



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE QUÍMICA**

**ALGUNAS APLICACIONES DE CÁLCULO FRACCIONARIO EN  
PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE MOMENTUM Y MASA CON  
REACCIÓN QUÍMICA**

***TESIS***

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE**

**INGENIERO QUÍMICO**

**PRESENTA**

**JORGE LUIS CRUZ TRANI**



**MÉXICO, D.F.**

**2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

**PRESIDENTE:** Profesor: MANUEL VAZQUEZ ISLAS  
**VOCAL:** Profesor: ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS  
**SECRETARIO:** Profesor: NESTOR NOE LÓPEZ CASTILLO  
**1er. SUPLENTE:** Profesor: JULIO MARTIN ESPINOZA CASARES  
**2° SUPLENTE:** Profesor: JUAN PABLO AGUAYO VALLEJO

**SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA: DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA; FACULTAD DE QUÍMICA**

**ASESOR DEL TEMA: Dr. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS**

-----  
**FIRMA**

**SUSTENTANTE: JORGE LUIS CRUZ TRANI**

-----  
**FIRMA**

# ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	(6)
1.1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS DEL CÁLCULO FRACCIONARIO.....	(7)
1.2. EL CÁLCULO FRACCIONARIO EN EL SIGLO XIX.....	(7)
1.3. DEL SIGLO XX A LA ACTUALIDAD.....	(8)
2. FUNCIÓN GAMMA.....	(9)
2.1. PROPIEDADES BÁSICAS.....	(9)
2.2. VALORES Y GRÁFICA DE LA FUNCIÓN GAMMA.....	(13)
3. DEFINICIONES Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN FRACCIONARIA.....	(15)
3.1. LA INTEGRAL FRACCIONARIA.....	(15)
3.1.1. OBTENCIÓN DE LA INTEGRAL DE RIEMANN-LIOUVILLE.....	(16)
3.2. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL FRACCIONARIA.....	(20)
3.3. LA DERIVADA FRACCIONARIA.....	(21)
3.3.1. LA DEFINICIÓN DE LA MANO DERECHA VS LA DEFINICIÓN DE LA MANO IZQUIERDA.....	(21)
3.3.2. PROPIEDADES DE LA DERIVADA CAPUTO.....	(24)
4. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	(26)
4.1. CONVOLUCIÓN Y TRANSFORMADAS DE LAPLACE PARA DERIVADAS E INTEGRALES.....	(26)
4.2. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DERIVADA DE CAPUTO.....	(27)
5. LA FUNCIÓN DE MITTAG-LEFFLER (FM-L).....	(30)
5.1. ALGUNOS CASOS ESPECIALES DE LA FM-L.....	(31)
5.2. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA FUNCIÓN MITTAG-LEFFLER..	(34)

<b>6. FUNCIONES DE BESSEL.....</b>	<b>(39)</b>
6.1. FUNCIONES DE BESSEL DE PRIMERA CLASE.....	(40)
6.2. PROPIEDADES BÁSICAS.....	(42)
6.3. SERIES DE FOURIER-BESSEL.....	(44)
<b>7. TRANSFORMADA FINITA DE HANKEL.....</b>	<b>(49)</b>
7.1. CÁLCULO DE LAS RAÍCES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL.....	(50)
7.2. USO DE LA TRANSFORMADA FINITA DE HANKEL.....	(52)
<b>8. INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE     MOMENTUM UTILIZANDO CÁLCULO FRACCIONARIO.....</b>	<b>(56)</b>
<b>9. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES     SIN DERIVADA TEMPORAL FRACCIONARIA.....</b>	<b>(58)</b>
<b>10. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES     CON DERIVADA TEMPORAL FRACCIONARIA.....</b>	<b>(62)</b>
<b>11. CÁLCULO DE FLUJOS VOLUMÉTRICOS.....</b>	<b>(66)</b>
11.1. FLUJO PARA LA SOLUCIÓN SIN TIEMPO FRACCIONARIO.....	(66)
11.2. FLUJO PARA LA SOLUCIÓN CON TIEMPO FRACCIONARIO.....	(67)
<b>12. APLICACIONES EN TRANSFERENCIA DE MOMENTUM (PERFILES DE VELOCIDAD     EN UN TUBO).....</b>	<b>(68)</b>
12.1. EJEMPLO 1. C.I. $u(r, 0)=0$ .....	(68)
12.2. EJEMPLO 2. C.I. $u(r, 0)=R^2-r^2$ .....	(71)
12.3. EJEMPLO 3. C.I. $u(r, 0)=J_0(\varepsilon_1 r)$ .....	(76)
12.4. GRÁFICAS DE LOS PERFILES DE VELOCIDADES.....	(79)
12.5. GRÁFICAS DE LOS FLUJOS VOLUMÉTRICOS.....	(82)

13. APLICACIÓN EN TRANSFERENCIA DE MASA CON REACCIÓN QUÍMICA.....	(83)
13.1 OBTENCIÓN DEL PERFIL DE CONCENTRACIÓN UTILIZANDO CÁLCULO FRACCIONARIO.....	(87)
14. CUESTIONES ABIERTAS.....	(90)
15. CONCLUSIONES.....	(92)

## **1) INTRODUCCIÓN**

La idea principal del cálculo fraccionario es introducir operadores de orden arbitrario por ejemplo: la derivada de orden  $1/3, 1/2, 3/4$  etc.

En realidad aunque esto suena algo descabellado, el problema de encontrar la forma de esta clase de derivadas data de finales del siglo XVII.

Pero si hace más de 3 siglos se desarrollaron los cimientos de esta herramienta matemática por qué no es familiar el manejo de estos operadores. La razón se debe a que, desde su desarrollo hasta nuestra época, el cálculo fraccionario no se había utilizado para resolver algún problema de carácter científico sino meramente matemático, además el primer libro serio de cálculo fraccionario se publicó en la segunda mitad del siglo XX.

Actualmente el cálculo fraccionario es una herramienta que ha llamado la atención de una parte significativa de la comunidad científica, debido a que a partir de los años 80 se empezaron a estudiar problemas físicos utilizando técnicas de cálculo fraccionario, desde entonces hasta la fecha, la publicación de artículos que contengan algo sobre el tema ha ido en ascenso en diversos campos de estudio.

El objetivo de este trabajo es utilizar la herramienta anteriormente mencionada (Cálculo Fraccionario) para resolver un problema de transferencia de momentum en un cilindro y otro problema de transferencia de masa con reacción aplicando un operador fraccionario en la parte temporal de las ecuaciones diferenciales parciales correspondientes a cada problema, posteriormente se discutirá el significado físico de dicho operador y realizar la comparación de lo que ocurre cuando se utiliza o no esta herramienta.

La notación de las derivadas se comprende fácilmente. Aunque muchas personas no se han encontrado con derivadas de orden  $1/2$  antes, porque no existe aún en los textos comunes [15].

**Comentario:** Lo que se quiere dar a entender con textos comunes no implica que la bibliografía acerca del cálculo fraccionario no sea basta, por el contrario es extensa la intención es dar a entender a los lectores que no es un tema que sea enseñado a nivel licenciatura en un curso ordinario de cálculo diferencial e integral

### **1.1) ANTECEDENTES HISTÓRICOS DEL CÁLCULO FRACCIONARIO**

El 30 de septiembre de 1695 L'Hôpital le preguntó a Leibnitz: -¿Qué ocurre si el orden es  $\frac{1}{2}$  ?-. Leibnitz responde -"De esta paradoja se extraerán, algún día, consecuencias muy útiles"-.[12]

**Comentario:** cuando se habla de  $\frac{1}{2}$  es referente al orden de la derivada ya que normalmente se está acostumbrado a manejar órdenes de derivación enteros pero no fraccionarios.

### **1.2) EL CÁLCULO FRACCIONARIO EN EL SIGLO XIX [16]**

- ⊙ Lacroix, en 1819, menciona, por primera vez la derivada de orden arbitrario.
- ⊙ Más tarde Euler y Fourier trataron el tema, pero sin aplicaciones.
- ⊙ En 1823, Abel lo aplicó a la ecuación integral relacionada con el problema de las isócronas. Esto motivó a Liouville (1832) al primer gran intento de una definición formal y consistente de la derivada fraccionaria.
- ⊙ En 1847 Riemann escribió un artículo modificando la definición de Liouville del operador fraccionario que se conoce hoy como la Integral de Riemann – Liouville.
- ⊙ En 1868 A. V. Letnikov escribió el artículo "Theory of differentiation of fractional order".



### **1.3) DEL SIGLO XX A LA ACTUALIDAD**

- ⊙ Desde 1695 hasta 1974 muchos científicos han contribuido: Lagrange, Laplace, de Morgan, Heaveside, Riesz, Weyl. En 1974 aparece el primer texto dedicado al cálculo fraccionario: K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, 1974.
- ⊙ Muchos artículos científicos aparecen día a día en el mundo mostrando las más variadas aplicaciones.
- ⊙ Las aplicaciones más comunes actualmente se encuentran en Reología, Biología Cuántica, Electroquímica, Teoría de la Dispersión, Difusión, Teoría del Transporte, Probabilidad y Estadística, Teoría del Potencial, Elasticidad, Viscosidad y Teoría de Control Automático [16].

Ya existen paquetes en Matlab para el cálculo fraccionario y para el control automático fraccionario (este último, llamado Ninteger, gratis en internet).

## 2) FUNCIÓN GAMMA

En matemáticas, la **función Gamma** (denotada como  $\Gamma(z)$ ) es una función que extiende el concepto de factorial a los números complejos. La notación fue ideada por Adrien-Marie Legendre. Si la parte real del número complejo  $z$  es positivo, entonces la integral:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1)$$

Converge absolutamente; esta integral puede ser extendida a todo el plano complejo excepto a los enteros negativos y al cero.

### 2.1) PROPIEDADES BÁSICAS

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.1.1)$$

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad (2.1.2)$$

#### **Demostraciones**

Primero se obtiene la función  $\Gamma(z + 1)$  a partir de (2.1)

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \quad (2.1.3)$$

Luego se aplica integración por partes para obtener:

$$u = t^z$$

$$du = z t^{z-1} dt$$

$$dv = e^{-t}$$

$$v = -e^{-t}$$

$$-t^z e^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} dt$$

el primer producto evaluado de 0 a infinito = 0 y el 2º término queda así:

$$z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Con esto se comprueba (2.1.1) que es la fórmula recursiva

Ahora se procede a calcular  $\Gamma(1)$ :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0! \quad (2.1.4)$$

Si se quisiera calcular:  $\Gamma(5)$  sólo se debe utilizar (2.1.1)

$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4 * 3\Gamma(3) = 4 * 3 * 2\Gamma(2) = 4 * 3 * 2 * 1\Gamma(1) = 4!$$

Para finalizar se puede obtener una fórmula general para:  $\Gamma(n + 1)$

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)(n - 2) \dots (1)\Gamma(1) = n!$$

Se obtiene lo siguiente:

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad (2.1.5)$$

Para este trabajo el conocimiento de la función gamma es fundamental por sus propiedades, pero más allá de esto; por el alcance que posee: hace que esta función sea indispensable para el cálculo fraccionario; por ejemplo si se calcula  $\Gamma(3/2)$  realmente lo que se obtiene es  $(1/2)!$  Con esto se extiende la definición de los números factoriales a cantidades racionales inclusive se consigue definir algunos números factoriales negativos no enteros por ejemplo:

$$\Gamma(1/2) = \left(-\frac{1}{2}\right)! \quad (2.1.6)$$

Nota: La integral de la función gamma no converge para números enteros negativos

Para resolver  $\Gamma(1/2)$  no es tan simple como integrar por partes, es necesario hacer un cambio de variables y de coordenadas, a continuación se procederá a resolver este problema:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt \quad (2.1.7)$$

Primero se realiza un cambio de variable:

$$x = t^{1/2}$$

$$dx = \frac{1}{2} t^{-1/2} dt$$

$$2dx = t^{-1/2} dt$$

Cuando  $x$  tiende a cero,  $t$  también tiende a cero y para  $x$  que tiende a infinito  $t$  también tiende a infinito, por lo tanto la integral no cambia de límites y utilizando el cambio de variable, la integral se transforma en lo siguiente:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Para resolver esta integral se utilizarán coordenadas polares:

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (2.1.8)$$

Como la integral está definida el índice ( $x$ ) es una variable muda se tiene que:

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx * 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \quad (2.1.9)$$

Utilizando las propiedades de las integrales dobles y el teorema de Fubini [22] esto se puede reescribir así:

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (2.1.10)$$

Ahora cambiando la integral a coordenadas polares se obtiene:

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta \quad (2.1.11)$$

El gráfico muestra la función  $y = e^{-x^2}$  como se puede observar cuando se efectúa el cambio de coordenadas el primer cuadrante queda descrito por:  $0 \leq r < \infty$  y  $0 \leq \theta \leq \pi/2$

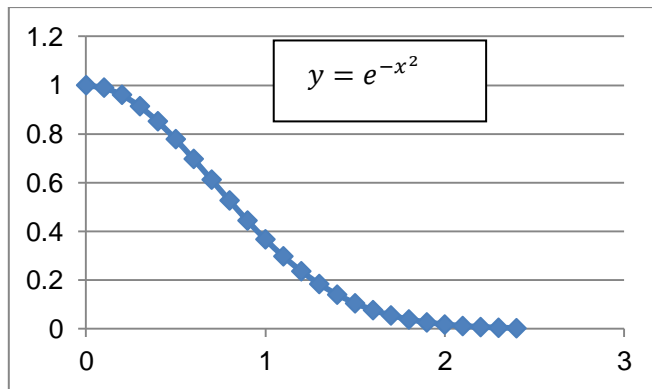


Figura 2.1.1: gráfica  $y = e^{-x^2}$

Como se puede observar la importancia de hacer el cambio de coordenadas radica en que en la primera integral se logra completar su diferencial y al resolver las 2 integrales se obtiene como resultado:

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \pi$$

Dado que  $[\Gamma(1/2)]^2 = \pi$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (2.1.12)$$

De esta manera se pueden calcular diversos valores de funciones gamma.

A continuación se presenta la forma de calcular valores de la función gamma:

## **2.2) Valores y gráfica de la función Gamma [24]**

Se pueden obtener valores de la función gamma con ayuda de ciertos programas, basta utilizar el siguiente comando:

### ***Gamma [n]***

Proporciona el valor de la función gamma para cierto valor de “n”

También se puede crear una tabla con diversos valores de la función gamma con el comando Table como se muestra a continuación:

### ***Table[Gamma[n+1/2],{n,5}]***

Con este comando se va a crear una lista de valores de la función gamma n es un parámetro que va a variar desde n=1 hasta 5 obteniendo así los valores de Gamma de 3/2,5/2... etc.

$$\text{Out}[1]= \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \frac{105\sqrt{\pi}}{16}, \frac{945\sqrt{\pi}}{32} \right\}$$

Figura 2.2.1: Valores de la función gamma

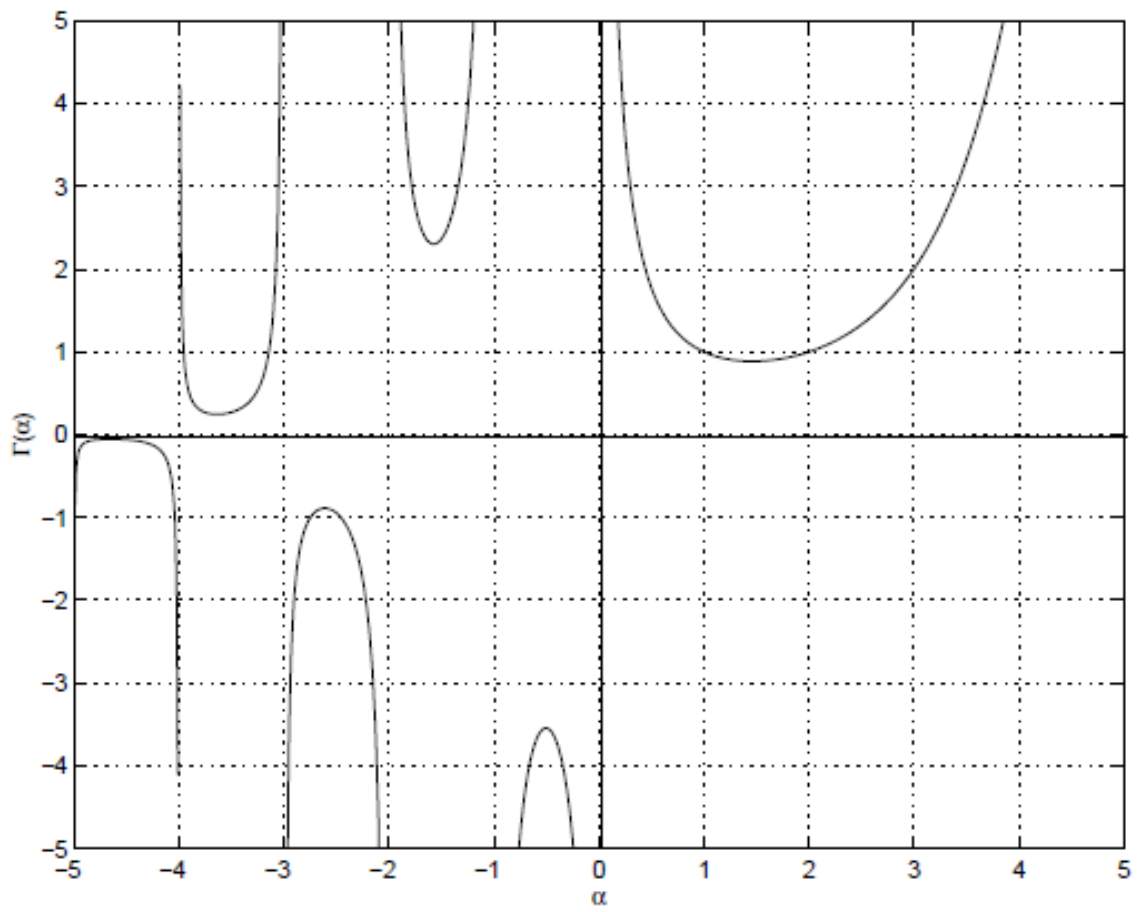


Figura 2.2.2 : Aproximación de la función gamma.

### 3) DEFINICIONES Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN FRACCIONARIA

#### 3.1) LA INTEGRAL FRACCIONARIA

Para introducir el concepto de las integrales y derivadas fraccionarias es necesario dar por hecho que son una extensión natural de las integrales y derivadas de orden entero, de la misma forma que el exponente fraccionario se puede expresar como una extensión de muchos exponentes tradicionales de orden entero[12].

La formulación común para la integral fraccionaria se puede obtener directamente a partir de la tradicional expresión de la integración sucesiva; esta aproximación es comúnmente conocida como la aproximación de Riemann-Liouville.

Ésta se demuestra a partir de una fórmula que es atribuida a Cauchy para la evaluación de la integral enésima de una función  $f(t)$ .

$$\int \dots \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (3.1.1)$$

Para poder ahorrar la necesidad de tener que escribir esta fórmula se va a introducir un nuevo operador al que se denota como  $J^n$  :

Por lo tanto la forma de expresar el nuevo operador es la siguiente:

$$J^n f(t) := f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (3.1.2)$$

Una gran ventaja de este operador es que puede ser intercambiado por su análogo para poder encontrar  $D^{-n}$ , aunque esto puede parecer muy simple, la verdad es que esta definición tal vez se convierta en errónea en especial cuando múltiples operadores son utilizados en combinación.

Ahora, la primera restricción que se puede encontrar en este operador, es que el factorial no está definido para números que no son enteros, pero, como se había visto previamente



la función gamma generaliza la definición de factorial para todos los reales positivos, con esto se puede dar el gran salto para definir la integral fraccionaria.

$$J^\alpha f(t) := f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.1.3)$$

Donde  $\alpha$  es una fracción y este operador introduce la integración de orden  $\alpha$  de una función.

En la siguiente sección se demuestra la fórmula de la integral de Riemann-Liouville esta prueba es clave para justificar la derivada fraccionaria más no primordial para entender el desarrollo de la formulación de la misma, en caso de no ver necesaria la prueba puede continuar leyendo este texto en la sección (3.2) para ver las propiedades de la integral fraccionaria.

### 3.1.1) OBTENCIÓN DE LA INTEGRAL DE RIEMANN-LIOUVILLE (3.1.3)

Laurent obtuvo la primera definición que satisfizo estas propiedades. Publicó un artículo en 1884 considerado como definitivo para los fundamentos del Cálculo Fraccionario [25]. Para ello partió de la fórmula de Cauchy para funciones complejas analíticas como se mencionó en la sección anterior.

$$F^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw \quad (3.1.1.1)$$

Donde  $\mathbf{C}$  representa el contorno de integración en el plano complejo, ahora denominado *Lazo de Laurent*, que se muestra en la siguiente figura:

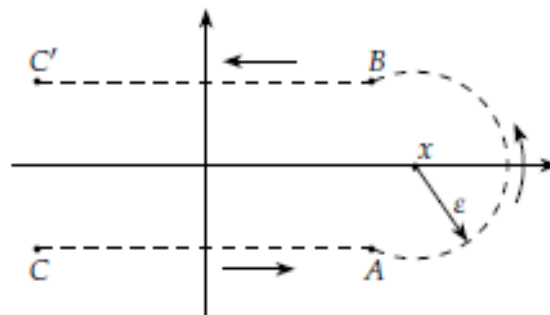


Figura 3.1.1.1) Lazo de Laurent.

Como se puede observar se tiene una integral de trayectoria que se puede descomponer en 3 integrales la primera que va de C a A la segunda de A a B y la tercera de B a C'.

El truco consiste en realizar los siguientes cambios de variable  $w=t$  y  $z=x$  y expresar (3.1.1.1) en forma exponencial.

$$F^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C e^{(-1-n)\ln(t-x)} f(t) dt \quad (3.1.1.2)$$

Ahora la parte del lazo AB se puede parametrizar como:  $t = x + \varepsilon e^{i\theta}$ ;  $t \in [-\pi, \pi]$  (esta parametrización representa la semicircunferencia con centro en  $x$  y radio  $\varepsilon$ )

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{(-1-n)\ln(\varepsilon e^{i\theta})} f(x + \varepsilon e^{i\theta}) \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$$

Se utilizan las propiedades de la exponencial.

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{(-1-n)} e^{(-1-n)i\theta} f(x + \varepsilon e^{i\theta}) \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-n} e^{-ni\theta} i f(x + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Si se considera  $n < 0$  la integral converge cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  (ver lazo de Laurent) en este caso en la parte CA del lazo  $\ln(w-z) = \ln(x-t) - i\pi$  y en la parte BC'  $\ln(w-z) = \ln(x-t) + i\pi$  y además la integral se anula con lo que resta calcular las integrales de CA y BC'

Para esto se toma (3.1.1.2) y se sustituyen los logaritmos.

$$\int_C^A e^{(-1-n)[\ln(x-t)-i\pi]} f(t) dt + \int_B^{C'} e^{(-1-n)[\ln(x-t)+i\pi]} f(t) dt$$

Utilizando las propiedades de las integrales de trayectoria se puede reescribir este último resultado como.

$$\int_C^A e^{(-1-n)[\ln(x-t)-i\pi]} f(t) dt - \int_{C'}^B e^{(-1-n)[\ln(x-t)+i\pi]} f(t) dt$$

Realizando álgebra esto se puede reescribir de la siguiente manera.

$$\int_C^A e^{(-1-n)(-i\pi)}(x-t)^{-1-n}f(t) dt - \int_{C'}^B e^{(-1-n)(i\pi)}(x-t)^{-1-n}f(t) dt$$

En el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  (ver Lazo de Laurent)  $C \rightarrow C', A \rightarrow x$  y  $B \rightarrow x$

$$\int_{C'}^x e^{(-1-n)(-i\pi)}(x-t)^{-1-n}f(t) dt - \int_{C'}^x e^{(-1-n)(i\pi)}(x-t)^{-1-n}f(t) dt$$

Como las 2 integrales tienen el mismo intervalo de integración se pueden agrupar en una sola.

$$\int_{C'}^x [e^{(-1-n)(-i\pi)} - e^{(-1-n)(i\pi)}](x-t)^{-1-n}f(t) dt$$

Si esta última integral se multiplica por  $n!/2\pi i$  se recupera (3.1.1.1) con el cambio de variable  $z=x$

$$\int_{C'}^x [e^{(-1-n)(-i\pi)} - e^{(-1-n)(i\pi)}](x-t)^{-1-n}f(t) dt$$

$$F^n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C'}^x [e^{(-1-n)(-i\pi)} - e^{(-1-n)(i\pi)}](x-t)^{-1-n}f(t) dt$$

De la fórmula anterior se puede reemplazar  $n!$  por la función gamma de un número alfa no necesariamente entero.

$$F^\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2\pi i} \int_{C'}^x [e^{(-1-\alpha)(-i\pi)} - e^{(-1-\alpha)(i\pi)}](x-t)^{-1-\alpha}f(t) dt$$

Se utiliza la definición del seno complejo:  $\text{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$$F^\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\pi} (\text{sen}(\alpha\pi + \pi)) \int_{C'}^x (x-t)^{-1-\alpha}f(t) dt$$

Aplicando la identidad trigonométrica del seno de suma de ángulos y la propiedad del seno de ser función impar se tiene:

$$F^\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\pi} \operatorname{sen}(-\alpha\pi) \int_{C'}^x (x - t)^{-1-\alpha} f(t) dt$$

Por último lo que resta es utilizar la fórmula de reflexión de Euler que es la siguiente:

$$\Gamma(P)\Gamma(1 - P) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(P\pi)} \quad (3.1.1.3)$$

Pero sustituyendo P por  $-\alpha$

$$F^\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\pi} \frac{\pi}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(-\alpha)} \int_{C'}^x (x - t)^{-1-\alpha} f(t) dt$$

Cancelando términos semejantes

$$F^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{C'}^x (x - t)^{-1-\alpha} f(t) dt$$

Finalmente se sustituye  $-\alpha$  por  $\alpha$

$$F^{-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_C^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Esta expresión es la fórmula de Riemann-Liouville ya que si se sustituye  $C = 0$  ó  $C = -\infty$  se obtienen las fórmulas de Riemann y Liouville respectivamente así concluye la prueba de (3.1.3)

### 3.2) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL FRACCIONARIA

La formulación de la integral fraccionaria lleva consigo propiedades muy importantes que serán de gran utilidad en la resolución de problemas que incluyen derivadas e integrales del mismo tipo.

El primer caso que se debe considerar son las integraciones de orden  $\alpha=0$

$$J^0 f(t) = f(t). \quad (3.2.1)$$

También, dada la naturaleza de la definición de la integral y basado en el principio del cual provino (la integral sucesiva de Cauchy) se ve lo siguiente:

$$J^n J^m = J^{m+n} = J^m J^n, \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (3.2.2)$$

Así que:

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta} = J^\beta J^\alpha, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (3.2.3)$$

Las condiciones principales para la función  $f(t)$  que se deben tener en consideración son las siguientes:

$f(t)$  debe ser una función causal tal que se desvanezca para  $t \leq 0$  y no debe crecer la función más rápido que lo que decrece la exponencial negativa y finalmente debe tener el siguiente efecto:

$$f(0) = f_n(0) = f_\alpha(0) \equiv 0. \quad (3.2.4)$$

### **3.3) LA DERIVADA FRACCIONARIA**

#### **3.3.1) LA DEFINICIÓN DE LA MANO DERECHA VS LA DEFINICIÓN DE LA MANO IZQUIERDA [15]**

Hasta el momento se ha visto la integral fraccionaria, pero no se ha definido la derivada, la primera pregunta que hay que hacer es:

¿Por qué se muestra primero la integral y no la derivada?

La respuesta es, porque si se encuentra una fórmula para realizar una integración sucesiva entonces de alguna manera se debe adaptar lo hecho con la integral y ocuparlo para encontrar una fórmula que permita encontrar derivadas sucesivas: este fue el método que prefirió seguir Grunwald y posteriormente Letnikov [15].

Sin embargo es posible formular una definición para la derivada de fraccionaria usando la definición obtenida para la integral análoga.

Si se desea realizar una diferenciación de orden  $\alpha$  donde  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Primero se tiene que seleccionar un número entero  $m$  tal que se cumpla lo siguiente:

$$m - 1 < \alpha < m$$

Dados estos números ( $m$  y  $\alpha$ ) se tienen dos formas posibles para definir la derivada. Al primer método le llamaremos “**La Definición de la Mano Izquierda**” y a continuación se muestra gráficamente cómo obtener una derivada con dicha definición:

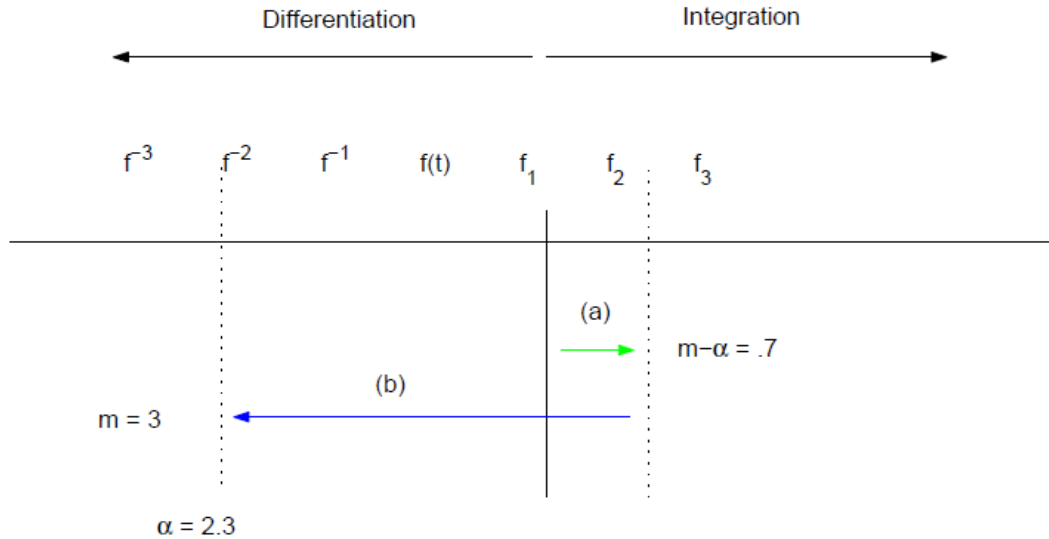


Figura 3.3.1.1: Representación gráfica de la definición del método de “la Mano Izquierda”

La explicación de este procedimiento es simple. Una vez encontrado el entero  $m$ , el primer paso es completar la operación (a) es decir integrar nuestra función  $f(t)$  por orden  $m - \alpha = 0.7$  en donde  $\alpha = 2.3$ . Segundo, se debe diferenciar la función resultante  $f_{0.7}(t)$  por orden  $m=3$  (operación (b))

Con esto se obtiene una diferenciación resultante de orden  $\alpha$ .

Este método se expresa matemáticamente a continuación:

$$D^\alpha f(t) := \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], \quad m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), \quad \alpha = m \end{array} \right\} \quad (3.3.1.1)$$

El segundo método se conoce como “Definición de la Mano derecha” y al igual que el método anterior se muestra a continuación gráficamente:

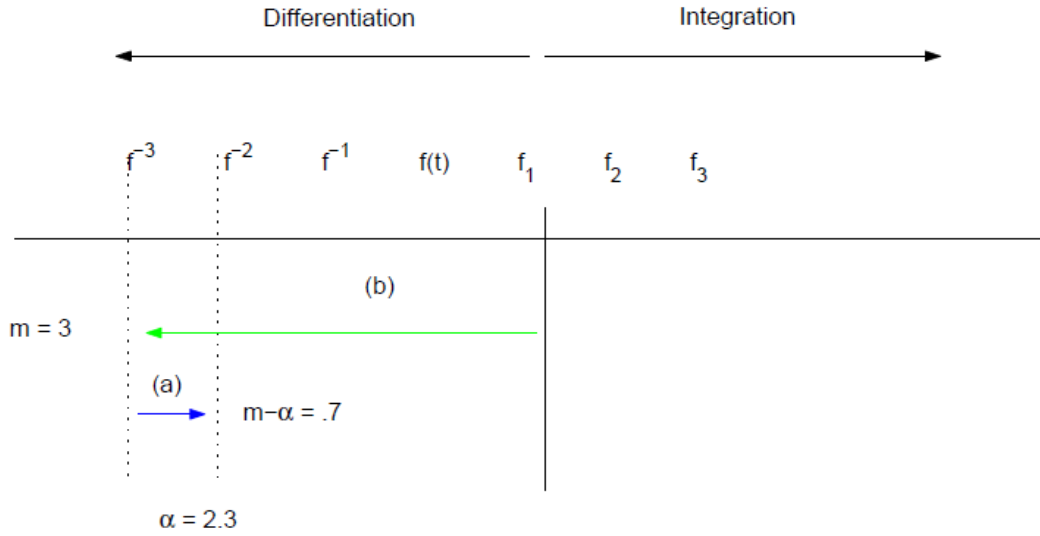


Figura 3.3.1.2: Representación gráfica de la definición del método de “la Mano Derecha”

Con la definición de la mano derecha se obtiene la derivación del mismo orden pero realizando las operaciones (a) y (b) al revés, a continuación se representa el resultado:

$$D_*^\alpha f(t) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{array} \right\} \quad (3.3.1.2)$$

Esta segunda definición aunque referida aquí como la “Definición de la Mano Derecha”, fue originalmente formulada por Caputo y comúnmente el nombre atribuido a esta fórmula es: **“Derivada Fraccionaria de Caputo”**



### 3.3.2) PROPIEDADES DE LA DERIVADA CAPUTO

Se puede ver que en algunas situaciones el significado de la “Definición de la Mano Derecha” (RHD por sus siglas en inglés), es más restrictiva que la “Definición de la Mano Izquierda” (LHD), se ve que este es el caso cuando se consideran las restricciones de la Integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Se debe mencionar que se requiere que  $f(t)$  sea una función causal que se desvanezca en  $t \leq 0$ , para LHD siempre que la función inicial de  $t$  satisfaga esta condición, como una necesidad para todos los enteros de orden  $\alpha > 0$ , por lo tanto no habrá problemas potenciales para esta especie de derivadas. Sin embargo para la RHD se sabe que, si se deriva la función de  $t$  por un orden  $m$ , no sólo debe ocurrir que  $f(0)=0$  sino que  $f^{(1)} = f^{(2)} \dots f^{(m)} = 0$ .

Siempre que se desea ser más preciso al dar una descripción se pierde simplicidad, la derivada Caputo es una extensión de la derivada habitual de orden entero pero no se debe olvidar que proviene del resultado de realizar una integral por lo tanto no se puede obtener la derivada fraccionaria de cualquier función cuando se dice que  $f(t)$  debe ser causal quiere decir que:  $f(t)=0$  para  $t < 0$  esta es una condición necesaria para que la integral de Riemann-Liouville converja.

En el mundo matemático la RHD es mucho más vulnerable que la LHD entonces de aquí surge una pregunta que se puede hacer y es: por qué es necesaria la RHD y la respuesta viene al resolver ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias (EDPF).

Lo que se quiere dar a entender con que la RHD es más “vulnerable” es referente al orden de las operaciones el hecho de que primero se tenga que derivar y posteriormente integrar (RHD) implica que la derivada de una constante es igual a cero mientras que utilizando la LHD no es cero esto implica que la LHD tiene menos limitaciones en sentido matemático que la RHD a esto se refiere con lo de “vulnerable”

Se pueden resolver EDPF con la LHD dando las condiciones iniciales adecuadas pero, como es de esperarse, estas condiciones iniciales que se requieren son de orden no entero, otro detalle que hay que cuidar es que, la derivada de una constante usando la LHD no es cero sino que es igual a:

$$D^\alpha C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

En el mundo físico La LHD presenta un problema substancial en la interpretación de ecuaciones de orden entero, pero actualmente no se tiene un entendimiento práctico del mundo en orden fraccionario. Con esto se concluye que: **“Las herramientas matemáticas van más allá del conocimiento del mundo físico”**.

**Por lo tanto en la RHD o derivada de Caputo se tiene la conexión entre lo que es práctico y posible [15].**

Ahora lo que se debe realizar, es encontrar la transformada de Laplace para la derivada de Caputo, con el fin de poder resolver Ecuaciones Diferenciales Parciales Fraccionarias (EDPF), así como estudiar otras funciones que se encontrarán en nuestro camino y se convertirán en parte de nuestro interés particular.

#### 4) LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La **Transformada de Laplace** de una función  $f(t)$  definida (en matemáticas y, en particular, en análisis funcional) para todos los números reales  $t \geq 0$ , es la función  $F(s)$ , definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (4.1)$$

Para que la transformada de Laplace de una función exista, la integral impropia debe converger; para que esto ocurra, estas funciones se describen como seccionalmente continuas y de **orden exponencial** cuando  $t \rightarrow \infty$  [17].

Uno de los teoremas fundamentales de la transformada de Laplace que se van a utilizar en este trabajo es el de la convolución y se enuncia a continuación.

##### 4.1) CONVOLUCIÓN Y TRANSFORMADAS DE LAPLACE PARA DERIVADAS E INTEGRALES

Algunas veces es posible identificar la transformada de Laplace  $H(s)$  como el producto de otras transformadas  $F(s)$  y  $G(s)$  las que corresponden a funciones conocidas  $f$  y  $g$ , respectivamente. En este caso, podría anticiparse que  $H(s)$  sería la transformada del producto de  $f$  y  $g$ , respectivamente. Sin embargo, no es así; en otras palabras, la transformada de Laplace no puede conmutarse con multiplicaciones ordinarias así que a continuación se va a introducir un “producto generalizado” llamado convolución [17]:

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = g(t) * f(t) \quad (4.1.1)$$

A menudo es difícil resolver la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo pero en el dominio de Laplace ( $s$ ) resulta ser una simple multiplicación

Y la transformada de Laplace de la convolución se expresa como sigue:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s) \quad (4.1.2)$$

Del teorema de la convolución también se obtiene este último resultado:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (4.1.3)$$

Ahora para completar un pequeño compendio de transformadas de Laplace, a continuación se presenta la transformada para la derivada de orden n, de una función f(t):

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (4.1.4)$$

Ahora conociendo las transformadas de Laplace para la derivada enésima de una función y la de la convolución se puede obtener de transformar la derivada de Caputo:

#### **4.2) TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DERIVADA DE CAPUTO**

A continuación se va a mostrar el procedimiento para obtener la transformada de Laplace de la derivada de Caputo.

Primero se toma la definición vista en (3.3.1.2).

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (4.2.1)$$

Se obtiene:  $\mathcal{L}\{t^{m-\alpha-1}\}$  (donde t no es un número entero) y esto se logra de la manera siguiente:

A partir de (2.1) se expresa:  $\Gamma(m-\alpha)$

$$\Gamma(m - a) = \int_0^{\infty} u^{m-\alpha-1} e^{-u} du \quad (4.2.2)$$

Se realiza un cambio de variable

$$u = st$$

$$du = sdt$$

Y se sustituye en la función gamma (4.2.2):

$$\Gamma(m - a) = \int_0^{\infty} (st)^{m-\alpha-1} e^{-st} sdt \quad (4.2.3)$$

$$\Gamma(m - a) = \int_0^{\infty} s^{m-\alpha} t^{m-\alpha-1} e^{-st} dt \quad (4.2.4)$$

Se despeja de (4.2.4)

$$\frac{\Gamma(m - a)}{s^{m-\alpha}} = \int_0^{\infty} t^{m-\alpha-1} e^{-st} dt \quad (4.2.5)$$

Con esto se obtiene la Transformada de Laplace de  $t^{m-\alpha-1}$  :

$$\int_0^{\infty} t^{m-\alpha-1} e^{-st} dt = \mathcal{L}\{t^{m-\alpha-1}\} = \frac{\Gamma(m - a)}{s^{m-\alpha}} \quad (4.2.6)$$

Con ayuda del resultado en (4.2.6) es posible obtener la transformada de Laplace de la derivada de Caputo de la siguiente manera:

Si se conoce la transformada de la derivada de orden  $m$  de una función (4.1.4) y utilizando (4.2.6) como se mencionó anteriormente, lo que sigue es usar el teorema de la convolución para expresar la transformada de la derivada de Caputo como un producto de transformadas.

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\Gamma(m-a)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau\right\} \quad (4.2.7)$$

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \left(\frac{1}{\Gamma(m-a)}\right) \left(\frac{\Gamma(m-a)}{s^{m-\alpha}}\right) \left(s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0)\right)$$

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^{\alpha-m} \left(s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0)\right) \quad (4.2.8)$$

Y finalmente se obtiene:

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (4.2.9)$$

Para finalizar se sabe que  $\alpha$  es un número fraccionario pero si se sustituye  $\alpha$  por  $m$  que pertenece a los naturales, se recupera la transformada de la derivada de una función de orden  $m$  o de orden  $n$ , como el índice de la suma es una variable muda esto es indistinto .

Para fines prácticos de este escrito a partir de (4.2.9) la fórmula que se obtendrá y utilizará es la siguiente posteriormente se explicará la razón (ver capítulo 8) :

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0) \quad (4.2.10)$$

*Nota: al sustituir  $\alpha = 1$  la transformada de Laplace que obtenemos es la de  $f'(t)$*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (4.2.11)$$

## 5) LA FUNCIÓN DE MITTAG-LEFFLER

La función de Mittag-Leffler es una función muy importante que se encuentra ampliamente y se usa en el mundo del cálculo fraccionario.

Así como la función exponencial se encuentra naturalmente en las ecuaciones diferenciales de orden entero, la función de Mittag-Leffler desempeña un rol análogo en la solución de ecuaciones diferenciales de orden no entero; de hecho la función exponencial es un caso particular de la función de Mittag-Leffler también conocida como exponencial generalizada.

### **Definición:**

En matemáticas, la función de Mittag-Leffler es una función especial de variable compleja que puede depender de uno o dos parámetros ( $\alpha$  si se menciona la función con un parámetro y,  $\alpha$  y  $\beta$  si se trata de la función con dos parámetros), dichos parámetros deben tener parte real positiva y matemáticamente se expresa así:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (5.1)$$

Ésta es la función de Mittag-Leffler de un parámetro

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (5.2)$$

Y ésta es la función de Mittag-Leffler de dos parámetros.

Se puede observar que la función de Mittag-Leffler (FM-L) de dos parámetros generaliza a la de un parámetro, ya que al sustituir  $\beta = 1$  se obtiene la función con un parámetro:

## 5.1) ALGUNOS CASOS ESPECIALES DE LA FM-L

Función exponencial :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z). \quad (5.1.1)$$

Función error :

$$E_{1/2,1}(z) = \exp(z^2) \operatorname{erfc}(-z). \quad (5.1.2)$$

Suma de una progresión geométrica :

$$E_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}. \quad (5.1.3)$$

Coseno hiperbólico :

$$E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z}). \quad (5.1.4)$$

Otra forma para la exponencial :

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z} \quad (5.1.5)$$



A continuación para poder dar una propiedad importante acerca del comportamiento de la función de Mittag-Leffler se mostrarán sus gráficas:

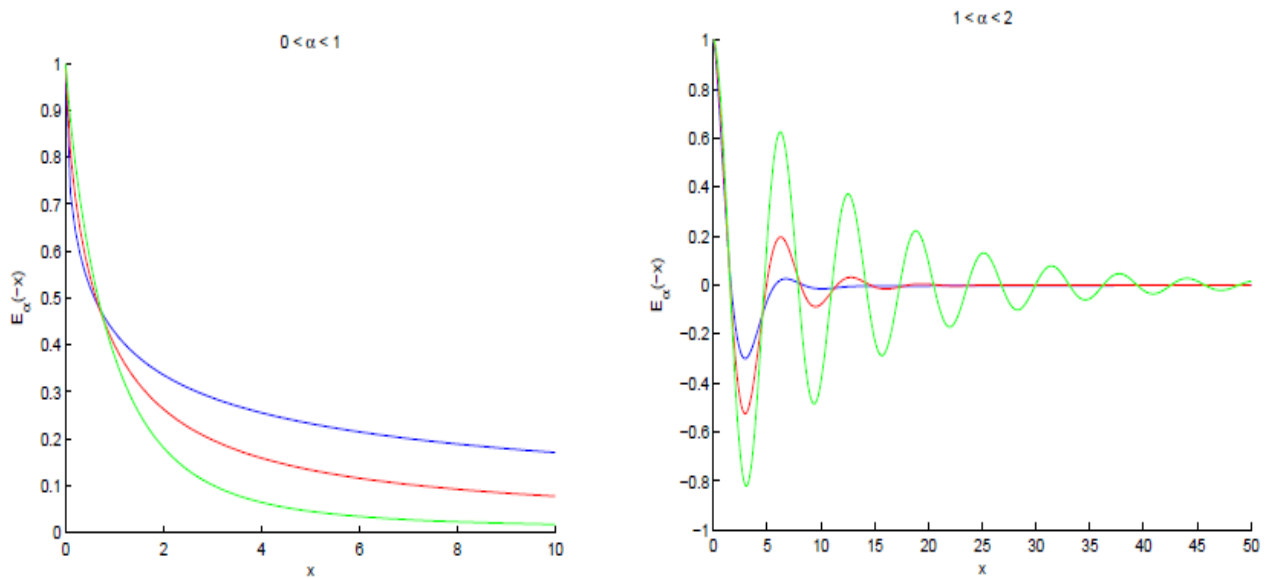


Figura 5.1.1: Gráficas de  $E_\alpha(-x)$  para  $\alpha = 0.5$  (azul),  $\alpha = 0.7$  (rojo),  $\alpha = 0.9$  (verde), y para  $\alpha = 1.5$  (azul),  $\alpha = 1.7$  (rojo),  $\alpha = 1.9$  (verde), respectivamente.

Propiedad:

$E_\alpha(-kx)$ , con  $k > 0$ , se comporta de modo similar a una exponencial negativa para  $0 < \alpha < 1$ , mientras que para  $1 < \alpha < 2$  tiene carácter ondulatorio:

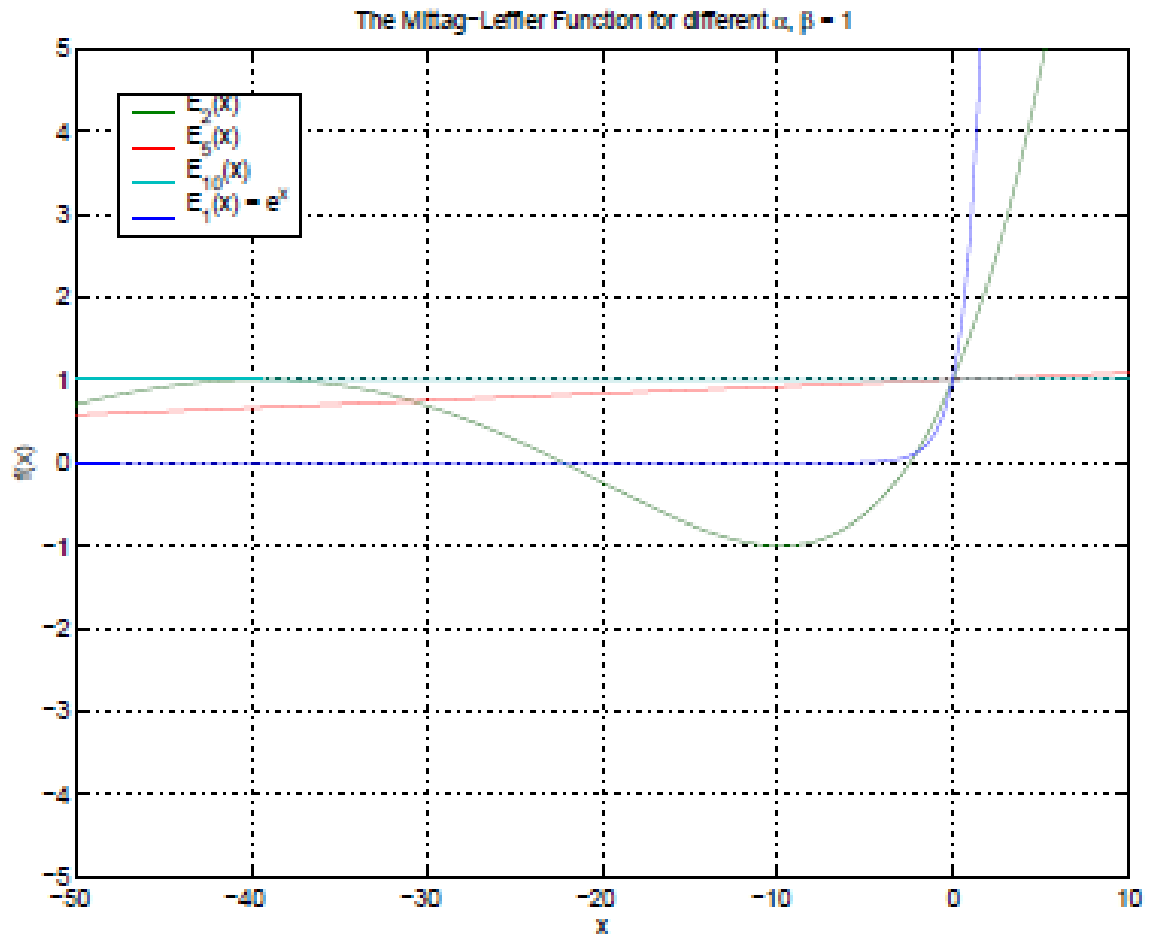


Figura 5.1.2: Aproximación de la función de Mittag-Leffler para valores de 1,2,5 y 10 [12].

## 5.2) LA TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA FUNCIÓN MITTAG-LEFFLER

Nota: En los libros de cálculo fraccionario se presentan las fórmulas de la transformada de FM-L lo que omiten es el procedimiento para obtener dichas fórmulas

Pero antes de comenzar a obtener esta transformada es necesario comentar que en ninguna bibliografía se ha encontrado la transformada de la función de Mittag tal cual, más bien hay que modificar la variable  $z$  de la función y multiplicarla por un factor:

### **Obtención de la fórmula:**

Se obtiene  $E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$  a partir de  $E_{\alpha,\beta}(z)$  (5.2)

$$E_{\alpha,\beta}(at^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (5.2.1)$$

Posteriormente se multiplica la función por  $t^{\beta-1}$

$$\begin{aligned} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha) &= t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Ahora se procede a calcular la transformada de esta función

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} e^{-st} dt \quad (5.2.3)$$

Como es bien sabido la integral es un operador lineal por lo tanto la suma se puede extraer del símbolo de la misma y se obtiene:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} dt \quad (5.2.4)$$

A continuación partiendo de (2.1) se obtiene  $\Gamma(\alpha k + \beta)$

$$\Gamma(\alpha k + \beta) = \int_0^{\infty} u^{\alpha k + \beta - 1} e^{-u} du \quad (5.2.5)$$

Se efectúa el mismo cambio de variable mostrado en (4.2.2) para obtener la transformada de la derivada de Caputo.

$$u = st$$

$$du = sdt$$

$$\Gamma(\alpha k + \beta) = \int_0^{\infty} (st)^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} sdt \quad (5.2.6)$$

Posteriormente se realiza un poco de álgebra y se despeja la transformada de Laplace de  $t^{\alpha k + \beta - 1}$

$$\Gamma(\alpha k + \beta) = \int_0^{\infty} s^{\alpha k + \beta} t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} dt \quad (5.2.7)$$

$$\frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{s^{\alpha k + \beta}} = \int_0^{\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} dt \quad (5.2.8)$$

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1}\} = \int_0^{\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} dt = \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{s^{\alpha k + \beta}} \quad (5.2.9)$$

Este resultado se sustituye en (5.2.4)

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} dt \quad (5.2.10)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1}\} \quad (5.2.11)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \left( \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{s^{\alpha k + \beta}} \right) \quad (5.2.12)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^{\alpha k + \beta}} \quad (5.2.13)$$

Ahora hay que re arreglar ésta última expresión

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^{\alpha k}} \quad (5.2.14)$$

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} a^k s^{-\alpha k} \quad (5.2.15)$$

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (as^{-\alpha})^k \quad (5.2.16)$$

La ecuación (5.2.16) tiene la forma de la serie geométrica dada por:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (5.2.17)$$

Ahora simplemente se va a utilizar la serie geométrica pero evaluada en  $as^{-\alpha}$  para obtener :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} &= \frac{1}{s^\beta} \left( \frac{1}{1-as^{-\alpha}} \right) \quad (5.2.18) \\ &= s^{-\beta} \left( \frac{1}{1-as^{-\alpha}} \right) \left( \frac{s^\alpha}{s^\alpha} \right) \end{aligned}$$

Finalmente se expresa el resultado.

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a} \quad (5.2.19)$$

Finalmente se realizará un breve experimento, se va a sustituir  $\alpha = \beta = 1$  en (5.2.19):

$$\mathcal{L}\{t^{1-1}E_{1,1}(at^1)\} = \frac{s^{1-1}}{s^1 - a} \quad (5.2.20)$$

$$\mathcal{L}\{E_{1,1}(at)\} = \frac{1}{s - a} \quad (5.2.21)$$

Esta última fórmula es precisamente  $\mathcal{L}\{e^{at}\}$  y curiosamente  $E_{1,1}(at) = e^{at}$ , con esto se concluye que no sólo la fórmula sirve para obtener la transformada de Laplace de la función Mittag-Leffler sino que, si se conoce qué función es generada a partir de ciertos parámetros de FM-L y se sustituyen los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  en la transformada se pueden obtener transformadas para otras funciones:

## 6) FUNCIONES DE BESSEL

En matemática, las **funciones de Bessel**, primero definidas por el matemático Daniel Bernoulli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas  $y(x)$  de la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2) y = 0 \quad (6.1)$$

donde  $p$  es un número real o complejo. El caso más común es cuando  $p$  es un entero  $n$ , aunque la solución para  $p$  no enteros es similar. El número  $p$  se denomina orden de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación.

Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial de segundo orden, tiene dos soluciones linealmente independientes.

Aunque  $p$  y  $-p$  dan como resultado la misma función, es conveniente definir diferentes funciones de Bessel para estos dos parámetros, pues las funciones de Bessel en función del parámetro  $\alpha$  son funciones suaves casi dondequiera. Las funciones de Bessel se denominan también funciones cilíndricas, o armónicos cilíndricos porque son solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

Las funciones de Bessel ordinarias de orden  $p$ , llamadas simplemente funciones de Bessel de orden  $p$  son soluciones de la ecuación de Bessel. Existen dos formas simples de expresar la solución general de la ecuación diferencial de Bessel con parámetro  $p$ , que están asociadas a las funciones de Bessel ordinarias de primera y de segunda especie



## 6.1) FUNCIONES DE BESSEL DE PRIMERA CLASE

Las funciones de Bessel de primera especie y orden  $p$  son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen ( $x = 0$ ) para enteros no negativos  $p$  y divergen en el límite  $x \rightarrow 0$  para  $p$  negativo no entero. El tipo de solución y la normalización de  $J_p(x)$  están definidos por sus propiedades abajo indicadas. Para las soluciones de orden entero es posible definir la función  $J_p(x)$  por su expansión en serie de Taylor en torno a  $x = 0$ :

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}, \quad |x| < \infty \quad (6.1.1)$$

El valor absoluto de  $x$  menor a infinito se conoce como intervalo de convergencia de la serie y se define a continuación:

Existe un número no negativo  $\rho$  denominado **radio de convergencia** tal que

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  converge absolutamente para  $|x - x_0| < \rho$  y diverge para  $|x - x_0| > \rho$ .

Para una serie que no converge en punto alguno excepto en  $x_0$ ,  $\rho$  se define como cero; para una serie que converge para toda  $x$ ; se dice que  $\rho$  es infinito. Si  $\rho > 0$ , entonces el intervalo  $|x - x_0| < \rho$  se le llama **intervalo de convergencia** y es indicado por la parte sombreada de la siguiente figura:

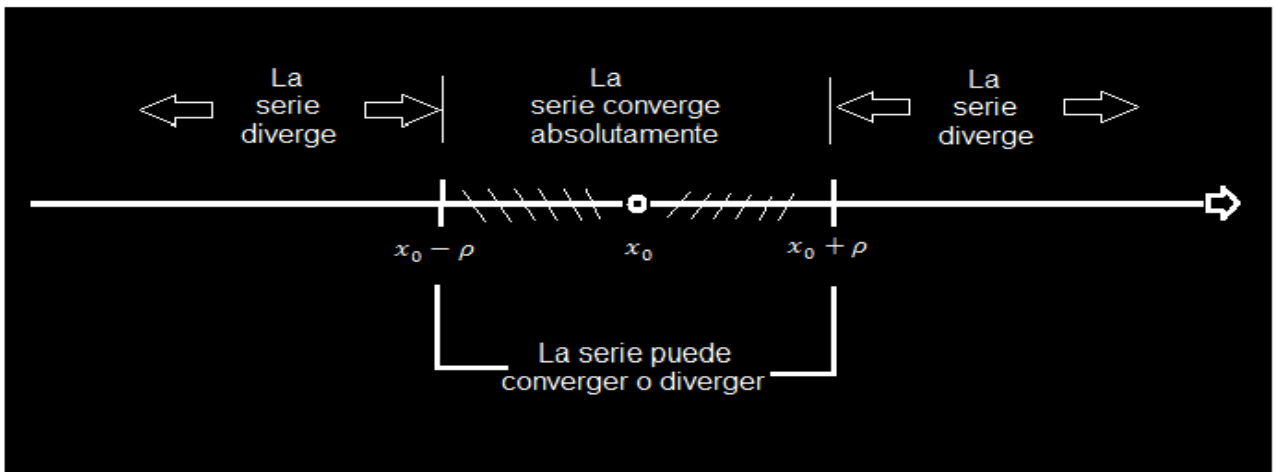


Figura 6.1.1: Intervalo de convergencia de una serie de potencias.

Para calcular el radio de convergencia se define la cantidad  $q$  de la siguiente manera:

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \quad (6.1.2)$$

Este límite es muy usado y se conoce como la prueba del cociente para series donde  $a_k$  es el coeficiente  $k$ -ésimo de la serie y  $a_{k+1}$  es el sucesor de  $a_k$  la cantidad  $q$  es muy importante porque el recíproco del mismo es el **radio de convergencia**, lo que sigue es probar que el intervalo de convergencia de la función de Bessel de primera clase es infinito.

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)! \Gamma(k+1+p+1) 2^{2(k+1)+p}}}{\frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1) 2^{2k+p}}} \right|$$

Realizando algo de álgebra y utilizando el valor absoluto se tiene que:

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! \Gamma(k+p+1) 2^{2k+p}}{(k+1)! \Gamma(k+p+2) 2^{2k+p+2}}$$

Ahora utilizando la fórmula (2.2.1) y descomponiendo los factoriales se tiene que:

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! \Gamma(k+p+1) 2^{2k+p}}{(k+1)k! (k+p+2)\Gamma(k+p+1) 2^{2k+p+2}}$$

Cancelando términos semejantes:

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)(k+p+2)2^2}$$

Calculando el límite se puede ver que  $q=0$  y como el radio de convergencia es el recíproco entonces el mismo es infinito finalmente se calcula el intervalo de convergencia  $(|x - x_0| < \rho)$  como  $x_0 = 0$  entonces el intervalo es  $|x| < \infty$  que es el que aparece en la fórmula (6.1.1)

## 6.2) PROPIEDADES BÁSICAS

$$\frac{d}{dx} (x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x) \quad (6.2.1)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (6.2.2)$$

### **Demostración**

$$\frac{d}{dx} (x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$$

$$x^p J_p(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

$$x^p J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \frac{x^{2n+2p}}{2^{2n+p}}$$

$$\frac{d}{dx} x^p J_p(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \frac{x^{2n+2p}}{2^{2n+p}}$$

**Se sabe que la derivada de una suma es la suma de las derivadas por ser este un operador lineal**

$$\frac{d}{dx} x^p J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \frac{d}{dx} \frac{x^{2n+2p}}{2^{2n+p}}$$

$$\frac{d}{dx} x^p J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2p) x^{2n+2p-1}}{n! \Gamma(n+p+1) 2^{2n+p}}$$

**Ahora aplicando una de las propiedades de la función gamma y factorizando el 2 del numerador se obtiene**

$$\frac{d}{dx} x^p J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(n+p) x^{2n+2p-1}}{n! (n+p) \Gamma(n+p) 2^{2n+p}}$$

$$\frac{d}{dx} x^p J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2 x^{2n+2p-1}}{n! \Gamma(n+p) 2^{2n+p}}$$

**Ahora el 2 del numerador se puede expresar como  $\frac{1}{2^{-1}}$  y se agrupa con el denominador**

$$\frac{d}{dx} x^p J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2p-1}}{n! \Gamma(n+p) 2^{2n+p-1}}$$

**Finalmente se factoriza  $x^p$**

$$\frac{d}{dx} x^p J_p(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}$$

**El segundo término del miembro derecho de la ecuación es simplemente  $J_{p-1}(x)$  con esto se concluye la deducción de (6.2.1)**

$$\frac{d}{dx} x^p J_p(x) = x^p J_{p-1}(x)$$

### 6.3) SERIES DE FOURIER-BESSEL

A continuación se proporcionan algunas definiciones útiles:

El **producto interno** de dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  en un intervalo  $[a, b]$  es el número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx \quad (6.3.1)$$

Se dice que dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  son **ortogonales** en el intervalo  $[a, b]$  si la integral mostrada en (6.3.1) es igual a cero

Un conjunto de funciones  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2 \dots\}$  es **ortogonal** en  $[a, b]$  si

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, m \neq n \quad (6.3.2)$$

En un conjunto ortogonal la **norma** o longitud generalizada se define como  $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n, \phi_n)}$  la idea de definir así la norma proviene del producto punto entre vectores ya que el producto punto de un vector consigo mismo es la norma cuadrada del vector dado. La diferencia es que ahora se definió el producto interno de funciones como una integral.

Si un conjunto ortogonal se divide entre su norma a ese conjunto se le conoce como **conjunto ortonormal** debido a que el conjunto posee la siguiente propiedad.

$$\|\phi_n(x)\| = 1$$

Con lo anterior se puede definir el desarrollo de una función  $f(x)$  en series de Fourier en  $[a,b]$  como.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (6.3.3)$$

$$c_n = \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2} \quad (6.3.4)$$

Un **conjunto es ortogonal respecto a una función peso** en  $[a, b]$  si.

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b w(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0, m \neq n \quad (6.3.5)$$

Donde  $w(x)$  es la función de peso.

Si un conjunto de funciones es ortogonal respecto a la función de peso entonces el desarrollo en series de Fourier para una función va a estar dado por (6.3.3) pero  $c_n$  y la norma cuadrada se van a expresar como sigue:

$$c_n = \frac{\int_a^b w(x) f(x) \phi_n(x) dx}{\|\phi_n(x)\|^2} \quad (6.3.6)$$

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x) \phi_n^2(x) dx \quad (6.3.7)$$

A la serie (6.3.3) con coeficientes ((6.3.6) y norma (6.3.7) se le conoce como **serie generalizada de Fourier**.

**Nota:** si  $w(x)=1$  nótese que se recuperan todas las fórmulas anteriores.

Todos estos resultados son importantes porque se puede demostrar que las funciones de Bessel son ortogonales respecto a  $w(x)=x$  utilizando el problema de Sturm-Liouville (para ver los detalles consultar [23] pp 294-301

La serie de Fourier-Bessel de una función  $f(x)$  va a estar dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_p(\alpha_i x) \quad (6.3.8)$$

$$c_n = \frac{\int_0^b x f(x) J_p(\alpha_i x) dx}{\|J_p(\alpha_i x)\|^2} \quad (6.3.9)$$

Y la norma cuadrada para las series de Fourier-Bessel se puede expresar partir de (6.3.7) como.

$$\|J_p(\alpha_i x)\|^2 = \int_0^b x J_p^2(\alpha_i x) dx \quad (6.3.10)$$

$\alpha_i^2 = \lambda_i$ , son los valores propios y el valor de la norma cuadrada depende de cómo se definan los mismos.

A continuación se va a calcular el valor de la norma cuadrada:

### **Demostración**

Primero se escribe la ecuación paramétrica de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\alpha^2 x^2 - p^2) y = 0 \quad (6.3.11)$$

Después de dividir entre  $x$  la ecuación se puede reescribir como sigue.

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\alpha^2 x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0$$

Ahora se multiplica por  $2xy'$

$$2xy' \frac{d}{dx}(xy') + (\alpha^2 x^2 - p^2)2yy' = 0$$

Esto se puede reescribir como.

$$\frac{d}{dx}(xy')^2 + (\alpha^2 x^2 - p^2) \frac{d}{dx} y^2 = 0$$

Ahora se integra de 0 a b utilizando el teorema fundamental del cálculo para el primer término e integración por partes para el segundo.

$$(xy')^2 \Big|_0^b + \int_0^b \left[ (\alpha^2 x^2 - p^2) \frac{d}{dx} y^2 \right] dx = 0 \quad (6.3.12)$$

Para la segunda integral

$$u = \alpha^2 x^2 - p^2 \quad du = 2\alpha^2 x$$

$$dv = \frac{d}{dx} y^2 \quad v = y^2$$

$$\int_0^b \left[ (\alpha^2 x^2 - p^2) \frac{d}{dx} y^2 \right] dx = (\alpha^2 x^2 - p^2) y^2 \Big|_0^b - 2\alpha^2 \int_0^b x y^2 dx \quad (6.3.13)$$

Se sustituye (6.3.13) en (6.3.12)

$$(xy')^2 \Big|_0^b + (\alpha^2 x^2 - p^2) y^2 \Big|_0^b - 2\alpha^2 \int_0^b x y^2 dx = 0 \quad (6.3.14)$$

De (6.3.11) se sabe que la solución de la ecuación de Bessel es  $y = J_p(\alpha x)$ , se sustituye este resultado en (6.3.14) y se despeja la integral que no es otra cosa sino la norma cuadrada

$$2\alpha^2 \int_0^b x [J_p(\alpha x)]^2 dx = \left( x \alpha J_p'(\alpha x) \right)^2 \Big|_0^b + (\alpha^2 x^2 - p^2) [J_p(\alpha x)]^2 \Big|_0^b$$

Para p diferente de cero el miembro derecho evaluado en el límite inferior es cero y al dividir ambos lados entre  $2\alpha^2$  resultado final de la norma cuadrada es.



$$\int_0^b x [J_p(\alpha x)]^2 dx = \frac{b^2}{2} [J_p'(\alpha b)]^2 + \left( \frac{b^2}{2} - \frac{p^2}{2\alpha^2} \right) [J_p(\alpha b)]^2 \quad (6.3.15)$$

Para terminar esta sección si  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  son las raíces positivas de  $CJ_p(x) + DxJ_p'(x) = 0$ ,  $p > -1$ . Entonces bajo las siguientes condiciones es válido el siguiente desarrollo en series de Fourier-Bessel:

Si C es cero y D es diferente de cero esto implica que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  son las raíces de  $J_p(x) = 0$  y a partir de (6.3.15) puede demostrarse que:

$$\|J_p(\alpha_i x)\|^2 = \frac{b^2}{2} J_{p+1}(\alpha_i b) \quad (6.3.16)$$

Y la serie está dada por (6.3.8) [23].

## 7) TRANSFORMADA FINITA DE HANKEL [18-20]

La transformada de Hankel aparece naturalmente en problemas con coordenadas cilíndricas que, cuando son resueltos usando la técnica de separación de variables, involucran funciones Bessel. Estas transformadas son más apropiadas en la solución de ecuaciones diferenciales con condiciones en la frontera en las que hay simetría axial.

La transformada finita de Hankel fué introducida inicialmente por (Sneddon, 1946) [49], quien la presentó de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_\nu[f(t); \lambda] = \int_a^b t f(t) J_\nu(t\lambda) dt \quad (7.1)$$

donde  $f(t)$  es una función definida sobre un intervalo finito  $[a.b]$ , satisface las condiciones de Dirichlet y  $J_\nu$  es la función de Bessel de primera clase y de orden  $\nu$

para resolver ciertos problemas se va a ocupar la siguiente fórmula de Transformada finita de Hankel:

$$\mathcal{H}_0[f(r); \xi_n] = \int_0^R f(r) r J_0(\xi_n r) dr = f(\xi_n) \quad (7.2)$$

Donde  $\xi_n$  son las raíces de la ecuación  $J_0(r) = 0$  en cada punto del intervalo en el cual  $f(r)$  es continua.

$$f(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} \quad (7.3)$$

Ésta será la fórmula de inversión de transformada de Hankel que se va a utilizar como se puede apreciar la inversión es un desarrollo en series de Fourier-Bessel.

En la siguiente sección se va a esclarecer la forma en la que se calculan las raíces ( $\xi_n$ ) de las funciones de Bessel.

## 7.1) CÁLCULO DE LAS RAÍCES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

En esta sección se mostrará de manera breve como calcular las primeras 20 raíces de la función  $J_0(x)$  el proceso para obtener las raíces de funciones Bessel de otro orden es prácticamente el mismo.

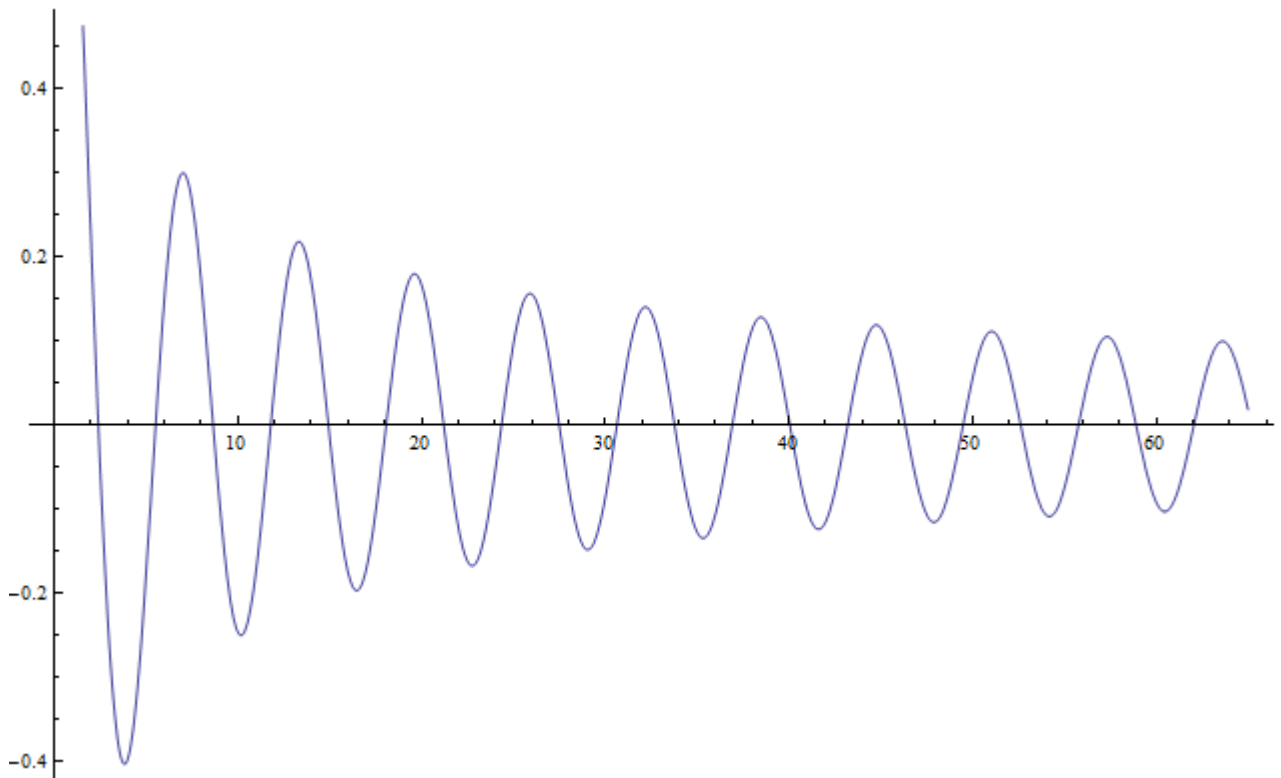


Figura (7.1.1) Gráfica de  $J_0(x)$

En la gráfica se pueden apreciar las 20 primeras raíces de la función de Bessel de orden cero, para calcular estas raíces se usa el comando `BesselJZero` que se muestra en seguida [25].

$N[\text{BesselJZero}[n, k], \text{número de decimales}]$

Donde  $n$  es el orden de la función Bessel y  $k$  es la  $k$ ésima raíz.

Ejemplo:

`N[BesselJZero[0, 1], 10]`

2.404825558

Muestra la primer raíz de  $J_0(x)$  con 10 cifras decimales.

Para finalizar esta sección se mostrará una tabla con las primeras 20 raíces de  $J_0(x)$

$k$	$x_k$	$k$	$x_k$
1	2.40482556	11	33.77582021
2	5.52007811	12	36.91709835
3	8.65372791	13	40.05842576
4	11.79153444	14	43.19979171
5	14.93091771	15	46.34118837
6	18.07106397	16	49.48260989
7	21.21163663	17	52.62405184
8	24.35247153	18	55.76551076
9	27.49347913	19	58.90698393
10	30.63460647	20	62.04846919

Figura 7.1.2 Tabla de las primeras 20 raíces de  $J_0(x)$

## 7.2) USO DE LA TRANSFORMADA FINITA DE HANKEL

A continuación se mostrará la transformada de Hankel de la parte radial para el Laplaciano en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 \left\{ \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right\} &= \int_0^R \left( \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) r J_0(\xi_n r) dr & (7.2.1) \\ &= \int_0^R r \frac{d^2 f}{dr^2} J_0(\xi_n r) dr + \int_0^R \frac{df}{dr} J_0(\xi_n r) dr\end{aligned}$$

**Nota:** Por cuestiones de simplicidad en vez de utilizar  $\xi_n$  se va a utilizar simplemente  $\xi$  y al obtener la fórmula se va a sustituir  $\xi$  por  $\xi_n$  al fin de cuentas las 2 son constantes

A continuación se van a resolver las integrales por separado utilizando las propiedades anteriormente mencionadas de las funciones de Bessel (6.2.1 y 6.2.2) e integración por partes:

Primera integral:

$$\int_0^R r \frac{d^2 f}{dr^2} J_0(\xi r) dr \quad (7.2.2)$$

$$u = r J_0(\xi r)$$

$$du = (J_0(\xi r) - \xi r J_1(\xi r)) dr$$

$$dv = \frac{d^2 f}{dr^2} dr$$

$$v = \frac{df}{dr}$$

$$\int_0^R r \frac{d^2 f}{dr^2} J_0(\xi r) dr = r J_0(\xi r) \frac{df}{dr} \Big|_0^R - \int_0^R \frac{df}{dr} (J_0(\xi r) - \xi r J_1(\xi r)) dr$$

$$= R J_0(\xi R) f'(R) - \int_0^R \frac{df}{dr} (J_0(\xi r) - \xi r J_1(\xi r)) dr$$

Una vez más se integra por partes el segundo elemento del miembro derecho de la ecuación

$$u = J_0(\xi r) - \xi r J_1(\xi r)$$

$$du = (-\xi J_1(\xi r) - \xi^2 r J_0(\xi r)) dr$$

$$dv = \frac{df}{dr} dr$$

$$v = f(r)$$

$$= R J_0(\xi R) f'(R) - (J_0(\xi r) - \xi r J_1(\xi r)) f(r) \Big|_0^R - \int_0^R f(r) (\xi J_1(\xi r) + \xi^2 r J_0(\xi r)) dr$$

$$= R J_0(\xi R) f'(R) - (J_0(\xi R) - \xi R J_1(\xi R)) f(R) + f(0) - \int_0^R f(r) \xi J_1(\xi r) dr$$

$$- \xi^2 \int_0^R f(r) r J_0(\xi r) dr$$

$$= R J_0(\xi R) f'(R) - (J_0(\xi R) - \xi R J_1(\xi R)) f(R) + f(0) - \int_0^R f(r) \xi J_1(\xi r) dr$$

$$- \xi^2 f(\xi)$$

$$= R J_0(\xi R) f'(R) - J_0(\xi R) f(R) + \xi R J_1(\xi R) f(R) + f(0) - \int_0^R f(r) \xi J_1(\xi r) dr$$

$$- \xi^2 f(\xi)$$

Hasta aquí termina la primera integral ahora se resolverá la segunda integral

Segunda integral:

$$\int_0^R \frac{df}{dr} J_0(\xi r) dr \quad (7.2.3)$$

$$u = J_0(\xi r)$$

$$du = -\xi J_1(\xi r) dr$$

$$dv = \frac{df}{dr} dr$$

$$v = f(r)$$

$$J_0(\xi r) f(r) \Big|_0^R + \int_0^R f(r) \xi J_1(\xi r) dr$$

$$J_0(0\xi R) f(R) - f(0) + \int_0^R f(r) \xi J_1(\xi r) dr$$

Ahora se van a sumar los resultados de las dos integrales (7.2.2 y 7.2.3):

$$1) R J_0(\xi R) f'(R) - J_0(\xi R) f(R) + \xi R J_1(\xi R) f(R) + f(0) - \int_0^R f(r) \xi J_1(\xi r) dr \\ - \xi^2 f(\xi)$$

$$2) J_0(\xi R) f(R) - f(0) + \int_0^R f(r) \xi J_1(\xi r) dr$$

Y finalmente se obtiene:

$$-\xi^2 f(\xi) + \xi R J_1(\xi R) f(R) + R J_0(\xi R) f'(R) \quad (7.2.4)$$

De esto se concluye lo siguiente:

$$\mathcal{H}_0 \left\{ \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right\} = -\xi_n^2 f(\xi_n) + \xi_n R J_1(\xi_n R) f(R) + R J_0(\xi_n R) f'(R) \quad (7.2.5)$$

La fórmula usada por Zaid M. Odibat es la siguiente [20]:

$$\mathcal{H}_0 \left\{ \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right\} = -\xi_n^2 f(\xi_n) + \xi_n R J_1(\xi_n R) f(R) \quad (7.2.6)$$

Ahora se va a calcular la transformada finita de Hankel para una constante

$$\mathcal{H}_0\{k\} = \int_0^R kr J_0(\xi_n r) dr \quad (7.2.7)$$

$$\frac{d}{dr} [rJ_1(\xi_n r)] = \xi_n r J_0(\xi_n r) \quad (7.2.8)$$

$$\frac{1}{\xi_n} \frac{d}{dr} [rJ_1(\xi_n r)] = rJ_0(\xi_n r) \quad (7.2.9)$$

Ahora se sustituye este resultado en (7.2.7) para obtener:

$$\mathcal{H}_0\{k\} = \frac{k}{\xi_n} \int_0^R \frac{d}{dr} [rJ_1(\xi_n r)] dr \quad (7.2.10)$$

Que es simplemente:

$$\mathcal{H}_0\{k\} = \frac{k}{\xi_n} rJ_1(\xi_n r) \Big|_0^R$$

$$\mathcal{H}_0\{k\} = \frac{k}{\xi_n} R J_1(\xi_n R) \quad (7.2.11)$$



## 8) INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE MOMENTUM UTILIZANDO CÁLCULO FRACCIONARIO

En las secciones previas lo que se hizo fue dar una muestra de la herramienta matemática necesaria con el fin de poder resolver en las secciones subsecuentes cuatro problemas referentes a fenómenos de transporte utilizando el cálculo fraccionario.

Con los conceptos previos; lo que se busca encontrar en la sección siguiente es el perfil de velocidades para un fluido de  $\rho$  (densidad) y  $\mu$  (viscosidad) constantes que está contenido en una tubería horizontal.

Inicialmente el movimiento del fluido va a ser descrito por una función de  $r$ , en el instante  $t=0$  se le aplica al sistema con un gradiente de presión  $-\frac{\partial p}{\partial z}$  que se va a denominar como  $P$ ; para este problema se utilizarán coordenadas cilíndricas y se supone que  $u_r = u_\theta = 0$  y  $u_z = u(r, t)$ . Las condiciones que se van a emplear en general para los problemas de transferencia de momentum son las siguientes:

$$u(r, 0) = f(r)$$

Esta es la condición inicial y quiere decir que la velocidad inicial del fluido está descrita por una función que únicamente depende del radio

$$u(r, t) = 0, \text{ en } r = R,$$

Esta es la primera condición de frontera y significa que la velocidad del fluido en la pared del tubo es cero por adherencia.

$$u(0, t) \text{ es finito, en } r = 0$$

Esta es la segunda condición de frontera y significa que para cualquier tiempo la velocidad es medible en el centro del tubo.

La técnica con la que se van a dar solución a este problema es la siguiente:

- 1) Se va a utilizar la transformada de Hankel para convertir la ecuación diferencial parcial que depende de  $r$  y  $t$  en una ecuación diferencial ordinaria que va a depender de  $\xi_n$  y  $t$
- 2) Posteriormente se aplicarán las condiciones de frontera en sus transformadas de Hankel
- 3) A la ecuación diferencial ordinaria obtenida al realizar 1 y 2 se le aplicará la transformada de Laplace y la condición inicial en su transformada de Laplace con el fin de obtener una ecuación algebraica en el dominio de  $\xi_n$  y  $s$
- 4) Se despeja  $u(\xi_n, s)$
- 5) Se invierte la transformada de Laplace y al final la transformada de Hankel para así obtener  $u(r, t)$

En la sección 10 se va a resolver el mismo problema pero sustituyendo la derivada del término de acumulación por la derivada fraccionaria o Caputo, para esto se empleará la fórmula 4.10 y no la 4.9 porque el problema sólo cuenta con una condición inicial, posteriormente se realizará un análisis de las diferencias entre una solución conocida y la solución con tiempo fraccionario.

**Nota:** Los pasos para resolver el problema con derivada fraccionaria son los mismos que los enunciados anteriormente.

Los modelos que se obtienen en las secciones 9 y 10 son descripciones generales del fluido dentro del tubo.

En la sección 12 se va a cambiar  $f(r)$  de la condición inicial para ver el comportamiento del fluido para 3 casos diferentes, también se proporcionan gráficas de los perfiles de velocidad y flujos volumétricos del tercer caso.

**9) SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES SIN DERIVADA TEMPORAL FRACCIONARIA.**

Considerar el flujo de un fluido newtoniano que no se encuentra en estado estacionario y circula por un tubo de radio  $R$  y longitud  $L$ . Para describir el movimiento se utilizan coordenadas cilíndricas polares  $(r, \theta, z)$ , en donde el eje- $z$  coincide con el eje del tubo, suponiendo que  $u_r = u_\theta = 0$  y  $u_z = u(r, t)$ , las ecuaciones de momentum se reducen a:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (9.1)$$

Donde  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y la viscosidad del fluido,  $u(r, t)$  es la velocidad en la dirección axial; el gradiente de presión  $\partial p / \partial z$  es constante y las condiciones tanto iniciales como de frontera son:

$$u(r, 0) = f(r)$$

$$u(r, t) = 0, \text{ en } r = R,$$

$$u(0, t) \text{ es finito, en } r = 0$$

Ahora se sustituye  $-\partial p / \partial z$  por  $P$  y se obtiene:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = P + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (9.2)$$

Se aplica transformada finita de Hankel sobre la variable  $r$  y se obtiene:

$$\rho \frac{\partial u(\xi_n, t)}{\partial t} = \frac{P}{\xi_n} R J_1(\xi_n R) + \mu \left( -\xi_n^2 u(\xi_n, t) + \xi_n R J_1(\xi_n R) u(R, t) \right) \quad (9.3)$$

Utilizando la primera condición de frontera  $u(R, t) = 0$ , en (9.3) se llega a:

$$\rho \frac{\partial u(\xi_n, t)}{\partial t} = \frac{P}{\xi_n} RJ_1(\xi_n R) - \mu \xi_n^2 u(\xi_n, t) \quad (9.4)$$

Se aplica transformada de Laplace sobre la variable t en (9.4):

$$\rho (su(\xi_n, s) - u(\xi_n, 0)) = \frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) - \mu \xi_n^2 u(\xi_n, s) \quad (9.5)$$

Se procede a despejar  $u(\xi_n, s)$

$$\rho su(\xi_n, s) - \rho u(\xi_n, 0) = \frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) - \mu \xi_n^2 u(\xi_n, s)$$

$$\rho su(\xi_n, s) + \mu \xi_n^2 u(\xi_n, s) = \frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) + \rho u(\xi_n, 0)$$

$$u(\xi_n, s)(\rho s + \mu \xi_n^2) = \frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) + \rho u(\xi_n, 0)$$

$$u(\xi_n, s) = \frac{\frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) + \rho u(\xi_n, 0)}{\rho s + \mu \xi_n^2} \quad (9.6)$$

Posteriormente se transforma la condición inicial  $u(r, 0) = f(r)$ , se obtiene  $u(\xi_n, 0) = f(\xi_n)$  y se sustituye en la ecuación transformada para obtener:

$$u(\xi_n, s) = \frac{\frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R)}{\rho s + \mu \xi_n^2} + \frac{\rho f(\xi_n)}{\rho s + \mu \xi_n^2}$$

$$u(\xi_n, s) = \left[ \frac{1}{s} \right] \left[ \frac{\frac{P}{\rho \xi_n} R J_1(\xi_n R)}{s + \frac{\mu \xi_n^2}{\rho}} \right] + \frac{f(\xi_n)}{s + \frac{\mu \xi_n^2}{\rho}} \quad (9.7)$$

Ahora se debe tomar la transformada inversa de Laplace de (9.7):

**Nota: El primer miembro del lado derecho de (9.7) se puede invertir de 2 maneras, la primera consiste en hacer un desarrollo en fracciones parciales y la segunda es utilizando (4.1.3). Aquí se opta por la segunda**

$$u(\xi_n, t) = \int_0^t \frac{P}{\rho \xi_n} R J_1(\xi_n R) e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} \tau} d\tau + f(\xi_n) e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \quad (9.8)$$

Como las funciones de Bessel no dependen del tiempo pueden salir como constantes de la integral:

$$u(\xi_n, t) = \frac{P}{\rho \xi_n} R J_1(\xi_n R) \int_0^t e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} \tau} d\tau + f(\xi_n) e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \quad (9.9)$$

Esta integral se puede resolver con un cambio de variable simple y el resultado es el siguiente:

$$u(\xi_n, t) = \frac{P}{\rho \xi_n} R J_1(\xi_n R) \left( \frac{e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} \tau} \Big|_0^t}{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho}} \right) + f(\xi_n) e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t}$$

$$u(\xi_n, t) = \frac{P}{\mu \xi_n^3} R J_1(\xi_n R) \left[ 1 - e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \right] + f(\xi_n) e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \quad (9.10)$$

Para finalizar se invierte la transformada finita de Hankel de (9.10) utilizando (7.3)

$$\begin{aligned}
 u(r, t) = & \frac{2P}{\mu R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n^3 J_1(\xi_n R)} \left[ 1 - e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \right] \\
 & + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \quad (9.11)
 \end{aligned}$$

Para hacer el análisis se necesita arreglar esta última expresión

$$\begin{aligned}
 u(r, t) = & \frac{2P}{\mu R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n^3 J_1(\xi_n R)} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2f(\xi_n) J_0(\xi_n r)}{R^2 J_1^2(\xi_n R)} - \frac{2P J_0(\xi_n r)}{\mu R \xi_n^3 J_1(\xi_n R)} \right] e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \quad (9.12)
 \end{aligned}$$

Se puede observar que la solución está dada por una combinación de series de Fourier-Bessel y la función exponencial. Si se toma el límite cuando el tiempo tiende a infinito se puede observar que la primer suma es el término estacionario y el segundo término es el transitorio a demás el perfil de velocidades va a depender de la de la  $f(r)$  que se tome como condición inicial para ver una solución similar consultar [11] pp(4-4 a4-6)

**10) SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES CON DERIVADA TEMPORAL FRACCIONARIA.**

Considerar el flujo de un fluido newtoniano que no se encuentra en estado estacionario y circula por un tubo de radio  $R$  y longitud  $L$ . Para describir el movimiento se utilizan coordenadas cilíndricas polares  $(r, \theta, z)$ , en donde el eje- $z$  coincide con el eje del tubo, suponiendo que  $u_r = u_\theta = 0$  y  $u_z = u(r, t)$ , las ecuaciones de momentum se reducen a:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (10.1)$$

Donde  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y la viscosidad del fluido respectivamente  $u(r, t)$  es la velocidad en la dirección axial, y el gradiente de presión  $\partial p / \partial z$  es constante y las condiciones tanto iniciales como de frontera son:

$$u(r, 0) = f(r)$$

$$u(r, t) = 0, \text{ en } r = R,$$

$$u(0, t) \text{ es finito, en } r = 0$$

Se sustituye  $-\partial p / \partial z$  por  $P$  y el término de acumulación por la derivada de Caputo (4.2.1):

$$\rho D_t^\alpha u(r, t) = P + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (10.2)$$

Se aplica transformada finita de Hankel sobre la variable  $r$  :

$$\rho D_t^\alpha u(\xi_n, t) = \frac{P}{\xi_n} R J_1(\xi_n R) + \mu \left( -\xi_n^2 u(\xi_n, t) + \xi_n R J_1(\xi_n R) u(R, t) \right) \quad (10.3)$$

Se utiliza la primera condición de frontera  $u(R, t) = 0$ , en (10.3):

$$\rho D_t^\alpha u(\xi_n, t) = \frac{P}{\xi_n} R J_1(\xi_n R) - \mu \xi_n^2 u(\xi_n, t) \quad (10.4)$$

Se aplica transformada de Laplace sobre la variable t en (10.4) utilizando (4.2.10):

$$\rho \left( s^\alpha u(\xi_n, s) - s^{\alpha-1} u(\xi_n, 0) \right) = \frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) - \mu \xi_n^2 u(\xi_n, s) \quad (10.5)$$

Después se despeja  $u(\xi_n, s)$  de (10.5)

$$\rho s^\alpha u(\xi_n, s) - \rho s^{\alpha-1} u(\xi_n, 0) = \frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) - \mu \xi_n^2 u(\xi_n, s)$$

$$\rho s^\alpha u(\xi_n, s) + \mu \xi_n^2 u(\xi_n, s) = \frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) + \rho s^{\alpha-1} u(\xi_n, 0)$$

$$u(\xi_n, s)(\rho s^\alpha + \mu \xi_n^2) = \frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) + \rho s^{\alpha-1} u(\xi_n, 0)$$

$$u(\xi_n, s) = \frac{\frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) + \rho s^{\alpha-1} u(\xi_n, 0)}{\rho s^\alpha + \mu \xi_n^2} \quad (10.6)$$

Posteriormente se transforma la condición inicial  $u(r, 0) = f(r)$ , se obtiene  $u(\xi_n, 0) = f(\xi_n)$  y se sustituye en (10.6):

$$u(\xi_n, s) = \frac{\frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R) + \rho s^{\alpha-1} f(\xi_n)}{\rho s^\alpha + \mu \xi_n^2}$$

$$u(\xi_n, s) = \frac{\frac{P}{s\xi_n} RJ_1(\xi_n R)}{\rho s^\alpha + \mu \xi_n^2} + \frac{\rho s^{\alpha-1} f(\xi_n)}{\rho s^\alpha + \mu \xi_n^2}$$

$$u(\xi_n, s) = \frac{\frac{P}{\rho \xi_n} s^{-1} RJ_1(\xi_n R)}{s^\alpha + \frac{\mu \xi_n^2}{\rho}} + \frac{s^{\alpha-1} f(\xi_n)}{s^\alpha + \frac{\mu \xi_n^2}{\rho}} \quad (10.7)$$



Se toma la transformada inversa de Laplace con base en (5.2.19):

$$u(\xi_n, t) = \frac{P}{\rho \xi_n} R J_1(\xi_n R) t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) + f(\xi_n) E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (10.8)$$

Se toma la fórmula de inversión para la transformada finita de Hankel (7.3) para obtener la solución analítica del problema con tiempo fraccionario:

$$u(r, t) = \frac{2Pt^\alpha}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (10.9)$$

A continuación se toma  $\alpha = 1$  para poder comparar la solución con (9.11):

$$u(r, t) = \frac{2Pt}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{1, 2} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t \right) + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{1, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t \right) \quad (10.10)$$

Para finalizar se toman las fórmulas (5.1.1) y (5.1.5) en (10.10) que son las equivalencias de las FM-L en exponenciales

$$u(r, t) = \frac{2P}{\mu R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n^3 J_1(\xi_n R)} \left[ 1 - e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \right] + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \quad (10.11)$$

Al comparar la solución obtenida con tiempo fraccionario (10.9) y posteriormente haciendo  $\alpha = 1$  se obtiene exactamente la misma solución que al resolver el problema sin el uso de las herramientas de cálculo fraccionario (9.11). Con esto se puede concluir que las soluciones con tiempo fraccionario generalizan a cualquier solución con tiempo entero, lo cual sirve en ingeniería para obtener modelos más especializados de un mismo problema.

En la siguiente sección se va a calcular el flujo volumétrico en el tubo para las soluciones anteriormente obtenidas.

## 11) CÁLCULO DE FLUJOS VOLUMÉTRICOS

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R u(r, t) r dr d\theta \quad (11.1)$$

### 11.1) FLUJO PARA LA SOLUCIÓN SIN TIEMPO FRACCIONARIO

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \frac{2P}{\mu R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n^3 J_1(\xi_n R)} \left[ 1 - e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \right] + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \right) r dr d\theta \quad (11.1.1)$$

Pero ya se mostró que:

$$\int_0^R k J_0(\xi_n r) r dr = \frac{k}{\xi_n} R J_1(\xi_n R)$$

Donde k es una constante arbitraria

Nota: (Este resultado se encuentra en la sección de transformadas de Hankel eqs (7.2.7)-(7.2.10))

$$Q = \frac{4\pi P}{\mu R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R J_1(\xi_n R)}{\xi_n^4 J_1(\xi_n R)} \left[ 1 - e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \right] + \frac{4\pi}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{R J_1(\xi_n R)}{\xi_n J_1^2(\xi_n R)} e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \quad (11.1.2)$$

Después de cancelar algunos términos semejantes en (11.1.2) se obtiene:

$$\begin{aligned}
Q(r, t) = & \frac{4\pi P}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^4} \left[ 1 - e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t} \right] \\
& + \frac{4\pi}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\xi_n)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} e^{-\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t}
\end{aligned} \tag{11.1.3}$$

## 11.2) FLUJO PARA LA SOLUCIÓN CON DERIVADA TEMPORAL FRACCIONARIA

Se puede apreciar que la solución con o sin derivada fraccionaria no afecta la parte radial de la solución, por lo que las integrales para encontrar el flujo volumétrico van a ser las mismas. Ahora se toma la solución con derivada fraccionaria (10.9) y con ayuda de (11.1) se calcula el flujo con derivada fraccionaria:

$$\begin{aligned}
u(r, t) = & \frac{2Pt^\alpha}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(r, t) = & \frac{4\pi P t^\alpha}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \\
& + \frac{4\pi}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\xi_n)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right)
\end{aligned} \tag{11.2.1}$$

Como se comentó al principio de esta sección, las integrales para el flujo volumétrico no dependen del tiempo por lo cual resulta trivial hacer  $\alpha = 1$  para ver si el flujo fraccionario es igual al flujo sin derivada fraccionaria; ya que es suficiente con probar este resultado sólo para los perfiles de velocidades.

## 12) APLICACIONES

En esta sección se presentan tres casos especiales que muestran diversos comportamientos de la solución de la ecuación de Navier-Stokes con derivada fraccionaria al modificar condiciones iniciales y de frontera.

### 12.1) EJEMPLO 1. C.I. $u(r, 0)=0$ .

Ver inicio de la sección 10.

Considerar la siguiente ecuación de Navier-Stokes con tiempo fraccionario:

$$\rho D_t^\alpha u(r, t) = P + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (12.1.1)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales y de frontera

$$u(r, 0) = 0$$

$$u(r, t) = 0, \text{ en } r = 1,$$

$$u(0, t) \text{ es finito, en } r = 0$$

Primero se toma la solución general (10.9):

$$u(r, t) = \frac{2Pt^\alpha}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right)$$

Ahora se toma la primer condición haciendo  $f(\xi_n) = 0$  y  $R=1$ ;

$$u(r, t) = \frac{2Pt^\alpha}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (12.1.2)$$

Este caso es interesante en particular si  $r = 0$ , ya que se puede observar la dependencia de  $u$  exclusivamente con derivada fraccionaria, además  $u(0, t)$  proporciona el comportamiento del fluido en el centro del tubo. La solución que se obtiene es la siguiente:

$$u(0, t) = \frac{2Pt^\alpha}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n J_1(\xi_n)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (12.1.3)$$

Siendo  $J_0(0) = 1$ .

Y si  $r = 1$  es claro que  $u(1, t) = 0$  ya que  $J_0(\xi_n) = 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$

### **Cálculo del flujo volumétrico**

$$Q(r, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{2Pt^\alpha}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) r dr d\theta \quad (12.1.4)$$

$$Q(r, t) = \int_0^1 \frac{4\pi Pt^\alpha}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) r dr \quad (12.1.5)$$

Finalmente se obtiene lo siguiente:

$$Q(r, t) = \frac{4\pi Pt^\alpha}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (12.1.6)$$

Comentario:

Al igual que en las secciones anteriores se puede encontrar la solución entera al problema (tomando  $\alpha = 1$ , (5.1.1) y (5.1.5)) tanto para el perfil de velocidades como los flujos: este resultado es interesante porque al hacer la condición inicial igual a cero se obtiene una expresión más simple para el perfil de velocidades que no depende de  $f(r)$ . La parte espacial queda definida únicamente por  $J_0(\xi_n r)$

## 12.2) EJEMPLO 2. C.I. $u(r, 0)=R^2-r^2$ .

Ver inicio del ejemplo 1.

$$\rho D_t^\alpha u(r, t) = 1 + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (12.2.1)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$u(r, 0) = R^2 - r^2$$

$$u(r, t) = 0, \text{ en } r = R,$$

$$u(0, t) \text{ es finito, en } r = 0$$

La mecánica para encontrar la solución de la ecuación es la misma del ejemplo 1

Primero se debe hacer  $u(r, 0) = R^2 - r^2 = f(r)$  y se toma su transformada de Hankel (7.2)

$$\mathcal{H}_0[R^2 - r^2] = \int_0^R r(R^2 - r^2) J_0(\xi_n r) dr \quad (12.2.2)$$

Pero se sabe que:

$$J_0(\xi_n r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+1)} \left( \frac{\xi_n r}{2} \right)^{2m} \quad (12.2.3)$$

Se sustituye (12.2.3) en (12.2.2) y se obtiene:

$$\mathcal{H}_0[R^2 - r^2] = \int_0^R r(R^2 - r^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+1)} \left( \frac{\xi_n r}{2} \right)^{2m} dr \quad (12.2.4)$$



A continuación se resuelve la integral (12.2.4)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi_n^{2m}}{m! \Gamma(m+1) 2^{2m}} \int_0^R (rR^2 - r^3)(r)^{2m} dr \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi_n^{2m}}{m! \Gamma(m+1) 2^{2m}} \int_0^R (r^{2m+1} R^2 - r^{2m+3}) dr \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi_n^{2m}}{m! \Gamma(m+1) 2^{2m}} \left[ \frac{R^{2m+4}}{2m+2} - \frac{R^{2m+4}}{2m+4} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi_n^{2m} R^{2m+4}}{m! \Gamma(m+1) 2^{2m}} \left[ \frac{1}{2m+2} - \frac{1}{2m+4} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi_n^{2m} R^{2m+4}}{m! \Gamma(m+1) 2^{2m+1}} \left[ \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi_n^{2m} R^{2m+4}}{m! \Gamma(m+1) 2^{2m+1}} \left[ \frac{1}{(m+1)(m+2)} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi_n^{2m} R^{2m+4}}{m! (m+2)(m+1) \Gamma(m+1) 2^{2m+1}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi_n^{2m} R^{2m+4}}{m! (m+2)(m+1) \Gamma(m+1) 2^{2m+1}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi_n^{2m} R^{2m+4}}{m! \Gamma(m+3) 2^{2m+1}}
\end{aligned}$$

Al utilizar repetidamente (2.1.1) se llega a:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2R^2}{\xi_n^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi_n^{2m+2} R^{2m+2}}{m! \Gamma(m+3) 2^{2m+2}} \\
 &= \frac{2R^2}{\xi_n^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+3)} \left( \frac{\xi_n R}{2} \right)^{2m+2}
 \end{aligned}$$

Finalmente se calcula la transformada de Hankel a partir de (6.1.1):

$$\mathcal{H}_0[R^2 - r^2] = \frac{2R^2}{\xi_n^2} J_2(\xi_n R) \quad (12.2.5)$$

Una vez obtenida la transformada de Hankel para esta función se procede a darle solución al problema:

$$\begin{aligned}
 u(r, t) &= \frac{2Pt^\alpha}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \\
 &\quad + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right)
 \end{aligned}$$

Una vez más, por comodidad se presenta la solución general (10.9) y se realizan los cambios necesarios para que cumpla con las propiedades y condiciones previamente establecidas en este ejemplo:

Primero se toma  $P = 1$  y  $f(\xi_n) = \frac{2R^2}{\xi_n^2} J_2(\xi_n R)$ , luego se sustituye en la solución general para así obtener:

$$\begin{aligned}
u(r, t) = & \frac{2t^\alpha}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \\
& + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2R^2}{\xi_n^2} J_2(\xi_n R) \right] \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (12.2.6)
\end{aligned}$$

Se factorizan los términos constantes de la suma de (12.2.6)

$$\begin{aligned}
u(r, t) = & \frac{2t^\alpha}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \\
& + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{J_2(\xi_n R)}{\xi_n^2} \right] \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (12.2.7)
\end{aligned}$$

### **Cálculo del flujo volumétrico**

$$\begin{aligned}
Q(r, t) = & \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{2t^\alpha}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) r dr d\theta \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^R 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{J_2(\xi_n R)}{\xi_n^2} \right] \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) r dr d\theta \quad (12.2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(r, t) = & \int_0^R \frac{4\pi t^\alpha}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) r dr \\
& + \int_0^R 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{J_2(\xi_n R)}{\xi_n^2} \right] \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) r dr \quad (12.2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(R, t) = & \frac{4\pi t^\alpha}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \\
& + 8\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{J_2(\xi_n R)}{\xi_n^3 J_1(\xi_n R)} \right] E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (12.2.10)
\end{aligned}$$

Comentario: Ver inicio de los comentarios del ejemplo 1

Lo que difiere este problema del ejemplo anterior consiste en que al inicio se tiene un perfil parabólico por lo cual se obtienen dos términos, una vez más al tomar  $\alpha = 1$  se pueden conocer tanto el término transitorio como el estacionario.

### 12.3) EJEMPLO 3. C.I. $u(r, 0)=J_0(\xi_1 r)$

Ver inicio del ejemplo 1

$$\rho D_t^\alpha u(r, t) = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (12.3.1)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$u(r, 0) = J_0(\xi_1 r)$$

$$u(r, t) = 0, \text{ en } r = 1,$$

$$u(0, t) \text{ es finito, en } r = 0$$

Ahora se tiene que encontrar una transformada de Hankel para  $J_0(\xi_1 r)$  la cual se representa de la manera siguiente:

$$\mathcal{H}_0[J_0(\xi_1 r)] = \int_0^1 r J_0(\xi_1 r) J_0(\xi_n r) dr \quad (12.3.2)$$

Pero se mostró en la sección 6.3 que las funciones de Bessel son ortogonales bajo la función de peso  $w(r)=r$ , por lo tanto; si  $n$  es diferente de 1 la transformada vale cero, en el caso que  $n$  sea igual a uno la integral va a tener un valor definido el cual se muestra a continuación

$$\mathcal{H}_0[J_0(\xi_1 r)] = \int_0^1 r J_0(\xi_1 r) J_0(\xi_n r) dr = \begin{cases} \frac{1}{2} J_1^2(\xi_1) & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases} \quad (12.3.3)$$

Para resolver la integral únicamente se utiliza (6.3.15) que se demostró en la sección 6.3 sustituyendo  $\xi_1 = \alpha$ ,  $b = 1$  y  $p = 0$

El procedimiento que se ha seguido funciona bien así que no hay que dejarlo de usar:

Se toma la solución general (10.9):

$$u(r, t) = \frac{2Pt^\alpha}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_n r)}{\xi_n J_1(\xi_n R)} E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right)$$

Se realizan los cambios necesarios para que se cumplan las condiciones:

$$P = 0; R = 1 \text{ y } f(\xi_n) = \frac{1}{2} J_1^2(\xi_1) \text{ para } n = 1 \text{ y } 0 \text{ para } n > 1.$$

Ahora se sustituye en la solución general para así obtener:

$$u(r, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} J_1^2(\xi_1) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_n^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (12.3.4)$$

La transformada de Hankel es:  $\frac{1}{2} J_1^2(\xi_1)$  exclusivamente para  $n=1$ , para  $n>0$  es 0; esto va a repercutir en que los demás términos de la suma ya que van a desaparecer.

$$u(r, t) = J_1^2(\xi_1) \frac{J_0(\xi_1 r)}{J_1^2(\xi_1)} E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_1^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (12.3.5)$$

Y el resultado final es:

$$u(r, t) = J_0(\xi_1 r) E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\mu \xi_1^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (12.3.6)$$

Ahora se procede a calcular el flujo volumétrico:

$$Q(r, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 J_0(\xi_1 r) E_{\alpha,1} \left( -\frac{\mu \xi_1^2}{\rho} t^\alpha \right) r dr d\theta \quad (12.3.7)$$

$$Q(r, t) = 2\pi \int_0^1 J_0(\xi_1 r) E_{\alpha,1} \left( -\frac{\mu \xi_1^2}{\rho} t^\alpha \right) r dr \quad (12.3.8)$$

Finalmente ésta es la expresión para el flujo volumétrico

$$Q(t) = \frac{2\pi}{\xi_1} J_1(\xi_1) E_{\alpha,1} \left( -\frac{\mu \xi_1^2}{\rho} t^\alpha \right) \quad (12.3.9)$$

Para concluir esta sección la razón por la cual es importante tomar como condición de frontera la función de Bessel es debido a que simplifica la solución.

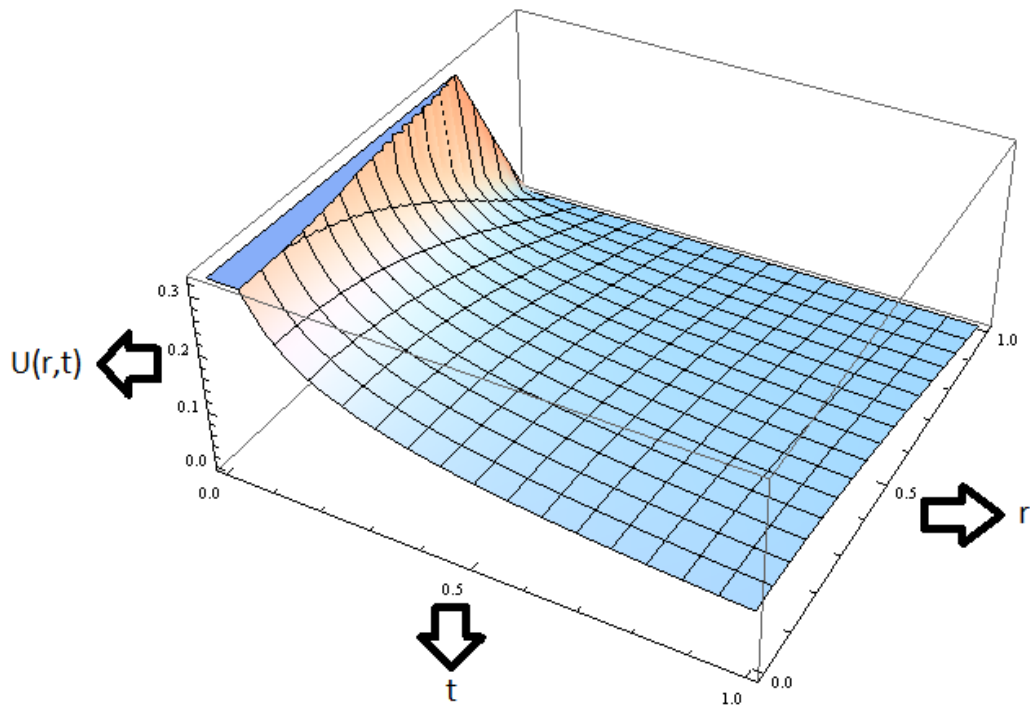
Comentario:

Ver inicio de los comentarios de la primera parte.

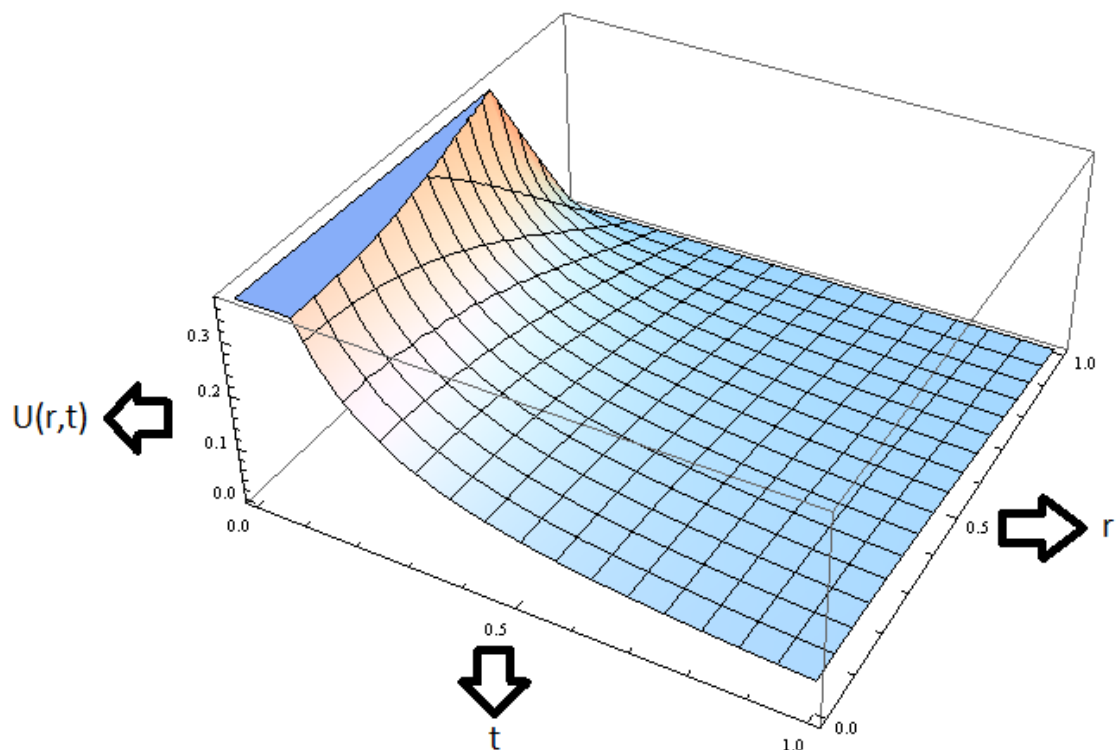
La FM-L es una serie de potencias y si se agrega otra suma dada por la serie de Fourier-Bessel esto hace que sea complicado graficar la solución, pero al utilizar la ortogonalidad de las funciones de Bessel esto permite que la única suma en la solución esté dada por la FM-L, con lo cual la gráfica es más fácil de obtener. A continuación se muestran las gráficas para este caso, obtenidas con Mathematica así como la interpretación física de la derivada fraccionaria..

En este caso la condición inicial indica que el fluido se mueve a baja velocidad ya que al tomar  $\alpha = 1$  en el límite cuando el tiempo tiende a infinito el término transitorio es cero.

## 12.4) GRÁFICAS DE LOS PERFILES DE VELOCIDADES

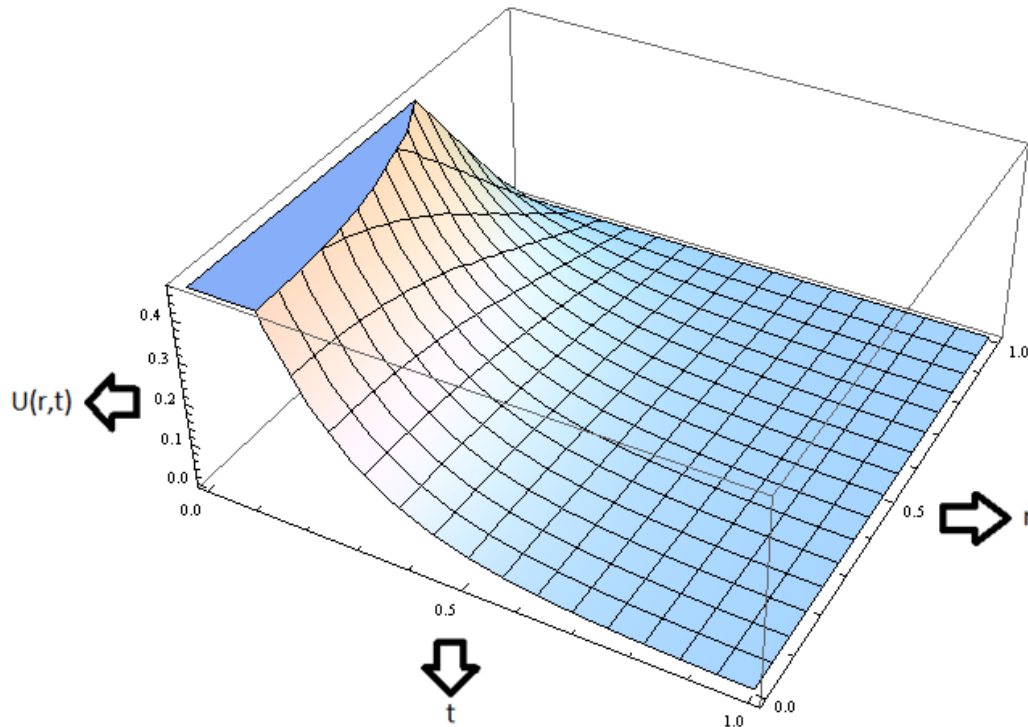


Perfil de velocidades ( $u(r,t)$ ) con aproximación  $\alpha = 0.5$



Perfil de velocidades ( $u(r,t)$ ) con aproximación  $\alpha = 0.75$





Perfil de velocidades ( $u(r,t)$ ) con aproximación  $\alpha = 1$

### Comentarios acerca de las gráficas.

En este trabajo lo que se busca es dar una interpretación física de cómo se ve afectado el perfil de velocidades de un fluido al introducir la derivada fraccionaria en la parte temporal.

Al observar las tres gráficas se puede apreciar que al introducir la derivada fraccionaria en la parte temporal no se ve afectada la parte espacial del problema, por otro lado si se analiza el eje  $t-u(r,t)$  se puede observar que, para las tres gráficas al transcurrir el tiempo, la función va decreciendo monótonamente pero lo que cambia es la forma en la que va decreciendo.

La pendiente de la gráfica con  $\alpha = 0.5 < \alpha = 0.75 < \alpha = 1$ , y en el perfil de velocidades la pendiente representa la aceleración del fluido esto, significa que al introducir la derivada fraccionaria lo que se puede interpretar es que bajo diferentes aproximaciones en el orden de la derivada se puede observar que el sistema evoluciona con mayor lentitud es decir:

“Bajo distintos valores de  $\alpha$  en la derivada fraccionaria se presenta un cambio en la escala temporal característica del proceso.

Por otra parte para este trabajo se graficaron las soluciones enteras y la aproximación con  $\alpha = 1$ : las gráficas obtenidas son exactamente las mismas, lo cual era de esperarse después de comprobar que las soluciones fraccionarias se reducen a las enteras al hacer  $\alpha = 1$ , es decir el comportamiento al ir aumentando el valor de alfa, la curva que es una FM-L tiende a comportarse como una exponencial decreciente; dicho comportamiento es el de la solución entera conocida.

Para valores de  $\alpha$  menores a uno la solución se comporta como una especie de ley de la potencia inversa; esto se debe a que la derivada fraccionaria es una integral y los modelos que se desarrollan con ecuaciones integro-diferenciales conducen a soluciones de esta naturaleza, lo cual podría justificar que los sistemas modelados con derivada fraccionaria presentan cierta memoria.

Por otra parte aunque el valor de  $\alpha$  puede variar entre cero y uno no se pueden usar valores muy pequeños de alfa porque empiezan a aparecer problemas de convergencia al graficar las soluciones.

## 12.5) GRÁFICAS DE LOS FLUJOS VOLUMÉTRICOS

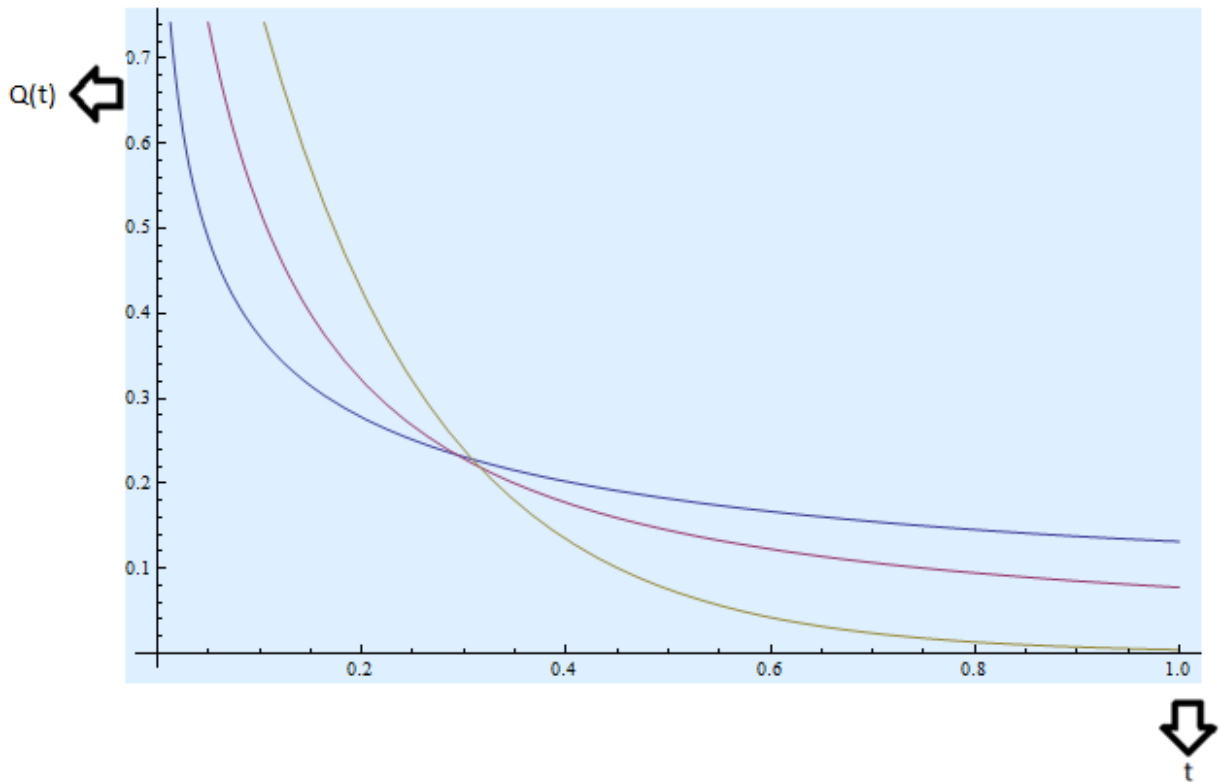


Figura (12.2.1) Flujos volumétricos en función del tiempo:

AZUL: Aproximación con  $\alpha = 0.5$

ROJO: Aproximación con  $\alpha = 0.75$

AMARILLO: Aproximación con  $\alpha = 1$

En este caso el flujo volumétrico es la integral de la velocidad por el área transversal de flujo. Como la integral es definida el flujo sólo depende del tiempo; en esta gráfica se pueden apreciar mejor los efectos de la derivada fraccionaria y cómo se acelera el fluido al aumentar el valor de alfa.

### 13) APLICACIÓN EN TRANSFERENCIA DE MASA CON REACCIÓN QUÍMICA [11]

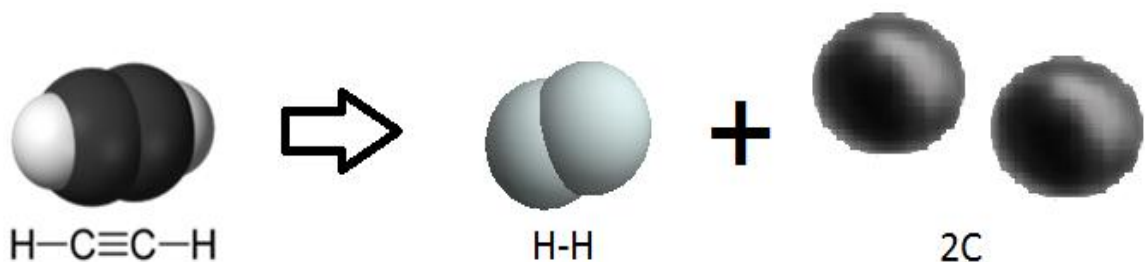
El siguiente problema fue tomado del libro de fenómenos de transporte de Bird, Stewart y Lightfoot

“En esta sección se desea discutir el tamaño crítico de un sistema en el que se lleva a cabo una reacción autocatalítica. En un sistema de este tipo los productos de reacción incrementan la velocidad de reacción. Si la relación entre la superficie del sistema y el volumen del mismo es grande, los productos de la reacción tienden a escapar hacia los límites del sistema. Sin embargo si la relación superficie a volumen es pequeña, la velocidad de escape puede ser menor que la velocidad de formación y la velocidad de reacción crecerá rápidamente.

Para un sistema con forma determinada existirá un tamaño crítico, para el cual, la velocidad de producción es igual a la velocidad de eliminación.

Un ejemplo lo constituye la fisión nuclear; en una pila nuclear la velocidad de fisión depende de la concentración local de neutrones. Si los neutrones se producen a una velocidad superior a la de escape por difusión, la reacción se automantiene y se produce una explosión nuclear:

Un comportamiento análogo se encuentra también en muchos sistemas químicos, aunque en este caso el comportamiento es, en general más complejo. Un ejemplo es la descomposición térmica del acetileno gaseoso, que es termodinámicamente inestable de acuerdo con la reacción:”



Parece ser que esta reacción transcurre a través de una cadena ramificada mediante un mecanismo de radicales libres en el que éstos se comportan cualitativamente de igual manera que los neutrones del ejemplo anterior, de forma que la descomposición es autocatalítica. De acuerdo con esto, el acetileno gaseoso puede almacenarse en condiciones de seguridad en cilindros de hierro cuyo diámetro sea inferior al “crítico”, que es tanto menor cuanto más elevada es la temperatura o la presión del gas. Si el tubo es demasiado grande, la formación de radicales libres podría dar lugar a un rápido aumento de la velocidad de descomposición y producirse una explosión.

El objetivo es encontrar la distribución de concentraciones  $C_A(r, t)$

Se considera un sistema confinado en un cilindro largo en el que el proceso de difusión y reacción está representado por:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = \mathfrak{D}_{AB} \left( \frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) + k_1 C_A \quad (13.1)$$

$$C_A(r, 0) = f(r)$$

$$C_A(r, t) = 0, \text{ en } r = R,$$

$$C_A(0, t) \text{ es finito, en } r = 0$$

Primero se aplica transformada de Hankel

$$\frac{\partial C_A(\xi_n, t)}{\partial t} = \mathfrak{D}_{AB} \left[ -\xi_n^2 C_A(\xi_n, t) + \xi_n R J_1(\xi_n R) C_A(R, t) \right] + k_1 C_A(\xi_n, t) \quad (13.2)$$

Posteriormente se utiliza la condición de frontera 1  $C_A(R, t) = 0$

$$\frac{\partial C_A(\xi_n, t)}{\partial t} = \mathfrak{D}_{AB} \left[ -\xi_n^2 C_A(\xi_n, t) \right] + k_1 C_A(\xi_n, t) \quad (13.3)$$

El siguiente paso es utilizar la transformada de Laplace y despejar  $C_A(\xi_n, s)$

$$sC_A(\xi_n, s) - C_A(\xi_n, 0) = \mathfrak{D}_{AB}[-\xi_n^2 C_A(\xi_n, s)] + k_1 C_A(\xi_n, s)$$

$$C_A(r, 0) = f(r) \text{ entonces } C_A(\xi_n, 0) = f(\xi_n)$$

$$sC_A(\xi_n, s) - f(\xi_n) = -\mathfrak{D}_{AB}\xi_n^2 C_A(\xi_n, s) + k_1 C_A(\xi_n, s)$$

$$sC_A(\xi_n, s) + \mathfrak{D}_{AB}\xi_n^2 C_A(\xi_n, s) - k_1 C_A(\xi_n, s) = f(\xi_n)$$

$$(s + \mathfrak{D}_{AB}\xi_n^2 - k_1)C_A(\xi_n, s) = f(\xi_n)$$

$$C_A(\xi_n, s) = \frac{f(\xi_n)}{s + \mathfrak{D}_{AB}\xi_n^2 - k_1} \quad (13.4)$$

$$C_A(\xi_n, s) = \frac{f(\xi_n)}{s - (k_1 - \mathfrak{D}_{AB}\xi_n^2)} \quad (13.5)$$

Ahora se invierte la transformada de Laplace de (13.5)

$$C_A(\xi_n, t) = f(\xi_n)e^{(k_1 - \mathfrak{D}_{AB}\xi_n^2)t} \quad (13.6)$$

Y se hace lo mismo con la transformada de Hankel

$$C_A(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} e^{(k_1 - \mathfrak{D}_{AB}\xi_n^2)t} \quad (13.7)$$

$$C_A(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} e^{k_1 t} e^{-\mathfrak{D}_{AB}\xi_n^2 t} \quad (13.8)$$

Lo que sugiere [11] es escoger una adecuada función de  $r$  y la que se va a elegir es la vista en (12.3.1) para aprovechar la propiedad de ortogonalidad de las funciones de Bessel, con  $R=1$  el resultado es el siguiente:

$$C_A(r, t) = J_0(\xi_1 r) e^{\left(1 - \frac{\mathcal{D}_{AB} \xi_1^2}{k_1}\right) k_1 t} \quad (13.9)$$

**13.1) CÁLCULO DEL PERFIL DE CONCENTRACIÓN UTILIZANDO CÁLCULO FRACCIONARIO**

$$D_t^\alpha C_A(r, t) = \mathfrak{D}_{AB} \left( \frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) + k_1 C_A \quad (13.1.1)$$

$$C_A(r, 0) = f(r)$$

$$C_A(r, t) = 0, \text{ en } r = R,$$

$$C_A(0, t) \text{ es finito, en } r = 0$$

Se aplica transformada de Hankel

$$D_t^\alpha C_A(\xi_n, t) = \mathfrak{D}_{AB} [-\xi_n^2 C_A(\xi_n, t) + \xi_n R J_1(\xi_n R) C_A(R, t)] + k_1 C_A(\xi_n, t) \quad (13.1.2)$$

Posteriormente se utiliza la condición de frontera 1  $C_A(R, t) = 0$

$$D_t^\alpha C_A(\xi_n, t) = \mathfrak{D}_{AB} [-\xi_n^2 C_A(\xi_n, t)] + k_1 C_A(\xi_n, t) \quad (13.1.3)$$

El siguiente paso es utilizar la transformada de Laplace y despejar  $C_A(\xi_n, s)$

$$s^\alpha C_A(\xi_n, s) - s^{\alpha-1} C_A(\xi_n, 0) = \mathfrak{D}_{AB} [-\xi_n^2 C_A(\xi_n, s)] + k_1 C_A(\xi_n, s)$$

$$C_A(\xi_n, s) [s^\alpha - (k_1 - \mathfrak{D}_{AB} \xi_n^2)] = s^{\alpha-1} C_A(\xi_n, 0)$$

$$C_A(\xi_n, s) = \frac{s^{\alpha-1} C_A(\xi_n, 0)}{s^\alpha - (k_1 - \mathfrak{D}_{AB} \xi_n^2)} \quad (13.1.4)$$



Aplicando la condición inicial en su transformada de Hankel a (13.1.4)

$$C_A(\xi_n, s) = \frac{s^{\alpha-1} f(\xi_n)}{s^\alpha - (k_1 - \mathcal{D}_{AB} \xi_n^2)}$$

Se invierten las transformadas de Laplace y Hankel

$$C_A(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1^2(\xi_n R)} E_{\alpha,1}[(k_1 - \mathcal{D}_{AB} \xi_n^2) t^\alpha] \quad (13.1.5)$$

Al igual que el caso donde no se aplica cálculo fraccionario se aprovecha la propiedad de ortogonalidad de las funciones de Bessel tomar

$R = 1$ ,  $f(\xi_n) = J_0(\xi_1 r)$  y la solución final es:

$$C_A(r, t) = J_0(\xi_1 r) E_{\alpha,1}[(k_1 - \mathcal{D}_{AB} \xi_1^2) t^\alpha] \quad (13.1.6)$$

Si se toma  $\alpha = 1$  se obtiene 13.9

### **13.2) CONCLUSIÓN DEL PROBLEMA CON TRANSFERENCIA DE MASA**

Este problema tiene un punto delicado a tratar. En los problemas anteriores no había ningún término que se estuviera sumando dentro de la exponencial, como las constantes físicas son positivas y el signo era negativo entonces esto se garantiza con certeza que el perfil de velocidades disminuía con el tiempo, en este caso la concentración de acetileno puede aumentar o disminuir con el tiempo, esto depende de si el término en la exponencial o el término de la función Mittag-Leffler son positivos o negativos, en ambos casos para que el contenedor no explote es necesario que  $k_1 - \mathcal{D}_{AB} \xi_1^2 < 0$ , por otra parte como se tomó el centro del tubo como eje de simetría realmente hay 2 valores de R (R=1 y R= -1) entonces para no tener que considerar los 2 casos se toma  $R^2 = 1$ .

Si se resuelve la desigualdad se llega a:

$$R^2 = 1 < \frac{\mathcal{D}_{AB}\xi_1^2}{k_1}$$

De aquí se obtiene el siguiente resultado:

$$R < \xi_1 \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{AB}}{k_1}}$$

Si se toma la igualdad

$$R_{crít} = \xi_1 \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{AB}}{k_1}}$$

$R = R_{crít}$ , donde  $R_{crít}$  es el radio crítico, que es el valor de  $r$  donde se igualan las velocidades de formación y eliminación de productos y reactivos para que el contenedor no explote.

Por último:

Se sabe que para el núcleo de un reactor nuclear cilíndrico sin recubrimiento (0.2 por ciento de uranio, 39.8 por ciento de aluminio y 60 % de agua, en volúmen) el valor efectivo de  $\frac{k_1}{\mathcal{D}_{AB}} = 9 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$ . ¿cuál es el radio crítico?

Para resolver este problema se necesita el valor de  $\xi_1$  que es la primer raíz de la  $J_0$  de Bessel los valores de las raíces se encuentran en la figura 7.1.2.

$$\xi_1 = 2.40482556$$

$$\frac{\mathcal{D}_{AB}}{k_1} = \frac{1}{9 \times 10^{-3}} \text{ cm}^2$$

$$R_{crít} = 2.40482556 \sqrt{\frac{1}{9 \times 10^{-3}}} \text{ cm}^2 = 25.35 \text{ cm}$$

Este es un resultado práctico que se obtiene del análisis del perfil de concentraciones, pero lo más sorprendente es que si se hace el análisis utilizando (13.9 caso sin derivada fraccionaria) o (13.1.6 caso con derivada fraccionaria) el resultado para el radio crítico es el mismo.

## **14) CUESTIONES ABIERTAS**

En esta sección lo que se va a presentar son algunos planteamientos que todavía no han sido esclarecidos (total o parcialmente) acerca del cálculo fraccionario. Estas cuestiones se plantean principalmente en [13]

El estudio de los operadores fraccionarios y sus aplicaciones han sido de gran interés en los últimos años para numerosos científicos, pues sus propiedades de *no localidad* y de *memoria* son de importante utilidad para modelar mejor procesos conocidos en sistemas complejos que se encuentran en la naturaleza.

En contraste con las derivadas de orden entero, que dependen solamente del comportamiento local de la función, las derivadas de orden fraccionario contienen parcial o totalmente la historia temporal o el comportamiento espacial de la función (esto último en el caso de trabajar con derivada fraccionaria espacial). Por otra parte, el concepto de derivada fraccionaria permite establecer interpolaciones y relaciones entre diferentes familias de ecuaciones diferenciales, así como generalizaciones de las mismas. Por ejemplo, una interpolación entre las ecuaciones clásicas de calor y de ondas.

Sin embargo, no se ha desarrollado aún una teoría clara sobre las propiedades analíticas de los operadores fraccionarios que permitan dar consistencia al uso de dichos operadores en múltiples problemas y ecuaciones. Queda también abierto el determinar una interpretación física o geométrica clara de los operadores fraccionarios, cuestión sobre la que caben destacar los estudios de Podlubny [14].

Además, a pesar de los múltiples trabajos realizados por numerosos autores, el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario y el problema de valores iniciales correspondiente, o los problemas de contorno está aún sin completar. Quedan abiertas muchas cuestiones básicas:

*¿Qué definición de derivada fraccionaria es conveniente introducir en una ecuación diferencial concreta?*

*La derivada fraccionaria respecto al tiempo está bien justificada en muchas ecuaciones (como la de difusión o la de ondas).*

*¿Será posible establecer también una justificación apropiada para la derivada fraccionaria respecto al espacio?*

*¿Se podría desarrollar una teoría similar a la de Sturm-Liouville para las ecuaciones diferenciales fraccionarias y sus problemas de contorno asociados?*

A todo esto, hay que incluir las cuestiones abiertas en torno al desarrollo de una aproximación numérica para las diferentes definiciones de las integrales fraccionarias.

## **15) CONCLUSIONES**

Después de haber trabajado con el cálculo fraccionario las cuestiones a tratar son las siguientes:

El primero es referente a las propiedades matemáticas de la derivada fraccionaria, ya que en este trabajo se manejaron 2 (la definición de la mano izquierda y la de la mano derecha o derivada de Caputo); la definición de la mano izquierda matemáticamente hablando es más rica que la de Caputo pero con esta definición, la derivada de una constante no es cero, además se requieren condiciones fraccionarias para resolver las ecuaciones y todavía no es familiar el mundo fraccionario.

Continuando con este análisis los problemas modelados con derivada de Caputo, al variar el parámetro alfa entre cero y uno, lo que da es una interpolación entre familias de soluciones; varios autores se han dedicado a trabajar con la derivada fraccionaria de orden entre uno y dos se han dado cuenta que las soluciones obtenidas son interpolaciones de las soluciones con derivada de orden uno y de orden dos.

Por otra parte la función de Mittag-Leffler es muy importante al estudiar cálculo fraccionario ya que aparece de manera natural en los problemas con derivada fraccionaria y es una función generadora con la cual se puede obtener la función exponencial.

El procedimiento para la obtención de la transformada de Laplace de la función Mittag-Leffler no ha sido encontrado en la bibliografía presentada, sin embargo se han encontrado otras fórmulas para transformar funciones Mittag pero son un poco más complejas, de hecho la obtención de la fórmula es una aportación a este trabajo así como también la transformada de Hankel para el operador radial cuya fórmula sí se encuentra en la bibliografía pero no el procedimiento para obtener dicho resultado

La transformada de Hankel es muy útil para modelar problemas en coordenadas cilíndricas debido a que las funciones de Bessel diagonalizan la parte radial, esto quiere decir que son funciones propias del operador radial en coordenadas cilíndricas.

El segundo aspecto a tratar es la interpretación física de la derivada fraccionaria. En la mayoría de los textos se menciona que la derivada fraccionaria sirve para modelar fenómenos con memoria pero no se explica el porqué.

La razón es porque los fenómenos con memoria son modelados por ecuaciones integro-diferenciales y la derivada de Caputo es una integral.

Realmente el cálculo fraccionario es una herramienta que viene de siglos atrás, pero las necesidades que han surgido por modelar de manera diferente fenómenos conocidos y otros nuevos, han hecho que en la década pasada y actualmente aparezcan una cantidad impresionante de modelos donde se utiliza el cálculo fraccionario incluso en ramas que no creía que fuera posible adaptar estos conocimientos.

## **BIBLIOGRAFÍA:**

- [1] El-Sayed A., 1996, Fractional-order diffusion-wave equation, *Int. J. Theor.Phys.*, 35, pp. 311-322.
- [2] Huang F., and Liu F., 2005, The time fractional diffusion equation and fractional advection-dispersion equation, *ANZIAM J.*, 46, pp. 1-14.
- [3] Huang F., and Liu F., 2005, The fundamental solution of the space-time fractional advection-dispersion equation, *J. Appl. Math. & Computing*, 18(1-2), pp. 339-350.
- [4] Mainardi F., 1996, Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion wave phenomena, *Chaos Solitons and Fractals*, 7, pp. 1461-1477.
- [5] Mainardi F., Luchko Y., and Pagnini G., 2001, The fundamental solution of space-time fractional diffusion equation, *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 4.
- [6] Samko G., Kilbas A., and Marichev O., *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.
- [7] Beyer H., and Kempfle S., 1995, Definition of physically consistent damping laws with fractional derivatives, *Z. Angew Math. Mech.*, 75, pp. 623-635.
- [8] Podlubny I., *The Laplace transform method for linear differential equations of fractional order*, *Slovak Academy of Science*, Slovak Republic, 1994.
- [9] Podlubny I., *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [10] Oldham K.B., and Spanier J., *The fractional calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [11] Bird R.B, Stewart W.E, Lightfoot E.N, *Fenómenos de Transporte*, Editorial Reverté, Mexico,2002.
- [12] Adam Loverro, *Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer*, *Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, U.S.A. May 8, 2004.*
- [13] Velasco Cebrian María Pilar, *Modelos Diferenciales y Funciones Especiales en el ámbito del Cálculo Fraccionario: Universidad Complutense de Madrid Departamento de Matemática Aplicada Facultad de Matemáticas y Facultad de Informática 28040 Madrid, España, 2008.*
- [14] Podlubny, I., *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, *Academic Press*, San Diego. CA, 5(4),2002.
- [15] Sánchez Muñoz José Manuel, *Historias de Matemáticas Génesis y desarrollo del cálculo fraccional*, *Revista de Investigación G.I.E Pensamiento Matemático*, Universidad Politécnica de Madrid España, 1 de octubre de 2011.

- [16] Dr. Arafet Padilla Pedro: Una introducción al cálculo fraccionario: Facultad de Ing. Eléctrica Universidad de Oriente Cuba Mayo2008.
- [17] Boyce William E. y Di Prima Richard C, Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera: Limusa Wiley 4ª Ed, México D.F,2007.
- [18] Al-Hajri and Kalla, S.L; On an integral transform involving Bessel functions, Bull. Soc. Math. Macedonie,28(2004),5-18
- [19] I. Ali and Kalla, S.L.: A generalized Hankel transform and its use for solving certain partial differential equations J Aust. Math. Soc 41B (1999). 105-117.
- [20] Castillo Pérez Jaime, Jiménez Ruíz Carlos Una transformada finita de Hankel generalizada, Universidad de la Guajira, Aceptado Mar. 6. 2009.
- [21] Zaid M. Odibat, Prince Abdullah Bin Ghazi Faculty of Science & IT, Al-Balqa´ Applied University, Salt-Jordan, Analytical spherically symmetric solution for the time-fractional Navier-Stokes equation, Jordan,2002
- [22] Marsden. J.E; Tromba, A.J Cálculo Vectorial Quinta Edición, Pearson Educación,S.A.,Madrid 2004 pp [327-330]
- [23] Zill Dennis, Matemáticas avanzadas para ingeniería 2 Cálculo Vectorial Análisis de Fourier y Análisis complejo, 3ª ed Mc Graw Hill, México, 2008.
- [24] Murray R. y Abellanas Lorenzo, Fórmulas y Tablas De Matemática Aplicada, Spiegel Mc Graw Hill , México D.F. 1998
- [25] Dagdug Leonardo,Guzmán Orlando Mathematica Esencial con aplicaciones, ed UAM colección CBI, México D.F,2010