciones sobre spreads que existen en los mercados financieros.
De acuerdo con Mougeot [45], las opciones sobre spreads comenzaron a cobrar importancia en los inicios de la década de los noventas. Éstos fueron introducidos por la firma Goldman Sachs, quienes desarrollaron opciones sobre spreads como el SYCURVE, que son contratos optativos que tienen por subyacente la pendiente de la tasa de rendimiento, las opciones MOTTO, que son opciones sobre el spread entre hipotecas y valores del Tesoro (Treasuries) y las opciones ISO, que son derivados sobre el spread entre valores de renta fija extranjeros y otros valores extranjeros de renta fija.
Mediante este tipo de instrumentos derivados se puede cubrir dos fuentes de riesgo: el riesgo de tipo de cambio doméstico - foráneo, que es un factor de riesgo de mercado, y el riesgo de crédito. Cuando es spread es calculado como la diferencia entre el rendimiento de un bono corporativo y el rendimiento de un bono gubernamental, las opciones sobre spreads resultan muy efectivas para la administración del riesgo de crédito; y cuando el spread se basa en dos valores de renta fija extranjeras como los ISO, las opciones sirven para cubrir una posición en un differential swap, que es un swap plain vanilla en el cual una de las partes (piernas) paga flujos en una moneda distinta a la que se emplea para el cálculo de dichos flujos.

Por otro lado, los derivados sobre tasas de interés comenzaron a manejarse de manera importante en los mercados, ya en los mercados organizados, ya en los OTC, desde la década de los ochentas del siglo pasado. Derivada de la necesidad del sector financiero de contar con productos más completos para sus necesidades de inversión, cobertura y especulación, tomaron bastante fuerza en los noventas las notas estructuradas, que son instrumentos que combinan valores de deuda y productos derivados. Un ejemplo de notas estructurada es un contrato sobre un bono cuponado flotante acompañado de la opción de recomprarlo a una fecha en el futuro. Las opciones que forman las notas estructuradas son las que determinan el vencimiento del valor financiero.

Regresando a los derivados de tasas de interés, ejemplos de opciones sobre tasas son los caps, que son opciones que sirven para cubrir pérdidas cuando la tasa forward (las tasas forward son tasas que sirven para descontar flujos de dinero a una fecha en el futuro) de mercado supera un techo o barrera que se especifica de antemano; otro ejemplo son los floors que, al contrario de los caps, sirven para la cobertura de pérdidas cuando la tasa de interés es inferior a un piso (nivel). Otros casos son los swaptions, que son opciones que tienen por subyacente swaps de tasa de interés (IRS); los captions y los floortions son opciones que tienen como valor subyacente caps y floors respectivamente. Con estos y más tipos de opciones se pueden formar notas estructuradas más complejas, de acuerdo a las necesidades del inversionista. De ahí que las notas estructuradas sean hechas a la medida.
Para más detalle sobre derivados de tasa de interés y notas estructuradas el lector puede recurrir a Brigo y Mercurio [11], Cerrato [12], Chacko y Das [13], a Avellaneda [3] y a Ekstrand [21].

Con todo esto queremos hacer énfasis en el hecho de que existen variados instrumentos para administrar el riesgo de tasa de interés, así como variados derivados para manejar los spreads de tasas. En todos los casos anteriores, los instrumentos derivados se centran en administrar el riesgo de mercado, mientras que con los credit spread options se administra el riesgo de crédito. Empero, recordemos que el spread de crédito es un factor de riesgo de mercado; es por lo anterior que los CSOs contemplan tanto el riesgo de mercado como el riesgo de crédito, así como sus interrelaciones. Es por esta razón que decíamos anteriormente que la definición de riesgo de crédito llamada visión de mercado es el concepto a manejar para estos derivados. En el desarrollo que sigue, veremos más a detalle el papel fundamental que juegan tanto el riesgo de mercado como el de crédito.

Para poder proceder adecuadamente con el estudio de los CSOs, recordemos algunos fundamentos sobre bonos. Esto está fundamentado en Fabozzi [22], Alexander [1], y De Lara [19].

Definición 4.2.1 (Bono)**.** *Un bono es un instrumento de deuda, de renta fija, emitido por un período de tiempo mayor a un año. Su objetivo es el de levantar capital mediante un préstamo. Los gobiernos federales, estatales, ciudades, empresas y muchos otros tipos de instituciones emiten bonos. El bono es una promesa de pago del principal F junto con intereses, llamados cupones, en una fecha específica (fecha de maduaración). Cabe mencionar que cuando en el contrato del bono se especifica que no habrán pagos de cupón, el bono se denomina bono cupón cero o bono con descuento.*
Para valuar el precio del bono se emplea la siguiente fórmula

$$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{(1+i)^k} + \frac{F}{(1+i)^N},$$

donde P representa el precio del bono, C_k representa el pago del cupón al tiempo k, i es la tasa de interés del bono, F es el valor de redención del bono o principal, que es el monto que se le otorga al tenedor del bono a la duración del mismo, y N es el tiempo de maduración del instrumento. Si el bono es cupoón cero, $C_k = 0$ para toda k del período de existencia del bono.

En el argot financiero se dice que cuando operamos un bono que otorga cupones, el instrumento se está *vendiendo a precio*, mientras que cuando se trata de un bono cupón cero, el valor se está *vendiendo a descuento.*

Para encontrar el precio de los bonos, se pueden emplear otras fórmulas, como la llamada fórmula de Makeham. Dichas fórmulas pueden ser encontradas en cualquier libro de matemáticas financieras.
Revisemos las definiciones de duración modificada y duración de Macaulay y veamos posteriormente el concepto de convexidad.

Definición 4.2.2 (Duración Modificada. Duración de Macaulay)**.** *La duración de un bono es el promedio ponderado de los tiempos al pago de los flujos de efectivo (pago de cupones y pago del valor nominal) del instrumento. La duración, en general, mide la sensibilidad del precio del bono a la tasa de rendimientos, el porcentaje de cambio en el precio por un cambio paralelo en la tasa de interés. La definición de duración como promedio ponderado aplica para los bonos con cupón fijo.*
La fórmula de duración de Macaulay es como sigue:

$$D(Macaulay) = \frac{1}{P}\left\{\sum_{k=1}^{N} \frac{kC_k}{(1+i)^k} + \frac{N \cdot F}{(i+i)^N}\right\}$$

Y la duración modificada se calcula mediante:

$$D(Modificada) = -\frac{1}{P}\frac{dP}{di} = \frac{D(Macaulay)}{1+i}.$$

Definición 4.2.3 (Convexidad)**.** *La convexidad se define como la sensibilidad de la duración de un bono a cambios en la tasa de interés. De manera general, entre más alta es la convexidad de un bono, el precio de éste es más sensible a decrementos en la tasa de interés, y el precio del bono es menos sensible a incrementos en la tasa de interés. Matemáticamente, la convexidad de un bono se determina con la siguiente fórumla:*

$$Convexidad = -\frac{1}{P}\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{k(k+1)C_k}{(1+i)^{k+2}} + \frac{N(N+1)F}{(1+i)^{N+2}}\right\}.$$

A la gráfica que representa la relación entre la tasa de rendimiento del bono y el precio del mismo se le llama *curva de rendimiento*. Los conceptos de duración y convexidad nos permiten dar una interpretación adecuada de la misma.

Haremos algunos comentarios más acerca de la duración y la convexidad más adelante en este capítulo, ya que son conceptos de suma importancia en el manejo de los bonos. Baste mencionar que la duración y convexidad son dos términos fundamentales para la administración del riesgo de este tipo de instrumentos.

Consideremos la definición formal de los credit spread options, para comenzar el estudio de su valuación. También seguirán algunas definiciones necesarias alrededor de ésta. Para el desarrolo de la valuación de los CSO's, daremos algunos fundamentos de las opciones europeas y su valuación bajo el modelo Black-Scholes-Merton, ya que los CSO's y las opciones europeas comparten varias características en común.
Por otra parte, la valuación que presentaremos es del tipo Black-Scholes-Merton en el sentido de que ambos modelos parten de ecuaciones diferenciales estocásticas donde la dinámica que conduce los cambios del activo subyacente es el movimiento browniano.
Las definiciones que siguen están basadas en lo establecido en Schmid [53], Chaplin [14], Cossin [17] y Bielecki [8].

Definición 4.2.4 (Bono susceptible de incumplimento)**.** *Un bono cupón cero susceptible de incumplimiento que madura al tiempo T es un contrato en el cual se promete al tenedor de dicho bono el pago de una unidad de tipo de cambio al tiempo T, sin pagos intermedios. Si el incumplimiento ocurre hasta la maduración del bono, la ganancia podría ser de sólo una fracción de la ganancia prometida, del valor de redención. El valor del contrato al tiempo $t < T$ se denota por $P^d(t, T)$.*

Definición 4.2.5 (Spread de crédito)**.** *Es la diferencia entre el rendimiento de un instrumento de deuda en particular y una tasa de rendimiento de referencia, que es usualmente la de un bono gubernamental.*

Definición 4.2.6 (Credit Spread Options)**.** *Es un instrumento financiero derivado que transfiere el riesgo de un miembro del contrato a su contraparte. El activo subyacente de este tipo de contratos son los spread crediticios. El comprador del derivado paga una prima inicial a cambio flujos de efectivo potenciales si el spread de crédito cambia respecto a su valor actual. Los activos subyacentes suelen ser bonos corporativos. El comprador de una opción de spread de crédito recibirá los flujos de efectivo si el spread de crédito entre dos marcos de referencia específicos se reduce o se amplía.*

Es adecuado en este momento aclarar la diferencia fundamental entre los credit spread options y las opciones de spread crediticio sobre bonos. Como hemos comentado, el valor subyacente de los CSO's es el spread de crédito, y para las opciones de spread de crédito sobre bonos es el bono susceptible de incumplimiento que se opera a la tasa de spread de ejercicio pactada, en caso de que el derivado se ejerza. Hacemos esta diferenciación porque en la literatura podemos encontrar que se hace referencia a ambos tipos de contratos con el mismo nombre. Para estos fines referimos al lector con Schmid [53] y Finnerty [24].

Las definiciones que siguen se refieren a las opciones de compra y de venta tanto para los CSOs como para las opciones de spread de crédito sobre bonos, de acuerdo con Schmid [53].

Definición 4.2.7 (Opciones de spread crediticio de compra (call))**.** *Las opciones de compra de los CSO's otorgan al tenedor de la misma el derecho mas no la obligación de obtener del vendedor del derivado el spread crediticio de ejercicio cuando este valor es menor al spread de crédito spot. Si la opción es de tipo europea, se revisa esta diferencia a la maduración del contrato.*

Definición 4.2.8 (Opciones de spread crediticio de venta (put))**.** *Las opciones de venta de los CSOs otorgan al poseedor de la posición larga sobre el instrumento el derecho mas no la obligación de pagar los flujos de efectivo provenientes del spread de ejercicio cuando este diferencial es mayor que el spread crediticio spot a su contraparte. Si la opción es europea, la decisión de ejercitarla se revisa a la maduración del contrato, de la misma forma que en las opciones de compra.*

Definición 4.2.9. ***Una opción call (de compra) de un credit spread*** *sobre un bono susceptible de incumplimiento $P^d(t,T)$ con maduración $T_O < T$ y precio strike K da el derecho al tenedor de comprar dicho bono al tiempo T_O al precio que corresponda a un spread de rendimiento de K arriba del rendimiento de un bono idéntico susceptible de incumplimiento $P(t,T)$.*

Una opción put (de venta) de un credit spread *sobre un bono susceptible de incumplimiento $P^d(t,T)$ con maduración $T_O < T$ y precio strike K da el derecho al tenedor de vender dicho bono al tiempo T_O al precio que corresponda a un spread de rendimiento de K arriba del rendimiento de un bono idéntico susceptible de incumplimiento $P(t,T)$.*

La definición que sigue está tomada por lo comentado en Jorion [33], en la cual se expresa el enfoque del tipo de spread aplicable a los CSOs.

Definición 4.2.10. *El spread de rendimiento entre un bono corporativo y un bono idéntico sin riesgo de crédito refleja la pérdida actuarial esperada o la tasa anual de incumplimiento multiplicada por la pérdida dado el incumplimiento, más una prima de riesgo.*

Con el fin de mostrar las similitudes entre el modelo de valuación de Black-Scholes y Merton para opciones europeas y el modelo de valuación de opciones de spread crediticio que presentaremos, mencionaremos algunos fundamentos de dicho modelo. Esto nos permitirá comprender algunas propiedades de los CSO's que analizaremos.

4.2.1. Modelo de Black-Scholes-Merton para valuación de opciones europeas (plain vanilla)

En el año 1973 es presentado el artículo de Fisher Black y Myron Scholes en el cual presentan un modelo de valuación de opciones europeas, trabajo intitulado *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* [9], publicado en The Journal of Political Economy. La contribución de Robert Merton al modelo fue la formalización y extensión que le dio, en una serie de artículos seminales, como [43]. En particular, él introdujo al modelo el enfoque del Cálculo Estocástico.

Como habíamos comentado, el modelo de Black-Scholes-Merton se convirtió en uno de los fundamentos de las finanzas matemáticas modernas, debido a las repercusiones que ha tenido el modelo tanto en el desarrollo teórico de la misma así como en el día a día de los mercados financieros. Es por esto que en 1997 Robert Merton y Myron Scholes fueron galardonados con el premio Nobel de Economía en 1997. Desafortunadamente, Fisher Black había fallecido en 1995.

El modelo, que en general se conoce como de Black y Scholes, pero que por las contribuciones de Merton también se le llama de Black, Scholes y Merton, asumen que para modelar el valor de una opción europea cuyo activo subyacente es una acción que no paga dividendos, la dinámica estocástica del precio de la opción es el movimiento Browniano geométrico. Comencemos con el detalle del modelo, en el que la forma de encontrar el precio de las opciones es mediante ecuaciones diferenciales parciales. Esta parte está fundamentada en Venegas [57].

Sea dado el movimiento Browniano $W(t)$ con $t \in T$, definido sobre un espacio de probabilidad fijo con su filtración aumentada $\left(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t^W, \mathbb{P}\right)$. Como decíamos, suponemos que el precio del valor subyacente al tiempo t, al cual denotaremos como S_t, es conducido por el movimiento Browniano geométrico:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t) \tag{4.2.1}$$

Él parámetro de tendencia μ de la ecuación anterior, que es un número real, representa el rendimiento medio esperado del activo subyacente, mientras que

σ ($\sigma > 0$) representa a la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. El proceso estocástico $dW(t)$ representa las fluctuaciones propias del mercado de capitales. El proceso $\{S_t\}$, con $t \geq 0$, está adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Apliquemos el lema de Itô para encontrar la expresión que describe a S_t. Para esto, consideraremos la regla de Itô en su forma general (teorema 3.5.3).

Tomemos como $\theta(t,x) = \ln x$. Entonces tenemos que $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$ y $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$. Sustituyendo dichos términos en la expresión de $\theta(t,x)$ que resulta de la regla de Itô, recibimos

$$\begin{aligned} \ln S_t = \ln S_0 + \int_0^t \frac{1}{S_u}\sigma S_u dW(u) + \int_0^t 0du + \int_0^t \frac{1}{S_u}\mu S_u du \\ -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{S_u^2}\sigma^2 S_u^2 du = \ln S_0 + \sigma W(t) + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t = \\ \ln S_0 + \sigma W(t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Luego, tenemos que

$$S_t = S_0 e^{\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}. \tag{4.2.3}$$

Notemos que la expresión diferencial de $\theta(t,x)$ es

$$d\ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW(t). \tag{4.2.4}$$

El precio de una opción de compra europea, como veremos, es una función que depende de varios parámetros. Denotaremos el valor de una opción call como $C(S_t, t, K, T, \sigma, \mu, r)$, donde S_t es el valor del activo al tiempo t, K es el precio de ejercicio o precio strike de la opción, esto quiere decir que K es el precio del activo al momento de la maduración del derivado, que se paga o se recibe si se decide ejercitar la opción; T es la fecha de vencimiento del contrato, σ es la volatilidad del subyacente y r es la tasa libre de riesgo.

Para el intervalo de tiempo $[t, t+dt]$, el cambio en el subyacente S_t es $S_t + dS_t$, así que el valor de la opción call cambia a $C(\cdot) + dC(\cdot)$. El cambio en la dinámica estocástica del precio del activo se obtiene aplicando el lema de Itô, tomando ahora $\theta(t,x) = C(\cdot)$. Haciendo las sustituciones respectivas en la ecuación, obtenemos, en la forma diferencial

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\sigma S_t dW(t). \tag{4.2.5}$$

Tengamos en cuenta un portafolios de inversión que consta de w_1 unidades del subyacente, cuyo precio es S_t, y w_2 unidades de una opción de compra sobre dicho subyacente, cuyo valor es $C(S_t, t, K, T, \sigma, \mu, r)$. Sea Π_t el valor del portafolios al tiempo t. Entonces $\Pi_t = w_1 S_t + w_2 C(\cdot)$. Y el valor del portafolios en el instante dt viene dado por $d\Pi_t = w_1 dS_t + w_2 dC$.
Sustituyendo las ecuaciones que describen a dS_t y a dC, se obtiene la expresión que describe el cambio en el valor del portafolios:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = \left(w_1 + w_2 \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left(w_1 + w_2 \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW(t) + \\ w_2 \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right). \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

En las ecuaciones diferenciales estocásticas, existen dos tipos de términos: por un lado, los términos que se refieren a la tendencia de la ecuación, que viene multiplicados por dt, y la parte estocástica, que viene multiplicada por $dW(t)$. $dW(t)$ modela el riesgo de mercado del portafolios, al representar las posibilidades de pérdidas o ganancias que genere el portafolios por los diversos factores de riesgo que estén presentes. Este riesgo de mercado se puede eliminar si se eligen de manera adecuada a w_1 y a w_2, logrando que el componente aleatorio desaparezca. Esto es, para eliminar el riesgo de mercado, se debe cumplir que

$$w_1 + w_2 \frac{\partial C}{\partial S_t} = 0. \tag{4.2.7}$$

Como se aprecia, hay muchas alternativas de elección de las cantidades w_1 y w_2. Como caso particular, al tomar $w_1 = -\frac{\partial C}{\partial S_t} := -\Delta$ y $w_2 = 1$ se sigue que

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right) dt. \tag{4.2.8}$$

Luego,

$$\Pi_t^{(\Delta)} = C(\cdot) - \Delta S_t. \tag{4.2.9}$$

A la elección de w_1 y w_2 como antes, se la llama *cobertura Delta.* Delta se ha definido como el cambio en el precio de la opción call por efecto del cambio en el precio del valor subyacente, es decir, mediante una derivada parcial. Como mencionaremos más adelante, Delta es una de las llamadas *letras griegas.*

Ahora bien, si se invierte el monto del valor del portafolios a una tasa libre de riesgo r, en el tiempo dt, se recibe

$$d\Pi_t^{(r)} = d\Pi_t^{(\Delta)} r dt = (C - \Delta S_t)\, r dt. \tag{4.2.10}$$

Un supuesto fundamental es que no existen oportunidades de arbitraje en la inversión del portafolios. Esto implica que no hay forma de obtener ganancias libres de riesgo y que por ende los mercados están en equilibrio. Bajo este equilibrio, se cumple que

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = d\Pi_t^{(r)}. \tag{4.2.11}$$

Reemplazando en la última ecuación, tenemos que

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\right) dt = \left(C - \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t\right) r dt. \tag{4.2.12}$$

Así,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t r - rC = 0. \tag{4.2.13}$$

La ecuación última (4.2.13) es la *Ecuación Diferencial Parcial de Black, Scholes y Merton.* Esta ecuación tiene como condiciones en la frontera y final, que ayudan a determinar una solución única, lo que sigue

$$C(0,t) = 0 \text{ y } C(S_t, T) = \max\,(S_t - K, 0). \tag{4.2.14}$$

La condición final anterior, $\max\,(S_t - K, 0)$, representa lo que se conoce como el *valor intrínseco* de una opción de compra. Este valor determina si se ejerce o no la opción. Si el valor del subyacente al vencimiento de la opción es mayor que el precio de ejercicio, se ejerce la opción; en caso que el subyacente valga menos que el precio strike o tenga el mismo valor que éste, no se ejerce el derivado.

Para el caso de las opciones de venta, el valor intrínseco viene dado por

$\max(K - S_t, 0)$. si el precio de ejercicio es mayor que el valor del subyacente al vencimiento de la opción, se ejerce el derivado; por el contrario, si el precio strike es menor o igual al valor del subyacente al vencimiento, no se ejercita la opción.

La ecuación de Black, Scholes y Merton (BSM) es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica. La propiedad de linealidad implica que si se tienen dos soluciones a la misma, la suma de ambas es también solución. En términos financieros, si todos los activos que componen al portafolios satisfacen la ecuación de BSM, entonces el portafolios completo también la satisface.

Cabe destacar que hay diferentes métodos o enfoques para encontrar el valor de las opciones de compra y venta de las opciones europeas. Un método consiste en tomar la ecuación de BSM y hacer algunos cambios de variable para hallar su solución. Otro método consiste en transformar la ecuación de BSM en la *ecuación de difusión de calor*. Otra forma es mediante la aplicación de la teoría del CAPM (Capital Asset Pricing Model) que es una herramienta de la *Teoría de Portafolios*. Mediante la idea de determinar un portafolios que constista de una posición larga del subyacente y un depósito bancario, se busca replicar el valor de la opción call, esto en cada instante. Mediante lo anterior se logra obtener la ecuación de BSM. También se logra encontrar el valor de las opciones europeas empleando el teorema de Girsanov.

Otro enfoque es el de la teoría desarrollada por Cox, Ross y Rubinstein que, mediante un modelado con árboles binomiales, encuentran el valor de las opciones de compra y de venta; lo anterior se desarrolla mediante un modelado en tiempo discreto. Un hecho importante es que la ecuación que se plantea en este modelo converge a la ecuación de Black, Scholes y Merton.

Con todo esto queremos destacar las múltiples interrelaciones que el modelo de Black, Scholes y Merton desarrolla con varios temas de diversas ciencias. Por un lado con la física en la ecuación de difusión de calor, con la teoría de la probabilidad y las ecuaciones diferenciales estocásticas, con una técnica de las finanzas matemáticas: la replicación de instrumentos y posiciones financieras. Concluimos entonces que el modelo de BSM es muy profundo por cuanto se desarrolla en su teoría, así como de las interesantes interrelaciones y consecuencias que genera. Por esto, el modelo es considerado como un gran avance en la teoría matemática de las finanzas. En el presente trabajo no daremos el desarrollo completo para encontrar la solución de la ecuación de BSM, ya que este no es nuestro objetivo.

A continuación daremos la solución de la ecuación de BSM y veremos algunas propiedades que nos servirán para el análisis del modelo de valuación de los CSO's que estudiaremos. A continuación tenemos el resultado fundamental del modelo de BSM, de acuerdo con Venegas [57], Black y Scholes [9], De Lara [20] y Ekstrand [21]. Este es, a saber:

Teorema 4.2.1 (Fórmula de Black, Scholes y Merton)**.** *Considérense las opciones europeas de compra y venta de activos subyacentes. Sea dada la dinámica estocástica del activo subyacente S_t, $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t)$. Sea K el precio de ejercicio de la opción, sea T la fecha de vencimiento del contrato, sea σ la volatilidad del subyacente y sea r es la tasa libre de riesgo. Considérense además los supuestos del modelo de Black, Scholes y Merton que se enumeran después del teorema.*
Entonces, la única solución a la ecuación de Black, Scholes y Merton es el valor de la opción de compra, cuyo valor es, a saber:

$$C(S_t, t, K, T, \sigma, \mu, r) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2). \tag{4.2.15}$$

El valor de una opción de venta es:

$$P(S_t, t, K, T, \sigma, \mu, r) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \tag{4.2.16}$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{k} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.2.17}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{4.2.18}$$

son la primera y segunda estandarizaciones respectivamente. $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulativa normal estándar: $N(d_k) = \int_{-\infty}^{d_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$, con $k = 1, 2$.

Supuestos del modelo Black-Scholes y Merton.

- El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato

- El precio del subyacente tiene como dinámica estocástica el movimiento Browniano geométrico: la distribución del precio es lognormal y la distribución de los rendimientos es normal

- La volatilidad de los rendimientos compuestos continuamente es conocida y constante durante el período de la opción

- Las ventas en corto del subyacente están permitidas y no hay costo por realizarlas, es decir, el vendedor del subyacente que no lo posee acordará con el comprador un precio de dicho subyacente y estará obligado a entregarlo el día que se liquide la posición a una fecha en el futuro

- El mercado en el que se negocia el subyacente es líquido y divisible, esto es, se puede tener una posición larga o corta sobre el subyacente en cualquier fracción de unidad de éste. El mercado es además eficiente

- No hay costos de transacción (comisiones e impuestos) por la compra o venta del subyacente o de la opción

- Existe un mercado de crédito, un sistema bancario en el que los agentes financieros pueden pedir prestado y pueden prestar a una tasa de interés libre de riesgo (de incumplimiento) constante a todos los plazos.

- No hay oportunidades de arbitraje en el mercado, es decir, los mercados están en equilibrio

- La opción es europea: solamente puede ser ejercida la opción al vencimiento del contrato

Establecemos también el siguiente corolario, que trata sobre una propiedad importante de los contratos de opción de compra y de venta.

Corolario 4.2.1 (Paridad Put-Call)**.** *Sean dados los supuestos e hipótesis del teorema anterior. Entonces se cumple la siguiente propiedad:*

$$P(S_t, t, K, T, \sigma, \mu, r) + S_t = C(S_t, t, K, T, \sigma, \mu, r) + Ke^{-r(T-t)}. \qquad (4.2.19)$$

El corolario anterior nos permite encontrar el precio de una opción de venta cuando hemos encontrado el valor de una opción de compra o viceversa. En ambos casos, los dos tipos de opciones deben de tener características similares. Veremos más adelante que las opciones de spread crediticio cumplen su respectiva versión de la paridad put-call.

Es importante mencionar que los supuestos de que la volatilidad y la tasa libre de riesgo son constantes durante la vida del contrato, pueden ser cambiados por el supuesto de que ambos son funciones del tiempo t, esto es, $\sigma = \sigma(t)$ y $r = r(t)$. El activo subyacente también puede ser un bono, suponiendo que éste no paga intereses (cupones).

Existen variaciones del modelo de Black-Scholes y Merton para poder valuar otro tipo de subyacentes. El modelo de Garman-Kohlhagen permite valuar opciones cuyo subyacentes son divisas; el modelo Black 76 permite valuar opciones sobre futuros y tasas de interés (De Lara [20]).

Veamos ahora algunas medidas de sensibilidad al precio de las opciones. Estas medidas también serán aplicadas para el caso de los CSO's. Estas medidas de sensibilidad son conocidas como *Griegas de las opciones.*

Griegas del modelo Black-Scholes y Merton

Definición 4.2.11 (Las griegas de las opciones)**.** *Las griegas de las opciones son fórmulas que expresan el cambio en el precio de una opción cuando uno de los parámetros que conforman la fórmula de valuación de Black-Scholes y Merton cambia, teniendo todos los demás parámetros fijos,* ceteris paribus*.*

Uno de los usos de las griegas es para evaluar la exposición al riesgo. Por ejemplo, un agente financiero que posee un portafolio de opciones que quisiera entender su exposición a cambios en el precio de las acciones, a cambios en la tasa de interés, a cambios en la volatilidad, entre otros. Para este tipo de necesidades radica la utilidad de las letras griegas. Cabe mencionar que cuando se calcula una griega con respecto a un parámetro, todos los demás son constantes. Esto implica que, por ejemplo, cuando medimos el cambio con respecto a la volatilidad, no consideramos a los demás parámetros, cuando podrían todos los demás parámetros estar cambiando en los mercados financieros.
Esta subsección considera lo mencionado en Venegas [57] , Haug [25], De

Lara [20], Ekstrand [21], McDonald [42], Neftci [46] y Hull [28].

El siguiente lema nos permitirá encontrar las fórmulas de las letras griegas que consideraremos.

Lema 4.2.1 (Lema fundamental de las griegas)**.** *Sean dados los supuestos del teorema 4.2.1. Entonces si*

$$C(S_t, t, K, T, \sigma, \mu, r) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

es el valor de una opción de compra, se cumple que

$$S_t N'(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N'(d_2) = 0, \text{ donde}$$

$$N'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2}.$$

Definición 4.2.12 (Delta (Δ))**.** *Es el cambio en el precio de una opción europea, ya sea call ya sea put, con respecto a un cambio en el precio del activo subyacente, ceteris paribus. Matemáticamente se define como:*

$$\Delta(C) = \frac{\partial C}{\partial S_t} = N(d_1)$$

$$\Delta(P) = \frac{\partial P}{\partial S_t} = N(d_1) - 1$$

Delta de una opción call en el dinero (at-the-money, ATM), esto significa que $S_t = K$ para un tiempo t dado, es cercano a $\frac{1}{2}$. Delta se acerca a 1 conforme la opción está más dentro del dinero (in-the-money, ITM), esto es, $S_t > K$, y delta se acerca a cero conforme la opción call está cada vez más fuera del dinero (out-of-the-money, OTM), o sea que $S_t < K$. Lo mismo sucede con las opciones de venta, sólo que con signo negativo y con su respectivo valor intrínseco.

La letra griega delta tiene una función muy importante, ya que la medida permite hacer una cobertura sobre la posición que se tenga sobre el subyacente. Delta indica la cantidad de activos subyacentes que se necesita comprar o vender para cubrir una opción. En la cobertura *delta neutral* se toma la posición de $-\Delta$ unidades del subyacente por cada posición larga en las opciones. $\Delta(C)$ es siempre positivo, mientras que $\Delta(P)$ es siempre negativo. En general, $\Delta \in [-1, 1]$. La cobertura delta es efectiva en intervalos cortos de tiempo, que son de tamaño $[t, t + dt]$. Al pasar el tiempo la cobertura delta se deteriora, haciendo necesario un rebalanceo del portafolios. Recordemos que para encontrar la ecuación de BSM empleamos esta cobertura delta para definir los pesos w_1 y w_2.

Definición 4.2.13 (Gamma (Γ))**.** *Es la sensibilidad de delta $\Delta(\cdot)$ con respecto a un cambio en el precio del subyacente, ceteris paribus. Formalmente, gamma se establece como sigue:*

$$\Gamma(C) = \frac{\partial \Delta(C)}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \frac{N'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}}$$

$$\Gamma(P) = \frac{\partial \Delta(P)}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} = \frac{N'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} = \Gamma(C)$$

Como apreciamos, gamma representa la sensibilidad de delta ante cambios en el valor del activo subyacente. Además, gamma mide la curvatura de la razón del precio de la opción y el precio del subyacente, al ser la segunda derivada de la opción con respecto al subyacente. Si se ha conseguido una cobertura delta neutral, al tomar una posición que tenga gamma negativa, se obiene la llamada *cobertura delta-gamma*. Gamma también sirve como indicador para saber qué tan frecuentemente hay que rebalancear el portafolios para lograr una cobertura delta.

Definición 4.2.14 (Theta (Θ))**.** *Es la razón de cambio en el precio de una opción europea y la fecha de vencimiento de la misma, ceteris paribus. Dicha griega se calcula como:*

$$\Theta(C) = \frac{\partial C}{\partial T} = -Ke^{-r(T-t)} \left(rN(d_2) + \frac{\sigma N'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right)$$

$$\Theta(P) = \frac{\partial P}{\partial T} = Ke^{-r(T-t)} \left(rN(-d_2) - \frac{\sigma N'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right)$$

Theta también es conocido como decaimiento del tiempo que, como decíamos, mide los cambios en el valor de la opción conforme transcurre el tiempo. El tiempo no es un factor de riesgo, ya que es una variable determinística. El movimiento que se produce en el tiempo restante a la maduración es perfectamente predecible.

En general, theta es negativa para posiciones largas en opciones de compra o de venta. Esto significa que la opción pierde valor conforme transcurre el tiempo.

Definición 4.2.15 (Vega (υ))**.** *Es el cambio en el precio de una opción europea con respecto al cambio en la volatilidad del subyacente. Vega es una letra griega honoraria cuya formula es, a saber:*

$$\upsilon(C) = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_t N'(d_1)\sqrt{T-t}$$

$$\upsilon(P) = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = S_t N'(d_1)\sqrt{T-t} = \upsilon(C)$$

Cuando se da un incremento en la volatilidad, el precio de una opción call o put aumenta. Vega tiende a ser más grande para opciones en el dinero, implicando que dichas opciones son las más sensibles a la volatilidad. El efecto del tiempo es distinto que en gamma, ya que para vega el término $\sqrt{T-t}$ está en el numerador, mientras que en gamma yace en el denominador. Luego, vega decrece con la maduración de la opción, de manera contraria que gamma, cuyo valor aumenta. Existe además una relación directa entre el precio de la opción y la volatilidad del subyacente.
Vega también es llamada lambda o kappa. Existen también *coberturas delta-gamma-vega* y *coberturas delta-vega.*

Definición 4.2.16 (Vanna)**.** *Corresponde al cambio en el precio de una opción europea por cambios en la volatilidad y en el valor del activo subyacente, ceteris paribus. Matemáticamente, vanna viene dada por:*

$$Vanna(C) = \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma \partial S_t} = \frac{-e^{-r(T-t)}d_2}{\sigma} N'(d_1)$$

$$Vanna(P) = \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma \partial S_t} = Vanna(C), \text{ por la definición previa (4.2.13).}$$

Cabe hacer notar que vanna es tanto la sensibilidad de delta a cambios en la volatilidad como la sensibilidad de vega a cambios en el subyacente. Esta griega también es llamada DdeltaDvol (Haug [25]).

Definición 4.2.17 (Vomma)**.** *Vomma es la sensibilidad de vega a cambios en la volatilidad. Es por ende la segunda derivada parcial del precio de la* *opción europea con respecto a la volatilidad. Vomma también es conocida como Volga, convexidad de Vega o Vega gamma. Su fórmula es la siguiente:*

$$Vomma(C) = \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2} = S_t N'(d_1)\sqrt{T-t}\frac{d_1 d_2}{\sigma}$$

$$Vomma(P) = \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} = Vomma(C) \text{ ya que } \upsilon(C) = \upsilon(P).$$

La utilidad de las griegas es, como hemos apreciado, medir los cambios en las opciones a cambios en los diversos parámetros de las fórmulas de valuación de los mismos, considerando los demás parámetros constantes. Con esto se logra modelar las fluctuaciones en el valor de las opciones en los mercados financieros por los hechos que pasan en éstos, esto es, las griegas permiten administrar el riesgo de mercado. Es por ello que los traders u operadores financieros, quienes son los que toman posiciones financieras a nombre de terceros, necesitan monitorear de manera constante los cambios que se dan en los mercados para cuantificar el valor de sus posiciones (a esto se le llama marcar a mercado) y el de sus coberturas.

Existen muchas más griegas que se pueden calcular, y que ayudan en mayor o menor medida en el manejo de las opciones. Otro ejemplo es Charm o DdeltaDtime, que mide la sensibilidad de delta al cambio del tiempo. Charm permite ver cómo la cobertura delta se va perdiendo conforme se acerca el vencimiento del derivado. Es por esto que Nassim Taleb, de acuerdo con Wilmott y Haug [25], llama a Charm "el desangramiento de delta."
Color o DgammaDtime o decaimiento gamma mide la tasa de cambio de Gamma por el paso del tiempo. Al igual que en el caso de DdeltaDtime, Color permite ver cómo se transforma la cobertura Gamma.

Para terminar esta sección sobre las griegas de las opciones, mencionaremos una griega más, y haremos un análisis breve de sensibilidades en términos económicos y con respecto a algunas razones importantes de la administración del riesgo. Aquí conseramos de nuevo a Venegas [57], Haug [25] y McDonald [42].

Definición 4.2.18 (Rho)**.** *Es el cambio en el precio de una opción europea de compra o de venta con respecto a la tasa libre de riesgo r. Las expresiones* *que definen a rho son:*

$$\rho(C) = \frac{\partial C}{\partial r} = Ke^{-r(T-t)}\,(T-t)\,N(d_2).$$

$$\rho(P) = \frac{\partial P}{\partial r} = -N(-d_2)Ke^{-r(T-t)}\,(T-t)\,.$$

Rho es positiva para las opciones de compra, mientras que para las opciones de venta es negativa. Esto implica que para las opciones call, un incremento en la tasa de interés incrementa el valor de la opción, al incrementarse el valor del activo subyacente a una tasa más alta, haciendo que la probabilidad de ejercitar la opción call, con un precio strike fijo K, aumente. En el límite, para una tasa de interés infinita, la probabilidad de ejercer la opción es uno y la opción call es equivalente al subyacente mismo. Por ende, el valor rho es alto cuando la opción está dentro del dinero. Sin embargo, lo contrario ocurre para las opciones put, cuyo rho es negativo, como mencionábamos. Tanto para las opciones de compra o de venta, la sensibilidad es aproximadamente proporcional al tiempo que falta para la maduración de las opciones.

Otra propiedad importante es la de *elasticidad*. Primeramente recordaremos la noción de elasticidad, para después ver su relevancia en las opciones y hacer algunos comentarios pertinentes.

Definición 4.2.19 (Elasticidad)**.** *Sea $y(x)$ una función. La elasticidad $E(y,x)$ entre las variables x y y se expresa como:*

$$E(y,x) = \frac{\partial \log y}{\partial \log x}.$$

La elasticidad se define como la variación porcentual de la variable x con respecto a la variable y. Mide la sensibilidad de una variable con respecto a otra.

Definición 4.2.20 (Elasticidad de las opciones)**.** *La elasticidad de las opciones es el cambio porcentual en el valor de una opción, call o put, como función del porcentaje de cambio en el valor del activo subyacente. Si el cambio en el precio del activo subyacente se denota por ϵ, entonces el porcentaje de cambio* *en el precio del subyacente es* $\frac{\epsilon}{S_t}$ *y el porcentaje de cambio en el precio de la opción es* $\frac{\epsilon\Delta(C)}{C}$. *Entonces la elasticidad viene dada por la expresión*

$$\Omega = \frac{\frac{\epsilon\Delta(C)}{C}}{\frac{\epsilon}{S_t}} = \frac{S_t\Delta(C)}{C}.$$

Para las opciones call, la elasticidad es mayor o igual que uno, mientras que para las opciones put es no positiva. El valor de la elasticidad es el más alto cuando el call está fuera del dinero y cuando el call tiene un período de maduración corto, ya que el valor de la opción call es muy pequeño comparado con el valor del activo subyacente. En el caso de las opciones de venta, Ω tiene el valor más bajo para opciones put de corto tiempo de maduración que están muy por fuera del dinero, por la misma razón dada para las opciones de compra.
La elasticidad nos indica el porcentaje de cambio en la opción por un cambio de 1 % en el subyacente. Ω es una medida del apalancamiento implícito de la opción.

Las siguientes definiciones son otras características importantes de las opciones y de los portafolios de inversión que se componen de éstas. Estas medidas son importantes en la administración del riesgo de mercado. Para las opciones de spread de crédito veremos su importancia, y partiremos de la analogía que existe con las opciones europeas plain vanilla. La definición de la beta de las opciones proviene de Haug [25].

Definición 4.2.21 (Beta de una opción)**.** *Bajo el supuesto de que la dinámica estocástica que conduce el precio de los activos es el movimiento Browniano geométrico, el CAPM a tiempo continuo de Merton es válido. De hecho esto concuerda con lo que mencionábamos acerca de las consecuencias del modelo de Black-Scholes-Merton. Es por ello que la ecuación de CAPM es satisfecha por los rendimientos del activo:* $\mathbb{E}[R(S)] = r + \mathbb{E}[r_m - r]\beta$, *donde* r *es la tasa libre de riesgo,* $R(S)$ *es el rendimiento del subyacente y* r_m *es el rendimiento del portafolios de mercado y* β *es la beta del activo (recordemos la definición dada en la sección de riesgo de mercado). La beta de una opción permite calcular el rendimiento esperado de la misma. Las sendas fórmulas de los tipos de opciones son, a saber:*

$$\beta(C) = \frac{S_t}{C(\cdot)}\Delta(C)\beta_S.$$

$$\beta(P) = \frac{S_t}{P(\cdot)}\Delta(P)\beta_S.$$

β_S *representa la beta del subyacente.*

Para la construcción de una estrategia beta neutral, el rendimiento esperado debe ser igual que la tasa libre de riesgo, condición que coincide con el principio de valuación neutral al riesgo, que impera sobre el modelo de Black-Scholes-Merton.

Definición 4.2.22 (Volatilidad de una opción)**.** *La volatilidad de una opción es la elasticidad de la opción multiplicada por la volatilidad del subyacente. La fórmula que determina la volatilidad de la opción es, a saber:*

$$\sigma_{opción} = \sigma_{subyacente} \times |\Omega|$$

Dado que la elasticidad es una medida de apalancamiento, el cálculo de la volatilidad de una opción es análogo al cálculo de la desviación estándar de acciones apalancadas al multiplicar el beta no apalancado (sin deuda) por la razón del precio de la firma con respecto al valor de las acciones

Definición 4.2.23 (La Prima de Riesgo de una opción)**.** *La prima de riesgo se define como el excedente en el rendimiento de un activo por sobre la tasa libre de riesgo. Sea α el valor esperado del rendimiento de la acción, sea γ el rendimiento esperado de la opción y r la tasa libre de riesgo. Entonces, la prima de riesgo de una opción viene dada por*

$$\gamma - r = (\alpha - r) \times \Omega(C).$$

Definición 4.2.24 (El cociente de Sharpe para una opción)**.** *La razón de Sharpe para un activo se define como la razón entre la prima de riesgo y la volatilidad y se denota como $\lambda = (\alpha - r)/\sigma_{acción}$.*
El cociente de Sharpe para una opción de compra viene dada por:

$$\lambda(C) = \frac{\Omega(\alpha - r)}{\Omega \times \sigma_{subyacente}} = \frac{\alpha - r}{\sigma_{subyacente}},$$

y otorga una medida del peso de la prima de riesgo de la opción con respecto a la volatilidad del subyacente.

La razón de Sharpe de las acciones es igual a la razón de Sharpe del activo subyacente.
Para las opciones de venta es el negativo del activo subyacente, ya que una opción put es equivalente a una posición apalancada al vender el subyacente, además de que el apalancamiento per se no altera el cociente de Sharpe.

Definición 4.2.25 (Elasticidad del portafolios). *La elasticidad de un portafolios se define como el cambio porcentual en el portafolios dividido por el cambio porcentual en el subyacente. Es el promedio ponderado de las elasticidades de los componentes del portafolios.*
Sea dado un portafolios de inversión que consta de n opciones call sobre el mismo subyacente, donde el call $k-$ésimo vale C_k y su Delta Δ_k; w_k es la fracción del portafolio que se invirtie en el $k-$ésimo call. El valor del portafolio viene dado por $\Pi = \sum_{k=1}^{n} w_k C_k$.
Así que la elasticidad del portafolios es, a saber:

$$\Omega_{port} = \frac{\frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \Delta_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k C_k}}{\frac{1}{S_t}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{w_k C_k}{\sum_{j=1}^{n} w_j C_j} \right) \frac{S_t \Delta_k}{C_k} = \sum_{k=1}^{n} w_k C_k$$

Por medio de la ecuación vemos que la prima de riesgo del portafolios es justo la elasticidad del portafolios multiplicada por la prima de riesgo en el subyacente:

$$\gamma - r = \Omega_{\text{port}} \left(\alpha - r \right).$$

4.2.2. Marca a mercado de los Credit Spread Options

En esta sección trataremos algunos fundamentos de los credit spread options, en cuanto a sus propiedades, usos y operación en los mercados financieros, con el fin de lograr que los métodos de valuación que presentaremos sean más fácilmente entendibles y que puedan ser vistos desde una perspectiva más amplia, conciliando los aspectos teóricos con los aspectos prácticos o "del mercado".

Como habíamos mencionado anteriormente, los Credit Spread Options son derivados de crédito que permiten cubrir al inversionista de cambios adversos en el spread crediticio, al tener una posición en bonos susceptibles de incumplimiento. Recordemos que habíamos definido al spread de crédito como el margen relativo a la tasa libre de riesgo que compensa al inversionista por el riesgo de incumplimiento del emisor del activo subyacente y por otros eventos de crédito que pudieran ocurrir, como una reestructuración de la deuda del emisor del subyacente.

El valor intrínseco de la opción depende de si el spread strike o de ejercicio es mayor o menor al spread crediticio spot, esto es, al valor del spread al tiempo t, haciendo una marca a mercado de la tasa de interés libre de riesgo y de la tasa del subyacente, al tiempo t.

Para efectos de esta sección, el análisis está basado en Finnerty [24], Schmid [53] y Mougeot [45].

Beneficios de los CSO's

- Las opciones de spread de crédito permiten cubrir la inversión en bonos contra cambios en el spread de crédito

- Los inversionistas pueden tener coberturas o negociar con cambios en la calificación crediticia de dos bonos, independientemente de los cambios de las tasas de interés, esto es, los inversores pueden operar expectativas adelantadas sobre el credit spread.

- Dado que muchos inversionistas no tienen acceso a mercados financieros colateralizados y que por ende no pueden estructurar negociaciones en los mercados de contado que se benefician de cambios en el spread crediticio, pueden, no obstante lo anterior, tener acceso a dicho tipo de negociaciones mediante los CSO's.

- También las opciones de spread crediticio pueden permitir a los inversionistas tener acceso a activos clasificados como de subinversión, bajo ciertas circunstancias. Los activos con nivel de subinversión tienen calificación crediticia de $BB+$ a D, dependiendo la nomenclatura de la firma calificadora.

- Mediante los CSO´s los inversionistas pueden separar el riesgo de crédito del riesgo de mercado y de otros tipos de riesgo cuando éstos: (a) esperan que la calificación crediticia de un bono en particular sea rebajada, ocasionando que el spread de crédito aumente y el precio del bono disminuya. Para protegerse de este evento, pueden cubrir su posición mediante la compra de una opción call. (b) En el caso de que los inversionistas deseen cubrirse contra el aumento de la calificación crediticia de un bono, que provocaría un estrechamiento en el spread de crédito y en consecuencia una apreciación del bono, pueden comprar una opción put sobre el subyacente. Esta separación del riesgo de mercado y el riesgo de crédito es posible debido a que, dado el evento en el que la calificación del bono cambia, el inversionista se cubre del efecto del movimiento del factor de riesgo (spread de crédito) al operar con una opción de spread de crédito que mitiga el riesgo de mercado y al mismo tiempo se protege del evento de crédito.

En lo tocante a la administración de las posiciones sobre los CSO's, el comprador de la opción paga, como hemos mencionado anteriormente, una prima que es amortizada usualmente mediante un pago único hecho por adelantado y en algunos caso mediante una serie de pagos, a cambio de que la contraparte del contrato acuerde hacer un pago único en el evento de que el spread de crédito del prestatario cruce el umbral establecido, el spread de ejercicio.

Por otro lado, cabe mencionar que los credit spread options no son ámpliamente utilizados en los mercados de derivados de crédito. Esto se debe a que por el bajo nivel de liquidez y por la falta de un mercado de dos sentidos efectivo (two-way market), el precio de las opciones sea relativamente alta para los inversores (Finnerty [24]). Un mercado es de dos sentidos si los formadores de mercado publican tanto los precios de compra (bid price) como de venta (ask price) de cada valor financiero que manejan, además de ejecutar órdenes con dichos precios. Además, en muchas ocasiones los inversionistas pueden logar sus objetivos mediante credit default swaps, sobre todo cuando desean cubrirse de un alza significativa de los spreads.
En el caso del mercado mexicano, los derivados de crédito no son ampliamente utilizados, y como sucede a nivel internacional, el producto más empleado es el credit default swap. El hecho de su bajo empleo se debe a que hace pocos años, en el 2006, el Banco de México autorizó el uso de los derivados de crédito en México mediante la circular 4 a las instituciones financieras (basado en lo que el autor platicó con José Ripoll). En dicho documento se hacen restricciones sobre las contrapartes. Por otro lado, hay otras restricciones de tipo regulatorio que no han posibilitado un adecuado crecimiento del

mercado de derivados de crédito mexicano. Además, recordemos que la crisis actual, que inició a finales del 2007, tiene un fuerte componente de riesgo soberano y que también se produjo en parte por derivados cuyos subyacentes eran las hipotecas. Esto ha tenido como resultado que los agentes financieros hayan reducido de manera considerable su participación en el mencionado mercado. Empero, los credit default swaps siguen siendo utilizados de manera importante. Baste mencionar que los credit default swaps exhiben las preferencias de los mercados y permiten descontar la información disponible, mediante los spreads asociados a los CDS (ver Hull [29]).

Frecuentemente los compradores de opciones de crédito son instituciones bancarias y negociadores que están interesados en cubrir su exposición marcada a mercado por fluctuaciones en los spreads de crédito. Para estos agentes, que tienen a menudo balances generales apalancados, encuentran atractivo el hecho de que por las opciones de crédito se generan posiciones financieras fuera del balance. Se pueden ayudar mediante los credit spread options los prestatarios que deseen fijar costos de préstamos futuros sin inflar sus balances generales.

Cabe hacer notar que, anterior al advenimiento de los derivados de crédito, la exposición a los cambios en el nivel de los spreads de deuda del emisor no podía ser cubierta sin emitir deuda de manera inmediata e invertir capital en otros activos, esto es, diversificar el riesgo.

Otro aspecto importante acerca de los credit spread options es la forma de ejercer las opciones. Los CSOs pueden ser americanos, europeos o bermudas. Recordemos que las opciones americanas son aquellas que pueden ser ejercidas en cualquier momento antes de la maduración del derivado o en su fecha de maduración; las opciones europeas, por el contrario, sólo pueden ser ejercidas al vencimiento del contrato; y las opciones bermudas pueden ser ejercidas solamente durante ciertos períodos durante la vida de la opción. Los modelos de valuación de CSOs que analizaremos en esta tesis, comprenden opciones europeas.

Como hemos estado mencionando, el activo subyacente de los CSO's son spreads de crédito de instrumentos de renta fija, como los bonos con cupones flotantes, aunque también las opciones pueden estar basados en asset swaptions, que son opciones sobre swaps en los cuales se intercambian flujos de efectivo de dos valores financieros distintos. Ejemplo de esto sería la permuta de pagos de un Treasury Bill (bonos del gobierno de los Estados Unidos) por flujos a tasa LIBOR menos un spread. En lo que respecta a la presente tesis, los activos subyacentes serán spreads crediticios de bonos corporativos y soberanos.

Para completar esta sección, retomaremos el tema del valor intrínseco de los credit spread options y haremos mención de varios aspectos relevantes del mismo. Esto está inspirado en Schmid [53] Finnerty [24].

Opciones Call

Como decíamos anteriormente, las opciones call o de compra permiten al tenedor del derivado obtener el activo subyacente, el spread crediticio (y estar largo en el bono (susceptible de default)), al credit spread de ejercicio pactado. El valor intrínseco o payoff de un derivado se define como el valor de la posición en algun momento durante la vida del contrato. Este concepto es aplicable para cualquier instrumento derivado e inclusive para cualquier instrumento financiero.

Para las opciones en general, ya sean derivados sobre el riesgo de mercado, ya sean derivados de crédito, se cumple la siguiente definición.

Definición 4.2.26 (Valor de Mercado de una Opción)**.** *El valor de mercado de una opción se define como la suma del valor intrínseco del derivado y del valor temporal del mismo.*

También consideremos esta definición.

Definición 4.2.27 (Valor Extrínseco de una Opción)**.** *El valor extrínseco de una opción es la diferencia entre el valor intrínseco y al prima que se paga por el contrato.*

El valor intrínseco de los CSO's viene dado de la siguiente forma: su cuantía exhibe el valor del instrumento (bono) por el spread crediticio de tasas de interés.

La fórmula 4.2.20 representa el valor intrínseco de las opciones de spread crediticio, mientras que las expresiones 4.2.21 y 4.2.21 son dos formas de expresar el pay off de las opciones de spread crediticio sobre bonos. La primera

forma toma en cuenta, además del spread, la duración modificada del instrumento de renta fija subyacente y el valor de redención de éste. La segunda forma considera la diferencia de precios en el bono al tomar tanto el spread spot como el de ejercicio.
Se reciben a continuación las fórmulas:

$$\max\,[S - K] \tag{4.2.20}$$

$$\max\,[K - S] \times D_M \times F \tag{4.2.21}$$

$$\max\,[P_S - P_K] \times F \tag{4.2.22}$$

S es el spread spot, K es el spread strike o de ejercicio de la opción, F es el valor principal o nocional del subyacente, D_M es la duración modificada del bono, P_S y P_K representan el precio del bono tomando en cuenta el spread spot o el de ejercicio respectivamente.

En la valuación de los credit spread options emplearemos la fórmula primera (4.2.20), tanto para las opciones de compra como para las opciones de venta, caso que veremos en un momento. También para efectos de la modelación, el enfoque se centra en el spread crediticio, no tanto en el precio de los bonos que, por el efecto que sobre ellos ejercen las tasas de interés no dejan de tener relevancia.

La razón de que en la expresión 4.2.21 del valor intrínseco se considere la duración (modificada) se debe a que para las opciones de credit spread sobre bonos el riesgo de mercado es tan importante como el de crédito, debido a que el subyacente es el intrumento de renta fija, cuyo valor cambia por estas dos fuentes de riesgo. Recordemos que la duración es el cambio porcentual aproximado dado un cambio pequeño en la tasa de interés, medida que nos permite calcular el cambio aproximado en el precio dado dicho cambio en la tasa. Cabe mencionar que cuando se presentan cambios altos en la tasa de interés, el cambio en el precio se aproxima de mejor forma cuando se emplea la convexidad. Es por ello que el payoff debe de ser ajustado por el factor de riesgo de los bonos, la tasa de interés, que se valora mediante la duración. En la expresión 4.2.22 se refleja el valor de la opción por cuanto los precios del bono susceptible de incumplimiento y el bono libre de default cambian debido a cambios en el spread crediticio.

Sobre la magnitud que puede tener el valor intrínseco en los CSO's, hay que tomar en cuenta que:

- Cuando el spread crediticio spot está por encima del spread de ejercicio, la opción está dentro del dinero (ITM), teniendo por valor intrínseco $S_t - K$; esto viene dado por un aumento en el riesgo de incumplimiento, un descenso en la calidad crediticia del subyacente, que provoca en consecuencia que el credit spread aumente.
  Si esto sucede al vencimiento de la opción, el contrato se ejerce.

- Cuando el spread de crédito spot es igual al spread strike, la opción está en el dinero (ATM) y por ende el valor intrínseco es cero. Si se está en el vencimiento del derivado, no se ejerce el call.

- Si el spread crediticio spot es menor al spread de ejercicio, la opción está fuera del dinero (ITM), y el valor intrínseco es nulo. Lo anterior significa que el riesgo de incumplimiento disminuye y la calidad crediticia aumenta.
  En el caso de que este evento suceda al vencimiento del call, la opción no se ejerce.

Las opciones de spread de crédito representan para los inversionistas una forma no financiada para expresar una visión de crédito pura, ya que estas opciones sólo dependen del valor del spread relativo al spread de ejercicio. En el caso de las opciones de compra, el tenedor de la misma, expresa una visión negativa del bono susceptible de default, que significa que se espera que su riesgo de crédito aumente; mientras que en las opciones put se expresa una visión positiva del crédito.

Opciones Put

En el caso de las opciones put, éstas permiten al propietario otorgar el activo subyacente al valor que se desprende del spread de ejercicio.

Presentamos a continuación el valor intrínseco de las opciones de venta para los credit spread options (expresión 4.2.23) y las opciones de spread

crediticio sobre bonos (4.2.24 y 4.2.25). En este caso hay que destacar que estamos cortos en el subyacente.
Las fórmulas del payoff se reciben a continuación:

$$\text{máx}\,[K - S] \tag{4.2.23}$$

$$\text{máx}\,[K - S] \times D_M \times F \times P_K \tag{4.2.24}$$

$$\text{máx}\,[P_S - P_K] \times F \tag{4.2.25}$$

Para las opciones put:

- Cuando el spread crediticio spot está por debajo del spread de ejercicio, la opción está dentro del dinero (ITM) y su valor intrínseco es $K - S_t$; esto se genera por una disminución en el riesgo de incumplimiento y en un aumento en la calidad crediticia del bono. Si esto sucede al vencimiento de la opción, el contrato se ejerce.

- Cuando el spread de crédito spot es igual al spread strike, la opción está en el dinero (ATM) y el valor intrínseco es cero. Si se está en el vencimiento del derivado, no se ejerce la opción.

- Si el spread crediticio spot es mayor al spread de ejercicio, se dice que la opción está fuera del dinero (OTM), teniendo valor intrínseco nulo. Esto implica que el riesgo de incumplimiento crece y que la calidad crediticia disminuye consecuentemente. En el caso de que este evento suceda al vencimiento del put, la opción no se ejerce.

Procedemos ahora, dados los conceptos y principios que hemos analizado, a presentar los dos modelos de valuación de las opciones de spread de crédito, en un esquema análogo al modelo de Black-Scholes-Merton, con las diferencias que entre ellos existen.

4.3. Modelos de valuación de los CSO's

Antes de entrar en detalle acerca de la valuación de los credit spread options, es importante resaltar algunas propiedades del subyacente en los mercados financieros donde se les opera.

Son dos propiedades: que los spreads son estacionarios y que presentan reversión a la media. Dichas propiedades fueron analizadas y corroboradas empíricamente en el trabajo de Longstaff y Schwartz [41], en donde tomaron diversos índices de bonos de Moody's de calificaciones crediticias Aaa, Aa, A y Baa sobre los índices de bonos industriales y de utilidades. El período de observación que tomaron fue de 1977 a 1992. La tasa libre de riesgo proviene de los bonos del tesoro de los Estados Unidos o Treasuries.

Un índice de bonos es un listado que se compone de bonos o instrumentos de renta fija, cuyo valor es resultado de sumar el peso de sus elementos componentes, tal como sucede en el caso de los índices de acciones como el IPC de México.

Mediante los datos anteriores hicieron lo siguiente: Sea $Z = \log(X - Y)$ el logaritmo del spread de crédito, y sea $S = X - Y$ dicho spread; X y Y son los componentes de dicho spread de crédito. Con el fin de modelar los cambios que presenta Z, con un horizonte de tiempo mensual, sea considerada la regresión:

$$\Delta Z_{t+1} = \gamma_0 + \gamma_1 Z_t + \epsilon_t. \tag{4.3.1}$$

donde ϵ_t es un ruido blanco gaussiano, γ_0 es el coeficiente de intersección y γ_1 es la pendiente de la regresión.

Mediante dicha regresión, concluyeron que a partir de los datos obtenidos, el coeficiente de la pendiente es negativo en todas las regresiones; más aún, es significativamente negativo en todas menos en una o dos. Esto implica que Z es reversible a la media. También encontraron que el logaritmo del credit spread es más volátil en bonos con calificación alta que para los que tienen calificación crediticia baja. Histogramas de los cambios mensuales de Z muestran que la distribución de los cambios son correctamente aproximados por la distribución normal.

Veamos ahora la definición de las dos propiedades importantes que se acaban de mencionar. Para ello nos basamos en Lefebvre [37] y Samuels [53].

Definición 4.3.1 (Proceso Estacionario)**.** *Se dice que un proceso estocástico* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *es estacionario si para cualesquier tiempos* $t_1, \ldots, t_n$*, los vectores aleatorios* $(X_{t_1}, \ldots . X_{t_n})$ *y* $(X_{t_1+h}, \ldots . X_{t_n+h})$ *tienen la misma distribución.*

Definición 4.3.2 (Regresión a la media)**.** *Sean* X_1 *y* X_2 *dos variables aleatorias con función de distribución conjunta* F*. Supongamos que* X_1 *y* X_2 *tienen la misma función de distribución marginal y sea* μ *su esperanza común. Se dice que* F *exhibe reversión a la media si para toda* $c > \mu$*, las siguientes desigualdades son válidas*

$$\mu \leq \mathbb{E}\left[X_2 | X_1 > c\right] < \mathbb{E}\left[X_1 | X_1 > c\right]; \tag{4.3.2}$$

$$\mu \geq \mathbb{E}\left[X_2 | X_1 < c\right] > \mathbb{E}\left[X_1 | X_1 < c\right]. \tag{4.3.3}$$

Habiendo comentado las propiedades anteriores, procedemos a la valuación de los credit spread options. Uno de los modelos que analizaremos en el presente trabajo es el modelo propuesto por Longstaff y Schwartz [41], que es un modelo de tasa de dos factores; también estudiaremos una modificación al modelo anterior, propuesto por Nicolas Mougeot [45], que consiste en un modelo de tasas de tres factores. En este último método se centrará la presente tesis, por las justificaciones que más adelante se explicitarán. Los procesos de valuación que veremos se basarán en los artículos mencionados, siguiendo el desarrollo utilizado por sus respectivos autores.
Además de las técnicas anteriores, los credit spread options también pueden ser valuados mediante árboles y modelos GARCH (Tahani [55]). No obstante, estos temas no serán tratados aquí.

En Krishnan [35] se puede encontrar un estudio sobre la curva del spread de crédito y en Collin [16] se puede también hallar un estudio del comportamiento del sread, para profundizar en los aspectos empíricos que acabamos de estudiar.

4.4. Modelo de Longstaff y Schwartz

Este método de valuación está inspirado en los resultados empíricos comentados anteriormente. Dichas observaciones fueron hechas observando el comportamiento de los spreads entre una cantidad de índices de bonos de Moody's y rendimientos de bonos a largo plazo, de la Tesorería de los Estados Unidos.

Para el desarrollo de los dos modelos que estudiaremos, recordemos lo mencionado en el capítulo de las ecuaciones diferenciales estocásticas acerca del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, que es solución a la ecuación de Langevin. Una variante a la ecuación anterior es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck reversible a la media. Éste viene dado por:

$$dX_t = (m - X_t)\,dt + \sigma dW_t, \tag{4.4.1}$$

donde m y σ son números reales constantes. En el resto del capítulo nos referiremos a él símplemente como proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Respecto a los modelos que aquí analizaremos, vamos a emplear una versión más general de la ecuación 4.4.1. Esta igualdad es conocida en finanzas cuantitativas como modelo de Vasicek, aunque también se suele llamar proceso de Ornstein-Uhlenbek. La dinámica es

$$dr(t) = k\,[\theta - r(t)]\,dt + \sigma dW_t, \text{ con } r(0) = r_0. \tag{4.4.2}$$

Haremos algunos comentarios respecto a esta dinámica, que nos serán útiles a lo largo de este capítulo (siguiendo a Brigo y Mercurio [11]).

Si se integra la ecuación pretérita, vemos que, para $s \leq t$, se obtiene

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-k(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-s)} dW(u). \tag{4.4.3}$$

De esto se desprende que $r(t)$ condicionado a la filtración $\mathscr{F}_s$ posee distribución normal con media y varianza como sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,[r(t)|\mathscr{F}_s] &= r(s)e^{-k(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-k(t-s)}\right) \\ Var\,[r(t)|\mathscr{F}_s] &= \frac{\sigma^2}{2k}\left[1 - e^{-2k(t-s)}\right]. \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Por las ecuaciones 4.4.4, la tasa de interés corta r es reversible a la media, ya que si hacemos tender a t a infinito, la tasa tiende a su vez al parámetro θ. θ es llamada la tasa de largo plazo debido a lo anterior.
Respecto a la ecuación de Vasicek (4.4.2) notemos que la deriva de este proceso es positiva siempre que la tasa r sea menor que θ, de otra forma la tasa es negativa. Ello significa que r es empujada a ser, en cada tiempo, cercano en promedio a θ.

Cabe hacer un comentario importante. Como mencionamos en el párrafo anterior, el modelo de Vasicek puede arrojar tasas de interés negativas, hecho que contrasta directamente con el comportamiento usual de la tasa de interés. Es esta característica la principal desventaja de este proceso. Por lo anterior, se han desarrollado modelos como el de Cox, Ingersoll y Ross [18] (que estudiaremos más adelante) y el de Black y Karasinski, que eliminan dicho problema.
Otro detalle del proceso de Vasicek es que, dado que los precios de mercado de bonos provienen de una cantidad finita de fechas de maduración, la estructura temporal de tasa de interés no puede ser reproducida completamente con este modelo, no importando qué valores tomen los tres parámetros de este.

No obstante lo anterior, la ecuación de Vasicek posee una tratabilidad analítica bastante adecuada. Es por esto que los dos modelos que en esta tesis presentamos consideran esta dinámica.
Regresemos ahora al modelo de Longstaff y Schwartz.

Se asume que la dinámica del logaritmo del spread de crédito Z es conducido por la ecuación diferencial estocástica:

$$dZ = (\alpha_Z - \beta_Z Z)\,dt + \sigma_Z dW_Z, \tag{4.4.5}$$

donde α_Z, β_Z y σ_Z son parámetros de la ecuación y W_Z es un movimento Browniano estandarizado.
Sea $H(Z) = \text{máx}\left(0, e^Z - K\right)$ la función valor intrínseco (payoff) y sea T el tiempo a la maduración de la opción.

Con esto llegamos al siguiente resultado, que concuerda con las carácterísticas observadas en el mercado de dinero.

Proposición 4.4.1. *El cambio en el logaritmo del spread de crédito Z cumple las siguientes propiedades:*
a) La variable aleatoria es homoscedástica.
b) Presenta reversión a la media.
c) Z es positiva.
d) Z tiene distribución condicional lognormal.

Ahora, con respecto a la estructura de la tasa libre de riesgo a corto plazo, se asume que ésta está determinada por el modelo de un factor de Vasicek, que Vasicek desarrolla en su artículo *An Equilibrium Characterization of the Term Structure* [56]. Su desarrollo se basa en la ecuación de la estructura temporal $dP = P\mu(t,s)dt - P\sigma(t,s)dW$ del precio de un bono P (s es el tiempo a la maduración del bono) y considera como un caso particular la ecuación de la tasa spot $r(t)$ $dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dW$. Entonces, tomando en cuenta el esquema anterior, Longstaff y Schwartz consideran la siguiente ecuación para la tasa libre de riesgo, a saber:

$$dr = (\alpha_r - \beta r)\, dt + \sigma_r dW_r. \tag{4.4.6}$$

También para esta ecuación α_r, β_r y σ_r son parámetros de la ecuación y W_r es un movimento Browniano estándar. El coeficiente de correlación entre dW_Z y dW_r se denota por ρ_{dW_Z,dW_r}.

Para este modelo, se permite que tanto el riesgo de tasa de interés como el riesgo de cambios en el spread crediticio sean valorados por el mercado.

Consideremos que los factores α_Z y α_r incorporan al modelo los precios de mercado de las primas de riesgo; así, α_Z y α_r son parámetros ajustados por riesgo. Este planteamiento proviene también de Vasicek [56], en cuyo desarrollo para la solución de la ecuación de la estructura temporal denomina a q, que viene dado por $q(t,r) = \frac{\mu(t,s,r)-r}{\sigma(t,s,r)}$, como el precio de mercado del riesgo. Notemos que q es el cociente de Sharpe. De aquí que sea válido el supuesto que hacemos sobre α_Z y α_r.

En términos de la teoría de valuación de reclamaciones contingentes, la expresión para encontrar el precio de una opción europea, viene dada por la siguiente fórmula:

$$F_t = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_l dl} \operatorname{máx}\left(S_T - K, 0\right)|\mathscr{F}_t\right], \tag{4.4.7}$$

donde F_t representa el precio de la opción.

Para trabajar con la fórmula anterior, Longstaff y Schwartz consideran un teorema que proviene de un artículo de Longstaff, *Valuing Options on Yields* [40], que dice lo siguiente:

Teorema 4.4.1 (Teorema de Separación)**.** *Sea Y_T la tasa de rendimiento a la maduración de bonos con maduración constante en T. Sea $F\left(Y_T\right)$ la función de valor intrínseco de una reclamación contingente de tipo europeo sobre Y_T que madura en τ. Sea $D(\tau)$ el valor de un bono con descuento cuyo tiempo de maduración es τ. Entonces, el valor de la reclamación contingente C en el desarrollo de Longstaff es*

$$C = D(\tau)\mathbb{E}\left[F(Y_T)\right], \tag{4.4.8}$$

donde la esperanza es tomada respecto a Y_T que se distribuye como

$$A(T) + \left[\frac{\sigma^2 \tau B(\tau) B(T)}{4}\right] \chi^2(\upsilon, \eta). \tag{4.4.9}$$

Y_T viene dada por la expresión

$$Y_T = A(T) + B(T) Y_0, \tag{4.4.10}$$

donde

$$A(T) = \frac{2\alpha}{\sigma^2 T} \ln\left[\frac{(\gamma+\beta)\left(e^{\gamma T}-1\right)+2\gamma}{2\gamma e^{(\gamma+\beta)T/2}}\right], \tag{4.4.11}$$

$$B(T) = \frac{2\left(e^{\gamma T}-1\right)}{T\left[(\gamma+\beta)\left(e^{\gamma T}-1\right)+2\gamma\right]}, \tag{4.4.12}$$

$$\gamma = \left(\beta^2 + 2\sigma^2\right)^{1/2}. \tag{4.4.13}$$

$\chi^2(\upsilon,\eta)$ *es la distribución* χ *cuadrada no central con* υ *grados de libertad y parámeto de no-centralidad* η*, con*

$$\upsilon = \frac{4\alpha}{\sigma^2} \text{ y} \tag{4.4.14}$$

$$\eta = \frac{-4\gamma^2 \tau e^{\gamma\tau} B(\tau) A(T)}{\sigma^2 \left(e^{\gamma\tau} - 1\right)^2 B(T)} + \frac{4\gamma^2 \tau e^{\gamma\tau} B(\tau)}{\sigma^2 \left(e^{\gamma\tau} - 1\right)^2 B(T)} Y_T. \tag{4.4.15}$$

α *es una constante positiva que proviene de la dinámica estocástica de* Y_0 :

$$dY_0 = (\alpha - \kappa Y_0)\, dt + \sigma \sqrt{Y_0} dW. \tag{4.4.16}$$

κ *y* σ^2 *son también constantes positivas.*

Mediante este teorema, la expresión del valor de la opción se puede descomponer en dos factores, que implican que dicho valor puede ser encontrado tomando primero la esperanza matemática de su valor intrínseco y después descontando la esperanza al presente por el factor de valor presente libre de riesgo $D(\tau)$. Esta descomposición permite encontrar más fácilmente la fórmula buscada, al simplificar la expresión de la que partimos. La ecuación diferencial estocástica para Y_0 corresponde a la ecuación de Cox, Ingersoll y Ross (CIR) con un simple cambio de notación. Daremos una explicación de esta ecuación más adelante.

En este punto, es conveniente recalcar la fuerte analogía que hay entre este método y el de la técnica comocida como de *cambio de numerario*, que constituye uno de los métodos para resolver la ecuación de Black-Scholes-Merton. A continuación mencionaremos algunos elementos de esta técnica. La explicación que daremos proviene de Venegas [57] y de Brigo y Mercurio [11].

Con este desarrollo introducimos *la hipótesis con la cual se conduce el desarrollo de la presente tesis*, la cual es, a saber:
El proceso de valuación de reclamaciones contingentes, en particular para los credit spread options, se vuelve más robusto y completo al llevar a cabo un contraste con el modelo clásico de valuación de opciones (Black-Scholes-Merton).

Numerario se define como cualquier activo positivo que no paga dividendos. Este concepto proviene de la microeconomía y la idea detrás de éste consiste en expresar el valor de un bien en términos de otro bien tal que permite hacer cálculos más sencillos al momento de estar tomando posiciones financieras sobre el mismo.

Recordemos la ecuación diferencial estocástica del modelo de Black-Scholes-Merton que habíamos mencionado,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{4.4.17}$$

Dicha ecuación también puede expresarse de la siguiente forma:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right). \tag{4.4.18}$$

Sea $\lambda := \frac{\mu - r}{\sigma}$. λ es la razón de Sharpe y representa el precio de mercado del riesgo que tiene el activo subyacente. Sea $\widetilde{W}_t = \lambda t + W_t$. Entonces la ecuación 4.4.18 queda de la siguiente forma:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t. \tag{4.4.19}$$

Consideremos una cuenta bancaria en la que hay depositada M_t unidades de valor, la cual está invertida a una tasa de interés constante y libre de riesgo. El rendimiento de la cuenta al instante dt viene dado por la ecuación diferencial ordinaria

$$dM_t = rM_t dt. \tag{4.4.20}$$

Supongamos que el tiempo cero en la cuenta bancaria hay $M_0 = 1$ unidad de valor. Así, la solución a la ecuación 4.4.20 es $M_t = e^{rt}$.

Sea $\widetilde{S}_t = M_t^{-1} S_t = e^{-rt} S_t$. Calculando $d\widetilde{S}_t$ y sustituyendo en 4.4.17 se recibe

$$d\widetilde{S}_t = e^{-rt} dS_t - re^{-rt} S_t dt = \widetilde{S}_t \sigma d\widetilde{W}_t, \tag{4.4.21}$$

que es equivalente a

$$\frac{d\widetilde{S}_t}{S_t} = \sigma d\widetilde{W}_t. \tag{4.4.22}$$

La cuenta bancaria M_t resulta ser el numerario que aplicaremos para llegar a la fórmula de Black-Scholes-Merton.

El siguiente paso es hallar dos procesos estocásticos $v_t = v(S_t, t)$ y $w_t = w(S_t, t)$ adaptados a la filtración $\{\mathscr{F}_t, t \geq 0\}$ tales que satisfacen

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t v_s^2 ds\right] < \infty \text{ y} \tag{4.4.23}$$

$$\int_0^t |w_s| \, ds < \infty. \tag{4.4.24}$$

La convergencia de ambas integrales es casi en todas partes.
Además, ambos procesos deben de satisfacer la siguiente ecuación, a saber

$$v_t S_t + w_t M_t = C(S_t, t). \tag{4.4.25}$$

y que a la fecha de vencimiento de la opción se cumpla que

$$v_T S_T + w_T M_T = \text{máx}\left[S_T - K, 0\right]. \tag{4.4.26}$$

Para las ecuaciones anteriores la trayectoria que tome el subyacente no es relevante. Mediante la ecuación 4.4.25 se exhibe que no existen oportunidades de arbitraje. Además, se tiene el supuesto de que la inversión es autofinanciable, esto es, no se agrega ni se extrae capital de la cuenta bancaria después del tiempo inicial. Esto implica que

$$v_t dS_t + w_t dM_t = dC(S_t, t), \tag{4.4.27}$$

así que

$$S_t dv_t + M_t dw_t = 0. \tag{4.4.28}$$

Luego,

$$\begin{gathered} v_t\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + w_t r M_t dt\right) = \\ \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 S_T^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\right) dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t. \end{gathered} \tag{4.4.29}$$

Igualando los coeficientes de la ecuación 4.4.25 en dW_t se sigue que

$$v_t = \frac{\partial C}{\partial S_t} := \Delta_t \text{ (esta es la delta de la opción)}, \tag{4.4.30}$$

$$w_t = \frac{C(S_t, t) - v_t S_t}{M_t}. \tag{4.4.31}$$

Los procesos estocásticos v_t y w_t son por ende los pesos que determinan el portafolios que replica el valor de la opción. Si sustituimos las dos expresiones anteriores en 4.4.27 obtenemos

$$dC = \Delta_t dS_t + \frac{C - \Delta_t S_t}{M_t} dM_t = \Delta_t dS_t + (C - \Delta_t S_t)\, r dt. \tag{4.4.32}$$

Si tomamos $\widetilde{C}$ como $\widetilde{C} = e^{-rt}C$, calculamos la diferencial de $\widetilde{C}$ sustituyendo con 4.4.32, y se recibe

$$d\widetilde{C} = e^{-rt} dC - re^{-rt} C dt = \Delta_t \sigma \widetilde{S}_t d\widetilde{W}_t. \tag{4.4.33}$$

Esto significa que si no existen oportunidades de arbitraje, $\widetilde{C}$ es una martingala sobre el espacio de probabilidad aumentado $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t, t \geq 0\}, \widetilde{\mathbb{P}}\right)$. Definamos formalmente a $\widetilde{C}(S_T, t)$ como

$$\widetilde{C}(S_T, t) := \frac{C(S_T, t)}{M_t}; \tag{4.4.34}$$

esto quiere decir que a $\widetilde{C}$ es la opción call europea expresada en unidades del numerario. De aquí se desprende lo que sigue

$$\begin{gathered} d\widetilde{C} = e^{-rt} dC - re^{-rt} C dt = \\ e^{-rt}\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rC\right) dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\sigma \widetilde{S}_t d\widetilde{W}_t. \end{gathered} \tag{4.4.35}$$

La ecuación anterior es martingala en ausencia de arbitraje. Por ende, haciendo algunas simplificaciones, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rC = 0, \tag{4.4.36}$$

que es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes y Merton, con la condición en la frontera

$$C\left(S_t, T\right) = \text{máx}\left[S_t - K, 0\right]. \tag{4.4.37}$$

Ahora lo que prosigue hacer es aplicar el teorema de Girsanov para determinar cómo es $\widetilde{\mathbb{P}}$. Mediante el teorema de Girsanov (3.6.2) se obtiene una medida martingala equivalente

$$\widetilde{\mathbb{P}} = \int_A \varphi\left(\lambda, T, W_T\right) d\mathbb{P}, \text{ con } A \text{ en } \mathscr{F}. \tag{4.4.38}$$

$\varphi\left(\lambda, T, W_T\right)$ se obtiene a partir de un tiempo inicial $t = 0$,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\lambda, T, W_T\right) &= \exp\left\{-\lambda \int_0^T dW_s - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^T ds\right\} \\ &= \exp\left\{-\lambda\left(W_T - W_0\right) - \frac{1}{2}\lambda^2\left(T - 0\right)\right\}. \end{aligned} \tag{4.4.39}$$

Si se tiene información $\mathscr{F}_t$, el tiempo inicial es más bien t. Así,

$$\varphi\left(\lambda, T - t, W_{T-t}\right) = \exp\left\{-\lambda W_{T-t} - \frac{1}{2}\lambda^2\left(T - t\right)\right\} = \frac{\varphi\left(\lambda, T, W_T\right)}{\varphi\left(\lambda, t, W_t\right)}. \tag{4.4.40}$$

Luego,

$$\tilde{\mathbb{P}} = \int_A \frac{\varphi\left(\lambda, T, W_T\right)}{\varphi\left(\lambda, t, W_t\right)} d\mathbb{P}, \text{ con } A \text{ en } \mathscr{F}. \tag{4.4.41}$$

Como habíamos mencionado, $\widetilde{C}$ es martingala en el espacio de probabilidad aumentado $\left(\Omega, \mathscr{F}, \left\{\mathscr{F}_t, t \geq 0\right\}, \widetilde{\mathbb{P}}\right)$. Denotatemos la dependencia de C del tiempo t por C_t y denotaremos como $\widetilde{\mathbb{E}}$ la esperanza bajo la medida martingala equivalente. Entonces, como $\widetilde{C}_t$ es martingala, en el intervalo $0 \leq s \leq t \leq T$, se satisface lo que sigue

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\widetilde{C}_t | \mathscr{F}_s\right] = \widetilde{C}_s. \tag{4.4.42}$$

Ahora bien, mediante la expresión que sigue podemos calcular la esperanza condicional bajo la medida martingala equivalente:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\widetilde{C}_T \middle| \mathscr{F}_s\right] = \frac{1}{\varphi\left(\lambda, t, W_t\right)} \mathbb{E}\left[\varphi\left(\lambda, T, W_T\right) \widetilde{C}_T \middle| \mathscr{F}_t\right]. \tag{4.4.43}$$

Consideremos ahora lo siguiente

$$\int_A \frac{1}{\varphi(\lambda, t, W_t)} \mathbb{E}\left[\varphi(\lambda, T, W_T)\, \widetilde{C}_T \middle| \mathscr{F}_t\right] d\widetilde{\mathbb{P}} = \int_A \widetilde{C}_T d\widetilde{\mathbb{P}}. \tag{4.4.44}$$

El paso que sigue es verificar que para $0 \leq s \leq t \leq T$ se cumple que $\widetilde{W_t}$ es martingala

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\widetilde{W_t} \middle| \mathscr{F}_s\right] = \widetilde{W}_s. \tag{4.4.45}$$

Primeramente se observa que el producto $\phi_t = \widetilde{W}_t \varphi_t$ es $\mathbb{P}-$martingala, recordando las siguientes dos igualdades:

$$d\widetilde{W}_t = \lambda_t + dW_t \quad \text{ y } \quad d\varphi_t = -\lambda \varphi_t dW_t. \tag{4.4.46}$$

Ahora, apliquemos el teorema de Bayes en lo que sigue:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\widetilde{W_t} \middle| \mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\varphi_t}{\varphi_s} \widetilde{W_t} \middle| \mathscr{F}_s\right] = \frac{1}{\varphi_s} \mathbb{E}\left[\varphi_t \widetilde{W_t} \middle| \mathscr{F}_s\right] = \widetilde{W}_s. \tag{4.4.47}$$

Por otro lado, como habíamos visto, $\widetilde{C}_t$ es una martingala bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$ (o $\widetilde{\mathbb{P}}-$martingala). Así que, aplicando la regla de Bayes recibimos

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\widetilde{C}_T \middle| \mathscr{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\varphi_T}{\varphi_t} \widetilde{C}_T \middle| \mathscr{F}_t\right] = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}\left[\varphi_T \widetilde{C}_T \middle| \mathscr{F}_t\right]. \tag{4.4.48}$$

Además, sabemos que

$$\widetilde{C}_t = \mathbb{E}\left[\frac{\varphi_T}{\varphi_t} \widetilde{C}_T \middle| \mathscr{F}_t\right] = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}\left[\varphi_T \widetilde{C}_T \middle| \mathscr{F}_t\right]. \tag{4.4.49}$$

Recordando cómo fue definido $\widetilde{C}_t$ se sigue que

$$C_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}\left[\frac{\varphi_T}{\varphi_t} \widetilde{C}_T \middle| \mathscr{F}_t\right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}\left[\varphi_{T-t} \operatorname{máx}\left[S_T - K, 0\right] \middle| \mathscr{F}_t\right]. \tag{4.4.50}$$

Finalmente, retomando el hecho de que la dinámica estocástica que conduce a S_t es $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S t dW_t$, con μ número real y σ un número positivo, la función de densidad de $S_T|S_t$ es, a saber

$$f^{(\mu)}_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right)-\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]^2\right\}. \tag{4.4.51}$$

De aquí se desprende que

$$C_t = e^{-r(T-t)}\int_K^{\infty} e^{-\lambda w_{T-t}-\frac{1}{2}\lambda^2(T-t)}(s-K)\, f^{(\mu)}_{S_T|S_t}(s|S_t)\, ds, \tag{4.4.52}$$

con

$$w_{T-t} = \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right)-\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma}. \tag{4.4.53}$$

Y haciendo una simplificación a la integral anterior, llegamos a la fórmula de Black-Scholes-Merton:

$$C(S_t,t,K,T,\sigma,\mu,r) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2). \tag{4.4.54}$$

Como comentario adicional sobre el tema de los numerarios, existen otros tipos de numerarios que se pueden emplear para la valuación de reclamaciones contingentes. El numerario a emplear dependerá del tipo de subyacente que se esté considerando, la dinámica estocástica que modela al subyacente, entre otros factores. A continuación listamos algunos ejemplos de numerarios, de acuerdo con Lesniewski [38].

- *Numerario Spot*

  El numerario spot M_t es una unidad de valor depositada en una cuenta bancaria que está invertido a una tasa instantánea libre de riesgo. Su valor al tiempo t es

$$M_T = \exp\left\{\int_0^T r(s)ds\right\} \tag{4.4.55}$$

- *Numerario Forward*

La medida $T-$forward es un bono cupón cero que madura al tiempo T. Su precio, al tiempo $t < T$ viene dado por

$$F_T(t) = P(t, T). \tag{4.4.56}$$

- *Numerario Anualidad*
  El numerario anualidad está relacionado con un swap. La anualidad paga una unidad monetaria en cada día de cupón del swap, cupón que es descontado acorde a la convención del conteo de días. Su valor presente al día t es, a saber

$$M_A(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P\left(t, T_K\right), \tag{4.4.57}$$

  donde las α_k representan la fracción de conteo de día aplicable de acuerdo a la convención, y los T_k son la fechas de pago del swap.

El numerario spot es justamente el numerario que empleamos en el desarrollo anterior, partiendo de una tasa libre de riesgo constante, esto es $r(t) = r$.
Los numerarios forward surgen al estar valuando instrumentos que están basados en forwards cuya maduración es en T.
Y los numerarios anualidad surgen en la valuación de swaptions.

Para establecer la conexión con la técnica del cambio de numerario y los métodos de valuación de CSO's, veremos los siguientes resultados que están alrededor del tema y que, en el caso de los derivados plain vanilla y en específico del modelo de Black-Scholes-Merton, son de fundamental importancia (de acuerdo con Ekstrand [21]).

Definición 4.4.1 (Medida Martingala Equivalente)**.** *Una medida martingala equivalente Q es una medida de probabilidad sobre el espacio $(\Omega, \mathscr{F})$ tales que satisfacen*

1. *Q_0 y Q son medidas equivalentes. Es decir, $Q_0(A) = 0$ si y sólamente si $Q(A) = 0$ para cada A elemento de la sigma-álgebra $\mathscr{F}$.*

2. *La derivada de Radon-Nikodym dQ/dQ_0 pertenece a $\mathscr{L}_2\left(\Omega, \mathscr{F}, Q_0\right)$.*

3. *El proceso del "precio del activo descontado"* $D(0,\cdot)S$ *es* $Q-$*martingala:* $\mathbb{E}\left[D(0,t)S_t^k\middle|\mathscr{F}_u\right] = D(0,u)S_u^k$ *para toda* $k = 0,1,\dots K$ *y para todo* $0 \leq u \leq t \leq T$ *y donde la esperanza es calculada bajo la medida* Q.

$D(t,T)$ *es un factor de descuento estocástico, cuyo valor es*

$$D(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}, \tag{4.4.58}$$

y S_t^k *representa el valor del* $k-$*ésimo instrumento financiero* S.

Teorema 4.4.2 (Teorema Fundamental de la Valuación bajo No Arbitraje)**.** *Un modelo de valuación está libre de arbitraje si y solamente si existe una medida martingala equivalente* Q.

Definición 4.4.2 (Reclamación Contingente)**.** *Una reclamación contingente es una variable aleatoria cuadrado-integrable y positiva en el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathscr{F}, Q_0)$. *Una reclamación contingente* H *es alcanzable si existe una inversión autofinanciable* ϕ *tal que* $V_T(\phi) = H$.
$V_t(\phi)$ *está definida como* $V_t(\phi) = \phi_t S_t = \sum_{k=0}^K \phi_t^k S_t^k$ *y representa una estrategia de inversión (trading).*
Tal ϕ *se dice que genera a* H *y* $\pi_t = V_t(\phi)$ *es el precio al tiempo* t *asociado con* H.

Proposición 4.4.2. *Supongamos que existe una medida martingala equivalente* Q *y sea* H *una reclamación contingente alcanzable. Entonces, para cada* $0 \leq t \leq T$ *existe un único precio* π_t *asociado a* H,

$$\pi_t = \mathbb{E}\left[D(t,T)H\middle|\mathscr{F}_t\right] \tag{4.4.59}$$

La técnica del cambio de numerario es posible aplicarla al modelo de valuación de Black-Scholes-Merton debido a que los postulados anteriores se cumplen: los supuestos de no arbitraje y neutralidad al riesgo rigen en la valuación, y el no arbitraje permite que exista una medida martingala equivalente que nos permite llegar al concepto de neutralidad al riesgo. Además, el subyacente es un *activo transaccionable (operable)*. Aquí se presenta una diferencia capital con respecto a esta técnica, ya que uno de los supuestos de los modelos de los CSO's es que el spread crediticio **no** es un activo transaccionable en los mercados financieros. Otra diferencia importante es que, a consecuencia del hecho de que los rendimientos no son ellos mismos precios de activos operables, los rendimientos no necesariamente son martingalas bajo alguna medida martingala equivalente. Y esto evidentemente aplica para los spreads de crédito.

No obstante lo anterior, $D(\tau)$, como se maneja en el teorema de separación, sería equivalente al numerario $T-$forward o medida $T-$forward. El parecido que tienen tanto el enfoque de cambio de numerario como el del teorema de separación (4.4.1) se da en el sentido que a continuación daremos.

El objetivo del artículo de Longstaff [40] es desarrollar expresiones cerradas para la valuación de opciones europeas sobre tasas de rendimiento, desarrollando una versión extendida del modelo de Cox, Ingersoll y Ross de estructura de tasas de interés sobre equilibrio general. Longstaff toma como base la tasa de rendimiento a la maduración al tiempo T, siendo dicha tasa el subyacente de las reclamaciones contingentes que considera.

A su vez, el modelo de Cox, Ingersoll y Ross [18] estudia la estructura de tasas de interés empleando un modelo de valuación de activos de equilibrio general intertemporal. Para la modelación de la dinámica estocástica de la tasa de interés, se basa en conceptos provenientes de la microeconomía como la función de utilidad, la riqueza de los agentes financieros, el estado de la tecnología, entre otros. Mediante estos conceptos y los supuestos que asumen, obtienen la dinámica que conduce a la tasa de interés,

$$dr = \kappa \ (\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW \tag{4.4.60}$$

con κ y θ positivos.

Dicha ecuación, que es conocida como *proceso de Cox, Ingersoll, Ross (CIR)*, presenta reversión a la media: la tasa de interés aleatoria es jalada hacia un valor a largo plazo θ conforme pasa el tiempo; κ determina a su vez la velocidad de dicho ajuste.

Entonces Longstaff [40], basándose en el modelo anterior, demuestra el teorema de separación (4.4.1).

En el caso de la técnica de cambio de numerario empleada en el modelo de Black-Scholes-Merton, se considera al numerario spot con tasa libre de riesgo constante, mientras que en el modelo de Longstaff y Schwartz se considera una dinámica estocástica para la tasa de interés, hecho que incide directamente en la estructura del factor $D(\tau)$. En ambas modelaciones el objetivo es extraer de la esperanza condicional, que contiene también la función valor intrínseco de la opción, el numerario spot que es un bono con descuento, de manera que logran simplificar la expresión anterior, que como mencionábamos es la fórmula que define a la reclamación contingente. Como en el caso de los CSO's la tasa de rendimiento no es un activo operable (o tradeable en anglicismos), la definición de medida martingala equivalente no es aplicable y la proposición 4.4.2 tampoco lo es, así que la técnica de cambio de numerario no se puede emplear. Empero, mediante el desarrollo de Longstaff se logra separar el "numerario" de la esperanza condicional al considerar el modelo de Cox, Ingersoll y Ross.

Regresando al modelo de Longstaff y Schwartz, empleando el teorema de separación a la fórmula del precio de la opción europea recibimos lo siguiente, a saber:

$$F_t = D(r,T)\mathbb{E}\left[\text{máx}\left(S_T - K, 0\right)|\mathscr{F}_t\right]. \tag{4.4.61}$$

La esperanza matemática anterior se toma respecto al proceso estocástico ajustado por riesgo para el spread Z. Dicha dinámica es como sigue:

$$dZ = \left[\alpha_Z - \beta_Z X - \frac{\rho_{dW_Z,dW_r}\sigma_Z\sigma_r}{\beta_r}\left(1 - e^{-\beta_r(T-t)}\right)\right]dt + \sigma_Z dW_Z. \tag{4.4.62}$$

Nuevamente, W_Z es un movimiento browniano estandarizado.

Cabe hacer notar que el que la dinámica anterior esté ajustada por riesgo está relacionada con lo que desarrollamos en la técnica del cambio de numerario, en específico con la definición de medida martingala equivalente y con el teorema de Girsanov, aunque en este caso no hablamos de la propiedad de martingala.

Consecuencia de la ecuación 4.4.62 es el siguiente

Lema 4.4.1. *La solución a la ecuación diferencial estocástica anterior implica que Z_T posee distribución normal con respecto a la ecuación diferencial,* *con media y varianza como siguen:*

$$\mu = e^{-\alpha_Z T} Z_0 + \frac{1}{\alpha_Z}\left(\alpha_r\beta_r - \frac{\rho_{dW_Z,dW_r}\sigma_Z\sigma_r}{\alpha_r}\right)\left(1 - e^{-\alpha_Z T}\right) + \frac{\rho_{dW_Z,dW_r}\sigma_Z\sigma_r}{\alpha_r\left(\alpha_Z + \alpha_r\right)}\left(1 - e^{-(\alpha_Z+\alpha_r)T}\right) \quad (4.4.63)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_Z^2\left(1 - e^{-2\alpha_Z T}\right)}{2\alpha_Z} \quad (4.4.64)$$

Si hacemos que $T \to \infty$, la media y la varianza convergen a valores constantes, y la distribución de Z_T converge a una distribución estacionaria de estado estable.

Estamos ahora preparados para establecer el siguiente teorema, que nos llevará a la fórmula de valuación que buscamos.

Teorema 4.4.3 (Valuación de los Credit Spread Options)**.** *Considérense las dinámicas estocásticas anteriores: la dinámica de la tasa de riesgo, ecuación 4.4.6, y la dinámica ajustada por riesgo del logaritmo del credit spread, ecuación 4.4.62.*
El precio de una opción europea de compra $C(Z, r, T)$, sobre el spread de crédito, es solución a la ecuación diferencial estocástica, cuyo valor es

$$C(Z, r, T) = D(r, T)\left[e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} N\left(d_1\right) - KN\left(d_2\right)\right], \quad (4.4.65)$$

donde $N(\cdot)$ representa a la función de distribución Normal estándar, $d_1 = \frac{-\ln K+\mu+\sigma^2}{\sigma}$ es la primera estandarización y $d_2 = d_1 - \sigma$ es la segunda estandarización.

Como una consecuencia del teorema anterior, proviene la fórmula de valuación de una opción europea de venta:

Corolario 4.4.1 (Paridad Put-Call)**.** *El precio de una opción europea de venta $P(Z, r, T)$ sobre un credit spread, viene dado por la siguiente ecuación.*

$$P(Z, r, T) = C(X, r, T) + D(r, T)\left(K - e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right). \quad (4.4.66)$$

En la siguiente sección que ahora principiamos, procedemos a analizar el modelo de Mougeot, en donde analizaremos las diferencias que hay entre éste y el modelo de Longstaff y Schwartz.

En los libros de Anson [2] y Blum [10] se pueden encontrar más detalles sobre el modelo de Longstaff y Schwartz. También se pueden encontrar otros elementos de valuación en Schönbucher [54].
Cabe hacer mención aquí que varios de los modelos de Longstaff y Schwartz son bastante socorridos en el ámbito financiero, entre ellos el modelo de credit spread options que acabamos de estudiar.

4.5. Modelo de tres factores de Nicolas Mougeot

4.5.1. Preámbulo

Con el fin de motivar la importancia de este modelo de valuación, veamos algo más sobre los métodos propuestos anteriormente, del cual el modelo de Longstaff y Schartz [41] que acabamos de analizar forma parte. Para estos efectos, nos basamos en Mougeot [45].

Desde el trabajo de Margrabe en 1978, se han perfilado dos líneas de investigación. Una corriente, que fue iniciada por el mismo Margarbe y que fue seguida por Ravindran, entre otros más, toman en cuenta el modelo de Black-Scholes y Merton, asumiendo que el spread proviene de la diferencia de dos activos negociables cuyo comportamiento es conducido por el movimiento Browniano geométrico, implicando que la distribución de cada activo es lognormal, y que la tasa libre de riesgo es constante. Dado que las tasas de rendimiento son activos no negociables, la hipótesis no se puede justificar para el caso de spreads de tasas de rendimiento. Por otro lado, estudios empíricos, como el de Longstaff y Schwartz [41], sugieren que el considerar procesos con reversión a la media es en general más sostenible que considerar al movimiento Browniano Geométrico. Esto se debe a la naturaleza de las tasas de rendimiento. Además, es difícil hacer el supuesto de que la tasa libre de riesgo es constante cuando la tasa con riesgo varía a lo largo del tiempo. La segunda línea de investigación fue principiada por Longstaff y Schwartz, en donde asumen que el spread es un activo no negociable y que la tasa libre de riesgo es estocástica, posíblemente correlacionada con el spread crediticio, tal y como analizamos a detalle en la sección anterior. No obstante, la valuación de Longstaff y Schwartz modela al spread de manera directa, sin tomar en consideración los dos componentes que forman a dicho spread.

El modelo de Nicolas Mougeot [45], que pertence a esta segunda línea, se centra en este detalle: la valuación modela cada parte del spread por separado.

Y la siguiente parte nos abre paso para fundamentar *la hipótesis secundaria de la tesis*, la cual es, a saber:

El modelo de 3 factores de Mougeot es más eficiente en términos de valuación que el modelo de Longstaff y Schwarz, por cuanto que los precios que arroja son más precisos que los del modelo de 2 factores.

Principios del modelo de Mougeot

- El spread crediticio está conformado por dos activos no operables.
- Los dos componentes del spread presentan reversión a la media.
- La tasa libre de riesgo presenta reversión a la media, es estocástica, y posiblemente está correlacionada con el credit spread.

Al desarrollar el modelo de Mougeot, analizaremos la justificación del por qué es adecuado modelar los componentes del spread por separado, en lugar de considerar al spread mismo.

Principiemos este tema tomando en cuenta un resultado que vincula el modelo que valúa a los CSO's mediante el spread mismo y el método que trabaja las dinámicas de los componentes del spread por separado.

Sean denotadas las dos tasas de rendimiento por X_t y Y_t respectivamente. Asumamos que las dinámicas estocásticas de los procesos vienen dados por sendos procesos de Ornstein-Uhlenbeck:

$$dX_t = \alpha_X\left(\beta_X - X_t\right)dt + \sigma_X dW_{X,t}. \tag{4.5.1}$$

$$dY_t = \alpha_X\left(\beta_Y - Y_t\right)dt + \sigma_Y dW_{Y,t}. \tag{4.5.2}$$

$W_{X,t}$ y $W_{Y,t}$ son dos movimientos Brownianos correlacionados con correlación $\rho_{X,Y}$ que viene dada por, a saber:

$$\rho_{X,Y}dt = dW_{X,t}dW_{Y,t}. \tag{4.5.3}$$

Los movimientos Brownianos $W_{X,t}$ y $W_{Y,t}$ están definidos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Sea dada la filtración $\{\mathscr{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ generada por los movimientos Brownianos $W_{X,t}$ y $W_{Y,t}$ y sea S el spread del rendimiento definido como $(X - Y)$.
Luego, se sigue que la dinámica de S es como sigue:

$$dS_t = \left[\alpha_X\beta_X - \alpha_Y\beta_Y - (\alpha_X X - \alpha_Y Y)\right]dt + \sigma_X dW_{X,t} - \sigma_Y dW_{Y,t} \tag{4.5.4}$$

A continuación consideremos la siguiente definición

Definición 4.5.1. *Sea Z_t la variable aleatoria definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ tal que cumple que:*

$$Z_t = \frac{\sigma_X W_{X,t} - \sigma_Y W_{Y,t}}{\sigma_S}, \tag{4.5.5}$$

con

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y}. \tag{4.5.6}$$

Resultado de la definición anterior es la siguiente

Proposición 4.5.1. *Z_t cumple las siguientes propiedades:*

- *Z_t es martingala,*
- *Z_t posee trayectorias continuas y*
- *$dZ_t dZ_t = dt$.*

Esto es, Z_t es un movimiento Browniano.

Demostración.

- En esta primera parte, para probar que el proceso Z_t es martingala, debemos verificar que se cumplen las propiedades que en el capítulo sobre Cálculo Estocástico comentamos, esto es,

  1. El proceso estocástico es adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}\}$ y cumple que $\mathbb{E}\,|Z_t| < \infty$.
  2. Para cada $s \leq t$, se satisface lo siguiente, $\mathbb{E}\left[Z_t|\mathscr{F}_s\right] = Z_s$ c.s.

  El postulado número uno es inmediato, debido a que

  $$Z_t = \sigma_S^{-1}\left(\sigma_X W_{X,t} - \sigma_Y W_{Y,t}\right) \tag{4.5.7}$$

  es variable aleatoria para cada t, al ser combinación lineal de variables aleatorias.
  Para la siguiente parte, observemos lo siguiente

  $$\begin{gathered}\mathbb{E}\left[Z_t|\mathscr{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\sigma_S^{-1}\left(\sigma_X W_{X,t} - \sigma_Y W_{Y,t}\right)|\mathscr{F}_s\right] = \\ \sigma_S^{-1}\mathbb{E}\left[\left(\sigma_X W_{X,t} - \sigma_Y W_{Y,t}\right)|\mathscr{F}_s\right] = \sigma_S^{-1}\left\{\sigma_X\mathbb{E}\left[W_{X,t}|\mathscr{F}_s\right] - \right. \\ \left. \sigma_Y\mathbb{E}\left[W_{Y,t}|\mathscr{F}_s\right]\right\} = \sigma_S^{-1}\left(\sigma_X W_{X,s} - \sigma_Y W_{Y,s}\right) = Z_s,\end{gathered} \tag{4.5.8}$$

ya que el movimiento Browniano es martingala.

- Para la sección 2, hay que probar que Z_t tiene trayectorias continuas, esto es, que para toda $\omega \in \Omega$, la asignación $t \to Z_t(\omega)$ es continua.

  Sea ω elemento de Ω. Entontes, la asignación $t \to Z_t(\omega)$ es equivalente a $t \to \sigma_S^{-1}\left(\sigma_X W_{X,t} - \sigma_Y W_{Y,t}\right)$. Esta asignación es continua, ya que el movimiento browniano es continuo c.s.

- Ahora demostremos lo plasmado en el tercer aserto. Para este paso aplicaremos la definición de Z_t.

$$\begin{aligned} dZ_t dZ_t = \left[\sigma_S^{-1}\left(\sigma_X W_{X,t} - \sigma_Y W_{Y,t}\right)\right] \times \left[\sigma_S^{-1}\left(\sigma_X W_{X,t} - \sigma_Y W_{Y,t}\right)\right] = \\ \sigma_S^{-2}\left[\sigma_X^2\left(dW_{X,t}\right)^2 - 2\sigma_X\sigma_Y dW_{X,t}dW_{Y,t} + \sigma_Y^2\left(dW_{Y,t}\right)^2\right] = \\ \sigma_S^{-2}\left[\sigma_X^2 dt + \sigma_Y^2 dt - 2\sigma_X\sigma_Y dW_{X,t}dW_{Y,t}\right] = \\ \sigma_S^{-2}\left[\left(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)dt - 2\sigma_X\sigma_Y\rho_{X,Y}dt\right] = dt. \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

  En los pasos anteriores hemos aplicado la tabla de Itô (cuadro 3.1), lo mencionado sobre la correlación entre las dinámicas $W_{X,t}$ y $W_{Y,t}$ (4.5.1 y 4.5.2) y la definición de σ_S (4.5.6).
  Por lo tanto, Z_t es movimiento Browniano.

□

Mediante los dos postulados pretéritos, la ecuación diferencial estocástica que conduce a S_t se puede simplificar de la siguiente forma:

$$dS_t = \left[\alpha_X\beta_X - \alpha_Y\beta_Y - \alpha_X S_t - \left(\alpha_X - \alpha_Y\right)Y\right]dt + \sigma_S dZ_t, \tag{4.5.10}$$

o

$$dS_t = \alpha_X\left[\beta_S - S_t - \left(\frac{\alpha_X - \alpha_Y}{\alpha_X}\right)Y\right]dt + \sigma_S dZ_t, \tag{4.5.11}$$

donde

$$\beta_S = \frac{\alpha_X\beta_X - \alpha_Y\beta_Y}{\alpha_X}. \tag{4.5.12}$$

De manera semejante, la ecuación anterior puede ser reescrita de forma tal que S dependa de X en lugar de Y. Si la velocidad de convergencia de las tasas de rendimiento es diferente, la variación infinitesimal de S, dS, estará vinculada de manera directa con el valor actual de Y. Esto está relacionado con el siguiente resultado.

Proposición 4.5.2. *Sean dadas las dinámicas estocásticas de X y de Y como antes. Entonces, el spread S definido como $(X - Y)$ es conducido por un proceso de Ornstein-Uhlenbeck si y sólo si $\alpha_X = \alpha_Y$.*

Demostración.
Para demostrar que la condición es necesaria, supóngamos que el proceso que conduce a S_t es de Ornstein-Uhlenbeck. Hay que demostrar entonces que $\alpha_X = \alpha_Y$.

Recordemos que habíamos mencionado que el proceso de Ornstein - Uhlenbeck (con reversión a la media) es de la forma $dX_t = (m - X_t)\, dt + \sigma dW_t$, para X_t proceso estocástico.

Se sigue que, por la hipótesis anterior, el proceso S_t es de esta manera. La ecuación que define a dS_t es

$$dS_t = \alpha_X \left[\beta_S - S_t - \left(\frac{\alpha_X - \alpha_Y}{\alpha_X} \right) Y \right] dt + \sigma_S dZ_t$$

con β_S definida como antes (4.5.12). Es así que el término Y no debe estar presente en la ecuación diferencial estocástica. Y esto solamente sucede si $\alpha_X = \alpha_Y$.

Veamos ahora la suficiencia. Tomemos por hipótesis que $\alpha_X = \alpha_Y$. De esta forma, el término Y desaparece de la ecuación que conduce la dinámica estocástica de S. Si tomamos a β_S como m, tenemos que la ecuación diferencial estocástica de S es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. □

De la proposición anterior observamos que si las velocidades de convergencia de X y de Y difieren, la dinámica del spread no puede ser explicada por el spread per se. Se requiere conocer una de las dos tasas de rendimiento. Por ende, se pierde información importante si se toma en cuenta sólo al spread.

De acuerdo con Mougeot [45], la mencionada proposición no puede ser extendida a una clase más larga de procesos estocásticos sin perder validez. En el caso del proceso de Cox, Ingersoll y Ross la igualdad es una condición necesaria, pero la forma de la raíz cuadrada del término de difusión implica que la condición no es suficiente. Recordemos que la ecuación CIR es de la forma: $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW$.
El impacto que esto tiene en términos de la valoración de reclamos contingentes sobre spreads de rendimiento debiera ser moderado por opciones sobre un horizonte de tiempo de largo plazo, dado que los rendimientos se esperan que converjan a su valor esperado de largo plazo, sea cual sea su nivel actual. Por lo tanto, el sólo conocimiento del nivel del spread no es suficiente para determinar su trayectoria futura. Luego, un modelo de opciones sobre spreads que se base únicamente en la dinámica del spread será menos preciso que un modelo que considere las dinámicas de cada uno de sus componentes, a menos de que las velocidades de convergencia sean iguales.

Concluimos, por lo anterior, que para hacer un estudio adecuado del spread crediticio es necesario considerar una dinámica estocástica por cada factor de éste y no una sola dinámica para el spread completo.

Es por la naturaleza de esta singularidad que surge el modelo de tres factores de Mougeot [45], mismo que comenzamos a analizar formalmente.

4.5.2. Modelo de Tres Factores

Para este método de valuación, se asumen sendas dinámicas para las dos tasas de rendimiento y la tasa libre de riesgo. Dichas ecuaciones diferenciales estocásticas son, a saber:

$$dX_t = \alpha_X \left(\beta_X - X_t\right) dt + \sigma_X dW_{X,t} \tag{4.5.13}$$

$$dY_t = \alpha_Y \left(\beta_Y - Y_t\right) dt + \sigma_Y dW_{Y,t} \tag{4.5.14}$$

$$dr_t = \alpha_r \left(\beta_r - r_t\right) dt + \sigma_r dW_{r,t} \tag{4.5.15}$$

Para los tres casos, las ecuaciones son procesos de Ornstein-Uhlenbeck. Además, $W_{X,t}$, $W_{Y,t}$, $W_{r,t}$ representan 3 movimientos brownianos correlacionados entre sí.

Sea $C(S,t,T) = C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T)$ el valor de una opción call sobre el spread de crédito $S = (X - Y)$ al tiempo t con tiempo de maduración T. Para este modelo, el precio strike K puede ser positivo, negativo o nulo.

Para obtener el resultado siguiente, aplicaremos las ideas que empleamos para construir la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton (esto tiene como base a Venegas [57] y a Ekstrand [21]).

Consideremos el intervalo de tiempo $[t, t+dt]$. Respecto al subyacente S_t, el valor del mismo cambia a $S_t + dS_t$ y la reclamación contingente $C(\cdot)$ se transforma en $C + dC$.
Aplicado el lema de Itô en su forma multidimensional (3.5.4) sobre $C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T)$ y recordando que la correlación entre los tres movimientos Brownianos viene dada por $\rho_{P,Q}dt = dW_{P,t}dW_{Q,t}$ con $P, Q \in \{X, Y, r\}$ recibimos

$$\begin{aligned} dC = {} & \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial X_t}\left[\alpha_X\left(\beta_X - X_t\right)\right]dW_{X,t} + \frac{\partial C}{\partial Y_t}\left[\alpha_Y\left(\beta_Y - Y_t\right)\right]dW_{Y,t} + \\ & \frac{\partial C}{\partial r_t}\left[\alpha_r\left(\beta_r - r_t\right)\right]dW_{r,t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial X_t^2}\sigma_X^2 dt + + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial Y_t^2}\sigma_Y^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r_t^2}\sigma_r^2 dt + \\ & \frac{\partial^2 C}{\partial X_t Y_t}\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y dt + \frac{\partial^2 C}{\partial X_t r_t}\rho_{X,r}\sigma_X\sigma_r dt + \frac{\partial^2 C}{\partial Y_t r_t}\rho_{Y,r}\sigma_Y\sigma_r dt. \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

Sea ahora Π un portafolios consistente en 4 opciones sobre spreads con diferentes tiempos de maduración. Dicho portafolios tiene entonces la siguiente estructura $\Pi = \sum_{k=1}^{4} C(\cdot, T_k)$, donde los T_k corresponden a las diferentes maduraciones. El cambio en el portafolios viene dado por
$d\Pi = \sum_{k=1}^{4} dC(\cdot, T_k)$.

Por otro lado, consideremos una cuenta bancaria en donde invertimos M_0 unidades monetarias en bonos que se vendan a descuento tales que sean libres de riesgo. Como habíamos visto para el caso de la técnica de cambio de numerario, el valor de la inversión al tiempo t es $M_t = M_0 e^{rt}$ y la dinámica de la misma está dada por la expresión $dM_t = d\left(M_0 e^{rt}\right) = M_0 e^{rt} \cdot r \cdot dt = rM_0 dt$. Si invertimos nuestro portafolios de opciones en este esquema de inversión, tenemos que el cambio del mismo es $d\Pi = \Pi r dt$.

Aplicando nuevamente el lema de Itô (3.5.4) sobre el portafolios, vemos que la dinámica estocástica que conduce $d\Pi$ es así:

$$
\begin{gathered}
d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial X_t}\left[\alpha_X\left(\beta_X - X_t\right)\right]dW_{X,t} + \frac{\partial C}{\partial Y_t}\left[\alpha_Y\left(\beta_Y - Y_t\right)\right]dW_{Y,t} + \\
\frac{\partial C}{\partial r_t}\left[\alpha_r\left(\beta_r - r_t\right)\right]dW_{r,t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial X_t^2}\sigma_X^2 dt + + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial Y_t^2}\sigma_Y^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r_t^2}\sigma_r^2 dt + \\
\frac{\partial^2 C}{\partial X_t Y_t}\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y dt + \frac{\partial^2 C}{\partial X_t r_t}\rho_{X,r}\sigma_X\sigma_r dt + \frac{\partial^2 C}{\partial Y_t r_t}\rho_{Y,r}\sigma_Y\sigma_r dt = Crdt. \quad (4.5.17)
\end{gathered}
$$

Es importante recalcar que nuestro portafolios, que consiste en 4 reclamaciones contingentes, es en sí una opción, y por ende podemos omitir la sumatoria de los 4 componentes para simplificar los cálculos.

Ahora, es necesario, como en el caso de las opciones plain vanilla, elminiar el riesgo de mercado y de crédito que en términos mátemáticos viene representado por $dW(t)$ (en el caso del modelo de Black-Scholes-Merton la fuente de incertidumbre $dW(t)$ representa al riesgo de mercado). Para lograr anular los términos $dW_{X,t}$, $dW_{Y,t}$ y $dW_{r,t}$ hay que ajustar los factores $[\alpha_X(\beta_X - X_t)]$, $[\alpha_Y(\beta_Y - Y_t)]$ y $[\alpha_r(\beta_r - r_t)]$.

Para tales efectos hay que recordar el concepto de la prima de riesgo, que es la compensación que recibe el inversionista por el riesgo que está asumiendo. Partiendo del cociente de Sharpe, que ya hemos explicado con anterioridad, la prima de riesgo viene dada por $\lambda\sigma = \mu - r$. Si a las tres expresiones que buscamos escalar les restamos la prima de riesgo, respecto a cada una de las tasas de rendimiento X_t, Y_t y r_t, logramos nuestro objetivo, ya que en sí el spread crediticio es la prima de riesgo, concepto que está ajustado precísamente por el riesgo (σ). Y por otro lado, hay que considerar que los términos α y β son los factores que hacen que los rendimientos que conducen a las tasas de rendimiento sean reversibles a la media.
Así, habiendo anulado el riesgo de mercado y de crédito de nuestro portafolios, si simplificamos la ecuación anterior y reordenamos los términos, recibimos la ecuación diferencial parcial que viene en el siguiente lema, mismo que, a partir de lo anterior, acabamos de demostrar.

Lema 4.5.1. *A partir de la construcción del portafolios anterior,*

$C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T)$ *satisface la ecuación diferencial parcial*

$$C_t + \left[\alpha_r\left(\beta_r - r_t\right) - \sigma_r\lambda_r\right]C_r + \left[\alpha_X\left(\beta_X - X_t\right) - \sigma_X\lambda_X\right]C_X +$$
$$\left[\alpha_Y\left(\beta_Y - Y_t\right) - \sigma_Y\lambda_Y\right]C_Y + \frac{1}{2}C_{rr}\sigma_r^2 + \frac{1}{2}C_{XX}\sigma_X^2 + \frac{1}{2}C_{YY}\sigma_Y^2 + C_{Xr}\rho_{X,r}\sigma_X\sigma_r$$
$$+C_{XY}\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y + C_{Yr}\rho_{Y,r}\sigma_Y\sigma_r - rC = 0 \qquad (4.5.18)$$

con condición en la frontera

$$C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) = \text{máx}\left(X_T - Y_T - K, 0\right). \qquad (4.5.19)$$

$\sigma_r\lambda_r$*,* $\sigma_X\lambda_X$*, y* $\sigma_Y\lambda_Y$ *son las primas de riesgo asociadas con las tres tasas de interés, que se asume son constantes.* K *es el valor strike de la reclamación contingente.*

Para terminar esta parte de nuestro desarrollo metodológico, hay que recordar que el imponer una condición en la frontera a una ecuación diferencial nos ayuda a que la misma tenga una única solución, si es que la tiene. En nuestro caso es así, y dicha solución es la fórmula de la reclamación contingente que estamos estudiando.

Ahora bien, por otra parte, en la sección cuatro del artículo de Cox, Ingersoll y Ross [18] se establece que cualquier reclamación contingente $C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T)$ que satisfaga la ecuación diferencial estocástica anterior, así como su condición en la frontera, tiene la siguiente estructura:

$$C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) = \widehat{\mathbb{E}}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\,\text{máx}\left(X_T - Y_T - K, 0\right)\right] \qquad (4.5.20)$$

El acento circunflejo puesto sobre el operador esperanza hace referencia a que se está trabajando con probabilidades ajustadas por riesgo. La ecuacíón anterior significa que el precio de una opción de compra es igual al valor esperado del valor intrínseco multiplicado por un factor de descuento, bajo una medida de probabilidad ajustada por riesgo.

Por otro lado, dada la correlación que existe entre el factor de descuento y el valor intrínseco, así como la correlación que se presenta entre las tasas r, X y Y, la ecuación no se puede resolver de manera directa fácilmente. Este es el mismo problema que encontramos en la ecuación de la reclamación contingente en el modelo de dos factores, hecho que nos llevó a contrastar el método del cambio de numerario con la técnica de Longstaff.

Así, aplicando el teorema de separación de Longstaff (4.4.1) en la ecuación anterior, obtenemos lo siguiente, a saber:

$$C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) = D\left(r_t, t, T\right) G\left(X_t, Y_t, K, t, T\right). \tag{4.5.21}$$

Dado que la tasa de interés libre de riesgo es conducida por un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, $D\left(r_t, t, T\right)$ es también un bono con descuento.
Por esto, la ecuación diferencial estocástica que rige al bono es, aplicando nuevamente el lema de Itô:

$$D_t + \left[\alpha_r\left(\beta_r - r_t\right) - \sigma_r\lambda_r\right] D_r + \frac{1}{2}D^2_{rr}\sigma^2_r - rD = 0. \tag{4.5.22}$$

Se sigue entonces que la expresión que define al bono con descuento es:

$$D\left(r_t, t, T\right) = He^{-r_t I}, \tag{4.5.23}$$

donde

$$I = \frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} \text{ y} \tag{4.5.24}$$

$$H = \exp\left\{\left[\beta_r + \frac{\sigma_r\lambda_r}{\alpha_r} - \frac{\sigma_r^2}{2\alpha_r}\right]\left(I - (T-t)\right) - \frac{\sigma_r^2 I^2}{4\alpha_r}\right\}. \tag{4.5.25}$$

Veamos ahora quién es $G\left(X_t, Y_t, K, t, T\right)$, que por el teorema de separación (4.4.1) sabemos que es una esperanza matemática sobre el valor intrínseco de la opción.

Tomemos en cuenta que la función $G(\cdot)$ no depende de la tasa libre de riesgo r_t. Por las ecuaciones diferenciales estocásticas de la reclamación contingente $C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T)$ y del "numerario" $D\left(r_t, t, T\right)$, podemos deducir que $G(\cdot)$ satisface la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{gathered} G_t + \left[\alpha_X\left(\beta_X - X_t\right) - \sigma_X\lambda_X - \rho_{r,X}\sigma_r\sigma_X I\right] G_X \\ + \left[\alpha_Y\left(\beta_Y - Y_t\right) - \sigma_Y\lambda_Y - \rho_{r,Y}\sigma_r\sigma_Y I\right] G_Y + \frac{1}{2}G_{rr}\sigma_r^2 + \frac{1}{2}G_{XX}\sigma_X^2 + \frac{1}{2}G_{YY}\sigma_Y^2 \\ + G_{Xr}\rho_{r,X}\sigma_r\sigma_X + G_{XY}\rho_{X,Y}\sigma_Y\sigma_X + G_{Yr}\rho_{r,Y}\sigma_r\sigma_Y = 0 \end{gathered} \tag{4.5.26}$$

con condición en la frontera

$$G\left(X_T, Y_T, K, T, T\right) = \frac{C(r_t, X_t, Y_t, K, T, T)}{D\left(r_t, T, T\right)} = \text{máx}\left[X_T - Y_T - K, 0\right]. \tag{4.5.27}$$

Para lo que sigue, consideremos los siguientes tres resultados provenientes de la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Estos resultados provienen de Oksendal [47] y Venegas [57].

Definición 4.5.2 (Difusión de Itô)**.** *La difusión de Itô (homogénea en el tiempo) es un proceso estocástico $X_t(\omega) = X(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ que satisface una ecuación estocástica de la forma*

$$dX_t = b\left(X_t\right)dt + \sigma\left(X_t\right)dW_t, \tag{4.5.28}$$

con $t \geq s$ y $X_s = x$.
W_t es un movimiento browniano $m-$dimensional y $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y
$\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ satisfacen las condiciones del teorema 3.7.1 (criterio para la unicidad de la solución a la ecuación diferencial estocástica).

Definición 4.5.3 (Generador de la difusión de Itô)**.** *Sea $\{X_t\}$ una difusión de Itô en $\mathbb{R}^n$. El generador (infinitesimal) A de la difusión X_t está definido como*

$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}^x\left[f\left(X_t\right)\right] - f(x)}{t}, \tag{4.5.29}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$. f es una función de Borel acotada tal que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
La x que aparece sobre el operador $\mathbb{E}$ hace referencia a que la esperanza es calculada respecto a la medida de probabilidad de X_t.

Teorema 4.5.1 (Teorema de Feynman-Kac)**.** *Sean dadas las funciones $f \in C_0^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $q \in C^2\left(\mathbb{R}^n\right)$. Supongamos que q está acotada inferiormente.*

1. *Sea $v(t,x)$ una función tal que satisface lo siguiente*

$$v(t,x) = \mathbb{E}^x\left[\exp\left\{-\int_0^t q\left(X_s\right)ds\right\}f\left(X_t\right)\right]. \tag{4.5.30}$$

Entonces lo siguiente es válido

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv, \tag{4.5.31}$$

para $t > 0$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$*;*

$$v(0,x) = f(x), \tag{4.5.32}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$*;* A *es el generador del proceso de difusión de Itô* X_t*.*

2. *Más aún, si* $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *está acotada en* $(K \times \mathbb{R}^n)$ *para cada subconjunto* K *de* $\mathbb{R}$*,* $K \subset \mathbb{R}$*, y* w *es solución de las últimas dos expresiones, entonces* $w(t,x) = v(t,x)$*. Esto significa también que* v *es única.*

Recordemos que la notación $f \in C^0(X)$ significa que la función f es de clase C cero, o sea que f es una función continua sobre el conjunto X; en el caso de la notación $f \in C^n(X)$ significa que f es una función con $n-$ésima derivada continua sobre el conjunto X. En este caso se dice que f es de clase C-n.

La expresión $f \in C_0^2$ significa que f es una función de clase C dos con soporte (dominio) compacto; la expresión $f \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ significa que la función f, $f(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es de clase C uno con respecto a $t \in \mathbb{R}$ y de clase C dos con respecto a $x \in \mathbb{R}^n$.

El teorema de Feynman-Kac establece que si una función v se puede representar mediante una esperanza matemática de la manera que indica la expresión, entonces dicha función es solución a su ecuación diferencial parcial con condición inicial dada. La segunda parte del teorema nos dice que si existe una función w que sea solución a la ecuación diferencial parcial con condición inicial, es igual a la función v, y lo más importante, tiene como representación a la esperanza $\mathbb{E}^x\left[\exp\left\{-\int_0^t q(X_s)\,ds\right\} f(X_t)\right]$. Y de esto se desprende la unicidad de la función.

Es relevante aclarar que el teorema de Feynman-Kac, aplicado al modelo de Black-Scholes-Merton, junto con el postulado de no arbitraje y la definición de medida martingala equivalente, permite también encontrar la fórmula para valuar reclamaciones contingentes, en este caso opciones.

Invocando el teorema de Feynman-Kac (4.5.1), y viendo que en nuestro caso la función q es la función idénticamente igual a cero, y la función $f(X_t)$ es igual a $\max[X_t - Y_t - K, 0]$, se sigue que la única solución a la ecuación diferencial parcial bajo la condición en la frontera dada es, a saber:

$$G(X_t, Y_t, K, t, T) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\max\left[X_t - Y_t - K, 0\right]\right]. \tag{4.5.33}$$

El operador $\widetilde{\mathbb{E}}$ representa la esperanza matemática bajo los siguientes procesos modificados de X_t y Y_t, que se generan como consecuencia de aplicar el teorema de Feynman-Kac:

$$\begin{aligned} dX_t = \alpha_X\left(\beta_X - \frac{\sigma_X\lambda_X}{\alpha_X} - \frac{\rho_{X,r}\sigma_X\sigma_r I}{\alpha_r} - X_t\right)dt + \sigma_X dW_{X,t} = \\ \alpha_X\left(\beta_X' - X_t\right)dt + \sigma_X dW_{X,t} \end{aligned} \tag{4.5.34}$$

$$\begin{aligned} dY_t = \alpha_Y\left(\beta_Y - \frac{\sigma_Y\lambda_Y}{\alpha_Y} - \frac{\rho_{Y,r}\sigma_Y\sigma_r I}{\alpha_r} - Y_t\right)dt + \sigma_Y dW_{Y,t} = \\ \alpha_Y\left(\beta_Y' - Y_t\right)dt + \sigma_Y dW_{Y,t} \end{aligned} \tag{4.5.35}$$

Para ambas ecuaciones, I es nuevamente igual a $\left(1 - e^{-\alpha_r(T-t)}\right)/\alpha_r$.

Observemos que aunque el término de difusión de cada ecuación diferencial estocástica no ha sido afectado por el cambio de medida de probabilidad, la media de largo plazo se corrige mediante dos factores que varían a lo largo del tiempo determinísticamente. El primero es:

$$\frac{\sigma_X\lambda_X}{\alpha_X}. \tag{4.5.36}$$

La razón de esto es porque la esperanza se calcula bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo.

El segundo factor que comentábamos es:

$$\frac{\rho_{X,r}\sigma_r\sigma_X I}{\alpha_r}. \tag{4.5.37}$$

Esta expresión resulta del ajuste de la correlación entre el valor intrínseco y el factor de descuento que lo multiplica.
Luego, el precio de una reclamación contingente es igual al valor descontado del valor intrínseco esperado bajo los procesos modificados, que toman en cuenta la correlación entre el payoff y el factor de descuento, así como a las primas de riesgo.

Veamos ahora el siguiente lema, que es implicación de esto último.

Lema 4.5.2. *Dadas las dinámicas estocásticas anteriores (4.5.34 y 4.5.35), X y Y tienen distribución normal con medias y varianzas como siguen, a saber:*

$$\mu_X = \mathbb{E}\left[X_T/X_t\right] = \beta_X' + \left(X_t - \beta_X'\right) e^{-\alpha_X(T-t)} \tag{4.5.38}$$

$$\mu_Y = \mathbb{E}\left[Y_T/Y_t\right] = \beta_Y' + \left(Y_t - \beta_Y'\right) e^{-\alpha_Y(T-t)} \tag{4.5.39}$$

$$\bar{\sigma}_X^2 = Var\left[X_T/X_t\right] = \left(1 - e^{-2\alpha_X(T-t)}\right)\left(\sigma_X/2\alpha_X\right) \tag{4.5.40}$$

$$\bar{\sigma}_Y^2 = Var\left[Y_T/Y_t\right] = \left(1 - e^{-2\alpha_Y(T-t)}\right)\left(\sigma_Y/2\alpha_Y\right) \tag{4.5.41}$$

Mediante los resultados pretéritos, estamos en condiciones de establecer y demostrar el siguiente teorema, que es el que nos proporciona las fórmulas de valuación de las opciónes de compra y de venta sobre spreads de crédito.

Teorema 4.5.2 (Valuación de los Credit Spread Options)**.** *Sean dadas las tres dinámicas estocásticas originales (4.5.13, 4.5.14 y 4.5.15). Entonces, el precio de una opción europea de compra $C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T)$ sobre el spread de crédito $S = (X - Y)$ con precio de ejercicio K viene dado por*

$$C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) = D\left(r_t, t, T\right)\left[\left(\mu_X - \mu_Y - K\right) N(d) + \frac{\sigma_{(X-Y)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2}\right], \tag{4.5.42}$$

donde

$$d = \frac{\mu_X - \mu_Y - K}{\sigma_{(X-Y)}} \tag{4.5.43}$$

es una estandarización,

$$\sigma_{(X-Y)} = \sqrt{\bar{\sigma}_X^2 + \bar{\sigma}_Y^2 - 2\rho_{X,Y}\bar{\sigma}_X^2\bar{\sigma}_Y^2} \tag{4.5.44}$$

y N es la función de distribución acumulativa normal estándar.
Además, el precio de una opción europea de venta tiene por fórmula la siguiente expresión

$$P(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) = D\left(r_t, t, T\right)\left[\left(K - \left(\mu_X - \mu_Y\right)\right)N(-d) + \frac{\sigma_{(X-Y)}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d^2}\right] \tag{4.5.45}$$

Demostración.

Como habíamos analizado (por la ecuación 4.5.21), el precio de una opción de compra viene dado por:

$$C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) = D\left(r_t, t, T\right)\widetilde{\mathbb{E}}\left[\text{máx}\left[X_t - Y_t - K, 0\right]\right], \tag{4.5.46}$$

donde dicha esperanza matemática está referenciada a los dos procesos modificados que describimos

$$d_{X_t} = \alpha_X\left(\beta_X' - X_t\right)dt + \sigma_X dW_{X,t} \tag{4.5.47}$$

$$d_{Y_t} = \alpha_Y\left(\beta_Y' - Y_t\right)dt + \sigma_Y dW_{Y,t} \tag{4.5.48}$$

Así, falta por calcular el segundo término de la ecuación de la reclamación contingente, que es

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\text{máx}\left[X_t - Y_t - K, 0\right]\right]. \tag{4.5.49}$$

Aplicando una propiedad de la esperanza matemática notemos que:

$$\begin{gathered} G\left(X_t, Y_t, K, t, T\right) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\text{máx}\left[X_t - Y_t - K, 0\right]\right] = \\ \widetilde{\mathbb{E}}_Y\left[\widetilde{\mathbb{E}}_X\left[\text{máx}\left[X_t - Y_t - K, 0\right]\middle| Y\right]\right] \end{gathered} \tag{4.5.50}$$

Analicemos ahora cómo es el argumento de $\widetilde{\mathbb{E}}_Y$:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_X\left[\text{máx}\left[X_t - Y_t - K, 0\right]\middle| Y\right] = \int_{Y+K}^{\infty}(X - Y - K)f\left(X|Y\right)dX, \tag{4.5.51}$$

donde

$$f\left(X|Y\right) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}} \exp\left\{-\frac{u - v\rho_{X,Y}}{2\left(1-\rho_{X,Y}^2\right)}\right\}. \tag{4.5.52}$$

u está definida como

$$u = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \tag{4.5.53}$$

y v como

$$v = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}. \tag{4.5.54}$$

Haciendo algunas simplificaciones, se sigue lo siguiente

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}_X\left[\text{máx}\left[X_t - Y_t - K, 0\right]\Big|Y\right] &= \left(\mu_X + \rho_{X,Y}v\sigma_X - Y - K\right)N\left(-d_1\right) + \\ &\frac{\sigma_X\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}d_1^2\right\}.\end{aligned} \tag{4.5.55}$$

d_1 es

$$d_1 = \frac{\frac{Y+K-\mu_X}{\sigma_X} - \rho_{X,Y}}{\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}. \tag{4.5.56}$$

De esta forma, la esperanza condicional que buscamos es

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbb{E}}\left[\text{máx}\left[X_t - Y_t - K, 0\right]\right] = \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\mu_X + \rho_{X,Y}v\sigma_X - Y - K\right)N\left(-d_1\right) + \frac{\sigma_X\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}d_1^2\right\}\right]f(Y)dY\end{aligned} \tag{4.5.57}$$

Para concluir con la demostración, apelaremos a la siguiente propiedad de la distribución normal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)N\left(a + bu\right)du = N\left(\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}\right), \tag{4.5.58}$$

donde a es un número real y b un número real no negativo.

Es así que por la propiedad anterior recibimos

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\max\left[X_t - Y_t - K, 0\right]\right] = \left(\mu_X - \mu_Y - K\right) N(d) + \frac{\sigma_{(X-Y)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2}. \quad (4.5.59)$$

con

$$d = \frac{\mu_X - \mu_Y - K}{\sigma_{(X-Y)}}. \quad (4.5.60)$$

Luego, el valor de una opción de compra viene dado por

$$\begin{aligned} C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) &= D\left(r_t, t, T\right)\left[\left(\mu_X - \mu_Y - K\right) N(d) + \frac{\sigma_{(X-Y)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2}\right] \\ &= He^{-r_t I}\left[\left(\mu_X - \mu_Y - K\right) N(d) + \frac{\sigma_{(X-Y)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2}\right]. \quad (4.5.61) \end{aligned}$$

Para encontrar la fórmula de valuación de una opción de venta, basta considerar que el valor intrínseco del derivado es

$$\max\left[K - \left(X_T - Y_T\right)\right] \quad (4.5.62)$$

y aplicar los pasos anteriores. □

A partir de este teorema, se desprenden dos consecuencias relevantes. Una es la paridad put-call, como la que se obtuvo en el modelo de Longstaff y Schwartz (corolario 4.4.1). La otra es la simetría put-call, cuya razón de ser se encuentra en la demostración de lo que allí se afirma. Cabe recordar que en este modelo de tres factores puede darse el caso de que el precio de ejercicio sea negativo o nulo.

Corolario 4.5.1 (Paridad Put-Call)**.** *La paridad Put-Call para las opciones sobre el spread crediticio es:*

$$\begin{aligned} P(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) - C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) = KD\left(r_t, t, T\right) - \\ D\left(r_t, t, T\right)\left(\mu_X - \mu_Y\right) \quad (4.5.63) \end{aligned}$$

Demostración.

Principiando por el lado izquierdo de la ecuación, se recibe que

$$\begin{aligned}
&P(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) - C(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) = \\
&D\left(r_t, t, T\right)\left[\left(K - \left(\mu_X - \mu_Y\right)\right) N(-d) + \frac{\sigma_{(X-Y)}}{\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{1}{2}d^2}\right] - \\
&D\left(r_t, t, T\right)\left[\left(\mu_X - \mu_Y - K\right) N(d) + \frac{\sigma_{(X-Y)}}{\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{1}{2}d^2}\right] = \\
&D\left(r_t, t, T\right)\left[\left(K - \left(\mu_X - \mu_Y\right)\right) N(-d) - \left(\mu_X - \mu_Y - K\right) N(d)\right].
\end{aligned} \tag{4.5.64}$$

Recordando que la distribución normal es una función simétrica tenemos:

$$N(-d) = \mathbb{P}(X \leq -d) = \mathbb{P}(X \geq d) = 1 - \mathbb{P}(X \leq d) = 1 - N(d). \tag{4.5.65}$$

Así,

$$\begin{aligned}
&D\left(r_t, t, T\right)\left[\left(K - \left(\mu_X - \mu_Y\right)\right)\left(1 - N(d)\right) - \left(\mu_X - \mu_Y - K\right) N(d)\right] = \\
&= D\left(r_t, t, T\right)\left[\left(K - \left(\mu_X - \mu_Y\right)\right) - N(d)\left(K - \left(\mu_X - \mu_Y\right)\right) - \right. \\
&\left. \left(-\left(K - \left(\mu_X - \mu_Y\right)\right)\right) N(d)\right] = \\
&KD\left(r_t, t, T\right) - D\left(r_t, t, T\right)\left(\mu_X - \mu_Y\right).
\end{aligned} \tag{4.5.66}$$

□

Corolario 4.5.2 (Simetría Put-Call)**.** *El valor de una opción de venta sobre un spread entre X y Y con precio strike K es igual al valor de una opción de compra sobre un spread entre Y y X con precio strike de $-K$. Matemáticamente esto se denota como sigue:*

$$P(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) = C(r_t, Y_t, X_t, -K, t, T). \tag{4.5.67}$$

Demostración.

Observemos que la siguiente igualdad es válida

$$\text{máx}\left[K - (X - Y), 0\right] = \text{máx}\left[(Y - X) - (-K), 0\right]. \tag{4.5.68}$$

Esto significa que el valor de una opción put que considera a un spread $X - Y$ con spread de ejercicio K es igual al valor de un call sobre un spread $Y - X$ con spread strike de $-K$. Por lo tanto,

$$P(r_t, X_t, Y_t, K, t, T) = C(r_t, Y_t, X_t, -K, t, T). \tag{4.5.69}$$

□

Sobre los dos corolarios anteriores, observemos lo siguiente (de acuerdo con Mougeot [45]):

- La paridad Put-Call obtenida difiere de la paridad del modelo de Black-Scholes-Merton. La fórmula que obtuvimos es más bien similar a la proveniente del modelo de dos factores de Longstaff y Schwartz (4.4.66), en donde la diferencia entre una opción call y una opción put con misma fecha de maduración T y mismo precio strike K depende del forward descontado del spread crediticio en lugar de su valor actual. Esto se debe a que los rendimientos son activos no operables.

- La simetría Put-Call es una relación simple, que es valedera para cualesquier opción sobre spreads, sin importar las hipótesis que se hagan sobre las dinámicas estocásticas. Esto se explica por la naturaleza misma de los spreads.

En la sección que sigue analizaremos algunas sensibilidades de los CSOs (griegas) a algunos parámetros del modelo, y haremos un contraste con lo que sucede en el caso de las opciones europeas plain vanilla. Concluiremos este capítulo haciendo una ejemplificación de los CSOs, tomando algunos bonos corporativos.

4.5.3. Griegas de los Credit Spread Options.

Comencemos esta parte haciendo algunas observaciones sobre el valor de las opciones de compra y de venta. Para esta sección, a menos que se especifique lo contrario, el desarrollo de las griegas se referirá al modelo de tres factores de Mougeot. Esta sección está basada en el artículo de Mougeot [45].

Con respecto al tiempo a la maduración de las opciones, en el caso de las opciones de compra, su valor puede llegar a ser menor que su payoff, y esto sucede inclusive cuando la opción está ligeramente dentro del dinero (ITM). La razón de que esto suceda viene dada por el hecho de que el spread crediticio es reversible a la media. Esto significa que, cuando el credit spread está por arriba del valor de la media a largo plazo, se espera que conforme pasa el tiempo el spread disminuya. Así, las opciones de compra ITM tienen probabilidad baja de permanecer en el dinero. Por otro lado, el arbitraje no es posible dado que las tasas de rendimiento no son activos operables (tradeable). Este hecho aplica tanto al modelo de dos factores de Longstaff y Schwartz como al modelo de tres factores de Mougeot.

Para el caso de las opciones europeas de compra plain vanilla, que el valor de la opción sea menor que su valor intrínseco no puede suceder. En el ártículo de Robert Merton *The Theory of Rational Option Pricing* [43], establece en el teorema uno que para los warrants sobre acciones comunes que no pagan dividendos sucede que

$$f(S,\tau;E) \geq \text{máx}\left[0, S - EP(\tau)\right], \tag{4.5.70}$$

donde f representa a una opción call, S es el subyacente, E es el precio de ejercicio, τ representa el tiempo a la maduración $(T-t)$ y $P(\tau)$ es un bono con probabilidad de incumplimiento nula que paga una unidad de valor monetario, τ años desde ahora. La desigualdad anterior significa que

$$f(S,\tau;E) \geq \text{máx}\left[0, S - E\right]. \tag{4.5.71}$$

Si la expresión anterior no se cumpliera, habría entonces oportunidades de arbitraje, hecho que no puede ocurrir debido a los supuestos de valuación neutral al riesgo y de no arbitraje que conforman al modelo de Black-Scholes-Merton.

El razonamiento anterior implica que para el caso de opciones plain vanilla, el valor de un call europeo no puede ser menor que su valor intrínseco. Esta propiedad no es válida en el caso de los CSO's debido a que los spreads no son activos operables y por el hecho de que la dinámica estocástica que conduce a los componentes del spread crediticio contienen un término de deriva con reversión a la media.

Por la reversión a la media que asumimos, si tuviéramos un spread mayor a su media de largo plazo, esperaríamos que dicho spread decrezca al pasar el tiempo. Así, una opción call en el dinero (ITM) tiene una probabilidad baja de permanecer dentro del dinero, tal y como comentamos líneas pretéritas.

Vega de los CSOs

En el modelo de Black-Scholes-Merton vega, que es como decíamos la derivada parcial de la opción con respecto a la volatilidad σ, siempre es positiva. En la valuación de los CSOs esto no sucede. La vega de una opción sobre spreads de crédito puede ser positiva o negativa. Esto sucede debido a que dos factores opuestos influyen en el valor de la opción. Tenemos, por un lado, que cuando la volatilidad aumenta, ceteris paribus, la probabilidad de que la opción termine en el dinero aumenta. Por otro lado, los procesos forward ajustados por riesgo de las tasas X y Y, con los cuales pudimos calcular $\mathbb{E}\ [\max[X_T - Y_T - K, 0]]$ dependen de sus desviaciones estándar. Consideremos por ejemplo el proceso ajustado por riesgo para Y:

$$dY_t = \alpha_Y \left(\beta_Y - \frac{\sigma_Y \lambda_Y}{\alpha_Y} - \frac{\rho_{Y,r}\sigma_Y\sigma_r I}{\alpha_r} - Y_t \right) dt + \sigma_Y dW_{Y,t} \tag{4.5.72}$$

El proceso forward ajustado por riesgo no sólo está ajustado al riesgo, sino también a la correlación entre el factor de descuento y al valor intrínseco. Esto lleva a que el valor esperado de Y, μ_y, dependa de la volatilidad de Y, tal y como observamos anteriormente.
El valor de μ es

$$\mu_Y = \mathbb{E}\left[Y_T/Y_t\right] = \beta_Y^{'} + \left(Y_t - \beta_Y^{'}\right) e^{-\alpha_Y(T-t)}, \tag{4.5.73}$$

y en la expresión que define a $\beta_Y^{'}$ se encuentra la volatilidad de Y.

Correlación entre X y Y.

Contrariamente a lo que sucede con la volatilidad, el impacto de la correlación entre las dos tasas de interés sobre el valor de una opción de compra es monótono, dado que el coeficiente de correlación $\rho_{X,Y}$ no influye en la esperanza condicional de las dos tasas, sino que sólo afecta a la desviación estándar del spread de crédito. Sea ξ la derivada de la opción call con respecto al coeficiente de correlación $\rho_{X,Y}$. Entonces, por la fórmula de las opciones de compra, ξ viene dado por, a saber:

$$\xi = \frac{\partial C\left(r_t, X_t, Y_t, K, t, T\right)}{\partial \rho_{X,Y}} = \frac{\partial C\left(r_t, X_t, Y_t, K, t, T\right)}{\partial \sigma_{(X-Y)}} \frac{\sigma_{(X-Y)}}{\partial \rho_{X,Y}} \tag{4.5.74}$$

Así,

$$\xi = B\left(r_t, t, T\right) \left\{ \frac{\exp -\frac{1}{2}d^2}{\sqrt{2\pi}} \left[d^2 \sigma_X \sigma_Y \left(\sigma_{(x-y)} - 1\right) - \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_{(x-y)}} \right] \right\} < 0. \tag{4.5.75}$$

Por lo tanto, el precio de un call es una función estríctamente decreciente del coeficiente de correlación entre las tasas X y Y. Veamos ahora lo que sucede si calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{X \to \infty} \xi = \lim_{X \to \infty} \left\{ d^2 \exp -\frac{1}{2} d^2 \right\} = 0 \tag{4.5.76}$$

Significando lo anterior que el efecto de la correlación decrece mientras el spread se incrementa.

El efecto de X sobre la opción de compra domina el impacto de la correlación para valores altos de X. Esto se debe a que la correlación está acotada entre -1 y 1, en particular por 1, mientras que para X no hay una cota superior, como en lo que hicimos en el cálculo del límite pretérito.

4.6. Ejemplos de valuación de CSO's.

Para culminar este capítulo, que corona la presente tesis, veremos un ejemplo de CSO aplicado a un bono corporativo. Tomaremos un bono de la firma Grupo Bursátil Mexicano. Y consideraremos como bono libre de incumplimiento a los bonos M del gobierno mexicano.
Y para lo que respecta a la tasa libre de riesgo, usaremos la tasa de los Certificados de la Tesorería (Cete). Respecto a los bonos libres de default y la tasa libre de riesgo, el tiempo a la maduración de los mismos es equivalente al de los bonos corporativos.

Los presentes análisis de casos consistirán en valuar CSO's de compra y de venta, así como una estrategia de cobertura con opciones. El método de valuación de las opciones que utilizaremos será el modelo de Mougeot.
Para proceder con estos objetivos, daremos a continuación algunas definiciones que necesitaremos en esta parte. Éstas están redactadas conforme a la página de internet del Banco de México, en la sección llamada Sistema Financiero [5]. En este escrito se explica la estructura que tiene el Sistema Financiero Mexicano.

Definición 4.6.1 (Certificado Bursátil)**.** *Los certificados bursátiles son instrumentos de deuda emitidos por la Bolsa Mexicana de Valores en la cual las empresas que cotizan en esta bolsa pueden determinar las características de estos bonos de acuerdo a sus necesidades, como el plazo de la deuda, el valor de redención, entre otras. Los colaterales para estos instrumentos pueden ser activos no productivos de las firmas, como las cuentas por cobrar.*

Definición 4.6.2 (Bono M)**.** *Es un instrumento de renta fija emitido por los Estados Unidos Mexicanos, que tiene un valor nominal de 100 pesos que se cotiza a precio. La tasa de interés que pagan los cupones de este bono es fija a lo largo de la vida del mismo, mientras que el rendimiento puede variar dependiendo de si el valor se conserva a su vencimiento o se vende antes de su maduración. Existen actualmente plazos de 3, 5 10 y 30 años para este bono aunque se puede emitir a cualquier plazo que sea múltiplo de 182 días. Si un bono se cotiza en unidades de inversión (UDIs), se le llama Udibono, y si la tasa de interés es revisable se le conoce como Bonde.*

Definición 4.6.3 (Certificado de la Tesorería (Cete))**.** *Son instrumentos emitidos por el Gobierno Federal de México, que tienen un valor nominal de*

10 pesos y son cotizados a descuento. Estos instrumentos pagan una tasa de rendimiento equivalente a la diferencia entre el valor nominal y el precio a descuento. Normalmente el plazo de los cetes es de 28, 91, 182 y 364 días. Empero los cetes pueden ser emitidos a cualquier plazo.

4.6.1. Caso de bonos de Grupo Bursátil Mexicano

Corporativo Grupo Bursátil Mexicano S.A.B. de C.V. es una firma que tiene más de 30 años de estar trabajando en el sector financiero, comenzando a cotizar en la Bolsa Mexicana de Valores en 1992. La empresa ofrece a los clientes asesoría y operativa en Administración de Inversiones.

El bono corporativo que analizaremos pertenece a la serie 10-2 y su emisión es del 26 de agosto de 2010; el mismo tiene un tiempo de maduración de dos años, el 23 de agosto de 2012.

Un aspecto importante a considerar para efectos de valuar nuestro derivado es la estimación de los parámetros de las tres ecuaciones diferenciales estocásticas que conducen al subyacente. Nos referimos a la estimación de la media de largo plazo β y la velocidad de reversión a la media α para cada una de las dinámicas de las 3 tasas de rendimiento. El método de estimación que emplearemos para este fin es el método de máxima verosimilitud. Esta parte está basada en Brigo y Mercurio [11].

Consideremos la ecuación de Vasicek

$$dr(t) = k\left[\theta - r(t)\right]dt + \sigma dW(t), \text{ con } r(0) = r_0. \tag{4.6.1}$$

Si aplicamos la técnica de cambio de numerario que comentamos en las secciones anteriores, en específico empleando el numerario de la cuenta bancaria o numerario spot y el numerario medida T-Forward, se recibe la siguiente ecuación

$$dr(t) = \left[k\theta - (k + \lambda\theta)\, r(t)\right]dt + \sigma dW^0(t), \text{ con } r(0) = r_0. \tag{4.6.2}$$

En este caso pasamos de emplear la medida de probabilidad Q a la medida Q_0. λ resulta ser el cociente de Sharpe o el precio de mercado del riesgo. La ecuación 4.6.2 puede ser reescrita tomando las constantes a y b adecuadas como sigue, a saber

$$dr(t) = \left[b - ar(t)\right]dt + \sigma dW^0(t). \tag{4.6.3}$$

Las siguientes funciones de los parámetros serán las que estimemos: $\beta := b/a$, $\alpha := e^{-a\delta}$ y $V^2 = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a\delta}\right)$. δ denota la magnitud del intervalo de tiempo de la serie de tiempo histórica de las tasas $r_0, r_1 \ldots, r_n$ disponible (normalmente se considera a δ como un día.)
Los estimadores de máxima verosimilitud para α, β y V^2 son

$$\widehat{\alpha} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{i=1}^{n} r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^{n} r_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} r_{i-1}\right)^2}, \tag{4.6.4}$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[r_i - \widehat{\alpha} r_{i-1}\right]}{n\left(1 - \widehat{\alpha}\right)}, \tag{4.6.5}$$

$$\widehat{V^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[r_i - \widehat{\alpha} r_{i-1} - \widehat{\beta}\left(1 - \widehat{\alpha}\right)\right]^2. \tag{4.6.6}$$

Consideremos que el precio de ejercicio del Credit Spread Option es de 0.0142, valor que pronosticamos es el adecuado, de acuerdo al comportamiento señalado por la empiria que tenemos. Sea X_t el rendimiento al tiempo t del bono de GBM y Y_t la tasa del bono M. El contrato se celebra el día 27 de abril de 2012, que tomaremos como el presente, y tiene un vencimiento de un mes, el día 28 de mayo, tras el cual al bono corporativo le faltará por madurar 86 días. La tasa libre de riesgo spot que empleamos es la vigente al momento del nacimiento de la opción, que es de 4.57 %. Las tasas X_t y Y_t son de 5.695001 % y 4.425001 % respectivamente.

Con respecto al bono corporativo, en la siguiente tabla se presentan los valores de los parámetros estimados mediante el citado método.

Como mencionábamos, el bono soberano que consideramos es el bono M. El bono que tomamos de referencia pertenece a la serie 150618, con un plazo de 5 años, madurando el 18 de junio de 2015.
A continuación se presenta una tabla con el estimado de los respectivos parámetros de este instrumento.

Y por el lado de la tasa libre de riesgo, consideremos a la tasa CETE con un plazo de 364 días. La estimación de los parámetros que contiene la dinámica estocástica de esta tasa es como sigue.

Cuadro 4.1: Parámetros del bono de GBM
Fuente: elaboración propia

Parámetro	Valor
α_X	0.037169
β_X	0.055492
σ_X	0.014369

Cuadro 4.2: Parámetros del bono M
Fuente: elaboración propia

Parámetro	Valor
α_Y	0.433915
β_Y	0.046256
σ_Y	0.024706

Cabe hacer mención que con respecto al bono M y los CETES empleados, se trató de que la duración de los instrumentos fuera lo más parecida posible al plazo del bono corporativo. No obstante que respecto al bono M habría sido más adecuado emplear una emisión de 3 años de plazo. Y en lo tocante a la tasa CETE, se tomó la emisión existente en el mercado financiero con mayor tiempo a la maduración.

Ahora bien, con respecto al precio de mercado del riesgo de cada uno de los instrumentos de renta fija, ésta se deriva del cociente de Sharpe, tomando la media histórica de la tasa en cuestión menos el valor de la tasa libre de riesgo spot, ya que es la que corresponde a la tasa que se considera para el derivado que vamos a operar.
Y sobre la correlación de entre las tasas de rendimiento, empleamos como estimación la fórmula clásica de correlación de Pearson.

En la tabla próxima presentamos los valores tanto de λ como de la correlación.

Cuadro 4.3: Parámetros de la tasa CETE
Fuente: elaboración propia

Parámetro	Valor
α_r	0.011891
β_r	0.046598
σ_r	0.021293

Cuadro 4.4: Parámetros de la prima de riesgo y la correlación
Fuente: elaboración propia

Parámetro	Valor
λ_X	0.009786
λ_Y	0.000477
λ_r	0.00094
ρ_{XY}	0.207798
ρ_{Xr}	0.275675
ρ_{Yr}	0.764266

Para calcular el valor de las opciones que estamos considerando se implementaron las fórmulas de valuación en un código M de Matlab. El desarrollo del código M se basa en los fundamentos de programación de Matlab de Báez y Cervantes [4].
Con la información que tenemos podemos calcular el valor de una opción call y una opción put; el precio de este último se determina apelando a la fórmula de la paridad Put-Call. Los resultados son los siguientes, a saber:

Supongamos que queremos invertir diez millones de pesos en el spread crediticio entre estos dos bonos. Los diez millones de pesos representan el valor nocional de nuestra posición. Por los valores históricos de los rendimientos del bono de GBM y el bono M se puede observar que en los pasados 26 días la magnitud del spread aumentó. Es por esto que decidimos tomar una posición larga en la opción, ya que suponemos que la tendencia de crecimiento del spread prevalecerá. Dado que el spread spot es de 0.0127 y el de ejercicio es de 0.0142, estamos comprando un call fuera del dinero.

Cuadro 4.5: Precios de los CSO's
Fuente: elaboración propia

Opción	Precio
Call	0.006986
Put	0.008464

Supongamos como otro ejemplo que compramos un put en este spread de crédito, ya que creemos que, al contrario del supuesto del ejercicio anterior, el spread crediticio se estrechará en un mes. Con esto tendríamos una opción de venta dentro del dinero. Es por esto que el valor de la opción put resultó más alto que el de la opción call.

Para efectos de poder ejemplificar de forma adecuada este caso práctico, tenemos disponible información de los rendimientos al momento en el que maduran las opciones. El spread al día 28 de mayo de 2012 es de 0.01422992. Esto significa que como este spread es mayor que el de ejercicio, se ejerce la opción de compra, mientras que la opción de venta expira sin valor.
Si suponemos ahora que vamos a invertir a un año el nocional sobre el spread de ejercicio, se obtendrían $10,142,000 pesos. Si no hubiésemos comprado la opción de compra, habríamos tenido el spread spot al 28 de mayo, con lo cual el valor de la posición a un año sería de $10,142,299.20 pesos. La diferencia es de $299.20. Esta cantidad es la que dejamos de ganar por buscar mitigar el riesgo de crédito que tiene el bono de GBM. No obstante que hasta este momento no hemos restado el costo que tiene el call.

Para ver el costo de la cobertura mediante la opción de compra, si dividimos el valor de la opción entre el spread de ejercicio, tenemos que el call representó el 49.1971 % del spread strike. Para haber entrado en esta posición, debimos de haber pagado $69,860 pesos. Así, el rendimiento neto a un año sería de $72,140.
Esto nos ejemplifica que el costo de administrar el riesgo contraparte fue bastante alto. En las conclusiones al presente trabajo ahondaremos un poco más a este respecto.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos hablado sobre la valuación de un tipo particular de derivado de crédito, las opciones de spread crediticio o CSO's, habiendo dado el preámbulo adecuado, tanto en lo tocante sobre finanzas, administración del riesgo y productos derivados se refiere, así como los fundamentos necesarios de cálculo estocástico, para el tratamiento teórico de la valuación de este producto derivado.

Tendremos en este capítulo una breve presentación sobre el volumen que tienen actualmente los instrumentos derivados a nivel mundial y también el de los CSO's, con el fin de ver el peso que tienen los mismos en el mercado financiero de derivados. Posteriormente daremos las conclusiones que sobre el estudio de las opciones de spread crediticio tenemos, presentando algunas alternativas de valuación y otros tipos de derivados que se pueden emplear para la administración de tasas de interés.

5.1. Situación actual del Mercado de Derivados

De acuerdo al seguimiento que el Bank for International Settlements (BIS) [6] da al mercado de derivados, en la figura siguiente (5.1) se muestra la historia desde 1998 hasta junio 2012 de la composición por tipo de instrumento derivado en el mercado OTC, tomando el cuenta el valor nocional de los mismos. La información viene presentada semestralmente.

Podemos apreciar que a lo largo del horizonte de tiempo los derivados que más peso tienen en este mercado son los Interest Rate Swaps (IRS), que en junio 2012 tuvieron una participación del 59.38 %. Mientras que el total de opciones operadas representaron en dicho semestre el 10.43 %. Y respecto al total de Credit Default Swaps (CDS), éstos fueron del 4.21 %. Sin considerar el total de derivados de tasa de interés, los tres instrumentos que acabamos de mencionar, junto con los forwards y swaps de tipo de cambio, son los productos más importantes en el mercado OTC. De hecho, respecto al mercado de derivados de crédito, los credit default swaps son los derivados de crédito con más trading.

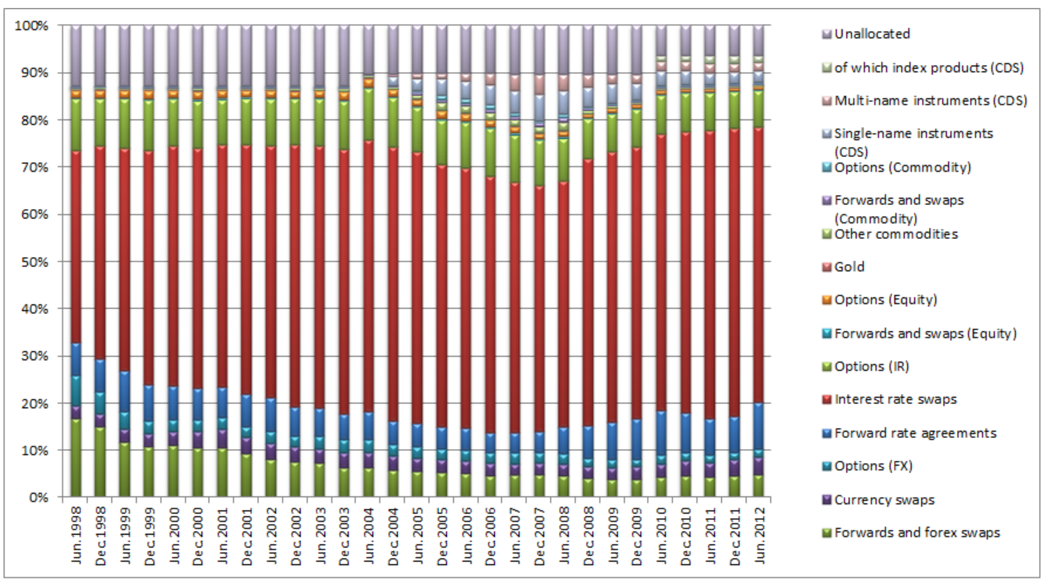

Figura 5.1: Valor nocional de Derivados OTC por tipo de instrumento
Fuente: Bank for International Settlements [6]

En la figura 5.2 se exhibe la distribución por tipo de derivado de crédito al 2006, de acuerdo a información publicada por la Asociación de Banqueros Británicos (British Bankers' Association) [7]. La importancia que tiene el mostrar información de ese año radica en que la mezcla de portafolios pertenece a un período pre-crisis.

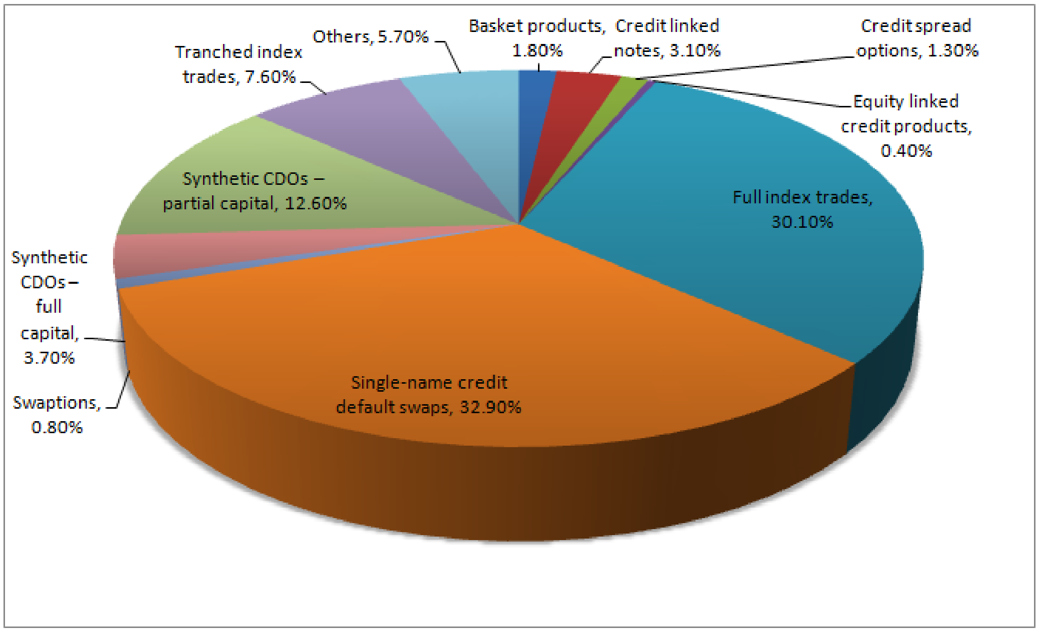

Figura 5.2: Distribución de Derivados de Crédito por clase de instrumento
Fuente: British Bankers' Association [7]

Aquí observamos que los single-name credit default swaps poseen el 32.90 % de la distribución y el total de CDS operados corresponde al 49.20 %. Y por el lado de las opciones de spread crediticio su contribución al total es de sólo el 1.30 %. En esta distribución se exhibe lo mencionado a la importancia de los CDS en el mercado financiero. Y más aún, por la crisis financiera actual, que principió a finales de 2007, la mayor parte de instrumentos derivados de crédito tuvieron una importante caída en su uso, siendo todavía los CDS el producto más operado. Actualmente alrededor del 90 % de los derivados de crédito son precísamente los CDS. Esta información proviene de la International Swaps and Derivatives Association (ISDA) [31].
La razón de esto reside precísamente en la crisis de crédito del 2007, ya que en gran parte fue generada por el mal manejo de los derivados conocidos como Collateralized Debt Obligations (CDO's) y de los subyacentes, que en este caso eran las hipotecas. Y esta situación provocó que se usaran mucho menos los diversos derivados de crédito. Los CSO's no fueron la excepción (de acuerdo con Hull [29]).
Los credit default swaps siguen siendo ampliamente utilizados porque re-

presentan una visión del mercado sobre el nivel de riesgo contraparte de los emisores de los valores subyacentes a estos contratos. De hecho el seguimiento de los índices asociados a los CDO's permiten predecir el comportamiento de los mercados financieros por cuanto son afectados por el riesgo contraparte. Ya en el inicio del capítulo 4 hicimos mención de esto, pero con el contexto actual que acabamos de dar se puede entender mejor este tema.

Para concluir esta parte, invitamos al lector que quiera ahondar en los detalles sobre la crisis financiera y su relación con los derivados de crédito en el libro de Hull Risk Management and Financial Institutions [29], cuya referencia aparece en la bibliografía de la presente tesis.

Procedemos ahora a hablar sobre las conclusiones que tenemos respecto al estudio de nuestro derivado, donde presentaremos la conexión que hay sobre la distribución actual de los derivados de crédito y los CSO's.

5.2. Conclusiones de la Tesis. Análisis y Alternativas.

En esta tesis hemos analizado dos alternativas de modelos para valuar opciones de spread crediticio, habiendo dado los fundamentos teóricos necesarios para su mejor comprensión.
En el capítulo de valuación vimos que hay una diferencia fundamental entre el modelo de Longstaff y Schwartz y el modelo de Mougeot, que es el de la modelación estocástica del spread crediticio. Mientras que en el primer modelo se tiene una sola dinámica estocástica para el spread de crédito, en el modelo de Mougeot se proponen sendas ecuaciones diferenciales estocásticas para los componentes de dicho spread. Analizamos las consecuencias de aplicar el modelo de dos factores de Longstaff y Schwartz, en el sentido de que modelar en una sola ecuación el spread crediticio conlleva a tener un precio incorrecto de los CSO's, por no tener en cuenta que las velocidades de convergencia de las tasas de rendimiento del spread pueden ser diferentes. Pero por otro lado vimos que la proposición 4.5.2 nos da las condiciones que se requieren para poder modelar el spread conjuntamente sin tener problemas de mispricing.

En nuestro ejemplo de CSO con el bono de Grupo Bursátil Mexicano y el bono M, los valores estimados por máxima verosimilitud para las velocidades de convergencia de las tasas fueron respectivamente de 0.037169 y 0.433915. Ello claramente exhibe que la regresión a la media de cada estructura de tasas de interés es muy diferente y que por lo tanto era mejor considerar el modelo de Mougeot, alternativa que fue la empleada para valuar las opciones del ejemplo.

Un aspecto relevante que se deriva del análisis de realizado a los CSO's es que pueden ser medios de financiamiento, inversión o cobertura altamente costosos. En nuestro ejemplo práctico, el valor de la opción call resultó ser del 49.19 % del spread crediticio de ejercicio. Este factor es un elemento importante a considerar cuando se busca obtener soluciones con un determinado tipo de derivado. Por ello, en el caso de los derivados de crédito y, en específico de los CSO's, se utilizan muy frecuentemente otros tipos de derivados de crédito como los credit default swaps, que básicamente ofrecen una forma de cobertura al riesgo de crédito. Pero hay que recordar que el riesgo de crédito se forma por dos componentes, el riesgo de contraparte y el riesgo de spread crediticio.
Como se había mencionado en la definición 4.1.1 de los CDS, estos instrumentos ofrecen cobertura ante el posible evento de incumplimiento por parte del emisor del valor subyacente. El comprador de la protección paga al vendedor de la protección lo que se conoce como el CDS spread, que es el monto total que el comprador paga anualmente como porcentaje del valor nocional del subyacente. Recordemos que los subyacentes de estos derivados son instrumentos de deuda. Dado que el CDS spread representa la compensación que el vendedor de la protección requiere para asumir el riesgo de contraparte (siendo por ende la prima de riesgo), este spread debe de ser aproximadamente igual al spread crediticio del mismo subyacente. Si la diferencia de los spreads es lo suficientemente alta, se presentan oportunidades de arbitraje. Es por este principio de que ambos spreads debieran ser aproximadamente iguales que se puede conseguir la cobertura del spread crediticio por medio de los CDS en lugar de las opciones de spread de crédito.
Baste mencionar que existen índices que se dedican a medir el CDS spread de una canasta de instrumentos de deuda. Los más conocidos son el CDX NA IG, que hace el seguimiento de un portafolios de 125 instrumentos con grado de inversión de firmas de Norteamérica, y el iTraxx Europe, que se basa en 125 compañías de europa con grado de inversión. Para ahondar más en el tema de los credit default swaps, el lector puede revisar el libro Risk

Management & Financial Institutions de Hull [29].

Otra alternativa al empleo de credit spread options comentada por el profesor John Hull al autor, son los credit default swap options, derivado que analizan en el artículo The Valuation of Credit Default Swap Options de Hull y White [30] (ver también Hull [28]).
En este artículo, los autores principian con la estimación de las probabilidades de default y las tasas de recuperación. Con estos parámetros ya estimados, se puede obtener el valor de las opciones de compra y de venta empleando las volatilidades del CDS spread, y de manera inversa, teniendo precios de mercado de las opciones, se pueden calcular las mencionadas volatidades, que son volatilidades implícitas. Para la valuación, parten de presentar el modelo de Jamshidian para swaptions Europeos. Con los argumentos de Jamshidian y haciendo los ajustes necesarios para valuar estas opciones, obtienen fórmulas cerradas para las reclamaciones contingentes. Estas expresiones son muy similares en forma a las de Black-Scholes y Merton.
Hull y White desarrollan este método ya que consideran que para ese momento, el 2002-2003, el mercado de CDS estaba bastante bien desarrollado, hecho que hemos visto que es muy cierto por el peso que tienen estos instrumentos actualmente, por lo que el tener opciones sobre CDS es muy conveniente tanto para los inversionistas, como para el sell side y el buy side de las empresas, y en general de los agentes financieros que busquen operar con CDS.

Habíamos mencionado al iniciar la sección 4.3, que los CSO's se pueden valuar también mediante árboles binomiales y mediante modelos GARCH. Respecto a la primera variante, en el artículo de Chi Chiu Chu y Yue Kuen Kwok [15], desarrollan un modelo de valoración en el que parten de considerar como la dinámica estocástica del credit spread y de la tasa libre de riesgo, considerando el esquema propuesto por Longstaff y Schwartz. Emplean en principio el modelo de Hull y White, ecuación que presenta reversión a la media y cuyo parámetro de media de largo plazo es dependiente del tiempo:

$$dr = [\theta(t) - ar]\, dt + \sigma_r dW_r(t) \tag{5.2.1}$$

Con el fin de generar la estructura temporal de tasas de interés, proponen emplear ahora como ecuación diferencial estocástica para el spread de crédito la ecuación de Black y Karasinski, y usan el modelo de Hull-White para la tasa libre de riesgo. El modelo de Black-Karasinski, en el que se considera el logaritmo natural de la tasa, es

$$dln(y) = [\psi(t) - c \cdot ln(y)]\, dt + \sigma_y dW_y(t) \tag{5.2.2}$$

Precísamente estos dos modelos permiten el modelar adecuadamente la estructura de tasas de interés.
Dado que por considerar estas dinámicas se dificulta el obtener fórmulas cerradas para valuar opciones, emplean el método propuesto por Hull y White de proseguir la valuación mediante árboles trinomiales que no se recombinan (lattices) y algoritmos numéricos

En el trabajo de Nabil Tahani [55] se desarrollan fórmulas cerradas para valuar CSOs, partiendo también del modelo de Longstaff y Schwarz. Emplean el modelo de especificación GARCH de Heston y Nandi. Las ecuaciones que emplean son, a saber:

$$\begin{aligned} X_{t+1} - X_t &= \mu + (\gamma - 1)\, X_t + \lambda h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1} z_{t+1}} \\ h_{t+1} &= \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 \left(z_t - \theta\sqrt{h_t}\right)^2 . \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Este modelo presenta también reversión a la media. X_t representa el logaritmo del credit spread, h_t es la varianza condicional de X_t conocida al tiempo $t-1$ y z_t es un proceso estocástico de variables aleatorias normales estandarizadas independientes. Los demás componentes son parámetros de las ecuaciones. Con este desarrollo, el autor busca explicar las características empíricas observadas por Longstaff y Schwarz, que en su momento estudiamos.

Damos un giro ahora para hacer comentarios sobre el contraste que hicimos entre el modelo de Black-Scholes y Merton tanto con el modelo de Longstaff y Schwartz como con el modelo de Mougeot. El Presentar dicho contraste, junto con la valuación misma de los CSO's representa el objetivo de esta tesis. Recordemos que el presente trabajo se centró en analizar el modelo de Mougeot.
El haber analizado conjuntamente el modelo de Black-Scholes-Merton y los modelos de valuación de CSOs aquí presentados, nos permitió poder entender de mejor manera el funcionamiento de varios argumentos que empleamos, como el teorema de Feyman-Kac, la aplicación del lema de Itô y el uso de manera inderecta del teorema del cambio de numerario. Y con esto se hizo patente la importancia histórica que tiene este modelo, que podemos considerar

como modelo fundador de la valaución cuantitativa de reclamaciones contingentes. También pudimos ver similitudes entre ambos procesos de valuación, en donde partimos de la obvia similitud al emplear ecuaciones diferenciales estocásticas, y similitudes como la aplicación de una técnica que nos permitió anular el factor de incertidumbre (estocástica) de los modelos: el riesgo de mercado en Black-Scholes-Merton y el riesgo de crédito y mercado en Mougeot sobre todo. Mientras que en el primero fue la cobertura delta el factor clave, la prima de riesgo o el precio de mercado del riesgo fue el elemento en el segundo. El tratamiento de la esperanza condicional a la filtración dada, fue el punto donde se marcó la diferencia entre ambas valuaciones. Dado que, como habíamos visto, las tasas de rendimiento per se no son activos operables, no se puede realizar trading con ellos, el teorema fundamental de valuación bajo no arbitraje resultó inaplicable para la valuación, ya que el no ser el subyacente un activo operable, no existe una medida martingala equivalente, hecho que sí sucede en el paradigma de Black-Scholes y Merton y que resulta de fundamental importancia, tal como analizamos. En esta sección del tratamiento se hizo evidente la necesidad de estudiar el modelo de Longstaff y Schwartz, ya que el teorema de separación que se aplica en este artículo, es absolutamente necesario para encontrar la fórmula cerrada para la valuación de reclamaciones contingentes, ya que no podemos apelar a una medida martingala equivalente que nos permitiera seguir con el método del modelo clásico. Y posteriormente nos encontramos con otra diferencia fundamental entre estos dos modelos, que para el caso del modelo de Mougeot el valor de las opciones call puede ser menor a su valor intrínseco. En el artículo Theory of Rational Option Pricing de Merton [43], él muestra que para el caso del modelo de Black-Scholes-Merton esto no puede ocurrir, porque de lo contrario se derían oportunidades de arbitraje. Y aquí nuevamente el que los rendimientos no son operables es la razón que conduce a que el teorema de Merton no se cumpla.

Este esquema de trabajo que presentamos nos permitió revisar artículos de relevancia histórica en cuanto a la valuación de reclamaciones contingentes, como el artículo seminal de Black y Scholes, el de Robert Merton, el de Vasicek, el de Cox, Ingersoll y Ross, y también el de Longstaff y Schwartz mismo, ya que como se ha hecho claro en esta sección, su investigación ha sido punto de partida para generar métodos más avanzados para la valuación de CSO's, como el artículo de Mougeot. También nos hizo adentrarnos a varios detalles del Cálculo Estocástico, adicionales a los necesarios para una primera revisión del modelo de Black-Scholes-Merton. Por el lado de la investigación sobre los aspectos prácticos que están alrededor de los CSO's, como la estructura del mercado de derivados y derivados de crédito, así como de las instituciones relacionadas con estos mercados, y también de los aspectos de cómo se trabaja con los productos de renta fija, empezando por su emisión y su serie, vimos que son temas muy importantes al momento de aplicar en la realidad los instrumentos que aquí modelamos. Estos puntos, junto con lo que hemos mencionado y vamos a revisar, representan la importancia y valor de este trabajo.

La realización del ejemplo práctico puso de manifiesto, por un lado, la importancia del uso de un modelo de tres factores, en lugar del de dos, pero por otro lado, exhibió que el modelo de Longstaff es más parsimonioso que el de Mougeot, ya que se requieren estimar menos parámetros para llevar a cabo la valuación. En esta sección recurrimos al empleo de un método de máxima veorsimilitud para la estimación de los parámetros de velocidad de reversión a la media, media de largo plazo y también para la volatilidad. En el caso de esta última, es común que se tome el valor del mercado de opciones. Pero para el caso de los CSO's, como son contratos que no son muy utilizamos, de acuerdo a lo que vimos al principio de este capítulo, recurrir a esta alternativa es muy complicada. Existesn otras técnicas que nos pueden ayudar a la estimación de los parámetros de la reversión a la media, como puede ser la estadística bayesiana o recurrir a técnicas como el filtro de Kalman. Y con respecto a la correlación entre los tres factores, empleamos la correlación de Pearson que, como sabemos, mide el grado de dependencia lineal entre las variables aleatorias. Es mejor instrumentar alternativas como las cópulas, para tener un manejo satisfactorio de la estructura de dependencia presente en la valuación. Empero, el llevar esto acabo implica que el proceso de valuación sea más complejo. Baste mencionar que para el modelo de Mougeot se deben de estimar 15 parámetros en total. Y con lo que respecta a los precios de mercado del riesgo, existen otros métodos más robustos para su estimación. En el caso de la alternativa de Mougeot, se pueden cambiar los 3 procesos por sendas dinámicas de Hull y White; el detalle de aplicar lo anterior es que el esquema de valuación requiere entonces un ajuste diario de los parámetros que dependen del tiempo.
Con todo esto queremos hacer énfasis en la búsqueda de un esquema que tenga parsimonia en cuanto al modelado de una entidad se refiere. Por esta característica deseada es que el modelo de Black-Scholes-Merton es tan am-

pliamente usado, ya que el único parámetro a estimar para la fórmula es la volatilidad, valor que se puede encontrar en el mercado de opciones. En los modelos previos al de Black-Scholes-Merton se presentaba la problemática de que era necesario la estimación de parámetros desconocidos, forma en la que comúnmente en la literatura se les llama, como la media del rendimiento del subyacente. Esta característica es la que presentan modelos como el de Louis Bachelier y el de Samuelson, que no obstante son muy relevantes en las finanzas cuantitativas.
De esta característica de parsimonia carecen en cierto sentido los dos modelos que estudiamos. Empero, consideramos que el modelo de Mougeot es realmente adecuado para la valuación de CSO's, por las razones que hemos manifestado en este capítulo.

Como conclusiones finales tenemos lo siguiente:

- Las Opciones de Spread Crediticio o CSO's, son instrumentos financieros derivados que nos permiten administrar el riesgo de crédito, en sus componentes de riesgo de spread crediticio en mayor medida, y el riesgo de contraparte en menor medida. Por lo que respecta a fines de especulación, estos instrumentos nos ayudar a invertir en una expectativa de comportamiento del subyacente, lo que en el argot financiero se le conoce como «echar un vistazo». Y también nos permite manejar en cierta medida el riesgo de mercado, en específico el riesgo de tasa de interés, elemento que hemos puesto en relieve a lo largo de presente trabajo y que ha sido uno de los enfoques del mismo.

- Resulta más adecuado el considerar por separado las dinámicas de cada componente del spread de crédito que el modelarlo mediante una ecuación. Ello implica que la hipótesis secundaria que planteamos es verdadera.
  No obstante que tenemos las condiciones que nos aseguran que es equivalente el empleo de cualquiera de los dos enfoques.

- El modelar por separado cada factor del spread nos sirve para trabajar de mejor forma la estructura de tasas de interés que se presenta en la práctica y por ende el poder obtener un precio más realista de los CSO's. Y además existen otras ecuaciones como las de Hull y White que nos permiten obtener una explicación más completa de dicha estructura.

- El contraste tanto del modelo de Longstaff y Schwartz y el de Mougeot con el modelo clásico de Black-Scholes-Merton nos ayudó a poder comprender de mejor forma el proceso para llegar al precio de las reclamaciones contingentes (de los CSO's), nos permitió exhibir sus similitudes y diferencias y también el poder evaluar sus ventajas y desventajas.
  Nuestro análisis nos permite concluir que la hipótesis planteada es verdadera.

- El proceso de valuación de los CSO's nos permitió revisar varios artículos clásicos de finanzas matemáticas, como el de Black-Scholes-Merton y el de Cox, Ingersoll y Ross, hecho que nos sirve de muy buena base para proseguir con el estudio de la valuación y operación de otros instrumentos financieros derivados.

- Existen otras alternativas diferentes a los CSO's como los CDS y las opciones sobre éstos, siendo los CDS los derivados de crédito más empleados en los mercados financieros. El conocer y entender a los CSO's nos aportan una perspectiva más amplia de la administración del spread de crédito.

- El enfoque actuarial que aquí hemos aplicado, razón por la cuál esta tesis se llama Valuación Actuarial de Credit Spread Options, nos ha permitido hilar la ecuación riesgo-rendimiento-oportunidad con el tema de la modelación matemática. Este aspecto es muy importante considerarlo debido a que se relaciona con los usos que se le dan a los instrumentos derivados.

- Y en general en cuanto a la «zoología» de derivados se refiere, existen bastantes derivados relacionados con las tasas de interés como los IRS, los caps y los floors y las opciones sobre éstos (captions y floortions), floaters, constant maturity swaps, notas estructuradas entre muchos otros más. Con este umbral se pueden satisfactoriamente lograr los objetivos de tener exposición a tasas de interés.
  El lector puede encontrar bastante información al respecto en el libro de Brigo y Mercurio [11].

Conminamos ampliamente al lector a profundizar en todos estos temas, son como hemos visto muy interesantes e importantes. Para este fin se puede iniciar revisando la bibliografía que se ha manejado en la presente tesis.

Y como comentario final, hablando en primera persona, considero que este trabajo ha mostrado que el conocimiento que como Actuario se adquiere en su formación, y en específico con el enfoque que se tiene en la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, se obtienen los elementos necesarios para poder realizar investigaciones y aprender sobre temas avanzados de diversos temas, tanto los que se refieren a la modelación de riesgos, como es el caso de esta tesis, como tópicos puramente matemáticos y tópicos de aplicación de las matemáticas.

Sirva esta tesis para arrojar luz sobre la capital oportunidad que tenemos los actuarios en ahondar en temas de modelación matemática y en su aplicación. Y en particular para que los actuarios se adentren más en temas de operación y análisis de Instrumentos Financieros Derivados.

Con esto damos por concluida esta tesis sobre Valuación Actuarial de CSO's. Espero, estimado lector, que este libro te permita aprender sobre los temas que aquí traté y te pueda servir de base para futuras investigaciones sobre Instrumentos Financieros Derivados y Administración del Riesgo. A tí, el mayor de los éxitos en la vida.

Apéndice A

Código de Matlab

En esta sección desplegamos el código de Matlab que se empleó para realizar los cálculos de las opciones call y put de nuestro derivado. Utilizamos para tal efecto el esquema de código M de esta paquetería.
El objetivo de este programa es recibir por parte del usuario todos los valores correspondientes a los parámetros requeridos por las fórmulas de las reclamaciones contingentes. Tras dar todos estos parámetros, el programa arroja el valor de la opción de compra y de venta, al realizar el cálculo de las operaciones que tiene codificadas. Y finalmente da de nuevo el valor de la opción put, esta vez obtenido apelando a la paridad Put-Call para los CSO's, a modo de comprobación.

```
%Este programa calcula el valor de una opción de
%compra, así como de una opción de venta europeas
%de Credit Spread Options, empleando el modelo de
%tres factores de Mougeot.

%Primeramente define los valores de los parámetros de
%la fórmula

alpha_x = input('Dame el valor de alfa sub X: \n');
beta_x = input('Dame el valor de beta sub X: \n');
sigma_x = input('Dame la volatilidad de X: \n');
x_t = input('Dame la tasa spot de X: \n');
```

```
lambda_x =  input('Dame el precio de mercado del riesgo
 de X: \n');
alpha_y = input('Dame el valor de alfa sub Y: \n');
beta_y = input('Dame el valor de beta sub Y: \n');
sigma_y = input('Dame la volatilidad de Y: \n');
y_t = input('Dame la tasa spot de Y: \n');
lambda_y =  input('Dame el precio de mercado del riesgo
 de Y: \n');
alpha_r = input('Dame el valor de alfa sub r: \n');
beta_r = input('Dame el valor de beta sub r: \n');
sigma_r = input('Dame la volatilidad de r: \n');
r_t = input('Dame la tasa spot de la tasa libre de
riesgo: \n');
lambda_r =  input('Dame el precio de mercado del riesgo
 de r: \n');
rho_xy= input('Dame la correlación entre las tasas X
y Y: \n');
rho_xr= input('Dame la correlación entre la tasas X
y la libre de riesgo: \n');
rho_yr= input('Dame la correlación entre la tasas Y
y la libre de riesgo: \n');
K = input('Dame el spread de ejercicio: \n');
t = input('Dame el valor de t: \n');
T = input('Dame el valor del vencimiento de la opción
 T: \n');
I = (1-exp(-alpha_r*(T-t)))/alpha_r;
H = exp((beta_r+(sigma_r*lambda_r)/alpha_r-sigma_r^2/
2*alpha_r)*(I-(T-t))-sigma_r^2*I^2/4*alpha_r);
D = H*exp(-r_t*I);
betap_x = beta_x-sigma_x*lambda_x/alpha_x-rho_xr*
sigma_x*sigma_r*I/alpha_r;
betap_y = beta_y-sigma_y*lambda_y/alpha_y-rho_yr*
sigma_y*sigma_r*I/alpha_r;
mu_x = betap_x+(x_t-betap_x)*exp(-alpha_x*(T-t));
mu_y = betap_y+(y_t-betap_y)*exp(-alpha_y*(T-t));
sigmasqb_x = (1-exp(-2*alpha_x*(T-t)))*(sigma_x/2
*alpha_x);
sigmasqb_y = (1-exp(-2*alpha_y*(T-t)))*(sigma_y/2*
```

```
alpha_y);
sigma_xmy = sqrt(sigmasqb_x+sigmasqb_y-2*rho_xy*
sigmasqb_x*sigmasqb_y);
d = (mu_x-mu_y-K)/sigma_xmy;
Call_Mougeot = D*((mu_x-mu_y-K)*normcdf(d,0,1)+
(sigma_xmy/sqrt(2*pi)))*exp(-0.5*d^2);
Put_Mougeot = D*((K-(mu_x-mu_y))*normcdf(-d,0,1)+
(sigma_xmy/sqrt(2*pi)))*exp(-0.5*d^2);
Put_MPCP = Call_Mougeot+K*D-D*(mu_x-mu_y);
fprintf('El valor de una opción de compra es \%f.\n',
 Call_Mougeot)
fprintf('El valor de una opción de venta es \%f.\n',
 Put_Mougeot)
fprintf('Si aplicamos la paridad Put-Call, podemos
 hallar el valor de la opción put por medio del\n')
fprintf('valor de la opción de compra. Para el Call
anterior, la opción de venta vale %f.\n', Put_MPCP)
```

Por lo que respecta a la estimación de parámetros, las fórmulas que se proporcionaron para este fin fueron implementadas directamente en Excel.

Bibliografía

[1] Alexander, Carol, *Market Risk Analysis*, Volúmenes I, II, III y IV, editorial John Wiley & Sons Ltd., Inglaterra, 2008.

[2] Anson, Mark J.P., Fabozzi, Frank J., Choudhry, Moorad, Chen, Ren-Raw, *Credit Derivatives, Instruments, Applications and Pricing*, Editorial John Wiley & Sons, Inc., colección Wiley Finance, Estados Unidos, 2004.

[3] Avellaneda, Marco, *Arbitraje con Fondos Listados ETF's*, Riskmathics Training Programme, Riskmathics, México, 2011.

[4] Báez, López, David, Cervantes, Villagómez, Ofelia, *Matlab con Aplicaciones a la Ingeniería, Física y Finanzas*, segunda edición, Alfaomega Grupo Editor, México, 2012.

[5] Banco de México, *Sistema Financiero*, sección de la página internet del Banco de México. México 2012.

[6] Bank for International Settlements, *Amounts outstanding of over-the-counter (OTC) derivatives by risk category and instrument*, publicación del BIS, Semiannual OTC derivatives statistics at end-June 2012, Basilea, Suiza, 2012.

[7] Barrett, Ross, Ewan, John, *BBA Credit Derivatives Report 2006*, British Bankers' Associtiation BBA, Londres 2006.

[8] Bielecki, Tomasz, Rutkowski, Marek, *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Editorial Springer, colección Springer Finance, Alemania, 2002.

[9] Black, Fischer, Scholes, Myron, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, the Journal of Political Economy. Vol. 81, tema 3, Estados Unidos, 1973.

[10] Blum, Christian, Overbeck, Ludger, Wagner, Christoph. *An introduction to Credit Risk Modeling*, Editorial Chapman & Hall/CRC, Financial Mathematics Series, Estados Unidos, 2003.

[11] Brigo, Damiano, Mercurio, Fabio, *Interest Rate Models - Theory and Practice*, with Smile, Inflation & Credit, editorial Springer, Colección Springer Finance, Alemania, 2006.

[12] Cerrato, Mario, *The Mathematics of Derivatives Securities with Applications in Matlab*, colección Wiley Finance, editorial John Wiley & Sons, Inglaterra, 2012.

[13] Chacko, George, Das, Sanjiv, *Pricing Interest Rate Derivatives: a General Approach*, artículo de investigación, Universidad de Harvard, Estados Unidos, 1999.

[14] Chaplin, Geoff, *Credit Derivatives*, Risk Management, Trading & Investing, editorial John Wiley & Sons Ltd., Inglaterra, 2005.

[15] Chu, Chi Chiu, Kwok, Yue Kuen, *No-Arbitraje Approach to Pricing Credit Spread Derivatives*, the Journal of Derivatives, 2003.

[16] Collin-Dufresne, Pierre, Goldstein, Robert S., Martin, Spencer, *The Determinants of Credit Spread Changes*, The Journal of Finance, Vol. 56, No. 6, Estados Unidos, 2001.

[17] Cossin, Didier, Pirotte, Hugues, *Advanced Credit Risk Analysis*, editorial John Wiley & Sons Ltd., colección Wiley Series in Financial Engineering, 2001.

[18] Cox, John C., Ingersoll, Jonathan E. Jr., Ross, Stephen A., *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica Journal, Vol. 53, tema 2, Estados Unidos, 1985.

[19] De Lara Haro, Alfonso, *Medición y Control de Riesgos Financieros*, incluye riesgo de mercado y de crédito, tercera edición, editorial Limusa, México, 2009.

[20] De Lara Haro, Alfonso, *Productos derivados financieros*, instrumentos, valuación y cobertura de riesgos, editorial Limusa, México, 2010.

[21] Ekstrand, Christian, *Financial Derivatives Modeling*, editorial Springer, Alemania, 2011.

[22] Fabozzi, Frank J., *Bond Markets, Analysis and Strategies*, cuarta edición, editorial Prentice Hall, Estados Unidos, 2000.

[23] Feller, William, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, editorial John Wiley & Sons Inc., volúmenes I y II, tercera y primera ediciones respectivamente, Estados Unidos, 1968 y 1970.

[24] Finnerty, John D., *The PricewaterhouseCoopers Credit Derivatives Primer*, Financial Advisory Services, PricewaterhouseCoopers, Estados Unidos.

[25] Haug, Espen Gaarder, *The Collector: Know your Weapon*, partes 1 y 2, revista Wilmott, Estados Unidos, 2003.

[26] Hernandez-Lerma, Onésimo, *Probabilidad y Procesos Estocásticos*, notas de clase, México, 2010.

[27] Hull, John, *Derivatives & Credit Risk*, Seminario organizado por Riskmathics, Riskmathics, México, 2012.

[28] Hull, John C., *Options, Futures and Other Derivatives*, sexta edición, Editorial Prentice Hall, Estados Unidos, 2006.

[29] Hull, John C., *Risk Management and Financial Institutions*, tercera edición, editorial John Wiley & Sons Inc., colección Wiley Finance, Estados Unidos, 2012.

[30] Hull, John, White, Alan, *The Valuation of Credit Default Swap Options*, Joseph L. Rotman School of Management, Universidad de Toronto, Toronto, Canadá, 2003.

[31] International Swaps and Derivatives Assotiation, *OTC Derivatives Market Analysis, Mid-Year 2012*, ISDA, Nueva York, 2012.

[32] Izquierdo, Abraham, *Riesgo de Mercado, Stress & Back Testing*, Riskmathics Training Programme, Riskmathics, México, 2012.

[33] Jorion, Philippe, *Financial Risk Manager Handbook*, FRM part I/ part II, sexta edición, colección Wiley Finance, editorial John Wiley & Sons, Estados Unidos, 2011.

[34] Kallenberg, Olav, *Foundations of Modern Probability*, Editorial Springer, colección Probability and its Applications, Estados Unidos, 1997.

[35] Krishnan C. N. V., Rithcken, P. H., Thomson, J. B., *On Credit Spread Slopes and Predicting Bank Risk*, Federal reserve Bank of Cleveland, working paper no. 0314, Estados Unidos, 2004.

[36] Kuo, Hui-Hsiung, *Introduction to Stochastic Integration*, Editorial Springer, Colección Universitext, Estados Unidos, 2006.

[37] Lefebvre, Mario, *Applied Stochastic Processes*, Editorial Springer, Canadá, 2007.

[38] Lesniewski, Andrew, *3. Girsanov, numeraires, and all that*, notas de clase, Universidad de Nueva York Stern, Estados Unidos, 2008.

[39] Longstaff, Francis A., Schwartz, Eduardo S., *A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt*, The Journal of Finance, Vol. 50, No. 3, Estados Unidos, 1995.

[40] Longstaff, Francis A., *The Valuation of Options on Yields*, Journal of Financial Economics, Vol. 26 Estados Unidos, 1990.

[41] Longstaff, Francis A., Schwartz, Eduardo S., *Valuing Credit Derivatives*, Journal of Fixed Income, Vol. 5, No. 1, Estados Unidos, 1995.

[42] McDonald, Robert L., *Derivatives Markets*, segunda y tercera ediciones, editorial Addison Wesley, Estados Unidos, 2006 y 2012.

[43] Merton, Robert, *Theory of Rational Option Pricing*, the Bell Journal of Economics and Management Sciencie, Vol. 4, No.1, Estados Unidos, 1973.

[44] Mexder, *Página Web de Mexder*, portal de internet de Mexder (http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX), Mexder, Integrante del Grupo Bolsa Mexicana de Valores, México, 2013.

[45] Mougeot, Nicolas, *Credit Spread Specification and the Pricing of Spread Options*, FAME Research Paper Series from International Center for Financial Asset Management and Engineering, FAME y el Institute of Banking and Financial Management, Ecole des HEC, Francia, 2000.

[46] Neftci, Salih, *Principles of Financial Engineering*, Academic Press Advanced Finance Series, Academic Press-Elsevier, Inglaterra, 2008.

[47] Oksendal, Bernt, *Stochastic Differential Equations*, an Introduction with Applications, sexta edición, Editorial Springer-Verlag, Noruega, 2003.

[48] Pérez, Pérez, Cid Omar, *Notas de clase. Riesgo de liquidez, operacional, sistémico y contagio*, Notas de clase de Administración del Riesgo, FES Acatlán, 2011.

[49] Peña, Velázquez, José Enrique, *Notas de Clase de Administración General para Actuarios*, notas del curso de Administración General, FES Acatlán, México, 2009.

[50] Rincón, Luis, *Curso Intermedio de Probabilidad*, editorial Las Prensas de Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2007.

[51] Rueda, Arturo, *Para Entender la Bolsa. Financiamiento e Inversión en el Mercado de Valores*, segunda edición, Editorial Cengage Learning, México, 2005.

[52] Samuels, Mayra L., *Statistical Reversion Toward the Mean: more universal than regression toward the mean*, the American Statistician, volumen 45, número 4, artículo de la The American Statistical Association, noviembre 1991.

[53] Schmid, Bernd, *Credit Risk Pricing Models*, theory and practice, segunda edición, colección Springer Finance, editorial Springer Verlag, Alemania, 2004.

[54] Schönbucher, Philipp, J., *Credit Derivatives Pricing Models*, models, pricing and Implementation, colección Wiley Finance, John Wiley & Sons, Inglaterra, 2003.

[55] Tahani, Nabil *Credit Spread Option Valuation under GARCH*, working paper, École des Hautes Études Commerciales (HEC) Montréal, Canadá, 2000.

[56] Vasicek, Oldrich *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics, Vol. 5, tema 2, Estados Unidos, 1977.

[57] Venegas Martínez, Francisco, *Riesgos financieros y económicos*, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, segunda edición, Cengage Learning editores, México, 2008.