



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS
OSCILACIONES DE NEUTRINOS Y
ANTINEUTRINOS EN MATERIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
JORGE ANTONIO MORALES VALDÉS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JUAN CARLOS D'OLIVO SAEZ



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.Datos del alumno	1.Datos del alumno
Apellido paterno	Morales
Apellido materno	Valdés
Teléfono	56 19 56 48
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Física
Número de cuenta	306030192
2.Datos del tutor	2.Datos del tutor
Grado	Doctor
Nombres	Juan Carlos
Apellido paterno	D´Olivo
Apellido materno	Saez
3.Datos del sinodal 1	3.Datos del sinodal 1
Grado	Doctora
Nombre	Gabriela
Apellido paterno	Murguía
Apellido materno	Romero
4.Datos del sinodal 2	4.Datos del sinodal 2
Grado	Doctor
Nombre	Ramón
Apellido paterno	López
Apellido materno	Peña
5.Datos del sinodal 3	5.Datos del sinodal 3
Grado	Doctor
Nombre	Miguel Angel
Apellido paterno	Pérez
Apellido materno	Angón
6.Datos del sinodal 4	6.Datos del sinodal 4
Grado	Doctora
Nombre	Myriam
Apellido paterno	Mondragón
Apellido materno	Ceballos

7.Datos del trabajo escrito
Título

Número de páginas
Año

7.Datos del trabajo escrito
Estudio Comparativo de las Oscila-
ciones de Neutrinos y Antineutrinos
en Materia
70
2013

Índice general

Introducción	7
1. Oscilaciones de neutrinos.	11
1.1. Antecedentes.	11
1.2. Oscilaciones en el vacío.	12
1.3. Neutrinos y ecuación de evolución en materia.	15
1.3.1. Ecuación de segundo orden.	18
1.4. Evolución adiabática.	19
2. Probabilidades de supervivencia y de transición.	25
2.1. El operador de evolución.	25
2.2. Probabilidad de supervivencia.	26
2.3. Probabilidad de transición.	28
3. Antineutrinos.	33
3.1. Antineutrinos y ecuaciones de evolución en materia.	33
3.2. Conexión entre neutrinos y antineutrinos.	36
4. Soluciones exactas.	39
4.1. Potencial exponencial	40
4.1.1. Soluciones para ψ_μ y $\bar{\psi}_\mu$	40
4.1.2. Soluciones para ϕ_1 y $\bar{\phi}_2$	43
4.1.3. Desarrollo asintótico y probabilidades de cruzamiento.	46
4.2. Potencial de Coulomb	53
4.2.1. Soluciones para ψ_μ y $\bar{\psi}_\mu$	53
4.2.2. Soluciones para ϕ_1 y $\bar{\phi}_2$	56
4.2.3. Desarrollo asintótico y probabilidades de cruzamiento.	57

Conclusiones	61
Apéndice.	62
A.	63
A.1. Parámetros de la matriz de mezcla	63
A.2. Operador de evolución no adiabático.	64
A.3. Desarrollo asintótico de la función hipergeométrica confluyente.	67
A.4. Propiedades de la función $\Gamma(x)$	68
Bibliografía	69

Introducción.

Las oscilaciones de neutrinos se refieren a transformaciones periódicas entre los diferentes sabores de neutrinos: neutrino del electrón ν_e , neutrino del muón ν_μ y neutrino del tauón ν_τ . El concepto de oscilación es introducido en 1958 por B. Pontecorvo, para transiciones neutrino/antineutrino del electrón. Poco después del descubrimiento del neutrino del muón, Maki, Nakagawa y Sakata sugieren la posibilidad de transiciones de sabor de los neutrinos. Por otro lado, a mediados de los años 60's se observó que el flujo de neutrinos ν_e provenientes del Sol que era detectado en la Tierra, no coincidía con el flujo que se predecía con la teoría existente. Durante años, diversos experimentos realizados en diferentes laboratorios confirmaron un déficit de neutrinos en dicho flujo. Las primeras respuestas al problema aparecen en 1978 cuando L. Wolfenstein descubre que los neutrinos, al propagarse en materia, están sujetos a un potencial debido a la interacción elástica con las partículas del medio. Esta idea repercutió en el trabajo de S.P. Mikheyev y A.YU. Smirnov de 1985, pues ellos a su vez descubrieron que si los neutrinos se propagan en un medio con densidad variable, la probabilidad de una transición de sabor puede aumentar sensiblemente. El efecto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW) esta basado en los trabajos anteriores, y se volvió muy exitoso pues logró explicar la conversión de sabor de los neutrinos solares durante su propagación en el interior del Sol. En 2001 el Observatorio de Neutrinos de Sudbury (SNO) midió por primera vez el flujo de neutrinos total y sus resultados coincidieron con los predichos por el efecto MSW.

Dicho lo anterior, es importante mencionar que la mayoría de la investigación que se hace en el tema, se refiere a los neutrinos y se deja un poco de lado el estudio de los antineutrinos. En éste trabajo, precisamente, se busca estudiar de manera equitativa, el problema de las oscilaciones en materia y comparar los resultados que se obtienen entre neutrinos y antineutrinos. En

el siguiente párrafo somos más específicos a este respecto.

El objetivo principal del trabajo realizado en esta tesis fue el de hallar la relación que existe entre las probabilidades de supervivencia promedio de neutrinos y antineutrinos para las oscilaciones entre dos sabores en materia. La idea surgió de la lectura de un artículo debido a G.L. Fogli y colaboradores [1], en el que se ataca el problema de las oscilaciones de neutrinos para tres sabores en una supernova. En particular, en este trabajo los autores hacen uso de la probabilidad de cruzamiento entre 2 sabores de neutrinos en el Sol (Refs. [2] y [3]), y a partir de ella, indican cual es la correspondiente probabilidad para antineutrinos, sin que se brinde una demostración y tampoco citando referencias. El hecho resultó interesante porque mediante el cambio $\sin^2 \theta \rightarrow \cos^2 \theta$ en la fórmula para neutrinos, podían encontrar la probabilidad de cruzamiento de antineutrinos, siendo que en principio uno debería resolver la ecuación de evolución en materia para los antineutrinos, lo cual no resulta trivial de hacer.

Así las cosas, nos dimos a la tarea de resolver el problema para antineutrinos y ver que efectivamente se obtenía el resultado mencionado. Durante éste cálculo notamos cierta simetría entre las ecuaciones de evolución de neutrinos y antineutrinos lo cual nos llevó a pensar si, además del caso solar existían otras situaciones donde pudiera inferirse directamente la probabilidad de cruzamiento de antineutrinos partiendo de la probabilidad de cruzamiento de neutrinos. El presente trabajo da una demostración de que en materia normal esto es posible en general, válido para cualquier perfil de densidad.

En el Capítulo 1 introducimos la ecuación de evolución en el vacío y en materia para $\nu_{e,\mu}$. En el vacío es conveniente resolverla en la base de masa $\phi_{1,2}$, y en materia es mejor hacerlo en la base de sabor $\psi_{e,\mu}$. Conocida la solución de esta ecuación en el vacío se calcula la probabilidad de supervivencia. Cuando se resuelve el problema en materia, ésta probabilidad depende como es natural, del potencial al que están sujetos los neutrinos. Al final del Capítulo 1 se describe el efecto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW), en el cual se muestra que en la aproximación adiabática la composición de sabor del estado instantáneo de masa, puede cambiar substancialmente en un medio con densidad variable. De hecho, este efecto fue el que dio paso a un estudio mas detallado de las oscilaciones de neutrinos en materia.

Una vez que se plantea la ecuación de evolución para neutrinos, en el Capítulo 2 se explican los aspectos más importantes del operador de evolu-

ción. Este operador resulta de utilidad porque permite determinar la evolución de los estados instantáneos de masa $\phi_{1,2}^m$, en el medio donde se propagan los neutrinos.

Cuando el sistema no evoluciona adiabáticamente, lo cual sucede para la mayoría de los potenciales, habrá una probabilidad de cruzamiento¹ entre los estados instantáneos de masa. Esta probabilidad aumenta sensiblemente en un pequeño intervalo, conocida como “región de resonancia”.

Además, se calcula la probabilidad de supervivencia en términos de los estados de masa, esto es útil porque se encuentra a su vez que la probabilidad de cruzamiento también se puede expresar en términos de estos estados. Así la probabilidad de supervivencia se escribe en términos de la probabilidad de cruzamiento.

En el Capítulo 3 se demuestra la manera de calcular las soluciones $\bar{\psi}_{e,\mu}$ de antineutrinos en términos de las soluciones $\psi_{e,\mu}$. El punto de partida es notar que las ecuaciones de evolución de antineutrinos para las amplitudes, se pueden obtener a partir de las ecuaciones de los neutrinos bajo dos posibles sustituciones en los parámetros (Δ ó θ) de dicha ecuación. Cualquiera que sea la sustitución, se prueba que la probabilidad de supervivencia de antineutrinos es igual a la probabilidad de supervivencia de neutrinos, esta última evaluada en $-\Delta$ ó en $\theta - \pi/2$. Usando éste resultado y recordando que la probabilidad de supervivencia se puede expresar en términos de la probabilidad de cruzamiento, derivamos una relación entre dichas probabilidades para los neutrinos y antineutrinos. De aquí, se obtiene una fórmula sencilla que permite conectar ambas probabilidades, con lo cual si conocemos una de ellas, se puede calcular directamente la otra.

Por último, en el Capítulo 4 se ilustra el resultado del capítulo anterior en el caso de dos potenciales que son exactamente solubles: el potencial exponencial decreciente y el potencial de Coulomb. Después de calcular la probabilidad de cruzamiento para neutrinos en uno y otro potencial, utilizamos nuestro resultado para hallar la probabilidad de cruzamiento de antineutrinos. Además de ello, se resuelve usando la ecuación de evolución el problema de antineutrinos, para obtener por este otro camino la probabilidad de cruzamiento y verificar que coincide con el resultado antes obtenido. En ambos casos, la ecuación de evolución para $\psi_{e,\mu}$ y de $\bar{\psi}_{e,\mu}$ se puede escribir en términos de la ecuación hipergeométrica confluyente. Los potenciales considerados, han sido resueltos en la literatura para neutrinos utilizando la ecuación de Whittaker. En cambio, aquí hemos decidido resolver la ecuación

¹En inglés se conoce como “crossing probability”.

ción en la forma de la hipergeométrica confluyente, porque sus soluciones son mas fáciles de manipular algebraicamente que aquellas obtenidas en las referencias [2] y [4].

Capítulo 1

Oscilaciones de neutrinos.

1.1. Antecedentes.

Hasta la fecha los neutrinos son las partículas más ligeras que se conocen, las diferencias de masa son más pequeñas que 10^{-5}eV , y son de carga neutra. Fueron predichas teóricamente por W. Pauli para asegurar la conservación de energía y momento en la desintegración β de los neutrones. Cabe mencionar que en el Modelo Estándar de las interacciones débiles los neutrinos no tienen masa. Las fuentes de neutrinos son principalmente el Sol, los rayos cósmicos, los aceleradores y reactores nucleares.

Existen tres sabores (tipos) de neutrinos: ν_e , ν_μ y ν_τ , cada uno de los cuales están asociados con el respectivo leptón cargado. Las oscilaciones se refieren al hecho físico de que el neutrino (antineutrino) de un cierto sabor, que se produce en un punto dado del espacio, después de recorrer cierta distancia cambia de sabor. Por ejemplo, si se produce inicialmente un neutrino del electrón ν_e existe una probabilidad de que al cabo de recorrer una distancia se haya transformado en un neutrino del muón ν_μ . Como se verá en las secciones siguientes dicha probabilidad se modifica si el neutrino se propaga en materia.

En 1958, B. Pontecorvo sugiere la posibilidad de oscilaciones de neutrinos. En 1964, R. Davis diseña un experimento para detectar neutrinos solares usando un cálculo de J. Bahcall que predice el flujo de neutrinos solares, Davis encontró un déficit comparado con dicho cálculo. Este experimento recibió otras varias confirmaciones por observatorios y detectores de neutri-

nos (SAGE, GALLEX, Superkamiokande). Sin embargo fue el experimento de SNO¹, el cual en el año 2001 presentó resultados con clara evidencia experimental acerca de las oscilaciones de neutrinos provenientes del Sol. Es decir, además de medir el flujo de neutrinos ν_e , también midió el flujo de neutrinos $\nu_{\mu,\tau}$ [5]. El flujo total coincidió con el predicho por el modelo de oscilaciones de neutrinos vía el efecto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW).

1.2. Oscilaciones en el vacío.

Consideremos oscilaciones entre dos sabores de neutrinos $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$, los cuales se producen y se propagan en el vacío. La idea es análoga a la de un sistema de dos niveles: si el sistema se encuentra en alguno de sus eigenestados Ψ_i , permanecerá en él y la evolución temporal de la función de onda es: $\Psi_i(t) = e^{-iE_i t} \Psi_i(0)$. Si en cambio el sistema no fue preparado en un eigenestado del Hamiltoniano, entonces la probabilidad de encontrar al sistema en el estado inicial oscilará en el tiempo con frecuencia $w_{12} = (E_1 - E_2)/\hbar$ donde E_1 y E_2 son las eigenenergías del sistema.

En el caso de las oscilaciones de neutrinos, la función de onda que describe al sistema Ψ (estado) se puede escribir como una combinación lineal de la *base de sabor* $\psi_{e,\mu}$. Es posible considerar otra base donde éste hamiltoniano sea diagonal:

$$\langle \Phi_i | H | \Phi_j \rangle = E_i \delta_{ij}, \quad i = 1, 2.$$

esta nueva base $\Phi_{1,2}$ se llama *base de masa*. La transformación unitaria U que relaciona ambas bases se llama *matriz de mezcla*:

$$\Psi = U \Phi \tag{1.1}$$

donde

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

El ángulo θ se conoce como ángulo de mezcla en el vacío. Los estados de masa tienen masas bien definidas.

Por ser el neutrino una partícula ultrarelativista, la energía E_i del neutrino ν_i es dada por:

$$E_i = \sqrt{(pc)^2 + (m_i^2 c^4)} \simeq p_i c + \frac{1}{2} \frac{m_i^2 c^3}{p_i} + \dots \quad i = 1, 2 \tag{1.3}$$

¹SNO: "Sudbury Neutrino Observatory".

Observamos que mientras los neutrinos se propagan en el vacío su momento p_i no puede cambiar, por lo tanto el momento p_i del estado visto en la base de masa debe estar bien definido:

$$p_i = p$$

de manera que cada estado en la base de masa tendrá el mismo momento mientras se desplaza en el vacío. En lo que sigue, usamos la convención $\hbar = c = 1$, con lo cual la energía queda:

$$E_i = p + \frac{m_i^2}{2p} = E + \frac{m_i^2}{2E} \quad i = 1, 2 \quad (1.4)$$

La ecuación que describe la evolución del sistema es:

$$i \frac{d\Psi}{dx} = H\Psi \quad (1.5)$$

con

$$H = \begin{pmatrix} -A & B \\ B & +A \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{\Delta}{2} \cos 2\theta, \quad B = \frac{\Delta}{2} \sin 2\theta, \quad \frac{\Delta}{2} = \frac{\delta m^2}{4E} \equiv \frac{m_2^2 - m_1^2}{4E} \quad (1.6)$$

Las cantidades A y B son independientes de la posición x y sólo dependen de valores característicos de las oscilaciones en el vacío.

La ecuación de evolución 1.5 se diagonaliza mediante la matriz de mezcla 1.1, obteniéndose la expresión:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_2(x, t) \\ \phi_2(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2(x, t) \\ \phi_2(x, t) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

La solución de 1.7 es

$$\begin{pmatrix} \Phi_2(x, t) \\ \Phi_2(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_2(x, 0) \\ \Phi_2(x, 0) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Como establece la ecuación 1.1, cada estado en la base de sabor es una combinación lineal de los estados de masa, y en general:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i u_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad \alpha = e, \mu, \dots \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.9)$$

usando que

$$u^\dagger u = 1 \quad \text{y} \quad \sum_\alpha u_{\alpha i} u_{\alpha j}^* = \delta_{ij}, \quad (1.10)$$

obtenemos

$$|\nu_i\rangle = \sum_i u_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle. \quad (1.11)$$

En el caso de antineutrinos el elemento $u_{\alpha i}$ es remplazado por $u_{\alpha i}^*$, i.e.

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_i u_{\alpha i}^* |\bar{\nu}_i\rangle, \quad (1.12)$$

usando 1.8 y escribiendo $|\nu_i(x, 0)\rangle = e^{ipx} |\nu_i\rangle$ se puede encontrar el estado del neutrino al tiempo t :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i u_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i(x, 0)\rangle = \sum_{i, \beta} u_{\alpha i} u_{\beta i}^* e^{ipx} e^{-iE_i t} |\nu_\beta\rangle. \quad (1.13)$$

Con esto último se puede calcular la amplitud de oscilación $A(\alpha \rightarrow \beta)$:

$$A(\alpha \rightarrow \beta, t) = \langle \psi_\beta | \psi(t) \rangle = \sum_i u_{\beta i}^* u_{\alpha i} e^{ipx} e^{-iE_i t}. \quad (1.14)$$

Analogamente la amplitud de oscilación para antineutrinos se puede derivar de 1.14:

$$A(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}, t) = \sum_i u_{\beta i} u_{\alpha i}^* e^{-iE_i t}. \quad (1.15)$$

Para los neutrinos, la probabilidad de oscilación se puede derivar de 1.14:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = |A(\alpha \rightarrow \beta)|^2 = \sum_i \sum_j u_{\alpha i} u_{\alpha j}^* u_{\beta i}^* u_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)t}. \quad (1.16)$$

En el caso de oscilaciones entre dos sabores no hay violación CP, esto quiere decir que:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}.$$

Lo cual es una implicación directa de que U sea real.² Esto mismo se puede concluir al calcular la probabilidad de oscilación de los antineutrinos, de un modo análogo a lo hecho en 1.16. Teniendo presente la ecuación 1.12 resulta:

$$P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} = |\bar{A}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 = \sum_i \sum_j u_{\alpha i}^* u_{\alpha j} u_{\beta i} u_{\beta j}^* e^{-i(E_i - E_j)t}. \quad (1.17)$$

²En principio la condición de unitariedad impuesta sobre U no restringe la posibilidad de que la matriz sea compleja y/o contenga fases. En el Apéndice se muestra como en el caso de mezcla de dos neutrinos este no es el caso.

Al ser U una matriz real las probabilidades 1.16 y 1.17 en realidad son la misma. Este mismo razonamiento no se podría repetir al considerar oscilaciones entre tres sabores pues en este caso U es una matriz compleja.

Nótese en 1.16 que si $\beta = \alpha$ entonces:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = \sum_i \sum_j |u_{\alpha i}|^2 |u_{\alpha j}|^2 e^{-i(E_i - E_j)t} = P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\alpha}, \quad (1.18)$$

lo cual se cumple sin considerar que u sea real o no, i.e. sin importar que haya violación de CP. La cantidad $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}$ se conoce como probabilidad de supervivencia y será de gran interés en lo subsecuente.

En el caso de mezcla de dos neutrinos, es un cálculo directo hallar la probabilidad de oscilación 1.16, usando 1.2 y 1.6 se obtiene:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos^2 \left(\frac{\delta m^2}{4E} t \right) \right] = P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}. \quad (1.19)$$

Podemos hacer $t \simeq x$ pues el neutrino es ultrarelativista. En la práctica es imposible medir la probabilidad de oscilación para valores precisos de la distancia de propagación $x = L$ y la energía del neutrino E . Esto se debe a que en cualquier experimento la fuente donde se produce los neutrinos y el proceso de detección tiene alguna incertidumbre espacial, i.e. la fuente tiene un espectro de energía y la resolución de energía del detector es finita. En consecuencia, siempre es necesario promediar la probabilidad de oscilación sobre una distribución apropiada de la distancia L y la energía E [6].

En el caso del vacío, promediar 1.19 consiste en promediar el factor coseno, el cual es cero, de modo que:

$$\langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta = \langle P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} \rangle \quad (1.20)$$

y utilizando la unitariedad de la probabilidad finalmente obtenemos la probabilidad de supervivencia:

$$\langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta = \langle P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\alpha} \rangle \quad \alpha = e, \mu. \quad (1.21)$$

1.3. Neutrinos y ecuación de evolución en materia.

La manifestación mas importante de las oscilaciones de neutrinos en materia es el efecto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW): la probabilidad

de oscilación puede aumentar notablemente cuando los neutrinos viajan a través de la materia. En 1978 L. Wolfenstein [7] descubrió que los neutrinos propagándose en materia están sujetos a un potencial debido a la dispersión elástica con las partículas en el medio (electrones y nucleones). Esta dispersión es análoga al caso electromagnético donde se considera el índice de refracción de la luz en un medio. Esto quiere decir que los neutrinos en materia tienen una masa efectiva diferente a la del vacío.

En el caso de mezcla entre 2 sabores de neutrinos, el ángulo de mezcla en el vacío debe ser reemplazado por un ángulo efectivo en materia, el cual, para potenciales adecuados, puede ser grande, aún en el caso donde el ángulo de mezcla en el vacío sea pequeño. Desafortunadamente, en los primeros artículos el signo del potencial en materia era incorrecto, lo que llevaba a aumentar la transición de los antineutrinos del electrón en vez de los neutrinos. El signo correcto fue introducido en 1983 por Paul Langacker [8]. En 1985 S.P Mikheyev y A.YU. Smirnov [9] descubrieron que es posible tener un aumento en las transiciones de sabor cuando los neutrinos se propagan en un medio con densidad variable, y también que, bajo las condiciones apropiadas, puede existir una región a lo largo de la trayectoria del neutrino en la cual el ángulo en materia alcanza el valor máximo de $\pi/4$. El mecanismo MSW rápidamente se volvió muy famoso, porque logra explicar el problema de los neutrinos solares mediante la conversión de sabor, cuando los neutrinos se propagan fuera en el interior del Sol. En lo que sigue derivamos la ecuación de evolución de neutrinos en un medio, y en la sección siguiente describimos el efecto MSW.

Los neutrinos interactúan con protones, neutrones y electrones a través de la corriente neutra (NC) mediadas por los bosones Z^0 . Además los neutrinos del electrón interactúan con los electrones del medio mediante la corriente cargada (CC) mediada por los bosones W^\pm .

Las contribuciones de (CC) al potencial es:

$$(\tilde{V}_e)_{CC} = 2\sqrt{2}G_F N_e E,$$

donde G_F es la constante de Fermi y N_e es la densidad de electrones.

En un medio eléctricamente neutro la densidad de electrones y protones es la misma y las correspondientes contribuciones a \tilde{V}_{NC} se cancelan, así sólo se tienen contribuciones de la densidad de neutrones \tilde{V}_n :

$$(\tilde{V}_{e,\mu,\tau})_{NC} = -G_F \tilde{N}_n / \sqrt{2}.$$

Con lo cual el potencial \tilde{V}_e que actúa sobre neutrinos ν_e y el potencial $\tilde{V}_{\mu,\tau}$ que actúa sobre neutrinos $\nu_{\mu,\tau}$ son respectivamente:

$$\tilde{V}_e = 2\sqrt{2}G_F \left(N_e - \frac{N_n}{4} \right), \quad \tilde{V}_{\mu,\tau} = 2\sqrt{2}G_F \left(-\frac{N_n}{4} \right).$$

Para antineutrinos se tiene que remplazar $\tilde{V}_a \rightarrow -\tilde{V}_a$, $a = e, \mu, \tau$

Es conveniente seguir la evolución del sistema en la base de sabor debido a que el potencial efectivo es diagonal en dicha representación, propiedad que también es útil para eliminar el término $(\tilde{V}_{e,\mu,\tau})_{NC}$ puesto que sólo contribuye con una fase global a la solución de 1.5. De manera que la ecuación de evolución en materia se puede escribir como:

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \left\{ u \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix} u^\dagger + \begin{pmatrix} \tilde{V}_e - \tilde{V}_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \end{pmatrix}$$

Definiendo:

$$\bar{m}^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2}; \quad \Delta = m_2^2 - m_1^2$$

se tiene

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \left\{ \left(\bar{m}^2 + \frac{\tilde{V}_e - \tilde{V}_\mu}{2} \right) \mathbb{I} + \begin{pmatrix} (\tilde{V}_e - \tilde{V}_\mu) - \Delta \cos 2\theta & \Delta \sin 2\theta \\ \Delta \sin 2\theta & -\tilde{V}_e \Delta \cos 2\theta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

En la ecuación de arriba el primer término a la derecha de la igualdad otra vez se puede ignorar ya que se elimina factorizando una fase global (cuyo argumento es éste término) en la solución de la ecuación. Usando la notación de 1.5 e introduciendo la definición $V \equiv \frac{\tilde{V}_e - \tilde{V}_\mu}{4E}$, finalmente se obtiene:

$$i \frac{d}{dx} \Psi = H(x) \Psi, \quad (1.23)$$

donde Ψ esta dado por 1.1 y

$$H(x) = \begin{pmatrix} V(x) - A & B \\ B & -(V(x) - A) \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Como en el caso del vacío A y B están dadas por 1.6. Así (1.23) es la ecuación de evolución de los neutrinos en materia en su forma estándar y es también la ecuación a resolver en el presente trabajo para el potencial exponencial decreciente y el de Coulomb.

1.3.1. Ecuación de segundo orden.

Como se observa en 1.23 la evolución de los neutrinos en materia esta descrito por un sistema de dos ecuaciones acoplados. Con el fin de hallar las soluciones ψ_e y ψ_μ es necesario desacoplar dicho sistema, para ello se deriva 1.23 con respecto a x :

$$\begin{aligned} i \frac{d^2 \Psi}{dx^2} &= H \frac{d\Psi}{dx} + \frac{dH}{dx} \Psi \\ &= \left(\frac{dH}{dx} - iH^2 \right) \Psi. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Donde en el segundo renglón se ha usado otra vez 1.23. Teniendo en cuenta que:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dV}{dx} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{dV}{dx} \sigma_3, \quad H^2 = [(V - A)^2 + B^2] \mathbb{I}$$

con

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resulta

$$\begin{aligned} i \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \left(\frac{dH}{dx} - iH^2 \right) \Psi &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + H^2 + i \frac{dH}{dx} \right) \Psi \\ &= \frac{d^2}{dx^2} + (V^2 - 2AV + A^2 + B^2 + i \frac{dV}{dx} \sigma_3) \Psi \\ &= 0 \end{aligned}$$

pero $A^2 + B^2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2$, entonces

$$-\frac{d^2 \Psi}{dx^2} - (V^2 - 2AV + i \frac{dV}{dx} \sigma_3) \Psi = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \Psi. \quad (1.26)$$

En términos de las componentes de Ψ :

$$-\frac{d^2 \psi_e}{dx^2} + U_e \psi_e = \epsilon^2 \psi_e, \quad (1.27a)$$

$$-\frac{d^2 \psi_\mu}{dx^2} + U_\mu \psi_\mu = \epsilon^2 \psi_\mu, \quad (1.27b)$$

donde

$$U_e = - \left(V^2 - 2AV + i \frac{dV}{dx} \right), \quad (1.28)$$

$$U_\mu = -\left(V^2 - 2AV - i\frac{dV}{dx}\right), \quad (1.29)$$

$$\epsilon^2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2.$$

En conclusión se ha desacoplado el sistema de ecuaciones para la evolución de neutrinos en materia, obteniéndose 2 ecuaciones independientes de segundo orden para ψ_e y ψ_μ . En particular en el Capítulo 4 se resuelve con gran detalle la ecuación 1.27b. Así mismo los antineutrinos obedecen ecuaciones similares a 1.27a teniendo presente el cambio signo en V .

1.4. Evolución adiabática.

En la sección anterior no se hizo mención de la ecuación de evolución en la base de masa, la razón es que el potencial es diagonal en la base de sabor y por ello mas sencilla de trabajar. Sin embargo también la podemos escribir en esta otra base, para tal fin notamos que una matriz semejante a 1.1 diagonaliza el operador $H(x)$. Ahora el ángulo a considerar es el ángulo de mezcla en materia el cual es función de la posición $\theta \rightarrow \theta_m(x)$, de manera que se tiene la *matriz de mezcla en materia*:

$$\Psi = U_m(x)\Phi_m(x), \quad (1.30)$$

donde

$$U_m(x) = \begin{pmatrix} \cos\theta_m(x) & \sin\theta_m(x) \\ -\sin\theta_m(x) & \cos\theta_m(x) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi_m(x) = \begin{pmatrix} \phi_1^m(x) \\ \phi_2^m(x) \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

y θ_m cumple que:

$$\sin 2\theta_m = \frac{B}{\sqrt{(A-V)^2 + B^2}}, \quad (1.32)$$

$$\cos 2\theta_m = \frac{A-V}{\sqrt{(A-V)^2 + B^2}}. \quad (1.33)$$

Para antineutrinos hay que cambiar el signo de V :

$$\sin 2\bar{\theta}_m = \frac{B}{\sqrt{(A+V)^2 + B^2}}, \quad \cos 2\bar{\theta}_m = \frac{A+V}{\sqrt{(A+V)^2 + B^2}}. \quad (1.34)$$

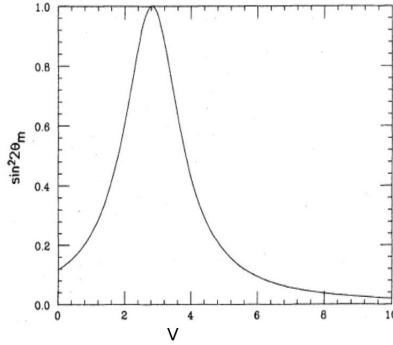


Figura 1.1: Gráfica de $\sin^2 2\theta_m$, como función de V . Aquí se toma $\delta m^2 = 3,0$ y $\sin 2\theta = 3,0$.

En particular $\sin 2\theta_m$ como función de V , alcanza su máximo cuando

$$V(x_R) = A = \frac{\Delta}{2} \cos \theta , \quad (1.35)$$

donde x_R se conoce como el punto de resonancia (Fig. 1.1).

La relación entre las amplitudes ϕ_i y ϕ_i^m se puede hallar directamente de las ecuaciones 1.1, 1.2 y 1.31, con lo cual

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta_m) & -\sin(\theta - \theta_m) \\ \sin(\theta - \theta_m) & \cos(\theta - \theta_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^m \\ \phi_2^m \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

De 1.33 vemos que se obtendrá la igualdad $\phi_{1,2} = \phi_{1,2}^m$ cuando el potencial se anule en el borde del medio: $V(t_\odot) = 0$.

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t_\odot) \\ \phi_2(t_\odot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^m(t_\odot) \\ \phi_2^m(t_\odot) \end{pmatrix} \quad \text{si } V(t_\odot) = 0 \quad (1.37)$$

Regresando a la discusión inicial resulta que el operador queda diagonalizado de la siguiente forma:

$$U^\dagger(x)H(x)U(x) = H_D(x) = \begin{pmatrix} E_1(x) & 0 \\ 0 & E_2(x) \end{pmatrix}.$$

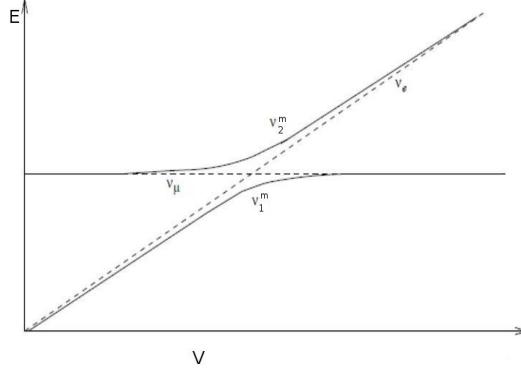


Figura 1.2: Energías $E_{1,2}$ como función de V . Si el potencial es lo suficientemente grande $\nu_2^m \simeq \nu_e$. En la aproximación adiabática cuando el neutrino llega al borde del medio $\nu_2^m \simeq \nu_\mu$.

Por otra parte para hallar los eigenvalores del sistema es necesario considerar el hamiltoniano completo 1.22 obteniéndose:

$$E_{1,2} = V + \frac{\overline{m}^2}{2E} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(A - V)^2 + B^2}. \quad (1.38)$$

En la Fig. 1.2 se muestran los eigenvalores de energía $E_{1,2}$ de los estados de masa, como función del potencial V .

usando 1.23 procedemos a derivar la ecuación en la base de masa:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dx} \Psi &= H(x) \Psi \\ i \frac{d}{dx} (UU^\dagger \Psi) &= H(x) UU^\dagger \Psi \end{aligned}$$

Aplicando el operador U^\dagger

$$iU^\dagger \frac{d}{dx} (UU^\dagger \Psi) = H_D(x) U^\dagger \Psi$$

usando 1.30, obtenemos:

$$\begin{aligned}
iU^\dagger \frac{d}{dx}(U\Phi_m) &= H_D(x)U^\dagger\Phi_m \\
iU^\dagger \frac{dU}{dx}\Phi_m + i\frac{d}{dx}\Phi_m &= H_D(x)U^\dagger\Phi_m \\
i\frac{d\Phi_m}{dx} &= \tilde{H}\Phi_m
\end{aligned} \tag{1.39}$$

donde

$$\tilde{H} = H_D - iU^\dagger \frac{dU}{dx} = \begin{pmatrix} E_1 & -i d\theta_m/dx \\ i d\theta_m/dx & E_2 \end{pmatrix},$$

o sustrayendo una fase

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \frac{E_1+E_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{E_1+E_2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{E_2-E_1}{2} & -i d\theta_m/dx \\ i d\theta_m/dx & \frac{E_2-E_1}{2} \end{pmatrix}.$$

La matriz que es múltiplo de la identidad se puede eliminar como ya se hizo en la sección anterior. Así la ecuación 1.39 se escribe:

$$i\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_1^m \\ \phi_2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(E_2 - E_1) & -i d\theta_m/dx \\ i d\theta_m/dx & E_2 - E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^m \\ \phi_2^m \end{pmatrix}, \tag{1.40}$$

1.39 y/o 1.40 son la ecuación de evolución de los neutrinos en la base de masa en materia [10]. Si el término no diagonal fueran cero ó muy pequeño comparado con los términos diagonales, entonces los estados de masa $\Phi^m(x)$ serían los estados propios del sistema en la ecuación anterior (como lo eran los $\phi_{1,2}$ en el caso del vacío). Esta es la evolución adiabática del sistema, más en concreto si

$$\frac{d\theta_m}{dx} \ll |E_2 - E_1|, \tag{1.41}$$

donde

$$\frac{d\theta_m}{dx} = \frac{\sin^2 \theta_m(x)}{B} \cdot \frac{dV}{dx} \tag{1.42}$$

como se puede obtener de 1.32. Para entender mejor la expresión “adiabático” consideremos un potencial constante C , resulta claro que C varía muy lentamente con respecto a x , de hecho su variación es cero. Entonces $dC/dx = 0$ y así $d\theta_m(x)/dx = 0$, por lo que en este caso $\phi_{1,2}^m$ son eigenfunciones del sistema. Así, la expresión “adiabático” esta relacionada con el hecho de que el potencial cambie lentamente como función de la posición.

Además del potencial constante, existen otros que pueden considerarse como adiabáticos, el caso exponencial y el de Coulomb son ejemplos de ello.

Es sabido que en materia en el punto de producción x_0 , el ángulo de mezcla es $\theta_m(x) \simeq \frac{\pi}{2}$ ya que en 1.32 se toma $V \gg 1$. Supongamos que se produce un neutrino del electrón ν_e al que le asociamos su función de onda ψ_e la cual inicialmente coincide con la eigenfunción de masa ϕ_2^m según 1.30,

$$\phi_2^m(x_0) = \psi_e(x_0), \quad (1.43)$$

en la aproximación adiabática el potencial cambia lentamente, así ϕ_2^m tendrá el tiempo suficiente para ajustarse a si mismo a dicho cambio, y el sistema permanecerá descrito por ϕ_2^m . Sin embargo conforme el neutrino avanza en el medio el ángulo de $\theta_m(x)$ va disminuyendo hasta que $\theta_m = \theta$, es decir abandona el medio y se vuelve el ángulo del vacío. En vista de 1.30 y 1.43 aunque ϕ_2^m se mantiene, la composición de sabor $\nu_{e,\mu}$ empieza a variar:

$$\phi_2^m(x > x_0) = \sin \theta_m(x) \psi_e + \cos \theta_m(x) \psi_\mu, \quad (1.44)$$

veamos que en el punto de resonancia x_R , por 1.32 se tiene que

$$\sin 2\theta_m(x_R) = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_m(x_R) = \frac{\pi}{4},$$

de modo que si $\theta_m = \pi/4$ el sabor ν_μ tiene un peso importante en la composición de ϕ_2^m como se ve de 1.44. Cuando el neutrino llega al borde del medio $\phi_2^m \simeq \psi_\mu$, si el ángulo de mezcla en el vacío es pequeño. En la figura 1.2 se ilustra este hecho, donde ν_2^m es el estado asociado a ϕ_2^m . Ésta es precisamente la descripción del efecto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW).

Finalmente, según 1.35 la resonancia no sucederá si el ángulo del vacío es $\theta > \pi/4$, en tal caso la resonancia ocurrirá para antineutrinos $\bar{\nu}$, dado que para ellos $V \rightarrow -V$.

Capítulo 2

Probabilidades de supervivencia y de transición.

En el capítulo anterior se dio una descripción cualitativa de como el estado de un sistema pueden cambiar su composición de sabor $\nu_{e,\mu}$ a través del efecto MSW. Sin embargo, la suposición de que un sistema evoluciona adiabáticamente es sólo una aproximación, así en 1.39 se observa que los estados instantáneos de masa $\phi_{1,2}^m$ también se mezclarán cuando el sistema no evolucione de manera adiabática. Se conoce como probabilidad de cruzamiento P_c a la probabilidad de que los estados $\phi_{1,2}^m$ se crucen entre si, i.e. haya una conversión $\phi_1^m \leftrightarrow \phi_2^m$ entre ellos. En este capítulo se muestra la forma en que la *probabilidad de supervivencia* $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ esta relacionada con la *probabilidad de cruzamiento* P_c .

Para ello será necesario introducir el operador de evolución temporal U , por lo que en la siguiente sección se muestran los aspectos más importantes de este operador.

2.1. El operador de evolución.

Consideremos el estado inicial de un sistema $|\psi(t_0)\rangle$. Después de un tiempo t durante el cual interactúa con el medio donde se encuentra, podemos conocer el estado del sistema $|\psi(t)\rangle$ al tiempo t aplicando el operador de

evolución del sistema $\mathcal{U}(t, t_0)$:

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (2.1)$$

En $t = t_0$, de la ecuación anterior se tiene

$$\mathcal{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I}.$$

Debido a que $|\psi(t)\rangle$ satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t, t_0) = H(t)\mathcal{U}(t, t_0), \quad (2.2)$$

por lo que el operador \mathcal{U} esta completamente determinado cuando el hamiltoniano H del sistema es dado. Si H es un operador hermitiano entonces \mathcal{U} es unitario:

$$\mathcal{U}^{-1}(t, t_0) = \mathcal{U}^\dagger(t, t_0). \quad (2.3)$$

Si H no tiene una dependencia explícita del tiempo, la ecuación 2.2 se integra directamente, obteniéndose

$$\mathcal{U}(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)}. \quad (2.4)$$

Finalmente, si $|\psi_n\rangle$ es un estado propio de H con valor propio E_n , el estado evolucionará de la siguiente forma:

$$\mathcal{U}(t, t_0)|\psi_n\rangle = e^{-iE_n(t-t_0)}|\psi_n\rangle. \quad (2.5)$$

Para nuestros fines, este resultado es el mas importante de \mathcal{U} ya que permite conocer la evolución temporal para cualquier tiempo t de los eigenestados instantáneos del hamiltoniano H . Esto se aplicará en las siguientes secciones.

2.2. Probabilidad de supervivencia.

Consideremos el estado del sistema en $t \equiv t_\odot$, es decir en el borde del Sol. Como ya se dijo el sistema es una combinación lineal de ψ_e y ψ_μ . Donde ψ_e y ψ_μ son las funciones de onda que aparecen en la ecuación de evolución 1.23. El objetivo es observar como evolucionan las funciones de onda asociadas a $|\nu_{e,\mu}\rangle$ conforme el sistema evoluciona en el vacío, así que

$$|\psi(t_\odot)\rangle = \psi_e(t_\odot)|\nu_e\rangle + \psi_\mu(t_\odot)|\nu_\mu\rangle,$$

que escrita en la base de $\nu_{1,2}$ es:

$$\begin{aligned} |\psi(t_\odot)\rangle &= \psi_e(\cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle) + \psi_\mu(-\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle) \\ &= (\psi_e \cos\theta - \psi_\mu \sin\theta)|\nu_1\rangle + (\psi_e \sin\theta + \psi_\mu \cos\theta)|\nu_2\rangle \end{aligned}$$

Sean

$$\phi_1 = \psi_e \cos\theta - \psi_\mu \sin\theta, \quad \phi_2 = \psi_e \sin\theta + \psi_\mu \cos\theta .$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-iH(t-T)/\hbar}|\nu(t_\odot)\rangle, \quad \tilde{t} = t - t_\odot \\ &= \phi_1 e^{-iE_1\tilde{t}/\hbar}|\nu_1\rangle + \phi_2 e^{-iE_2\tilde{t}/\hbar}|\nu_2\rangle \\ &= \phi_1 e^{-iE_1\tilde{t}/\hbar}(\cos\theta|\nu_e\rangle - \sin\theta|\nu_\mu\rangle) \\ &\quad + \phi_2 e^{-iE_2\tilde{t}/\hbar}(\sin\theta|\nu_e\rangle + \cos\theta|\nu_\mu\rangle) \\ &= \psi_e(t)|\nu_e\rangle + \psi_\mu(t)|\nu_\mu\rangle \end{aligned}$$

donde:

$$\psi_e(t) = \phi_1 e^{-iE_1\tilde{t}/\hbar} \cos\theta + \phi_2 e^{-iE_2\tilde{t}/\hbar} \sin\theta \quad (2.6)$$

$$\psi_\mu(t) = -\phi_1 e^{-iE_1\tilde{t}/\hbar} \sin\theta + \phi_2 e^{-iE_2\tilde{t}/\hbar} \cos\theta . \quad (2.7)$$

La probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón ν_e es:

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) &= |\psi_e(t)|^2 \\ &= \left(\phi_1 e^{-iE_1\tilde{t}/\hbar} \cos\theta + \phi_2 e^{-iE_2\tilde{t}/\hbar} \sin\theta \right) \times \\ &\quad \times \left(\phi_1^* e^{iE_1\tilde{t}/\hbar} \cos\theta + \phi_2^* e^{iE_2\tilde{t}/\hbar} \sin\theta \right) \\ &= |\phi_1|^2 \cos^2\theta + |\phi_2|^2 \sin^2\theta + \left[(\phi_1^* \phi_2 + \phi_2^* \phi_1) \cos((E_1 - E_2)t/\hbar) \right. \\ &\quad \left. + i(\phi_1^* \phi_2 - \phi_2^* \phi_1) \sin((E_1 - E_2)t/\hbar) \right] \sin\theta \cos\theta . \end{aligned}$$

Los términos de interferencia promediados sobre t son cero. Entonces

$$\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) \rangle = \sin^2\theta + \langle |\phi_1|^2 \rangle \cos 2\theta .$$

Donde se ha utilizado

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = 1 .$$

En lo que seguirá es conveniente la siguiente expresión para ν_e :

$$\begin{aligned}\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) \rangle &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) + \langle |\phi_1|^2 \rangle \cos 2\theta \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \langle |\phi_1|^2 \rangle \right) \cos 2\theta\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \langle |\phi_2|^2 \rangle \right) \cos 2\theta . \quad (2.9)$$

La probabilidad promedio para antineutrinos toma una forma similar,

$$\langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e}(t) \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \langle |\bar{\phi}_2|^2 \rangle \right) \cos 2\theta \quad (2.10)$$

con la salvedad de que $\bar{\phi}_{1,2} \neq \phi_{1,2}$, ya que obedecen ecuaciones diferentes.

De esta forma se ha encontrado una relación entre el módulo cuadrado de $\phi_{1,2}$ y la probabilidad de supervivencia promedio $\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle$. En la siguiente sección se muestra cual es la conexión entre la probabilidad de transición P_c y $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$.

2.3. Probabilidad de transición.

Consideremos que dentro del medio se crea un neutrino del electrón ν_e en el punto x_0 ¹, la representación vectorial de este estado es:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

usando 1.30 se puede escribir en la base $\phi_{1,2}$

$$\Psi(x_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta_m^0 \\ \sin \theta_m^0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

donde θ_m^0 el ángulo de mezcla en materia evaluado en x_0 .

Se asume que la evolución del estado será adiabática dentro del medio, excepto en una estrecha región 2δ alrededor del punto de resonancia. De modo que la evolución es adiabática en los intervalos $[x_0, x_R - \delta]$ y $[x_R + \delta, x_\odot]$,

¹Esto equivale a decir que el neutrino del electrón ν_e se crea al tiempo t_0 , ya que $t_0 \simeq x_0$, pues los neutrinos son ultrarelativistas.

siendo x_\odot es un punto ubicado en el borde del medio. La evolución de x_0 a x_R es ²

$$\Psi(x_R - \delta) = \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_2} \end{pmatrix} \Psi(x_0), \quad (2.13)$$

donde

$$\gamma_i = \int_{x_0}^{x_R - \delta} \varepsilon_i(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

En el intervalo $[x_R - \delta, x_R + \delta]$ la evolución es no adiabática, por lo tanto la probabilidad de mezcla P_c es diferente de cero. En el punto $x_R + \delta$ el estado del sistema puede escribirse, utilizando una parametrización general del operador de evolución $u(x_R + \delta, x_R - \delta)$, de la siguiente forma³

$$\Psi(x_R + \delta) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - P_c} e^{-i\alpha} & \sqrt{P_c} e^{-i\beta} \\ -\sqrt{P_c} e^{i\beta} & \sqrt{1 - P_c} e^{i\alpha} \end{pmatrix} \Psi(x_R - \delta), \quad (2.14)$$

donde α y β son 2 fases cuya forma explícita no es relevante en lo que sigue. Por último de $x_R + \delta$ a x_\odot se tiene que

$$\Psi(x_\odot) = \begin{pmatrix} e^{-i\gamma'_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma'_2} \end{pmatrix} \Psi(x_R + \delta), \quad (2.15)$$

siendo

$$\gamma'_i = \int_{x_R + \delta}^{x_\odot} \varepsilon_i(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

De manera que en la base $\phi_{1,2}$ el operador de evolución $\mathcal{U}(x_\odot, x_0)$ es el producto de las matrices que aparecen en 2.13, 2.14 y 2.15, simbólicamente:

$$\Psi(x_\odot) = \mathcal{U}(x_\odot, x_0) \Psi(x_0), \quad (2.16)$$

con

$$\mathcal{U}(x_\odot, x_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - P_c} e^{-i\eta_{12}} & \sqrt{P_c} e^{-i\eta_{22}} \\ -\sqrt{P_c} e^{i\eta_{22}} & \sqrt{1 - P_c} e^{i\eta_{12}} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

²Aquí el operador de evolución estará representado por las matrices que aparecen en 2.13, 2.14 y 2.15

³Esta parametrización no depende si son neutrinos o antineutrinos los que pasan por la resonancia, ya que en la forma que se construye el operador $u(x_R + \delta, x_R - \delta)$ no hace falta hacer estas consideraciones. Para mas detalles ver el Apéndice A.2.

donde

$$\eta_{12} = \alpha - \left(\frac{\Delta\gamma + \Delta\gamma'}{2} \right), \quad \eta_{22} = \beta - \left(\frac{\Delta\gamma - \Delta\gamma'}{2} \right),$$

y

$$\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \Delta\gamma' = \gamma_2' - \gamma_1'.$$

Entonces el estado del neutrino en el borde del medio es

$$\psi(x_\odot) = \begin{pmatrix} \phi_1(x_\odot) \\ \phi_2(x_\odot) e^{-ie} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

con $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = 1$. Es importante señalar que podemos escribir el estado ψ en el borde del Sol en término de $\phi_{1,2}$, por 1.37, pues suponemos que el potencial V se anula o es aproximadamente cero en el borde del medio.

usando ecuaciones 2.12, 2.16 y 2.17, el módulo de $|\phi_1|^2$ es:

$$|\phi_1|^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_c \right) \cos 2\theta_m^0 + \sqrt{P_c(1 - P_c)} \sin 2\theta_m^0 \cos(\eta_{12} - \eta_{22}) \quad (2.19)$$

donde

$$\tan \varrho = \frac{u}{v},$$

y

$$u = \sqrt{P_c(1 - P_c)} \cos 2\theta_m^0 \sin(\eta_{12} + \eta_{22}) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_m^0 \sin 2\eta_{12} \\ + \frac{1}{2} P_c \sin 2\theta_m^0 (\sin 2\eta_{12} + \sin 2\eta_{22}),$$

$$v = -\sqrt{P_c(1 - P_c)} \cos 2\theta_m^0 \cos(\eta_{12} + \eta_{22}) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_m^0 \cos 2\eta_{12} \\ - \frac{1}{2} P_c \sin 2\theta_m^0 (\cos 2\eta_{12} + \cos 2\eta_{22}).$$

Una vez que el estado del neutrino se encuentra en el borde del medio, este se desplazará bajo buena aproximación en el vacío antes de ser finalmente detectados en la Tierra (Ψ_T), en este trayecto el estado es (salvo una fase global):

$$\Psi_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \Psi_\odot = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ e^{-i(\varrho+\varphi)} \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

donde $\varphi = \frac{\Delta}{2}D$ es la fase relativa adquirida por los estados propios de masa $\phi_{1,2}$ y D es la distancia que recorren en el vacío los neutrinos. Aplicando 1.5 podemos reescribir el estado en la base de sabor $\nu_{e,\mu}$:

$$\begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \cos \theta + \phi_2 \sin \theta e^{-i(\varrho+\varphi)} \\ -\phi_1 \sin \theta + \phi_2 \cos \theta e^{-i(\varrho+\varphi)} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

La probabilidad de supervivencia $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ es

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = |\psi_e|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2|\phi_1|^2) \cos 2\theta + \phi_1 \phi_2 \sin 2\theta \cos(\varrho + \varphi). \quad (2.22)$$

Como nos interesa calcular la probabilidad promedio $\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle$, se desprecia el tercer término de la expresión por ser una cantidad oscilante. Además combinando 2.19 y 2.22 se obtiene por último:

$$\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_c \right) \cos 2\theta \cos 2\theta_m^0, \quad (2.23)$$

Este resultado ha sido ya obtenido en Refs. [11] y [12]. En resumen, se ha encontrado la relación entre $\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle$ y P_c , de manera que conocida una de ellas se puede calcular directamente la otra. La probabilidad de supervivencia ha sido medida en diferentes experimentos, en la gráfica 2.1 se muestran las distintas mediciones realizadas como función de la energía. Se pone énfasis en lo bien que la curva predecida por el efecto MSW ajusta los datos experimentales.

Todo el procedimiento anterior es igualmente válido para antineutrinos, de manera que etiquetando 2.23 se tiene que:

$$\langle \bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \bar{P}_c \right) \cos 2\theta \cos 2\bar{\theta}_m^0. \quad (2.24)$$

Con las dos últimas ecuaciones obtenidas, estamos cerca de encontrar la relación entre las probabilidades de cruzamiento P_c y \bar{P}_c , sin embargo aún falta por desarrollar cual es la relación entre las probabilidades $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ y $\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$, lo cual se hará en el siguiente capítulo.

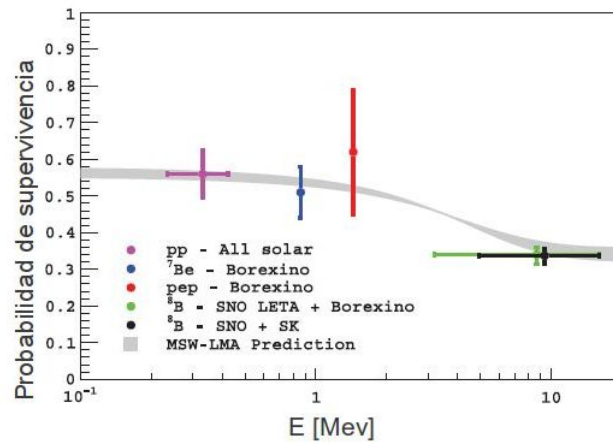


Figura 2.1: Probabilidad de supervivencia $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ como función de la energía. Las mediciones que se han hecho, utilizan diferentes reacciones para producir neutrinos.[13]

Capítulo 3

Antineutrinos.

Hasta ahora poco se ha mencionado sobre los antineutrinos, ésta capítulo esta dedicado a ellos. Primero se mostrará como obtener las soluciones de $\bar{\psi}_{e,\mu}$ en términos de las soluciones $\psi_{e,\mu}$, y con ello hallar la relación entre las probabilidades de supervivencia de antineutrinos y neutrinos. Después de encontrar dicha relación y utilizando resultados del capítulo anterior estaremos en condiciones de hallar la conexión entre las probabilidades de cruzamiento de antineutrinos y neutrinos.

3.1. Antineutrinos y ecuaciones de evolución en materia.

En el capítulo 1, se encontró la forma de la ecuación de evolución de los neutrinos en la base de sabor $\nu_{e,\mu}$. En el caso de antineutrinos, el procedimiento a seguir sería el mismo, con la única diferencia, de cambiar el signo del potencial: $V \rightarrow -V$. Este cambio se debe a que en el límite ultrarelativista son neutrinos con helicidad -1 y antineutrinos con helicidad $+1$, los que toman parte en la interacción (débil) con la materia. Como se muestra en la referencia [6], al calcular la energía potencial V de un neutrino y de un antineutrino, se obtiene que la magnitud de V es la misma, para ambos casos. Sin embargo, durante el cálculo, hay que tomar en cuenta la helicidad de la partícula. Esta consideración es la que hace la diferencia de signo en el potencial V entre neutrinos y antineutrinos. Por lo tanto, a partir de la ecuación 1.23 :

$$i \frac{d\bar{\Psi}}{dx} = H(x, -\Delta)\bar{\Psi} , \quad (3.1)$$

con

$$H(x, -V) = \bar{H}(x) = \begin{pmatrix} -V(x) - A & B \\ B & V(x) + A \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

por lo que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$i \frac{d\bar{\psi}_e}{dx} = -(V + A)\bar{\psi}_e + B\bar{\psi}_\mu, \quad (3.3a)$$

$$i \frac{d\bar{\psi}_\mu}{dx} = B\bar{\psi}_e + (V + A)\bar{\psi}_\mu, \quad (3.3b)$$

en lo que sigue veremos la manera equivalente de obtenerlas, sin necesidad de cambiar el signo de V .

Consideremos el sistema de ecuaciones para los neutrinos dado en 1.23. Conjugando y multiplicando por uno obtenemos

$$\begin{aligned} i \frac{d\psi_e^*}{dx} &= -(V - A)\psi_e^* - B\psi_\mu^*, \\ i \frac{d\psi_\mu^*}{dx} &= -B\psi_e^* + (V - A)\psi_\mu^*. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De la definición de A y B haciendo la sustitución $\Delta \rightarrow -\Delta$:

$$\begin{aligned} i \frac{d\psi_e^*}{dx} &= -(V + |A|)\psi_e^* + |B|\psi_\mu^*, \\ i \frac{d\psi_\mu^*}{dx} &= |B|\psi_e^* + (V + |A|)\psi_\mu^*. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Comparando con 3.3 vemos que $\bar{\psi}_{e,\mu}$ y $\psi_{e,\mu}^*$ obedecen las mismas ecuaciones. Así los sistemas de ecuaciones 3.3 y 3.5 en realidad son el mismo. Por lo cual al resolver el problema para neutrinos se obtiene de inmediato la solución para antineutrinos, sólo basta conjugar y realizar la sustitución $\Delta \rightarrow -\Delta$, por lo tanto si se satisfacen las mismas condiciones iniciales

$$\bar{\psi}_e(x, \Delta) = \psi_e^*(x, -\Delta). \quad (3.6)$$

Además:

$$|\bar{\psi}_e(\Delta)|^2 = |\psi_e^*(-\Delta)|^2 = |\psi_e(-\Delta)|^2 \quad (3.7)$$

i.e. se ha obtenido:

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(x, \Delta) = P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(x, -\Delta) \quad (3.8)$$

3.1. ANTINEUTRINOS Y ECUACIONES DE EVOLUCIÓN EN MATERIA.35

Como una observación útil vemos que se puede trabajar con la solución $\psi_e(-\Delta)$ sin conjugar, ya que lo que interesa es el cálculo de probabilidades. Aunque este resultado se ha derivado en el caso oscilaciones en materia, el resultado sigue siendo válido en el vacío ya que Δ aparece como una cantidad elevada al cuadrado en 1.19.

Veamos ahora la relación entre las amplitudes $\psi_{1,2}$ y $\bar{\phi}_{1,2}$:

$$\begin{aligned}\phi_1(-\Delta) &= \cos \theta \psi_e(-\Delta) + \sin \theta \psi_\mu(-\Delta) , \\ \phi_2(-\Delta) &= -\sin \theta \psi_e(-\Delta) + \cos \theta \psi_\mu(-\Delta) .\end{aligned}$$

Por 3.6 \Rightarrow

$$\begin{aligned}\phi_1^*(-\Delta) &= \cos \theta \bar{\psi}_e(\Delta) + \sin \theta \bar{\psi}_\mu(\Delta) , \\ \phi_2^*(-\Delta) &= -\sin \theta \bar{\psi}_e(\Delta) + \cos \theta \bar{\psi}_\mu(\Delta) ,\end{aligned}$$

de modo que

$$\phi_1^*(-\Delta) = \bar{\phi}_1(\Delta) , \quad (3.9a)$$

$$\phi_2^*(-\Delta) = \bar{\phi}_2(\Delta) . \quad (3.9b)$$

Es importante comprobar el hecho de que la sustitución $\Delta \rightarrow -\Delta$ en 3.5 es equivalente a cambiar el ángulo $\theta \rightarrow \theta - \pi/2$. En efecto, de las definiciones de A y B resulta:

$$A(\theta - \pi/2) = \frac{\Delta}{2} \cos(2\theta - \pi) = -\frac{\Delta}{2} \cos 2\theta$$

$$A(\theta - \pi/2) = -A(\theta) \quad (3.10)$$

$$B(\theta - \pi/2) = \frac{\Delta}{2} \sin(2\theta - \pi) = -\frac{\Delta}{2} \sin 2\theta$$

$$B(\theta - \pi/2) = -B(\theta) \quad (3.11)$$

De donde,

$$\bar{\psi}_e(x, \theta) = \psi_e(x, \theta - \pi/2).$$

Así las ecuaciones 3.7 y 3.8 también se pueden escribir en estos términos:

$$|\bar{\psi}_e(\theta)|^2 = |\psi_e^*(\theta - \pi/2)|^2 = |\psi_e(\theta - \pi/2)|^2 \quad (3.12)$$

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(x, \theta) = P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(x, \theta - \pi/2) \quad (3.13)$$

Sean ahora las amplitudes en la base de masa. El cambio $\theta \rightarrow \theta - \pi/2$ nos da

$$\begin{aligned} \phi_1(\theta - \pi/2) &= \cos(\theta - \pi/2) \psi_e(\theta - \pi/2) - \sin(\theta - \pi/2) \psi_\mu(\theta - \pi/2) , \\ \phi_2(\theta - \pi/2) &= \sin(\theta - \pi/2) \psi_e(\theta - \pi/2) + \cos(\theta - \pi/2) \psi_\mu(\theta - \pi/2) , \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} \phi_1^*(\theta - \pi/2) &= \sin \theta \bar{\psi}_e(\theta) + \cos \theta \bar{\psi}_\mu(\theta) , \\ \phi_2^*(\theta - \pi/2) &= -\cos \theta \bar{\psi}_e(\theta) + \sin \theta \bar{\psi}_\mu(\theta) , \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\phi_1^*(\theta - \pi/2) = \bar{\phi}_2(\theta), \quad (3.14a)$$

$$\phi_2^*(\theta - \pi/2) = -\bar{\phi}_1(\theta). \quad (3.14b)$$

Llama la atención el hecho de que en la base de masa, la relación entre la amplitudes $\psi_{1,2}$ y $\bar{\psi}_{1,2}$ es distinta dependiendo si hacemos la sustitución $\Delta \rightarrow -\Delta$ ó $\theta \rightarrow \theta - \pi/2$ como notamos de 3.9 y 3.14. Siendo que la relación entre las probabilidades de supervivencia de neutrinos y antineutrinos (3.8, 3.13) se mantiene inalterada bajo éstas sustituciones.

Cuando en la siguiente sección se muestre como calcular la probabilidad de transición P_c para neutrinos y antineutrinos se insistirá un poco mas en la utilidad de las ecuaciones 3.14.

3.2. Conexión entre neutrinos y antineutrinos.

En esta sección se investiga la relación entre las probabilidades de transición P_c y \bar{P}_c para neutrinos y antineutrinos. Después de ello se deriva una manera de calcular la probabilidad de supervivencia P_c en términos de ϕ_1 .

En la ecuación 3.8, al retener la parte promedio de las probabilidades y

luego usando las ecuaciones 2.23 y 2.24 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \bar{P}_c(\Delta) \right) \cos 2\theta \cos 2\bar{\theta}_m^0(\Delta) = \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_c(-\Delta) \right) \cos 2\theta \cos 2\theta_m^0(-\Delta) . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Notando que

$$\cos 2\theta_m^0(-\Delta) = -\frac{A + V_0}{\sqrt{(A + V_0)^2 + B^2}} = -\cos \bar{\theta}_m^0(\Delta) ,$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \bar{P}_c(x, \Delta) \right) \cos 2\theta \cos 2\bar{\theta}_m^0(\Delta) = \\ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - P_c(x, -\Delta) \right) \cos 2\theta \cos 2\theta_m^0(\Delta) , \\ \left(\frac{1}{2} - \bar{P}_c(\Delta) \right) = -\left(\frac{1}{2} - P_c(-\Delta) \right) . \end{aligned}$$

Con lo cual se deriva la fórmula general:

$$\boxed{\bar{P}_c(\Delta) = 1 - P_c(-\Delta)} . \quad (3.16)$$

De 2.19

$$\langle |\phi_1|^2 \rangle - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - P_c \right) \cos 2\theta_m^0 . \quad (3.17)$$

En primer lugar podemos calcular $\langle |\phi_1|^2 \rangle$ y comparar término a término en la expresión anterior para hallar P_c . Esto es precisamente lo que se hace para el caso del potencial exponencial. También como el ángulo en materia θ_m^0 esta evaluado en el punto de producción x_0 , cuando $V_0 \gg V_R = A$, se puede tomar válida la siguiente aproximación:

$$\cos 2\theta_m^0 \Big|_{V_0 \gg A} = \frac{A - V_0}{\sqrt{(A - V_0)^2 + B^2}} \Big|_{V_0 \gg A} \simeq -1 , \quad (3.18)$$

y sustituyendo éste resultado en 3.17 se obtiene:

$$\boxed{\langle |\phi_1|^2 \rangle \simeq P_c} . \quad (3.19)$$

Como ya se dijo en el capítulo anterior es mas sencillo resolver la ecuación para $\psi_{e,\mu}$ que para $\phi_{1,2}$. Sin embargo, es posible escribir $\phi_{1,2}$ en términos de $\psi_{e,\mu}$ (ver Apéndice), con lo cual no hay ningún problema para calcular P_c .

Igualmente para \bar{P}_c tenemos

$$\frac{1}{2} - \langle |\bar{\phi}_2|^2 \rangle = \left(\frac{1}{2} - \bar{P}_c \right) \cos 2\bar{\theta}_m^0, \quad (3.20)$$

de modo que al calcular $\langle |\bar{\phi}_2|^2 \rangle$ hay que comparar término a término en la ecuación anterior para determinar \bar{P}_c . De igual forma se puede aproximar el ángulo en materia:

$$\cos 2\bar{\theta}_m^0 \Big|_{V_0 \gg A} = \frac{A + V_0}{\sqrt{(A + V_0)^2 + B^2}} \Big|_{V_0 \gg A} \simeq 1, \quad (3.21)$$

esta aproximación la usamos en 3.20, así

$$\boxed{\langle |\bar{\phi}_2|^2 \rangle \simeq \bar{P}_c}. \quad (3.22)$$

En el ejemplo del potencial de Coulomb (Capítulo siguiente), se usan las aproximaciones 3.18, 3.21 para poder calcular las probabilidades de transición mediante 3.19 y 3.22.

Como se dijo al final de la sección anterior, podemos calcular $\bar{\phi}_2(x)$ a través de ϕ_1 mediante la sustitución $\theta \rightarrow \theta - \pi$,

$$\phi_1^*(\theta - \pi/2) = \bar{\phi}_2(\theta),$$

con lo que la probabilidad de transición para antineutrinos 3.22 también se puede calcular como:

$$\bar{P}_c = \langle |\phi_1(\theta - \pi/2)|^2 \rangle. \quad (3.23)$$

Con las fórmulas obtenidas en esta sección (resultados enmarcados), procederemos en el capítulo siguiente a ilustrarlos con dos potenciales a los que pueden estar sujetos los neutrinos y antineutrinos.

Capítulo 4

Soluciones exactas.

En el caso de oscilaciones entre 2 tipos de sabores, sólo existen unos cuantos potenciales que se pueden resolver analíticamente[14], entre ellos destaca el potencial exponencial y el de tipo Coulombiano. De manera general lo que hay que hacer es resolver una ecuación diferencial de segundo orden ya sea para ψ_e o ψ_μ . Dicha ecuación se puede escribir en la forma de Whittaker ó en la forma de la ecuación hipergeométrica confluyente (o de Kummer) para los potenciales que tiene solución analítica. Lo mismo sucede para la ecuación de Schrödinger, i.e. para un potencial dado que es exactamente soluble, esta se puede escribir en la forma de la ecuación hipergeométrica confluyente, un hecho que es muy rara vez mencionado [15],[16] en los libros de texto.

En los capítulos 1 y 2 se han desarrollado los elementos necesarios para calcular la probabilidad de supervivencia $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ y $P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e}$. Se ha visto como determinar las amplitudes $\bar{\psi}_{e,\mu}(\Delta)$ a partir de $\psi_{e,\mu}(-\Delta)$. En este capítulo se resuelve la ecuación de evolución de las amplitudes de los neutrinos en materia para dos perfiles de la densidad: exponencial y $1/r$. En ambos casos, a partir de la solución exacta para $\psi_\mu(x)$, encontraremos $\phi_1(x)$ y de aquí calculamos P_c . De un modo semejante encontraremos \bar{P}_c . Mediante estos resultados se verificará explícitamente la ecuación (3.16), la cual relaciona de una manera simple las probabilidades P_c y \bar{P}_c .

4.1. Potencial exponencial

En esta sección se resuelve el problema de las oscilaciones de neutrinos en un medio con un perfil de densidad que decrece exponencialmente. Esta es una aproximación razonable para el perfil de densidad electrónica dentro del Sol[3]. El problema ya ha sido resuelto [2], pero su solución es dada en términos de las funciones de Whittaker, las cuales no son simples de manipular en el límite asintótico que hay que considerar para hallar la probabilidad de transición. Aquí en cambio se resuelve el problema en términos de la ecuación hipergeométrica confluyente, obteniendo las soluciones de Kummer, las cuales son más sencillas de trabajar en el límite asintótico.

4.1.1. Soluciones para ψ_μ y $\bar{\psi}_\mu$.

Resolveremos la ecuación de evolución para ψ_μ ya que sus condiciones iniciales son mas simples que las correspondientes a ψ_e , esto se debe a que dentro del Sol sólo pueden producirse neutrinos ν_e .

De acuerdo con (1.27b), tenemos:

$$V(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} N_o e^{-x/\lambda}. \quad (4.1)$$

Siendo x la distancia medida con respecto al punto de producción R_0 . G_F es la constante de Fermi y el factor N_o incluye las siguientes constantes:

$$N_o = n_o e^{-R_0/\lambda}, \quad \lambda \simeq 0,1R_\odot, \quad R_\odot = \text{Radio del Sol},$$

donde n_o es la densidad del número de electrones en el punto de producción. Antes de escribir la ecuación, vemos que:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{V(x)}{\lambda},$$

con lo cual el término U_μ que aparece en (1.27b) es:

$$\begin{aligned} U_\mu &= -[V^2 - 2AV - iV'], \\ &= U_1 e^{-2x/\lambda} + U_2 e^{-x/\lambda}. \end{aligned}$$

donde

$$U_1 = -\left(\frac{G_F N_o}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad U_2 = \left(2A - \frac{i}{\lambda}\right) \frac{G_F N_o}{\sqrt{2}}.$$

Sustituyendo en 1.27b nos queda

$$-\frac{d^2\psi_\mu}{dx^2} + (U_1e^{-2x/\lambda} + U_2e^{-x/\lambda})\psi_\mu = \epsilon^2\psi_\mu, \quad (4.2)$$

que es la ecuación a resolver.

Considerando el comportamiento asintótico y cerca del origen de la ecuación anterior, se propone la siguiente solución $\psi_\mu(x)$:

$$\psi_\mu(x) = e^{-i\sqrt{\epsilon^2}x} e^{-y/2} F(y(x)), \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} y(x) &= 2\lambda\sqrt{U_1}e^{-x/\lambda} \\ &= 2i\lambda V(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sustituyendo (4.4) en 4.2, se obtiene:

$$y\frac{d^2F}{dy^2} + (b-y)\frac{dF}{dy} - aF = 0,$$

la cual es la forma estándar de la ecuación hipergeométrica confluyente. Por lo tanto la solución $F(y)$ se puede escribir directamente como [17]:

$$F(y) = c_1M(a, b; y) + c_2U(a, b; y), \quad (4.5)$$

donde las constantes a y b son definidas como:

$$a = \frac{1}{2} + i\lambda\sqrt{\epsilon^2} + \frac{\lambda U_2}{2\sqrt{U_1}}, \quad b = 1 + 2i\lambda\sqrt{\epsilon^2}.$$

Para el caso de neutrinos:

$$\sqrt{\epsilon^2} = \frac{\Delta}{2}, \quad \sqrt{U_1} = i\left(\frac{G_F N_o}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} + i\lambda\frac{\Delta}{2} + \frac{\lambda}{2}\left(2A - \frac{i}{\lambda}\right)\frac{G_F N_o}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{iG_F N_o}\right) & b &= 1 + 2i\lambda\frac{\Delta}{2} \\ &= i\lambda\Delta \sin^2\theta, & &= 1 + i\lambda\Delta, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde se ha usado la identidad 1.6.

Para la solución $\bar{\psi}_\mu$ tomamos $\bar{a} = a(-\Delta)$ y $\bar{b} = b(-\Delta)$:

$$\sqrt{\epsilon^2} = \sqrt{\left(\frac{-\Delta}{2}\right)^2} = \frac{\Delta}{2}, \quad A = -\frac{|\Delta|}{2} \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{2} + i\lambda \frac{\Delta}{2} - \frac{\lambda}{2} \left(2|A| + \frac{i}{\lambda}\right) \frac{G_F N_o}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{iG_F N_o}\right) & \bar{b} &= 1 + 2i\lambda \frac{\Delta}{2} \\ &= i\lambda \Delta \cos^2 \theta, & &= 1 + i\lambda \Delta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Así $\bar{b} = b$, también en ambos casos y es dado por (4.4), que puede reescribirse como

$$y = y_o e^{-x/\lambda} \quad (4.8)$$

con $y_o = 2i\lambda \frac{G_F N_o}{\sqrt{2}}$.

Si en $\psi_\mu(x=0) = 0$, entonces de la ecuación 1.23 se obtienen las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \psi_\mu(0) = 0, \\ \frac{\psi_\mu}{dx}(0) = -iB. \end{cases} \quad (4.9)$$

Para encontrar la segunda de ellas derivamos la solución 4.3 con respecto a x :

$$\frac{\psi_\mu}{dx}(x) = -\left(i\frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{dx}\right)\psi_\mu(x) + e^{-i\sqrt{\epsilon^2}x} e^{-y/2} \{c_1 M' + c_2 U'\} \frac{dy}{dx},$$

donde dy/dx viene dada por 4.8. La prima en las soluciones M y U significa derivada con respecto de y .

Para conocer las constantes $c_{1,2}$ no es necesario escribir explícitamente a ó \bar{a} . El sistema 4.9 implica (donde $y_o \equiv y(0)$):

$$\begin{aligned} c_1 M(y_o) + c_2 U(y_o) &= 0, \\ c_1 M'(y_o) + c_2 U'(y_o) &= i \frac{\lambda B}{y_o} e^{y_o/2}, \end{aligned}$$

utilizando el método del determinante, obtenemos:

$$\begin{aligned} W_o &= M(y_o)U'(y_o) - M'(y_o)U(y_o) \\ &= -\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \frac{e^{y_o}}{y_o^b} \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde W_o denota el wronskiano del sistema [17], entonces:

$$c_1 = \frac{1}{W_o} \begin{vmatrix} 0 & U(y_o) \\ i\frac{\lambda B}{y_o} e^{y_o/2} & U'(y_o) \end{vmatrix} = i\lambda B \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} y_o^{b-1} e^{-y_o/2} U(y_o), \quad (4.11)$$

$$c_2 = \frac{1}{W_o} \begin{vmatrix} M(y_o) & 0 \\ M'(y_o) & i\frac{\lambda B}{y_o} e^{y_o/2} \end{vmatrix} = -i\lambda B \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} y_o^{b-1} e^{-y_o/2} M(y_o). \quad (4.12)$$

Sustituyendo estos valores en ψ_μ , la solución para neutrino queda:

$$\psi_\mu(y) = \mathbb{k} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} e^{-y/2} \left\{ u(a, b; y_o) M(a, b; y) - M(a, b; y_o) u(a, b; y) \right\}, \quad (4.13)$$

donde $\mathbb{k} = i\lambda B \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} y_o^{b-1} e^{-y_o/2}$ es una cantidad constante. Para antineutrinos tenemos que:

$$\bar{\psi}_\mu(y, \Delta) = \psi_\mu(y, -\Delta), \quad (4.14)$$

que resulta de 4.13 usando \bar{a} .

4.1.2. Soluciones para ϕ_1 y $\bar{\phi}_2$.

Como vimos en el Capítulo 2, las probabilidades de supervivencia para ν_e y $\bar{\nu}_e$ estan dadas en términos de ϕ_1 y $\bar{\phi}_2$. En lo que sigue, hallaremos sus respectivas expresiones a partir de las soluciones para ψ_μ y $\bar{\psi}_\mu$. Para ello recordemos que la relación entre las funciones de onda Ψ y $\bar{\Phi}$ se obtiene a través de la matriz de mezcla. Antes de usar dicha matriz, es conveniente escribir la ecuación 1.23 de la siguiente forma:

$$\sin 2\theta \psi_\mu - \cos 2\theta \psi_e = \frac{2}{\Delta} \left(i \frac{d\psi_e}{dx} - V \psi_e \right), \quad (4.15)$$

$$\sin 2\theta \psi_e + \cos 2\theta \psi_\mu = \frac{2}{\Delta} \left(i \frac{d\psi_\mu}{dx} + V \psi_\mu \right). \quad (4.16)$$

Por otra parte, de (1.1):

$$\phi_1 = \cos \theta \psi_e - \sin \theta \psi_\mu, \quad (4.17)$$

$$\phi_2 = \sin \theta \psi_e + \cos \theta \psi_\mu. \quad (4.18)$$

A partir de 4.17, usando 4.16, nos queda:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{2 \sin \theta} \{2 \sin \theta \cos \theta \psi_e - 2 \sin^2 \theta \psi_\mu\}, \\
&= \frac{1}{2 \sin \theta} \{\sin 2\theta \psi_e + \cos 2\theta \psi_\mu - \psi_\mu\}, \\
&= \frac{1}{\Delta \sin \theta} \left\{ i \frac{d\psi_\mu}{dx} + \left(V - \frac{\Delta}{2} \right) \psi_\mu \right\}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

El resultado anterior se usará en el caso de neutrinos, para antineutrinos como se explicó en la sección 2.2, es conveniente usar $\bar{\phi}_2$. De 4.18

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{1}{2 \cos \theta} \{2 \sin \theta \cos \theta \psi_e + 2 \cos^2 \theta \psi_\mu\}, \\
&= \frac{1}{2 \cos \theta} \{\sin 2\theta \psi_e + \cos 2\theta \psi_\mu + \psi_\mu\}, \\
&= \frac{1}{\Delta \cos \theta} \left\{ i \frac{d\psi_\mu}{dx} + \left(V + \frac{\Delta}{2} \right) \psi_\mu \right\},
\end{aligned}$$

y según 3.9b, haciendo el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$ obtenemos:

$$\bar{\phi}_2 = - \frac{1}{|\Delta| \cos \theta} \left\{ i \frac{d\bar{\psi}_\mu}{dx} + \left(V - \frac{|\Delta|}{2} \right) \bar{\psi}_\mu \right\}. \tag{4.20}$$

Hacemos notar que en las ecuaciones (4.19) y (4.20) los términos entre llaves son muy semejantes, salvo que en la primera se tiene ψ_μ y en la segunda $\bar{\psi}_\mu$. Sin embargo, una vez derivada la solución para ψ_μ podemos escribir directamente la solución correspondiente para $\bar{\psi}_\mu$ considerando \bar{a} y b .

Entonces derivando con respecto de x :

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_\mu}{dx} &= -\frac{\mathbb{k}}{2} \left\{ i \Delta + \frac{dy}{dx} \right\} e^{-i \frac{\Delta}{2} x} e^{-y/2} \left\{ U(y_o) M(y) - M(y_o) U(y) \right\} \\
&\quad + \mathbb{k} e^{-i \frac{\Delta}{2} x} e^{-y/2} \left\{ U(y_o) M'(y) + M(y_o) U'(y) \right\} \frac{dy}{dx},
\end{aligned}$$

donde tomando en cuenta que, por (4.4),

⇒

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_\mu}{dx} &= -\frac{1}{2}(i\Delta - 2iV)\psi_\mu - \frac{\mathbb{k}}{\lambda} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} e^{-y/2} \left\{ U(y_o)M'(y) - \right. \\ &\quad \left. - M(y_o)U'(y) \right\} y , \\ i\frac{\psi_\mu}{dx} + \left(V - \frac{\Delta}{2} \right) &= -i\frac{\mathbb{k}}{\lambda} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} e^{-y/2} \left\{ U(y_o)M'(y) - M(y_o)U'(y) \right\} y . \end{aligned}$$

De (4.19) y (4.20) obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{i}{\lambda\Delta \sin\theta} \frac{\mathbb{k}}{\Gamma(b)} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} e^{-y/2} \left\{ U(y_o)M'(y) - M(y_o)U'(y) \right\} y \\ &= \frac{\lambda B}{\lambda\Delta \sin\theta} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} y_o^{b-1} e^{-(y+y_o)/2} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} \left\{ U(y_o)M'(y) - M(y_o)U'(y) \right\} y , \end{aligned}$$

donde

$$\frac{B}{\Delta \sin\theta} = \frac{\Delta \sin 2\theta}{2 \Delta \sin\theta} = \cos\theta ,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \cos\theta \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} y_o^{b-1} e^{-(y+y_o)/2} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} \left\{ U(a, b, y_o)M'(a, b, y) - \right. \\ &\quad \left. - M(a, b, y_o)U'(a, b, y) \right\} y . \end{aligned} \quad (4.21)$$

De igual manera para ϕ_2 resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_2 &= -\frac{i}{\lambda\Delta \cos\theta} \frac{\mathbb{k}}{\Gamma(b)} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} e^{-y/2} \left\{ U(y_o)M'(y) - M(y_o)U'(y) \right\} y \\ &= \frac{\lambda B}{\lambda\Delta \cos\theta} \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(b)} y_o^{b-1} e^{-(y+y_o)/2} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} \left\{ U(y_o)M'(y) - \right. \\ &\quad \left. - M(y_o)U'(y) \right\} y , \end{aligned}$$

donde

$$\frac{B}{\Delta \cos\theta} = \frac{\Delta \sin 2\theta}{2 \Delta \cos\theta} = \sin\theta ,$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_2 &= \sin\theta \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(b)} y_o^{b-1} e^{-(y+y_o)/2} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} \left\{ U(\bar{a}, b, y_o)M'(\bar{a}, b, y) - \right. \\ &\quad \left. - M(\bar{a}, b, y_o)U'(\bar{a}, b, y) \right\} y . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Por último, notemos la gran similitud entre las soluciones ϕ_1 y $\bar{\phi}_2$ donde, amén del factor $\sin\theta$ en vez de $\cos\theta$, la diferencia radica en que las soluciones U y M son evaluadas en a en un caso, y en \bar{a} en el segundo caso.

4.1.3. Desarrollo asintótico y probabilidades de cruzamiento.

En la práctica la forma en que están escritas ϕ_1 y $\bar{\phi}_2$ no es muy útil ya que M y U se expresan como series infinitas de potencias. Sin embargo, veamos que el potencial tiende a cero rápidamente conforme los neutrinos se propagan en el medio, justo en el borde del Sol es válida la siguiente aproximación:

$$V(x_\odot) \simeq 0 ,$$

de aquí concluimos que $M(y)$ y $U(y)$ deben ser evaluadas cuando $|y| \rightarrow 0$, como se infiere de 4.8.

Las siguientes identidades serán de utilidad en lo que sigue:

$$M'y = a[M(a+1, b; y) - M(a, b; y)] \} , \quad (4.23a)$$

$$U'y = a[(1+a-b)U(a+1, b; y) - U(a, b; y)] . \quad (4.23b)$$

Según la referencia [17], en el límite $|y| \rightarrow 0$ se tiene:

$$M(a, b; y) \simeq 1 + \frac{a}{b}y$$

$$M(a+1, b; y) \simeq 1 + \frac{1+a}{b}y$$

\Rightarrow

$$M(a+1, b; y) - M(a, b; y) \simeq \frac{y}{b}$$

y

$$U(a, b; y) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}y^{1-b} + O(|y|)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} (1+a-b)U(1+a, b; y) - U(a, b; y) = \\ (1+a-b) \left\{ \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+1+a-b)} + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(1+a)}y^{1-b} + O(|y|) \right\} \\ - \left\{ \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}y^{1-b} + O(|y|) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} + \left(\frac{(1+a-b)}{\Gamma(1+a)} - \frac{1}{\Gamma(a)} \right) y^{1-b} \Gamma(b-1) \\
&\quad - \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} + O(|y|) \\
&= (1-b) \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(1+a)} y^{1-b} + O(|y|) \\
&= -\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1+a)} y^{1-b} + O(|y|) .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la identidad 4.23:

$$\begin{aligned}
(U(y_o)M' - M(y_o)U')y &= M(y_o) a \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1+a)} y^{1-b} + O(y, |y|) \\
&= M(y_o) \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} y^{1-b} + O(y, |y|) . \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en ϕ_1 (ec. 4.21) nos queda

$$\phi_1 = \cos \theta e^{-(y+y_o)/2} \left(\frac{y}{y_o} \right)^{1-b} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} M(a, b; y_o) . \tag{4.25}$$

De igual forma para $\bar{\phi}_2$ resulta:

$$\bar{\phi}_2 = \sin \theta e^{-(y+y_o)/2} \left(\frac{y}{y_o} \right)^{1-b} e^{-i\frac{\Delta}{2}x} M(\bar{a}, b; y_o) . \tag{4.26}$$

Notemos que $1-b = -i\lambda\Delta$ y $\frac{y}{y_o} = e^{-x/\lambda}$, de donde

$$\left(\frac{y}{y_o} \right)^{1-b} = (e^{-x/\lambda})^{-i\lambda\Delta} = e^{ix\Delta} ,$$

y de aquí

$$\phi_1 = \cos \theta e^{-(y+y_o)/2} e^{i\frac{\Delta}{2}x} M(a, b; y_o) , \tag{4.27}$$

$$\bar{\phi}_2 = \sin \theta e^{-(y+y_o)/2} e^{i\frac{\Delta}{2}x} M(\bar{a}, b; y_o) . \tag{4.28}$$

Recordando que y y y_o son números imaginarios, resulta

$$\boxed{
\begin{aligned}
|\phi_1|^2 &\simeq \cos^2 \theta |M(a, b; y_o)|^2 , \\
|\bar{\phi}_2|^2 &\simeq \sin^2 \theta |M(\bar{a}, b; y_o)|^2 .
\end{aligned}
} \tag{4.29}$$

En lo que sigue estamos interesados en hallar una expresión finita para $|M|^2$. Observemos que en la definición de y_o (ec. 4.8) podemos substituir los valores de G_F , λ y n_o ¹. Como la variable es adimensional, hay que dividir entre $\hbar c$:²

$$\begin{aligned} |y_o| &= \frac{\sqrt{2}}{\hbar c} (6,95 \times 10^{-7} \text{ m}) \left(\frac{1,16 \times 10^{-5}}{\text{GeV}^2} \right) (\hbar c)^3 (6 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}) \\ &\simeq 2664,97, \end{aligned} \quad (4.30)$$

por lo que $|y_o| \gg 1$, entonces podemos considerar el límite asintótico de $M(y_o)$ y $U(y_o)$. Según [17]:

$$M(a, b; y_o) \simeq \Gamma(b) \left\{ \frac{e^{i\pi a} y_o^{-a}}{\Gamma(b-a)} P + \frac{e^{y_o} y_o^{a-b}}{\Gamma(a)} Q \right\},$$

donde

$$P = \sum_{n=0}^{R-1} \frac{(a)_n (1+a-b)_n}{n!} (-y_o)^{-n} + O(|y_o|^{-R}), \quad (4.31)$$

$$Q = \sum_{n=0}^{S-1} \frac{(b-a)_n (1-a)_n}{n!} y_o^{-n} + O(|y_o|^{-S}). \quad (4.32)$$

Introduciendo la notación $y_o = i\rho$, $a = i\alpha$ y $b = 1 + i\beta$, la solución M puede reescribirse como

$$\begin{aligned} M(a, b; y_o) &= \frac{\Gamma(b)}{\rho^a} e^{i\frac{\pi a}{2}} \left\{ \frac{P}{\Gamma(b-a)} + e^{-i\frac{\pi b}{2}} \frac{\rho^{2a-b}}{\Gamma(a)} Q e^{i\rho} \right\} \\ &= \frac{\Gamma(b)}{\rho^{i\tilde{\alpha}}} e^{-\frac{\pi\alpha}{2}} \left\{ \frac{P}{\Gamma(b-a)} - i e^{\frac{\pi}{2}\beta} \frac{\rho^{i(2\alpha-\beta)}}{\rho} \frac{Q}{\Gamma(a)} e^{i\rho} \right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Multiplicando este último resultado por su complejo conjugado

$$\begin{aligned} |M(a, b; y_o)|^2 &= \Gamma(b) \Gamma(b^*) e^{-\pi\alpha} \left\{ \frac{|P|^2}{\Gamma(b-a)\Gamma(b^*-a^*)} + \frac{e^{\pi\beta}}{\rho^2} \frac{|Q|^2}{\Gamma(a)\Gamma(a^*)} \right\} + \\ &+ i \frac{e^{\frac{\pi}{2}\beta}}{\rho} \left(\frac{PQ^*}{\Gamma(b-a)\Gamma(a^*)} \rho^{-i(2\alpha-\beta)} e^{-i\rho} - \right. \\ &\left. - \frac{P^*Q}{\Gamma(b^*-a^*)\Gamma(a)} \rho^{i(2\alpha-\beta)} e^{i\rho} \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

¹El valor de n_o es $6 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$ como se puede consultar en la referencia [18].

² $\hbar c = 1,97 \times 10^{-14} \text{ GeV cm}$.

En la expresión anterior basta considerar términos que son proporcionales a ρ^{-2} , donde (ver Apéndice):

$$|P|^2 = 1 + \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} - \beta) \frac{1}{\rho^2} + \dots \quad |Q|^2 = 1 + \dots$$

En lo que sigue se usan propiedades de la función $\Gamma(x)$ dadas en el Apéndice, con lo cual:

$$\begin{aligned} |M(a, b; y_o)|^2 &= \Gamma(1 + i\beta)\Gamma(1 - i\beta)e^{-\pi\alpha} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1 + i\beta - i\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1 - i\beta + i\alpha)} \times \right. \\ &\quad \times \left(1 + \alpha(\alpha - \beta) \frac{1}{\rho^2} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{e^{\pi\beta}}{\Gamma(i\alpha)\Gamma(-i\alpha)} \frac{1}{\rho^2} (1 + \dots) \right\} \\ &= \frac{\pi\beta}{\sinh(\pi\beta)} e^{-\pi\alpha} \left\{ \frac{\sinh(\pi(\beta - \alpha))}{\pi(\beta - \alpha)} \left(1 + \alpha(\alpha - \beta) \frac{1}{\rho^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha e^{\pi\beta}}{\pi\rho^2} \sinh(\pi\alpha) (1 + \dots) \right\} \\ &= \frac{\beta e^{-\pi\alpha}}{\sinh(\pi\beta)} \left\{ \frac{\sinh(\pi(\beta - \alpha))}{\beta - \alpha} \left(1 - \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\rho^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{\pi\beta} \sinh(\pi\alpha) \frac{\alpha}{\rho^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} |M(a, b; y_o)|^2 &= \frac{\beta e^{-\pi\alpha}}{(\beta - \alpha) \sinh(\pi\beta)} \times \\ &\quad \times \left\{ \sinh(\pi(\beta - \alpha)) + \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\rho^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(e^{\pi\beta} \sinh(\pi\alpha) - \sinh(\pi(\beta - \alpha)) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Es importante remarcar que esta expresión se particulariza cuando se toma α ó $\bar{\alpha}$, aún así vemos que el término $\frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\rho^2}$, que aparece en la expresión pasada es la misma sin importar si se toma a o \bar{a} :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\rho^2} &= \frac{\lambda^2 \Delta^2 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}{\lambda^2 (\sqrt{2} G \eta_o)^2}, & \frac{\bar{\alpha}(\beta - \bar{\alpha})}{\rho^2} &= \frac{\lambda^2 \Delta^2 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\lambda^2 (\sqrt{2} G \eta_o)^2} \\ \Rightarrow \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\rho^2} &= \frac{\Delta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sqrt{2} G \eta_o)^2} = \frac{\bar{a}(\beta - \bar{a})}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Además

$$(\sqrt{2}G\eta_o)^2 = 4V_o^2.$$

utilizando la condición de resonancia ($A = V_r$)

$$\frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\rho^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{B}{V_o} \right)^2$$

Por otra parte el término $\frac{\beta}{\beta - \alpha}$ que aparece en $M(a, b, y)$ es diferente, para neutrinos y antineutrinos:

$$\frac{\beta}{\beta - \alpha} = \frac{\lambda\Delta}{\lambda\Delta(1 - \sin^2 \theta)} = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad \frac{\beta}{\beta - \bar{\alpha}} = \frac{\lambda\Delta}{\lambda\Delta(1 - \cos^2 \theta)} = \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

Utilizando las observaciones anteriores

$$|\phi_1|^2 = \frac{e^{-\pi\alpha}}{\sinh(\pi\beta)} \left\{ \sinh(\pi(\beta - \alpha)) + \frac{1}{4} \left(\frac{B}{V_o} \right)^2 \left(e^{\pi\beta} \sinh(\pi\alpha) - \sinh(\pi(\beta - \alpha)) \right) \right\}. \quad (4.37)$$

$$|\bar{\phi}_2|^2 = \frac{e^{-\pi\bar{\alpha}}}{\sinh(\pi\beta)} \left\{ \sinh(\pi(\beta - \bar{\alpha})) + \frac{1}{4} \left(\frac{B}{V_o} \right)^2 \left(e^{\pi\beta} \sinh(\pi\bar{\alpha}) - \sinh(\pi(\beta - \bar{\alpha})) \right) \right\}. \quad (4.38)$$

Con el fin de identificar las probabilidades P_c y \bar{P}_c que aparecen en (3.17) y (3.20) restamos 1/2:

$$|\phi_1|^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^{-\pi\alpha}}{\sinh(\pi\beta)} \left\{ \sinh(\pi(\beta - \alpha)) + \frac{1}{4} \left(\frac{B}{V_o} \right)^2 \left(e^{\pi\beta} \sinh(\pi\alpha) - \sinh(\pi(\beta - \alpha)) \right) \right\} - \frac{1}{2}.$$

$$|\bar{\phi}_2|^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^{-\pi\bar{\alpha}}}{\sinh(\pi\beta)} \left\{ \sinh(\pi(\beta - \bar{\alpha})) + \frac{1}{4} \left(\frac{B}{V_o} \right)^2 \left(e^{\pi\beta} \sinh(\pi\bar{\alpha}) - \sinh(\pi(\beta - \bar{\alpha})) \right) \right\} - \frac{1}{2}.$$

Lo que sigue es factorizar las expresiones de la derecha, se trabaja el caso de neutrinos, para antineutrinos la situación será análoga:

$$|\phi_1|^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^{-\pi\alpha}}{2 \sinh(\pi\beta)} \left\{ 2 \sinh(\pi(\beta - \alpha)) - e^{\pi\alpha} \sinh(\pi\beta) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{B}{V_o} \right)^2 \left(e^{\pi\beta} \sinh(\pi\alpha) - \sinh(\pi(\beta - \alpha)) \right) \right\},$$

usando

$$e^{\pi\beta} \sinh(\pi\alpha) = e^{\pi\alpha} \sinh(\pi\beta) - \sinh(\pi(\beta - \alpha))$$

\Rightarrow

$$|\phi_1|^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^{-\pi\alpha}}{2 \sinh(\pi\beta)} \left\{ 2 \sinh(\pi(\beta - \alpha)) - e^{\pi\alpha} \sinh(\pi\beta) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{B}{V_o} \right)^2 \left(e^{\pi\alpha} \sinh(\pi\beta) - 2 \sinh(\pi(\beta - \alpha)) \right) \right\} \\ = \frac{1}{2} + e^{-\pi\alpha} \frac{\sinh(\pi(\beta - \alpha))}{\sinh(\pi\beta)} \\ + \left(\frac{1}{2} - e^{-\pi\alpha} \frac{\sinh(\pi(\beta - \alpha))}{\sinh(\pi\beta)} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{B}{V_o} \right)^2 \\ |\phi_1|^2 - \frac{1}{2} = - \left(\frac{1}{2} - e^{-\pi\alpha} \frac{\sinh(\pi(\beta - \alpha))}{\sinh(\pi\beta)} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{B}{V_o} \right)^2 \right),$$

y para antineutrinos resulta que:

$$|\bar{\phi}_2|^2 - \frac{1}{2} = - \left(\frac{1}{2} - e^{-\pi\bar{\alpha}} \frac{\sinh(\pi(\beta - \bar{\alpha}))}{\sinh(\pi\beta)} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{B}{V_o} \right)^2 \right).$$

El segundo factor de la derecha se puede simplificar usando (1.33) y (1.34). Evaluando en el punto de resonancia, se obtiene para neutrinos y antineutrinos:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_m^0 &= \frac{A - V_0}{\sqrt{(V_0 - A)^2 + B^2}} & \cos 2\bar{\theta}_m^0 &= \frac{A + V_0}{\sqrt{(V_0 + A)^2 + B^2}} \\ &= \frac{1}{V_0 - A} \frac{A - V_0}{\left(1 + \frac{B^2}{(V_0 - A)^2}\right)^{1/2}} & &= \frac{1}{V_0 + A} \frac{A + V_0}{\left(1 + \frac{B^2}{(V_0 + A)^2}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{B^2}{(V_0 - A)^2}\right)^{1/2}} & &= \frac{1}{\left(1 + \frac{B^2}{(V_0 + A)^2}\right)^{1/2}} \\ &\simeq - \left(1 - \frac{B^2}{2(V_0 - A)^2}\right) & &\simeq - \left(1 - \frac{B^2}{2(V_0 + A)^2}\right) \end{aligned}$$

Si $V_0 \gg A$ entonces

$$\cos 2\theta_m^0 \simeq -\left(1 - \frac{B^2}{2V_0^2}\right), \quad \cos 2\bar{\theta}_m^0 \simeq 1 - \frac{B^2}{2V_0^2}, \quad (4.39)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} |\phi_1|^2 - \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{2} - e^{-\pi\alpha} \frac{\sinh(\pi(\beta - \alpha))}{\sinh(\pi\beta)}\right) \cos 2\theta_m^0. \\ |\bar{\phi}_2|^2 - \frac{1}{2} &= -\left(\frac{1}{2} - e^{-\pi\bar{\alpha}} \frac{\sinh(\pi(\beta - \bar{\alpha}))}{\sinh(\pi\beta)}\right) \cos 2\theta_m^0. \end{aligned}$$

Comparando las 2 últimas igualdades con las ecuaciones (3.17) y (3.20) respectivamente, se concluye que las probabilidades de transición para neutrinos y antineutrinos son:

$$\begin{aligned} P_c &= e^{-\pi\alpha} \frac{\sinh \pi(\beta - \alpha)}{\sinh \pi\beta} \\ &= e^{-\pi\lambda\Delta \sin^2 \theta} \frac{\sinh \pi\lambda\Delta \cos^2 \theta}{\sinh \pi\lambda\Delta} \\ &= e^{-\pi\lambda\Delta \sin^2 \theta} \frac{e^{\pi\lambda\Delta \cos^2 \theta} - e^{-\pi\lambda\Delta \cos^2 \theta}}{e^{\pi\lambda\Delta} - e^{-\pi\lambda\Delta}} \\ &= e^{\pi\lambda\Delta \cos^2 \theta} \frac{e^{\pi\lambda\Delta \cos^2 \theta} - e^{-\pi\lambda\Delta \cos^2 \theta}}{e^{2\pi\lambda\Delta} - 1} \end{aligned}$$

o sea

$$\boxed{P_c = \frac{e^{2\pi\lambda\Delta \cos^2 \theta} - 1}{e^{2\pi\lambda\Delta} - 1}}, \quad (4.40)$$

y para antineutrinos

$$\begin{aligned} \bar{P}_c &= e^{-\pi\bar{\alpha}} \frac{\sinh \pi(\beta - \bar{\alpha})}{\sinh \pi\beta} \\ &= e^{-\pi\lambda\Delta \cos^2 \theta} \frac{\sinh \pi\lambda\Delta \sin^2 \theta}{\sinh \pi\lambda\Delta} \\ &= e^{-\pi\lambda\Delta \cos^2 \theta} \frac{e^{\pi\lambda\Delta \sin^2 \theta} - e^{-\pi\lambda\Delta \sin^2 \theta}}{e^{\pi\lambda\Delta} - e^{-\pi\lambda\Delta}} \\ &= e^{\pi\lambda\Delta \sin^2 \theta} \frac{e^{\pi\lambda\Delta \sin^2 \theta} - e^{-\pi\lambda\Delta \sin^2 \theta}}{e^{2\pi\lambda\Delta} - 1} \end{aligned}$$

i.e.

$$\overline{P}_c = \frac{e^{2\pi\lambda\Delta \sin^2 \theta} - 1}{e^{2\pi\lambda\Delta} - 1}. \quad (4.41)$$

Para cerrar esta sección se verificará la ecuación (3.16):

■

$$\begin{aligned} 1 - P_c(x, -\Delta) &= 1 - \frac{e^{-2\pi\lambda\Delta \cos^2 \theta} - 1}{e^{-2\pi\lambda\Delta} - 1} \\ &= \frac{e^{-2\pi\lambda\Delta} - e^{-2\pi\lambda\Delta \cos^2 \theta}}{e^{-2\pi\lambda\Delta} - 1} \\ &= \frac{e^{-2\pi\lambda\Delta}}{e^{-2\pi\lambda\Delta}} \cdot \frac{1 - e^{2\pi\lambda\Delta(1-\cos^2 \theta)}}{1 - e^{2\pi\lambda\Delta}} \\ &= \frac{e^{2\pi\lambda\Delta \sin^2 \theta} - 1}{e^{2\pi\lambda\Delta} - 1} \\ &= \overline{P}_c(x, \Delta) \end{aligned}$$

que es exactamente el resultado de 4.41.

4.2. Potencial de Coulomb

El potencial de Coulomb es en realidad un problema “académico” puesto que no tiene una aplicación práctica en lo que concierne a los neutrinos, a diferencia del potencial exponencial en el Sol. El problema para neutrinos ha sido ya resuelto por Pantaleone [4] siendo novedosa la solución que se presenta aquí para antineutrinos.

Sin embargo es un buen ejemplo para poner a prueba los resultados obtenidos en la sección 3.2. Además, la ecuación a resolver es idéntica a la que se resuelve en el átomo de Hidrógeno, sólo que ahora estamos interesados en escribir las soluciones de la ecuación hipergeométrica confluyente, a diferencia del primero donde usualmente se obtiene como solución los polinomios asociados de Laguerre [19]. Esto no es incompatible pues dichos polinomios son un caso particular de la función hipergeométrica confluyente.

4.2.1. Soluciones para ψ_μ y $\overline{\psi}_\mu$

El procedimiento usado en la sección anterior para hallar la probabilidad de transición P_c se aplica también para este potencial:

$$V = \frac{k}{x}, \quad (4.42)$$

de la definición 1.29 y sustituyendo $k = il$ se tiene

$$\begin{aligned} U_\mu(x) &= -\frac{k^2}{x^2} - \frac{k}{x^2} + \frac{2Ak}{x} \\ &= \frac{l(l-1)}{x^2} - \frac{2Ail}{x} . \end{aligned}$$

Antes de escribir 1.27b en la forma de la hipergeométrica confluyente, se introduce el cambio de variable:

$$x = \frac{z}{2i\epsilon} \quad (4.43)$$

por lo que la ecuación para ψ_μ es

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{l(l-1)}{z^2} - \frac{1}{z} \frac{Al}{\epsilon} - \frac{1}{4} \right] \Psi_\mu(z) = 0 . \quad (4.44)$$

Como en el ejemplo anterior, se propone una solución que considera el comportamiento de la ecuación cerca del origen y en el límite asintótico:

$$\psi_\mu(z) = z^l e^{-z/2} F(z) ,$$

sustituyendo esta solución en 4.44 se obtiene

$$z \frac{d^2 F}{dz^2} + (2l - z) \frac{dF}{dz} - \left(l - \frac{Al}{\epsilon} \right) F(z) = 0 , \quad (4.45)$$

donde

$$F(z) = f_1 M(\tilde{a}, \tilde{b}; z) + f_2 U(\tilde{a}, \tilde{b}; z)$$

$$\tilde{a} = l \left(1 - \frac{A}{\epsilon} \right) \quad \tilde{b} = 2l$$

Nótese que $\tilde{b} = 2ik$ por lo cual la constante es la misma para neutrinos y antineutrinos.

$$\tilde{b} = b = 2ik . \quad (4.46)$$

En cambio para neutrinos

$$a = l(1 - \cos 2\theta) = 2ik \sin^2 \theta ,$$

$$a = 2ik \sin^2 \theta . \quad (4.47)$$

Si $\Delta \rightarrow -\Delta$, para antineutrinos

$$\bar{a} = l(1 + \cos 2\theta) = 2ik \cos^2 \theta ,$$

$$\bar{a} = 2ik \cos^2 \theta . \quad (4.48)$$

Al igual que en el caso del potencial exponencial, la forma exacta de \tilde{a} y \tilde{b} sólo es relevante en el momento de escribir la probabilidad de transición P_c y \tilde{P}_c para neutrinos y antineutrinos respectivamente.

Veamos ahora las condiciones iniciales, si $\psi_\mu(x_0) = 0$, entonces de 1.23 se obtiene :

$$\begin{cases} \psi_\mu(x_0) = 0 , \\ \frac{d\psi_\mu}{dx}(x_0) = -iB , \end{cases} \quad (4.49)$$

donde $x_0 = \frac{z_0}{2i\epsilon}$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_\mu}{dx} &= 2i\epsilon \left\{ \left(\frac{l}{z} - \frac{1}{2} \right) \psi_\mu(z) + z^l e^{-z/2} \frac{dF}{dz} \right\} \\ \frac{d\psi_\mu}{dx} \Big|_{x_0} &= 2i\epsilon z_0^l e^{-z_0/2} \frac{dF}{dz} \Big|_{z_0} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{cases} f_1 M(\tilde{a}, b; z_0) + f_2 U(\tilde{a}, b; z_0) = 0 , \\ f_1 M'(\tilde{a}, ; z_0) + f_2 U'(\tilde{a}, b; z_0) = -\frac{B}{2\epsilon} z_0^{-l} e^{z_0/2} , \end{cases} \quad (4.50)$$

Para hallar las constantes $f_{1,2}$ usamos el método del determinante. De 4.10:

$$f_1 = \frac{1}{W_o} \begin{pmatrix} 0 & U_0 \\ -\frac{B}{2\epsilon} z_0^{-l} e^{z_0/2} & U'_0 \end{pmatrix} = -\frac{\Gamma(\tilde{a})}{\Gamma(b)} \frac{e^{-z_0/2} z_0^l}{2\epsilon} U_0 B .$$

$$f_2 = \frac{1}{W_o} \begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ M'_0 & -\frac{B}{2\epsilon} z_0^{-l} e^{z_0/2} \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\tilde{a})}{\Gamma(b)} \frac{e^{-z_0/2} z_0^l}{2\epsilon} M_0 B .$$

El subíndice 0 denota la función evaluada en z_0 . Así la solución es

$$\begin{aligned} \psi_\mu(z) &= \frac{\Gamma(\tilde{a})}{\Gamma(b)} \frac{B}{2\epsilon} e^{-(z+z_0)/2} (zz_0)^l \times \\ &\times \left\{ -U(\tilde{a}, b; z_0) M(\tilde{a}, b; z) + M(\tilde{a}, b; z_0) U(\tilde{a}, b; z) \right\}. \quad (4.51) \end{aligned}$$

4.2.2. Soluciones para ϕ_1 y $\bar{\phi}_2$

Para hacer el cambio de base, vimos en la sección pasada que para neutrinos se usa la fórmula 4.19 y para antineutrinos se usa 4.20. Con el fin de hallar explícitamente ϕ_1 y $\bar{\phi}_2$, veamos que derivando ψ_μ con respecto a x se obtiene:

$$\frac{d\psi_\mu}{dx} = (2i\epsilon) \left\{ \left(\frac{l}{z} - \frac{1}{2} \right) \psi_\mu(z) + \frac{\Gamma(\tilde{a})}{\Gamma(b)} z_0^l e^{-z_0/2} \frac{B}{2\epsilon} \left(-U_0 M'(z) + M_0 U'(z) \right) \right\},$$

recordando que $k = -il$, $\epsilon^2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2$ y usando 4.43, podemos escribir el segundo término entre paréntesis como:

$$2i\epsilon \left(\frac{l}{z} - \frac{1}{2} \right) = i \left(\frac{k}{x} - \frac{\Delta}{2} \right) = i \left(V - \frac{\Delta}{2} \right)$$

por lo que

$$\frac{d\psi_\mu}{dx} = i \left(V - \frac{\Delta}{2} \right) \psi_\mu + 2i\epsilon \frac{\Gamma(\tilde{a})}{\Gamma(b)} (zz_0)^l e^{-(z+z_0)/2} \frac{B}{2\epsilon} \left(-U_0 M'(z) + M_0 U'(z) \right)$$

$$i \frac{d\psi_\mu}{dx} + \left(V - \frac{\Delta}{2} \right) \psi_\mu = \frac{\Gamma(\tilde{a})}{\Gamma(b)} (zz_0)^l e^{-(z+z_0)/2} B \left(-U_0 M'(z) + M_0 U'(z) \right). \quad (4.52)$$

Por lo tanto, usando 4.52 en 4.19 y 4.20, se tiene para neutrinos:

$$\phi_1(z) = \frac{B}{\Delta \sin \theta} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} (zz_0)^l e^{-(z+z_0)/2} \left\{ -U_0 M'(z) + M_0 U'(z) \right\},$$

$$\frac{B}{\Delta \sin \theta} = \frac{\Delta \sin 2\theta}{2 \Delta \sin \theta} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{2 \sin \theta} = \cos \theta,$$

$$\phi_1(z) = \cos \theta \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} (zz_0)^l e^{-(z+z_0)/2} \times \quad (4.53)$$

$$\times \left\{ -U(a, b; z_0) M'(a, b; z) + M(a, b; z_0) U'(a, b; z) \right\}, \quad (4.54)$$

y para antineutrinos

$$\bar{\phi}_2(z) = \frac{B}{\Delta \cos \theta} \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(b)} (zz_0)^l e^{-(z+z_0)/2} \left\{ -U_0 M'(z) + M_0 U'(z) \right\},$$

$$\frac{B}{\Delta \cos \theta} = \frac{\Delta \sin 2\theta}{2 \Delta \cos \theta} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{2 \cos \theta} = \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_2(z) = \sin \theta \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(b)} (zz_0)^l e^{-(z+z_0)/2} \times \\ \times \left\{ -U(\bar{a}, b; z_0)M'(\bar{a}, b; z) + M(\bar{a}, b; z_0)U'(\bar{a}, b; z) \right\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

4.2.3. Desarrollo asintótico y probabilidades de cruzamiento.

Con el fin de obtener las probabilidades de cruzamiento 3.19 y 3.22, calculamos el módulo cuadrado de ϕ_1 y $\bar{\phi}_2$:

$$|\phi_1|^2 = \cos^2 \theta \frac{|\Gamma(a)|^2}{|\Gamma(b)|^2} e^{-2\pi k} \left| -U(a, b; z_0)M'(a, b; z) + M(a, b; z_0)U'(a, b; z) \right|^2.$$

$$|\bar{\phi}_2|^2 = \sin^2 \theta \frac{|\Gamma(a)|^2}{|\Gamma(b)|^2} e^{-2\pi k} \left| -U(\bar{a}, b; z_0)M'(\bar{a}, b; z) + M(\bar{a}, b; z_0)U'(\bar{a}, b; z) \right|^2.$$

Los límites correctos donde evaluar las funciones M y U se obtienen al considerar, de nueva cuenta, la dependencia del potencial en x (ec.4.42) y el cambio de variable 4.43, por lo cual estas se evalúan en los límites: $z_0 \rightarrow 0$ y $z \rightarrow \infty$ (ver [17]):

$$M(a, b; z = 0) = 1 \quad ; \quad U(a, b; z = 0) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)}$$

$$M(a, b; z \rightarrow \infty) = \Gamma(b) \left\{ \frac{e^{i\pi a} z^{-a}}{\Gamma(b-a)} + \frac{e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)} \right\}; \quad U(a, b; z \rightarrow \infty) = z^{-a},$$

además mediante las identidades

$$M'(a, b; z) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1; z); \quad U'(a, b; z) = -aU(a+1, b+1; z)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} |\phi_1|^2 = \cos^2 \theta \frac{|\Gamma(a)|^2}{|\Gamma(b)|^2} e^{-2\pi k} \times \\ \times \left| \frac{a}{b} \frac{|\Gamma(1-b)|^2}{\Gamma(1+a-b)} \left\{ \frac{e^{i\pi(a+1)} z^{-(a+1)}}{\Gamma(b-a)} + \frac{e^z z^{a-b}}{\Gamma(a+1)} \right\} + a z^{-(a+1)} \right|^2. \end{aligned}$$

Algunos de los términos que aparecen en $|\phi_1|^2$ se pueden manipular más fácilmente si se escribe:

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}} \rho, \quad b = i\beta, \quad a = i\alpha,$$

donde

$$\rho = 2\epsilon x, \quad \beta = 2k, \quad \alpha = 2k \sin^2 \theta.$$

La única diferencia para antineutrinos es que

$$\bar{a} = i\bar{\alpha} \quad \text{y} \quad \bar{\alpha} = 2k \cos^2 \theta.$$

Así

$$z^{a-b} = e^{-\frac{\pi}{2}(\alpha-\beta)} \rho^{i(\alpha-\beta)}, \quad z^{-(a+1)} = e^{\frac{\pi}{2}(\alpha-i)} \rho^{-(i\alpha+1)}$$

$$e^{i\pi(a+1)} z^{-(a+1)} = e^{-\frac{\pi}{2}\alpha} e^{i\frac{\pi}{2}} \rho^{-(i\alpha+1)}.$$

Sustituyendo estos resultados

$$|\phi_1|^2 = \cos^2 \theta \frac{|\Gamma(a)|^2}{|\Gamma(b)|^2} e^{-2\pi k} \left| \frac{\alpha}{\beta} \frac{|\Gamma(1-b)|^2}{\Gamma(1+a-b)} \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\alpha} e^{i\frac{\pi}{2}} \rho^{-i\alpha}}{\rho \Gamma(b-a)} + \frac{e^{i\rho} e^{-\frac{\pi}{2}(\alpha-\beta)} \rho^{i(\alpha-\beta)}}{\Gamma(a+1)} \right\} + i\alpha \frac{e^{\frac{\pi}{2}\alpha} e^{-i\frac{\pi}{2}} \rho^{-i\alpha}}{\rho} \right|^2.$$

Debido a que se considera $z \rightarrow \infty$ y por ende $\rho \rightarrow \infty$ el primer y tercer término de la expresión anterior se pueden despreciar:

$$|\phi_1|^2 = \cos^2 \theta \frac{|\Gamma(a)|^2}{|\Gamma(b)|^2} e^{-2\pi k} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2} \frac{|\Gamma(1-b)|^2 |\Gamma(1-b)|^2}{|\Gamma(1+a-b)|^2} \frac{e^{-\pi(\alpha-\beta)}}{|\Gamma(a+1)|^2} \right\},$$

pero

$$e^{-2\pi k} = e^{-\pi\beta},$$

entonces

$$|\phi_1|^2 = \cos^2 \theta \frac{|\Gamma(a)|^2}{|\Gamma(b)|^2} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2} \frac{|\Gamma(1-b)|^2 |\Gamma(1-b)|^2}{|\Gamma(1+a-b)|^2} \frac{e^{-\pi\alpha}}{|\Gamma(a+1)|^2} \right\}. \quad (4.56)$$

Notemos que ya no hay dependencia en z y no contiene términos oscilantes. En vista de esto, no hay necesidad de tomar el promedio de $|\phi_1|^2$ que se necesita para calcular 3.19.

Usando las ecuaciones A.30 y A.31 resulta

$$|\phi_1|^2 = \cos^2 \theta \frac{\beta}{\alpha - \beta} e^{-\pi\alpha} \frac{\sinh \pi(\alpha - \beta)}{\sinh \pi\beta}, \quad (4.57)$$

y renombrando $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ también se obtiene

$$|\bar{\phi}_2|^2 = \sin^2 \theta \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha} - \beta} e^{-\pi\bar{\alpha}} \frac{\sinh \pi(\bar{\alpha} - \beta)}{\sinh \pi\beta}. \quad (4.58)$$

De 4.57

$$\frac{\beta}{\alpha - \beta} = \frac{2k}{2k \sin^2 \theta - 2k} = -\frac{1}{\cos^2 \theta},$$

y de 4.58

$$\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha} - \beta} = \frac{2k}{2k \cos^2 \theta - 2k} = -\frac{1}{\sin^2 \theta},$$

entonces

$$|\phi_1|^2 = -e^{-\pi\alpha} \frac{\sinh \pi(\alpha - \beta)}{\sinh \pi\beta}, \quad (4.59)$$

$$|\bar{\phi}_2|^2 = -e^{-\pi\bar{\alpha}} \frac{\sinh \pi(\bar{\alpha} - \beta)}{\sinh \pi\beta}. \quad (4.60)$$

Recordando que $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, las ecuaciones anteriores se pueden simplificar observando que

$$\begin{aligned} -e^{-\pi\alpha} \frac{\sinh \pi(\alpha - \beta)}{\sinh \pi\beta} &= -\frac{e^{-\pi\alpha} e^{\pi(\alpha-\beta)} - e^{-\pi(\alpha-\beta)}}{e^{-\pi\beta} e^{2\pi\beta} - 1} \\ &= -e^{-\pi(\alpha-\beta)} \frac{e^{\pi(\alpha-\beta)} - e^{-\pi(\alpha-\beta)}}{e^{2\pi\beta} - 1} \\ &= \frac{e^{-2\pi(\alpha-\beta)} - 1}{e^{2\pi\beta} - 1}. \end{aligned}$$

Finalmente la probabilidad de cruzamiento para neutrinos esta dada por (3.19):

$$\begin{aligned} P_c &= |\phi_1|^2 \\ &= \frac{e^{-2\pi(\alpha-\beta)} - 1}{e^{2\pi\beta} - 1} \\ &= \frac{e^{4\pi k \cos^2 \theta} - 1}{e^{4\pi k} - 1} \end{aligned}$$

i.e.

$$\boxed{P_c = \frac{e^{4\pi k \cos^2 \theta} - 1}{e^{4\pi k} - 1}}. \quad (4.61)$$

Y para antineutrinos se obtiene de 3.22:

$$\begin{aligned} \bar{P}_c &= |\bar{\phi}_2|^2 \\ &= \frac{e^{-2\pi(\bar{\alpha}-\beta)} - 1}{e^{2\pi\beta} - 1} \\ &= \frac{e^{4\pi k \sin^2 \theta} - 1}{e^{4\pi k} - 1} \end{aligned}$$

i.e.

$$\boxed{\bar{P}_c = \frac{e^{4k\pi \sin^2 \theta} - 1}{e^{4\pi k} - 1}} \quad (4.62)$$

Para concluir la sección, veamos como el resultado 3.23 trivializa el cálculo de \bar{P}_c conocida P_c . Todo lo que hay que hacer es recorrer en $\pi/2$ el argumento de $\cos \theta$ que aparece en P_c :

$$\cos(\theta - \pi/2) = \sin \theta ,$$

por lo que de 4.61 se obtiene inmediatamente:

$$P_c(\theta - \pi/2) = \frac{e^{4k\pi \sin^2 \theta} - 1}{e^{4\pi k} - 1} ,$$

que coincide con 4.62.

La única diferencia que existió para calcular la probabilidad de cruzamiento en el potencial exponencial y el de Coulomb fue que en el primero se considero el desarrollo asintótico a segundo orden de las funciones hipergeométrica confluyente. En el caso Coulombiano los desarrollos se tomaron a primer orden, sin embargo la probabilidad de cruzamiento es independiente de este hecho. Esto se concluye al ver que en el caso exponencial los términos a segundo orden únicamente contribuyen para generar el factor $\cos 2\theta_m^0$ que aparece en 3.17. En cambio, si sólo consideramos el término a primer orden en M y U dicho factor no aparece, pero sin alterar la probabilidad de cruzamiento.

Conclusiones.

En este trabajo establecemos la relación que existe entre las probabilidades de supervivencia de neutrinos y antineutrinos para el caso de mezcla entre dos sabores. A fin de cumplir con el objetivo, notamos que bajo ciertos cambios en los parámetros que caracterizan las oscilaciones: $\Delta = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E}$ y θ , es posible hallar la equivalencia entre las ecuaciones de evolución de las amplitudes de sabor de los neutrinos y las ecuaciones correspondientes para antineutrinos. En particular, se encontró, que una vez resuelta la ecuación para neutrinos, no es necesario resolver la ecuación para antineutrinos, ya que a partir de la amplitud de sabor ψ_μ se puede determinar la amplitud complejo conjugada $\bar{\psi}_\mu^*$ para antineutrinos. Esto resulta útil, porque nos evita volver a resolver el problema, el cual no resulta en general, simple de hacer.

Con la relación obtenida entre $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ y $\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ logramos derivar una fórmula que nos permite relacionar las probabilidades de cruzamiento entre neutrinos y antineutrinos. Este es uno de los resultados de mayor importancia del presente trabajo y, en palabras, dice que, si conocemos una de las probabilidades de cruzamiento, la otra se puede obtener inmediatamente, sin necesidad de calcular la solución $\bar{\psi}_\mu$ ó ψ_μ . En su derivación se asumió que los neutrinos (antineutrinos) se producen y propagan en materia, para después realizar oscilaciones en el vacío. Si este no fuera el caso, la probabilidad de cruzamiento sería cero. Es preciso señalar, que el resultado es válido en general, pues es independiente del potencial que se considere.

Un aspecto de gran relevancia para obtener nuestro resultado, fue usar el formalismo del operador de evolución, con el se encontró que la probabilidad de cruzamiento se puede escribir en términos de las amplitudes en la base

adiabática, es decir, de los estados propios instantáneos del hamiltoniano en materia de neutrinos o antineutrinos, según el caso. En los ejemplos dados, los potenciales se hacen aproximadamente cero en el borde del medio, por lo que es posible sustituir los estados instantáneos por los estados de masa, evaluados en el borde del medio. Esto simplificó mucho las cosas debido a que en esta base, conocer como evoluciona el estado del neutrino en el vacío, es simplemente añadir una fase al estado. Sin embargo, si este no hubiera sido el caso, igualmente podemos hacer la transformación que nos lleve de una base a la otra. De hecho, debido a que el problema se resolvió en la base de sabor, también podíamos (si hubiera sido el caso) usar la transformación que relacionara la base de los estados instantáneos con la base de sabor.

Con el fin de verificar los resultados obtenidos, en la parte final de este trabajo, resolvimos a detalle la ecuación de evolución de los neutrinos para dos perfiles de densidad variable para los cuales el sistema de ecuaciones es exactamente soluble : exponencial y de tipo Coulombiano. A partir de la solución de los neutrinos, directamente se halló la solución para antineutrinos. Con estas soluciones, calculamos la probabilidad de cruzamiento asociadas a neutrinos y antineutrinos. Por otro lado, sustituimos la probabilidad de cruzamiento de neutrinos, en nuestra fórmula que conecta las probabilidades P_c y \bar{P}_c , para determinar también de esta otra manera, la probabilidad de cruzamiento de antineutrinos. En ambos potenciales, dicha probabilidad resultó idéntica, a la calculada por el otro procedimiento.

Apéndice A

A.1. Parámetros de la matriz de mezcla

En la Sección 1.2 utilizamos la propiedad de que la matriz de mezcla U es real, para después calcular la probabilidad de supervivencia. En este apartado se demuestra que para el caso especial de mezcla entre 2 sabores esto es cierto.

En general, una matriz compleja de $N \times N$ es especificada por $2N^2$ parámetros reales. La condición de unitariedad impone N condiciones en la diagonal más $2\left(\frac{N^2-N}{2}\right)$ condiciones fuera de la diagonal, esquemáticamente:

$$\text{Número de parámetros reales: } 2N^2 \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Número de condiciones: } 2\left(\frac{N^2-N}{2}\right) + N = N^2 \quad (\text{A.2})$$

La matriz U la podemos escribir como:

$$U = RO$$

donde R es una matriz de fases de $N \times N$ y O es una matriz ortogonal de $N \times N$, i.e O es real y satisface $O^t O = O O^t = \mathbb{I}$. De manera que el número de condiciones impuestas sobre O son : $\frac{N^2-N}{2} + N = \frac{N^2-N}{2}$, por lo tanto el número de parámetros independientes de O son:

$$N^2 - \frac{N^2-N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

de esta última expresión y en vista de A.2, el número de parámetros independientes de R son:

$$N^2 - \frac{N^2 - N}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \quad (\text{A.3})$$

Sin embargo, podemos eliminar algunas fases mediante una redefinición de los campos leptónicos. En el caso de Dirac, el número de tales fases no físicas es $2N - 1$, entonces el número de fases físicas del campo de Dirac son:

$$\frac{N(N+1)}{2} - (2N - 1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \quad (\text{A.4})$$

usando es resultado se implica directamente que en el caso $N = 2$ el número de fases es cero. Por lo tanto para oscilaciones entre dos sabores de neutrinos la matriz de mezcla U es real. Además esta es la misma matriz para el caso de neutrinos ya que $U^* = U$.

A.2. Operador de evolución no adiabático.

El operador de evolución \mathcal{U} se puede representar como una matriz compleja de 2×2 , estamos interesados en conocer la relación que existe entre los elementos de matriz, usando el hecho de que el operador es unitario. Con dicha relación encontraremos la representación general del operador de evolución. Sea:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

- Condición de unitariedad.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} &= \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |u_{11}|^2 + |u_{21}|^2 & u_{11}^* u_{12} + u_{21}^* u_{22} \\ u_{12}^* u_{11} + u_{22}^* u_{21} & |u_{12}|^2 + |u_{22}|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$|u_{11}|^2 + |u_{21}|^2 = 1, \quad (\text{A.5})$$

$$|u_{12}|^2 + |u_{22}|^2 = 1, \quad (\text{A.6})$$

$$u_{11}^* u_{12} + u_{21}^* u_{22} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$u_{12}^* u_{11} + u_{22}^* u_{21} = 0. \quad (\text{A.8})$$

De (A.7):

$$u_{11}^* u_{12} = -u_{21}^* u_{22} , \quad (\text{A.9})$$

de (A.8):

$$u_{12}^* u_{11} = -u_{22}^* u_{21} . \quad (\text{A.10})$$

Multiplicando (A.9) y (A.10):

$$|u_{11}|^2 + |u_{12}|^2 = |u_{21}|^2 |u_{22}|^2 . \quad (\text{A.11})$$

De (A.5):

$$|u_{21}|^2 = 1 - |u_{11}|^2 , \quad (\text{A.12})$$

de (A.6):

$$|u_{12}|^2 = 1 - |u_{22}|^2 . \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo (A.12) y (A.13) en (A.11) resulta que:

$$|u_{11}|^2 = |u_{22}|^2 .$$

Por otra parte, restando (A.6) de (A.5) obtenemos

$$|u_{11}|^2 = |u_{22}|^2 . \quad (\text{A.14})$$

- También por ser el operador unitario tenemos que:

$$\begin{aligned} \det (\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U}) &= \det \mathbb{I} , \\ (\det \mathcal{U}^\dagger)(\det \mathcal{U}) &= 1 , \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

notemos que

$$\begin{aligned} \det \mathcal{U}^\dagger &= \det (\mathcal{U}^T)^* , \\ &= (\det \mathcal{U}^T)^* , \\ &= (\det \mathcal{U})^* . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

usando (A.16) en (A.15) resulta que $|\det \mathcal{U}|^2 = 1$, esto implica

$$\det \mathcal{U} = e^{i\varphi} \quad \varphi: \text{fase.} \quad (\text{A.17})$$

Veamos ahora que el determinante de \mathcal{U} es igual a 1.

Sea $\tilde{\mathcal{U}}(t, t_0) = e^{-i\varphi/2} \mathcal{U}(t, t_0)$ tal que $\tilde{u}_{ij} = u_{ij} e^{-i\varphi/2}$, usando (A.17) se tiene que

$$\det \tilde{\mathcal{U}} = e^{-i\varphi} \det \mathcal{U} = 1 \quad (\text{A.18})$$

Sean

$$\psi(t) = \mathcal{U}(t, t_0)\psi(t_0) \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\mathcal{U}}(t, t_0)\psi(t_0) \quad (\text{A.20})$$

De (A.19)

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{i\varphi/2}\tilde{\mathcal{U}}(t, t_0)\psi(t_0) \\ &= e^{i\varphi/2}\tilde{\psi}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Como $\psi(t)$ y $\tilde{\psi}(t)$ sólo difieren en una fase global irrelevante, podemos imponer la condición de que el operador \mathcal{U} tiene determinante igual a 1, i.e.

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = 1 \quad (\text{A.22})$$

De la ecuación (A.7) resulta:

$$(u_{11}^*u_{12} + u_{21}^*u_{22})u_{11} = 0 ,$$

usando (A.22)

$$|u_{12}|^2u_{12} + u_{21}^*(1 + u_{12}u_{21}) = 0$$

y usando (A.5) se obtiene que

$$u_{21} = -u_{12}^* \quad (\text{A.23})$$

Sustituyendo este resultado en (A.7):

$$(u_{11}^* - u_{22})u_{12} = 0. \quad (\text{A.24})$$

Consideremos los siguientes casos:

- $u_{12} \neq 0 \Rightarrow u_{22} = u_{11}^*$
- $u_{12} = 0$ entonces \mathcal{U} es diagonal. Usando la unitariedad

$$|u_{11}|^2 + |u_{22}|^2 = 1 ,$$

se concluye que:

$$u_{11} = \frac{e^{i\lambda_1}}{\sqrt{2}}, \quad u_{22} = \frac{e^{i\lambda_2}}{\sqrt{2}}$$

usando que el determinante es igual a 1, entonces

$$u_{11}u_{22} = 1$$

$$u_{22} = u_{11}^{-1} = \frac{e^{-i\lambda_1}}{\sqrt{2}} = u_{11}^* \quad (\text{A.25})$$

Es decir, (A.24) implica que

$$u_{22} = u_{11}^* \quad (\text{A.26})$$

Por lo tanto, de (A.23) y (A.26) vemos que \mathcal{U} tiene la forma general

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ -u_{12}^* & u_{11}^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

A partir de (A.5) podemos escribir $u_{11} = \sqrt{1 - |u_{21}|^2} e^{-i\alpha}$, donde $u_{21} = \sqrt{P_c} e^{-i\beta}$ y P_c es real. Entonces $u_{11} = \sqrt{1 - P_c} e^{i\alpha}$, de manera que \mathcal{U} se puede reescribir como

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - P_c} e^{-i\alpha} & \sqrt{P_c} e^{i\beta} \\ -\sqrt{P_c} e^{-i\beta} & \sqrt{1 - P_c} e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Esta es la representación general matricial de cualquier operador unitario. En particular para neutrinos, esta es la expresión correcta del operador de evolución en la región no adiabática. Notemos que si $P_c = 0$ recuperamos el operador de evolución adiabático.

A.3. Desarrollo asintótico de la función hipergeométrica confluyente.

Consideremos las siguientes definiciones:

$$a = i\alpha \quad b = 1 + i\beta$$

- P: utilizando la fórmula 4.31

$$\begin{aligned} P &= 1 - \frac{a}{(a-b)} y_0 + \frac{1}{2y_0^2} a(a+1)(1+a-b)(2+a-b) + \dots \\ &= 1 - \frac{(i\alpha)i(\alpha-\beta)}{i\rho} - \frac{1}{\rho^2} (i\alpha)(1+\alpha)i(\alpha-\beta)(1+i\alpha-i\beta) + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Pero } (1+i\alpha)(1+i\alpha-i\beta) = 1 - \alpha(\alpha-\beta) + i(2\alpha-\beta)$$

$$\begin{aligned} P &= 1 - \alpha(\alpha-\beta) \frac{i}{\rho} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [1 - \alpha(\alpha-\beta) + i(2\alpha-\beta)] \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\rho^2} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} [1 - \alpha(\alpha-\beta)] \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\rho^2} - i\alpha(\alpha-\beta) \frac{1}{\rho} + \dots \end{aligned}$$

- Q: Nótese que en la fórmula 4.32 $|Q|^2$ aparece proporcional a $\frac{1}{\rho^2}$, por lo cual el desarrollo:

$$Q = 1 + \dots$$

es suficiente.

A.4. Propiedades de la función $\Gamma(x)$.

Propiedades útiles:

- $$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (\text{A.29})$$

- Sea $z = 1 + i x$, entonces
$$\Gamma(z)\Gamma(z^*) = \frac{\pi x}{\sinh(\pi x)} \quad (\text{A.30})$$

y combinando lo anterior

- $$\Gamma(ix)\Gamma(-ix) = \frac{\pi}{x \sinh \pi x} \quad (\text{A.31})$$

Bibliografía

- [1] G. L. Fogli, E. Lisi, D. Montanino, and A. Palazzo, “Supernova neutrino oscillations: A simple analytical approach,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 073008, Mar 2002.
- [2] S. Petcov, “Exact analytic description of two-neutrino oscillations in matter with exponentially varying density,” *Physics Letters B*, vol. 200, pp. 373–379, Enero 1988.
- [3] S. Toshev, “Exact analytical solution of the two neutrino evolution equation in matter with exponentially varying density,” *Phys.Lett.*, vol. B196, p. 170, 1987.
- [4] T. K. Kuo and J. Pantaleone, “Nonadiabatic neutrino oscillations in matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 39, pp. 1930–1939, Apr 1989.
- [5] K. Zuber, *Neutrino Physics*. CRC Press, 2da. ed., 2010.
- [6] C. Giunti and C. Kim, *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford University Press, 1a. edición ed., 2007.
- [7] L. Wolfenstein, “Neutrino oscillations in matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 17, pp. 2369–2374, May 1978.
- [8] H. A. Bethe, “Possible explanation of the solar-neutrino puzzle,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, pp. 1305–1308, Mar 1986.
- [9] S. Mikheyev and A. Smirnov, “Resonant amplification of neutrino oscillations in matter and solar-neutrino spectroscopy,” *Nuovo Cimento*, vol. 9C, 1986.
- [10] T. K. Kuo and J. Pantaleone, “Neutrino oscillations in matter,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, pp. 937–979, Oct 1989.

- [11] S. J. Parke, “Nonadiabatic level crossing in resonant neutrino oscillations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 1275–1278, Sep 1986.
- [12] J. C. D Olivo, “Magnus approximation for nonadiabatic transitions and neutrino oscillations in matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 45, pp. 924–929, Feb 1992.
- [13] G. Bellini and et al, “First evidence of *pep* solar neutrinos by direct detection in borexino,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 051302, Feb 2012.
- [14] O. Bychuk and V. Spiridonov, “Classification of exactly solvable densities for two-neutrino oscillations in matter,” *Mod.Phys. Lett. A*, pp. 1007–1012, 1990.
- [15] H. Hameka, *Quantum Mechanics: A Conceptual Approach*. Wiley-Interscience, 1a ed., 2004.
- [16] L. Landau and E. Lifshitz, *Física Teórica. Mecánica Cuántica (teoría no-relativista)*. Reverté, 1972.
- [17] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical functions*. National Bureau of Standards Publication, 1964.
- [18] O. Boyarkin, *Advanced Particle Physics*, vol. II. CRC Press, 2011.
- [19] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*. John Wiley, 2da. ed., 1995.