



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**PROPAGACIÓN ESPACIO-TEMPORAL DE ONDAS
EXCITABLES**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO**

P R E S E N T A:

EDGAR ARTURO CAMPOS CARBAJAL



DIRECTOR DE TESIS:

DR. FAUSTINO SÁNCHEZ GARDUÑO

2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Campos

Carbajal

Edgar

Arturo

53109163

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

400068192

2. Datos del tutor

Dr.

Faustino

Sánchez

Garduño

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Catherine

García

Reimbert

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Jesús

López

Estrada

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Pedro Eduardo

Miramontes

Vidal

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

Gerardo

Mejía

Rodríguez

7. Datos del trabajo escrito

Propagación espacio-temporal de ondas excitables

295 p

2013

Agradecimientos

A mis padres José Campos Isidro y María del Carmen Carbajal Hernández por su esfuerzo y apoyo para poder hacer realidad la culminación de mis estudios de la licenciatura en matemáticas. A mis hermanos José Antonio Campos Carbajal y Sandra Luz Campos Carbajal. A mi abuelita Antonia Hernandez Ramírez. A mi asesor de tesis, Doctor Faustino Sánchez Garduño, por su gran dedicación y paciencia. A todos los amigos de la Facultad de Ciencias, UNAM. A mi centro de trabajo, Escuela Secundaria Técnica Industrial 81 por su apoyo. A la memoria del maestro Lucio Abrajan Vargas.

Índice general

1. El modelo de Hodgkin y Huxley	1
1.1. Introducción	1
1.2. El sistema nervioso	2
1.2.1. Funciones del sistema nervioso	2
1.2.2. Las partes del sistema nervioso	3
1.3. La fisiología de las neuronas	5
1.3.1. La contribución de Don Ramón	5
1.3.2. Partes y funciones de la neurona	7
1.3.3. La membrana del axón	10
1.4. Potencial de acción y concentraciones iónicas	11
1.5. El modelo de Hodgkin-Huxley	14
1.5.1. Breve historia del modelo	16
1.6. El modelo de FitzHugh-Nagumo	29
1.6.1. El modelo de FitzHugh	29
1.6.2. Las ecuaciones de Nagumo	32
1.6.3. El modelo temporal de FitzHugh-Nagumo	35
1.7. El modelo espacio temporal	38
1.7.1. El modelo de FitzHugh-Nagumo espacio-temporal	40
2. Análisis con fijación de voltaje	43
2.1. Introducción	43
2.2. La dinámica temporal con $I_a = 0$	44
2.2.1. Análisis local	44
2.2.2. Análisis global	56
2.3. El modelo lineal a trozos	70
2.4. El modelo de FitzHugh-Nagumo $I_a > 0$	79

3. La dinámica espacio-temporal	93
3.1. Introducción	93
3.1.1. Las ondas viajeras	94
3.2. La trayectoria homoclínica	94
3.2.1. Análisis local para $\epsilon > 0$	97
3.2.2. Análisis local y global con $\epsilon = 0$	106
3.2.3. Análisis global con $\epsilon > 0$	115
3.2.4. Algunos trabajos posteriores	133
3.3. Simulaciones numéricas	138
3.3.1. Trayectoria homoclínica simple	139
3.3.2. Trayectoria homoclínica compuesta	142
4. Ondas de excitación bidimensionales	147
4.1. Introducción	147
4.2. Sobre las ondas del corazón	149
4.2.1. La fisiología del corazón	149
4.2.2. Las ondas reentrantes	154
4.3. Sobre la modelación matemática	175
4.4. Existencia de las ondas rotatorias	180
4.4.1. El modelo de FitzHugh-Nagumo en un anillo	181
4.4.2. Ondas rotando en un anillo	182
4.4.3. Análisis local	185
4.4.4. Ondas rotando en un disco anular	191
4.4.5. Análisis local	193
4.4.6. Análisis para $m = 1$ y $n = 1$	201
4.5. Simulaciones numéricas	207
4.5.1. Breve descripción de FEMLAB	207
4.5.2. La onda reentrante	208
4.5.3. Otra onda reentrante	216
A. Ecuaciones de reacción-difusión	233
A.1. La ley de conservación	234
A.2. La ley de Fick	237
B. Teoremas usados	241
B.1. Diferenciabilidad respecto a parámetros	241
B.2. El teorema de Hartman-Grobman	242
B.3. Variedades invariantes	243

B.3.1. Variedades invariantes sistema lineal	244
B.3.2. Variedades invariantes sistema no lineal	245
B.4. El teorema de bifurcación de Hopf para sistemas planos	247
B.4.1. Estabilidad del punto de equilibrio y existencia del ciclo límite	250
B.5. La prueba de Dulac	251
B.6. El teorema de Poincaré-Bendixson	252
C. Los bloques aislantes	255
D. El problema de Sturm-Liouville	267
D.0.1. El problema de Sturm-Liouville	267
D.0.2. El principio de Rayleigh	269
D.0.3. La función de Bessel	270
E. Raíces del polinomio característico	273

Introducción

En su más reciente informe (de 2008) que uno encuentra en internet, la Secretaría de Salud de México reporta que del total de 538,288 muertes ocurridas en el país, el 14% ocurrieron por enfermedades cardíacas. Los porcentajes varían atendiendo al sexo de las personas. Para el caso de las mujeres muertas, el 14.6% se debe a enfermedades cardíacas; mientras que para hombres es el 12.5%. Estos datos nos indican que los problemas cardíacos trascienden el interés fisiológico y se colocan como un problema de salud pública. Más aun, si uno revisa esta información en países con un mayor grado de desarrollo tecnológico, las datos son aun más alarmantes. En efecto, los malos hábitos alimenticios, el sedentarismo, el abuso en el consumo del alcohol o del tabaco, son factores que influyen de forma negativa en el buen funcionamiento del corazón. Ahora bien, de las enfermedades del corazón las hay unas más delicadas que otras. Por ejemplo, la fibrilación auricular, aunque es peligrosa, no lo es tanto como la ventricular. Pero antes de internarnos en estas cuestiones, a fin de ubicar el objetivo del presente trabajo, conviene hacer una somera descripción de nuestro vital órgano: el corazón. En términos coloquiales, suele decirse que el corazón es la “bomba del cuerpo humano”. Efectivamente, este órgano se encarga de hacer llegar la sangre a todo nuestro cuerpo: hasta los sitios más apartados a donde este fluido llega —siguiendo un sistema muy ramificado de conductos— rico en oxígeno; la trae de regreso conteniendo impurezas y materiales de desecho; la manda a los pulmones —lugar donde se oxigena— la trae desde los pulmones hasta el corazón y de aquí la bombea hacia todo el cuerpo, siguiendo otro complejo sistema circulatorio diferente a aquél por el que circula la sangre “sucia”. La descripción que hemos hecho caracteriza superficialmente a lo que identifica -en términos hidráulicos- al corazón. Más detalles y con mayor profundidad, se darán en la parte que le corresponde en este trabajo.

Por otro lado, a fin de que esta bomba funcione como tal, es necesaria la realización de una serie de complejos y variados procesos electroquímicos que se llevan a cabo a distintas escalas espaciales y temporales. En éstos, lo mismo participan las células que forman al músculo cardíaco, tejidos o fibras. Entender dichos procesos nos lleva a hacer una sucinta presentación tanto de la anatomía, como de la fisiología del corazón.

En términos anatómicos el corazón está formado por cuatro cámaras, dos superiores llamadas *aurículas* (una derecha y una izquierda) y dos inferiores denominadas *ventrículos* (uno derecho y otro izquierdo). Las cámaras tienen como “envoltura” al *músculo cardíaco* el que a su vez está formado por tres capas musculares: endocardio, miocardio y pericardio. La sangre “sucia” llega al corazón por la aurícula derecha a través de la vena cava inferior y la vena cava superior. La aurícula se contrae y al hacerlo, manda esta sangre al ventrículo derecho de donde, al contraerse unos segundos después, la envía a los pulmones por medio de las arterias pulmonares.

La sangre, al oxigenarse en los pulmones, regresa a la aurícula izquierda a través de las venas pulmonares, posteriormente pasa al ventrículo izquierdo, el cual al contraerse, envía la sangre rica en oxígeno a todos los tejidos del organismo.

Desde el punto de vista fisiológico lo que hace posible la serie de contracciones rítmicas (de 60 a 80 por minuto), es un conjunto de células cardíacas especializadas agrupadas y ubicadas en la parte superior de la aurícula derecha. Este agregado de células recibe el nombre de *nodo sinoauricular* (NSA) el cual emite una señal eléctrica y lo hace periódicamente. Ésta se propaga a las aurículas izquierda y derecha. Después de un pequeño lapso de tiempo, la señal eléctrica viaja por fibras de conducción especiales, es así que se estimula una segunda área de tejido: *el nodo auriculoventricular* (NAV). Desde esta área, los impulsos son llevados por fibras musculares llamadas *haz de His*, posteriormente aquéllos pasan por las *fibras de Purkinje*, llegando a las paredes de los ventrículos derecho e izquierdo los cuales se contraen simultáneamente.

No deja de ser sorprendente que la matemática ha sido usada (y lo continúa siendo) en los intentos por entender, desde otra perspectiva, la dinámica —o las dinámicas deberíamos decir— que se dan en el corazón estando éste sano o teniendo alguna patología. Las técnicas y los actores han sido diferentes, atendiendo al problema específico que se aborda, así como a la formación básica de los investigadores. Ha habido de todo: desde el uso de una fórmula elemental para calcular el tiempo que le lleva a una onda de activación dar

la vuelta a un disco anular compuesto por células cardiacas, hasta complejas simulaciones numéricas que dan una aproximación a la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales que modelan la propagación de las ondas de activación en una parte del corazón o al órgano completo. Esto es particularmente útil cuando en una zona de los ventrículos se instala un marcapasos que usurpa el papel del marcapasos global del corazón, es decir, en estado de fibrilación ventricular que pudiera ser la antesala de la muerte por paro cardíaco debido a un ataque masivo al miocardio.

La historia del uso de la matemática en cuestiones cardiacas, así como los distintos enfoques usados se pierde en los años. Una revisión de estos temas se encuentra en el trabajo de José Jalife [31] o bien en la tesis de licenciatura en matemáticas realizada por Alexandra Guzmán [25].

El objetivo de este trabajo es estudiar, desde la perspectiva matemática, la propagación de ondas de activación en medios excitables, como lo es el corazón y más específicamente la propagación de ondas reentrantes en una región anular del tejido cardíaco. Las herramientas y conceptos matemáticos que usamos son las ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales). La forma como nos acercamos al objetivo descrito es paulatina. Así, primero estudiamos el fenómeno de propagación de ondas en un medio de dimensión uno para después extender a dos dimensiones el espacio en el que se propagan dichas ondas. La estructura y contenido de este trabajo, son las siguientes.

En el Capítulo 1, hacemos una presentación introductoria (suficiente para nuestros fines) del sistema nervioso, centrandó nuestra atención en la neurona. En este capítulo describimos las propiedades electroquímicas que hacen posible la transmisión de los impulsos nerviosos. Aquí mismo se deduce un modelo matemático de un sistema excitable particular, para ello se usan las propiedades electroquímicas del axón “gigante” de la neurona del calamar *Loligo Vulgaris*. El modelo matemático describe la transmisión de los impulsos nerviosos a través del axón. Nos referimos al sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de Hodgkin-Huxley. Su complejidad, nos llevará a considerar las simplificaciones realizadas por Richard FitzHugh y Jin-Ichi Nagumo. Así, obtenemos el sistema FitzHugh-Nagumo en sus dos versiones: bajo la premisa de fijación de voltaje y cuando ésta se suprime.

En el Capítulo 2, estudiamos la dinámica del sistema de FitzHugh-Nagumo. Primero, lo hacemos bajo la premisa de *fijación de voltaje*; esto hace que las variables de estado del sistema dependan sólo de la variable temporal. En un primer acercamiento, consideramos un modelo lineal a trozos del sistema de FitzHugh-Nagumo. Aquí probamos la emergencia de un ciclo límite

a través de una bifurcación de Hopf. Regresando al modelo original, sobre éste demostraremos —usando la técnica de formas normales— la existencia de dos valores de la corriente para los cuales el sistema de EDO tiene una bifurcación de Hopf.

El Capítulo 3, está dedicado a estudiar la propagación de ondas en un espacio de dimensión uno. El hecho de que los impulsos nerviosos viajen a través del axón neuronal con velocidad constante y conservando su perfil, nos lleva a que busquemos las condiciones bajo las cuales el sistema de FitzHugh-Nagumo (que ahora es un sistema de EDP) tenga soluciones de tipo onda viajera con forma de impulso. A su vez, esta búsqueda se lleva a un problema dinámico consistente en averiguar las condiciones bajo las cuales un sistema de tres EDO tiene trayectorias homoclínicas, basadas en el origen. Para esto, se seleccionan los parámetros de manera que este punto sea el único equilibrio del sistema. Este análisis se hace mediante la técnica de *bloques aislantes* propuesta por Carpenter ([10]). Así, utilizando una aproximación lineal a trozos sobre el polinomio de tercer grado y considerando valores de los parámetros particulares, mostraremos numéricamente la forma de una trayectoria homoclínica simple y una doble. Según lo han probado otros autores (véanse [15], [16] y [17]) este sistema tiene trayectorias que definen a los llamados *impulsos múltiples*.

Finalmente, en el Capítulo 4, agregaremos una nueva variable espacial al sistema de FitzHugh-Nagumo, por lo que ahora tendremos dos variables espaciales. Centraremos nuestra atención en la propagación del potencial de acción en el corazón humano. Para ello, presentamos *grosso modo*, las propiedades fisiológicas que hacen posible la contracción del corazón y expondremos un breve resumen de los diferentes tipos de modelos matemáticos que se han usado para el estudio de la propagación del potencial de acción en el corazón. Se introducirá el concepto de *onda reentrante*, dado que éste se asocia a una patología cardíaca: *la fibrilación ventricular*. Esto nos conducirá a exponer un breve resumen de los trabajos experimentales realizados por la Dra. Hortencia González y colegas ([21] y [22]). También abordamos el estudio de la existencia de las ondas reentrantes desde el punto de vista matemático. Enseguida, realizaremos las simulaciones numéricas respectivas del sistema no lineal de ecuaciones diferenciales parciales, que nos ha servido como modelo: el de FitzHugh-Nagumo. Esto lo hacemos en una región anular.

Para los apéndices, ubicados al final de nuestro trabajo, hemos reservado los aspectos técnicos y algunos resultados que utilizamos para completar el estudio de los cuatro capítulos.

El lector interesado en indagar los detalles específicos, puede echarle una mirada a las referencias que aparecen en la bibliografía. Aunque nuestro trabajo es una recopilación de otros, debemos decir que ésta presenta de forma unificada y autocontenida el material que se publicó en varios artículos o libros de texto. Por otro lado, nos esforzamos en explicar de forma clara y amable las ideas de cada uno de aquéllos.

Capítulo 1

El modelo de Hodgkin y Huxley

1.1. Introducción

Durante un día común, realizamos una gran cantidad y variedad de actividades. La locomoción es una de ellas: caminamos, saltamos, bailamos, etc. También, podemos considerar las de percepción, que comunican a nuestro cuerpo con el mundo exterior: miramos, oímos, percibimos el olor de los objetos y sentimos la temperatura del ambiente.

Tales actividades se llevan a cabo en diferentes escalas de tiempo, unas son rápidas, mientras otras son más lentas. Algunas son conscientes y otras inconscientes. En términos generales, la gran cantidad y diversidad de actividades, que nuestro cuerpo realiza, son gobernadas por dos sistemas maestros: el *sistema nervioso* (SN) y el *sistema endócrino* (SE). Ahora bien, el (SN) se encarga de coordinar las respuestas rápidas a estímulos externos; mientras que el (SE) controla las respuestas lentas y de tiempo prolongado. Éstas se asocian a estímulos internos, llamados impulsos nerviosos. En este capítulo, expondremos los aspectos básicos de la fisiología y de la física de los impulsos nerviosos.

Para ello, enfocaremos nuestro estudio en la unidad fundamental del sistema nervioso: la *neurona*. Sobre ésta haremos una sucinta exposición de su fisiología y sus propiedades electroquímicas ya que son ellas las que hacen posible la transmisión de los impulsos nerviosos. Sobre la base de estas propiedades, describiremos un modelo eléctrico de la neurona, el cual nos

ayudará a introducirnos en los aspectos básicos del trabajo desarrollado por Hodgkin y Huxley. Éste echa mano de la técnica inventada por Cole y Marmot ([8]). Aunque puede hacerse el estudio de la dinámica del modelo de Hodgkin y Huxley, vamos a usar los trabajos de FitzHugh ([18]) y Nagumo ([44]), los cuales son una reducción de aquél. Éstos dos nuevos sistemas poseen las propiedades cualitativas del modelo original.

1.2. El sistema nervioso

Comenzamos esta sección describiendo *grosso modo* las principales características del sistema nervioso. Para esta exposición nos hemos basado en los textos de Kandel [35] y Nicholls [45].

1.2.1. Funciones del sistema nervioso

Comenzamos estudiando las tres principales funciones del sistema nervioso, que son:

a) **Recepción.** La recepción se lleva a cabo mediante los receptores que son las partes del sistema nervioso que se encargan de recibir los cambios que se dan en los medios interno o externo del cuerpo humano. Los registros de entrada de los receptores, pueden ser de formas muy variadas, como por ejemplo: el sabor, el sonido, el dolor, la luz, etc., las cuales, en los receptores, se transforman en señales apropiadas que se envían -a través de las neuronas- al cerebro o a la médula espinal.

b) **Integración.** La información que se capta en los receptores, se manda en forma de señales específicas a los centros sensoriales del cerebro o a la columna vertebral, sitios en los que es procesada. Éstos a su vez, generan una respuesta específica.

c) **Generación de respuesta.** La respuesta de salida es generada en los centros sensoriales del cerebro o en la médula espinal. Esta respuesta es una señal que es transmitida a los órganos, los cuales pueden convertirla en alguna forma de acción, por ejemplo: liberación de hormonas, cambio del ritmo cardíaco, etcétera.

1.2.2. Las partes del sistema nervioso

En forma esquemática, el sistema nervioso consta de dos subsistemas principales: el sistema nervioso *central* y el sistema nervioso *periférico*. A continuación describiremos brevemente a cada uno.

a) **Sistema Nervioso Central (SNC).** El nombre de central se da por el hecho de que está formado por células que se aglomeran en ganglios o centros que están conectados. El (SNC) está formado por el cerebro y la médula espinal, los cuales están rodeados de tejidos y líquidos, protegidos por un conjunto de huesos: el cráneo y la columna vertebral, respectivamente. Dentro de éstos se puede considerar lo siguiente:

i) **El cerebro.** El cerebro está constituido por tres partes principales: los hemisferios cerebrales, el cerebelo y la médula oblonga.

- **Hemisferios cerebrales.** Es aquí donde se coordinan la inteligencia, el razonamiento, el aprendizaje y la memoria. Hay dos hemisferios, el derecho y el izquierdo, ambos se conectan a través del cuerpo calloso. El cuerpo calloso es un conglomerado de fibras nerviosas que conecta a estos dos hemisferios y, además, transfiere información de uno a otro. A estos dos los separa, de forma simétrica, una fisura longitudinal.
- **Cerebelo.** Se encuentra ubicado en la parte inferior del cráneo, por debajo de los hemisferios cerebrales. El cerebelo es esencial en lo referente a los movimientos del cuerpo. Es el responsable de la coordinación y mantenimiento del equilibrio.
- **Médula oblonga.** Es la más cercana a la médula espinal y está involucrada con la regulación de los latidos del corazón, la respiración y la presión sanguínea. También regula los centros de reflejo para la tos, el vómito y el hipo. Las señales nerviosas entre el cerebro y la médula espinal, pasan a través de la médula oblonga. Una lesión a esta estructura puede provocar la pérdida de la vida.

ii) **La médula espinal.** La médula espinal corre por el lado dorsal del cuerpo y lo liga con el cerebro. La médula está formada por la llamada materia gris, la materia blanca que la rodea la constituye un conjunto de fibras nerviosas (dispuestas longitudinalmente), que tienen la función

de ser rutas de conducción nerviosa. El cerebro y la médula espinal se comunican por una abertura situada en la base del cráneo.

b) **Sistema Nervioso Periférico (SNP)**. Éste conecta al sistema nervioso central con tejidos y órganos del cuerpo y lo hace a través de los nervios. El (SNP) contiene *neuronas aferentes* que llevan información de este sistema hacia el (SNC) o *neuronas eferentes* que llevan información hacia músculos o glándulas. En el (SNP) hay dos tipos de rutas motoras: las somáticas y las autónomas que tienen la siguientes características:

- i) **Sistema Nervioso Somático (SNS)**. Incluye todos los nervios que controlan voluntariamente el sistema muscular y a los receptores¹ sensoriales externos. Como ejemplo de éstos tenemos a los ojos, la nariz, la piel, etcétera.
- ii) **Sistema Nervioso Autónomo (SNA)**. Éste consiste de neuronas motoras que controlan los órganos internos, sobre los cuales no tenemos control, como por ejemplo los músculos del corazón, los músculos blandos del estómago, las glándulas salivales, los músculos que provocan el erizamiento involuntario del pelo, etc. El sistema nervioso autónomo se divide en dos: simpático y parasimpático. La mayoría de los órganos (corazón, pulmón, estómago, páncreas, etc) y las glándulas (por ejemplo, salival y lagrimal), poseen una doble inervación, es decir existen nervios asociados al sistema simpático y también para el sistema parasimpático. En tales casos, las dos divisiones pueden ejercer efectos opuestos. Por ejemplo, el sistema simpático aumenta la frecuencia de los latidos cardíacos y el parasimpático, la disminuye.

Debemos decir que las neuronas del (SNA) no llegan de forma directa -como sí lo hacen las de (SNS)- a sus objetivos, sino que se conectan a neuronas motoras las cuales, a su vez, estimulan el órgano respectivo.

Dicho de forma general, el sistema nervioso consisten de células, interrelacionadas que forman una red nerviosa con una gran complejidad.

¹También llamados órganos sensoriales. En nuestro cuerpo, estos órganos especializados reciben estímulos del exterior y los transmiten en forma de un impulso nervioso a través de las vías nerviosas hasta el sistema nervioso central donde se procesa y se genera una respuesta.

1.3. La fisiología de las neuronas

Antes de comenzar nuestra presentación sobre la fisiología de la neurona, exponemos una breve reseña histórica, sobre el descubrimiento de la unidad funcional del sistema nervioso: la *neurona*.

1.3.1. La contribución de Don Ramón

A finales del siglo XIX, las investigaciones acerca del sistema nervioso recibieron un fuerte impulso, esto gracias a los descubrimientos del fisiólogo español Santiago Ramón y Cajal (1852-1934), quien fue el primero en afirmar que las neuronas eran células. La teoría neuronal es la base de sus descubrimientos, su concepción permitió el conocimiento detallado de lo que sabemos actualmente del sistema nervioso. Por sus investigaciones recibió el premio Nobel de Fisiología o Medicina en 1906 que, de manera conjunta, fue entregado al italiano Camillo Golgi (1843-1926), quien inventó la técnica por medio de la cual, Ramón y Cajal pudo realizar sus experimentos (método de tinción del cromato de plata).

En su trabajo, Ramón y Cajal estudió una gran diversidad de sistemas nerviosos del reino animal. En la época de Cajal, la microfotografía no se había desarrollado y la única forma de ilustrar las observaciones microscópicas era mediante dibujos. Dibujó en papel diferentes tipos de células, algunas simples y otras con una gran complejidad. También publicó una serie de artículos sobre la estructura de la lente del cristalino de algunos vertebrados y fibras musculares de insectos.

A lo largo de su trayectoria como científico, Cajal estudió el problema de la dirección en la que viaja el impulso nervioso dentro de la neurona. Él definió su teoría de la polarización dinámica de la siguiente manera (véase [23]):

“La transmisión del movimiento nervioso tiene lugar desde las ramas protoplasmáticas hasta el cuerpo celular, y desde éste a la expansión nerviosa. El soma y las dendritas representan, pues, un aparato de recepción, mientras que el axón constituye un órgano de emisión y repartición”.

Cajal y Golgi, tenían ideas diferentes acerca de la estructura del SN, Cajal no estaba de acuerdo con el punto de vista de Golgi, quien defendía la hipótesis de que el SN estaba constituido por un sistema continuo de tejidos. La idea de Cajal era que el SN estaba hecho de billones de células nervio-

sas separadas, que posteriormente fueron llamadas neuronas por Waldeyer (1836-1921). Es decir, la unidad básica del sistema nervioso está representada por elementos individuales, aunque muy próximos unos a otros.

Por otro lado, Golgi defendía la hipótesis de que la red nerviosa era un filamento extenso de nervios. Esta idea originalmente fue propuesta por Joseph Von Gerlach (1820-1896).



(a) Camillo Golgi.



(b) Santiago Ramón y Cajal.

Figura 1.1: Fotografías tomadas de [56].

La técnica inventada por Golgi resultó ser una aportación muy importante para el estudio del sistema nervioso, pues antes de su invención, la principal dificultad para estudiar el sistema nervioso era que en el microscopio aparecía como una enorme masa muy enredada de filamentos. Siendo más específicos, su técnica consistió en colorear secciones de tejido y, de esta manera, aislarlos fácilmente. Así, las estructuras más finas del sistema nervioso se teñían de color castaño con un fondo amarillento. Aunque el método tenía imperfecciones, le hizo mejoras. Según la literatura consultada, Cajal usó la técnica de Golgi lo cual originó un distanciamiento entre los dos fisiólogos.

Un error más de Golgi, fué que consideró a las dendritas como elementos relacionados a la nutrición de las neuronas, además de que no las relacionaba

con la conducción de los impulsos nerviosos. A pesar de esto, sus contribuciones científicas fueron importantes.

Surgió un dilema cuando se propuso otorgar de forma conjunta el Premio Nobel. Después de un exhaustivo análisis de cada uno de los candidatos, se concluyó que el trabajo de Cajal no hubiera sido posible sin la técnica inventada de Golgi, por lo que era imposible valorar más alguno de los dos trabajos. Si el lector desea indagar más sobre los trabajos de Cajal y Golgi, puede consultar las referencias [23] y [56].

1.3.2. Partes y funciones de la neurona

Hay diferentes tipos de neuronas. En efecto, dependiendo de la función que desempeñan y del sitio particular en el que se localizan en el cuerpo humano, su tamaño, y quizás su forma, puede ser diferente. A pesar de estas diferencias, en términos generales, todas las neuronas tienen tres partes fundamentales que las caracterizan:

- a) **Cuerpo celular o soma.** Esta parte contiene al núcleo, a las mitocondrias y a otros organelos de células eucariontes ².
- b) **Dendritas.** Son ramificaciones que se originan en el cuerpo celular, las cuales reciben información de otras células.
- c) **Axón.** Es una fibra nerviosa que transporta los mensajes hacia el exterior de la neurona. Dado que la neurona es una célula, está cubierta por una membrana en donde, como veremos más adelante, se realizan fenómenos electroquímicos que hacen posible la conducción nerviosa.

En la figura 1.2 se muestran diferentes tipos de neuronas que varían dependiendo de su función y ubicación.

Se le da el nombre de *sinápsis*, a los puntos de contacto entre las neuronas, la cual no es una unión física (las neuronas no se tocan), más bien se trata de la existencia de sustancias electroquímicas, que realizan la tarea de transmitir la señal nerviosa de una neurona a otra. Las sinápsis químicas constituyen la gran mayoría de las conexiones entre las neuronas. Existe un espacio de alrededor de 20 nanómetros ³ conocido como hendidura sináptica, que separa a la neurona que transmite la información (pre-sináptica) de la neurona que

²Células que tienen núcleo, separado del citoplasma por una membrana.

³Un nanómetro es equivalente a 1×10^{-9} metros.

recibe la información (post-sináptica). El estudio de la sinápsis química es una de las áreas con más actividad en la investigación neurobiológica actual.

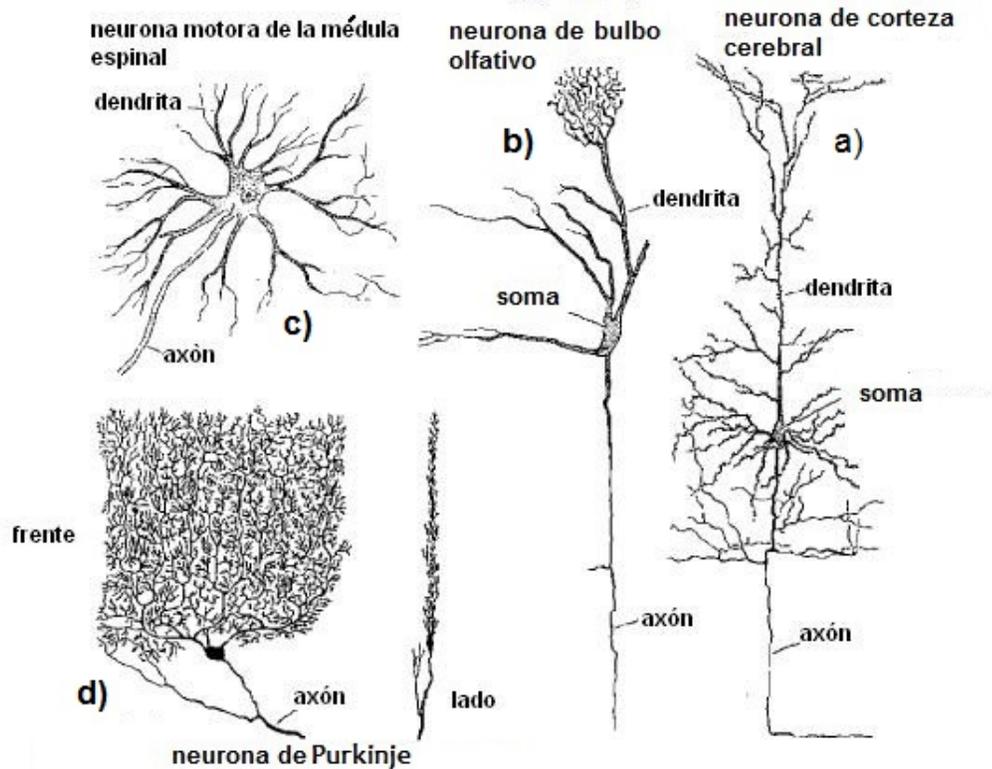


Figura 1.2: Diversos tipos de neuronas ilustradas por Ramón y Cajal. En a) la célula de corteza cerebral es de un ratón, b) la célula del bulbo olfativo corresponde a un gato, en c) y d) la neurona motora y la neurona de Purkinje (corteza de cerebelo) son de un humano adulto. Figura obtenida de [35].

Las partes que conforman una neurona, tienen una tarea y proceso específico en el desarrollo de la transmisión nerviosa. Tomando como criterio su funcionalidad, aquéllas se pueden clasificar de la siguiente forma:

- a) **Región de entrada.** Ésta es la parte de la neurona que está en contacto sináptico con otras neuronas y es por donde se recibe la información. Ésta consiste de dendritas y tal vez alguna parte de la superficie del soma de la neurona misma.

- b) **Región de conducción.** Ésta consiste del axón, el cual usualmente termina en ramas finas que hacen contacto sináptico con otras neuronas. El tamaño y longitud del axón cambia, es posible que incluso exceda un metro. La comunicación que se da a través del axón es de un tipo particular: se da solamente en un sentido y lo que se transmite son señales de tipo binario. En otras palabras, dado un estímulo, una neurona puede o no responder.
- c) **Región de salida.** La conforma las ramas terminales del axón. Aquí es donde se libera una sustancia química llamada *neurotransmisor*, de la cual depende que continúe el proceso de la transmisión nerviosa.

Por otro lado, podemos clasificar a las neuronas en términos de sus funciones de la manera siguiente:

- a) **Sensoriales.** Éstas tienen dendritas largas y axón corto y llevan los mensajes de los receptores del SNC. Las neuronas sensoriales conducen impulsos de los receptores (por ejemplo la piel) hacia el cerebro y a la médula espinal; estos impulsos llevan información en formas muy variadas (asociadas a la visión, el sonido, el tacto, el dolor, etc.). Además sus somas o cuerpos celulares, forman gran parte de la raíz posterior de la médula espinal.
- b) **Motoras.** Tienen axón largo y dendritas cortas, transmiten mensajes del SNC a los músculos o a las glándulas. Las neuronas motoras conducen los impulsos del cerebro y la médula espinal hasta los receptores (por ejemplo, los músculos y glándulas exocrinas) o sea, en sentido contrario a las sensitivas. Estas constituyen el componente motor de los nervios espinales craneales.
- c) **Interneuronas.** Se ubican exclusivamente en el sistema nervioso central, donde conectan unas neuronas con otras y no tienen contacto directo con estructuras periféricas (receptores y transmisores).

En términos generales, se tiene que las señales nerviosas son conducidas a lo largo del axón, de tal forma que puede decirse que el axón es el principal medio de la transmisión de los impulsos nerviosos. Por esta razón, para estudiar mejor el fenómeno de la transmisión nerviosa, requerimos estudiar con más detalle las propiedades del axón, esto es lo que hacemos a continuación.

1.3.3. La membrana del axón

Permeabilidad

La neurona es una célula eucarionte, el axón forma parte de ella, por lo cual está cubierto de una membrana. Las propiedades de la membrana son las principales responsables de la transmisión de información del SN. Una propiedad importante de la membrana neuronal es ser selectivamente permeable, es decir, opone resistencia diferenciada al paso (del interior al exterior y al revés) de distintos tipos de iones. Lo esencial es que el interior y el exterior del axón se forma de una solución de sales cuyos componentes principales son los iones⁴ de *sodio* Na^+ , de *potasio* K^+ y de *cloro* Cl^- . Estos iones fluyen a través de la membrana, de manera que la permeabilidad juega un papel importante. Debemos decir que no existe una clase particular de iones que esté distribuida de forma balanceada de ambos lados del axón. De los tres iones que acabamos de mencionar, el sodio Na^+ y el Cl^- , son los más concentrados fuera del axón; mientras que el K^+ se encuentra más concentrado en el interior.

Dado que la membrana es permeable, los iones pueden fluir, hacia adentro o hacia afuera, lo que genera un cambio en las concentraciones en ambos lados de la membrana. El flujo de iones se da en zonas específicas de la membrana llamados *canales*, que están esparcidos en ésta. Existen diferentes tipos de canales, uno para cada tipo de ion, los cuales se abren y se cierran, de acuerdo a condiciones locales.

La permeabilidad de la membrana le confiere propiedades eléctricas al axón de la neurona. Como veremos más adelante, al usar tales propiedades, se puede estudiar su comportamiento en términos de un modelo eléctrico.

Excitabilidad

Otra propiedad importante de la membrana del axón es su excitabilidad. En el estado de reposo, entre el interior y el exterior de la membrana, se tiene una diferencia de potencial de aproximadamente -25 mV. Cuando se aplica un estímulo en forma de voltaje, puede cambiar o no el voltaje de reposo. Es decir, la membrana del axón posee un *voltaje umbral* el cual presenta la siguiente propiedad. Cuando el impulso sobrepasa el umbral, el voltaje

⁴Un ion es una partícula que se forma, cuando un átomo en estado neutro o un grupo de átomos ganan o pierden uno o más electrones. Un átomo que pierde un electrón forma un ion de carga positiva, llamado catión; mientras que un átomo que gana un electrón forma un ion de carga negativa, llamado anión.

(que ahora recibe el nombre de potencial de acción) entre interior y exterior del axón, cambia hasta 40mV, y después regresa a su estado original. Al ocurrir lo anterior, decimos que la neurona se excitó. Si el estímulo no es lo suficientemente fuerte, es decir el umbral no es superado, el potencial de reposo se mantiene en -25 mV. En este caso, decimos que la neurona no se excitó. Un detalle muy importante es que si la neurona se excita, entonces transmite información en forma de potencial de acción, en caso contrario no existe transmisión. Es decir, la neurona presenta dos respuestas a un estímulo una respuesta pasiva cuando el estímulo no sobrepasa el umbral o una activa cuando se sobrepasa el umbral.

Refractariedad

Cuando el potencial de acción se lleva a cabo, decimos que la neurona se encuentra excitada en este momento. Estando excitada si se estimula con un voltaje que sobrepase el umbral, aquélla no responde. Se necesita que el potencial de acción regrese a su estado base, para poder generar un nuevo potencial de acción. El *periodo refractario*, es el tiempo que transcurre entre que se excita la neurona y el instante en que el potencial de acción regresa al estado de reposo.

En la siguiente sección describiremos la relación existente entre el potencial de acción y la concentración de iones.

1.4. Potencial de acción y concentraciones iónicas

Antes de entrar a la parte central de esta sección, debemos decir que se define el potencial de reposo de la membrana, a la situación en la que el flujo de iones no provoca cambios significativos, en la concentración de los iones, de ambos lados de la membrana. Cuando la membrana se encuentra en el estado base, se dice que está polarizada. En esta situación, hay la misma cantidad de iones de ambos lados, es decir se presenta una balance entre las cargas de ambos lados de la membrana. Es importante considerar tres factores que afectan el potencial de reposo:

- a) La naturaleza eléctrica de los iones.
- b) La difusión de partículas cargadas a través de la membrana.
- c) Las bombas químicas.⁵

Cuando la membrana se encuentra en su estado base, puede suceder el fenómeno siguiente: si la concentración de Na^+ en reposo, es mucho mayor en el exterior que en el interior, ocurre un proceso de difusión, el cual provoca que los iones de sodio Na^+ se muevan hacia el interior; mientras que los iones de potasio K^+ , se difundan al exterior. Este fenómeno no afecta la propagación del impulso nervioso. Este proceso que se lleva a cabo sin utilizar energía, se denomina proceso pasivo, que es diferente a los procesos que sí utilizan energía y son llamados, procesos activos.

Debemos hablar de los dos tipos de potenciales que son: *locales y de acción*. Los potenciales locales tienen relación directa con el estímulo, sin embargo aquéllos aumentan lentamente y disminuyen cuando aumenta la distancia desde donde se originan. Además de que su distancia de propagación es corta, aproximadamente de 1 a 2 milímetros. Usualmente su función la llevan a cabo en la parte final de los nervios sensoriales (en donde reciben el nombre de potenciales receptores) o también en la conexión entre las neuronas (aquí reciben el nombre de potenciales sinápticos).

El potencial de acción (impulso nervioso a través del axón) exhibe una dinámica diferente, surge un fenómeno con el siguiente comportamiento: al ocurrir la despolarización de la membrana, comienza a aumentar su permeabilidad al sodio Na^+ . Así, éste entra al axón y el potencial de membrana, v , aumenta. Posteriormente comienza a disminuir la permeabilidad a Na^+ y aumenta la permeabilidad del K^+ . Debemos decir que el flujo de iones de K^+ hacia el exterior, se da de manera rápida. En tal situación, hay una carga positiva en exceso en el exterior, ésta atrae a los iones negativos de Cl^- , hacia el exterior del axón. Entonces v , desciende de nuevo a su valor original. Por último, se activa la bomba de *sodio-potasio*, sobre la membrana que elimina el exceso de Na^+ en el interior, para introducir iones de K^+ , con esto se recuperan las concentraciones que había al principio del potencial de acción.

⁵Una bomba química es una proteína ubicada en la membrana del axón. Su función es el transporte de los iones entre el medio extracelular e intracelular. Un aspecto importante de estas proteínas es que los cambios de su conformación dan como resultado la apertura o cierre de canales para el movimiento de iones específicos, de forma particular Na^+ y K^+ . Así se dice que los canales tienen asociadas compuertas.

1.4. POTENCIAL DE ACCIÓN Y CONCENTRACIONES IÓNICAS 13

En la figura 1.3, observamos el comportamiento de las cargas positiva (+) y negativa (-), asociadas a los iones del axón durante el potencial de acción, en aquella se puede observar que antes y después del potencial, el interior del axón está cargado de manera negativa mientras que el exterior está cargado de manera positiva.

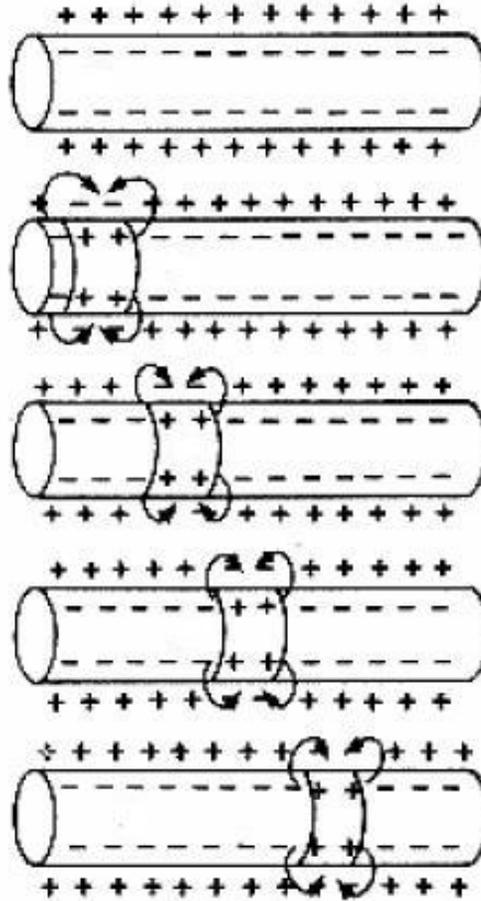


Figura 1.3: El proceso del potencial de acción. Figura obtenida de [55].

Con base en la descripción anterior, se puede concluir de manera convincente, que el potencial de acción es lo que constituye la señal nerviosa.

En base a sus estudios, los fisiólogos reconocen cuatro fases en el potencial de acción: ascenso, excitación, refracción y recuperación. Describámoslas brevemente:

- a) En la fase de ascenso, se da un estímulo por arriba del umbral, causando un aumento rápido de v .
- b) En la fase de excitación v disminuye lentamente; en esta situación, la permeabilidad de K^+ aumenta,
- c) Se da después el *periodo refractario*, en el cual cualquier estímulo adicional no provoca un cambio en v .
- d) Por último v , recupera su estado de reposo esto debido a la bomba de sodio-potasio.

En la figura 1.4 se muestra la gráfica típica del potencial de acción. En ella, exhibimos las cuatro fases asociadas al potencial de acción. Debemos decir que la forma y velocidad de propagación del potencial de acción varía según el tipo de la neurona.

Como dato histórico, durante un tiempo se creyó que el impulso nervioso se comportaba como una corriente eléctrica que viajaba a lo largo del axón del mismo modo en que los electrones fluyen a través de un alambre. Sin embargo se demostró, que el axón es un mal conductor de electricidad, además de que el impulso nervioso aunque es muy rápido, es mucho más lento que una corriente eléctrica. La velocidad de transmisión del impulso nervioso, depende fundamentalmente de la velocidad de conducción del axón, la cual depende a su vez del diámetro del axón y de una sustancia llamada mielina que lo rodea.

1.5. El modelo de Hodgkin-Huxley

Después de que Berstein en 1902, observó que la permeabilidad de la membrana cambiaba con el potencial de acción, estos mecanismos iónicos fueron estudiados con más cuidado por varios científicos. Dentro de éstos, el estudio más representativo fue el desarrollado por los fisiólogos ingleses Alan Lloyd Hodgkin y Andrew Fielding Huxley. Su trabajo se desarrolló en el Laboratorio de la Asociación de Ciencias Marinas en Plymouth, Inglaterra a principios de 1950. A partir de sus experimentos en el laboratorio, construyeron un modelo matemático para describir el proceso de la conducción nerviosa. Aquél consiste de un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales. Sus experimentos fueron realizados estudiando el impulso nervioso en el axón gigante del calamar *Loligo vulgaris*, el cual posee células nerviosas con un axón

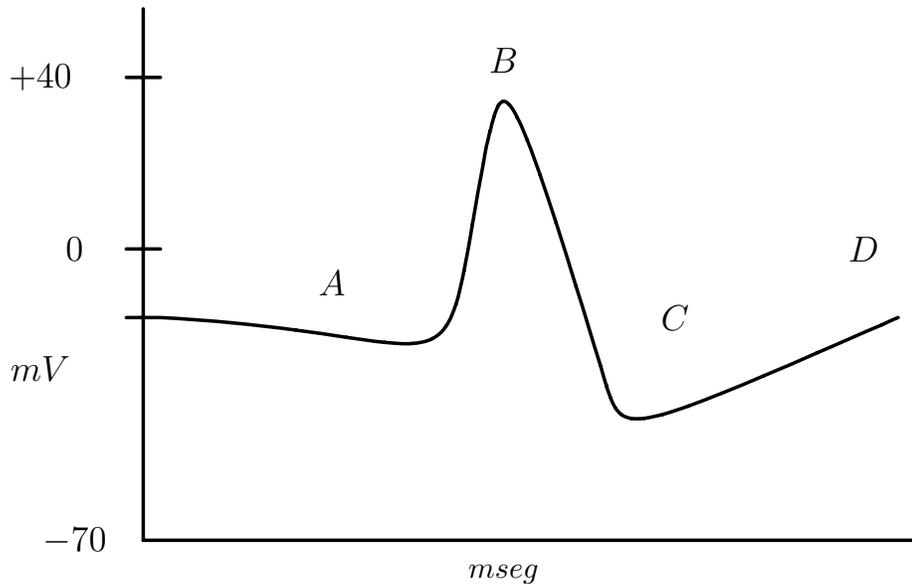


Figura 1.4: Aquí podemos observar las cuatro fases asociadas al potencial de acción, A: ascenso, B: excitación, C: refracción y D: recuperación.

de 0.5 mm de diámetro y una longitud de alrededor de 5 cm. Véase la figura 1.5. Los nervios en forma de estrella son los que tienen axones “grandes”. Estos actúan en el manto⁶. Cuando el calamar se encuentra en peligro, un impulso nervioso a través de los axones “grandes”, contrae los músculos del manto, lo que genera una expulsión rápida de agua por medio de un orificio ubicado en la parte inferior de su cabeza y de esta forma el calamar huye a gran velocidad.

La aportación de Hogkin y Huxley fue muy importante para el estudio del potencial de axón. Su modelo se dedujo y ha sido estudiado con el objetivo de explicar el comportamiento del potencial de acción en el axón de la neurona del calamar. En trabajos posteriores, con las debidas adaptaciones, se utilizó para describir el potencial de acción en diferentes tipos de neuronas. En seguida exponemos una breve reseña histórica del modelo propuesto por los fisiólogos ingleses. Para la redacción de esta sección nos basamos en el texto de Keener y Sneyd [36].

⁶Se constituye por los músculos, ubicados en la parte dorsal. El manto tiene una estructura tubular, en la cual se ubican las vísceras.

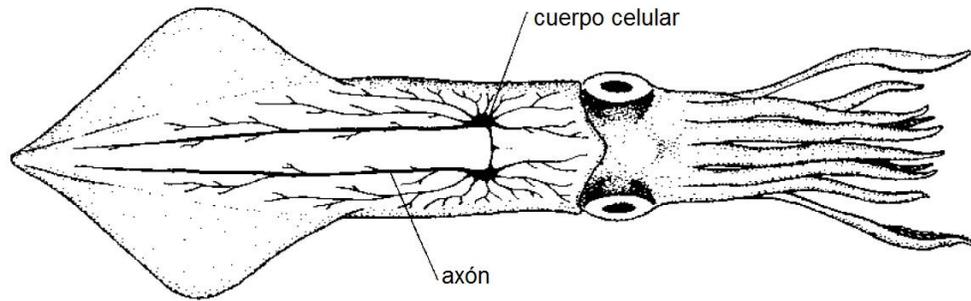


Figura 1.5: Calamar *Loligo vulgaris*. Figura obtenida de [8].

1.5.1. Breve historia del modelo

Desde el año de 1902 Berstein había observado que la permeabilidad de la membrana celular cambiaba debido al potencial de acción. En este mismo sentido, en el año de 1921 el biólogo Young descubrió que los axones del calamar *Loligo vulgaris* eran largos y gruesos de manera que facilitaban la experimentación. Por otro lado, durante una estancia postdoctoral en los Estados Unidos (de 1937 a 1938), Hodgkin estableció comunicación con el grupo de Cole y Curtis en Columbia, de manera que empezaron a trabajar con el objetivo de medir el potencial de acción, a través de la perforación de un túnel en el axón gigante del calamar *Loligo vulgaris*. En 1940, Cole y Curtis, usando cuidadosamente electrodos, obtuvieron la primera evidencia científica convincente de que un incremento en la conductividad de la membrana del axón, se hacía presente cuando se daba el potencial de acción. Sin embargo, no tenían una técnica para medir, de forma directa, los efectos de la permeabilidad de la membrana del axón, en el potencial de acción.

Alrededor de 1947, Cole y Marmot refinaron la técnica que permitía medir directamente la corriente total en la membrana, esto por medio de microelectrodos. Así, para el año siguiente Hodgkin regresó al grupo de Cole con la intención de aprender dicha técnica. Una vez aprendida, regresa al Reino Unido y la comparte con sus colegas Huxley y Katz, con el objetivo de probar que el cambio en la permeabilidad del sodio era el principal responsable de la despolarización y la aparición del potencial de acción.

Para finales de 1949, una vez que afinaron sus experimentos, Hodgkin, Huxley y Katz ya tenían definido el efecto de los cambios en la permeabilidad de la membrana a los iones de sodio y el proceso de despolarización.

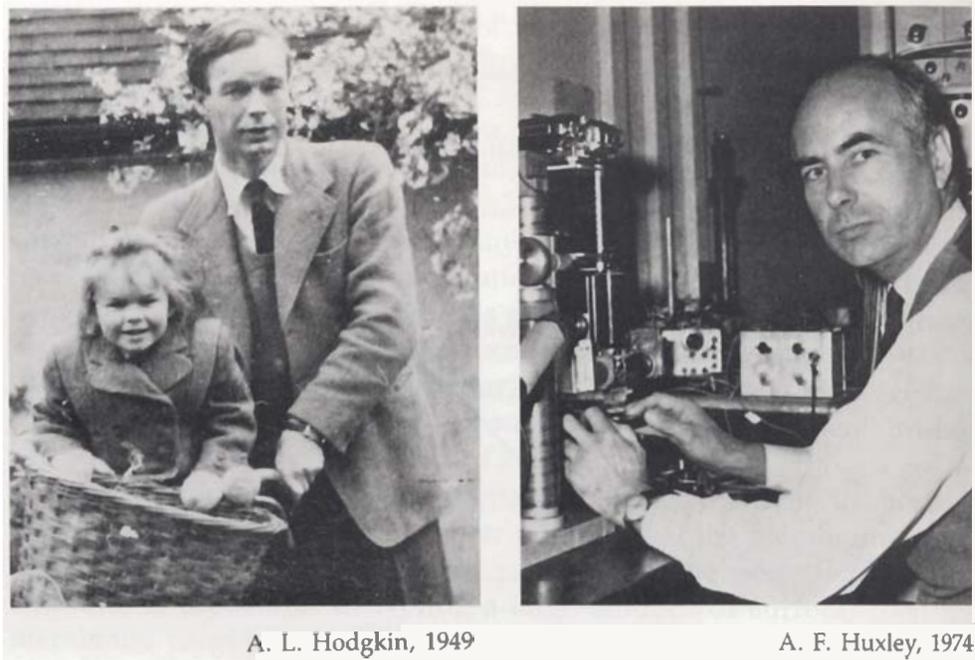


Figura 1.6: Alan Lloyd Hodgkin y Andrew Fielding Huxley. Fotografía, tomada de [36].

Una de las aportaciones más importantes hecha por Hodgkin y Huxley, fue reconocer que la membrana, en la situación de reposo, tiene una permeabilidad que depende del tipo de ion. Precisemos, ellos se dieron cuenta de que, cuando surgía el potencial de acción, la membrana era impermeable al Na^+ , algo permeable a K^+ y bastante permeable a Cl^- . También notaron que debido a la despolarización, cambia la permeabilidad de la manera siguiente:

- a) Aumenta la permeabilidad al K^+ pero la permeabilidad al Na^+ aumenta más rápidamente,
- b) Posteriormente comienza a disminuir la permeabilidad al Na^+ y los iones de K^+ empiezan a salir rápidamente.

Una vez que los procesos anteriores, fueron estudiados con profundidad, Hodgkin, Huxley y Katz determinaron que las variables principales en su modelo, serían la densidad de los iones de potasio K^+ , sodio Na^+ y el potencial de acción.

Además de las dos observaciones anteriores, nuestros personajes determinaron que:

- a) El cambio de potencial de la membrana v es la variable fundamental del proceso,
- b) Los cambios en el potencial de membrana se deben a la permeabilidad de la membrana a los diferentes tipos de iones,
- c) Los cambios de la permeabilidad, están regidos, por el voltaje v .

A continuación describimos la técnica desarrollada por Cole y Marmot, a la que hemos aludido en párrafos anteriores.

La técnica de fijación de voltaje

La técnica de fijación de voltaje, consiste en extirpar de la célula nerviosa el axón y vaciar su contenido, para poder controlar la corriente se introduce un alambre de plata, que reemplaza al citoplasma en el axón hueco, lo que proporciona una baja resistencia axial, de manera que se eliminan los gradientes de voltaje ⁷ a lo largo del axón. De esta forma si se aplica un voltaje constante, el potencial de acción sólo es función del tiempo.

De forma muy general se utilizan dos microelectrodos, uno que mide el potencial de membrana y el otro que mide la corriente aplicada. Usando un circuito electrónico de retroalimentación, se aplica una corriente adecuada para obtener un voltaje fijo, entre el interior y el exterior de la membrana de la neurona.

Esta técnica permite al científico dar un valor fijo al potencial de membrana. Cuando la técnica se está utilizando, los canales iónicos sensibles al voltaje, se abren y cierran en respuesta a los cambios del potencial de membrana, la técnica impide que los cambios que resultan en la corriente de la membrana influyan en el potencial de acción. Con aquélla, se puede medir la corriente en la membrana de modo uniforme espacialmente.

⁷El gradiente de voltaje, indica la zona de mayor cambio de éste. Debido a que el voltaje es uniforme con respecto a la variable espacial, no existen gradientes de voltaje.

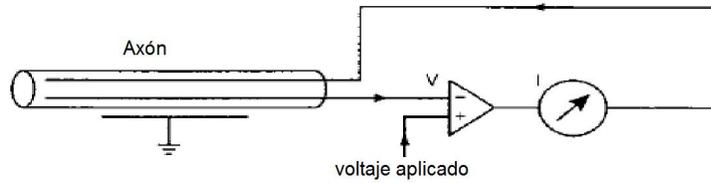


Figura 1.7: Diagrama que ilustra la técnica de fijación de voltaje. Figura obtenida de [8].

El modelo eléctrico de una neurona

Con el propósito de construir un modelo eléctrico que describa la propagación del impulso nervioso a través del axón neuronal, se supone que éste es un cable cilíndrico de sección transversal muy pequeña, el cual está cubierto de un aislante defectuoso. El flujo de iones a través de la membrana produce una corriente eléctrica, mientras que los canales iónicos le confieren a la membrana una oposición al flujo de iones, es decir una resistencia al flujo. Además al realizarse un movimiento de iones a través de la membrana, debido a la impermeabilidad, aquella almacena carga eléctrica. Para medir esta propiedad física se introduce la capacitancia⁸.

Al echar mano de la técnica de Cole y Marmot, el potencial de membrana depende únicamente de la variable temporal t , las variables que corresponden al voltaje, intensidad de corriente y capacitancia, también dependen del tiempo, de manera que podemos escribir,

$$q = q(t), \quad I = I(t) \quad \text{y} \quad v = v(t). \quad (1.1)$$

Además, con la técnica de fijación de voltaje, todos los puntos en el interior del axón tendrán el mismo voltaje, es decir éste será homogéneo a lo largo del axón.

Antes de los trabajos de Hodgkin y Huxley, los modelos eléctricos se diseñaban con base en el potencial de Nernst, que determina el potencial de membrana a partir de las concentraciones iónicas dentro y fuera del axón, pero no se considera el efecto de cada tipo de ion. Aquél, se calcula usando una ecuación propuesta en 1888, por el físico-químico alemán, Walter Nernst.

⁸Los conceptos básicos de electricidad que se usan en este trabajo pueden ser consultados en cualquier texto de esta rama de la física. Por ejemplo en el texto de Kane [34], capítulo 18.

Una de las aportaciones principales de Hodgkin y Huxley, fue la incorporación de las corrientes iónicas, en su modelo éstas se describen por medio de una ecuación para cada corriente.

El modelo eléctrico

Vamos ahora a describir el modelo eléctrico del potencial de acción del axón, el circuito consta de un capacitor, que representa la impermeabilidad, de manera que acumula carga.

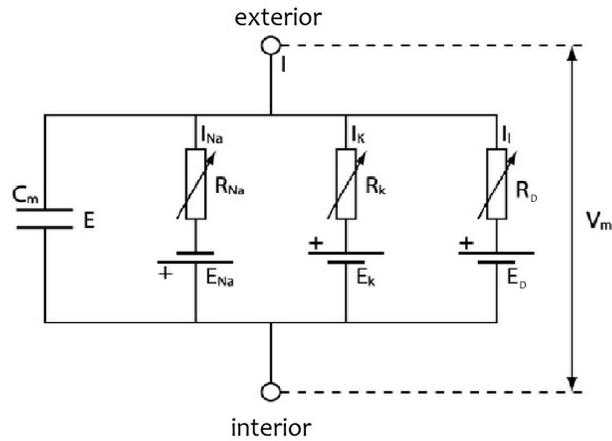


Figura 1.8: Diagrama del circuito electrónico usado por Hodgkin y Huxley.

Utilizamos la ley de Faraday según la cual,

$$v(t) = \frac{q(t)}{C_m}, \quad (1.2)$$

C_m es la capacitancia de la membrana, v corresponde al voltaje a través de la membrana. Calculando la derivada respecto al tiempo, de ambos lados de la igualdad anterior, obtenemos que,

$$\frac{dq}{dt} = C_m \frac{dv}{dt}, \quad (1.3)$$

donde la corriente $I_{ion}(t)$, está dada como,

$$I_{ion}(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (1.4)$$

Consideramos dos tipos de canales iónicos de sodio Na^+ y potasio K^+ , también deben tomarse en cuenta los otros iones que se encuentran en la solución salina, dado que su contribución en la corriente es menos preponderante, se clasifican en una categoría iónica llamada de: *dispersión*

La corriente $I_{ion}(t)$, es generada por la despolarización local con respecto al estado de reposo, la cual surge del movimiento de los iones a través de la membrana y al potencial de membrana debido a la capacitancia. Para relacionar estos dos fenómenos, usamos la ley de las corrientes de Kirchhoff para obtener la siguiente ecuación,

$$C_m \frac{dv}{dt} + I_{ion}(t) = 0. \quad (1.5)$$

La corriente $I_{ion}(t)$ es generada por el movimiento de los tres tipos de iones,

$$I_{ion}(t) = I_{Na}(t) + I_K(t) + I_d(t), \quad (1.6)$$

donde I_{Na} , I_K e I_d , son las corrientes de sodio, potasio y de dispersión. La forma de (1.6) se debe a la semejanza que presenta la membrana del axón, con el tipo de arreglo de tres resistencias en paralelo.

Utilizando la ley de Ohm, relacionamos las tres corrientes con el potencial de membrana, de manera que se tienen las ecuaciones siguientes,

$$I_{Na} = g_{Na}(v - v_{Na}) \quad (1.7a)$$

$$I_K = g_K(v - v_K) \quad (1.7b)$$

$$I_d = g_d(v - v_d), \quad (1.7c)$$

donde las constantes v_{Na} , v_K y v_d , representan el potencial de membrana en reposo, referido a cada uno de los tres tipos de iones; mientras que g_{Na} , g_K y g_d , denotan las respectivas conductancias y miden la resistencia a cada uno de los flujos iónicos a través de la membrana. Más específicamente, en las condiciones de reposo la membrana es más permeable al potasio K^+ , de manera que el voltaje v está cercano a v_K . Cuando la conductancia de potasio g_K decrece y aumenta la conductancia de sodio g_{Na} , entonces v está cerca de v_{Na} , lo cual produce la despolarización de la membrana.

El proceso de activación-inhibición

Ahora lo que hacemos es utilizar un modelo sobre los canales iónicos de la membrana los cuales se abren y se cierran. A este modelo se le llama de dos estados y supone que existe una canal que puede estar abierto A o cerrado C. Además, supone la existencia de una tasa de cambio de un estado a otro, la cual depende del voltaje. El diagrama de la figura 1.9, ilustra la idea anterior.

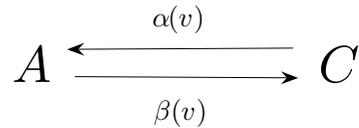


Figura 1.9: Diagrama que ilustra el modelo de abierto y cerrado.

Si denotamos por $p = p(t)$, a la proporción de canales abiertos al tiempo t , entonces la diferencia $1 - p(t)$, es la proporción de canales cerrados al tiempo t . Luego si introducimos los términos, α y β , y les damos la siguiente interpretación:

- a) α es la probabilidad de que, estando cerrado, el canal se abra,
- b) β es la probabilidad de que, estando abierto el canal, se cierre.

Con base en lo anterior, la razón instantánea de cambio, \dot{p} , de p la da

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(v)(1 - p(t)) - \beta(v)p(t). \quad (1.8)$$

Las variables m , h y n

Con el objetivo de completar su modelo, Hodgkin y Huxley, después de numerosos y cuidadosos experimentos en su laboratorio, propusieron tres nuevas variables, que se pueden interpretar como concentraciones de proteínas. Éstas son las responsables de abrir o cerrar los canales por donde pasan los iones. Las nuevas variables que consideran son tres -denotadas así: m , h y n - y corresponden a los siguientes procesos:

- a) De activación (m) e inhibición (h) del sodio.
- b) Y la activación del potasio (n).

Debemos decir que estos procesos se desarrollan simultáneamente, aunque a distintas escalas de tiempo. Esto es importante, pues como se verá más adelante, ello permite hacer simplificaciones del modelo original.

Utilizando la idea de los procesos de cerrado y abierto, de los canales iónicos en respuesta a los cambios en el potencial de membrana, bajo el supuesto de fijación de voltaje, se deduce un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias para las variables m , h y n , que tiene la forma siguiente,

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(v)(1 - m) - \beta_m(v)m, \quad (1.9a)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(v)(1 - n) - \beta_n(v)n, \quad (1.9b)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(v)(1 - h) - \beta_h(v)h. \quad (1.9c)$$

El sistema anterior describe el cambio instantáneo de abierto-cerrado y cerradoabierto, para cada variable. En donde $\alpha(v)$ y $\beta(v)$, son las tasas de conversión de los procesos, cerradoabierto y abierto-cerrado, respectivamente. Las tasas $\alpha(v)$ y $\beta(v)$, para cada variable, se calculan empíricamente, es decir a partir de los datos obtenidos en la experimentación, se procedió a ajustarlos a través de funciones continuas, de forma particular usaron funciones de tipo exponencial. En otras palabras, estos parámetros no se eligen con base a razones de tipo fisiológico, en cambio I_{ion} , v y C_m , sí se eligen en base a una interpretación fisiológica específica. Las tasas $\alpha(v)$ y $\beta(v)$, dependen del potencial de acción v y su forma explícita aparece enseguida.

$$\alpha_m(v) = 0.1 \frac{25 + v}{\exp\left(\frac{25+v}{10}\right) - 1}, \quad (1.10a)$$

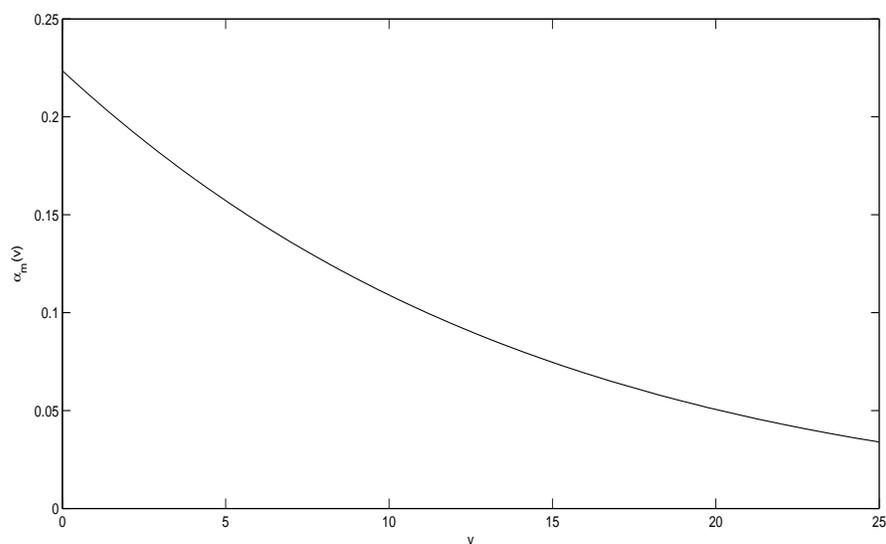
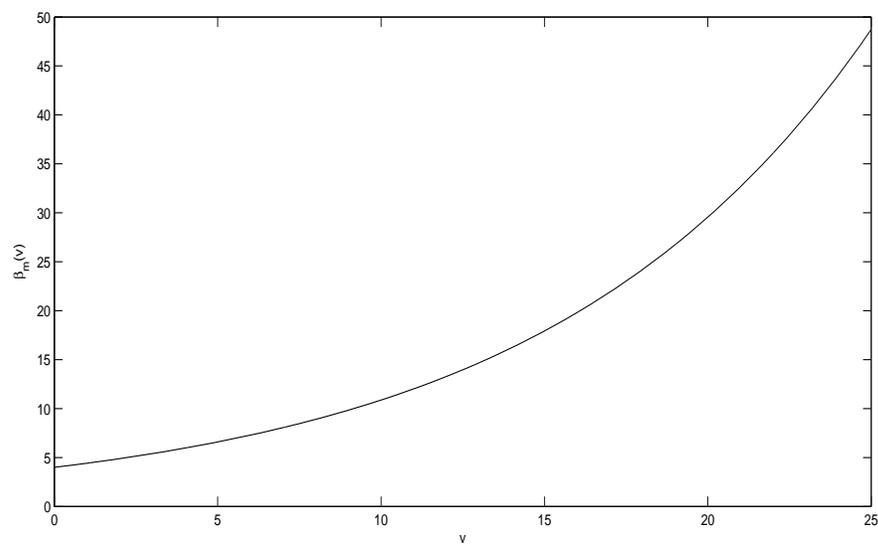
$$\beta_m(v) = 4 \exp\left(\frac{v}{18}\right), \quad (1.10b)$$

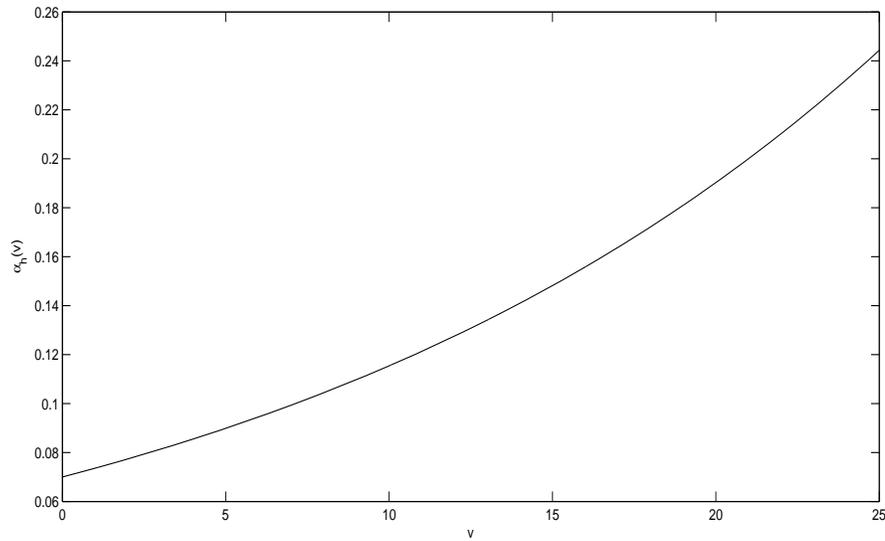
$$\alpha_h(v) = 0.07 \exp\left(\frac{v}{20}\right), \quad (1.10c)$$

$$\beta_h(v) = \frac{1}{\exp\left(\frac{30+v}{10}\right) + 1}, \quad (1.10d)$$

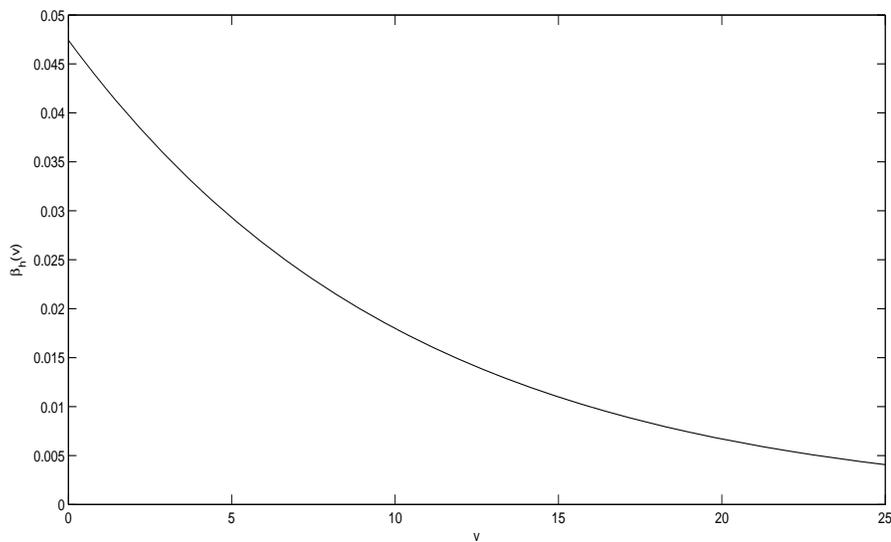
$$\alpha_n(v) = 0.01 \frac{10 + v}{\exp\left(\frac{10+v}{10}\right) - 1}, \quad (1.10e)$$

$$\beta_n(v) = 0.125 \exp\left(\frac{v}{80}\right). \quad (1.10f)$$

(a) Gráfica de la tasa de cerrado-abierto $\alpha_m(v)$.(b) Gráfica de la tasa de abierto-cerrado $\beta_m(v)$.Figura 1.10: Tasas de conversión para la variable m , que corresponde a la activación del sodio.

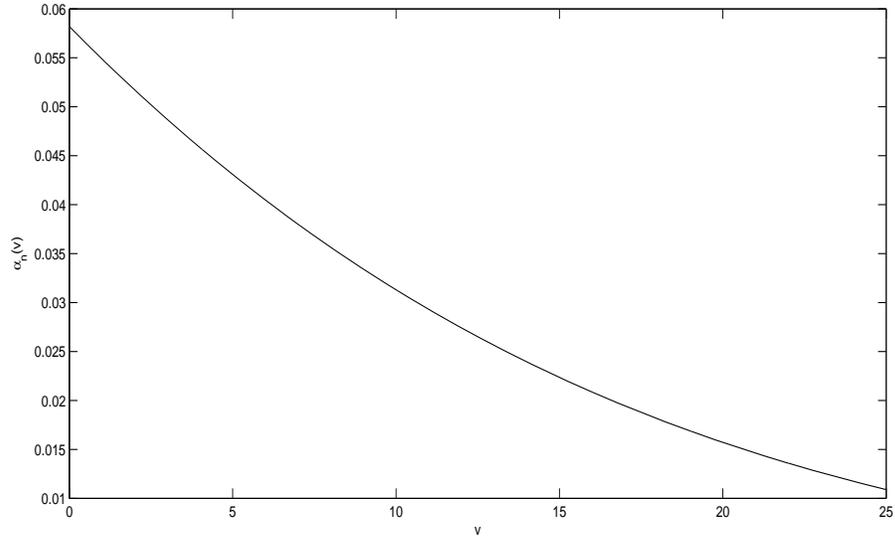
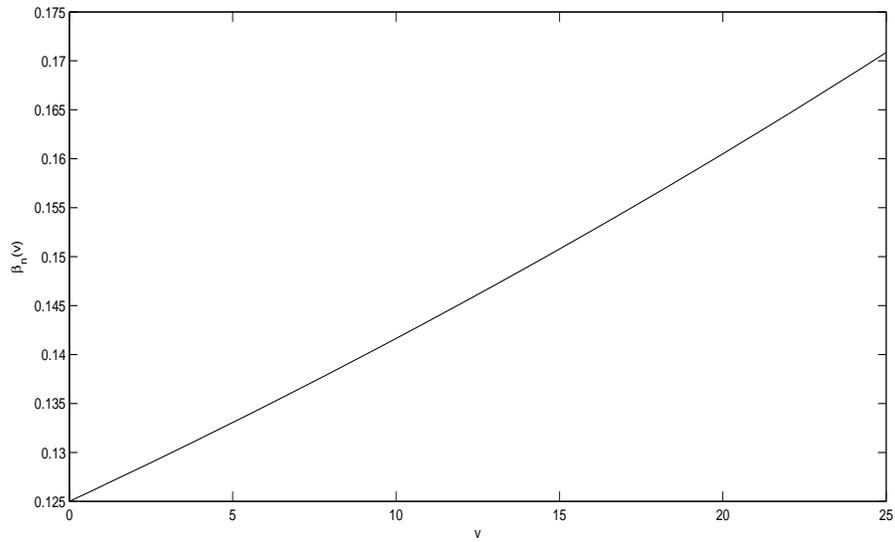


(a) Aquí observamos la tasa de cambio cerrado-abierto $\alpha_h(v)$.



(b) Comportamiento de la tasa de cambio abierto-cerrado $\beta_h(v)$.

Figura 1.11: Tasas de conversión para la variable h , que corresponde a la inhibición del sodio.

(a) Gráfica de la tasa de cambio cerrado-abierto $\alpha_n(v)$.(b) Gráfica de la tasa de cambio abierto-cerrado $\beta_n(v)$.Figura 1.12: Tasas de conversión para la variable n , que corresponde a la activación del potasio.

Las conductancias específicas

Las variables, m , h y n , resultaron de gran utilidad, ya que con éstas, se lograron escribir de manera más exacta las conductancias, que aparecen en las ecuaciones (1.7). Para obtener las expresiones específicas para las conductancias se consideran los tres siguientes supuestos:

- a) Se supone que el canal de Na^+ consiste de tres puertas m y un puerta h , cada una de las cuales puede estar abierta o cerrada,
- b) También se supone que las puertas funcionan independiente, entonces la fracción de canales abiertos es m^3h ,
- c) Si se tienen cuatro puertas n de canales de potasio, las cuales deben estar abiertas para que el potasio K^+ fluya, entonces la fracción de canales abiertos de K^+ es n^4 .

Los tres supuestos anteriores fueron hechos por Hodgkin y Huxley, con base a sus experimentos en el laboratorio, pues al medir la conductancia de cada uno de los tres tipos de iones, se observó que el mecanismo exhibido por éstos en su flujo a través de la membrana celular es “parecida” a la de los tres supuestos anteriores. Así, se propone la idea de puertas⁹ que se cierran y abren.

La forma específica de cada una de las corrientes, I_{Na} , I_K e I_d es,

$$I_{Na} = m^3h\tilde{g}_{Na}(v - v_{Na}), \quad (1.11a)$$

$$I_K = n^4\tilde{g}_K(v - v_K), \quad (1.11b)$$

$$I_d = \tilde{g}_d(v - v_d), \quad (1.11c)$$

donde \tilde{g}_{Na} , \tilde{g}_k y \tilde{g}_d , son las conductancias máximas del canal correspondiente, la cuales se obtienen usando los potenciales de reposo, v_{Na} , v_k y v_d . Al comparar (1.7) con (1.11), se tiene que $g_{Na} = m^3h\tilde{g}_{Na}$, $g_K = n^4\tilde{g}_K$ y $g_d = \tilde{g}_d$.

Relacionamos a las tres corrientes anteriores con la capacitancia de la membrana. Para esto, sustituimos las corrientes I_{Na} , I_K e I_d , en la ecuación (1.6), para tener que,

$$I_{ion} = m^3h\tilde{g}_{Na}(v - v_{Na}) + n^4\tilde{g}_K(v - v_K) + \tilde{g}_d(v - v_d), \quad (1.12)$$

⁹Sobre esta idea, debemos aclarar que no existe un espacio físico bien definido, por donde pasan los iones. Como se recordará, el flujo de iones se da debido a la permeabilidad y los cambios de v .

al sustituir (1.12) en (1.5) obtenemos,

$$C_m \frac{dv}{dt} = -m^3 h \tilde{g}_{Na}(v - v_{Na}) - n^4 \tilde{g}_K(v - v_K) - \tilde{g}_d(v - v_d), \quad (1.13)$$

Al aplicar una corriente externa, $I_a(t)$, entonces (1.13) toma la forma

$$C_m \frac{dv}{dt} = -m^3 h \tilde{g}_{Na}(v - v_{Na}) - n^4 \tilde{g}_K(v - v_K) - \tilde{g}_d(v - v_d) + I_a(t). \quad (1.14)$$

Si ahora escribimos el sistema de ecuaciones diferenciales formado por (1.14) y (1.9), llegamos al celebrado modelo de conducción nerviosa de Hodgkin y Huxley,

$$C_m \frac{dv}{dt} = m^3 h \tilde{g}_{Na}(v_{Na} - v) + n^4 \tilde{g}_K(v_K - v) + \tilde{g}_d(v_d - v) + I_a \quad (1.15a)$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(v)(1 - m) - \beta_m(v)m, \quad (1.15b)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(v)(1 - n) - \beta_n(v)n, \quad (1.15c)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(v)(1 - h) - \beta_h(v)h, \quad (1.15d)$$

Las valores de las conductancias máximas son $\tilde{g}_{Na} = 120$, $\tilde{g}_k = 36$ y $\tilde{g}_L = 0.3$, junto con los potenciales de equilibrio $v_{Na} = 115$, $v_k = -12$ y $v_d = 10.6$.

La característica básica de este sistema es su *no linealidad* lo cual le confiere una gran riqueza dinámica y también, una gran complejidad cuando se pretende realizar su análisis, ya sea desde el punto vista de la teoría cualitativa de EDO o por métodos numéricos. En aquella época, en el año de 1949 el análisis numérico de (1.15), era difícil de realizar, debido al deficiente poder de cálculo de las computadoras. Fue hasta el año de 1960, cuando se retomó su análisis, por varios científicos. Sin embargo, dentro de tales trabajos, los más representativos son los del norteamericano Richard FitzHugh[18] y del japonés Jin-Ichi Nagumo [44]. Ellos trabajando de forma separada, observaron las dificultades involucradas en el estudio del sistema (1.15). Por ello, se plantearon hacer una reducción a un sistema más sencillo pero que conservara las propiedades cualitativas del sistema original. En la siguiente sección hacemos una breve exposición de estos trabajos.

1.6. El modelo de FitzHugh-Nagumo

En esta sección vamos a deducir el llamado modelo de FitzHugh-Nagumo. Debemos decir que FitzHugh, reconoció importantes características cualitativas y cuantitativas de las cuatro variables involucradas que satisfacen el sistema (1.15), mientras que Nagumo reconoció lo esencial del proceso, proponiendo un modelo electrónico más sencillo que aquél propuesto por H-H.

1.6.1. El modelo de FitzHugh

En 1960, el biofísico norteamericano Richard FitzHugh [18], realizó una descripción cualitativa del modelo de Hodgkin y Huxley. Su trabajo fue desarrollado en el Instituto de Salud, en Maryland, Estados Unidos. El enfoque de FitzHugh se fundamenta en que algunas variables del modelo tienen una cinética más rápida; mientras que otras, son mucho más lentas.

Específicamente m y v , son variables rápidas, pues ocurre que los canales de Na^+ se activan rápidamente y el potencial de membrana cambia rápidamente; mientras que las otras variables h y n , son lentas es decir, los canales de Na^+ se inactivan lentamente y los canales de K^+ se activan lentamente. Así que durante los estados iniciales del potencial de acción, las variables h y n son esencialmente constantes, mientras que m y v cambian a medida que el tiempo transcurre.

Esto es consistente con el estudio realizado por Hodgkin y Huxley ya que, con base en sus resultados experimentales, establecieron que en la etapa inicial del potencial de acción, las variables n y h permanecían casi constantes, de manera que en ésta se puede considerar, que $\dot{h} \approx 0$ y $\dot{n} \approx 0$. En ese caso, el sistema de cuatro ecuaciones diferenciales (1.15) se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales, el cual se centra en la dinámica de las variables rápidas, m y v .

El modelo en dos variables rápidas.

Elegimos a las dos variables lentas n y h . Al igualar a cero (1.15c) y (1.15d), obtenemos sus respectivos puntos de equilibrio, los cuales son,

$$n_{\infty}(v) = \frac{\alpha_n(v)}{\alpha_n(v) + \beta_n(v)} \quad \text{y} \quad h_{\infty}(v) = \frac{\alpha_h(v)}{\alpha_h(v) + \beta_h(v)}. \quad (1.16)$$

Nótese que n_∞ y h_∞ dependen de v , esto no interfiere en la propiedad de que sean puntos de equilibrio con respecto a las variables n y h , debido a que no dependen explícitamente del tiempo t .

Por la tanto, el sistema (1.15) se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales, para la dinámica rápida. Éste es

$$C_m \frac{dv}{dt} = m^3 h_\infty \tilde{g}_{Na}(v_{Na} - v) + n_\infty^4 \tilde{g}_K(v_K - v) + \tilde{g}_d(v_d - v), \quad (1.17a)$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(v)(1 - m) - \beta_m(v)m, \quad (1.17b)$$

donde aquí se considera que la corriente aplicada es $I_a(t) = 0$. El sistema (1.17), modela la parte inicial del potencial de acción. Hodgkin y Huxley descubrieron que la dinámica inicial del potencial de acción se debe principalmente a una corriente generada por los iones de sodio Na^+ . De manera que el sistema (1.17) modela esta etapa, al considerarse la activación del sodio en la ecuación (1.17b) que corresponde a la variable m y la ecuación para el voltaje v (1.17a). El lector interesado en indagar sobre esto puede consultar el libro de Keener y Sneyd [36].

El modelo en una variable rápida y una variable lenta

En una segunda reducción del modelo de Hodgkin-Huxley, FitzHugh considera una variable rápida. Esto debido a que, cuando la corriente de sodio conduce el potencial de acción neuronal a un valor cercano al potencial de sodio, comienza a disminuir la permeabilidad de sodio Na^+ ; mientras que la permeabilidad al K^+ aumenta, entonces los iones potasio comienzan a fluir rápidamente al exterior. De manera que la corriente asociada al voltaje v , es principalmente generada por los iones de potasio K^+ .

Para la descripción de esta fase que corresponde a la *recuperación*, se toma en cuenta a la variable rápida m , notando que m es una variable tan rápida con respecto a v , de manera que m es constante. Es decir, m llega a su estado de reposo $m_\infty(v)$ de forma rápida, esto significa que $\dot{m} = 0$. Es decir, la activación del sodio Na^+ , se da en una escala de tiempo más rápida que la del voltaje v . FitzHugh, notó que durante el transcurso del potencial de acción, las variables lentas h y n , están relacionadas en la forma $h + n \approx 0.8$. Usando la relación lineal $\tilde{h} = 0.8 - n$, será suficiente con tomar en cuenta el comportamiento de la variable n en la ecuación (1.15), y la variable h no se considera. Con esto, la simplificación del modelo de Hodgkin y Huxley, tiene

una variable rápida: v y una variable lenta: n , podemos escribir al sistema en la forma,

$$C_m \frac{dv}{dt} = m_\infty^3 \tilde{h} \tilde{g}_{Na}(v_{Na} - v) + n^4 \tilde{g}_K(v_K - v) + \tilde{g}_d(v_d - v), \quad (1.18a)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(v)(1 - n) - \beta_v(v)n, \quad (1.18b)$$

donde n , representa la activación de los iones de potasio K^+ . Se suele denotar a la parte derecha de (1.18a) así, $f(v, n) = m_\infty^3 \tilde{h} \tilde{g}_{Na}(v_{Na} - v) + n^4 \tilde{g}_K(v_K - v) + \tilde{g}_d(v_d - v)$

Cada uno de los sistemas, anteriores (1.18) y (1.17), describe una fase del potencial de acción, que son la de ascenso y recuperación, respectivamente. No debe perderse de vista que los dos modelos anteriores consideran la dinámica del potencial de acción v . Además de que hay una relación muy importante entre los sistemas, (1.18) y (1.17), el comportamiento del voltaje esta dado por dos ecuaciones que tienen la misma forma, para la primera ecuación (asociada a la fase de ascenso) se considera la variable rápida m , mientras que para la segunda ecuación que corresponde a la cuarta fase (recuperación), se considera la relación entre las variables lentas h y n .

Richard FitzHugh, se apoyó en el comportamiento de los modelos anteriores y en el análisis numérico de éstos. Además, utilizó el modelo de EDO propuesto por Bonhoeffer durante 1943 (véase [37]), que consideraba una variable de excitación y una de recuperación, aquél modela el potencial de acción en el axón neuronal, pensándolo como un alambre de hierro.

Con esto propone que la reducciones (1.18) y (1.17) del sistema Hodgkin y Huxley, pertenecen a una clase general de sistemas y propuso un oscilador de van der Pol, el cual tiene la forma,

$$\frac{dx}{dt} = y(t), \quad (1.19a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{\tilde{\rho}}(1 - x^2(t))y(t) - x(t), \quad (1.19b)$$

con $\tilde{\rho} = \tilde{C}/\tilde{L}$. \tilde{C} y \tilde{L} , son parámetros reales y positivos. El sistema (1.19), es a su vez un caso particular del sistema que proviene de la ecuación de

Liénard. Se puede probar (véase [30]) que el sistema de van der Pol $x'' - \lambda(1 - x^2)x' + x = 0$, posee un único ciclo límite atractor para $\lambda > 0$.

Precisemos, el sistema que propuso FitzHugh, utiliza dos variables: $x(t)$ y $y(t)$, las cuales tienen la siguiente interpretación:

- a) $x(t)$, corresponde a la fase rápida (de excitación).
- b) $y(t)$, corresponde a la variable lenta (o de recuperación).

FitzHugh consideró el efecto de una corriente aplicada, la cual depende del tiempo y denotamos por $z(t)$, entonces obtiene el sistema no lineal de dos ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{dx}{dt} = C \left(y(t) + x(t) - \frac{x^3(t)}{3} + z(t) \right), \quad (1.20a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x(t) - A - B}{C}, \quad (1.20b)$$

donde A , B y $C \neq 0$ son constantes positivas, que satisfacen,

$$1 - \frac{2B}{3} < A < 1, \quad 0 < B < 1 \quad \text{y} \quad B < C^2,$$

las cuales son elegidas así a fin de garantizar que el sistema tenga un único punto de equilibrio. La función $z(t)$, se puede escoger, como una función de tipo salto o una función delta de Dirac. La razón por la que escogió el sistema de EDO anterior, fue debido a sus observaciones acerca de las propiedades que presentan los osciladores de relajación como el de van der Pol. Estos tienen la siguiente característica: existen cambios muy lentos con respecto al tiempo t , tanto en la variable de excitación $x(t)$, como en la variable de recuperación $y(t)$, seguidos por cambios muy rápidos en la variable de recuperación. El polinomio cúbico $f(x) = x - (x^3/3)$, juega un papel importante en la dinámica, como lo veremos más adelante.

1.6.2. Las ecuaciones de Nagumo

En el transcurso del año de 1960, el ingeniero japonés Jin-Ichi Nagumo [44], miembro del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Tokyo, Japón, diseñó un circuito eléctrico con el objetivo de simplificar las



Figura 1.13: Richard FitzHugh. Figura obtenida de [59].

ecuaciones de Hodgkin y Huxley. Para ello consideró los siguientes componentes electrónicos: un capacitor, un dispositivo de corriente-voltaje, un resistor, un inductor y una batería. A fin de entender el comportamiento del circuito eléctrico que diseñó Nagumo, debemos considerar un circuito eléctrico más sencillo. Así consideramos un circuito de tipo *RLC*. Véase la figura 1.14.

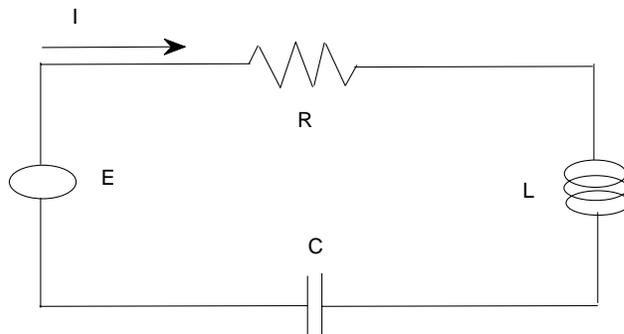


Figura 1.14: Diagrama de un circuito RLC.

Su nombre se debe a que está constituido por un resistor, un inductor y un capacitor. Podemos obtener las ecuaciones, que rigen los circuitos de tipo *RLC*. Éstas se obtienen usando las leyes de Kirchhoff, en particular la ley del voltaje. Luego, si definimos V_1 =Voltaje aplicado E , V_2 =Voltaje a través del resistor (el cual satisface la ley de Ohm), V_3 =Voltaje a través del inductor y V_4 = Voltaje a través del capacitor, entonces, $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$.

De esta manera, la ecuación que se obtiene de la aplicación de la mencionada ley de Kirchhoff es,

$$-E + RI + L\left(\frac{dI}{dt}\right) + v = 0. \quad (1.21)$$

Por otro lado, la corriente, I , y la capacitancia, C , están relacionadas a través de la igualdad

$$I = C\frac{dv}{dt}, \quad (1.22)$$

lo que permite establecer una relación entre las ecuaciones (1.21) y (1.22). Ésta es el sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$C\frac{dv}{dt} = I, \quad (1.23a)$$

$$L\frac{dI}{dt} = E - v - RI. \quad (1.23b)$$

Nótese que el circuito RLC descrito por las ecuaciones anteriores es lineal, esto no siempre sucede, ya que la relación entre las variables, puede ser no lineal.

Regresamos al modelo matemático de Nagumo, con el propósito de realizar la reducción del modelo de Hodgkin y Huxley, Nagumo utilizó un dispositivo electrónico (semiconductor) llamado diodo de túnel ¹⁰(véase la figura 1.15), el cual tiene la propiedad siguiente: cuando se considera la corriente como función del voltaje, es decir $I = f(v)$, la función f tiene las cualidades de un polinomio cúbico con tres raíces reales.

Este dispositivo electrónico lo elige Nagumo, dada la similitud que tiene con el oscilador de van der Pol, que había propuesto FitzHugh en su modelo. Más específicamente se considera la analogía de $I = f(v)$ con el término cúbico $f(x) = x - (x^3/3)$. Después diseñó un circuito electrónico con este dispositivo, como se ilustra en la figura 1.16

¹⁰Éste tienen una propiedad específica que involucra la corriente y el voltaje: cuando se aplica un voltaje que va aumentando, la corriente aumenta de manera proporcional, llega un momento en que la corriente llega a un valor máximo. A partir de ese punto si el voltaje se sigue aumentando, ahora la corriente llega a un valor mínimo. También se le llama diodo Esaki, en honor a su inventor: el físico japonés Leo Esaki.

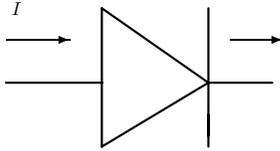


Figura 1.15: Diagrama del diodo de túnel asociado al polinomio cúbico $I = f(v)$.

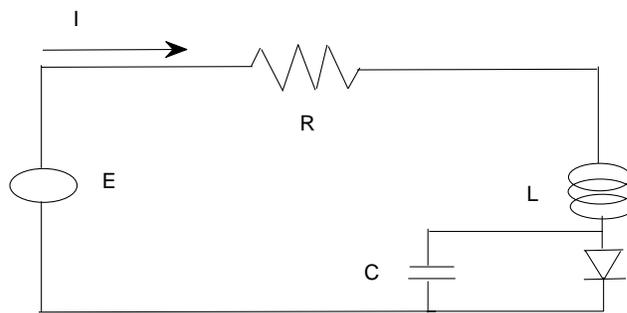


Figura 1.16: Circuito con un diodo de túnel.

Así, al usar las leyes de Kirchoff para el circuito con el diodo de túnel, se obtiene el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$C \frac{dv}{dt} = I - f(v), \quad (1.24a)$$

$$L \frac{dI}{dt} = E - v - RI. \quad (1.24b)$$

1.6.3. El modelo temporal de FitzHugh-Nagumo

Como lo dijimos los modelos de FitzHugh y Nagumo, son simplificaciones del sistema de Hodgkin y Huxley, los cuales tienen características similares. En particular, la gráfica de la ceroclina asociada al voltaje corresponde a la gráfica de un polinomio cúbico.

Ahora estamos en condiciones de deducir el modelo de FitzHugh-Nagumo. Consideramos un circuito electrónico, formado de: un capacitor que representa la capacitancia de la membrana, un elemento de tipo voltaje-corriente,



Figura 1.17: Jin-Ichi Nagumo. Fotografía obtenida de [58].

una resistencia, un inductor y una batería. Véase la figura 1.18. Usando las leyes de Kirchhoff, se pueden escribir las ecuaciones de ese circuito como,

$$C_m \frac{dV}{d\tau} + F(V) + i = -I_0, \quad (1.25a)$$

$$L \frac{di}{d\tau} + Ri = V - V_0, \quad (1.25b)$$

donde I_0 es una corriente externa, i es la corriente a través del inductor y R la resistencia, $V = V_i - V_e$ es el potencial de membrana y V_0 es el potencial de la batería, τ denota el tiempo. La función $F(V)$ es un polinomio cúbico, el cual tiene tres raíces reales. Una de ellas es $V = 0$ y la raíz más grande, V_1 , son puntos de equilibrio estables de ecuación diferencial, $dV/d\tau = -F(V)$.

Para facilitar el estudio de la dinámica, en (1.25) se introduce una adimensionalización de los parámetros. Para ello se define $R_1 = 1/F'(0)$ donde $' \equiv \frac{d}{d\tau}$, $v = V/V_1$, $w = R_1 i/V_1$, $f(v) = -R_1 F(V_1 v)/V_1$ y $t = L\tau/R_1$. Si ahora se define, $\epsilon = R_1^2 C_m/L$, $w_0 = R_1 I_0/V_1$, $v_0 = V_0/V_1$ y $\gamma = R/R_1$. Entonces el sistema (1.25) se escribe como,

$$\epsilon \frac{dv}{dt} = f(v) - w - w_0 \quad (1.26a)$$

$$\frac{dw}{dt} = v - \gamma w - v_0. \quad (1.26b)$$

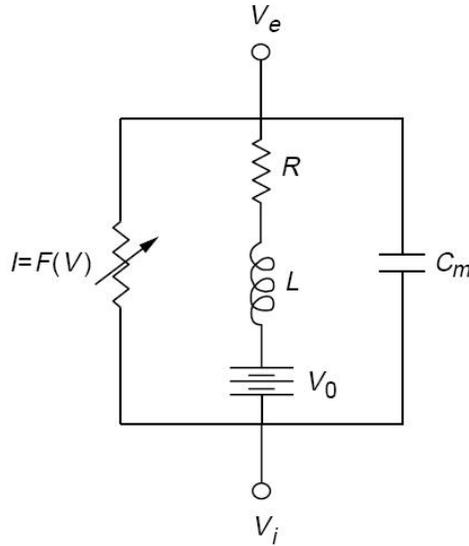


Figura 1.18: Circuito electrónico usado para la deducción del modelo de FitzHugh-Nagumo. Figura obtenida de [36].

Mediante cambios de variable apropiados (1.20) se lleva a la forma (1.27). Véase Hädeler [26].

$$\frac{du}{dt} = f(u) - w \quad (1.27a)$$

$$\frac{dw}{dt} = bu - \gamma w, \quad (1.27b)$$

donde $f(u) = u(1-u)(u-a)$, con $0 < a < 1/2$, y γ, b constantes positivas. Aquí la variable u corresponde al potencial de membrana v ; mientras que w es la variable correspondiente a las variables m, h y n .

Unos años más tarde el análisis del modelo de FitzHugh y Nagumo, se simplificó debido a McKean, quien propuso que $f(u)$, se sustituyera por una función lineal a trozos, de la forma $g(u) = H(u-a) - u$, donde H es una función de Heaviside. Otra función lineal a trozos, propuesta también por McKean tiene la forma,

$$\tilde{g}(u) = \begin{cases} u, & \text{para } u \leq \frac{a}{2}, \\ u - a, & \text{si } \frac{a}{2} < u < \frac{1+a}{2}, \\ 1 - u, & \text{cuando } u > \frac{1+a}{2}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Esto permite que el análisis sea más sencillo y, también, permite encontrar soluciones explícitas del sistema de FitzHugh-Nagumo. El lector interesado en indagar más puede consultar el texto Keener y Sneyd [36].

Con esto hemos terminado la deducción del modelo temporal. Ahora nos interesa plantear el escenario cuando se introduce la variable espacial, que corresponderá a describir la propagación del potencial a través del axón neuronal. En la siguiente sección vamos a deducir el modelo de FitzHugh-Nagumo, cuando se incorpora la variable espacial.

1.7. El modelo espacio temporal

La técnica de *fijación de voltaje*, desde el punto de vista matemático, facilita el estudio del fenómeno de la conducción nerviosa, ya que los modelos que resultan, están en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias por lo que las variables de estado dependen sólo de la variable temporal t . Sin embargo, la propagación de los impulsos nerviosos a través del axón, es un fenómeno de tipo espacio-temporal, de manera que el modelo de EDO de FitzHugh-Nagumo (1.27), sólo describe un parte de lo que en realidad ocurre durante este proceso.

Debido a esta deficiencia, lo que haremos será incorporar la variable espacial al modelo de FitzHugh-Nagumo. Con el fin de poder explicar más apegado a la realidad la evolución del potencial de acción, enseguida vamos a deducir el modelo espacio-temporal de F-N. La incorporación de la variable espacial, nos indica que el voltaje en el axón de la neurona no es uniforme. Esto nos lleva a suponer, que no estamos trabajando con la técnica de *fijación de voltaje*. De esta manera las variables relevantes del potencial de acción, dependen ahora tanto de la variable espacial, x , como de la variable temporal, t . Para la deducción de este modelo nos hemos basado en la Tesis de Pérez [46] y el libro de Keener y Sneyd [36].

Primero fijémonos en una característica geométrica del axón, de forma particular notamos que el axón es muy delgado, esto nos permite pensarlo desde el punto de vista matemático, como un axón infinito en una dimensión espacial.

Con la idea anterior, ya podemos iniciar la deducción de la ecuación espacio-temporal de FitzHugh-Nagumo. Vamos a echar mano de lo expuesto, en el Apéndice A, con el objetivo de deducir una ecuación del balance para el potencial transmembránico. A ésta le vamos a incorporar el efecto del

transporte de carga (corriente), a través del axón. Antes de empezar, nos conviene introducir la siguiente notación:

- a) x : Denota la distancia a lo largo del axón (medida desde un punto de referencia).
- b) $q(x, t)$: Es la densidad de carga por unidad de longitud en el punto x , del axón al tiempo t .
- c) $J(x, t)$: Denota, flujo de partículas cargadas (corriente) dentro del axón de la neurona.
- d) $\tilde{w}(x, t)$: Es la tasa a la cual la carga entra o deja el axón, a través de la membrana en el punto (x, t) .

La ley de conservación de la carga (véase el Apéndice A) en términos de la variables involucradas tiene la forma,

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \pm \tilde{w}(x, t), \quad (1.29)$$

para obtener la ecuación correspondiente debemos sustituir la forma del flujo y la fuente, usando las variables del fenómeno que nos interesa.

Para encontrar la expresión específica del flujo utilizamos la *ley de Fick* (véase el Apéndice A), dado que estamos considerando un dominio unidimensional, la interpretación será la siguiente:

“El flujo (en la dirección axial) es directamente proporcional al gradiente del voltaje e inversamente proporcional a la resistencia del fluido intracelular”

En términos matemáticos el enunciado anterior se escribe así

$$J(x, t) = -\left(\frac{1}{R}\right) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.30)$$

donde $u = u(x, t)$ y R denota la resistencia de la membrana¹¹.

¹¹La constante proporcional en (-1) , el signo menos indica que en el espacio de dimensión uno, la sustancia se difunde de sitios de alta concentración hacia donde hay baja concentración.

Vamos a incorporar el término asociado a w , esto se hace observando que la tasa de carga que entra al axón, está dada por la corriente iónica neta I dentro del axón, que es la fuente local de carga, es decir

$$\tilde{w}(x, t) = \frac{dq}{dt} = I. \quad (1.31)$$

Ahora echamos mano de la ley de Faraday para asociar el voltaje y la carga,

$$q(x, t) = Cu(x, t), \quad (1.32)$$

donde C denota la capacitancia de la membrana del axón.

Relacionamos los fenómenos descritos líneas arriba, al sustituir las ecuaciones (1.30), (1.31) y (1.32) en la ecuación (1.29) para obtener,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{RC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{I}{C}, \quad (1.33)$$

se debe incorporar el término anterior a (1.27).

1.7.1. El modelo de FitzHugh-Nagumo espacio-temporal

Con la incorporación de la variable espacial en el sistema temporal (1.27), utilizando la ecuación (1.33), obtenemos un sistema no lineal de dos ecuaciones diferenciales parciales, el cual modela la dinámica espacio-temporal de las variables $u(x, t)$ y $w(x, t)$ en el axón de la neurona. El sistema que se obtiene es,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)(u-a) - w + I_a, \quad (1.34a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = bu - \gamma w. \quad (1.34b)$$

Aquí la variable $u = u(x, t)$ es el potencial eléctrico de la membrana a lo largo del axón al tiempo t en el punto x ; mientras que la variable $w = w(x, t)$ es un función que determina la permeabilidad de la membrana, a los elementos iónicos de la corriente. El parámetro I_a corresponde a una corriente externa que se aplica al axón. D es llamado coeficiente de difusión, que vamos a suponer constante. Dependiendo de las condiciones iniciales y condiciones

de frontera “apropiadas”, junto con un dominio con una geometría específica para (1.34) tenemos una gran riqueza matemática.

Una vez que hemos deducido los modelos matemáticos de interés para este trabajo, ahora nuestro objetivo es estudiar la dinámica del sistema (1.34), bajo la premisa de que se usa la técnica de *fijación de voltaje*. Esto lo iniciamos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Análisis con fijación de voltaje

2.1. Introducción

En el Capítulo 1 presentamos los fundamentos fisiológicos de la transmisión de los impulsos nerviosos. También se presentó la deducción de un modelo matemático que describe el proceso de la transmisión de los impulsos nerviosos a través del axón de la neurona, nos referimos al modelo de Hodgkin y Huxley. La complejidad del modelo de Hodgkin y Huxley, condujo a la búsqueda de modelos más simples pero que conservan los rasgos esenciales del proceso por estudiar. A este tipo de modelos se les conoce como modelos simplificados. Este es el origen del modelo de FitzHugh-Nagumo. En el capítulo que estamos iniciando, haremos el análisis del modelo de FitzHugh-Nagumo, suponiendo la técnica de *fijación de voltaje*, de manera que éste a lo largo del axón es homogéneo. Por ello la variable independiente relevante es el tiempo. En estas condiciones, el sistema de FitzHugh-Nagumo es un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. En un primer análisis suponemos que la corriente, I_a , aplicada al axón es nula, determinaremos la dinámica local y global del sistema no lineal mencionado; mientras que en un segundo análisis, vamos a suponer $I_a > 0$. En este caso, primero consideramos el modelo de FitzHugh-Nagumo lineal a trozos.

El modelo de FitzHugh-Nagumo (1.34), con el reescalamiento $x = D\tilde{x}$ (a fin de no introducir notación escribimos a \tilde{x} como x) toma la forma siguiente:

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-a) - w + I_a \quad (2.1a)$$

$$w_t = bu - \gamma w, \quad (2.1b)$$

donde u es el potencial, aquí u_t denota la primera derivada parcial de u con respecto a la variable temporal; mientras que u_{xx} denota la segunda derivada parcial de u respecto a la variable espacial. Aquí a, b, γ son constantes positivas con $a \in (0, 1/2)$; mientras que I_a es la corriente aplicada y w captura el comportamiento, de las variables h, n y m del modelo de Hodgkin-Huxley.

2.2. La dinámica temporal con $I_a = 0$

A continuación haremos el análisis del sistema autónomo que proviene de trabajar bajo el supuesto de que el voltaje en el axón de la neurona es homogéneo; también suponemos $I_a = 0$. En estas condiciones el sistema (2.1) toma la forma,

$$\dot{u} = u(1-u)(u-a) - w \quad (2.2a)$$

$$\dot{w} = bu - \gamma w, \quad (2.2b)$$

donde el punto sobre u y w denota la derivada ordinaria respecto al tiempo. Empezamos delimitando el rango de los parámetros que aparecen en (2.2).

2.2.1. Análisis local

Aquí se hace el análisis cualitativo local del sistema (2.2). Los puntos de equilibrio de éste corresponden a la intersección de las ceroclinas, es decir las curvas que provienen de hacer $\dot{u} = \dot{w} = 0$. De éstas se obtiene el par de funciones, $w_1(u) = u(1-u)(u-a)$ y $w_2(u) = \tilde{m}u$, donde $\tilde{m} = \frac{b}{\gamma}$. Las u tales que $w_1(u) = w_2(u)$, satisfacen $u(1-u)(u-a) - w = \tilde{m}u$. Para $u \neq 0$, al despejar u de la igualdad anterior, obtenemos

$$u_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4\tilde{m}}}{2}, \quad (2.3)$$

dependiendo del signo del subradical $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}]$, se tienen los siguientes casos:

1. Si $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] < 0$, $u_{1,2} \in \mathbb{C}$, por lo que el sistema (2.2) sólo tiene como punto de equilibrio a $P_0 = (0, 0)$, que corresponde a la situación en la que las ceroclinas se tocan únicamente en el origen. Véase la figura 2.1.a).

2. Si $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] = 0$, el sistema (2.2), tiene dos puntos de equilibrio, a saber:

$$P_0 = (0, 0) \text{ y } P_1 = \left(\frac{a+1}{2}, \tilde{m} \left(\frac{a+1}{2} \right) \right).$$

En la figura 2.1.b) se ilustra esta situación.

3. Si $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] > 0$, el sistema (2.2), tiene tres puntos de equilibrio,

$$P_0 = (0, 0),$$

$$P_1 = \left(\frac{a+1 - \sqrt{(a-1)^2 - 4\tilde{m}}}{2}, \tilde{m} \left(\frac{a+1 - \sqrt{(a-1)^2 - 4\tilde{m}}}{2} \right) \right)$$

y

$$P_2 = \left(\frac{a+1 + \sqrt{(a-1)^2 - 4\tilde{m}}}{2}, \tilde{m} \left(\frac{a+1 + \sqrt{(a-1)^2 - 4\tilde{m}}}{2} \right) \right).$$

En la figura 2.1.c) se observa este caso.

A continuación determinamos el retrato fase local alrededor de cada equilibrio del sistema (2.2) en cada uno de los casos anteriores. Para ello aproximamos el sistema (2.2) por uno lineal, el cual lo define la matriz de Jacobi del campo vectorial correspondiente. Ésta, para todo punto (u, w) , es

$$J[u, w] = \begin{pmatrix} -3u^2 + 2u(a+1) - a & -1 \\ b & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

Caso 1. (Un punto de equilibrio) $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] < 0$. Evaluámos (2.4) en el origen,

$$J[u, w](P_0) = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ b & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

como $\text{tr}J[u, w](P_0) = -(a + \gamma) < 0$ y $\det J[u, w](P_0) = a\gamma + b > 0$, P_0 es asintóticamente estable localmente (a.e.l). El polinomio característico asociado a la matriz $J[u, w](P_0)$ es,

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(a + \gamma) + (a\gamma + b), \quad (2.6)$$

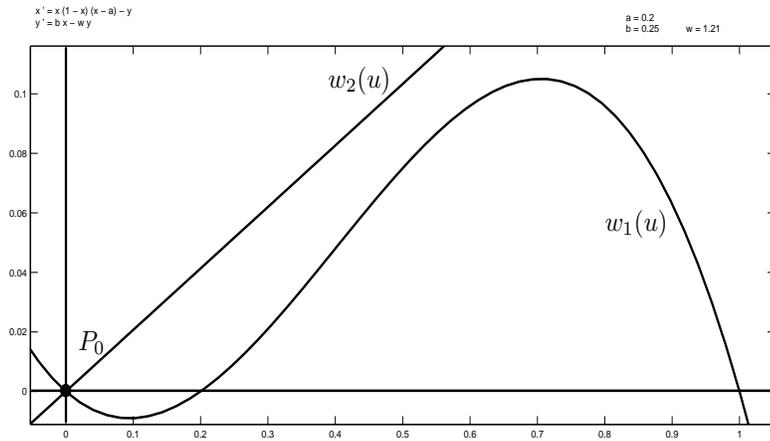
y las correspondientes raíces características son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a + \gamma) \pm \sqrt{(a - \gamma)^2 - 4b}}{2}, \quad (2.7)$$

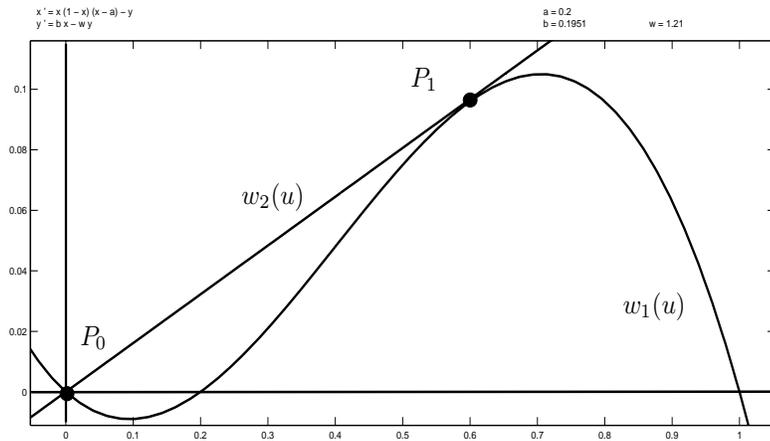
donde dependiendo cómo sea el sub-radical, pueden suceder las posibilidades siguientes:

- a) Si $[(a - \gamma)^2 - 4b] > 0$, entonces $(0, 0)$ es un nodo¹. Véase la figura 2.2.a).
- b) Si $[(a - \gamma)^2 - 4b] = 0$, P_0 es un nodo degenerado, como se ilustra en la figura 2.2.b).
- c) Si $[(a - \gamma)^2 - 4b] < 0$, P_0 es un foco. En la figura 2.2.c) se ilustra esta situación.

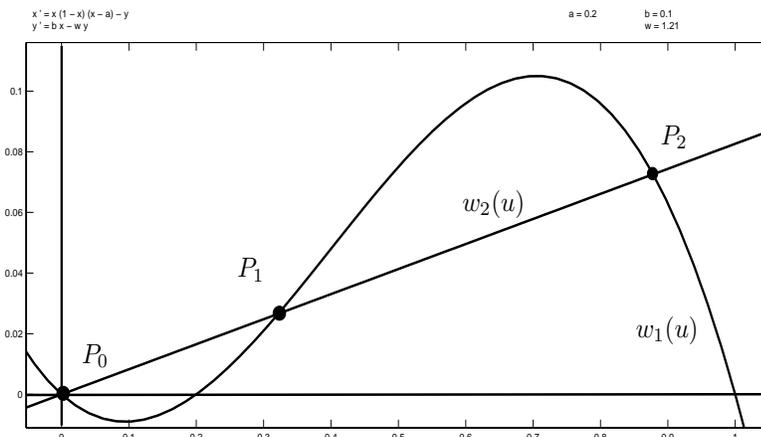
¹Todos los retratos fase de sistemas autónomos planos que aparecen en este trabajo, fueron hechos con el *software* pplane 7, desarrollado por John C. Polking, de la Universidad de Rice. Houston, Texas.



(a)

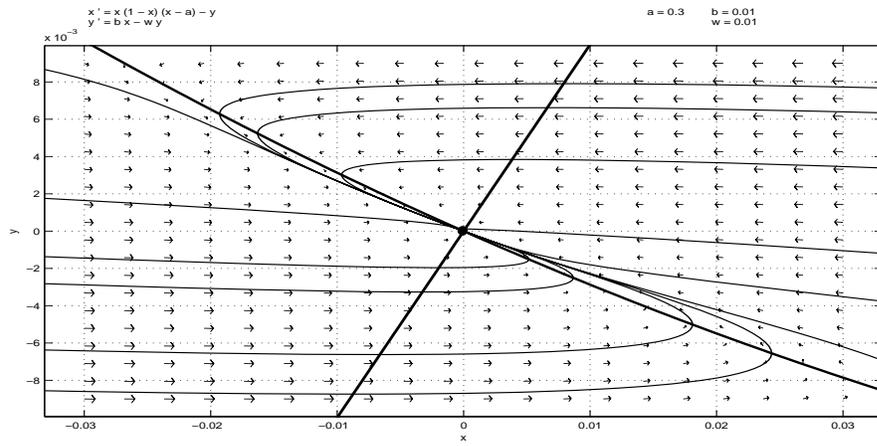


(b)

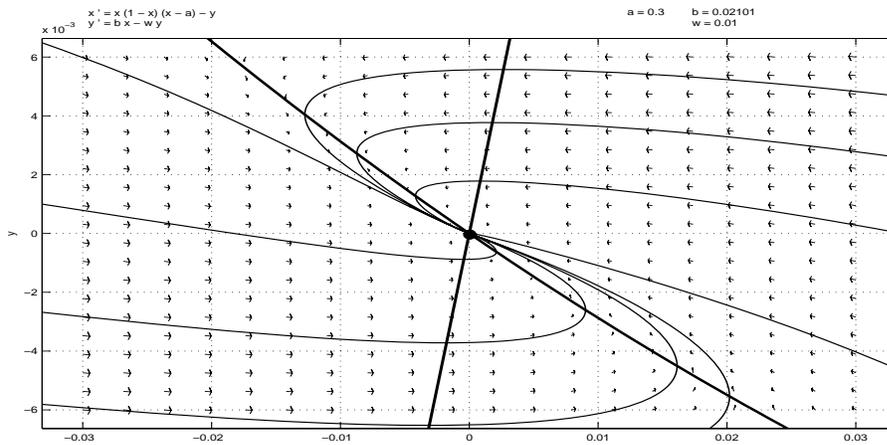


(c)

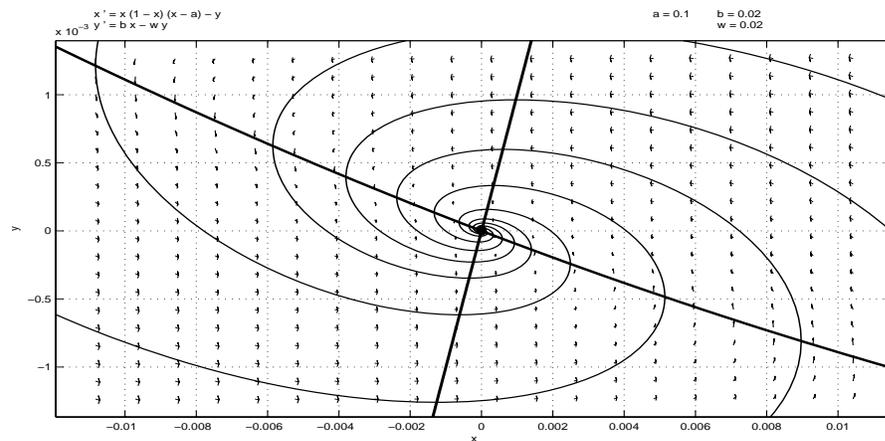
Figura 2.1: Diferentes posiciones relativas de las ceroclinas del sistema (2.2) correspondientes a diferentes casos : a) $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] < 0$, b) $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] = 0$, c) $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] > 0$.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.2: Retrato fase local del sistema (2.2) alrededor del origen para diferentes valores de los parámetros : a) $[(a-\gamma)^2 - 4b] > 0$, b) $[(a-\gamma)^2 - 4b] = 0$, c) $[(a-\gamma)^2 - 4b] < 0$.

Caso 2. Una bifurcación de tipo silla-nodo. (Dos puntos de equilibrio) Aquí se cumple la condición $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] = 0$ y las ceroclinas $w_1(u)$ y $w_2(u)$ del sistema (2.2) se intersectan en,

$$P_0 = (0, 0) \text{ y } P_1 = \left(\frac{a+1}{2}, \tilde{m} \left(\frac{a+1}{2} \right) \right),$$

siendo la intersección en P_1 de forma tangencial. Esto tiene una importante implicación dinámica pues, puede probarse que este tipo de contacto entre las ceroclinas implica que el punto de equilibrio es *no-hiperbólico*. Por lo tanto, según el *Teorema de Hartman-Grobman* (véase el Apéndice B), el sistema (2.2) localmente puede no ser topológicamente equivalente al sistema lineal que aproxima aquél en P_1 .

En efecto, si $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] = 0$, los valores propios de la matriz de Jacobi del sistema (2.2) evaluada en P_1 , son:

$$\lambda_1 = 0 \text{ y } \lambda_2 = \tilde{m} - \gamma,$$

corroborándose la no hiperbolicidad de P_1 . Cuando se tienen puntos de equilibrio no hiperbólicos, el retrato fase local del sistema se obtiene usando términos de orden superior en el desarrollo de Taylor del campo vectorial que define a aquél. La fundamentación de este análisis no lineal la da el *Teorema de la variedad central*, (véase el Apéndice B). Sin embargo, en la medida que el sistema (2.2) es relativamente simple, en particular las funciones que lo definen son continuas respecto a los parámetros, podemos usar argumentos de continuidad a fin de determinar la dinámica local del sistema no lineal (2.2), en vecindades de P_1 . Esto, junto con el hecho de que el caso que estamos estudiando puede verse como el caso límite correspondiente en que el sistema (2.2) tiene dos puntos de equilibrio con sólo decrecer continuamente la pendiente \tilde{m} de la ceroclina $w_2(u) = \tilde{m}u$, permite determinar la dinámica local del sistema (2.2). Véanse las figuras 2.1.a) y 2.1.b). Con esta salvedad, enseguida presentamos el análisis cuando se tienen tres puntos de equilibrio.

Caso 3. $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] > 0$. Aquí (2.2) tiene tres puntos de equilibrio: P_0 , P_1 y P_2 . Primero hacemos el análisis local alrededor del punto P_1 . Así, evaluemos la matriz de Jacobi del sistema (2.2) en el punto P_1 y calculemos los valores propios de ésta

$$\lambda_{1,2} = \frac{b_1 - \gamma \pm \sqrt{(\gamma - b_1)^2 - 4(b - b_1\gamma)}}{2},$$

donde,

$$b_1 = -\frac{(a-1)^2 - 4\tilde{m}}{2} + \frac{(a+1)(\sqrt{(a-1)^2 - 4\tilde{m}})}{2} + \tilde{m}.$$

Notemos que el parámetro b_1 es la derivada $f'(u)$ del polinomio cúbico evaluado en la abscisa de P_1 ; mientras que el signo del determinante de la matriz de Jacobi es,

$$\det J[u, w](P_1) = (b - b_1\gamma) < 0,$$

esto ocurre dado que $\tilde{m} < b_1$. De lo anterior concluimos que, siempre que se cumpla la condición, $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] > 0$, P_1 es un punto de equilibrio de tipo silla². En la figura 2.3 se muestra el retrato fase local alrededor de P_1 .

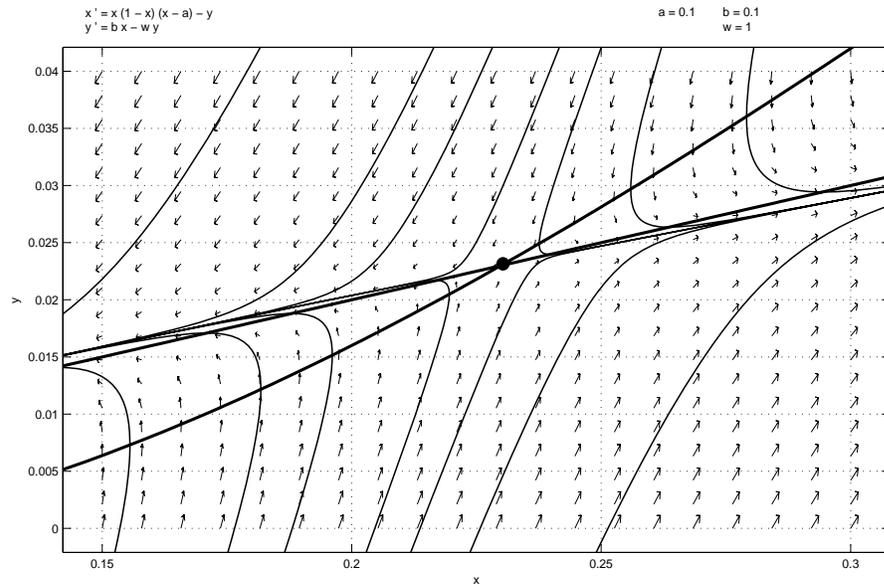


Figura 2.3: Retrato fase local de (2.2) alrededor de P_1 .

Para el caso 3), hacemos el análisis local alrededor del punto P_2 . Evaluamos la matriz de Jacobi del sistema (2.2) en P_2 y calculamos sus valores propios. Éstos son:

²En donde, la aproximación lineal a la variedad inestable de (2.2) en P_1 es, $W^u(P_1) = \{C_1 e^{\lambda_1 t} (1, b_1 - \lambda_1) \mid t \in \mathbb{R}, C_1 = \text{Constante}\}$; mientras que la aproximación lineal a la variedad estable de (2.2) en P_1 es, $W^s(P_1) = \{C_2 e^{\lambda_2 t} (1, b_1 - \lambda_2) \mid t \in \mathbb{R}, C_2 = \text{Constante}\}$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{b_2 - \gamma \pm \sqrt{(\gamma - b_2)^2 - 4(b - b_2\gamma)}}{2},$$

donde,

$$b_2 = -\frac{(a-1)^2 - 4\tilde{m}}{2} - \frac{(a+1)(\sqrt{(a-1)^2 - 4\tilde{m}})}{2} + \tilde{m}.$$

El parámetro b_2 es la derivada, $f'(u)$, evaluada en la abscisa³ de P_2 . Limitamos el rango de los parámetros,

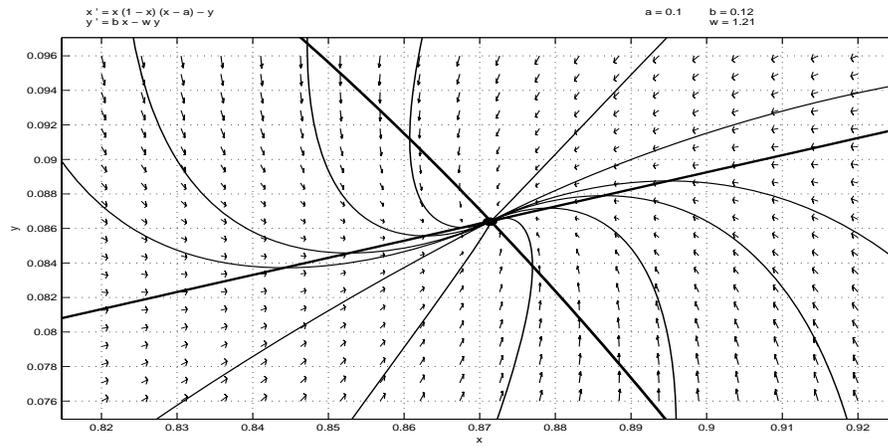
- a) Si $b_2 < 0$, $b_2 - \gamma < 0$, $[(\gamma - b_2)^2 - 4(b - b_2\gamma)] > 0$, P_2 es un nodo a.e.l. Véase la figura 2.4.a).
- b) Si $b_2 < 0$, $b_2 - \gamma < 0$, $[(\gamma - b_2)^2 - 4(b - b_2\gamma)] = 0$, P_2 es un nodo degenerado a.e.l, en la figura 2.4.b) se ilustra esta situación.
- c) Si $b_2 < 0$, $b_2 - \gamma < 0$, $[(\gamma - b_2)^2 - 4(b - b_2\gamma)] < 0$, P_2 es un foco a.e.l, en la figura 2.4.c) se ilustra esta situación.

Determinemos ahora la dinámica local alrededor de P_0 donde, dependiendo del signo del subradical que aparece en los valores propios, $\lambda_{1,2}$, obtenidos en el Caso 1, tenemos que:

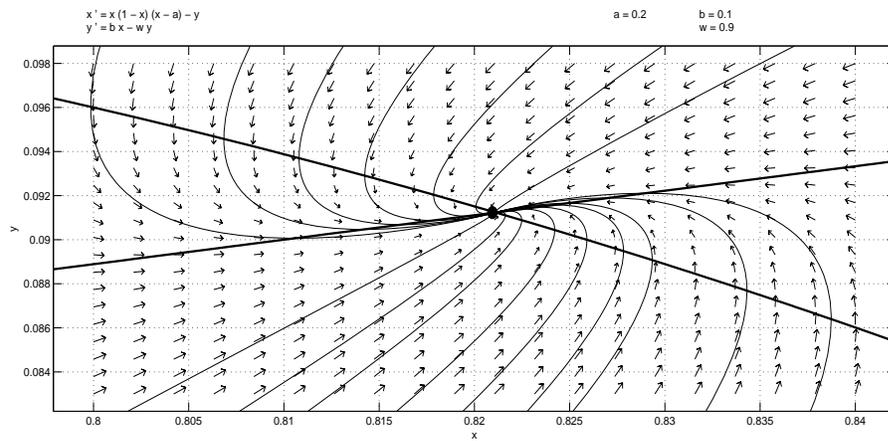
- a) Si $[(a - \gamma)^2 - 4b] > 0$, entonces $(0, 0)$ es un nodo. Véase la figura 2.5.a).
- b) Si $[(a - \gamma)^2 - 4b] = 0$, P_0 es un nodo degenerado, como se ilustra en la figura 2.5.b).
- c) Si $[(a - \gamma)^2 - 4b] < 0$, P_0 es un foco. En la figura 2.5.c) se ilustra esta situación.

Dado que el sistema tiene tres puntos de equilibrio: P_0 , P_1 y P_2 , dos de los cuales (P_0 y P_2) son asintóticamente estables, y el tercero (P_1) situado entre P_0 y P_2 , es inestable, resulta que (2.2) exhibe la propiedad de *biestabilidad*. La cuenca de atracción de P_0 y P_2 tiene por frontera la separatriz dada por la variedad estable del sistema (2.2) en el punto de equilibrio P_1 .

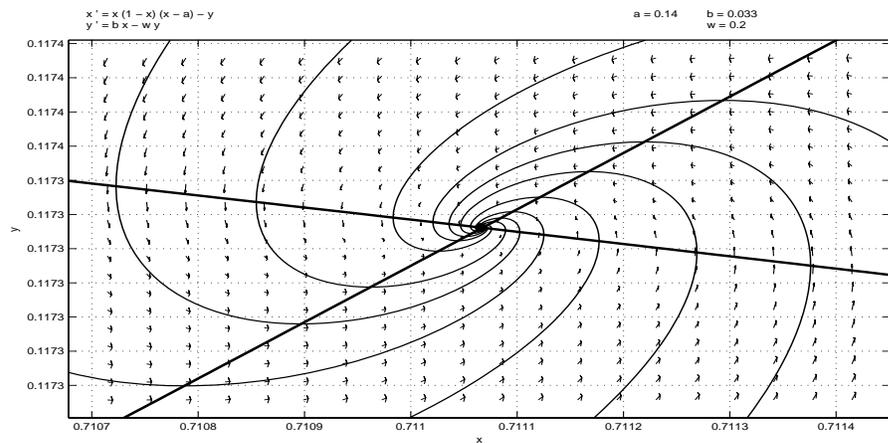
³Observe que si $P_2 = (u_2, w_2)$, dado que $b_2 = f'(u_2) < 0$, estamos considerando $u_2 \in (u_{max}, 1)$.



(a)

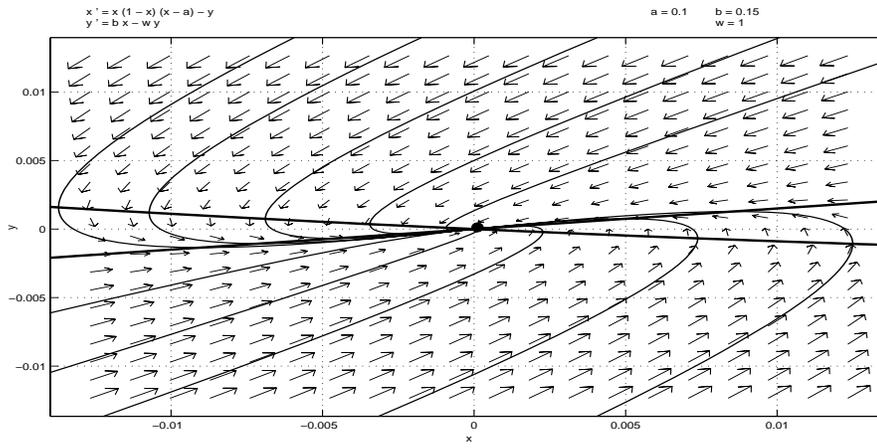


(b)

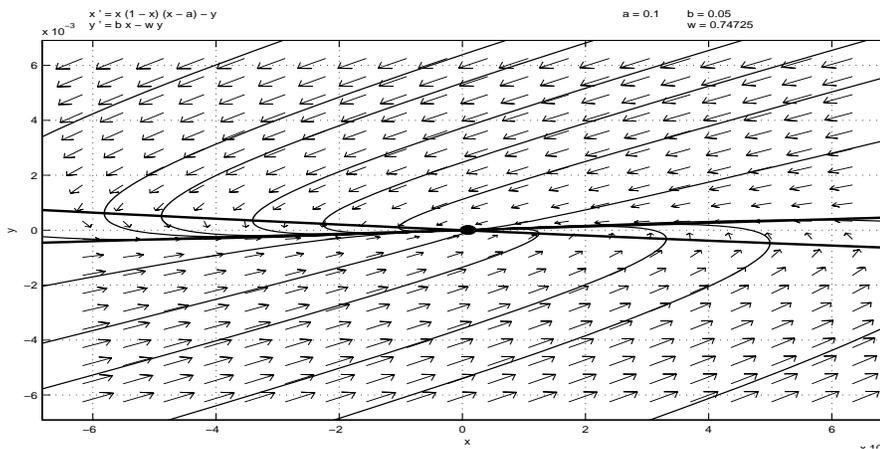


(c)

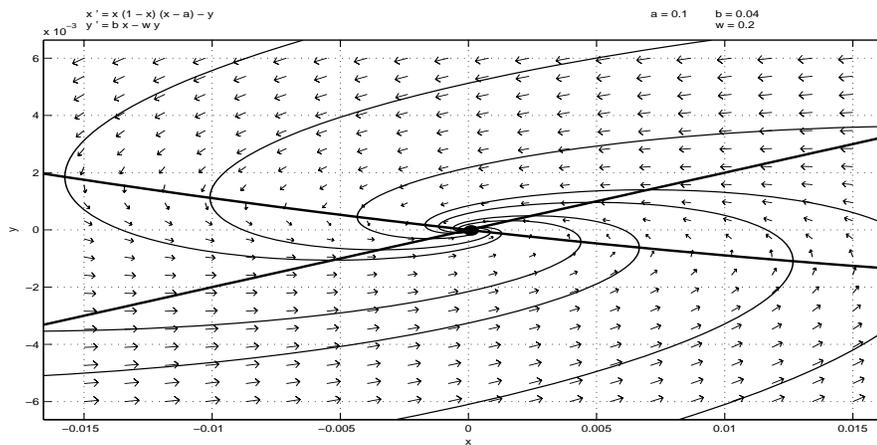
Figura 2.4: Dinámica local del sistema (2.2) alrededor de P_2 , para diferente rango de los parámetros.



(a)



(b)



(c)

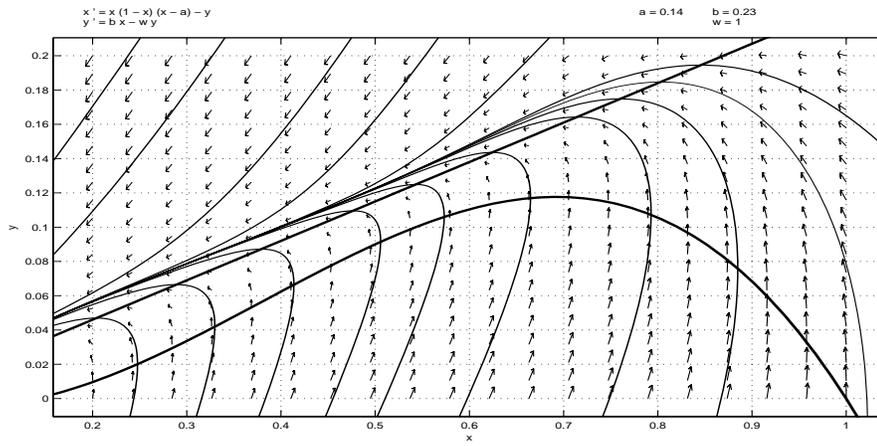
Figura 2.5: Dinámica local del sistema (2.2) alrededor de P_0 , con parámetros diferentes.

Sobre la base del análisis hecho en los últimos párrafos, conviene retomar el caso límite que dejamos pendiente en el Caso 2. Para esto, recordamos que,

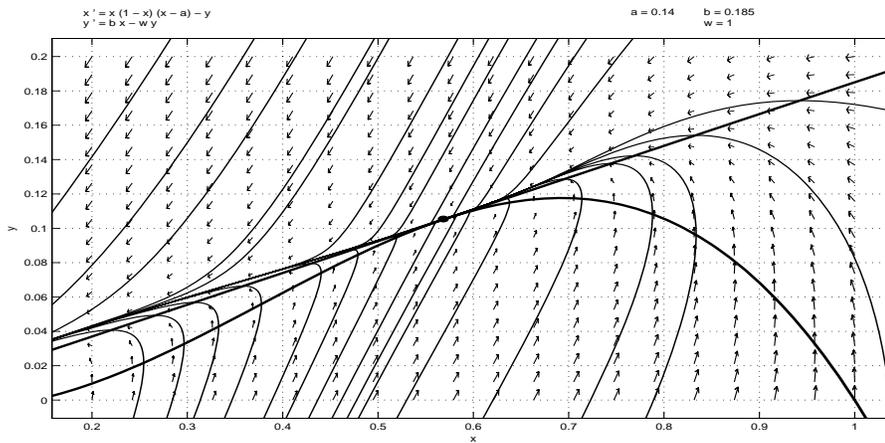
- a) Si $[(a - 1)^2 - 4\tilde{m}] < 0$, el único punto de equilibrio de (2.2) es el origen.
- b) Cuando $[(a - 1)^2 - 4\tilde{m}] = 0$, los dos puntos de equilibrio son, P_0 y P_1 .
- c) Si $[(a - 1)^2 - 4\tilde{m}] > 0$, el sistema tiene tres puntos de equilibrio: el origen P_0 , uno de tipo silla P_1 y otro de tipo nodo P_2 .

Es decir, si consideramos la condición en la cual sólo tenemos un punto de equilibrio (el origen) y empezamos a decrecer continuamente el parámetro \tilde{m} , en la ceroclina $w_2(u) = \tilde{m}u$, existe un valor crítico, \tilde{m}^* , de \tilde{m} para el que el sistema (2.2), tiene dos puntos de equilibrio: P_0 y P_1 . Ahora, si seguimos decreciendo el valor de \tilde{m} , uno de los puntos: P_1 , se *bifurca* y entonces el sistema (2.2) tiene tres puntos de equilibrio: P_0 , P_1 y P_2 . Observe entonces que cuando tenemos tres puntos de equilibrio, el punto de equilibrio P_1 es de tipo silla; mientras que P_2 es un punto de equilibrio el cual es nodo. De esta manera, tenemos una bifurcación de tipo *silla-nodo*, donde el parámetro de bifurcación es la pendiente \tilde{m} de la ceroclina $w_2(u) = \tilde{m}u$. Véase la figura 2.6.

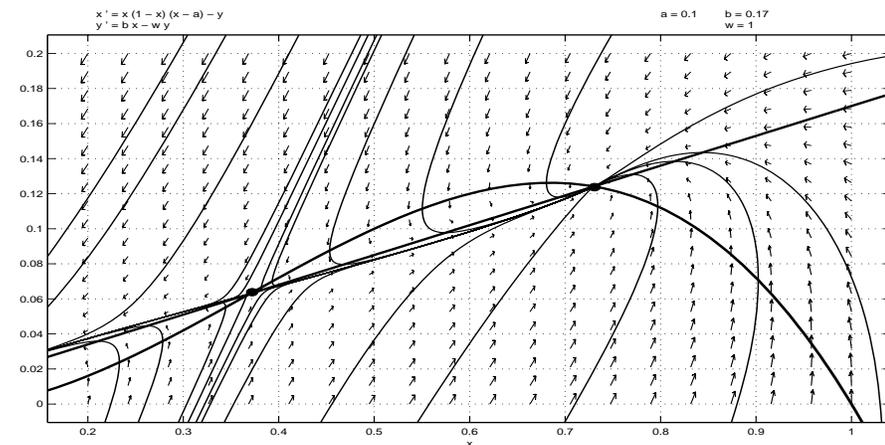
Con esto hemos terminado el análisis local, ahora pasamos a estudiar la dinámica global de (2.2).



(a)



(b)



(c)

Figura 2.6: Los tres retratos fase que muestran la bifurcación de tipo silla-nodo: a) $[(a - 1)^2 - 4\tilde{m}] < 0$, b) $[(a - 1)^2 - 4\tilde{m}] = 0$, c) $[(a - 1)^2 - 4\tilde{m}] > 0$.

2.2.2. Análisis global

En la subsección anterior se determinó la dinámica local del sistema (2.2), alrededor de cada punto de equilibrio. Ahora estamos interesados en estudiar su dinámica global. El análisis global lo realizamos primero para un punto de equilibrio el origen P_0 y segundo para dos puntos de equilibrio P_0 y P_1 .

Trayectorias heteroclínicas y homoclínicas.

Antes de empezar, debemos decir que cuando se estudia la dinámica de un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias en el que aparecen parámetros, en general su dinámica es cualitativamente distinta para diferentes valores de sus parámetros. Para nosotros será de interés determinar el comportamiento de las trayectorias para tiempos “grandes”. En particular queremos determinar el “origen” y el “destino” de éstas. Para ello, introduzcamos las siguientes nociones.

Definición 2.1 Sea $\vec{F}_* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, un campo vectorial de clase C_D^2 . Un punto \tilde{P}_0 es llamado punto α -límite de \tilde{P}_1 , si se cumple que para una sucesión, $\{t_i\}$, $\bar{\phi}_{t_i}(\tilde{P}_1) \rightarrow \tilde{P}_0$, cuando $t_i \rightarrow \infty$. Mientras que \tilde{P}_0 , es llamado punto ω -límite de \tilde{P}_1 , si para $\{t_i\}$, $\bar{\phi}_{t_i}(\tilde{P}_1) \rightarrow \tilde{P}_0$, cuando $t_i \rightarrow -\infty$. El término $\bar{\phi}_t(\cdot)$, es el flujo asociado al campo vectorial \vec{F}_* .

Definición 2.2 Una trayectoria cuyo conjunto α -límite es un punto de equilibrio (P) y su conjunto ω -límite es otro punto de equilibrio (Q), se llama trayectoria heteroclínica de tal sistema.

En el caso extremo $P = Q$, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.3 Una trayectoria cuyos conjuntos α -límite y ω -límite son ambos el mismo punto de equilibrio ($P=Q$), se llama trayectoria homoclínica.

Para sistemas planos, la variedad de trayectorias *heteroclínicas* incluye conexiones: silla-silla, silla-foco, etc. En el caso de sistemas de EDO en dimensiones mayores, la variedad de trayectorias *homoclínicas* o *heteroclínicas*, es más rica.

Retornamos ahora al análisis global del sistema (2.2), considerando el siguiente caso.

Caso 1. (Un punto de equilibrio) $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] < 0$. Aquí el sistema (2.2) tiene un punto de equilibrio $P_0 = (0, 0)$. Para nuestro propósito, probaremos que existe una región positivamente invariante de (2.2) alrededor del origen.

Vamos a demostrar que existe aquella región, lo que haremos será considerar la siguiente familia de circunferencias de radio r centrados en el origen

$$u^2 + w^2 = r^2. \quad (2.8)$$

Probaremos que puede escogerse r , de forma tal que el producto escalar del campo vectorial, que define al sistema restringido a la circunferencia y el vector normal interior a la circunferencia, cumple la desigualdad $\vec{F} \cdot \vec{n}_{int} > 0$. En lo que sigue estudiamos este producto escalar en el primer y tercer cuadrantes del plano uw .

- a) Si consideramos la parte de la circunferencia en el primer cuadrante es decir, al conjunto de puntos, $(u, +\sqrt{r^2 - u^2})$, con $u \in [0, r]$, entonces un vector normal interior a la circunferencia es

$$\vec{n}_{int} = (-u, -\sqrt{r^2 - u^2}); \quad (2.9)$$

mientras que la restricción de \vec{F} sobre la circunferencia, es $\vec{F} = (f(u) - \sqrt{r^2 - u^2}, bu - \gamma\sqrt{r^2 - u^2})$. Calculamos el producto escalar entre los vectores \vec{F} y \vec{n}_{int}

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_{int} = (f(u) - \sqrt{r^2 - u^2}, bu - \gamma\sqrt{r^2 - u^2}) \cdot (-u, -\sqrt{r^2 - u^2}), \quad (2.10)$$

o bien,

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_{int} = [u^2(u-1)(u-a) - bu\sqrt{r^2 - u^2}] + [u\sqrt{r^2 - u^2} + \gamma(r^2 - u^2)]. \quad (2.11)$$

A fin de determinar el signo de este producto escalar, conviene averiguar el signo del polinomio, $u^2(u-1)(u-a)$. Observamos lo siguiente,

- i) $u^2(u-1)(u-a) > 0$, si $u \in (0, a) \cup (1, r)$.
- ii) $u^2(u-1)(u-a) < 0$ si $u \in (a, 1)$.

Regresemos a la expresión (2.11) y consideramos los siguientes tres sub-casos,

- El primer término $[u^2(u-1)(u-a) - bu\sqrt{r^2 - u^2}]$ puede ser positivo o negativo en el intervalo $(0, a)$. Lo importante es que el segundo término $\gamma(r^2 - u^2)$ siempre es positivo en $(0, a)$. Para r suficientemente grande y γ adecuada, $\gamma(r^2 - u^2)$, tiene valores positivos grandes lo que implica que la suma total (2.11) sea positiva.
 - Ahora bien, el primer término $[u^2(u-1)(u-a) - bu\sqrt{r^2 - u^2}]$ es negativo en el intervalo $(a, 1)$. Sin embargo, si consideramos el término $\gamma(r^2 - u^2)$ con r grande, tendremos que la expresión (2.11) es positiva.
 - El signo de $[u^2(u-1)(u-a) - bu\sqrt{r^2 - u^2}]$, nuevamente puede ser negativo o positivo en $(1, r)$. Para una elección de r muy grande la suma (2.11) es positiva, debido al término $\gamma(r^2 - u^2)$.
- b) En el tercer cuadrante, el arco de circunferencia se expresa por la pareja $(u, -\sqrt{r^2 - u^2})$, para los valores de $u \in [-r, 0]$. Para este caso, el campo vectorial restringido a la circunferencia es, $\vec{F} = (f(u) + \sqrt{r^2 - u^2}, bu + \gamma\sqrt{r^2 - u^2})$, por lo que el producto escalar, es

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_{int} = (f(u) + \sqrt{r^2 - u^2}, bu + \gamma\sqrt{r^2 - u^2}) \cdot (-u, \sqrt{r^2 - u^2}), \quad (2.12)$$

de donde,

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_{int} = [u^2(u-1)(u-a) + bu\sqrt{r^2 - u^2}] + [-u\sqrt{r^2 - u^2} + \gamma(r^2 - u^2)], \quad (2.13)$$

Para el análisis del signo de este producto punto, nos fijamos en el segundo sumando. El término, $\gamma(r^2 - u^2)$ es positivo grande para elección de r grande lo que significa que la expresión (2.13) es positiva.

El argumento que usamos en los dos incisos anteriores se puede usar, en el segundo y cuarto cuadrantes. La conclusión es que, se puede elegir un radio, r , suficientemente grande de manera que la región que se encuentra encerrada por la circunferencia de radio r , sea positivamente invariante del campo vectorial que define el sistema (2.2).

Simulación numérica

A fin de disponer de un recurso visual⁴ que ilustre el análisis anterior, lo que hicimos fue realizar simulaciones numéricas usando el *software MATLAB*, para -con su ayuda- observar el comportamiento del signo del producto escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}_{int}$, sobre la circunferencia de radio r con centro en el origen. Para esto, diseñamos un programa que permite determinar el signo del producto escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}_{int}$, variando el radio, r , de la circunferencia. Es decir, para cada valor de r , el programa indica en qué arco(s) de circunferencia el producto $\vec{F} \cdot \vec{n}_{int}$, es positivo y en qué otros es negativo. Para visualizarlo, el programa permite colorear de distinto color los arcos en los que el producto punto tiene tal o cual signo. Para ello, definimos

$$P(u) = \vec{F}(u, w(u)) \cdot \vec{n}_{int},$$

donde $u \in [-r, r]$, con $\vec{n}_{int} = (-u, -w(u))$.

Elegimos el conjunto de parámetros $a = 0.3$, $b = 0.001$ y $\gamma = 0.001$ y consideramos dos valores extremos para r : $r = 2$ y $r = 100$. Graficamos la circunferencia con un radio específico, ésta se colorea de dos formas; el color rojo indica que el producto punto es negativo, es decir el campo vectorial de (2.2) sobre la circunferencia apunta hacia el exterior del círculo. Mientras que el color negro indica que el producto $P(u)$ es positivo. Esto significa que el campo vectorial apunta hacia el interior de la circunferencia. Véanse las figuras 2.7 y 2.8.

Con este mismo conjunto de parámetros, ahora con un radio $r = 9850$, consideramos un simulación que colorea a la circunferencia, para este caso tenemos que la circunferencia sólo tiene color negro, lo que indica que el producto punto es positivo, es decir la circunferencia de radio $r = 9850$ centrada en el origen, es una región positivamente invariante del sistema (2.2). Es de notarse que si escogemos un valor de r tal que $r < 9850$, el producto punto es negativo en algunos arcos de circunferencia; mientras que si el radio es más grande, el producto punto es positivo. Así, concluimos que $r_c \approx 9850$ es el valor aproximado para el radio crítico. Véase la figura 2.9. También elegimos $r = 10000$, como se ve en la figura 2.10.

⁴Le agradecemos al Dr. Jorge Humberto Arce Rincón del Laboratorio de Sistemas Excitables del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la UNAM. El habernos proporcionado el programa con el cual se hicieron estos cálculos.

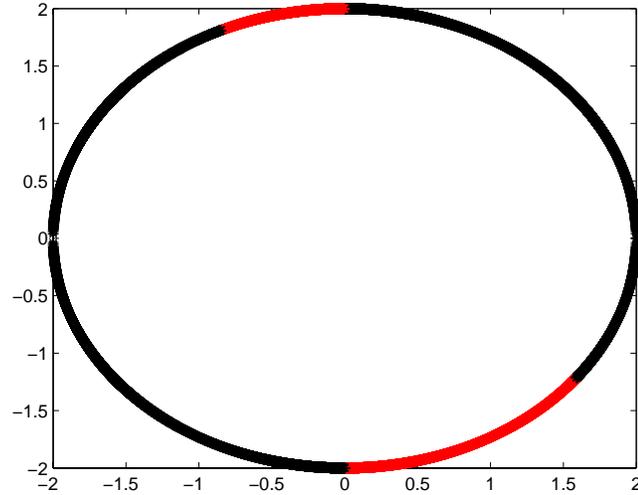


Figura 2.7: Signo de $P(u)$ para $r = 2$. En los arcos de color rojo el campo vectorial del sistema (2.2) apunta hacia afuera.

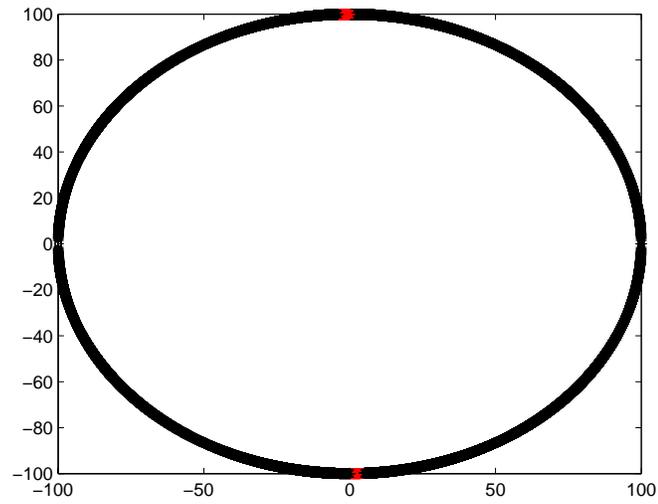


Figura 2.8: Signo de $P(u)$ para $r = 100$. Aquí los arcos en los que el campo vectorial apunta hacia afuera son más pequeños.

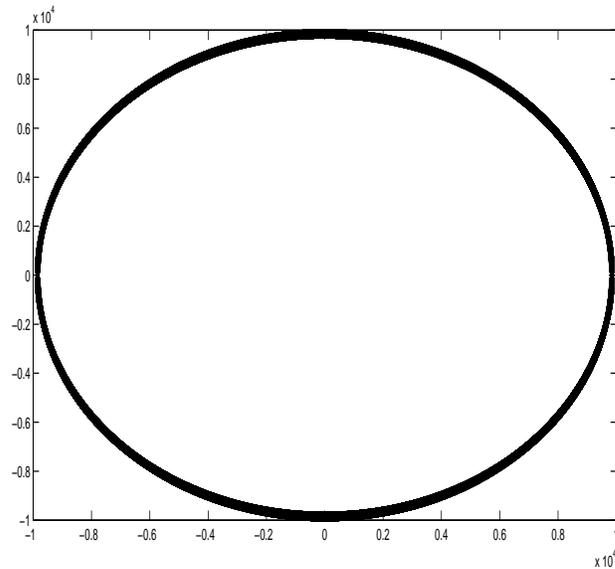


Figura 2.9: Una estimación del radio crítico del radio, $r_c \approx 9850$. Aquí ya no aparecen arcos en los que el campo vectorial apunta hacia afuera, siempre apunta hacia a dentro de la región delimitada por la circunferencia.

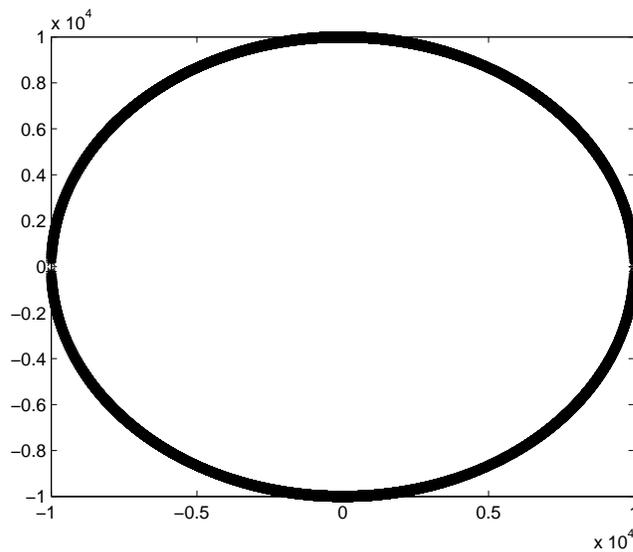


Figura 2.10: Signo de $P(u)$ para $r > r_c$. Aquí, $r = 10000$.

La no existencia de trayectorias cerradas

También podemos probar que el sistema (2.2) no posee trayectorias cerradas. Para ello, escribamos el campo vectorial que define el sistema (2.2) así;

$$\vec{F}(u, w) = (G(u, w), H(u, w)), \quad (2.14)$$

donde $G(u, w) = u(1-u)(u-a) - w$ y $H(u, w) = bu - \gamma w$. Luego consideramos el campo vectorial,

$$\sigma(w) \vec{F}(u, w) = \sigma(w)(G(u, w), H(u, w)) = \sigma(w)(u(1-u)(u-a) - w, bu - \gamma w), \quad (2.15)$$

con $\sigma(w) = e^{\kappa w}$. Demostraremos que puede elegirse el parámetro κ , de tal forma que la divergencia del campo vectorial (2.15)

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\sigma(w)G(u, w) \right] + \frac{\partial}{\partial w} \left[\sigma(w)H(u, w) \right], \quad (2.16)$$

no cambia de signo en la región de interés. Calculando la divergencia del campo vectorial $\sigma(w) \vec{F}(u, w)$,

$$\operatorname{div}(\sigma(w) \vec{F}(u, w)) = (2(a+1)u - a - 3u^2 - \gamma + b\kappa u - \gamma\kappa w) e^{\kappa w}. \quad (2.17)$$

Si elegimos $\kappa = -2(1+a)/b$, la divergencia toma la forma,

$$\operatorname{div}(\sigma(w) \vec{F}(u, w)) = -a - 3u^2 - \gamma + 2\gamma \frac{1+a}{b} w, \quad (2.18)$$

donde al considerar los valores de u que cumplen la condición,

$$w < (3u^2 + a + \gamma) \frac{b}{2\gamma(1+a)}, \quad (2.19)$$

garantizamos que, para la parejas (u, w) que satisfacen las condiciones anteriores, se cumple

$$\operatorname{div}(\sigma(w) \vec{F}(u, w)) < 0. \quad (2.20)$$

Luego, usando la *Prueba de Dulac* (véase el apéndice B), el sistema (2.2), no tiene trayectorias cerradas en el conjunto de parejas (u, w) que satisfacen (2.19), en particular no tiene ciclos límite alrededor del origen. Además, recordando que probamos que el sistema (2.2) tiene una región positivamente

invariante alrededor del origen, concluimos que toda trayectoria que entra a aquella región, tiene como destino final el punto de equilibrio P_0 . Esto se sigue de una aplicación del Teorema de Poincaré-Bendixson.

Si observamos detenidamente la condición (2.19), vemos que la gráfica de la expresión de la derecha, es una parábola que abre en la dirección positiva del eje w . El vértice, V , de aquella es $V = (0, a + \gamma/2\gamma(1 + a))$, el cual puede estar muy cerca o muy lejos del origen, para una elección adecuada de los parámetros. En la figura 2.11, observamos la región positivamente invariante que define la parábola, para el conjunto de parámetros $a = 0.3$, $b = 0.001$ y $\gamma = 0.001$, que satisfacen la condición de que sólo existe un punto de equilibrio.

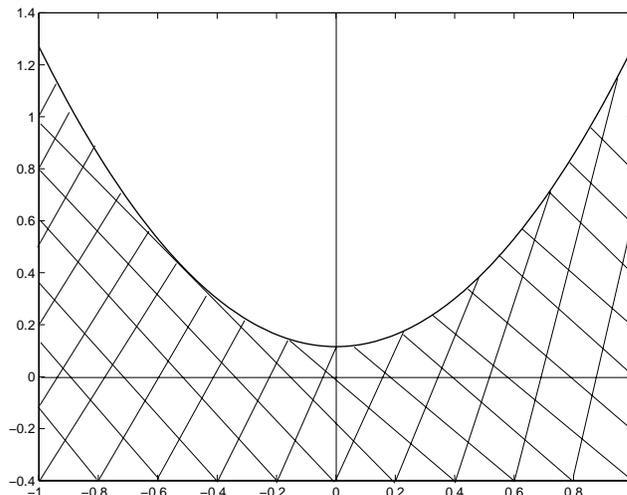


Figura 2.11: En la región sombreada, no existen trayectorias cerradas, para el sistema (2.2). Véase el texto.

En las figuras 2.12 y 2.13, exhibimos dos retratos fase globales del sistema (2.2) para dos conjuntos específicos de parámetros. En éstos, todas las trayectorias de (2.2) tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$, pero las hay que antes realizan una larga travesía; mientras que otras, lo hacen a través de una ruta corta. También podemos visualizar la intersección de las ceroclinas $w_1(u)$ y $w_2(u)$, únicamente en el origen. La dinámica asociada a un solo punto de equilibrio, será importante como veremos más adelante. Esto es así ya que este punto de equilibrio, que es único, corresponde desde el punto de vista fisiológico a que el axón posee un estado de reposo.

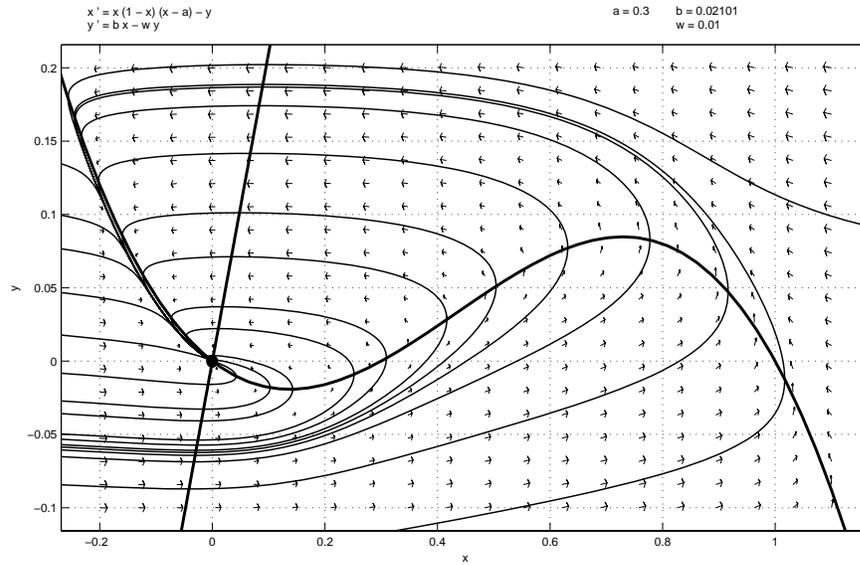


Figura 2.12: Retrato fase global para $a=0.3$, $b=0.02101$ y $\gamma=0.01$.

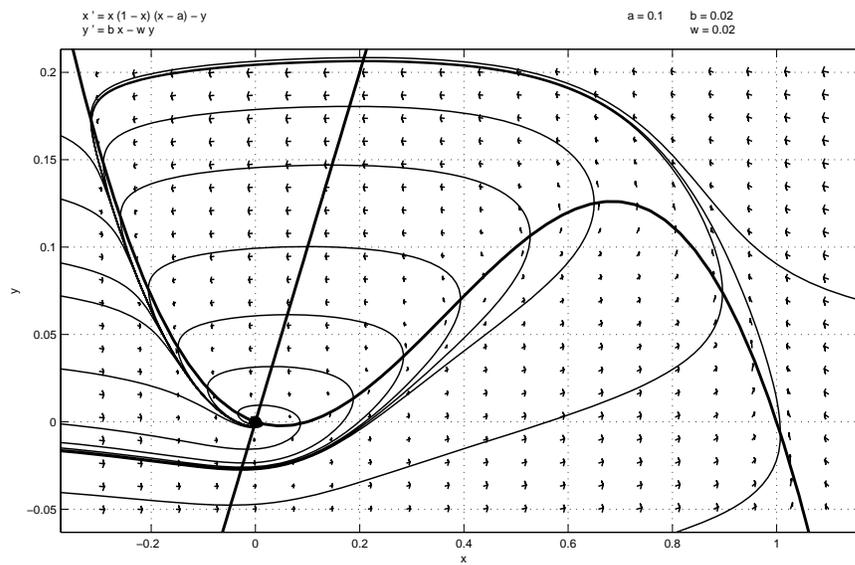


Figura 2.13: Retrato fase global con $a=0.1$, $b=0.02$ y $\gamma=0.02$.

Caso 2. (Dos puntos de equilibrio) Cuando tenemos la condición $[(a-1)^2 - 4\tilde{m}] = 0$, el sistema (2.2) tiene dos puntos de equilibrio P_0 y P_1 . También podemos probar que para un conjunto adecuado de parámetros, el sistema no tiene trayectorias cerradas. Esto lo hacemos de la forma siguiente: nuevamente multiplicamos el campo vectorial que define el sistema (2.2), por un función auxiliar $\sigma(w) = e^{\iota w}$, donde $\iota = -2(1+a)/b$. Al usar la condición $(a-1)^2 - 4\tilde{m} = 0$, la divergencia del nuevo campo vectorial se convierte en

$$\operatorname{div}(\sigma(w)(G(u, w), H(u, w))) = -a - 3u^2 - \frac{4b}{(a-1)^2} + \frac{8(1+a)}{(a-1)^2}w, \quad (2.21)$$

si se cumple la condición,

$$w < \frac{3u^2(a-1)^2}{8(1+a)} + \frac{4b}{8(1+a)} + \frac{a(a-1)^2}{(1+a)}, \quad (2.22)$$

tenemos que la divergencia no cambia de signo, por lo que al utilizar *la Prueba de Dulac* (véase el Apéndice B), concluimos que en la región que define la desigualdad anterior no existen trayectorias cerradas, de manera particular no existen ciclos límite alrededor del origen. Esta región la constituye el conjunto de puntos (u, w) que están por debajo de la gráfica de la parábola. Ésta se define usando (2.22). La parábola tiene su vértice sobre el eje w positivo y abre hacia arriba. Aquél, es

$$V = \left(0, \frac{4b}{8(1+a)} + \frac{a(a-1)^2}{(1+a)}\right). \quad (2.23)$$

La condición (2.22) nos conduce a que,

$$w_1 = \frac{\tilde{m}(a+1)}{2} < \frac{4b}{8(1+a)} + \frac{a(a-1)^2}{(1+a)}, \quad (2.24)$$

esto significa que la parábola, tiene ubicado su vértice por arriba de la ordenada w_1 del punto de equilibrio P_1 . En la figura 2.14, ilustramos la posición de la parábola con respecto a las ceroclinas del sistema (2.2). También exhibimos el retrato fase global cuando las ceroclinas $w_1(u)$ y $w_2(u)$ de (2.2) se tocan tangencialmente en P_1 . Más aun, puede construirse una región positivamente invariante, de manera que la trayectoria que ingresa a aquella región, tiene como destino final a P_0 o P_1 .

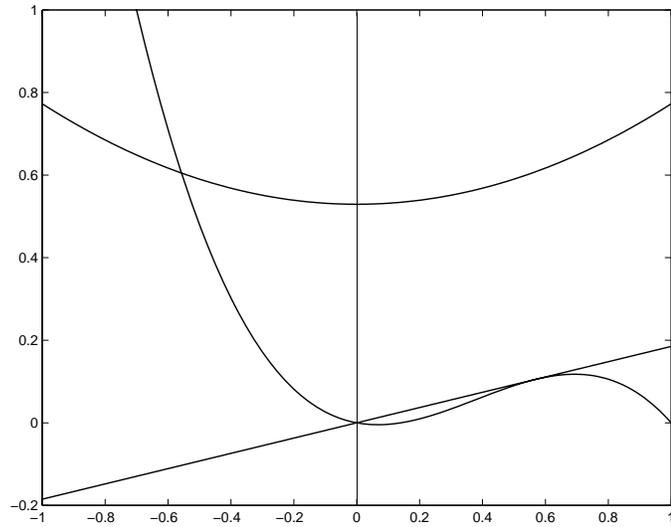


Figura 2.14: Aquí observamos, para el caso 2, las ceroclinas del sistema (2.2), $w_1(u) = u(1-u)(u-a)$ y $w_2(u) = \tilde{m}u$. La parábola definida a través de (2.22), se encuentra ubicada en la parte superior de las gráficas de aquéllas.

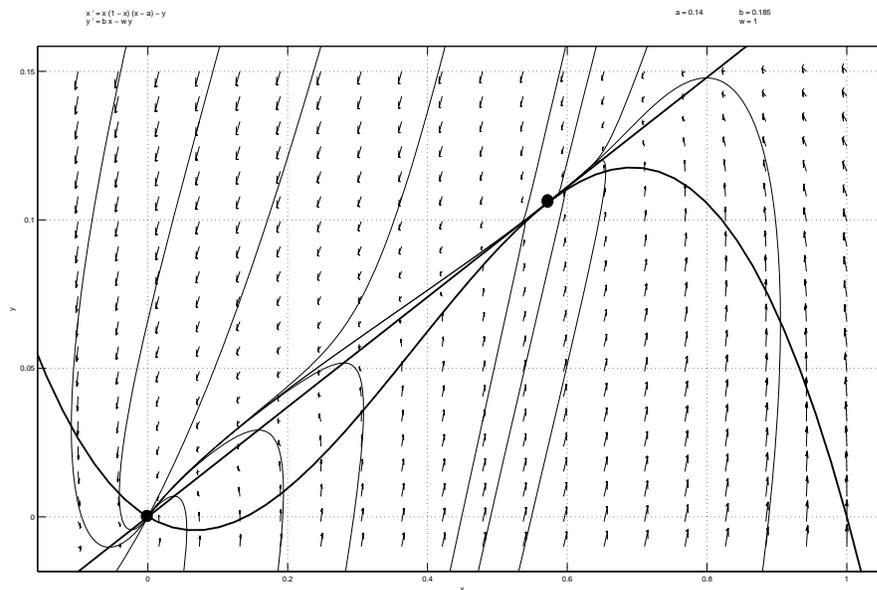


Figura 2.15: Retrato fase global cuando se da la bifurcación de tipo nodo-silla.

Caso 3. (Tres puntos de equilibrio)[$(a - 1)^2 - 4\tilde{m}] > 0$. El sistema (2.2) tiene tres puntos de equilibrio, el origen P_0 , P_1 y P_2 . No realizamos el estudio de este caso, el lector puede consultar la referencia [46]. En la cual se estudia la existencia de trayectorias homoclínicas y heteroclínicas del sistema (2.2).

Ahora, es importante identificar la dinámica asociada al potencial de acción. Esto lo hacemos en las siguientes líneas.

La forma del potencial de acción

Desde el punto de vista fisiológico el potencial de acción tiene un único estado de reposo, por ello desde el punto de vista interpretativo nos interesa analizar el sistema (2.2), cuando sólo tiene un punto de equilibrio: el origen. Fijémonos en la siguiente propiedad global del sistema de FitzHugh-Nagumo, cuando $I_a = 0$: el origen es estable y el sistema modela la propiedad de *excitabilidad*. En el sentido de que, para un conjunto adecuado de parámetros y una condición inicial $(u_0, 0)$ con $a < u_0 < 1$, la trayectoria $\vec{B}(t)$ que parte de ahí, realiza un recorrido “largo” antes de regresar al punto de equilibrio. Mientras que si tomamos una condición inicial $(u_0, 0)$ tal que $0 < u_0 < a$, la trayectoria (que denotamos por $\vec{A}(t)$) que parte de este punto hace un recorrido “corto”, después del cual regresa al punto de equilibrio. De esta manera, el parámetro $a \in (0, 1/2)$, desempeña el papel del *umbral* del voltaje u : si $u_0 < a$; no se genera potencial de acción; mientras que si $u_0 > a$, el potencial se genera.

A fin de visualizar esta conducta dinámica, conviene dibujar el retrato fase del sistema (2.2), para una elección adecuada de parámetros. Los parámetros que aquí se eligen son los mismos que los usados por Murray [43]. En la figura 2.16, observamos el retrato fase global. El correspondiente comportamiento de las variables w y u con respecto al tiempo, se puede observar en las figuras 2.17.a) y 2.17.b), en esta última se ve el potencial de acción con sus cuatro fases: ascenso, excitación, refracción y recuperación. Observe la figura 2.16, en donde u tiene cambios lentos y rápidos en la trayectoria cuando el tiempo avanza⁵. Esto está de acuerdo con el comportamiento que describió Nagumo en sus ecuaciones.

⁵En el retrato fase ilustrado en la figura 2.16, notamos que la trayectoria $\vec{B}(t)$ sigue muy de “cerca” a la gráfica de la ceroclina $w_1(u)$ en algunas regiones, de tal forma que se confunden. Formalmente, excepto cuando $\vec{B}(t)$ cruza a la gráfica de $w_1(u)$ en un punto, después ya no coinciden.

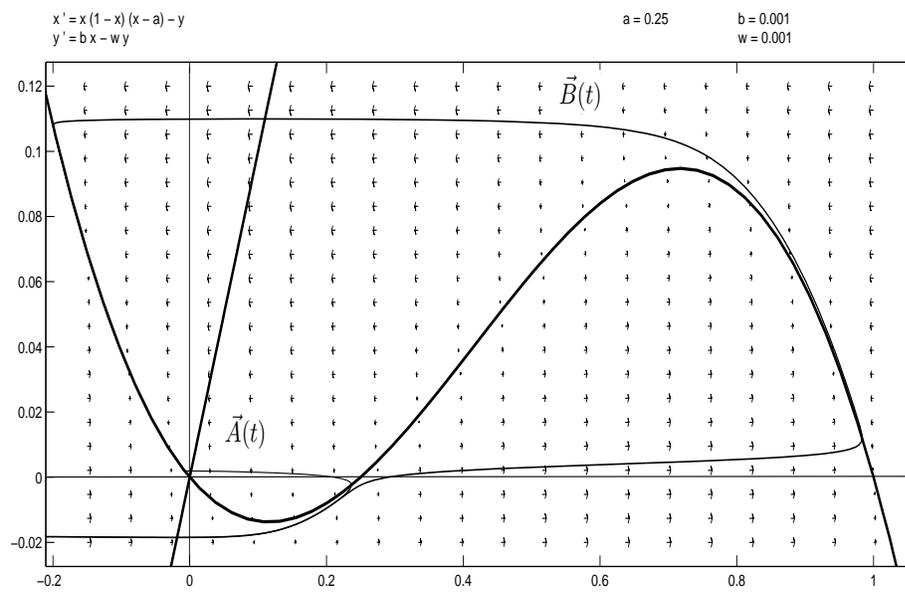


Figura 2.16: Comportamiento de dos trayectorias de (2.2): la $\vec{A}(t)$ parte cerca del origen a la izquierda del umbral; mientras que $\vec{B}(t)$ parte de un punto a la derecha del umbral. Los parámetros seleccionados son $a = 0.25$, $b = 0.001$ y $\gamma = 0.001$.

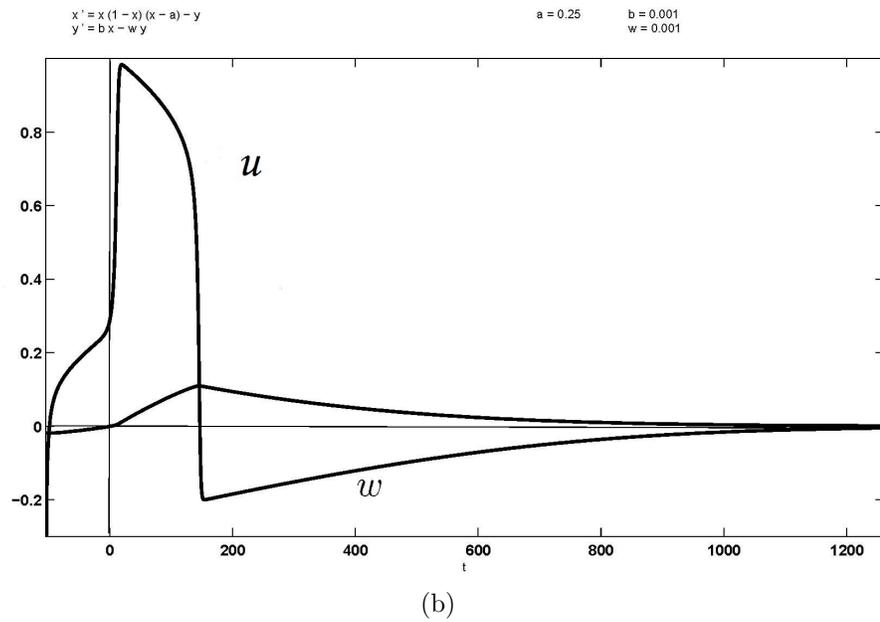
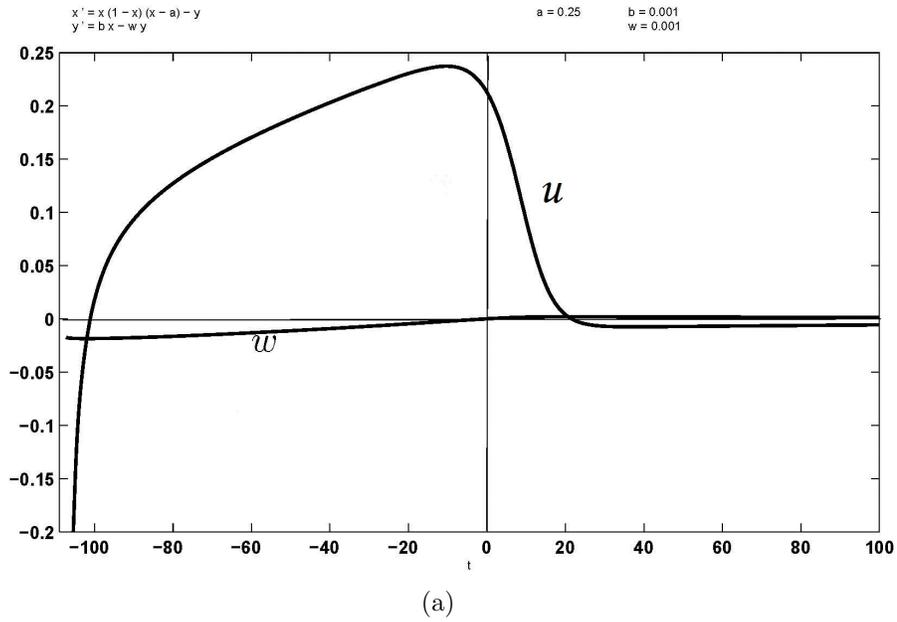


Figura 2.17: En las sub-figuras 2.17.a) y 2.17.b) vemos el comportamiento de u y w con respecto al tiempo t correspondiente a las trayectorias $\vec{A}(t)$ y $\vec{B}(t)$ de la figura 2.16, con $u_0=0.215$ para $\vec{A}(t)$ y $u_0=0.286$ para $\vec{B}(t)$, respectivamente.

2.3. El modelo lineal a trozos

Debido a la no linealidad del modelo de FitzHugh-Nagumo considerando $I_a > 0$, su análisis aunque puede hacerse, presenta dificultades que en una primera presentación sobre el tema, queremos evitar. A cambio, aquí presentamos la dinámica de un sistema que, siendo diferente al de FitzHugh-Nagumo, tiene las mismas propiedades cualitativas pero cuyo análisis es más simple. El nuevo sistema se construye sobre la base de que la u -cerocline se puede aproximar por una función lineal a trozos. El esquema que seguiremos aquí es el sugerido por Murray [43] (problema 7, del Capítulo 6). Para ello, usaremos las coordenadas del máximo y del mínimo de la función $f(u)$ en el intervalo $[0, 1]$ que aparece en (2.2), para $I_a = 0$, junto con los puntos donde su gráfica interseca los ejes coordenados. El máximo de f se alcanza en u_2 ; mientras que el mínimo se tiene en u_1 . Aquí

$$u_2 = \frac{a + 1 + \sqrt{(a + 1)^2 - 3a}}{3} \quad \text{y} \quad u_1 = \frac{a + 1 - \sqrt{(a + 1)^2 - 3a}}{3}.$$

El valor de $w_2(u)$ en u_2 y u_1 es

$$w_2(u_2) = u_2(1 - u_2)(u_2 - a) \quad \text{y} \quad w_1(u_1) = u_1(1 - u_1)(u_1 - a),$$

respectivamente.

Luego, la función lineal mediante la cual aproximamos al polinomio cúbico f en el intervalo $[0, 1]$, es

$$\tilde{H}(u) = \begin{cases} m_1 u + c_1, & \text{si } u \in [0, u_1] \\ m_2 u + c_2, & \text{si } u \in [u_1, u_2] \\ m_3 u + c_3, & \text{si } u \in [u_2, 1], \end{cases} \quad (2.25)$$

donde

$$m_1 = \frac{f(u_1)}{u_1}, \quad m_2 = \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} \quad \text{y} \quad m_3 = \frac{f(u_2)}{u_2 - 1}.$$

Las ordenadas al origen, c_1 , c_2 y c_3 , que aparecen en cada trozo lineal de (2.25) son,

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -m_2 u_1 + f(u_1) \quad \text{y} \quad c_3 = -m_3 u_2 + f(u_2),$$

respectivamente.

Luego, el correspondiente modelo lineal a trozos que aproxima al sistema de FitzHugh-Nagumo, cuando se considera $I_a > 0$, es

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tilde{H}(u) - w + I_a, \\ \dot{w} &= bu - \gamma w. \end{aligned} \tag{2.26}$$

En la figura 2.18 ilustramos, la aproximación lineal a trozos del polinomio cúbico f .

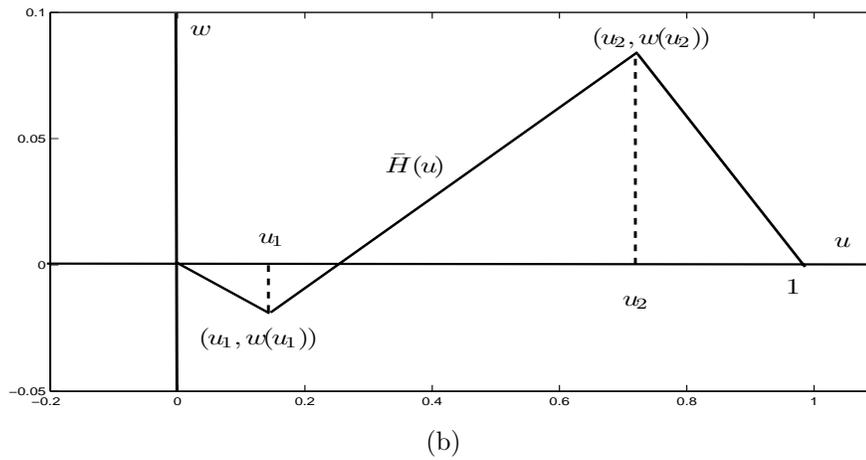
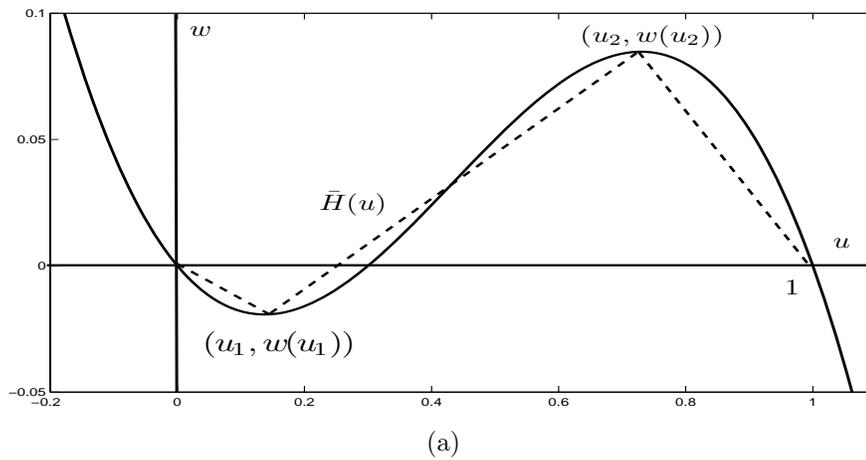


Figura 2.18: Aproximación lineal a trozos del polinomio cúbico f . Considerando $I_a = 0$.

En esta sección centraremos nuestro análisis en el caso de que el sistema (2.26) tiene un solo punto de equilibrio diferente del trivial. La siguiente proposición establece una condición suficiente para la existencia de dicho punto.

Proposición 2.1 *El sistema (2.26) tiene un único punto de equilibrio si se satisface la desigualdad,*

$$\tilde{H}'(u) < \tilde{m}, \forall u \in (0, u^*) \setminus \{u_1, u_2\},$$

donde \tilde{m} es la pendiente de la ceroclina $w_2(u) = \tilde{m}u$, con $u^* = \frac{I_a + c_3}{-m_3}$.

Demostración. Ésta sigue lo expuesto en Pérez [46]. Una condición geométrica para que el sistema (2.26) tenga un único punto de equilibrio es que la pendiente de la ceroclina horizontal $\tilde{w}_1(u) = \tilde{H}(u) + I_a$, del sistema lineal a trozos (2.26), sea menor que la pendiente de la ceroclina $w_2(u) = \tilde{m}u$, es decir $\tilde{w}'_1(u) < w'_2(u)$, $\forall u \in (0, u^*) \setminus \{u_1, u_2\}$, esto significa que si las ceroclinas se intersectan en un punto ya no volverán a intersectarse, obteniéndose que, $\tilde{H}'(u) < \tilde{m}$, para todo punto $u \in (0, u^*) \setminus \{u_1, u_2\}$, donde u_1 y u_2 son los puntos donde no existe la derivada de $\tilde{H}(u)$. \diamond

De la proposición anterior se sigue que la intersección de las ceroclinas del sistema (2.2) cuando éste se aproxima por un sistema lineal a trozos (2.26), que depende tanto de $I_a > 0$ como de la pendiente \tilde{m} , tiene la forma que se muestra en la figura 2.19.

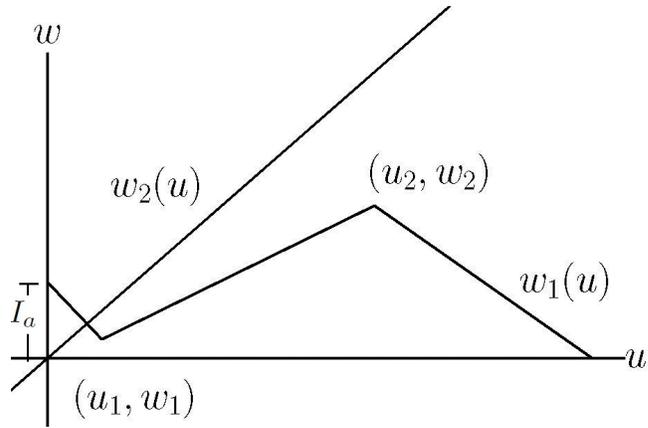
Enseguida, haremos el estudio de la dinámica local del sistema (2.26) alrededor del punto de equilibrio que proviene de considerar las tres formas de intersección ilustradas en la figura 2.19. Lo haremos separadamente.

Caso 1. La intersección es como en la figura 2.19.a). En este caso, el punto de equilibrio de (2.26) es,

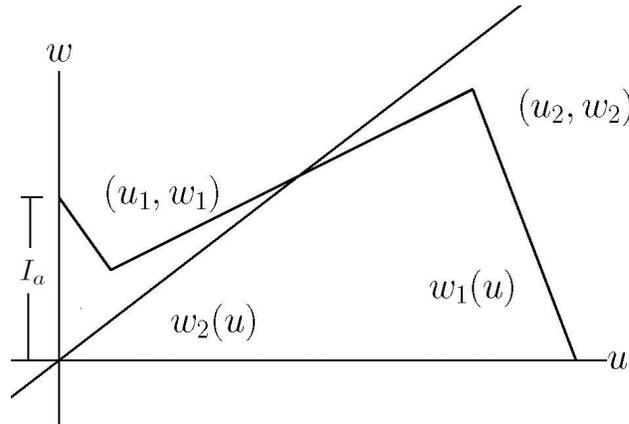
$$P_1 = \left(\frac{I_a + c_1}{\tilde{m} - m_1}, \tilde{m} \frac{I_a + c_1}{\tilde{m} - m_1} \right).$$

Al calcular la matriz de Jacobi de (2.26), evaluarla en P_1 y calcular sus valores propios, se obtiene,

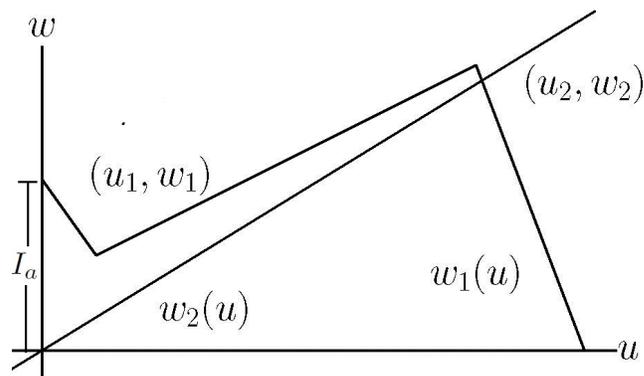
$$\lambda_{1,2} = \frac{m_1 - \gamma \pm \sqrt{(m_1 - \gamma)^2 - 4(b - m_1\gamma)}}{2}.$$



(a) $0 < I_a < I_{a1}$.



(b) $I_{a1} < I_a < I_{a2}$.



(c) $I_{a2} < I_a$.

Figura 2.19: Tres tipos de intersección de las ceroclinas del modelo lineal a trozos (2.26). Con $I_{a1} = m_1u - f(u_1)$ e $I_{a2} = mu_2 - f(u_2)$.

Notemos que la traza, $\text{tr}J[u, w](P_1) = m_1 - \gamma < 0$, ya que $m_1 < 0$ además, por la Proposición 2.4, tenemos que $\det J[u, w](P_1) = (b - m_1\gamma) > 0$ de manera que P_1 es a.e.l y, dependiendo del signo del subradical que aparece en $\lambda_{1,2}$, podemos tener las siguientes posibilidades:

- a) Si $[(m_1 - \gamma)^2 - 4(b - m_1\gamma)] > 0$, entonces P_1 es nodo,
- b) Si $[(m_1 - \gamma)^2 - 4(b - m_1\gamma)] = 0$, por lo tanto P_1 es nodo degenerado,
- c) Si $[(m_1 - \gamma)^2 - 4(b - m_1\gamma)] < 0$, P_1 es foco.

Caso 2. La intersección es como en la figura 2.19.b). El punto de equilibrio toma la forma,

$$P_1 = \left(\frac{I_a + c_2}{\tilde{m} - m_2}, \tilde{m} \frac{I_a + c_2}{\tilde{m} - m_2} \right).$$

Los valores propios de la matriz de Jacobi de (2.26) en P_1 , son

$$\lambda_{1,2} = \frac{m_2 - \gamma \pm \sqrt{(m_2 - \gamma)^2 - 4(b - m_2\gamma)}}{2}.$$

De la Proposición 2.4 tenemos que $\det J[u, w](P_1) = (b - m_2\gamma) > 0$, dado que $\text{tr}J[u, w](P_1) = (m_2 - \gamma)$ y $m_2 > 0$, consideramos los siguientes sub-casos,

- a) Si $(m_2 - \gamma) < 0$, el punto P_1 es a.e.l y, dependiendo del signo del subradical, se tienen las siguientes posibilidades:
 - i) P_1 es un nodo, si $[(m_2 - \gamma)^2 - 4(b - m_2\gamma)] > 0$,
 - ii) P_1 es un nodo degenerado, si $[(m_2 - \gamma)^2 - 4(b - m_2\gamma)] = 0$,
 - iii) P_1 es foco, si $[(m_2 - \gamma)^2 - 4(b - m_2\gamma)] < 0$.
- b) Si $(m_2 - \gamma) = 0$, únicamente es posible que $-4(b - m_2\gamma) < 0$, de manera que P_1 es un centro.
- c) Si $(m_2 - \gamma) > 0$, el punto P_1 es inestable y puede ser de tres tipos:
 - i) P_1 es de tipo nodo, si $[(m_2 - \gamma)^2 - 4(b - m_2\gamma)] > 0$.
 - ii) P_1 es de tipo nodo degenerado, si $[(m_2 - \gamma)^2 - 4(b - m_2\gamma)] = 0$.
 - iii) P_1 es de tipo foco, si $[(m_2 - \gamma)^2 - 4(b - m_2\gamma)] < 0$.

Caso 3. La intersección es como en la figura 2.19.c). Fijémonos ahora en el segmento de recta, $\tilde{H}(u) = m_3u + c_3$, el punto de equilibrio es,

$$P_1 = \left(\frac{I_a + c_3}{\tilde{m} - m_3}, \tilde{m} \frac{I_a + c_3}{\tilde{m} - m_3} \right),$$

los valores propios de la matriz de Jacobi en P_1 , son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{m_3 - \gamma \pm \sqrt{(m_3 - \gamma)^2 - 4(b - m_3\gamma)}}{2},$$

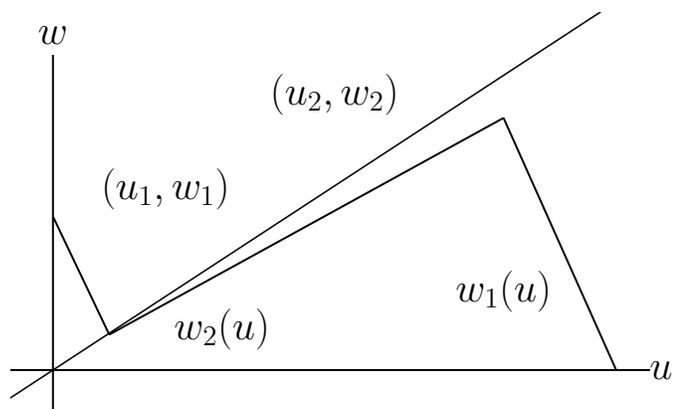
Aquí $\text{tr}J[u, w](P_1) = (m_3 - \gamma) < 0$, pues $m_3 < 0$ y como $\det J[u, w](P_1) = (b - m_3\gamma) > 0$, entonces P_1 es un punto de equilibrio a.e.l y puede ser de los siguientes tipos:

- Cuando $[(m_3 - \gamma)^2 - 4(b - m_3\gamma)] > 0$, P_1 es de tipo nodo,
- Si $[(m_3 - \gamma)^2 - 4(b - m_3\gamma)] = 0$, P_1 es de tipo nodo degenerado,
- En el caso $[(m_3 - \gamma)^2 - 4(b - m_3\gamma)] < 0$, P_1 es de tipo foco.

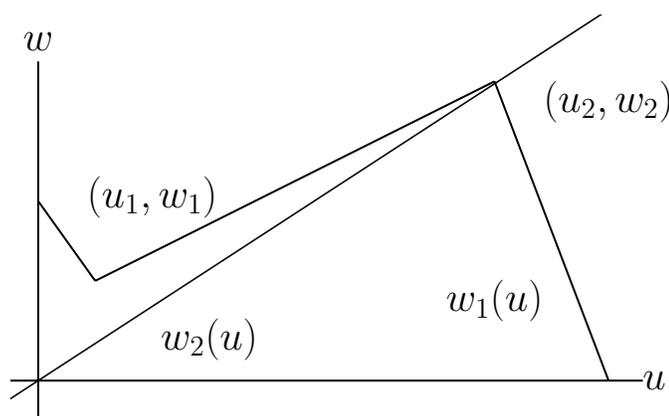
Con este último caso, terminamos el análisis de la dinámica local.

Si observamos la figura 2.20, hay dos vértices en la ceroclina $\tilde{w}_2(u)$, que define el sistema (2.26), en los cuales aquélla no es diferenciable, de manera que vamos a evitar este tipo de intersección entre la ceroclina $w_1(u)$ y $\tilde{w}_2(u)$. Notemos que cuando se da la intersección como se ilustra en la figura 2.19.b), el signo de la traza, $\text{tr}J[u, w](P_1) = m_2 - \gamma$, es constante. Si elegimos el valor $I_a = I_{a1}$, ahora aumentamos el valor de la corriente hasta el valor $I_a = I_{a2}$, la traza no cambia de signo. Las siguientes condiciones establecen el signo de ésta cuando $I_a \in (I_{a1}, I_{a2})$,

- Si $c_2 > f(u_1) + I_a - \gamma u_1$, $\text{tr}J[u, w](P_1) < 0$, para todo valor $I_a \in (I_{a1}, I_{a2})$.
- Si $c_2 = f(u_1) + I_a - \gamma u_1$, $\text{tr}J[u, w](P_1) = 0$, para todo valor $I_a \in (I_{a1}, I_{a2})$.
- Si $c_2 < f(u_1) + I_a - \gamma u_1$, por lo tanto $\text{tr}J[u, w](P_1) > 0$, para todo valor $I_a \in (I_{a1}, I_{a2})$.



$$(a) I_{a1} = mu_1 - f(u_1).$$



$$(b) I_{a2} = mu_2 - f(u_2).$$

Figura 2.20: Los dos tipos de intersección.

Observamos que el parámetro I_a no interviene en el cambio de signo de la traza de la matriz de Jacobi del sistema (2.26) en el intervalo (I_{a1}, I_{a2}) . Sin embargo, notamos que la traza depende del parámetro γ de forma continua.

Consideremos lo siguiente: podemos elegir parámetros para los que se cumpla que $\text{tr}J[u, w](P_1) = m_2 - \gamma > 0$, de tal manera que se da la intersección 2.19.b) elegimos $I_{a*} \in (I_{a1}, I_{a2})$ con I_{a*} fijo. Ahora aumentamos continuamente γ , existe un valor, γ_0 , tal que $\text{tr}J[u, w](P_1) = m_2 - \gamma_0 = 0$, y la intersección es como en la figura 2.19.b). Sigamos aumentando γ , entonces sucede que $\text{tr}J[u, w](P_1) = m_2 - \gamma < 0$; luego el valor de la traza cambia de

positivo a negativo de manera continua. Esto significa que si $I_{a^*} \in (I_{a1}, I_{a2})$ el punto de equilibrio P_1 : cambia de ser inestable a estable.

Resumamos lo anterior de la forma siguiente:

- a) Si $(m_2 - \gamma) > 0$, el punto de equilibrio P_1 es de tipo foco inestable.
- b) Si $(m_2 - \gamma) = 0$, para un valor $\gamma = \gamma_0$, P_1 es de tipo centro.
- c) Si $(m_2 - \gamma) < 0$, P_1 es de tipo foco a.e.l.

En los tres casos anteriores se tiene una intersección como la que ilustra en la figura 2.19.b). Por lo tanto, al utilizar el *Teorema de bifurcación de Hopf* (véase el Apéndice B), tenemos que el sistema (2.26) tiene un ciclo límite cuando se da la intersección 2.19.b), alrededor del punto de equilibrio P_1 de tipo foco inestable, para $\gamma < \gamma_0$. Cuando $\gamma = \gamma_0$ ocurre la bifurcación de Hopf y el punto de equilibrio P_1 es de tipo centro, mientras que para $\gamma > \gamma_0$, P_1 es de tipo foco a.e.l y no hay un ciclo límite. La figura 2.21, contiene el retrato fase del sistema (2.26) el cual se construyó usando un conjunto adecuado de parámetros.

En la figura 2.21.a), el punto P_1 es un foco inestable y podemos ver el ciclo límite, para $I_{a^*} \in (I_{a1}, I_{a2})$ y para el valor de la $\text{tr}J[u, w](P_1) > 0$, es decir $\gamma < \gamma_0$, cuya existencia garantiza el Teorema de bifurcación de Hopf.

En 2.21.b) se ve el retrato fase correspondiente a $\text{tr}J[u, w](P_1) = 0$ es decir, $\gamma = \gamma_0$ con $I_{a^*} \in (I_{a1}, I_{a2})$. Mientras que en la figura 2.21.c) se ve el correspondiente a cuando se satisface la condición $I_{a^*} \in (I_{a1}, I_{a2})$ con $\text{tr}J[u, w](P_1) < 0$.

En esta subsección la aproximación de la ceroclina horizontal $w_1(u) = u(1 - u)(u - a)$ por una función lineal a trozos, permitió hacer el análisis de la dinámica del sistema resultante. Los resultados -sin duda valiosos- no son para el sistema que era de nuestro interés estudiar. Sin embargo, éstos permiten retomar el sistema (2.2) y hacer el correspondiente estudio de carácter más general. Este es el contenido de la siguiente sub-sección.

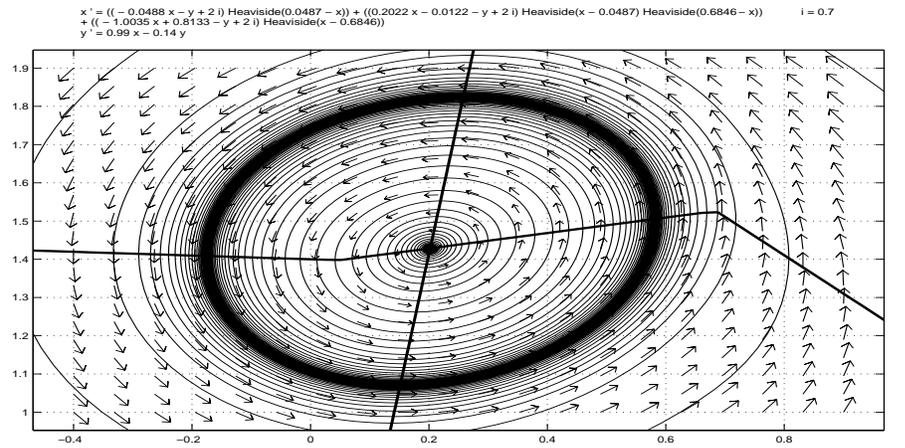
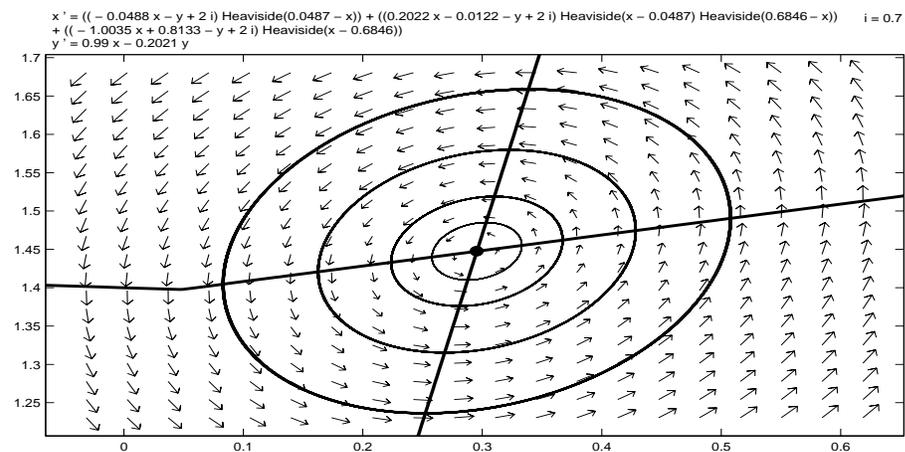
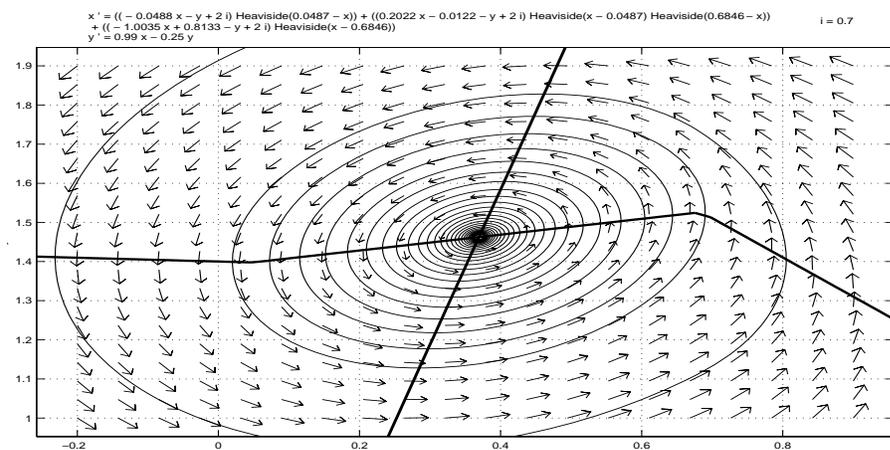
(a) $\gamma < \gamma_0$, con $\gamma=0.14$ y $\gamma_0=0.2021$.(b) Valor de Bifurcación $\gamma=\gamma_0=0.2021$.(c) $\gamma_0 < \gamma$, con $\gamma=0.25$ y $\gamma_0=0.2021$.

Figura 2.21: Aquí ilustramos la bifurcación de Hopf para el modelo de FitzHugh-Nagumo lineal a trozos.

2.4. El modelo de FitzHugh-Nagumo $I_a > 0$

Estamos interesados ahora en estudiar la dinámica del sistema (2.2), con la condición $I_a > 0$, es decir el sistema,

$$\dot{u} = u(1-u)(u-a) - w + I_a \quad (2.27a)$$

$$\dot{w} = bu - \gamma w, \quad (2.27b)$$

a la que agregamos que éste tenga solo un punto de equilibrio P_{I_a} diferente del trivial.

Las ceroclinas de (2.27), son

$$w_1(u) = u(1-u)(u-a) + I_a \text{ y } w_2(u) = \tilde{m}u.$$

Al aumentar el valor de I_a , la ceroclina $w_1(u)$ se traslada verticalmente en la dirección del semieje vertical positivo en I_a unidades. En la figura 2.22 ilustramos tres tipos de intersección de las ceroclinas.

El supuesto de que el sistema (2.27) tenga un solo punto de equilibrio, refleja la consideración fisiológica de que el axón tiene un solo estado de reposo. La siguiente proposición da las condiciones sobre los parámetros para que esto ocurra.

Proposición 2.2 (Pérez [46]) *El sistema (2.27) tiene un único punto de equilibrio si se satisface la siguiente condición, para cada valor I_* de I_a ,*

$$\gamma < \frac{3b}{(1-a+a^2)}.$$

Demostración. Consideramos las ceroclinas $w_1(u)$ y $w_2(u)$ una condición geométrica para que sólo se dé una intersección de la gráfica de éstas, es que para cualquier valor constante I_* de I_a en (2.27) las derivadas $w_1'(u)$ y $w_2'(u)$ cumplan que $w_1'(u) < w_2'(u)$, si $u > 0$, esto significa que si $w_2(u)$ y $w_1(u)$ se intersectan en un punto, ya no vuelven a intersectarse en otro punto. De manera que tenemos,

$$f'(u) < \frac{b}{\gamma},$$

o bien,

$$-3u^2 + 2u(a+1) - a - \frac{b}{\gamma} < 0.$$

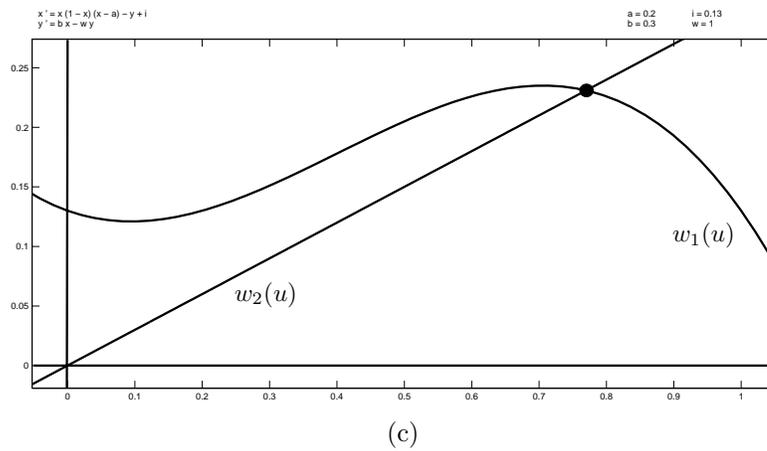
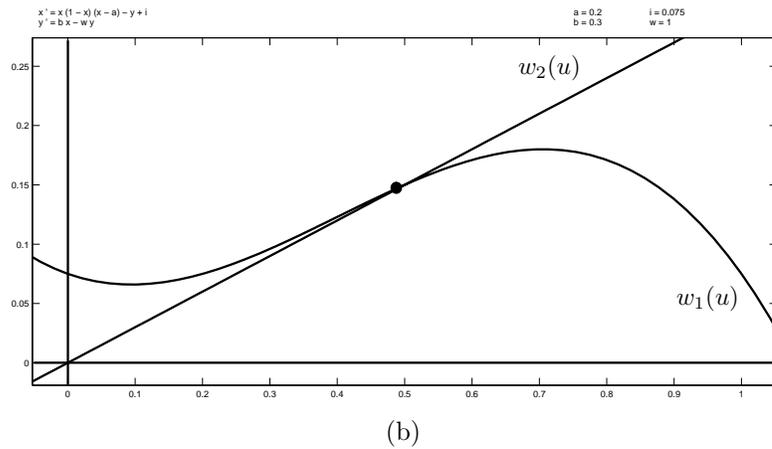
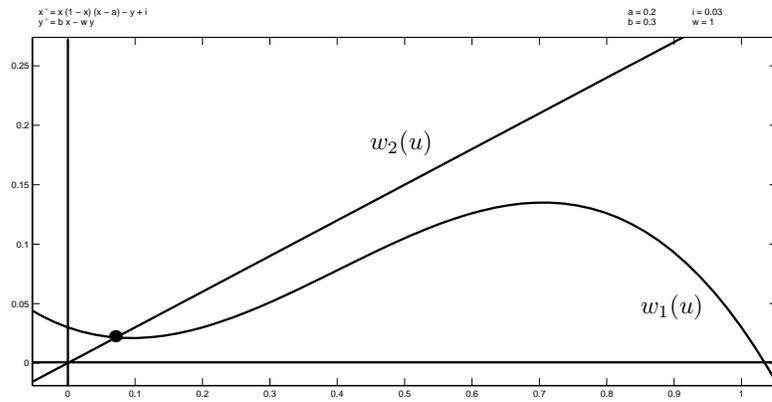


Figura 2.22: Distintas formas de intersección de las ceroclinas del sistema (2.27) para tres valores del parámetro I_a .

La desigualdad anterior define una región del plano, pero nos interesa observar si la condición se cumple en una región más amplia del plano. Luego, supongamos que para algunas u ,

$$-3u^2 + 2u(a+1) - a - \frac{b}{\gamma} = 0,$$

cuyas raíces son,

$$u_{1,2} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - (3)(a + \frac{b}{\gamma})}}{(-3)},$$

éstas provienen de suponer, $w'_1(u) = w'_2(u)$, pero dado que exigimos que esto no suceda, entonces el subradical debe ser menor a cero lo que, a su vez, implica,

$$a^2 - a + 1 - 3\frac{b}{\gamma} < 0,$$

o bien,

$$\gamma < \frac{3b}{1 - a + a^2}.$$

Esto es lo que asegura la proposición. \diamond

Los estudios realizados sobre el sistema (2.27), han demostrado (véase [52]) que cuando I_a aumenta desde cero, la estabilidad del punto de equilibrio P_{I_a} cambia de la siguiente forma: estable, inestable, estable. Lo que haremos aquí es un análisis más cuidadoso estudiando la parte real de los valores propios de la matriz de Jacobi del campo vectorial del sistema (2.27), en el punto de equilibrio P_{I_a} .

Debemos encontrar el punto de equilibrio P_{I_a} y los valores propios de la matriz de Jacobi de (2.27) evaluada en P_{I_a} . Para tal fin, consideramos la intersección de las ceroclinas del sistema (2.27), en particular las u tales que $w_1(u) = w_2(u)$ satisfacen,

$$u^3 - u^2(a+1) + u(a + \tilde{m}) - I_a = 0, \quad (2.28)$$

cuyas raíces las encontramos utilizando el método propuesto por Murray [43], quien sugiere definir las siguientes expresiones,

$$A = 3\zeta = -(a+1), \quad B = 3\vartheta = (a + \tilde{m}) \quad \text{y} \quad C = -I_a,$$

junto con

$$\rho = \varsigma^2 - \vartheta \quad \text{y} \quad \beta = 2\varsigma^3 - 3\varsigma\vartheta + C,$$

donde

$$\varsigma = -\frac{a+1}{3} \quad \text{y} \quad \vartheta = \frac{a+\tilde{m}}{3}.$$

Si usamos la relación de los parámetros a la que se refiere la Proposición 2.2, las raíces del polinomio cúbico (2.28) son tres: dos complejas y una real; nos interesamos por la raíz real, que tiene la forma,

$$u_{I_a} = -2(-\rho)^{\frac{1}{2}} \operatorname{senh}(\theta) - \varsigma,$$

donde,

$$\rho = \frac{(a+1)^2}{9} - \frac{a+\tilde{m}}{3} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{1}{3} \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{\beta}{2(-\rho)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

con,

$$\beta = -2 \left[\frac{a+1}{3} \right]^3 + 3 \left[\frac{(a+1)(a+\tilde{m})}{9} \right] - I_a.$$

Concluimos que el punto de equilibrio es $P_{I_a} = (u_{I_a}, \tilde{m}u_{I_a})$, siendo u_{I_a} raíz real del polinomio cúbico. Evaluamos la matriz de Jacobi del sistema (2.27) en el punto de equilibrio P_{I_a} . Los valores propios de ésta son,

$$\lambda_{1,2}(I_a) = \frac{f'(u_{I_a}) - \gamma \pm \sqrt{(f'(u_{I_a}) - \gamma)^2 - 4(b - f'(u_{I_a})\gamma)}}{2}.$$

Consideramos ahora la traza de la matriz de Jacobi en P_{I_a} que, a su vez, corresponde a la parte real de λ_1 y λ_2 . Ésta es,

$$\operatorname{tr}J[u, w](P_{I_a}) = f'(u_{I_a}) - \gamma.$$

Para un conjunto adecuado de parámetros, su gráfica como función de I_a , se muestra en la figura 2.23. En la cual se puede observar el cambio de signo de aquélla cuando la corriente aumenta desde $I_a=0$ hasta $I_a=8$.

La figura 2.23, sugiere la existencia de dos valores, I_{a1} e I_{a2} , de la corriente aplicada de tal manera que la traza se anula cuando evaluamos en esos dos valores.

Nuevamente, utilizando la figura 2.23, podemos elegir tres rangos de valores de la corriente aplicada I_a para los cuales la traza es negativa, positiva y negativa.

De manera que podemos considerar los dos comportamientos siguientes:

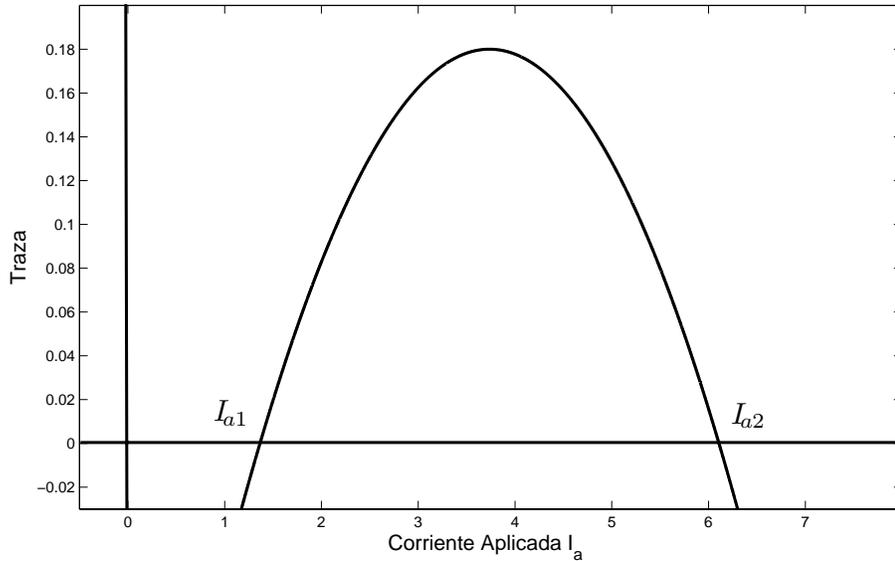


Figura 2.23: Comportamiento del signo de la traza $\text{tr}J[u, w](P_{I_a})$, cuando la corriente aumenta. Aquí se usaron los valores de los parámetros: $a=0.2$, $b=0.99$, $\gamma=0.1$ e $I_a=8$. Los valores estimados de la corriente en los que $\text{tr}J[u, w](P_{I_a})$ cambia de signo son: $I_{a1}=1.4519$ e $I_{a2}=6.284$.

- a) Para $0 < I_a < I_{a1}$, el punto de equilibrio P_{I_a} es de tipo foco a.e.l, es decir la traza de la matriz de Jacobi es negativa. Observe la figura 2.24.a).
- b) Si $I_{a1} = I_a$, P_{I_a} es un equilibrio de tipo centro. Observe la figura 2.24.b).
- c) Si $I_{a1} < I_a < I_{a2}$, P_{I_a} es de tipo foco inestable. Por lo tanto, según el Teorema de bifurcación de Hopf, aparece un ciclo límite, como se ilustra en la figura 2.24.c).

Si la corriente sigue aumentando, tenemos el siguiente comportamiento:

- a) Si $I_{a1} < I_a < I_{a2}$, P_{I_a} es de tipo foco inestable. De nueva cuenta, aparece un ciclo límite. Véase la figura 2.25.a).
- b) Si $I_a = I_{a2}$ tenemos que P_{I_a} es un centro. Obsérvese la figura 2.25.b).
- c) Mientras que para $I_{a2} < I_a$ el punto P_{I_a} es de tipo foco a.e.l. Véase la figura 2.25.c).

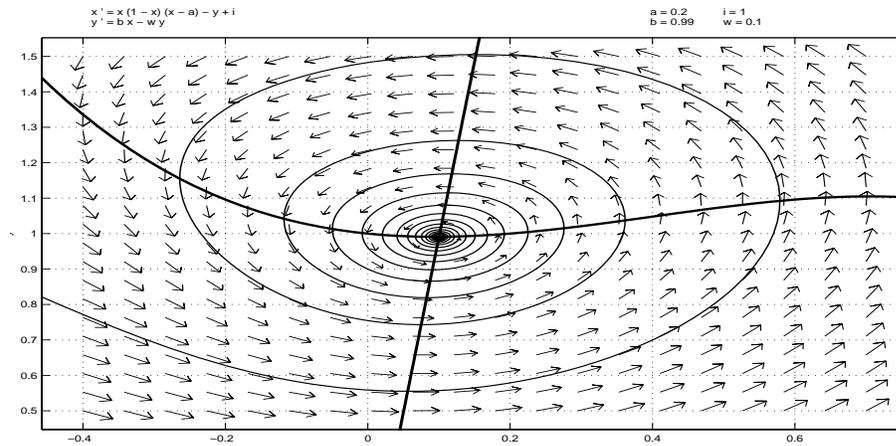
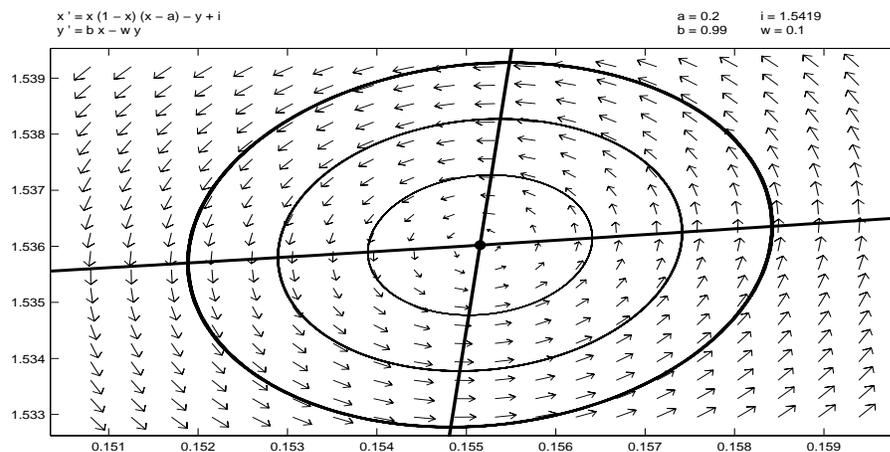
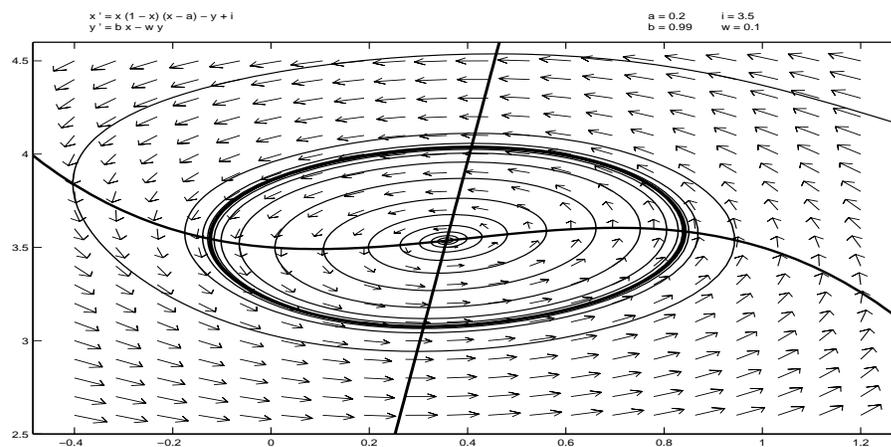
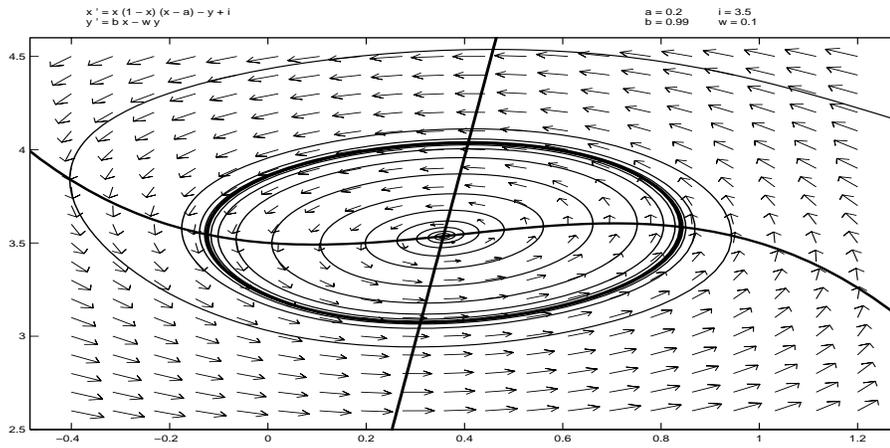
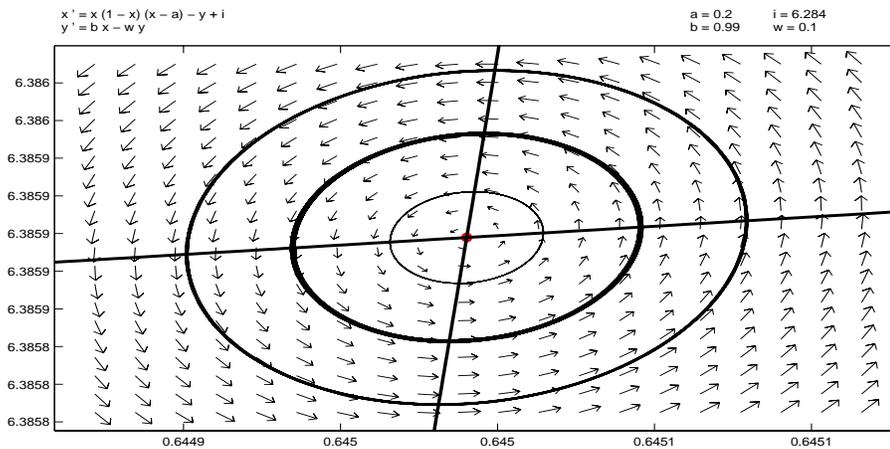
(a) $I_a < I_{a1}$, con $I_a=1$ e $I_{a1}=1.4519$.(b) Valor de Bifurcación $I_a = I_{a1}=1.4519$.(c) Con el valor de $I_{a1} < I_a$, para $I_{a1}=1.4519$ e $I_a=3.5$.

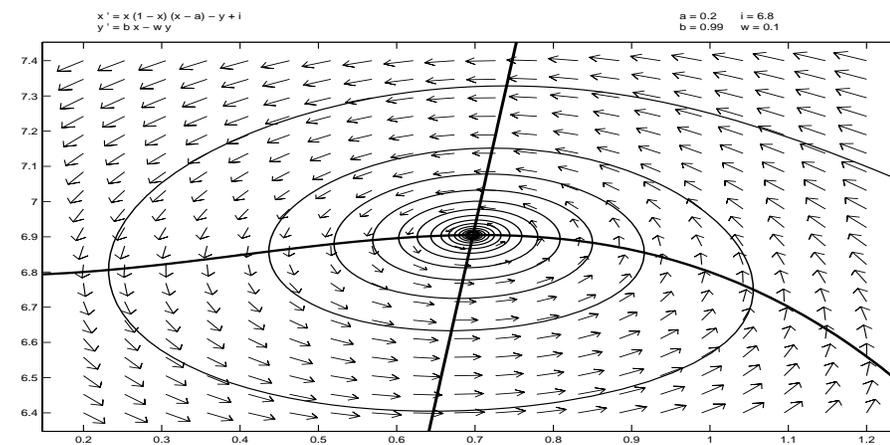
Figura 2.24: La emergencia de un ciclo límite para (2.27) por medio de una bifurcación de Hopf para I_{a1} .



(a) Valor de $I_a < I_{a2}$, con $I_a=3.5$ e $I_{a2}=6.284$.



(b) Valor de bifurcación $I_a = I_{a2}=6.284$.



(c) Para $I_{a2} < I_a$, con $I_{a2}=6.284$ e $I_a=6.8$.

Figura 2.25: Otra bifurcación de Hopf para I_{a2} .

Entonces existen dos valores críticos (de bifurcación) de la corriente para los cuales ocurre una bifurcación de Hopf. Éstos son $I_{a1} = 1.4519$ e $I_{a2} = 6.284$, para parámetros particulares del sistema (2.27).

De la figura 2.23, podemos observar que la derivada de la traza con respecto a la corriente I_a , cambia de signo de positivo a negativo cuando la corriente I_a aumenta, desde $I_a = 0$ hasta $I_a = 8$, para un caso particular de parámetros. Además, notamos que aquélla es positiva en I_{a1} ; mientras que en I_{a2} es negativa.

Ahora estamos en condiciones de demostrar formalmente el surgimiento del ciclo límite de (2.27) a través de una bifurcación de Hopf para los dos valores de la corriente. Esto lo hacemos en la siguiente subsección.

La bifurcación de Hopf

En 1974, Willian C. Troy [52], considerando un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales propuesto por FitzHugh, demostró la existencia de una bifurcación de Hopf para I_{a1} y otra bifurcación de Hopf con I_{a2} , cuando $I_a > 0$. Esto es lo que vamos a demostrar aquí, pero en vez de seguir la presentación hecha por Troy, lo que haremos es echar mano de técnicas y formulaciones más recientes que utilizan formas normales. Dicho sucintamente, éstas dan, salvo transformaciones lineales, la aproximación no lineal de un sistema plano alrededor de un punto de equilibrio no hiperbólico, cuya característica es que los términos de orden superior hasta los que se corta el desarrollo en serie de Taylor, son tales que el sistema no lineal correspondiente, da la dinámica local del sistema original. Lo primero que debemos hacer, es trasladar el punto de equilibrio (u_{I_a}, w_{I_a}) al origen. Para ello consideramos el siguiente cambio de variable,

$$U = u - u_{I_a}, \quad W = w - w_{I_a},$$

de donde $\dot{U} = \dot{u}$ y $\dot{W} = \dot{w}$. A fin de no introducir notación adicional, denotaremos a U y W , por u y w , respectivamente. También consideramos un nuevo parámetro $\mu = I_a - I_{a1,a2}$. El sistema de FitzHugh-Nagumo toma la forma,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u + u_{\mu+I_{a1,a2}}) - (w + w_{\mu+I_{a1,a2}}) + (\mu + I_{a1,a2}), \\ \dot{w} &= b(u + u_{\mu+I_{a1,a2}}) - \gamma(w + w_{\mu+I_{a1,a2}}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

En el origen, la matriz Jacobiana de (2.29) más los términos de orden superior, son

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(u_{\mu+I_{a1,a2}}) & -1 \\ b & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1(u, w, \mu) \\ R_2(u, w, \mu) \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

donde,

$$R_1(u, w, \mu) = \frac{u^2}{2} f''(u_{\mu+I_{a1,a2}}) - u^3 + (\mu + I_{a1,a2})$$

junto con,

$$R_2(u, w, \mu) = bu_{\mu+I_{a1,a2}} - \gamma w_{\mu+I_{a1,a2}}.$$

Vamos a poner el sistema (2.30) en su forma normal, para lo cual utilizamos los valores propios de la matriz de Jacobi de (2.30), en el origen son,

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \frac{f'(u_{\mu+I_{a1,a2}}) - \gamma \pm \sqrt{(\gamma - f'(u_{\mu+I_{a1,a2}}))^2 - 4(b - f'(u_{\mu+I_{a1,a2}})\gamma)}}{2}.$$

Si definimos,

$$\alpha(\mu) = \frac{f'(u_{\mu+I_{a1,a2}}) - \gamma}{2} \quad \text{y} \quad \beta(\mu) = \frac{\sqrt{(\gamma - f'(u_{\mu+I_{a1,a2}}))^2 - 4(b - f'(u_{\mu+I_{a1,a2}})\gamma)}}{2},$$

existen dos valores de la corriente $I_{a1} < I_{a2}$ tal que si $\mu = 0$, $I_a = I_{a1,a2}$, y además,

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \alpha(0) = 0, \quad \beta(0) \neq 0,$$

de tal manera que si evaluamos los valores propios en I_{a1} e I_{a2} , tenemos que,

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm i\beta(0) \quad \text{y} \quad \lambda_{1,2}(0) = \pm i\beta(0).$$

los valores de la corriente son $I_{a1,a2} = f(u_{1,2})$. En donde $u_{1,2}$, provienen de resolver la ecuación $f'(u_{\mu+I_{a1,a2}}) - \gamma = 0$.

Ahora, calculamos la forma normal del sistema de (F-N), para esto se han hecho todos los cálculos necesarios, descritos en Wiggins⁶ [54], página 220. Así, la forma normal de (2.30) alrededor del origen, es

⁶Si el lector lo prefiere puede revisar la tesis de Carrillo [9], página 21.

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \alpha(\mu)u - \beta(\mu)w + (\tilde{a}(\mu)u - b(\mu)w)(u^2 + w^2), \\ \dot{w} &= \beta(\mu)w - \alpha(\mu)u + (b(\mu)u + \tilde{a}(\mu)w)(u^2 + w^2),\end{aligned}\quad (2.31)$$

donde $\tilde{a}(\mu)$ y $b(\mu)$ son,

$$\tilde{a}(\mu) = -\frac{3}{16} \quad \text{y} \quad b(\mu) = \frac{3}{16\beta(\mu)} f'(u_{\mu+I_{a1},a2})(\alpha(\mu) - f'(u_{\mu+I_{a1},a2})).$$

Escribamos al sistema (2.31) en coordenadas polares, usando que $r = \sqrt{u^2 + w^2}$ y $\theta = \arctg(u/w)$,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha(\mu)r - \frac{3}{16}r^3 + O(r^5), \\ \dot{\theta} &= \beta(\mu) + \left[\frac{3}{16\beta} f''(u_{\mu+I_{a1},a2})(\alpha - f'(u_{\mu+I_{a1},a2})) \right] r^2 + O(r^4).\end{aligned}\quad (2.32)$$

Dado que queremos estudiar la dinámica cuando $\mu = 0$, veamos cual es el desarrollo en serie de Taylor del sistema anterior alrededor de $\mu = 0$.

Recuérdese, tenemos dos valores de la corriente I_{a1} e I_{a2} , para los cuales $\mu = 0$. De manera que debemos calcular la serie de Taylor alrededor de los valores I_{a1} e I_{a2} , Consideremos los siguientes dos casos,

Caso 1. Primero lo hacemos alrededor de $\mu = I_a - I_{a1} = 0$,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= d\mu r + \tilde{a}r^3, \\ \dot{\theta} &= \beta + c\mu + br^2,\end{aligned}\quad (2.33)$$

donde $\alpha'(0) = d$, $\tilde{a}(0) = \tilde{a}$, $\beta(0) = \beta$, $\beta'(0) = c$ y $b(0) = b$. Podemos ver que cuando $I_a = I_{a1}$, $\alpha(0) = 0$ y

$$\tilde{a} = -\frac{3}{16} < 0.$$

Estamos interesados en el signo de $d(\mu)$, cuando $\mu = 0$, el parámetro d , se calcula así,

$$d = \left. \frac{Re(\lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=0},$$

haciendo los cálculos necesarios,

$$\frac{Re(\lambda(\mu))}{d\mu} = + \left(-3u(\mu) + (1+a) \right) \frac{\cosh(\theta(\mu))}{\sqrt{\left(\frac{\beta(\mu)}{2(-\rho)^{1/2}} \right)^2 + 1}},$$

evaluando en $\mu = 0$, es decir $I_a = I_{a1}$ y observando que

$$u(0) = \frac{1+a - \sqrt{(a-1)^2 + (a-3\gamma)}}{3},$$

es la abscisa del punto de equilibrio, para I_{a1} , tenemos que,

$$\left. \frac{Re(\lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=0} = + \frac{\sqrt{(a-1)^2 + (a-3\gamma)}}{3} \frac{\cosh(\theta(0))}{\sqrt{\left(\frac{\beta(0)}{2(-\rho)^{1/2}} \right)^2 + 1}},$$

por lo tanto $d(0) > 0$.

Caso 2. Calculamos la serie de Taylor de (2.32) alrededor de $\mu = I_a - I_{a2} = 0$,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= d\mu r + \tilde{a}r^3, \\ \dot{\theta} &= \beta + c\mu + br^2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde $\alpha'(0) = d$, $\tilde{a}(0) = \tilde{a}$, $\beta(0) = \beta$, $\beta'(0) = c$ y $b(0) = b$, tenemos que,

$$\tilde{a} = -\frac{3}{16} < 0,$$

nuevamente nos interesa averiguar el signo del parámetro d . Usando que,

$$\frac{Re(\lambda(\mu))}{d\mu} = + \left(-3u(\mu) + (1+a) \right) \frac{\cosh(\theta(\mu))}{\sqrt{\left(\frac{\beta(\mu)}{2(-\rho)^{1/2}} \right)^2 + 1}},$$

evaluando en $\mu = 0$, es decir $I_a = I_{a2}$, se obtiene que,

$$u(0) = \frac{1+a + \sqrt{(a-1)^2 + (a-3\gamma)}}{3},$$

luego,

$$\left. \frac{Re(\lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=0} = -\frac{\sqrt{(a-1)^2 + (a-3\gamma)}}{3} \frac{\cosh(\theta(0))}{\sqrt{\left(\frac{\beta(0)}{2(-\rho)^{1/2}}\right)^2 + 1}},$$

obtenemos que $d(0) < 0$.

Los dos casos anteriores podemos escribirlos en términos de la corriente I_a , de la forma siguiente:

- a) Existe un valor de la corriente I_{a1} para el cual, $d(I_{a1}) > 0$, $\tilde{a} < 0$, así

$$\begin{aligned} I_{a1} = f(u_1) &= \left(\frac{1+a}{3} - \sqrt{\frac{\delta_0}{3}}\right)^3 - (1+a)\left(\frac{1+a}{3} - \sqrt{\frac{\delta_0}{3}}\right)^2 \\ &\quad + (a + \tilde{m})\left(\frac{1+a}{3} - \sqrt{\frac{\delta_0}{3}}\right). \end{aligned}$$

- b) Hay un valor I_{a2} de la corriente que satisface $d(I_{a2}) < 0$, $\tilde{a} < 0$ con,

$$\begin{aligned} I_{a2} = f(u_2) &= \left(\frac{1+a}{3} + \sqrt{\frac{\delta_0}{3}}\right)^3 - (1+a)\left(\frac{1+a}{3} + \sqrt{\frac{\delta_0}{3}}\right)^2 \\ &\quad + (a + \tilde{m})\left(\frac{1+a}{3} + \sqrt{\frac{\delta_0}{3}}\right). \end{aligned}$$

En a) y b),

$$\delta_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma.$$

Concluimos que $0 < I_{a1} < I_{a2}$, por lo que podemos elegir un conjunto de parámetros para los que suceda que $\tilde{a} < 0$, $d > 0$ y $\tilde{a} < 0$, $d < 0$. Después, utilizando los resultados de estabilidad que pueden consultarse en el Apéndice B se sigue que,

- a) Si $d > 0$, $\tilde{a} < 0$, el punto de equilibrio P_{I_a} es a.e.l para $I_a < I_{a1}$ e inestable para $I_{a1} < I_a$, de tal forma que existe un ciclo límite asintóticamente estable para $I_{a1} < I_a$. Existe un bifurcación de Hopf para I_{a1} .

- b) Si $d < 0$, $\tilde{a} < 0$, P_{I_a} es a.e.l para $I_{a2} < I_a$ e inestable para $I_a < I_{a2}$. Hay un ciclo límite asintóticamente estable para $I_a < I_{a2}$. Hay una bifurcación de Hopf para I_{a2} .

Hemos demostrado la existencia de una bifurcación de Hopf para un valor de la corriente I_{a1} y otra bifurcación de Hopf para otro valor de la corriente I_{a2} , para el sistema de FitzHugh-Nagumo (2.27). Al tipo particular bifurcación de Hopf que hemos obtenido cuando el parámetro $\tilde{a} < 0$ se le llama *bifurcación supercrítica*.

Capítulo 3

La dinámica espacio-temporal

3.1. Introducción

En el Capítulo 2 estudiamos la dinámica temporal del modelo de FitzHugh-Nagumo (2.1). Ahora, nos interesa hacer el análisis cuando en dicho sistema el potencial transmembránico depende tanto de la variable espacial, como de la variable temporal. La característica física que tiene el movimiento de los impulsos nerviosos a través del axón: viajar a velocidad constante conservando su forma, hace que éstos puedan ser modelados matemáticamente por un tipo particular de soluciones del sistema de reacción-difusión que los describe: *las ondas viajeras*. El análisis de su existencia, nos lleva a transformar este sistema no lineal de ecuaciones diferenciales parciales en un sistema, de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal. Posteriormente, para el caso en el que la corriente aplicada, I_a , es nula, damos las condiciones para la existencia de una trayectoria homoclínica tridimensional. En la literatura consultada, encontramos que la demostración de la existencia de dicha trayectoria homoclínica, puede hacerse usando varias técnicas: desde unas de tipo topológico hasta otras de carácter numérico, pasando por métodos de perturbación. Aquí usamos la técnica de *bloques aislantes*¹. Como veremos, la trayectoria del sistema de EDO escrito en las coordenadas de la onda viajera, que es consistente con el impulso nervioso que viaja, es precisamente una trayectoria homoclínica en tres dimensiones.

¹En el Apéndice C el lector encontrará una presentación conceptual de esta técnica.

3.1.1. Las ondas viajeras

Dicho coloquialmente, una *onda viajera* es una onda que viaja por el espacio sin cambiar de forma y su velocidad de propagación es constante. En este trabajo la onda viajera representa a la diferencia de potencial transmembránico el cual viaja, a través del axón neuronal. Para la definición formal de aquella, consideramos la ecuación de reacción-difusión en una dimensión,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

donde u es el potencial, D es el coeficiente de difusión y la función f es el término fuente.

Definición 3.1 Una solución $u(x, t)$ de la ecuación (3.1) en $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, es llamada **onda viajera** si existe una constante c y una función ϕ tal que u se exprese como,

$$u(x, t) = \phi(x - ct).$$

Más adelante se precisarán las condiciones de frontera que ha de satisfacer ϕ .

La constante c en la Definición 3.1, es la velocidad de propagación de la onda. Si $c > 0$ la onda se mueve de izquierda a derecha; mientras que si $c < 0$ la onda viaja de derecha a izquierda.

3.2. La trayectoria homoclínica

En los análisis realizados en el Capítulo 2 vimos la riqueza dinámica que encierra el sistema de FitzHugh-Nagumo, cuando se le estudia bajo la premisa de fijación de voltaje. Si esta premisa se suprime, será importante el cambio de las variables de estado cuando ambas, el espacio y el tiempo, cambian. Recordamos que al reescalar apropiadamente en la ecuación (1.34) el coeficiente de difusión es igual a uno y para caso particular de $f(u)$, el sistema que nos interesa es,

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u)(u - a) - w + I_a \quad (3.2a)$$

$$w_t = bu - \gamma w, \quad (3.2b)$$

u_t y w_t , denotan la derivada parcial de u y w respecto al tiempo; mientras que u_{xx} representa la segunda derivada parcial de u respecto a la variable espacial. Los parámetros a, b y γ son constantes que toman valores positivos, $a \in (0, 1/2)$; mientras que I_a es la corriente aplicada.

Estamos interesados en averiguar la existencia de soluciones de tipo onda viajera para el sistema (3.2). Para el análisis, primero consideramos la situación en la que $I_a = 0$.

Supongamos que existen $c < 0$ y funciones ϕ y ψ tales que la pareja,

$$u(x, t) = \phi(x - ct), \quad w(x, t) = \psi(x - ct), \quad (3.3)$$

es solución de (3.2), cumpliendo las condiciones de frontera,

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \psi(\xi) = 0, \quad (3.4)$$

donde $\xi = x - ct$. Sustituyendo (3.3) en (3.2), llegamos a que, para todo $\xi \in (-\infty, \infty)$, ϕ y ψ deben satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$-c\phi' = \phi'' + \phi(1 - \phi)(\phi - a) - \psi \quad (3.5a)$$

$$-c\psi' = b\phi - \gamma\psi, \quad (3.5b)$$

aquí $' = \frac{d}{d\xi}$. Si denotamos por $v = \phi'$, entonces el sistema (3.5) se transforma en el sistema no lineal de tres ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\phi' = v \quad (3.6a)$$

$$v' = -cv - \phi(1 - \phi)(\phi - a) + \psi \quad (3.6b)$$

$$\psi' = -\frac{b}{c}(\phi - \frac{\gamma}{b}\psi). \quad (3.6c)$$

Aquí conviene simplificar la notación. Para ello introducimos ϵ y $\tilde{\gamma}$ como $\epsilon = b$ y $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{b}$, respectivamente. En estos términos, el sistema anterior se reescribe así,

$$\phi' = v \quad (3.7a)$$

$$v' = -cv - \phi(1 - \phi)(\phi - a) + \psi \quad (3.7b)$$

$$\psi' = -\frac{\epsilon}{c}(\phi - \tilde{\gamma}\psi). \quad (3.7c)$$

Observe que el sistema (3.2) de principio puede tener hasta tres soluciones estacionarias (que no cambian con el tiempo) y homogéneas (que no cambian

con la variable espacial). A saber, las que provienen de la intersección -si es que se da más de una- de las ceroclinas $u(1-u)(u-a) - w = 0$ y $bu - \gamma w = 0$. Aquí se escogen los parámetros de manera que el sistema (3.7) tenga un único punto de equilibrio: el origen de coordenadas.

Nótese que, además de la no linealidad, en el sistema (3.7) aparecen parámetros los cuales al variar, hacen que la dinámica de éste sea rica. De esta posible variedad dinámica, desde el punto de vista del problema en el que estamos interesados, sólo una es consistente con él. A saber: averiguar la existencia de una trayectoria, $\vec{x}(\xi) = (\phi(\xi), v(\xi), \psi(\xi))$, de (3.7) tal que $\vec{x}(\xi)$ tienda al origen tanto para “adelante”, como para “atrás” es decir, cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, respectivamente. Tales trayectorias son llamadas, trayectorias *homoclínicas* del sistema en cuestión. La razón de buscar una trayectoria homoclínica, es porque ésta refleja el hecho de que la neurona se encuentra en el estado de reposo antes y después del estímulo que la excitó. Ahora bien, debemos enunciar una condición para que el sistema (3.7) tenga un único punto de equilibrio. Para ello, debemos obtener los puntos de equilibrio de éste, los cuales son

$$P_i = \left(\phi_i, 0, \frac{1}{\tilde{\gamma}} \phi_i \right) \text{ con } i = \{0, 1, 2.\}, \quad (3.8)$$

donde ϕ_i satisfacen la igualdad

$$\phi \left[\phi^2 - \phi(a+1) + a + \tilde{\gamma} \right] = 0. \quad (3.9)$$

Si $\phi = 0$, tenemos el punto de equilibrio $P_0 = (0, 0, 0)$. A fin de garantizar su unicidad pedimos que la raíces

$$\phi_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4\tilde{\gamma}}}{2}, \quad (3.10)$$

de

$$\phi^2 - \phi(a+1) + a + \tilde{\gamma} = 0, \quad (3.11)$$

sean complejas. Lo cual sucede si imponemos la siguiente condición,

$$[(a-1)^2 - 4\tilde{\gamma}] < 0, \quad (3.12)$$

en el subradical que aparece en (3.10). Así, que si elegimos $\tilde{\gamma} > 0$ “suficientemente grande”, garantizamos que la desigualdad anterior se satisfaga. Ahora

bien, dado que $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\epsilon}$, si el parámetro γ es fijo, podemos elegir un valor de $\epsilon > 0$ “suficientemente pequeño” para que se cumpla la condición (3.12). En esas condiciones, el sistema (3.7) tendría como único punto de equilibrio al origen de coordenadas.

El objetivo de este capítulo es demostrar la existencia de una trayectoria homoclínica para el sistema (3.7). En esta presentación, usaremos un método analítico; para ello seguiremos muy de cerca el artículo de Carpenter [10] y la tesis de Durand [14]. En estas referencias se demuestra la existencia de trayectorias homoclínicas para el sistema (3.7) usando la técnica de *bloques aislantes*. La redacción de las sub-secciones 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3, se basa en el trabajo de Durand. Así, lo que presentamos aquí es, salvo algunos detalles de estilo, un resumen de éste.

3.2.1. Análisis local para $\epsilon > 0$

Raíces del polinomio característico y el espacio fase

La dinámica local alrededor de un equilibrio del sistema (3.7) la da el sistema lineal que lo aproxima, el cual lo define la matriz de Jacobi del campo vectorial, evaluada en el origen. Ésta es,

$$J[P_0] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & -c & 1 \\ -\frac{\epsilon}{c} & 0 & \frac{\epsilon\tilde{\gamma}}{c} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

cuyo polinomio característico es,

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2\left(c - \frac{\epsilon\tilde{\gamma}}{c}\right) - \lambda(a + \epsilon\tilde{\gamma}) + \frac{\epsilon}{c}(1 + a\tilde{\gamma}) = 0. \quad (3.14)$$

Utilizando la *regla de los signos de Descartes*², uno se convence de que $P(\lambda)$ tiene exactamente una raíz real positiva y las otras dos pueden ser complejas cuya parte real es negativa o reales simples. Esto es así por lo siguiente. Recordemos que $c < 0$ y veamos el signo de los coeficientes de las potencias de λ en (3.14): a) el de λ^3 , es 1, b) para λ^2 tenemos que $(c - \epsilon\tilde{\gamma}/c) < 0$, siempre que $(c^2 - \epsilon\tilde{\gamma}) > 0$, c) el coeficiente de λ : $-(\epsilon\tilde{\gamma} + a)$, es negativo,

²Como un ejemplo si consideramos el polinomio $\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_1\lambda + a_0=0$, $a_i > 0$, para $i=0,1,2$. Hay dos cambios de signo en la sucesión de los coeficientes, entonces hay dos raíces con parte real igual a cero o positiva. Si definimos $\lambda = -\omega$, el polinomio se convierte en $\omega^3 - a_2\omega^2 - a_1\omega - a_0=0$, el cual tiene un cambio signo entonces existe a lo más una raíz positiva ω . Esto significa que existe sólo una raíz negativa para el polinomio original.

esto por la forma como se definen los parámetros, d) por último, el término independiente, $(1 + a\tilde{\gamma})\epsilon/c$, es negativo. De manera que el único coeficiente positivo de (3.14) es el que corresponde a λ^3 , entonces sólo hay un cambio de signo en la sucesión de coeficientes de λ en (3.14). Por lo tanto, según la regla de Descartes, existe a lo más una raíz positiva real.

La siguiente proposición precisa el tipo de raíces de $P(\lambda)$.

Proposición 3.1 (Pérez [46]) *Si los coeficientes de las potencias de λ en (3.14) cumplen las siguientes condiciones,*

$$\left(c - \frac{\epsilon\tilde{\gamma}}{c}\right) < 0, \quad -(a + \tilde{\gamma}\epsilon) < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\epsilon}{c}(1 + a\tilde{\gamma}) < 0,$$

para $c < 0$, entonces el polinomio (3.14) posee una raíz real positiva, las otras dos raíces son complejas con parte real negativa; mientras que si las tres raíces son reales, entonces una es positiva y las otras dos son negativas.

Demostración. Por el teorema fundamental del algebra, (3.14) tiene exactamente tres raíces, denotémoslas así $\lambda_{1,2,3}$. Éstas satisfacen las siguientes igualdades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\left(c - \frac{\epsilon\tilde{\gamma}}{c}\right) \quad (3.15a)$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_3\lambda_2 = -(1 + \tilde{\gamma}a) \quad (3.15b)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{\epsilon}{c}(1 + a\tilde{\gamma}). \quad (3.15c)$$

Ahora, dado que $P(\lambda)$ es un polinomio cúbico, posee al menos una raíz real. Sin pérdida de generalidad, denotémosla por λ_3 ; y a las dos restantes por, λ_1 y λ_2 , respectivamente. Entonces pueden suceder los siguientes casos:

a) Si λ_1 y λ_2 son números complejos, entonces $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ y por lo tanto

$$\lambda_1\lambda_2 = |\lambda_1|^2,$$

luego,

$$-\frac{\epsilon}{c}(1 + a\tilde{\gamma}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_3 |\lambda_1|^2 > 0,$$

de la desigualdad anterior, $\lambda_3 > 0$; mientras que de la condición 3.15.b) obtenemos,

$$\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) = -\lambda_1\lambda_2 - (1 + \tilde{\gamma}a) < 0,$$

usando que $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\text{Re}(\lambda_1)$, se concluye $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) < 0$.

- b) Si las tres raíces son reales, entonces de la condición 3.15.c) se infiere que λ_3 es positiva y las otras dos, $\lambda_{1,2}$, son negativas. Con esto terminamos la demostración. \diamond

Si ahora usamos, la tabla B.1 de Murray [43] página 511, podemos escribir la forma explícita de las raíces. Para ello, Murray sugiere definir los parámetros \tilde{A} , \tilde{a} , \tilde{B} y \tilde{b} utilizando los coeficientes del polinomio característico (3.14),

$$\tilde{A} = 3\tilde{a} = \left(c - \frac{\epsilon\tilde{\gamma}}{c}\right), \quad \tilde{B} = 3\tilde{b} = -(a + \epsilon\tilde{\gamma}).$$

De éstas, al resolver respecto a \tilde{a} y \tilde{b} , se obtiene

$$\tilde{a} = \frac{c}{3} - \frac{\epsilon\tilde{\gamma}}{3c} \quad \text{y} \quad \tilde{b} = -\frac{(a + \epsilon\tilde{\gamma})}{3}.$$

Luego, introduzcamos la siguiente notación

$$\tilde{\alpha} = (\tilde{a})^2 - \tilde{b}, \quad \tilde{\beta} = 2(\tilde{a})^3 - 3\tilde{a}\tilde{b} + C, \quad C = \frac{\epsilon}{c}(1 + a\tilde{\gamma}). \quad (3.16)$$

Dado que nos interesa saber el comportamiento de las raíces para $\epsilon > 0$, “suficientemente pequeño” y $c < 0$, a través de condiciones impuestas a los parámetros $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$, notamos que para $\epsilon \approx 0$ y $c < 0$ se cumple,

$$\tilde{\beta} \approx \frac{2c^3}{27} + ca < 0 \quad \text{y} \quad \tilde{\alpha} \approx \frac{c^2}{9} + \frac{a}{3} > 0. \quad (3.17)$$

- a) **Tres raíces reales y diferentes.** Recuerde el lector que en la Proposición 3.1, (para $\epsilon > 0$) se demostró que existe una raíz real positiva y las otras dos tienen parte real negativa. La condición para que las raíces sean reales se deduce a partir de la tabla B.1 de Murray [43]. De ella tenemos³,

$$|\tilde{\beta}| \leq 2(\tilde{\alpha})^{3/2}. \quad (3.18)$$

Con esta condición el polinomio característico (3.14) tiene las siguientes tres raíces reales,

$$\lambda_1 = 2(\tilde{\alpha})^{1/2} \text{sen}(\vartheta) - \tilde{a}, \quad \lambda_2 = -2(\tilde{\alpha})^{1/2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right) - \tilde{a},$$

³En el Apéndice E, escribimos todas las posibles combinaciones de valores que pueden tener las raíces del polinomio característico (3.14).

y

$$\lambda_3 = 2(\tilde{\alpha})^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right) - \tilde{a}, \quad (3.19)$$

donde,

$$\vartheta = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\tilde{\beta}}{2(\tilde{\alpha})^{1/2}}\right), \quad (3.20)$$

siempre que ϑ satisfaga la condición

$$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]. \quad (3.21)$$

La conclusión es que el polinomio (3.14) tiene tres raíces reales⁴, cumpliendo la siguiente relación de orden,

$$\lambda_3 > 0, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0. \quad (3.23)$$

El vector propio asociado, al valor propio positivo, es

$$\vec{\mathcal{V}}_3 = (\mathcal{V}_{31}, \mathcal{V}_{32}, \mathcal{V}_{33}), \quad (3.24a)$$

con

$$\mathcal{V}_{31} = \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\epsilon\gamma}{c} - \lambda_3 \right) \left(\frac{\lambda_3 c}{\epsilon} \right) \left(c + \lambda_3 \right) - 1 \right], \quad (3.24b)$$

$$\mathcal{V}_{32} = \left(\frac{\epsilon\gamma}{c} - \lambda_3 \right) \left(\frac{\lambda_3 c}{\epsilon} \right), \quad (3.24c)$$

$$\mathcal{V}_{33} = 1; \quad (3.24d)$$

⁴Nótese que cuando el parámetro $\epsilon = 0$, tenemos que,

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_{2,3} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a}}{2}. \quad (3.22)$$

En estas condiciones, el sistema (3.7) es no-hiperbólico. Por el *Teorema de Hartman-Grobman* la dinámica local del sistema (3.7), localmente no es topológicamente equivalente a la del sistema linealizado. De manera que a partir del análisis lineal local, no podemos determinar el retrato fase local del sistema no lineal.

mientras que cuando se pide la condición $\mathcal{V}_{32}(c + \lambda_3) > 1$, con $c < 0$, el vector propio apunta hacia el primer octante. Los correspondientes vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 , tienen la forma,

$$\vec{\mathcal{V}}_i = \left(\mathcal{V}_{i1}, \mathcal{V}_{i2}, \mathcal{V}_{i3} \right), \quad \text{con } i = 1, 2. \quad (3.25)$$

donde las tres componentes, $(\mathcal{V}_{i1}, \mathcal{V}_{i2}, \mathcal{V}_{i3})$, son análogas a (3.24).

Ahora nos interesa observar el comportamiento de las trayectorias de (3.7) alrededor del origen. Para ello, introduzcamos la siguiente notación

$$\vec{U}(\xi) = \begin{pmatrix} \phi(\xi) \\ v(\xi) \\ \psi(\xi) \end{pmatrix}, \quad \vec{G}(\vec{U}(\xi)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(1+a)\phi^2(\xi) + \phi^3(\xi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

donde $\xi = x - ct$, con $c < 0$. De manera que podemos escribir,

$$\dot{\vec{U}}(\xi) = A\vec{U}(\xi) + \vec{G}(\vec{U}(\xi)), \quad (3.27)$$

donde, $A = J[P_0]$, es la matriz de Jacobi de (3.7) evaluada en el origen. Consideramos la matriz de $Q \in M_{3 \times 3}$ cuyas columnas son los vectores propios asociados a λ_1 , λ_2 y λ_3 . Claramente $Q \in M_{3 \times 3}$, es invertible pues sus columnas son vectores linealmente independientes. Ahora, definiendo $\vec{Y}(\xi)$ de manera que $\vec{Y}(\xi) = Q^{-1}\vec{U}(\xi)$, ésta transforma al sistema (3.27) a su forma canónica. Ésta es

$$\dot{\vec{Y}}(\xi) = B\vec{Y}(\xi) + Q^{-1}\vec{G}(Q\vec{Y}(\xi)), \quad (3.28)$$

donde, para este caso

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Luego, por ser el origen punto de equilibrio hipérbolico entonces, según el *Teorema de Hartman-Grobman* (véase el Apéndice B), la dinámica

local del sistema no lineal (3.7) en una vecindad del origen, es topológicamente equivalente a la dinámica del sistema lineal que lo aproxima. La dinámica lineal alrededor del origen de (3.27) la da el sistema desacoplado,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \lambda_3 y_3 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

La solución de (3.30) que parte de la condición inicial, $(y_1^0, y_2^0, y_3^0)^\top$, es

$$\begin{bmatrix} y_1(\xi) \\ y_2(\xi) \\ y_3(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 e^{\lambda_1 \xi} \\ y_2^0 e^{\lambda_2 \xi} \\ y_3^0 e^{\lambda_3 \xi} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

La dinámica alrededor del origen, está caracterizada así:

- a) El sistema (3.7), posee un variedad inestable, $W_c^u(P_0)$ de dimensión uno, una de cuyas ramas apunta al octante positivo. Su aproximación lineal $E^u(P_0)$, es la recta que pasa por el origen y es paralela al vector propio \vec{V}_3 correspondiente al valor propio real positivo λ_3 . La trayectoria $\vec{x}(\xi)$ que parte de la condición inicial \vec{x}_0 en la variedad inestable, se aleja del origen cuando $\xi \rightarrow \infty$.
- b) Además (3.7), tiene una variedad estable, $W_c^s(P_0)$, de dimensión dos cuya aproximación lineal es un plano $E^s(P_0)$, que pasando por el origen, es generado por los vectores propios \vec{V}_1 y \vec{V}_2 , asociados a los valores propios reales negativos λ_1 y λ_2 . Es así que una trayectoria $\vec{x}(\xi)$ de (3.7) que parte de una condición inicial \vec{x}_0 sobre la variedad estable, tiende al origen cuando $\xi \rightarrow \infty$, siendo éste de tipo nodo.

La existencia de las variedades estable $W_c^s(P_0)$ e inestable $W_c^u(P_0)$, la garantiza el Teorema B.2, (véase el Apéndice B).

Con base en el análisis local anterior, realizaremos una simulación numérica⁵ alrededor del origen con la finalidad de obtener el espacio fase local del sistema (3.30). Aquél se ve en la figura 3.1.

⁵Los espacios fase que se ven en la figura 3.1 y 3.2 fueron realizados con el software MATLAB, rutina ode45.

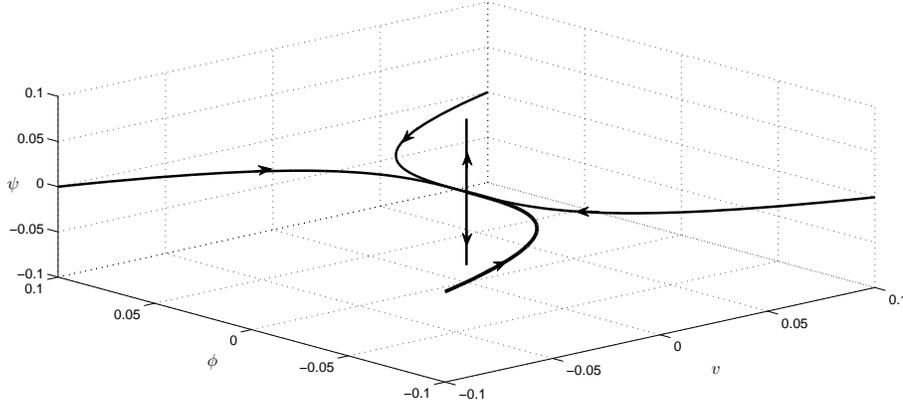


Figura 3.1: Dinámica local (alrededor del origen) de (3.7), en el caso en el que los tres valores propios son reales y diferentes: dos negativos y uno positivo.

- b) **Un raíz real y dos complejas.** Usando nuevamente la Tabla de Murray, se cumple la siguiente condición cuando $\epsilon > 0$ y “muy pequeña”,

$$\tilde{\beta} < -2(\tilde{\alpha})^{3/2}, \quad (3.32)$$

los valores propios asociados tienen la forma,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\tilde{\alpha})^{1/2} \cosh(\tilde{\vartheta}) - \tilde{a} + i(3\tilde{\alpha})^{1/2} \sinh(\tilde{\vartheta}), \\ \lambda_2 &= -(\tilde{\alpha})^{1/2} \cosh(\tilde{\vartheta}) - \tilde{a} - i(3\tilde{\alpha})^{1/2} \sinh(\tilde{\vartheta}), \\ \lambda_3 &= 2(\tilde{\alpha})^{1/2} \cosh(\tilde{\vartheta}) - \tilde{a}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Donde,

$$\tilde{\vartheta} = \frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{|\tilde{\beta}|}{2(\tilde{\alpha})^{1/2}} \right), \quad (3.34)$$

los valores propios se caracterizan así,

$$\lambda_3 > 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0. \quad (3.35)$$

El vector propio asociado a λ_3 se escribe, como

$$\vec{\mathcal{V}}_3 = (\mathcal{V}_{31}, \mathcal{V}_{32}, \mathcal{V}_{33}), \quad (3.36)$$

donde las coordenadas son análogas a 3.24.b), 3.24.c) y 3.24.d). Nótese que, las tres componentes del vector \vec{v}_3 , son positivas. Mientras que los otros dos vectores propios complejos, tienen la forma

$$\vec{v}_1 = \vec{U}_1 + i\vec{W}_1, \quad \vec{v}_2 = \vec{U}_1 - i\vec{W}_1, \quad \text{donde } \vec{U}_1 \text{ y } \vec{W}_1 \in \mathbb{R}^3. \quad (3.37)$$

Tenemos que,

$$\vec{v}_1 = (V_{11}, V_{12}, 1) + i(W_{11}, W_{12}, 0). \quad (3.38)$$

Si denotamos por $\alpha_1 = \text{Re}(\lambda_1)$ y $\beta_1 = \text{Im}(\lambda_1)$. En (3.38)

$$V_{11} = \frac{1}{a} \left[-\frac{c\alpha_1^2}{\epsilon} + \frac{3\alpha_1\beta_1^2c}{\epsilon} + \alpha_1^2 \left(\gamma - \frac{c^2}{\epsilon} \right) - \beta_1^2 \left(\gamma - \frac{c^2}{\epsilon} \right) + c\gamma\alpha_1 - 1 \right] \quad (3.39)$$

$$W_{11} = \left[-\frac{3\alpha_1^2\beta_1c}{\epsilon} + \frac{\beta_1^2c}{\epsilon} + 2\alpha_1\beta_1 \left(\gamma - \frac{c^2}{\epsilon} \right) + c\gamma\beta_1 \right]. \quad (3.40)$$

Mientras que,

$$V_{12} = \left[\gamma\alpha_1 - \frac{\alpha_1^2c}{\epsilon} + \frac{\beta_1^2c}{\epsilon} \right], \quad (3.41)$$

$$W_{12} = \left[\gamma\beta_1 - \frac{2\alpha_1\beta_1c}{\epsilon} \right]. \quad (3.42)$$

En este caso la forma canónica del sistema lineal que aparece en (3.27), lo define la matriz B , siendo ésta

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Así, el sistema lineal queda desacoplado parcialmente como

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 \\ -\beta_1 y_1 + \alpha_1 y_2 \\ \lambda_3 y_3 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

La solución de (3.44) que parte de la condición inicial, $(y_1^0, y_2^0, y_3^0)^\top$, es

$$\begin{bmatrix} y_1(\xi) \\ y_2(\xi) \\ y_3(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 \xi} [y_1^0 \cos(\beta_1 \xi) + y_2^0 \text{sen}(\beta_1 \xi)] \\ e^{\alpha_1 \xi} [y_2^0 \cos(\beta_1 \xi) - y_1^0 \text{sen}(\beta_1 \xi)] \\ y_3^0 e^{\lambda_3 \xi} \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Análogamente al primer caso, la dinámica alrededor del origen es la siguiente:

- a) La variedad inestable, $W_c^u(P_0)$ posee una rama que apunta al octante positivo. $E^u(P_0)$, es la recta que pasa por el origen y es paralela al vector propio \vec{V}_3 , que corresponde al valor propio real positivo λ_3 . La trayectoria $\vec{x}(\xi)$, asociada a $\vec{x}_0 \in W_c^u(P_0)$, se aleja del origen cuando $\xi \rightarrow \infty$.
- b) Cuando los valores propios $\lambda_{1,2}$ son complejos, con parte real negativa, el plano $E^s(P_0)$, es generado por la parte real \vec{U}_1 y parte imaginaria \vec{W}_1 , de los vectores propios complejos conjugados, \vec{V}_1 y \vec{V}_2 . Así, la trayectoria $\vec{x}(\xi)$ de (3.7), que parte de la condición inicial \vec{x}_0 sobre la variedad estable, tiende al origen cuando $\xi \rightarrow \infty$, siendo el origen sobre ésta de tipo foco. Véase la figura 3.2.

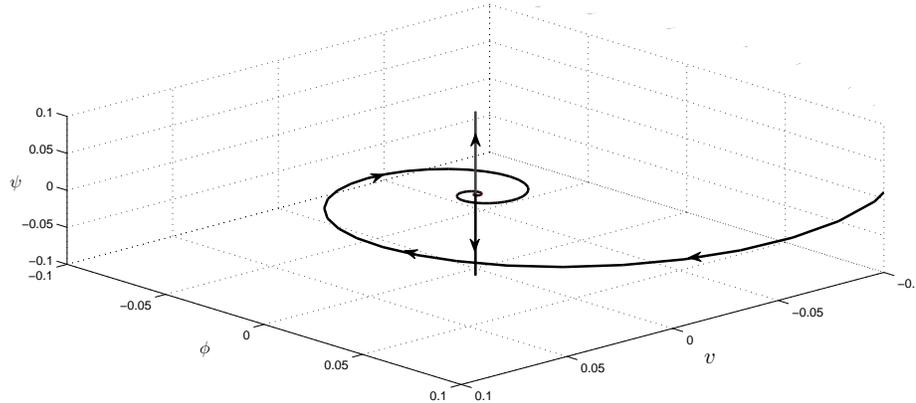


Figura 3.2: Dinámica local (alrededor del origen) de (3.7), cuando las raíces de la matriz de Jacobi son: una real positiva y dos complejas, con parte real negativa.

Con lo anterior, terminamos el análisis local para $\epsilon > 0$. La parte correspondiente a la dinámica global con $\epsilon > 0$, en la cual se incluye la demostración de la existencia de la trayectoria homoclínica del sistema (3.7), la realizamos más adelante. En la siguiente subsección, determinaremos la dinámica global y local del sistema (3.7), con $\epsilon = 0$.

3.2.2. Análisis local y global con $\epsilon = 0$

Empezamos esta sub-sección notando que el candidato a ser parte de la trayectoria homoclínica de (3.7), basada en el origen, es la variedad inestable la cual consta de dos ramas: una que “sale” de P_0 y entra en el octante positivo; mientras que la otra también “sale” del origen, para entrar en el octante negativo. Por ello, será importante “seguir” la rama adecuada a medida que ξ aumenta. Iniciamos el análisis determinando la dinámica local y global del sistema (3.7).

Análisis local

Si se pone $\epsilon = 0$ en (3.7), el sistema se reduce a,

$$\phi' = v, \quad (3.46a)$$

$$v' = -cv - f(\phi) + \psi, \quad (3.46b)$$

$$\psi' = 0. \quad (3.46c)$$

Cuando $\psi' = 0$, los planos $\psi = \text{constante}$ (paralelos al plano ϕv), son regiones invariantes del sistema (3.46). Esto es así pues, las trayectorias de (3.46) con condición inicial en el plano $\psi = \text{constante}$, permanecerán en él cuando ξ aumenta. Luego para ψ fijo, por ejemplo positiva y por tanto, arriba y paralelo al plano ϕv , el sistema (3.46) se puede pensar como un sistema en dos variables: ϕ y v . Véase la figura 3.3.

Basados en esta observación, sobre el plano $\psi = C$ para toda ϕ y v , podemos considerar el sistema (3.46) en dos variables. Así, para ψ fija (3.46) se escribe así

$$\phi' = v \quad (3.47a)$$

$$v' = -cv - f(\phi) + \psi, \quad (3.47b)$$

cuyas ceroclinas son: $v = 0$ y $f(\phi) - \psi = 0$. Escogemos a ψ en un intervalo adecuado, digamos (ψ_{min}, ψ_{max}) . Con el propósito de que $f(\phi) - \psi = 0$, tenga

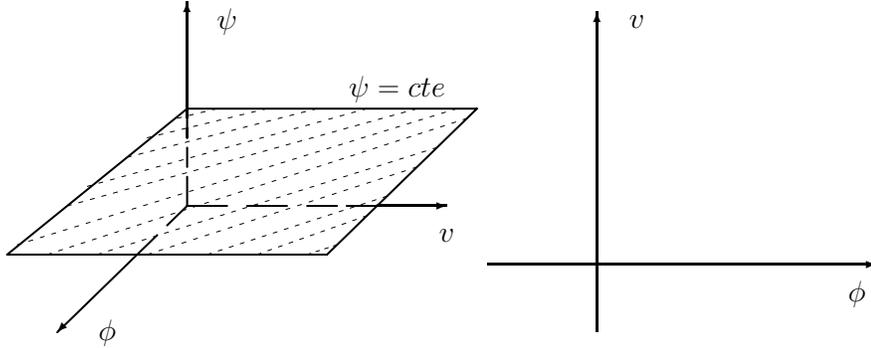


Figura 3.3: Sobre el plano $\psi = cte$, se considera el espacio fase, del sistema (3.46).

tres raíces reales. Denotémoslas por, $\phi_1(\psi)$, $\phi_2(\psi)$ y $\phi_3(\psi)$. Esta notación hace referencia a la función inversa de la función $\psi = f(\phi)$, dado que para un corte con un plano $\psi = C$, $f^{-1}(C) \in \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$, siempre que $\psi \in (\psi_{min}, \psi_{max})$. Véase la figura 3.4.

Ahora vamos a hacer el análisis local alrededor de los puntos de equilibrio $(\phi_1, 0)$, $(\phi_2, 0)$ y $(\phi_3, 0)$ de (3.47). La matriz de Jacobi del vampo vectorial que define a (3.47) en cualquier punto (ϕ, v) , es

$$J[\phi, v] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(\phi) & -c \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

que, para $c < 0$ y ser evaluada en $(\phi_1, 0)$, $(\phi_2, 0)$ y $(\phi_3, 0)$, origina los siguientes casos:

- a) En $P_1 = (\phi_1, 0)$, los valores propios de (3.48) correspondientes son

$$\lambda_{1,2}^{(1)} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(\phi_1)}}{2}, \quad (3.49)$$

donde

$$\text{tr}J[\phi, v](P_1) = -c, \quad \text{y} \quad \det J[\phi, v](P_1) = f'(\phi_1). \quad (3.50)$$

De la figura 3.4, puede observarse que $f'(\phi_1) < 0$, por lo tanto, P_1 es un punto silla. Los vectores propios de $J[\phi, v]$ en P_1 son,

$$\vec{v}_1^1 = \left(\frac{\lambda_1^{(1)}}{f'(\phi_1)}, 1 \right), \quad \vec{v}_2^1 = \left(\frac{\lambda_2^{(1)}}{f'(\phi_1)}, 1 \right). \quad (3.51)$$

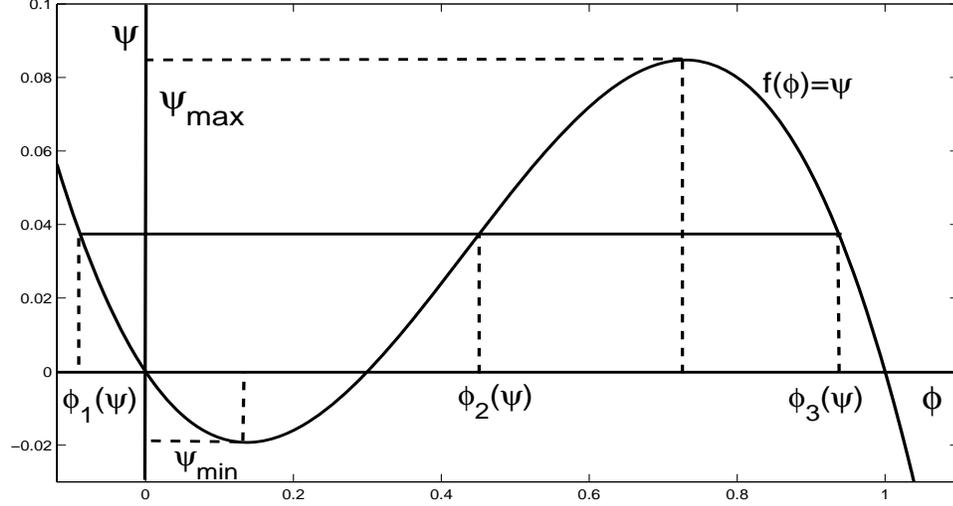


Figura 3.4: Dependiendo del valor de la constante C , se tienen hasta tres diferentes valores de ϕ que satisfacen la ecuación $f(\phi) - \psi = 0$.

b) En $P_2 = (\phi_2, 0)$, la matriz (3.48) tiene por valores propios a:

$$\lambda_{1,2}^{(2)} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(\phi_2)}}{2} \quad (3.52)$$

siendo

$$\text{tr}J[\phi, v](P_2) = -c, \quad \text{y} \quad \det J[\phi, v](P_2) = f'(\phi_2). \quad (3.53)$$

De la figura 3.4 vemos que $f'(\phi_2) > 0$. La dinámica local alrededor de P_2 depende del signo del subradical $[c^2 - 4f'(\phi_2)]$, por lo que debemos considerar los siguientes tres subcasos:

- i) Si $[c^2 - 4f'(\phi_2)] > 0$, entonces $\lambda_{1,2}^{(2)} \in \mathbb{R}$, ambos son positivos y con $\lambda_1^{(2)} > \lambda_2^{(2)}$. Luego, P_2 es un punto de equilibrio de tipo nodo inestable.
- ii) Si $[c^2 - 4f'(\phi_2)] < 0$, $\lambda_{1,2}^{(2)} \in \mathbb{C}$ y la parte real de éstos, es positiva. Por lo tanto, P_2 es un punto de equilibrio de tipo foco inestable.
- iii) Si $[c^2 - 4f'(\phi_2)] = 0$, los valores propios $\lambda_{1,2}^{(2)} \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)}$ por lo que el equilibrio P_2 es de tipo nodo degenerado inestable.

c) Ahora evaluamos (3.48) en $P_3 = (\phi_3, 0)$; los valores propios de la matriz son,

$$\lambda_{1,2}^{(3)} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(\phi_3)}}{2}, \quad (3.54)$$

y,

$$\text{tr}J[\phi, v](P_3) = -c, \quad \text{y} \quad \det J[\phi, v](P_3) = f'(\phi_3). \quad (3.55)$$

Nuevamente de la figura 3.4, tenemos que $f'(\phi_3) < 0$ y entonces P_3 es de tipo silla. Los vectores propios asociados son,

$$\vec{v}_1^{(3)} = \left(\frac{\lambda_1^{(3)}}{f'(\phi_3)}, 1 \right), \quad \vec{v}_2^{(3)} = \left(\frac{\lambda_2^{(3)}}{f'(\phi_3)}, 1 \right). \quad (3.56)$$

Para nuestros objetivos, es suficiente el análisis local anterior. Sin embargo, si el lector desea profundizar más, puede consultar la referencia [46]⁶, en la cual se hace un análisis más fino, del sistema (3.47). Con esto terminamos el análisis local correspondiente al caso $\epsilon = 0$ y damos inicio al análisis global para el mismo caso.

Análisis global

Ya terminado el análisis local de (3.47) en cada uno de los puntos de equilibrio, veamos si tiene trayectorias cerradas. Para ello usamos el Criterio Negativo de Bendixson (véase el Apéndice B) según el cual, en la región del plano en la que la divergencia del campo vectorial (3.47) tiene el mismo signo, dicho sistema no tiene trayectorias cerradas. Para este caso, se tiene $\text{div} \vec{F} = -c$, para toda (ϕ, v) , donde $\vec{F} = (v, -cv - f(\phi) + \psi)$, por lo que, en todo el plano ϕv el sistema (3.47), no tiene trayectorias cerradas.

Ahora, empezamos por recordar que denotamos por $\phi_1(\psi)$, $\phi_2(\psi)$ y $\phi_3(\psi)$, las tres raíces con ψ que satisface $\psi_{min} < \psi < \psi_{max}$. Observe la figura 3.4. Nuestra intención es demostrar que, para un valor de $\psi \in (\psi_{min}, \psi_{max})$, existe un valor de la velocidad, $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ para el cual el sistema (3.47) tiene una trayectoria heteroclínica que conecta a $(\phi_1(\psi), 0)$ con $(\phi_3(\psi), 0)$. Mientras que para otro valor de $\psi \in (\psi_{min}, \psi_{max})$, hay un valor de \bar{c} (diferente del primero), de manera que (3.47) tiene una trayectoria heteroclínica que conecta $(\phi_3(\psi), 0)$ con $(\phi_1(\psi), 0)$.

La siguiente proposición, enunciada y demostrada por Durand [14], nos será útil.

⁶En esta referencia, se considera $\xi = x - ct$ y $c > 0$; mientras que en este trabajo nosotros usamos $\xi = x - ct$, con $c < 0$.

Proposición 3.2 (Durand [14]) *Existe ψ_0 , con $\psi_{min} < \psi_0 < \psi_{max}$, tal que para dos valores de ψ en (ψ_{min}, ψ_{max}) , y para dos valores diferentes de $c = c(\psi) < 0$, correspondiente cada uno a un valor de ψ . Sucede lo siguiente:*

- a) *Si $\psi \neq \psi_0$, con $\psi_{min} < \psi < \psi_0$, el sistema (3.47) tiene una trayectoria heteroclínica de $(\phi_1(\psi), 0)$ a $(\phi_3(\psi), 0)$, para un valor de c .*
- b) *Para $\psi_0 < \psi < \psi_{max}$, el sistema tiene una trayectoria heteroclínica de $(\phi_3(\psi), 0)$ a $(\phi_1(\psi), 0)$. Con un valor de c , diferente al del caso a).*

Demostración. Notando que si $v(\xi) = v(\phi(\xi))$ entonces, siempre que $v \neq 0$, podemos escribir la ecuación diferencial de las trayectorias de (3.47),

$$\frac{dv}{d\phi} = \frac{\frac{dv}{d\xi}}{\frac{d\phi}{d\xi}} = \frac{-cv - f(\phi) + \psi}{v}, \quad (3.57)$$

o bien,

$$v \frac{dv}{d\phi} + cv = -f(\phi) + \psi, \quad (3.58)$$

esto nos dice que la “ruta” de las trayectorias de (3.47)⁷ (en particular la de las trayectorias heteroclínicas) satisfacen la ecuación (3.58)⁸. Proponemos que la ruta de la trayectoria que une $(\phi_1(\psi), 0)$ con $(\phi_3(\psi), 0)$ y la otra ruta de la trayectoria que une $(\phi_3(\psi), 0)$ con $(\phi_1(\psi), 0)$, sea de la forma siguiente,

$$v(\phi(\psi)) = \alpha(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_3), \quad (3.59)$$

donde α es una constante por determinar y que será diferente para cada ruta de la trayectoria heteroclínica correspondiente. Observamos que (3.59) cumple las dos condiciones $v(\phi_1(\psi)) = 0$ y $v(\phi_3(\psi)) = 0$. Ahora, al sustituir (3.59) en la parte izquierda de (3.58), se llega a la igualdad,

$$v \frac{dv}{d\phi} + cv = 2\alpha^2(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_3) \left[\phi - \left(\frac{\phi_1 + \phi_3}{2} - \frac{c}{2\alpha} \right) \right]. \quad (3.60)$$

Por otro lado, recuérdese que consideramos la ecuación $f(\phi) - \psi = 0$, con el valor de ψ para el que esta igualdad tiene tres raíces $\phi_1(\psi)$, $\phi_2(\psi)$ y $\phi_3(\psi)$, en cuyo caso podemos escribir,

$$-f(\phi) + \psi = (\phi - \phi_1)(\phi - \phi_2)(\phi - \phi_3). \quad (3.61)$$

⁷Salvo el eje horizontal en el plano $\psi = C > 0$, paralelo al plano ϕv .

⁸Algo interesante de la ecuación (3.58), es que se puede hacer el siguiente cambio $v \rightarrow -v$ y $c \rightarrow -c$, y si los sustituimos la ecuación (3.58), ésta mantiene su forma original.

Igualando (3.60) y (3.61) se obtiene,

$$2\alpha^2(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_3) \left(\phi - \left(\frac{\phi_1 + \phi_3}{2} - \frac{c}{2\alpha} \right) \right) = (\phi - \phi_1)(\phi - \phi_2)(\phi - \phi_3), \quad (3.62)$$

la cual se da si y sólo si los coeficientes de ϕ , ϕ^2 , ϕ^3 y el término independiente de cada uno de aquéllos, son iguales. Se usa que, $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 1 + a$, esto es porque ϕ_i , $i = 1, 2, 3$, son raíces de $f(\phi) - \psi = -\phi^3 + (1 + a)\phi^2 - a\phi - \psi$. De esas condiciones se obtiene,

$$\alpha_{a,b} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \bar{c}(\psi) = \alpha_{a,b}(1 + a - 3\phi_2(\psi)), \quad (3.63)$$

respectivamente. Cuando se considera el signo (+) se determina la ruta de la trayectoria heteroclínica que conecta $(\phi_3(\psi), 0)$ con $(\phi_1(\psi), 0)$; mientras que considerando el signo (-), determinamos la ruta de la trayectoria que conecta $(\phi_1(\psi), 0)$ con $(\phi_3(\psi), 0)$.

Ahora vamos a obtener una cota para el valor de la velocidad. Ésta depende del valor ψ que satisface la ecuación $f(\phi) - \psi = 0$. Para ello, obtenemos los valores críticos de f . Tenemos que $f'(\phi) = -3\phi^2 + 2(1 + a)\phi - a = 0$ si y sólo si,

$$\phi_{max} = \frac{1 + a + \sqrt{a^2 - a + 1}}{3}, \quad \phi_{min} = \frac{1 + a - \sqrt{a^2 - a + 1}}{3}, \quad (3.64)$$

que corresponden a los valores de ϕ en los que f alcanza su máximo y su mínimo, respectivamente. Observando la figura 3.4, llegamos a las siguientes relaciones

$$\phi_{max} = \phi_2(\psi_{max}) = \phi_3(\psi_{max}) = \frac{1 + a + \sqrt{a^2 - a + 1}}{3} \quad (3.65)$$

y

$$\phi_{min} = \phi_1(\psi_{min}) = \phi_2(\psi_{min}) = \frac{1 + a - \sqrt{a^2 - a + 1}}{3}, \quad (3.66)$$

donde $\psi_{max} = f(\phi_{max})$ y $\psi_{min} = f(\phi_{min})$. Además, se pide la condición $(a^2 - a + 1) \geq 0$, a fin de garantizar que ambos, ϕ_{max} y ϕ_{min} , sean números reales.

Al evaluar en ψ_{min} y ψ_{max} , la segunda igualdad que aparece en (3.63), encontramos

$$\bar{c}(\psi_{min}) = -\frac{\sqrt{a^2 - a + 1}}{2} \quad \text{y} \quad \bar{c}(\psi_{max}) = \frac{\sqrt{a^2 - a + 1}}{2}, \quad (3.67)$$

de tal forma que $c \in [\bar{c}(\psi_{min}), \bar{c}(\psi_{max})]$.

Notamos que $\bar{c}(\psi) = \alpha_{a,b}(1 + a - 3\phi_2(\psi))$ es una función continua de ψ en el intervalo (ψ_{min}, ψ_{max}) . Dado que $\psi = f(\phi)$, es una función creciente de ϕ_2 su inversa, $f^{-1}(\psi) = \phi_2(\psi)$, es una función creciente de ψ (véase la figura 3.4, entonces $-\phi_2(\psi)$ es una función decreciente de ψ . Dado que elegimos a $c(\psi) < 0$, entonces debemos seleccionar adecuadamente el valor de $\alpha_{a,b}$. De hecho, lo tomamos de manera que:

- a) Si $\alpha_b < 0$, $\bar{c}(\psi) = \alpha_b(1 + a - \phi_2(\psi))$ es una función creciente de ψ . Observe la figura 3.5.a).
- b) Cuando $\alpha_a > 0$, entonces $\bar{c}(\psi) = \alpha_a(1 + a - \phi_2(\psi))$ es una función decreciente de ψ . Véase la figura 3.5.b).

Por la continuidad de $\bar{c}(\psi)$, existe un valor $\psi_0 \in (\psi_{min}, \psi_{max})$, tal que $\bar{c}(\psi_0) = 0$, para los dos casos con $\alpha_b < 0$ y $\alpha_a > 0$. ψ_0 es el valor que buscamos para definir los intervalos (ψ_{min}, ψ_0) y (ψ_0, ψ_{max}) de la Proposición 3.2.

Por todo lo hecho anteriormente, la expresión

$$v(\phi(\psi)) = \alpha(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_3), \quad (3.68)$$

corresponde a una ruta de la trayectoria heteroclínica que conecta $(\phi_3, 0)$ con $(\phi_1, 0)$, para $\alpha_a > 0$; mientras que para $\alpha_b < 0$, hay otra ruta de la trayectoria heteroclínica para (3.47), conectando $(\phi_1, 0)$ con $(\phi_3, 0)$. Como pedimos que $\bar{c}(\psi) < 0$, resumamos el análisis anterior en los dos incisos siguientes:

- a) Si $\psi_{min} < \psi < \psi_0$ entonces debemos escoger $\alpha = \alpha_b = -\sqrt{1/2}$, de manera que el sistema (3.47) tiene una trayectoria heteroclínica que conecta $(\phi_1, 0)$ con $(\phi_3, 0)$, cuya ruta tiene por ecuación

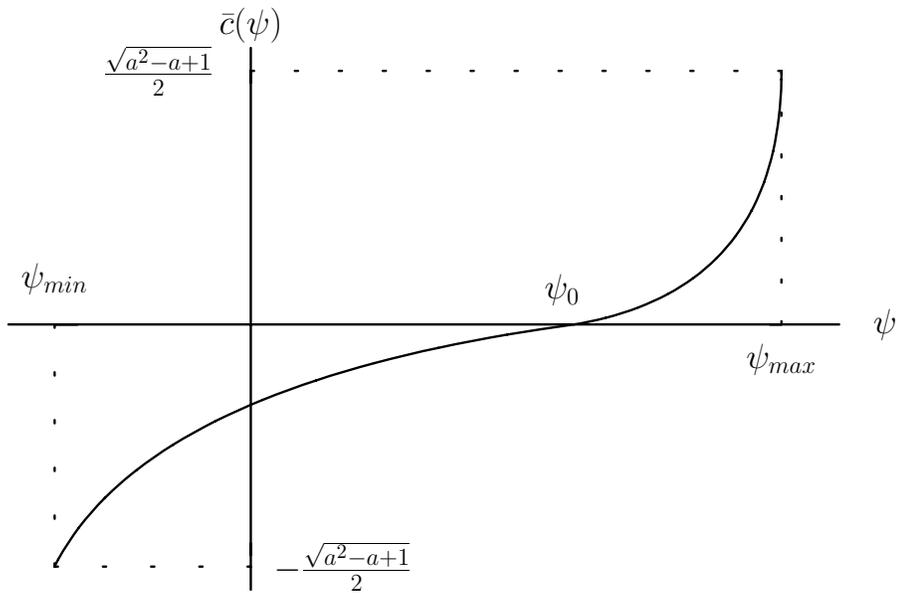
$$v(\phi) = -\sqrt{1/2}(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_3), \text{ con } \phi_1 \leq \phi \leq \phi_3, \quad (3.69)$$

donde, $\bar{c}(\psi) = -\sqrt{1/2}(1 + a - 3\phi_2(\psi))$. Véase la figura 3.6.a).

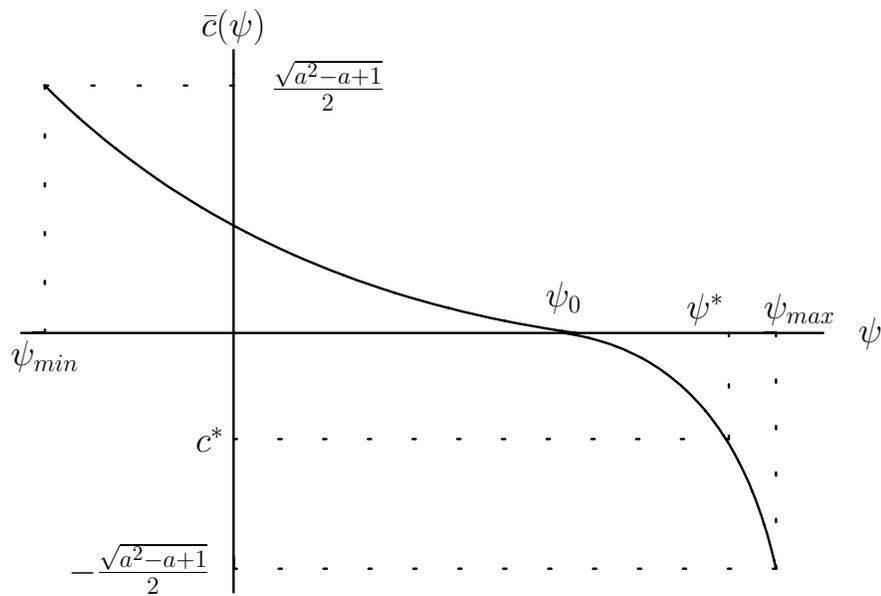
- b) Cuando $\psi_0 < \psi < \psi_{max}$, debemos elegir $\alpha = \alpha_a = \sqrt{1/2}$, entonces existe una trayectoria heteroclínica de (3.47) que va de $(\phi_3, 0)$ a $(\phi_1, 0)$. La ruta de la trayectoria es

$$v(\phi) = \sqrt{1/2}(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_3), \text{ con } \phi_1 \leq \phi \leq \phi_3, \quad (3.70)$$

para, $\bar{c}(\psi) = \sqrt{1/2}(1 + a - 3\phi_2(\psi))$. Observe la figura 3.6.b). \diamond

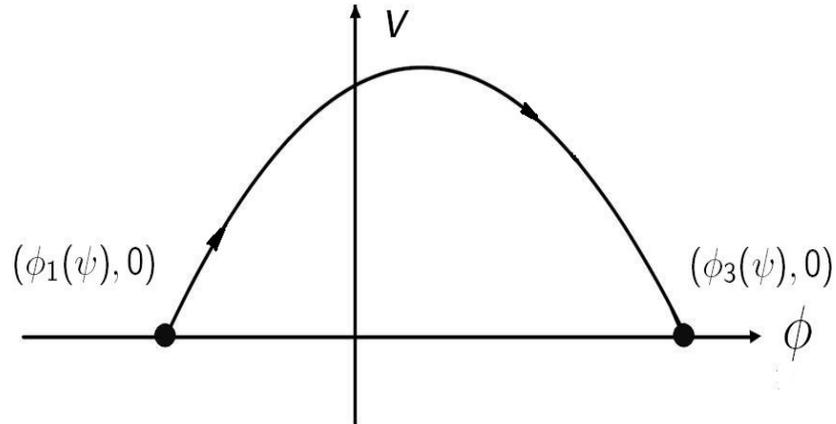


(a) Para $\alpha_b < 0$. Cuando $\bar{c}(\psi) = \alpha_b(1 + a - \phi_2(\psi))$.

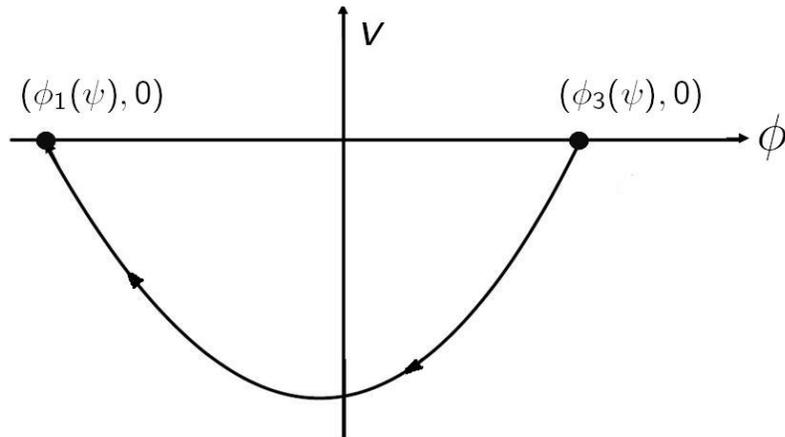


(b) Para $\alpha_a > 0$. Si $\bar{c}(\psi) = \alpha_a(1 + a - \phi_2(\psi))$

Figura 3.5: Gráfica de $c(\psi)$ correspondiente a los dos valores de α : a) $\alpha_b < 0$ y b) $\alpha_a > 0$. Figura tomada de Durand [14].



- (a) Trayectoria heteroclínica con ruta, $v(\phi) = -\sqrt{1/2}(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_3)$, para el valor de $\bar{c}(\psi) = -\sqrt{1/2}(1 + a - \phi_2(\psi))$.



- (b) Trayectoria heteroclínica con ruta, $v(\phi) = \sqrt{1/2}(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_3)$, para el valor de $\bar{c}(\psi) = \sqrt{1/2}(1 + a - \phi_2(\psi))$.

Figura 3.6: Las dos trayectorias heteroclínicas del sistema (3.47) descritas a través de sus rutas, correspondientes a: a) $\psi_{min} < \psi < \psi_0$ y b) $\psi_0 < \psi < \psi_{max}$. Con $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_3$. Figura tomada de Durand [14]

3.2.3. Análisis global con $\epsilon > 0$

Con base en el análisis global que hemos realizado, enseguida vamos a demostrar la existencia de una familia de trayectorias homoclinicas del sistema (3.7). Para este fin, utilizaremos la técnica de los *bloques aislantes*. Antes, construimos un conjunto, S_0 , que será sumamente útil.

Un conjunto auxiliar

Éste se forma de la unión de cuatro conjuntos; los dos primeros son:

$$E_R^* = \{(\phi, v, \psi) \mid v = 0, 0 \leq \psi \leq \psi^*, \phi = \phi_3(\psi)\} \quad (3.71)$$

y

$$E_L^* = \{(\phi, v, \psi) \mid v = 0, 0 \leq \psi \leq \psi^*, \phi = \phi_1(\psi)\}, \quad (3.72)$$

donde $\psi^* = f((2-a)/3)$. Observe que E_R^* y E_L^* están formados de tramos de la ceroclina $f(\phi) - \psi = 0$ del sistema (3.47).

En la figura 3.7. E_R^* es la gráfica de la curva que define, de forma continua, la raíz $\phi_3(\psi)$ en el plano $\phi\psi$ (cuando $v = 0$) y con $\psi \in [0, \psi^*]$. Nuevamente para E_L^* , tenemos la gráfica de la curva que define la raíz $\phi_1(\psi)$ en el plano $\phi\psi$ y $v = 0$, para $\psi \in [0, \psi^*]$.

Mientras que los otros dos conjuntos se definen así,

$$J_F = \{(\phi, v, \psi) \mid v = -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\phi-1), 0 \leq \phi \leq 1, \psi^* = 0\} \quad (3.73)$$

y

$$J_B = \{(\phi, v, \psi) \mid v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - \phi_1(\psi^*))(\phi - \phi_3(\psi^*)), \phi_1(\psi^*) \leq \phi \leq \phi_3(\psi^*)\}. \quad (3.74)$$

J_B , es la ruta de una trayectoria heteroclinica de (3.47) que conecta $(\phi_3(\psi^*), 0)$ con $(\phi_1(\psi^*), 0)$, para $c^*(\psi^*)$, donde $\psi^* = f((2-a)/3)$. Mientras que J_F , es la ruta de otra trayectoria heteroclinica de (3.47) que conecta $(0, 0)$ con $(1, 0)$ con $\psi^* = 0$ y $c^*(0) = -\sqrt{2}(1/2 - a)$. Definamos a S_0 así, $S_0 = E_R^* \cup E_L^* \cup J_F \cup J_B$. En la figura 3.7, la curva en línea gruesa corresponde al conjunto S_0 .

Como ya lo adelantabamos para la demostración de la existencia de una familia trayectorias homoclinicas del sistema (3.7) basadas en el origen, utilizaremos la teoría de los bloques aislantes. Ésta se expone en el Apéndice C.

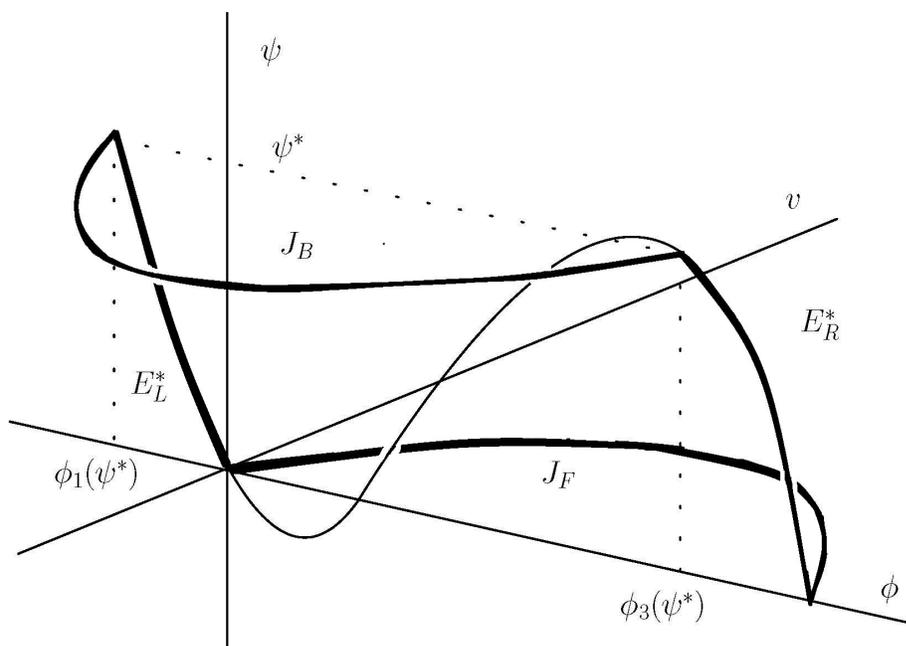


Figura 3.7: Aquí —con línea gruesa— ilustramos al conjunto S_0 . Imagen tomada de Durand [14].

Usaremos el Teorema C.1 y construiremos los bloques aislantes correspondientes para verificar que se satisfacen la hipótesis del teorema mencionado. También utilizaremos el comportamiento del sistema para $\epsilon = 0$. Además, se usará la continuidad de la variedad inestable del sistema (3.7) en el origen con respecto a los parámetros ϵ y c .

La rama adecuada de $W_c^u(P_0)$

Antes de exponer el análisis global para $\epsilon > 0$, debemos enunciar algunos resultados preliminares que fueron enunciados y demostrados por Hastings [28]. Esto con el objetivo de saber qué rama de la variedad inestable debemos escoger, para que la trayectoria homoclínica exista. Véase el análisis local hecho en la sub-sección 3.2.1. Hastings considera $\xi = x + ct$ con $c > 0$, lo cual es consistente con nuestra notación y resultados para $\xi = x - ct$ y $c < 0$. Así, salvo este cambio, podemos usar sus resultados.

Lema 3.1 (Hastings [28]) *El sistema (3.7):*

- a) *Tiene una variedad inestable de dimensión uno $W_c^u(P_0)$ la cual está formada por dos ramas: $W_c^u(P_0)^+$ la cual se ubica en el octante positivo y otra rama, $W_c^u(P_0)^-$, la cual se ubica en el octante negativo.*
- b) *Tiene una variedad estable de dimensión dos $W_c^s(P_0)$.*
- c) *Posee dos regiones invariantes:*

$$E^- = \{(\phi(\xi), v(\xi), \psi(\xi)) \mid v(\xi) < 0, \phi(\xi) < 0, v'(\xi) < 0, \psi'(\xi) < 0\},$$

y,

$$E^+ = \{(\phi(\xi), v(\xi), \psi(\xi)) \mid v(\xi) > 0, \phi(\xi) > 1, v'(\xi) > 0, \psi'(\xi) > 0\}.$$

De tal manera que, si una condición inicial, $\vec{x}_0 = (\phi_0, v_0, \psi_0)$, cumple, $\vec{x}_0 \in E^+(E^-)$ entonces las dos componentes $\phi(\xi)$ y $v(\xi)$ tienden a $+\infty(-\infty)$ cuando ξ tiende a infinito.

Demostración. El análisis local realizado en la subsección 3.2.1 junto con el Teorema B.2 del apéndice B, garantizan la existencia de $W_c^u(P_0)$ y $W_c^s(P_0)$ de a) y b). Nos centraremos en c), realizamos la demostración por contradicción. Así, supongamos que E^+ no es positivamente invariante. Sean $\vec{x}(\xi) = (\phi(\xi), v(\xi), \psi(\xi))$, una trayectoria del sistema (3.7), que parte de la condición inicial $\vec{x}_0 \in E^+$ y una sucesión $S = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$, donde $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots$ con $\xi_1 > 0$. La trayectoria $\vec{x}(\xi)$ al ser evaluada en cada punto de la sucesión, origina la sucesión, $\{\vec{x}(\xi_1), \vec{x}(\xi_2), \dots\}$ en \mathbb{R}^3 . Elegimos el primer elemento de la sucesión, $\vec{x}(\xi_*) \notin E^+$, en donde sucede que, $v'(\xi_*) = 0$ y $\psi'(\xi_*) = 0$, con $v(\xi_*) > 0$ y $\phi(\xi_*) > 1$. La condición $\psi'(\xi_*) = 0$ implica que $\psi''(\xi_*) = -(\epsilon/c)(\phi'(\xi_*) - \tilde{\gamma}\psi'(\xi_*)) = -(\epsilon/c)v(\xi_*) > 0$, por lo tanto tenemos que la función $\psi(\xi)$ tiene un mínimo local en ξ_* , esto significa que por la continuidad de $\psi(\xi)$ con respecto a ξ , existe un punto $\xi_{**} < \xi_*$ tal que $\psi'(\xi_{**}) < 0$ lo cual es una contradicción. Ya que para todo $\xi < \xi_*$, $\psi'(\xi) > 0$.

En el caso de que, $\psi'(\xi_*) \geq 0$ y $v'(\xi_*) = 0$, con $v(\xi_*) > 0$ y $\phi(\xi_*) > 1$. Al usar las condiciones anteriores y dado que $\phi'(\xi) = v(\xi)$, obtenemos $v''(\xi_*) = -f'(\phi(\xi_*))\phi'(\xi_*) + \psi'(\xi_*) > 0$, en donde $f' \equiv \frac{d}{d\phi}$. Es decir, $v(\xi_*)$ es un valor mínimo local. Luego, nuevamente por la continuidad de $v(\xi)$ con respecto a ξ existe un punto $\xi_{**} < \xi_*$ tal que $v'(\xi_{**}) < 0$ lo cual es una contradicción,

ya que por hipótesis tenemos que $v'(\xi) > 0$ para todo punto a la izquierda de ξ_* . Concluimos que $\vec{x}(\xi) \in E^+$, para todo ξ .

De manera similar se prueba que E^- es positivamente invariante. En efecto, se considera $\vec{x}_0 \in E^-$ junto con una sucesión $S = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$, construimos la sucesión, $\{\vec{x}(\xi_1), \vec{x}(\xi_2), \dots\}$, y nos fijamos en $\vec{x}(\xi_*) \notin E^-$, en donde sucede que $v'(\xi_*) = 0$ y $\psi'(\xi_*) = 0$ con $\phi'(\xi_*) < 0$ y $v(\xi_*) < 0$. Esto nos llevará a una contradicción.

Ahora bien, por la forma en que están definidas las derivadas para E^+ , las funciones $v(\xi)$ y $\phi(\xi)$ son crecientes, mientras que para E^- las funciones $v(\xi)$ y $\phi(\xi)$ son decrecientes, para los dos casos sucede que $|v(\xi)| \rightarrow \infty$ y $|\phi(\xi)| \rightarrow \infty$ cuando $\xi \rightarrow \infty$, con esto terminamos la demostración del inciso c). \diamond

El corolario siguiente, también enunciado y demostrado por Hastings (véase [28]), nos será de gran ayuda.

Corolario 3.1 (Hastings [28]) *Si seleccionamos $\vec{x}_0 \in W_c^u(P_0)^-$, entonces las dos coordenadas, $\phi(\xi)$ y $v(\xi)$, de la trayectoria asociada, cumplen $(\phi(\xi), v(\xi)) \rightarrow (-\infty, -\infty)$, cuando $\xi \rightarrow \infty$.*

Lo que expresa el Corolario 3.1 es que si la condición inicial \vec{x}_0 está sobre la rama $W_c^u(P_0)^-$, la trayectoria correspondiente $\vec{x}(\xi)$, no es acotada cuando $\xi \rightarrow \infty$, por lo tanto aquél nos sugiere que la condición inicial \vec{x}_0 debe ser elegida sobre la rama de la variedad inestable que deja al origen y entra al octante positivo, es decir se debe cumplir que $\vec{x}_0 \in W_c^u(P_0)^+$.

Es importante que las trayectorias de (3.7), que “viven” en $W_c^u(P_0)^+$, sean funciones continuas de los parámetros ϵ y c . Esta propiedad se usa en la demostración de la existencia de la trayectoria homoclínica.

Proposición 3.3 (Durand [14]) *Las trayectorias $\vec{x}(\xi)$ de (3.7), con condición inicial $\vec{x}_0 \in W_c^u(P_0)^+$, son continuas con respecto a $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, con $\epsilon_0 > 0$ cercano a cero y $c \in (\bar{c}(\psi_{min}), 0)$.*

Demostración. Si usamos el Lema B.1 (véase el Apéndice B), el cual nos asegura que si un campo vectorial $\vec{R}_*(\vec{x}, \vec{\alpha}_p) : \Omega \times I_p \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$, es de clase $C_{(a,b) \times \Omega \times I_p}^K$, $K \geq 1$, con $\xi, \xi_0 \in (a, b)$, Ω es un conjunto abierto y $\vec{\alpha}_p \in I_p$ es un vector de parámetros, entonces la trayectoria $\vec{x}(\xi, \xi_0, \vec{x}_0, \vec{\alpha}_p)$

es de clase $C_{(a,b) \times \Omega \times I_p}^K$. Luego, si denotamos al campo vectorial que define el sistema (3.7), así

$$\vec{R}(\phi, v, \psi) = \left(v, -cv - \phi(1 - \phi)(\phi - a) + \psi, -\frac{\epsilon}{c}(\phi - \tilde{\gamma}\psi) \right), \quad (3.75)$$

observamos que éste es diferenciable de clase $C_{(a,b) \times \Omega \times I_p}^2$, donde $\epsilon, c \in I_p$, con $I_p = (0, \epsilon_0) \times (\bar{c}(\psi_{min}), 0)$. Por lo tanto, al elegir $\vec{x}_0 \in W_c^u(P_0)^+$, la trayectoria asociada $\vec{x}(\xi, \epsilon, c)$ de (3.7), es una función continua de $\epsilon, c \in I_p$. Luego, la demostración se concluye. \diamond

Análisis global (existencia trayectoria homoclínica)

Procedemos a demostrar la existencia de la trayectoria homoclínica. Para construir los respectivos bloques aislantes a los que se refiere el Teorema C.1 del Apéndice C, utilizamos al conjunto S_0 , que construimos en la subsección 3.2.3 cuando realizamos el análisis siendo el parámetro $\epsilon = 0$.

Dicho de forma sencilla la técnica de bloques aislantes consiste en construir conjuntos adecuados en el espacio fase de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para poder estudiar el comportamiento del campo vectorial en estos conjuntos. Tales conjuntos pueden ser deformados continuamente a un n -cubo, donde n es la dimensión del espacio fase donde consideramos la ecuación diferencial. Además, una característica importante de los bloques aislantes, es que sobre la frontera de éstos, nos interesa saber si el campo vectorial entra o sale de ellos.

La siguiente proposición se refiere a la existencia de la trayectoria homoclínica.

Proposición 3.4 (Durand [14]) *El sistema (3.7) tiene una trayectoria homoclínica para cierta $c = c(\epsilon)$, con $\epsilon \in (0, 1)$.*

Demostración. Antes de empezar la demostración, debemos hacer notar que en nuestro caso particular, el vector de parámetros $\vec{\sigma}_s = (\epsilon, a, c, \tilde{\gamma})$ asociado al sistema (3.7) debe satisfacer las condiciones del Teorema C.1 del Apéndice C, el cual a su vez impone condiciones sobre el campo vectorial definido por (3.7). Esto a fin de que la trayectoria homoclínica exista.

La demostración consiste en construir dos bloques aislantes que satisfagan las hipótesis del Teorema C.1. Para nuestro caso particular, construimos dos

conjuntos B_1 y B_2 . Para ello, sean ψ_{sup} , ψ_{inf} tales que⁹,

$$\psi_{min} < \psi_{inf} < 0 < \psi^* < \psi_{sup} < \psi_{max}, \quad (3.76)$$

donde $\psi^* = f((2-a)/3)$.

Ahora definimos los conjuntos B_1 y B_2 , como

$$B_1 = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi_{inf} \leq \psi \leq \psi_{sup}, |\phi - \phi_1(\psi)| + |v| \leq \rho_1\}, \quad (3.77a)$$

$$B_2 = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi_{inf} \leq \psi \leq \psi_{sup}, |\phi - \phi_3(\psi)| + |v| \leq \rho_2\}, \quad (3.77b)$$

ρ_1 y $\rho_2 \in \mathbb{R}$, con valores positivos. El primer conjunto (B_1) construido alrededor del conjunto E_L^* , el cual forma parte de S_0 ; mientras que el segundo (B_2) se construye alrededor de E_R^* , que también forma parte de S_0 , (véase la página 127).

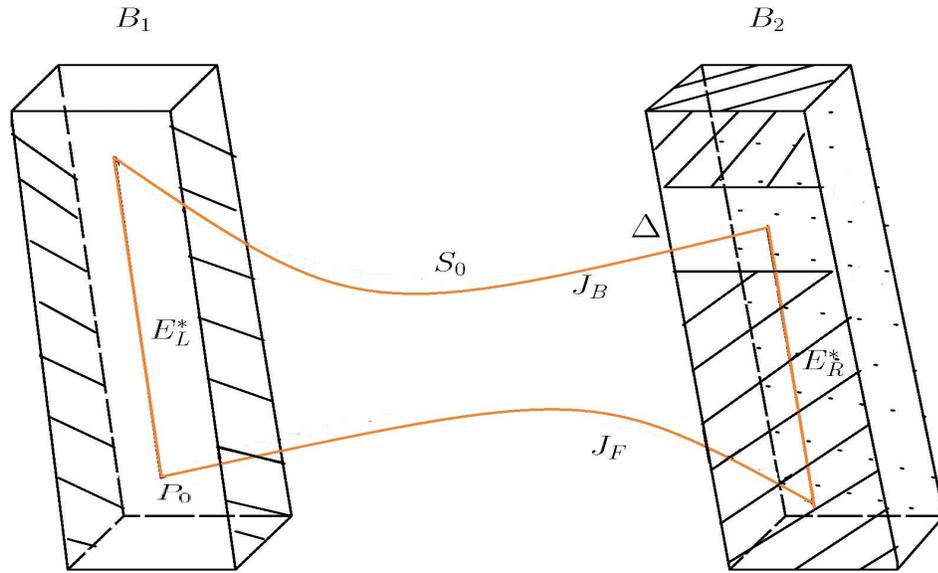


Figura 3.8: Aquí exhibimos los bloques aislantes; las partes sombreadas son los conjuntos de salida. Observamos al conjunto S_0 , en color naranja. Figura tomada de Durand [14].

Vamos a demostrar que los conjuntos B_1 y B_2 son bloques aislantes para el sistema (3.7), siempre que los parámetros ϵ , c , c^* , $\tilde{\gamma}$, ρ_1 y ρ_2 , satisfagan las

⁹Las constantes, ψ_{sup} y ψ_{inf} , se refieren a un valor superior e inferior de la variable ψ , no asociarlas con el supremo e ínfimo. Mientras que, $\psi_{max} = f(\phi_{max})$ y $\psi_{min} = f(\phi_{min})$.

tres condiciones siguientes: $0 < \epsilon < 1$, $0 < \tilde{\gamma} < 1$, $0 \leq |c - c^*| \leq \eta$, con $\eta < 1$ y ρ_1, ρ_2 pequeños.

Nos interesa conocer si el campo vectorial del sistema (3.7), apunta hacia el interior o hacia el exterior del bloque aislante B_1 . Lo haremos para una cara de B_1 , la cual denotaremos por C_{1B_1} . El “sub-índice” $1B_1$, indica cara 1 del bloque aislante B_1 . Cada bloque aislante está formado de seis caras: “cuatro” son las caras laterales y dos son las “tapas” del paralelepípedo. En notación de conjuntos, C_{1B_1} es

$$\begin{aligned} \{(\phi, v, \psi) \mid f_1(\phi, v, \psi) = (\phi - \phi_1(\psi)) + v - \rho_1 = 0, \\ \text{con } v > 0 \phi \in (\phi_1, \phi_1 + \rho_1) \text{ y } \psi \in [\psi_{inf}, \psi_{sup}]\}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Al calcular el gradiente de la curva de nivel

$$f_1(\phi, v, \psi) = (\phi - \phi_1(\psi)) + v - \rho_1 = 0, \quad (3.79)$$

se obtiene,

$$\nabla f_1(\phi, v, \psi) = (1, 1, -\phi'_1(\psi)), \quad (3.80)$$

donde, ϕ'_1 significa derivada de ϕ_1 , con respecto a ψ .

Calculamos, para $\epsilon = 0$ y $c = c^*$, el producto escalar entre el gradiente ∇f_1 y el campo vectorial $\vec{R}(\phi, v, \psi)$ restringido a la cara C_{1B_1} ,

$$\nabla f_1 \cdot \vec{R}(\phi, v, \psi) = (1 - c^*)v + (-f(\phi) + \psi). \quad (3.81)$$

El signo del producto escalar (3.81), indica si el campo vectorial de (3.7), apunta al interior o al exterior de la cara C_{1B_1} , del bloque. Tenemos que en la región del plano ϕv , donde se ubica C_{1B_1} , $(1 - c^*)v > 0$ dado que $v > 0$ y $c^* < 0$, además $(\psi - f(\phi)) > 0$ para los valores de ϕ que satisfacen $\phi_1(\psi) < \phi < \phi_1(\psi) + \rho_1$. Por lo tanto, el producto escalar es positivo en esta cara de B_1 lo cual indica que el campo vectorial apunta hacia el exterior. Véase la figura 3.9.

Consideramos el producto escalar, con los valores de $\epsilon > 0$, c y c^* , tal que $0 < \epsilon < 1$ y $0 \leq |c - c^*| < \eta$. El producto escalar entre los vectores ∇f_1 y el campo vectorial de (3.7) restringido a C_{1B_1} es,

$$\nabla f_1 \cdot \vec{R}(\phi, v, \psi) = (1, 1, -\phi'_1(\psi)) \cdot (v, -cv - f(\phi) + \psi, -\frac{\epsilon}{c}(\phi - \tilde{\gamma}\psi)), \quad (3.82)$$

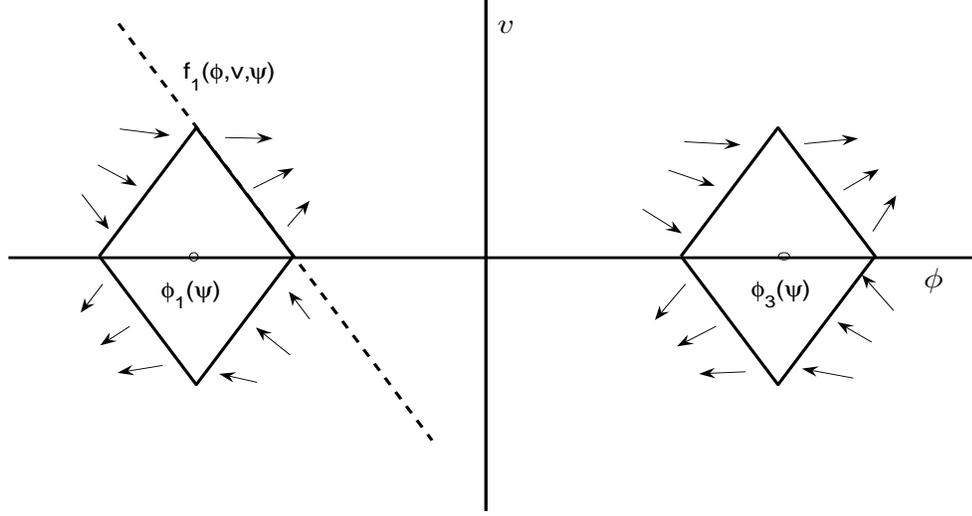


Figura 3.9: Los bloques B_1 y B_2 para los valores de $\psi_{inf} \leq \psi \leq \psi_{sup}$, para $\epsilon = 0$. La intersección de la línea discontinua con el bloque aislante B_1 , corresponde a la cara, $f_1(\phi, v, \psi) = (\phi - \phi_1(\psi)) + v - \rho_1$.

el cual se puede escribir así,

$$(1 - c)v + (\psi - f(\phi)) + \frac{\epsilon}{c}\phi'_1(\psi)(\phi - \tilde{\gamma}\psi). \quad (3.83)$$

Ahora, dado que $v > 0$ y $c < 0$, $(1 - c)v > 0$ y además $(\psi - f(\phi)) > 0$, para $\phi_1(\psi) < \phi < \phi_1(\psi) + \rho_1$. El signo de $\phi'_1(\psi)$ es negativo. Véase la figura 3.4. Por el hecho de que $\epsilon > 0$ es muy pequeño, el último término en (3.83) es también pequeño, así la suma (3.83) es positiva. Por lo tanto, el producto escalar es positivo en esta cara. Es decir, el campo vectorial $\vec{R}(\phi, v, \psi)$, apunta hacia el exterior en C_{1B_1} , para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Con $\epsilon = 0$, veamos la forma del campo vectorial restringido a la tapa superior e inferior de B_1 y B_2 . Un vector canónico ortogonal a la tapa superior de B_1 es $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$; mientras que para la tapa inferior de B_1 tenemos que $-\vec{e}_3 = (0, 0, -1)$, es un vector normal exterior. Calculemos el producto escalar,

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 \cdot \vec{R}(\phi, v, \psi) &= (0, 0, 1) \cdot (v, -c^*v - f(\phi) + \psi, 0) = 0, \\ -\vec{e}_3 \cdot \vec{R}(\phi, v, \psi) &= (0, 0, -1) \cdot (v, -c^*v - f(\phi) + \psi, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.84)$$

El cálculo anterior, también se cumple para la tapa superior e inferior de B_2 . Es decir, el campo vectorial no entra ni sale, de las tapas superior e inferior de B_1 y B_2 . Éste “vive” en las correspondientes tapas. Recuérdese que en el análisis realizado en la sub-sección 3.2.2), el sistema (3.7), se puede pensar como un sistema de dos variables, (ϕ, v) , para cada corte con el plano $\psi = \text{constante}$, paralelo al plano ϕv (en este caso $\psi \in [\psi_{inf}, \psi_{sup}]$).

Para estudiar el producto escalar con $\epsilon > 0$, en las tapas superiores e inferiores de B_1 y B_2 . Esto lo realizamos de manera separada,

a) Tapas superiores

Usamos nuevamente el vector canónico, \vec{e}_3 . En estas tapas el producto escalar es,

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{R}(\phi, v, \psi) = -\frac{\epsilon}{c}(\phi - \tilde{\gamma}\psi). \quad (3.85)$$

Fijemos nuestra atención en el término, $\phi - \tilde{\gamma}\psi = 0$, el cual define un plano en el sistema de coordenadas (ϕ, v, ψ) , cuando $\psi = \psi_{sup}$. Aquél no intersecta a los bloques aislantes.

- a.i)** Si centramos nuestra atención en la figura 3.10.a), la recta $\phi - \tilde{\gamma}\psi_{sup} = 0$, divide al plano ϕv en dos regiones. En la región donde se localiza la tapa superior del bloque B_1 , se tiene la condición $(\phi - \tilde{\gamma}\psi_{sup}) < 0$ y el producto escalar (3.85), es

$$-\left[\frac{\epsilon}{c}(\phi - \tilde{\gamma}\psi_{sup})\right] < 0, \quad (3.86)$$

lo que significa que el campo vectorial, $\vec{R}(\phi, v, \psi)$, apunta al interior sobre la tapa superior de B_1 .

- a.ii)** En la región del plano donde se encuentra ubicada la tapa superior de B_2 , se satisface la condición $\phi - \tilde{\gamma}\psi_{sup} > 0$ el producto escalar es

$$-\left[\frac{\epsilon}{c}(\phi - \tilde{\gamma}\psi_{sup})\right] > 0, \quad (3.87)$$

esto significa que el campo vectorial, $\vec{R}(\phi, v, \psi)$, apunta al exterior de B_2 .

b) Tapas inferiores

Aquí utilizaremos el vector, $-\vec{e}_3$. En las tapas inferiores el producto escalar es,

$$-\vec{e}_3 \cdot \vec{R}(\phi, v, \psi) = \frac{\epsilon}{c}(\phi - \tilde{\gamma}\psi). \quad (3.88)$$

- b.i)** Si observamos la figura 3.10.b) la recta definida por $\phi - \tilde{\gamma}\psi_{inf} = 0$, nuevamente divide al plano (ϕ, v) en dos regiones. Notamos que la región en donde esta ubicada la tapa inferior de B_1 se cumple la condición de que $\phi - \tilde{\gamma}\psi_{inf} > 0$, lo que significa que

$$\left[\frac{\epsilon}{c}(\phi - \tilde{\gamma}\psi_{inf}) \right] < 0, \quad (3.89)$$

es decir el campo vectorial, $\vec{R}(\phi, v, \psi)$, apunta al interior de B_1 en la tapa inferior.

- b.ii)** Mientras que para los valores de $\phi - \tilde{\gamma}\psi_{inf} > 0$, donde se ubica la tapa inferior de B_2 se tiene que,

$$\left[\frac{\epsilon}{c}(\phi - \tilde{\gamma}\psi_{inf}) \right] < 0, \quad (3.90)$$

lo que significa que sobre la tapa inferior de B_2 , el campo vectorial $\vec{R}(\phi, v, \psi)$, apunta al interior.

Todo lo que realizamos anteriormente nos demuestra que B_1 y B_2 son bloques aislantes para (3.7). Exhibimos condiciones geométricas para definir los bloques aislantes B_1 y B_2 alrededor de E_L^* y E_R^* , respectivamente. Además, calculamos el producto escalar entre ∇f_1 y el campo vectorial de (3.7) restringido a la cara C_{1B_1} , para ver si el campo vectorial apunta al interior o exterior de B_1 . Para $\epsilon = 0$, se tiene que B_1 y B_2 son bloques aislantes, esto es cierto debido a la proposición C.1 del Apéndice C. \diamond

Con todo lo hecho anteriormente, podemos establecer cuales son los conjuntos de entrada y salida de cada bloque aislante.

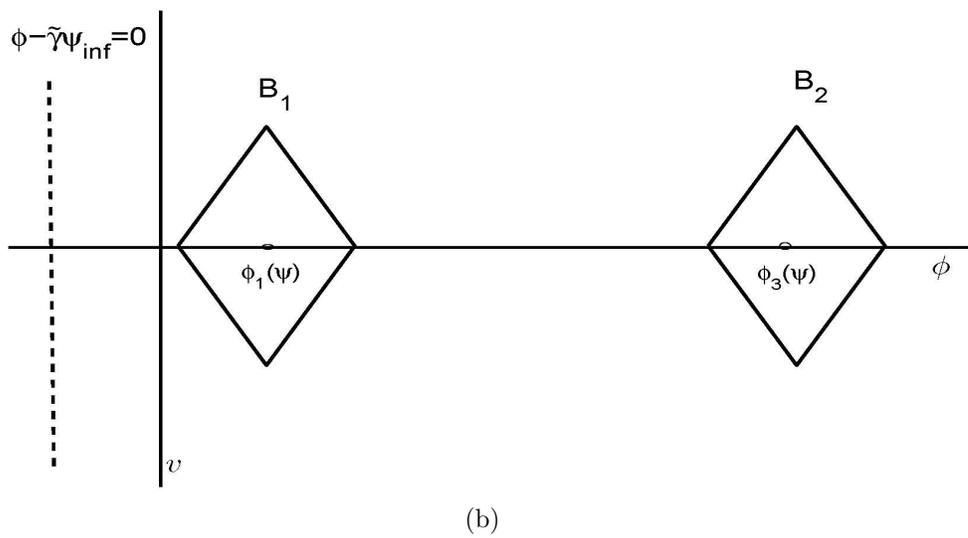
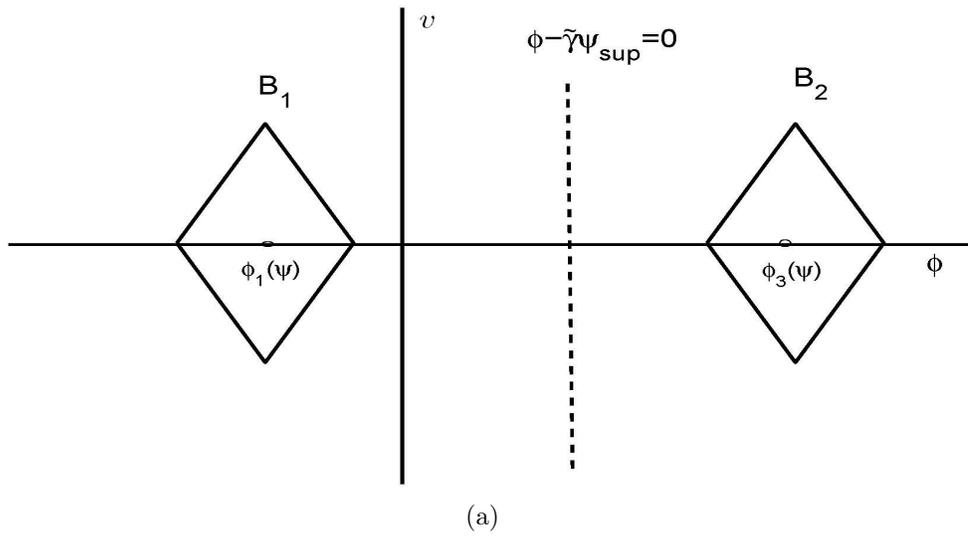


Figura 3.10: Las tapas de B_1 y B_2 ; a) tapas superiores con $\psi = \psi_{sup}$, b) tapas inferiores para $\psi = \psi_{inf}$. Con $0 < \tilde{\gamma} < 1$. Figura tomada de Durand [14].

Conjuntos de salida y entrada para B_1

a) El conjunto de salida b_1^- , se forma de las “caras”,

$$C_{1B_1} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi_{inf} < \psi < \psi_{sup}, \phi - \phi_3(\psi) + v = \rho_1\},$$

$$C_{2B_1} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi_{inf} < \psi < \psi_{sup}, \phi - \phi_3(\psi) + v = -\rho_1\},$$

es decir, $b_1^- = C_{1B_1} \cup C_{2B_1}$.

b) Mientras que el conjunto de entrada b_1^+ esta formado por las “caras”,

$$C_{3B_1} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi_{inf} < \psi < \psi_{sup}, \phi - \phi_3(\psi) - v = \rho_1\},$$

$$C_{4B_1} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi_{inf} < \psi < \psi_{sup}, -(\phi - \phi_3(\psi)) + v = \rho_1\},$$

junto con las “tapas” superior e inferior que son,

$$T_{\{B_1sup, B_1inf\}} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi \in \{\psi_{sup}, \psi_{inf}\}, |\phi - \phi_3(\psi)| + |v| = \rho_1\}.$$

$$b_1^+ = C_{3B_1} \cup C_{4B_1} \cup T_{\{B_1sup, B_1inf\}}.$$

Conjuntos de salida y entrada para B_2

a) El conjunto de salida b_2^- se forma de las “caras”,

$$C_{1B_2} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi_{inf} < \psi < \psi_{sup}, \phi - \phi_3(\psi) + v = \rho_2\},$$

$$C_{2B_2} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi_{inf} < \psi < \psi_{sup}, \phi - \phi_3(\psi) + v = -\rho_2\},$$

y la tapa superior,

$$T_{B_2sup} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi = \psi_{sup}, |\phi - \phi_3(\psi)| + |v| = \rho_2\},$$

es decir, $b_2^- = C_{1B_2} \cup C_{2B_2} \cup T_{B_2sup}$.

b) Mientras que el conjunto de entrada b_2^+ está conformado por las “caras”,

$$C_{3B_2} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi_{inf} < \psi < \psi_{sup}, \phi - \phi_3(\psi) - v = \rho_2\},$$

$$C_{4B_2} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi_{inf} < \psi < \psi_{sup}, -(\phi - \phi_3(\psi)) + v = \rho_2\},$$

junto con la tapa inferior que es,

$$T_{B_2inf} = \{(\phi, v, \psi) \mid \psi = \psi_{inf}, |\phi - \phi_3(\psi)| + |v| = \rho_2\}.$$

$$b_2^+ = C_{3B_2} \cup C_{4B_2} \cup T_{B_2inf}.$$

Probaremos que todas las condiciones anteriores, son consistentes con las cuatro hipótesis del Teorema C.1. Verificamos cada una de ellas de forma separada.

- a) El origen es el único de equilibrio para el valor de $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, véase la condición (3.12). Consideremos una vecindad alrededor del origen,

$$V_{\tilde{\delta}}(P_0) = \{(\phi, v, \psi) \mid \|(\phi, v, \psi)\| < \tilde{\delta}\}, \quad (3.91)$$

con $V_{\tilde{\delta}}(P_0) \subset B_1$. Una trayectoria $\vec{x}(\xi)$ que parte de $\vec{x}_0 \in W^s(P_0)$, permanecera en $V_{\tilde{\delta}}(P_0)$. En términos de los conjuntos T^\pm , D^\pm y ϕ^\pm (que se definen en el Apéndice C), la explicación es la siguiente: al elegir $x_0 \in W^s(P_0)$, tenemos que $x_0 \notin D_1^-$, es decir $\vec{x}(\xi)$ nunca “toca” a b_1^- , el cual es el conjunto de salida de B_1 . Así $\vec{x}(\xi) \subset B_1$, para toda ξ .

- b) Al elegir un valor de $\epsilon > 0$ y $\rho_1 > 0$, suficientemente pequeños, se tiene que $|v|$ y $|\phi - \phi_1(\psi)|$ con cercanas a cero. Con lo cual las tres componentes, $(\phi'(\xi), v'(\xi), \psi'(\xi))$, del campo vectorial asociado a (3.7), restringido al bloque aislante B_2 , son cercanas a cero. Para evitarlo, sobre la tercera componente del sistema (3.7) en B_2 , se exigira la siguiente condición,

$$0 < \tilde{C} < -\frac{\epsilon}{c}(\phi - \tilde{\gamma}\psi), \quad (3.92)$$

con $\tilde{C} = \text{constante}$. En efecto, en la región¹⁰ en donde se define B_2 , $(\phi - \tilde{\gamma}\psi) > 0$, además $(-\epsilon/c) > 0$. De la condición (3.92),

$$K_1 + K_2\phi < \psi, \quad \text{con} \quad K_1 = \frac{C\epsilon}{\epsilon\tilde{\gamma}} \text{ y } K_2 = \frac{1}{\tilde{\gamma}}, \quad (3.93)$$

donde $(\psi, \phi, v) \in B_2$.

¹⁰Al considerar las ceroclinas de (3.7), que son $v = 0$, $\psi - f(\phi) = 0$ y $(\phi - \tilde{\gamma}\psi) = 0$. Dado que se exigió la condición de un sólo punto de equilibrio, el origen de coordenadas para el sistema (3.7). Ésta implica que en el plano $v = 0$, la gráfica de la ceroclina $\psi - f(\phi) = 0$, se ubica por abajo de la gráfica de la ceroclina, $(\phi - \tilde{\gamma}\psi) = 0$. Véase el capítulo 2, página 59. Y dado que B_2 , se define en una vecindad de un tramo de la ceroclina $\psi - f(\phi) = 0$, se cumple la condición b).

Con (3.93) cualquier trayectoria que entra al bloque B_2 , va a salir, dado que el campo vectorial se encuentra apuntando en “gran medida” a la tapa superior de B_2 , la cual es un conjunto de salida. En términos del teorema C.1, se exige esta condición para que una trayectoria que ingresa a B_2 , no permanezca en él, cuando ξ aumenta.

c) Para que se cumpla, construimos el conjunto Δ de la forma siguiente,

$$\Delta = \{(\phi, v, \psi) \in b_2^- \mid \psi^* - \tilde{\psi} \leq \psi \leq \psi^* + \tilde{\psi}, \phi - \phi_3(\psi) + v = -\rho_2\}, \quad (3.94)$$

$\tilde{\psi} = \text{Constante}$. El conjunto Δ , puede observarse en las figuras 3.8 y 3.11. Además, $\Delta \subset C_{2B_2} \subset b_2^-$. Es decir Δ está contenido en el conjunto de salida del bloque B_2 .

Para un valor de $\epsilon > 0$ muy pequeño y si pedimos que los términos, $\tilde{\psi}$ y ρ_2 del conjunto Δ sean suficientemente pequeños, vamos a tener que $\Delta \subset D_1^+$, para $c = c^*$ con ρ_1 fijo, lo cual puede verse en la figura 3.11. Esto significa que cualquier trayectoria que salga por Δ va a entrar en el bloque B_1 en un tiempo finito.

Consideramos el conjunto $b_2^- \setminus \Delta$, el cual está constituido de dos componentes, que llamaremos β_0 y β_1 ,

i) Donde β_1 está ubicado sólo en una cara, C_{2B_2} , en la cual se encuentra Δ . Es decir

$$\beta_1 = \{(\phi, v, \psi) \in b_2^- \mid \psi_{inf} < \psi \leq \psi^* - \tilde{\psi}, \phi - \phi_3(\psi) + v = -\rho_2\}.$$

ii) Mientras que β_0 esta formado por la unión de C_{1B_2} , con la tapa superior T_{B_2sup} y una parte de la cara C_{2B_2} donde se ubica Δ . Es decir, si definimos un conjunto \tilde{A} ,

$$\tilde{A} = \{(\phi, v, \psi) \in b_2^- \mid \psi^* + \tilde{\psi} \leq \psi < \psi_{sup}, \phi - \phi_3(\psi) + v = -\rho_2\},$$

y consideramos la cara de B_2 ,

$$C_{1B_2} = \{(\phi, v, \psi) \in b_2^- \mid \psi_{inf} < \psi < \psi_{sup}, \phi - \phi_3(\psi) + v = \rho_2\},$$

junto con la tapa superior que tiene la forma,

$$T_{supB_2} = \{(\phi, v, \psi) \in b_2^- \mid \psi = \psi_{sup}, |\phi - \phi_3(\psi)| + |v| \leq \rho_2\},$$

entonces $\beta_0 = \tilde{A} \cup C_{1B_2} \cup T_{supB_2}$.

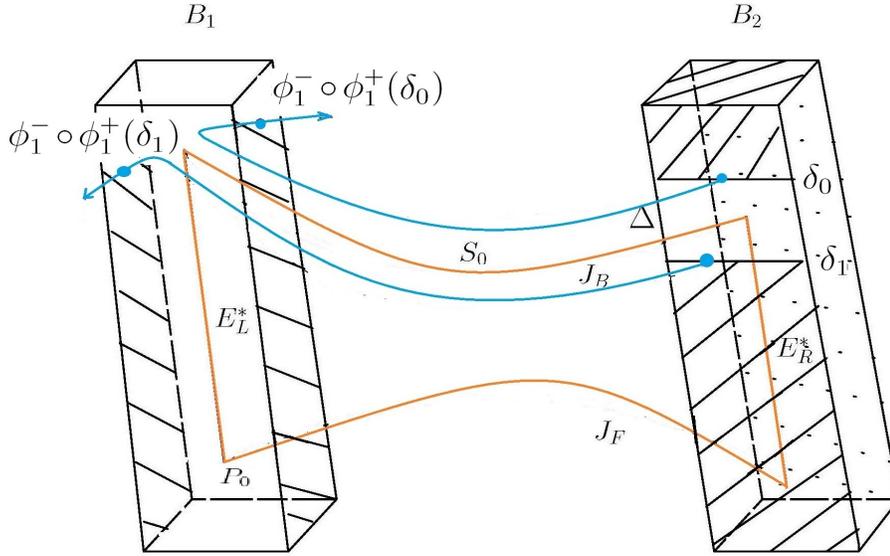


Figura 3.11: Aquí ilustramos la condición c) del Teorema C.1, color azul. Figura tomada de Durand [14].

β_1 corresponde a una parte sombreada del bloque B_2 , mientras que otra parte sombreada corresponde a β_0 , Además tenemos que $\beta_1 \cap \beta_0 = \emptyset$. Si intersectamos a β_0 y β_1 con el conjunto Δ obtenemos dos conjuntos que se definen de la forma siguiente,

$$\delta_1 = \beta_1 \cap \Delta = \{(\phi, v, \psi) \in b_2^- \mid \psi = \psi^* - \tilde{\psi}, \phi - \phi_3(\psi) + v = -\rho_2\} \quad (3.95)$$

$$\delta_0 = \beta_0 \cap \Delta = \{(\phi, v, \psi) \in b_2^- \mid \psi = \psi^* + \tilde{\psi}, \phi - \phi_3(\psi) + v = -\rho_2\} \quad (3.96)$$

Nuevamente utilizando el análisis cuando $\epsilon = 0$, escogemos los parámetros $\tilde{\psi}$ y ρ_2 suficiente pequeños de los tres conjuntos $\Delta, \delta_0, \delta_1 \subset C_{2B_2}$. De tal manera que, $\phi_1^- \circ \phi_1^+(\delta_0) \subset C_{1B_1}$ y $\phi_1^- \circ \phi_1^+(\delta_1) \subset C_{2B_1}$, en decir están ubicados es distintas “componentes” de b_1^- ; lo cual se ve en las figuras 3.11 y 3.12.

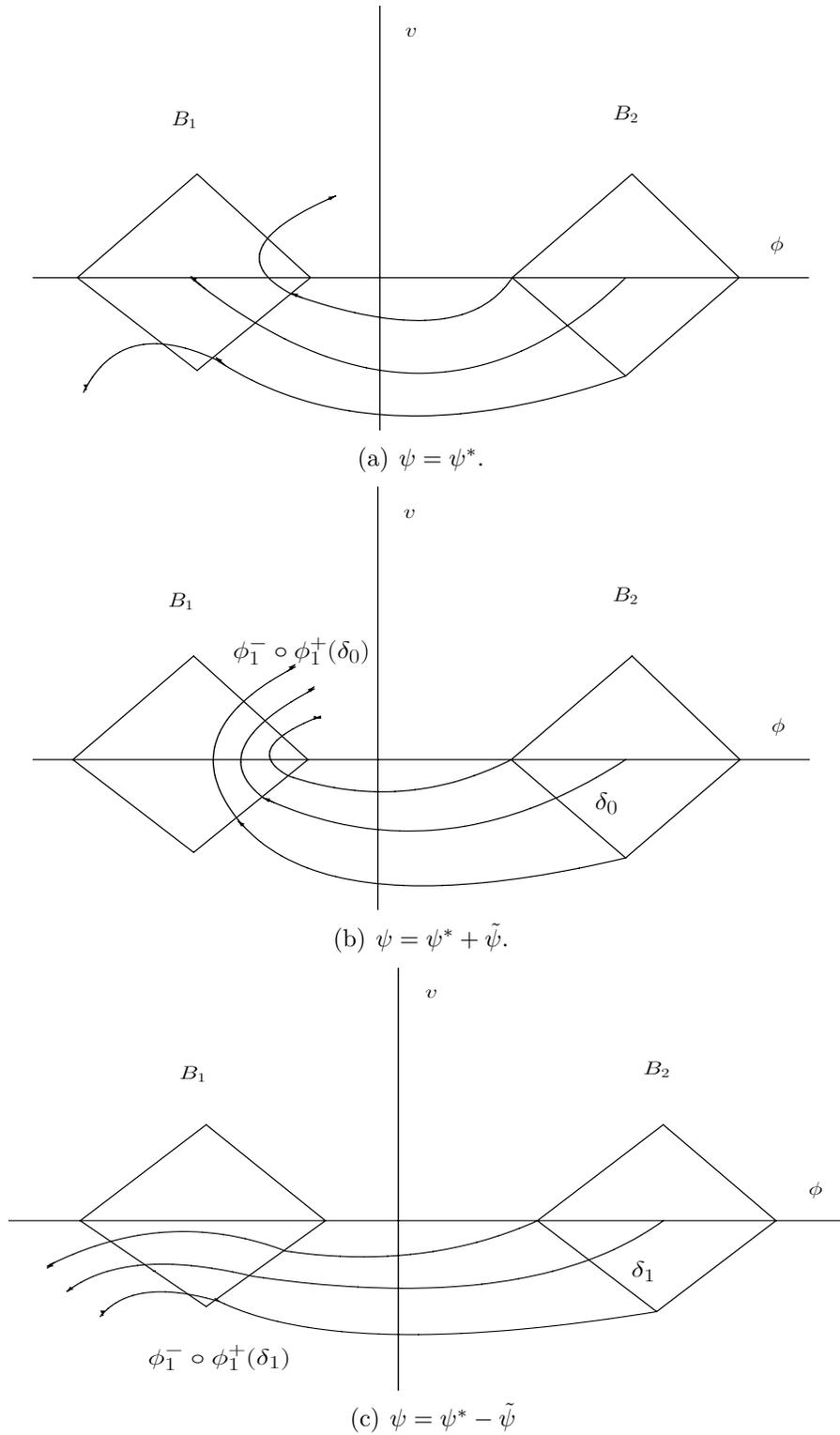


Figura 3.12: Trayectorias asociadas a los bloques aislantes del sistema (3.7), con $\epsilon = 0$ y tres valores diferentes del parámetro $\psi \in [\psi_{inf}, \psi_{sup}]$. Tomada de Durand [14].

Los símbolos $\phi_1^- \circ \phi_1^+(\delta_0)$ y $\phi_1^- \circ \phi_1^+(\delta_1)$, significan lo siguiente: si elegimos sin pérdida de generalidad una condición inicial $\vec{x}_0 \in \delta_0$ y “seguimos” la trayectoria correspondiente, entra al bloque B_1 en un tiempo finito $T^+(\vec{x}_0)$, luego ésta toca a b_1^+ la región de entrada en el punto $\vec{x}_1^+ = \phi_1^+(\vec{x}_0)$, posteriormente si ahora “seguimos” la trayectoria que corresponde a \vec{x}_1^+ , ésta sale del bloque B_1 a través del conjunto de salida b_1^- en un tiempo finito $T^-(\vec{x}_1^+)$, al punto donde la trayectoria que corresponde a \vec{x}_1^+ , toca a b_1^- , se define por $\phi_1^-(\vec{x}_1^+) = \phi_1^- \circ \phi_1^+(\vec{x}_0)$.

- d) Usamos el análisis de la dinámica del campo vectorial de (3.7), para $\epsilon = 0$, las trayectorias son de la forma $(\phi(\xi), v(\xi))$, pediremos que (ϕ_0, v_0) , se ubique en la variedad inestable de P_0 , el cual es un punto silla en el plano ϕv , véase el análisis local hecho en la sub-sección 3.2.2. Así tendremos que: a) $\phi_2^- \circ \phi_2^+(\phi(\xi), v(\xi)) \in \beta_0$ para $c = c^* - \eta$, b) $\phi_2^- \circ \phi_2^+(\phi(\xi), v(\xi)) \in \beta_1$ para $c = c^* + \eta$. Observe la figura 3.13.

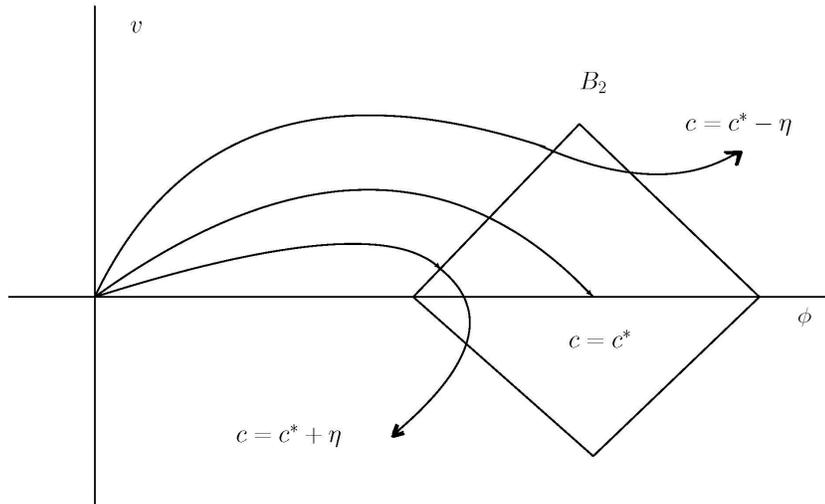


Figura 3.13: Las dos trayectorias de la condición d) con $\epsilon = 0$. Para los valores de $c = c^* - \eta$ y $c = c^* + \eta$.

Es decir, al aumentar ξ , la trayectoria $(\phi(\xi), v(\xi))$ sale del bloque B_1 y después entra al bloque B_2 , para posteriormente salir de él por caras opuestas (lados opuestos del rombo), para los valores de $c^* - \eta$ y $c^* + \eta$ respectivamente. La trayectoria tridimensional $\vec{x}(\xi)$ con condición $\vec{x}_0 \in W^u(P_0)$ y $\vec{x}_0 \in D_2^+$, tendrá una dinámica “parecida” a la que se da en el plano ϕv para $\psi = C$, lo anterior es debido a la proposición 3.3, la cual nos garantiza la continuidad de $W^u(P_0)$ respecto a los parámetros ϵ y c . En un tiempo finito, $T^+(\vec{x}_0)$, la trayectoria $\vec{x}(\xi)$ sale del bloque B_2 , por β_0 para $c^* - \eta$, mientras que sale de B_2 a través de β_1 para $c^* + \eta$. Véase la figura 3.14, las dos trayectorias en color verde representan la idea anterior.

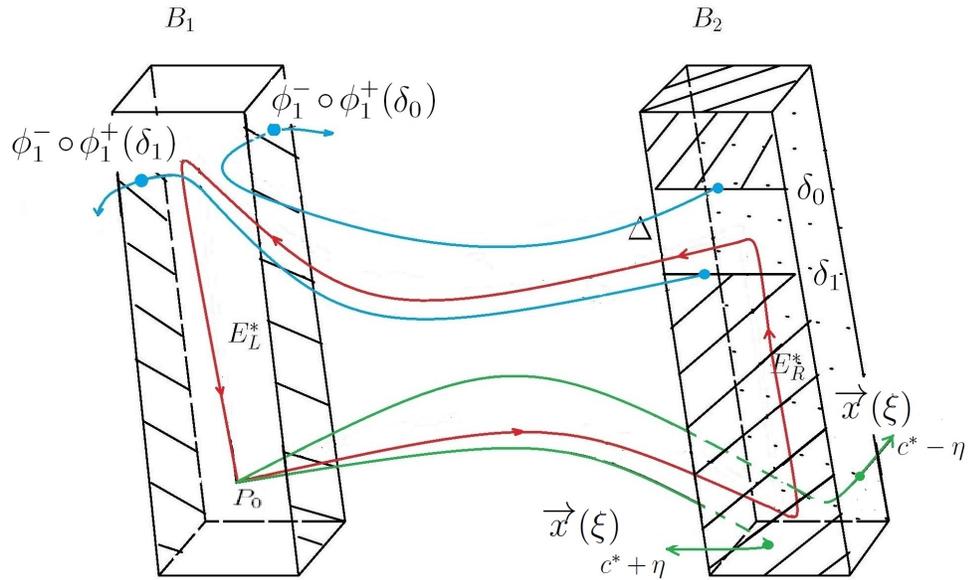


Figura 3.14: Condiciones d) y e) del Teorema C.1. Figura obtenida de Durand [14].

Por último, debemos elegir un valor de $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño, con el objetivo de que todas las hipótesis anteriores se satisfagan. Por lo tanto existe una trayectoria homoclínica en el origen para el sistema (3.7). La trayectoria homoclínica sale del origen, a través de $W^u(P_0)$ para salir del bloque B_1 por la “cara” C_{1B_1} y, posteriormente, entra en el bloque aislante

B_2 por la “cara” C_{4B_2} , después sale de aquél a través del conjunto $\Delta \subset C_{2B_2}$ para introducirse en el bloque B_1 por la “cara” C_{3B_1} llegando al origen a través de la variedad estable. Véase la figura 3.14, la trayectoria homoclínica se presenta en color rojo. \diamond

El lector interesado en conocer la demostración de que la trayectoria homoclínica “tiende” al conjunto S_0 cuando $\epsilon \rightarrow 0$, puede consultar la tesis de Durand [14].

Aunque ya hemos demostrado la existencia de una familia de trayectorias homoclínicas de (3.7), una trayectoria para cada valor específico de los parámetros. Nuestra intención es encontrar la forma de una de éstas, en el espacio de fase de tres dimensiones asociado al sistema (3.7), para ello utilizaremos una aproximación lineal del polinomio cúbico $f(u)$, también debemos conocer el comportamiento de las tres componentes $(\phi(\xi), v(\xi), \psi(\xi))$, de la trayectoria homoclínica, con respecto a la variable ξ . Éste será el objetivo de la siguiente sub-sección.

3.2.4. Algunos trabajos posteriores

En la literatura consultada, varios autores han probado la existencia de la trayectoria homoclínica para el sistema (3.7), usando técnicas diferentes a la de Carpenter. Sin embargo, la técnica de bloques aislantes es una herramienta mucho más poderosa. Lo que haremos en esta subsección será conjuntar los resultados de Evans, Fenichel y Feroe [15], Feroe [16] y Rinzel y Keller [49], sobre la existencia de trayectorias homoclínicas, en tales trabajos se sustiye el polinomio $f(u)$ de (3.7), por una aproximación lineal. No exponemos las demostraciones, el lector interesado puede acudir a las referencias que se citan. El propósito que tales trabajos es encontrar una solución de tipo onda viajera para la ecuación de FitzHugh-Nagumo (3.2).

Trayectoria homoclínica

En el trabajo de Feroe [16], se considera el sistema (3.2) y se supone $I_a = 0$. Además, se sustituye el polinomio cúbico $f(u)$ por la función lineal a trozos: $g(u) = -u + H(u - a)$, donde $H(u - a)$ es una función de Heaviside definida de la forma siguiente,

$$H(u - a) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq a, \\ 0 & \text{si } u < a. \end{cases} \quad (3.97)$$

En la figura 3.15, se ve la gráfica de $g(u)$.

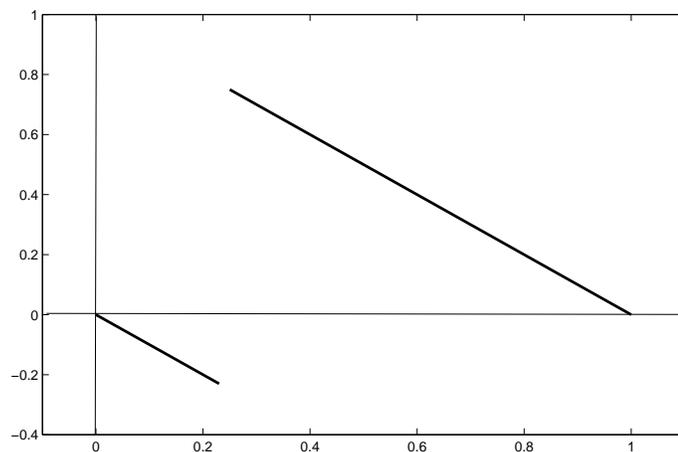


Figura 3.15: Gráfica de la función $g(u) = -u + \text{Heaviside}(u - a)$, con $a = 0.24$.

De manera que el sistema (3.2) se aproxima por el sistema lineal a trozos

$$u_t = u_{xx} - u + H(u - a) - w \quad (3.98a)$$

$$w_t = bu - \gamma w. \quad (3.98b)$$

Luego, se supone la existencia de soluciones de tipo onda viajera $u(x, t) = \phi(\xi)$ y $w(x, t) = \psi(\xi)$ donde $\xi = x + ct$ y $c > 0$, -que es consistente con nuestros resultados anteriores ya que utilizamos $\xi = x - ct$ con $c < 0$ - para el sistema (3.98). Al sustituir u y w dadas como antes se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales,

$$c\phi' = \phi'' - \phi + H(\phi - a) - \psi \quad (3.99a)$$

$$c\psi' = b\phi - \gamma\psi. \quad (3.99b)$$

con las condiciones de frontera,

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = 0 \text{ y } \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \psi(\xi) = 0.$$

Si definimos $\phi' = v$, el sistema anterior puede ser escrito como el sistema de tres ecuaciones diferenciales,

$$\phi' = v \quad (3.100a)$$

$$v' = cv + \phi - H(\phi - a) + \psi \quad (3.100b)$$

$$\psi' = \frac{b}{c}\phi - \frac{\gamma}{c}\psi. \quad (3.100c)$$

Posteriormente, Feroe demuestra la existencia de una trayectoria homoclínica para (3.100), de manera que ϕ la variable correspondiente al voltaje, posee las cuatro fases asociadas al potencial de acción en el axón de la neurona, esto lo dedujo utilizando métodos numéricos y usando los resultados de John Rinzel y Joseph Keller. Ellos, en su trabajo (véase [49]), enuncian teoremas que dan condiciones suficientes sobre los parámetros para la existencia de trayectorias homoclínicas, una para cada elección de parámetros del sistema de FitzHugh-Nagumo. El sistema que ellos consideran es

$$u_t = u_{xx} - u + H(u - a) - w \quad (3.101a)$$

$$w_t = bu. \quad (3.101b)$$

Este sistema es cualitativamente equivalente a nuestro sistema original (3.98) en el caso de que consideremos el parámetro γ “demasiado pequeño”. Posteriormente se supone la existencia de soluciones de tipo onda viajera

$$u(x, t) = \phi(x + ct), \quad w(x, t) = \psi(x + ct), \quad (3.102)$$

para $c > 0$, con las condiciones de frontera,

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \psi(\xi) = 0,$$

con $\xi = x + ct$, para (3.102) y lo transforman al sistema

$$c\phi' = \phi'' - \phi + H(\phi - a) - \psi \quad (3.103a)$$

$$c\psi' = b\phi, \quad (3.103b)$$

si definimos $\phi' = v$, al sistema (3.103) lo escribimos como el sistema de tres ecuaciones diferenciales

$$\phi' = v \quad (3.104a)$$

$$v' = cv + \phi - H(\phi - a) + \psi \quad (3.104b)$$

$$\psi' = \frac{b}{c}\phi. \quad (3.104c)$$

Estos autores dan condiciones sobre los parámetros a , b y c , para que exista una familia de trayectorias homoclínicas. Para ello usan básicamente métodos

numéricos y analíticos. Los siguientes teorema y proposición dan las condiciones suficientes, que deben satisfacer los parámetros del sistema (3.104), para la existencia de aquéllas.

Teorema 3.1 (Rinzel y Keller [49]) *Para cada conjunto de parámetros a , b y c que satisfacen la relación,*

$$c^2 > \frac{b}{1 + 2\sqrt{b}}, \quad (3.105)$$

el sistema (3.104) tiene trayectorias homoclínicas, es decir, para cada conjunto de éstos existe una solución de tipo onda viajera para (3.103) (distinta de cero), que satisface las condiciones de frontera,

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \psi(\xi) = 0. \quad (3.106)$$

Además ellos encuentran una cota inferior, c_{min} , para c . Ésta es

$$c_{min}(b) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1 + 2\sqrt{b}}}, \quad (3.107)$$

siempre que a cumpla la condición siguiente,

$$0 < a < \frac{1}{2}, \quad \text{con} \quad b \geq 0. \quad (3.108)$$

La siguiente proposición es importante.

Proposición 3.5 (Rinzel y Keller [49]) *Para valores positivos de a y b , donde $a < a_v(b) < \frac{1}{2}$, el sistema de FitzHugh-Nagumo (3.104), tiene una trayectoria homoclínica para el valor de la velocidad c_s y otra trayectoria homoclínica para c_f . Los valores de la velocidad satisfacen, $c_f > c_v(b) > c_s > c_{min}(b)$. Para $a = a_v(b)$ existe una única trayectoria homoclínica con velocidad de propagación $c_v(b)$, y aquéllas no existen para valores de $a > a_v(b)$ o para $a \leq 0$.*

El parámetro $a_v(b)$ es aproximado y su aproximación es

$$a_v(b) \approx \frac{1}{2[1 + 3\sqrt{3b}]}, \quad \text{con} \quad 0 \leq b < 1. \quad (3.109)$$

Luego ellos exhiben un conjunto de gráficas que ilustran la velocidad de propagación c_f y c_s para valores de a y b . Rinzel y Keller definen al valor de $c = c_s$, velocidad de propagación lenta, mientras que a $c = c_f$, la llaman velocidad rápida. Si observamos la gráfica de la figura 3.16, el valor de c depende tanto de a y de b , podemos escribir $c(a, b)$. Para una elección de $b = 0.2$, tenemos $c(a, 0.2)$, c sólo depende de a , si evaluamos en $a = 0.24$. Entonces, $c(0.24, 0.2)$ tiene dos valores que son $c_s(0.24, 0.2) \approx 0.47$ y $c_f(0.24, 0.2) \approx 1.076$. Los puntos sobre la gráfica de $c(a, b)$ indicados por el símbolo \times , corresponden a $c_v(b)$.

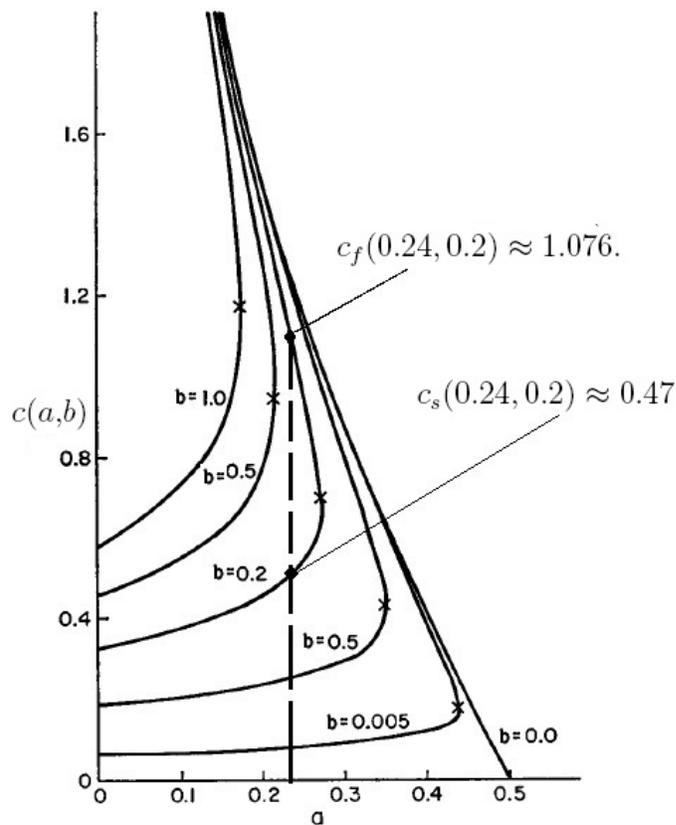


Figura 3.16: Relación entre los parámetros a , b y $c(a, b)$ de la ecuación (3.104), para los que existe una trayectoria homoclínica. El segmento de línea discontinua vertical, corresponde al valor de $a = 0.24$, con $b = 0.2$. Figura tomada de Rinzel y Keller [49].

Para el conjunto de parámetros $c(a, b)$ del sistema (3.104), que satisfagan el teorema 3.1 y la proposición 3.5, aquél tiene una trayectoria homoclínica basada en el origen para $c_s(a, b)$ y para el valor de $c_f(a, b)$ hay otra trayectoria homoclínica de (3.104) en el origen. También se enuncian condiciones para la existencia de trayectorias homoclínicas “compuestas” para el sistema (3.104), las cuales tienen la característica de partir del origen, a través de $W^u(P_0)$ se alejan y se acercan al origen sin tocarlo, alejándose de aquél para después regresar y finalmente tocar al origen, a través de $W^s(P_0)$. Véase la figura 3.17.

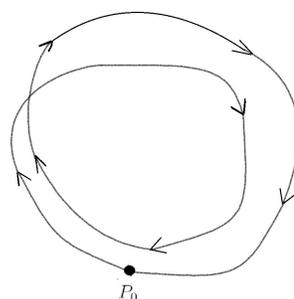


Figura 3.17: Comportamiento de una trayectoria homoclínica compuesta, basada en P_0 .

Aquellas son estudiados en el trabajo de Feroe [17] y Rinzel y Keller [49]. No trataremos a las trayectorias homoclínicas “compuestas”, salvo unas simulaciones numéricas. El lector interesado puede consultar los trabajos de Feroe [17] y Rinzel y Keller [49], si desea estudiar con más detalle estos resultados. Una vez hecha esta somera revisión sobre la existencia de trayectorias homoclínicas de (3.104), lo que nos planteamos es exhibir numéricamente la forma que tiene la trayectoria homoclínica del sistema (3.100). Este es el objetivo de la siguiente sub-sección.

3.3. Simulaciones numéricas

Sobre la base de los resultados expuestos en la sección anterior, los cuales garantizan que, para el juego apropiado de parámetros, existe una trayectoria homoclínica para el sistema (3.104) y dado que (3.104) es cualitativamente equivalente a (3.100), la intención de esta sección es obtener una aproxima-

ción numérica a esta trayectoria de (3.100). Para ello, nos auxiliaremos de la rutina `ode23` del *Software* MATLAB, para obtener la solución numérica de (3.100), correspondiente a la trayectoria homoclínica mencionada.

3.3.1. Trayectoria homoclínica simple

Ahora vamos a realizar un conjunto de simulaciones numéricas del sistema (3.100), con el objetivo de obtener aproximaciones a las trayectorias homoclínicas de (3.100) y, por lo tanto, una aproximación al pulso que simula el potencial de acción descrito por el sistema FitzHugh-Nagumo. Para ello utilizaremos el trabajo de Feroe. En éste se dan los valores de los parámetros correspondientes para los que existe una trayectoria homoclínica siempre que $\gamma > 0$. Estos valores los sustituimos en el sistema (3.100) y obtenemos la trayectoria que se observa en la figura 3.17.

Aquí hemos usado el valor de la velocidad para $c = c_s$. Debemos decir que la condición inicial \vec{x}_0 debe ser la adecuada para que la variable ϕ , que corresponde al voltaje, exhiba las características de la trayectoria homoclínica. Más específicamente, la condición inicial debe ser elegida sobre la aproximación lineal de la variedad inestable $W_c^u(P_0)^+$. A fin de que la trayectoria homoclínica se vea es necesario seleccionar la escala de los ejes ϕ, v y ψ , adecuados. En la figura 3.18, exhibimos la trayectoria homoclínica; mientras que en la figura 3.19, esbozamos las tres componentes, $(\phi(\xi), v(\xi), \psi(\xi))$ de aquélla. Observe la figura 3.19.a), que corresponde a la componente ϕ de la trayectoria asociada al voltaje. En ella se ve claramente el comportamiento cualitativo del potencial de acción, con sus cuatro fases respectivas: ascenso, excitación, refracción y recuperación. La trayectoria homoclínica que se exhibe en la figura 3.18, es sólo una aproximación numérica, por el hecho de que las condiciones de frontera impuestas a las variables ϕ y ψ , significan que la trayectoria debe salir y regresar al punto de equilibrio (el origen) en un tiempo infinito. La trayectoria homoclínica presenta un comportamiento no “suave”, debido a que el campo vectorial de (3.100) tiene una discontinuidad en $\phi = a$, la cual proviene de haber usado la función de Heaviside que sustituye al polinomio cúbico. La trayectoria homoclínica presenta dos puntos donde no es “suave”, el primer punto donde $v'(\xi)$ cambia de forma discontinua ocurre cuando la trayectoria homoclínica sale del punto de equilibrio y sucede $\phi > a$. Después $v'(\xi)$, presenta otra discontinuidad al acercarse la trayectoria homoclínica al origen ya que entonces sucede que $\phi < a$. Véase los dos picos de $v(\xi)$ en la figura 3.19.b).

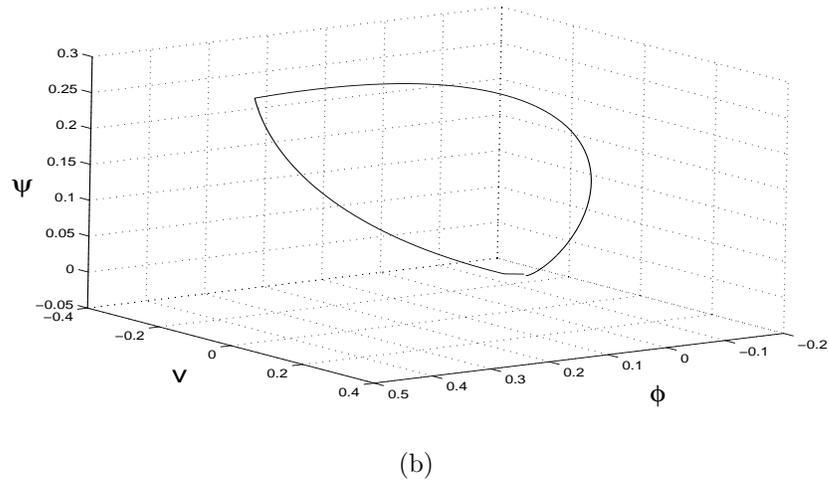
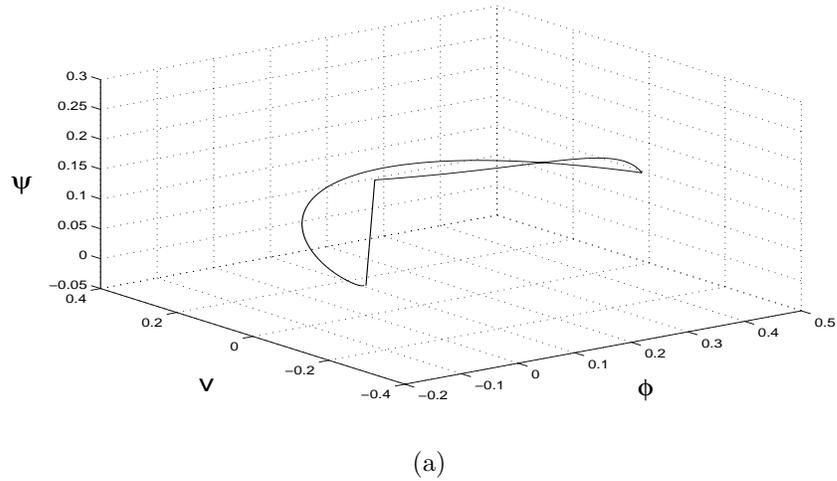
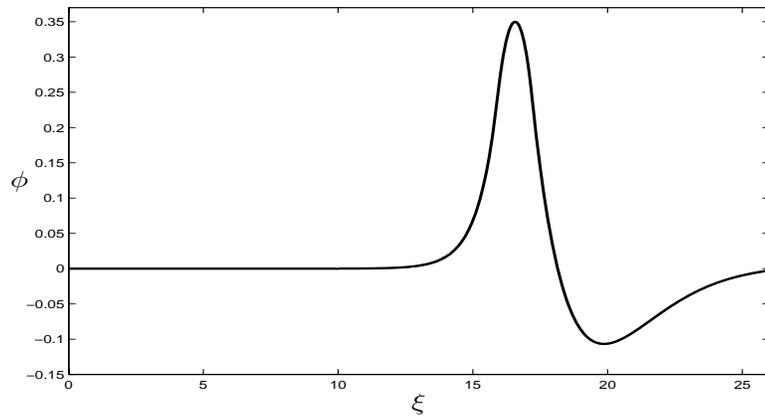
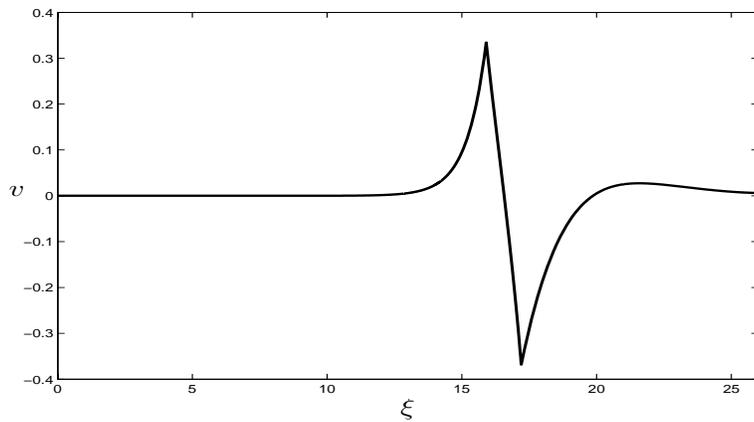


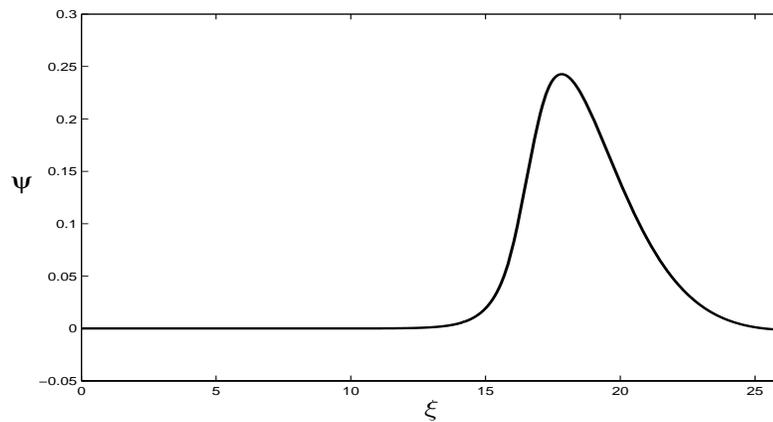
Figura 3.18: En las sub-figuras a) y b) observamos dos perspectivas de la trayectoria homoclínica para el sistema (3.100). El valor de los parámetros es: $a=0.24$, $b=0.2$, $c_s=0.472004118$ y $\gamma=0.05$, junto con la condición inicial $\vec{x}_0 = (0.57542806551541 \times 10^{-9}, 0.80151015629878 \times 10^{-9}, 0.16267762835466 \times 10^{-9})$, la cual está sobre la aproximación lineal de la variedad inestable $W_c^u(P_0)^+$ en el origen. El valor propio real positivo es $\lambda_1 = 1.39289375046537$.



(a)



(b)



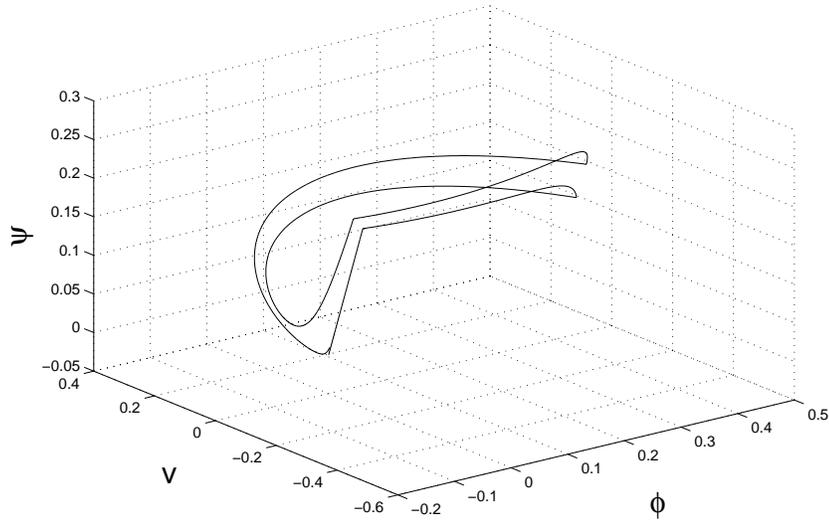
(c)

Figura 3.19: Gráfica de las tres componentes $(\phi(\xi), v(\xi), \psi(\xi))$ que definen a la trayectoria homoclínica. En a) se observa el potencial de acción viajando por el axón.

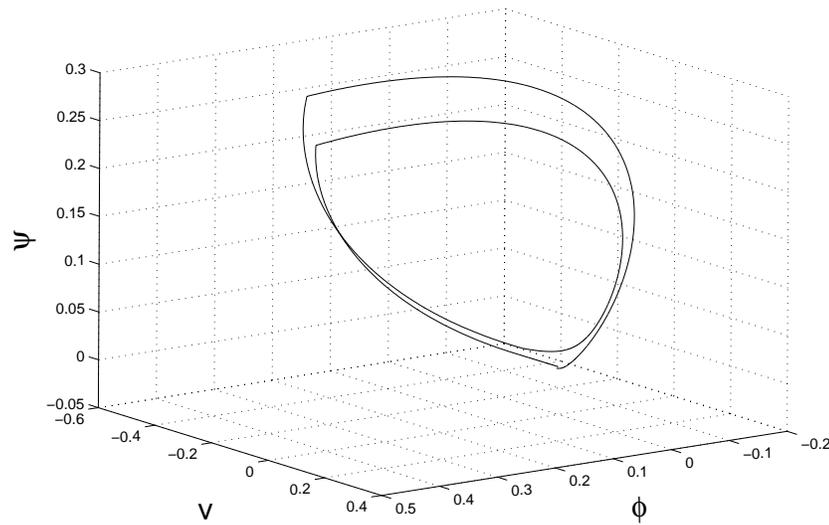
3.3.2. Trayectoria homoclínica compuesta

Feroe encontró que existe una trayectoria homoclínica compuesta de (3.100) con c_1 y otra trayectoria homoclínica compuesta para c_2 , los valores de c_1 y c_2 cumplen, $c_1 - c_s \approx 10^{-7}$ y $c_2 - c_f \approx 10^{-15}$. Nuevamente exhibimos una simulación con los parámetros adecuados y obtenemos la trayectoria homoclínica “compuesta” de la figura 3.20. Se trata de una trayectoria homoclínica “compuesta” en el sentido de que no se cierra después del primer viaje cuando el tiempo aumenta, lo hace hasta el segundo viaje. Utilizamos los parámetros de Feroe (véase [17]) para la trayectoria homoclínica compuesta, con un valor de c_* cercano a c_s . La condición inicial es elegida sobre la aproximación lineal a $W_c^u(P_0)^+$. Observe la figura 3.21.a) que corresponde a la variable ϕ asociada al voltaje, el cual es un potencial de acción que representa a un pulso “doble”. En la figura 3.21.b) se pueden observar ahora cuatro “picos”, esto debido a la discontinuidad del campo vectorial de (3.100) en $\phi = a$. Antes de los resultados de Rinzel y Keller, no se sabía que el potencial de acción tenía un comportamiento de tipo doble, de manera que los fisiólogos desarrollaron los experimentos correspondientes en el axón y se encontró aquel comportamiento del potencial de acción. Véase Rinzel y Keller [49]. Con esto terminamos la simulación numérica.

En el siguiente capítulo, nos dedicaremos a estudiar la dinámica del sistema de FitzHugh-Nagumo (3.2), para un fenómeno particular que surge del comportamiento del potencial de acción en el corazón humano. La variable asociada al voltaje dependerá de la variable espacial x y la variable temporal t .



(a)



(b)

Figura 3.20: Aquí observamos en a) y b) dos perspectivas de la trayectoria homoclínica “compuesta” para el sistema (3.100), para el conjunto de parámetros: $a=0.24$, $b=0.2$, $c_*=0.471848284895$ y $\gamma=0.05$, junto con la condición inicial siguiente que está sobre la aproximación lineal a la variedad inestable $W_c^u(P_0)^+$ $\vec{x}_0 = (0.575436451506569 \times 10^{-6}, 0.801492669481007 \times 10^{-6}, 0.162734111500134 \times 10^{-6})$. El valor propio es $\lambda_1 = 1.392843062657213$.

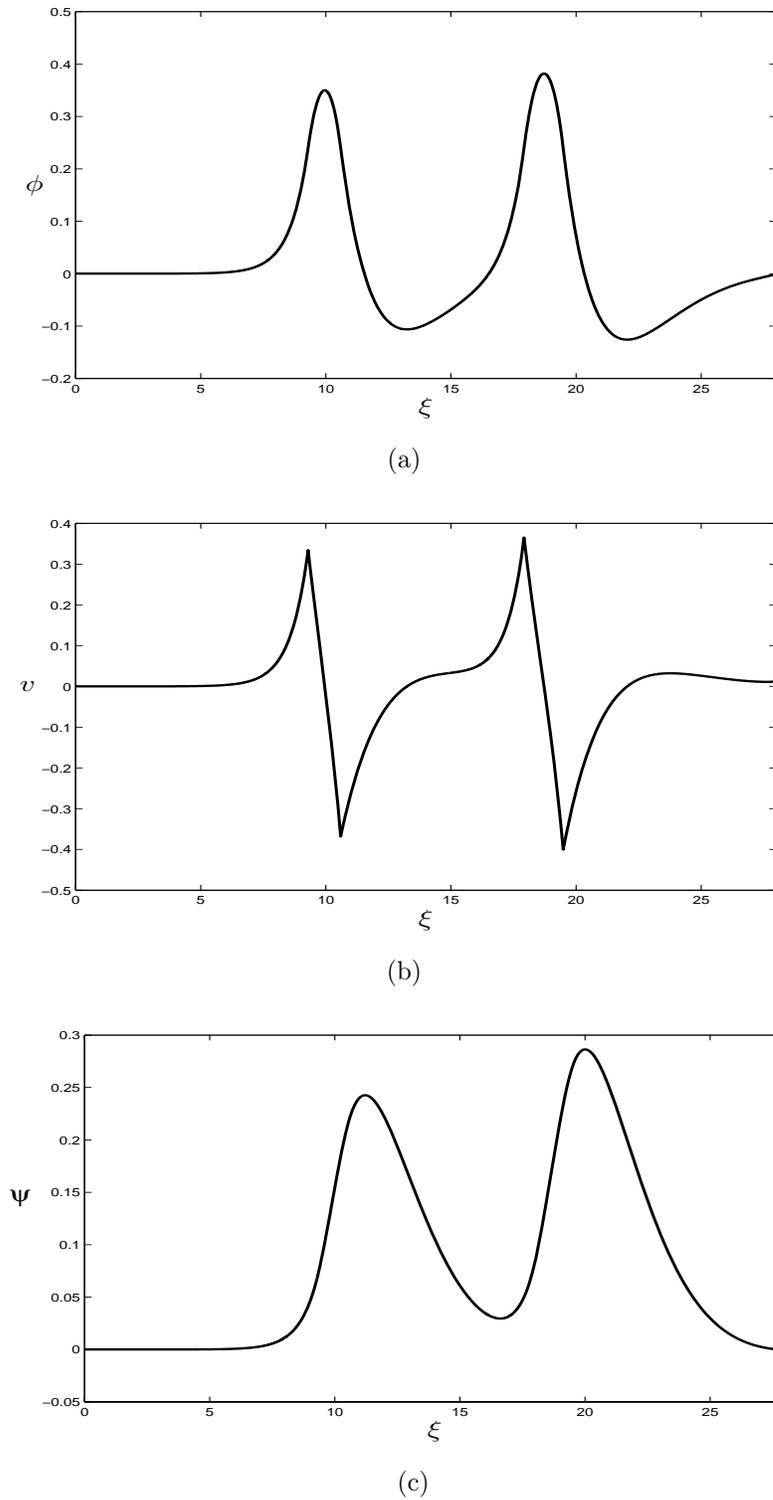


Figura 3.21: Gráfica de las tres componentes que determinan la trayectoria homoclínica “compuesta”. En *a*) se ve al potencial de acción que tiene un comportamiento de tipo doble y el cual viaja a través del axón.

Capítulo 4

Ondas de excitación bidimensionales

4.1. Introducción

En el Capítulo 3, estudiamos la existencia de soluciones de tipo onda viajera en una dimensión para el sistema de FitzHugh-Nagumo. En el capítulo que ahora iniciamos, estamos interesados en hacer una extensión de estos estudios ondulatorios para el mismo sistema cuando se considera un medio de dimensión dos. Viéndolo como un problema matemático éste, sin duda, es un problema importante. Sin embargo, queremos presentarlo, además, como un problema fundamental desde el punto de vista de la modelación matemática en procesos de conducción cardiaca. Para ello, haremos una sucinta exposición de la fisiología de nuestro vital órgano, centrándonos en la descripción de los procesos electroquímicos subyacentes que hacen posible la contracción del músculo cardiaco. En particular, cuando se presentan arritmias cardiacas.

Originalmente Hodgkin y Huxley plantearon su modelo matemático para explicar la propagación del impulso nervioso en el axón neuronal. Sin embargo, posteriormente, con las debidas adaptaciones, aquél se convirtió en piedra angular para el desarrollo de otros modelos que permitieron describir el potencial de acción en células cardiacas y después, con las extensiones apropiadas, de porciones del músculo cardiaco.

En el Capítulo 2, cuando se consideró el sistema en una dimensión, para efectos de la modelación matemática, se piensa al axón como un tubo largo y suficientemente delgado. Ahora, cuando se considera el sistema de FitzHugh-

Nagumo definido en un medio de dos dimensiones, se pretende que aquél modele la propagación del potencial de acción, en un pequeño corte plano de tejido de músculo cardiaco el cual, a su vez, está constituido por células acopladas por procesos difusivos.

La noción de medio excitable que usamos en este capítulo es la siguiente. Es un sistema formado por muchos, quizás millones, de elementos excitables, donde cada uno tiene el mismo estado de reposo y el mismo umbral de excitación. Éstos se encuentran acoplados a sus vecinos contiguos mediante procesos de difusión.

En este capítulo, vamos a tomar como objeto de estudio al corazón humano. Por ello, empezamos exponiendo su fisiología básica y después nos centramos en un tipo de enfermedad de éste: la *fibrilación ventricular*. Ésta se asocia con potenciales de acción que tienen la peculiaridad de rotar a través del tejido cardiaco. La sustentación fisiológica de este tipo de comportamiento se demostró experimentalmente en los trabajos de Allisee y colaboradores (véanse [3], [4] y [5]). En ellos se observó (en un corte de tejido cardiaco muy delgado) que, durante el desarrollo de la *fibrilación ventricular*, se presenta una propagación espacio-temporal del potencial de acción cuyo frente se “parece” al de una rama de espiral la cual rota con una velocidad angular constante.

En un trabajo más reciente, González y sus colaboradores (véanse [21] y [22]) muestran experimentalmente la existencia de ondas reentrantes en el tejido cardiaco del corazón de embrión de pollo. Los experimentos se hicieron considerando un cultivo de células cardiacas de embrión de pollo y la geometría del medio en el que se realizó el cultivo fue la de un disco anular.

Desde el punto de vista matemático, en este capítulo estamos interesados en exponer la demostración de un resultado que da condiciones suficientes para la existencia de las ondas reentrantes en el sistema de FitzHugh-Nagumo. Este resultado fue demostrado recientemente por Alford y Auchmuty (véase [6]). En éste se utilizan las ecuaciones de FitzHugh-Nagumo definidas en un anillo y, posteriormente, en un segundo análisis, el dominio es un disco anular. Cada problema, tiene sus condiciones de frontera e iniciales. El estudio conduce a determinar las relaciones que guardan los parámetros incluidos en este sistema para la existencia de ondas reentrantes.

En este capítulo exponemos de forma resumida, primero, las bases experimentales (fisiológicas) de la existencia de ondas reentrantes y después lo hacemos desde el punto de vista matemático. El lector interesado en profundizar

puede consultar el Capítulo 4, de la referencia [50], en el cual encontrará una lista de publicaciones sobre el particular.

4.2. Sobre las ondas del corazón

4.2.1. La fisiología del corazón

El corazón es un órgano que en los vertebrados, tiene la función de bombear la sangre al cuerpo. El corazón tiene el tamaño aproximado de un puño cerrado y se encuentra en la parte inferior del esternón y se extiende a la izquierda del cuerpo. Geométricamente, tiene la forma de un cono invertido, con la base hacia a la derecha y dirección hacia atrás. Nuestro vital órgano se encuentra constituido por un músculo que lo envuelve: el músculo cardiaco, el cual consta de tres capas: endocardio, miocardio y pericardio. El miocardio lo forman un conjunto de células denominadas miocitos, las cuales a su vez, forman fibras dispuestas en capas.

Partes y funciones

El corazón se forma de cuatro cavidades, dos ellas se ubican en la parte superior, una a la izquierda y otra a la derecha: *las aurículas*. Mientras que las otras dos, se encuentran en la parte inferior y se llaman *ventrículos*, uno a la derecha y otro a la izquierda. Véase la figura 4.1. Durante el proceso de circulación de la sangre a través del cuerpo, la sangre que retorna desde los tejidos corporales, ingresa al corazón por la aurícula derecha a través de dos grandes venas: la cava superior y la cava inferior. Al mismo tiempo, la sangre que retorna de los pulmones, entra a la aurícula izquierda a través de las venas pulmonares. Las aurículas tienen pared delgada en comparación con la de los ventrículos. Éstas, cuando reciben sangre, aumentan de tamaño y, por consiguiente, la presión en su interior aumenta. Este aumento de presión genera la apertura de válvulas ubicadas entre las aurículas y ventrículos, así la sangre pasa de las aurículas a los ventrículos. Cuando los ventrículos se llenan, las válvulas se cierran (debido a que desaparece la diferencia de presión que origina la apertura) y los ventrículos se contraen simultáneamente. Cuando el corazón se contrae, la sangre dentro de los ventrículos sale del corazón a través de la arteria aorta y la arteria pulmonar, irrigando de esta manera al cuerpo.

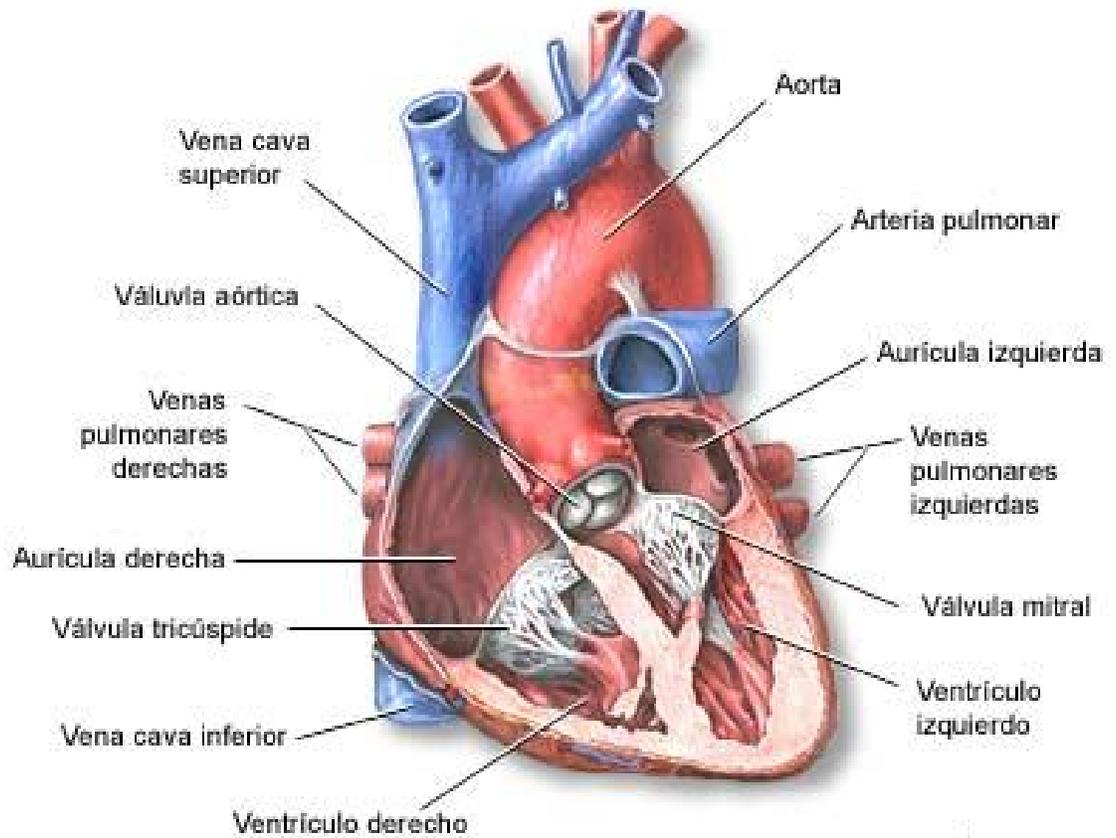


Figura 4.1: El corazón y las diferentes partes que lo constituyen. Figura obtenida de [59].

El latido cardíaco

La mayoría de los músculos esqueléticos se contraen sólo cuando reciben un impulso nervioso a través de un nervio motor. La intensidad de la contracción, depende de la cantidad de fibras musculares que responden al estímulo. En el caso del corazón, los miocitos que componen al miocardio, responden a un estímulo común y la fuerza de contracción no depende de la cantidad de fibras musculares que se activan, esto se debe a que todas se activan. Las células del corazón, aunque hay características que sólo ellas poseen, comparten propiedades con aquellas que forman el sistema nervioso. En particular, son excitables cuando se les estimula con un voltaje cuyo valor sobrepasa un cierto umbral. Esto, además, provoca una contracción cuando la célula se relaja. Dado que el músculo cardíaco lo constituyen millones de células contráctiles y excitables, el efecto *cooperativo* de todas ellas hacen que aquél, como un todo sea también, contráctil. De esta manera, se produce una contracción del músculo cardíaco. Ésta es causada por un potencial de acción que se inicia en un área especial del corazón: el *nodo sinoaricular*, ubicado en la parte superior de la aurícula derecha. El nodo sinoaricular está formado por células musculares cardíacas, las cuales envían la señal eléctrica, con una frecuencia de entre 60 y 90 señales por minuto. Este es el marcapasos natural del corazón.

Desde el marcapasos natural, el impulso eléctrico se propaga a las aurículas derecha e izquierda, lo que produce la contracción de éstas. Aproximadamente después de 100 milisegundos de la activación del marcapasos, los impulsos viajan a lo largo de fibras de conducción especiales y se estimula una segunda área de tejido: el nodo auriculoventricular. Desde éste, los impulsos son llevados por las fibras musculares que forman el *haz de His*, desde el cual pasan por las *fibras de Purkinje*, hasta las paredes de los ventrículos derecho e izquierdo, que se contraen simultáneamente.

El nodo auriculoventricular es la única conexión eléctrica entre las aurículas y los ventrículos. El nodo auriculoventricular está formado por fibras de conducción lenta. Esto impone un tiempo de retraso entre las contracciones auriculares y las ventriculares, de manera que la contracción auricular se completa antes de comenzar la contracción de los ventrículos.

El electrocardiograma

El electrocardiograma (ECG), es un registro a nivel de superficie del cuerpo de la actividad eléctrica del corazón. Este muestra el voltaje (diferencia de potencial) en diferentes partes del corazón cuando el tiempo transcurre.

El electrocardiograma es una “suma” de diferencias de potencial. De forma general, se consideran tres diferencias de potencial; los médicos le dan el nombre de *derivación* a cada una de éstas. Así, tenemos tres derivaciones (denotadas por I, II y III),

- a) La diferencia de potencial que se mide en la derivación I, es la correspondiente entre el brazo derecho y el brazo izquierdo,
- b) la derivación II, mide la correspondiente entre el brazo derecho a la pierna izquierda,
- c) la derivación III, da la diferencia de potencial entre el brazo izquierdo y pierna izquierda.

El ECG que corresponde al funcionamiento “normal”, representa una onda, la cual, para su estudio durante un ciclo cardiaco, suele dividirse en tres etapas principales: onda *P*, el complejo *QRS* y la onda *T*. En cada una de éstas ocurren eventos eléctricos diferentes. Así:

- a) La onda *P*, es la señal que corresponde a la activación del nodo sinoauricular que activa la parte correspondiente a las aurículas; mientras que la sub-etapa *PR* es la asociada al tiempo entre el inicio de la activación auricular y la ventricular. Su duración es de 0.11 segundos en una persona adulta; mientras que en un niño, dura de 0.07 a 0.09 segundos,
- b) El complejo (etapa) *QRS* corresponde a la diferencia de potencial que causa la contracción de los ventrículos derecho e izquierdo (despolarización ventricular). Este impulso es más potente que el de las aurículas, debido a la mayor masa muscular de éstas. La duración de esta etapa es de 0.06 a 0.1 segundos,
- c) La onda *T* corresponde a la repolarización de los ventrículos y dura aproximadamente 0.1 segundos.

La figura 4.2, muestra un ECG normal en un ciclo cardiaco. En el ámbito médico, el estudio de las variaciones que presente el ECG, es muy importante, pues éstas arrojan información de la anomalías cardiacas durante los latidos del corazón.

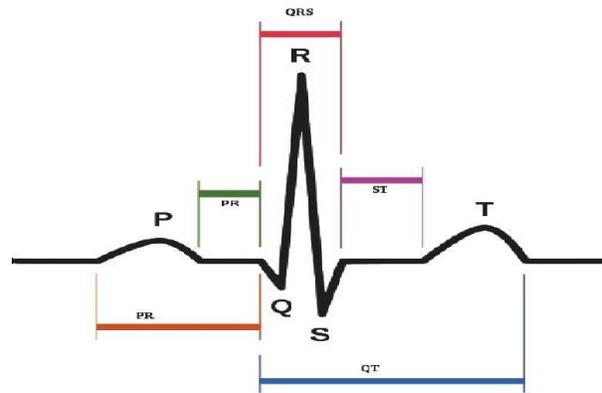


Figura 4.2: Trazo del electrocardiograma “normal”; en éste se muestran sus etapas principales. Figura tomada de [59].

Arritmias cardiacas

Si en el ECG se observa la repetición de la onda *P*, esto significa que el nodo sinoauricular se activa muy rápido. Ahora, si tenemos una onda *QRS* con una repetición rápida, esto se interpreta como un impulso en los ventrículos, el cual los contrae de forma rápida y puede que, además, sea desordenada. Este comportamiento se conoce como *fibrilación ventricular*. La figura 4.3 muestra un ECG de la fibrilación ventricular, aunque también existe la *fibrilación auricular*, ésta no es fatal.

Todo ritmo que se aparte de 60 a 90 palpitaciones por minuto, constituye una arritmia cardiaca, la cual puede ser hacia arriba y entonces se le llama *taquicardia*; mientras que si el ritmo disminuye, se le llama *bradicardia*.

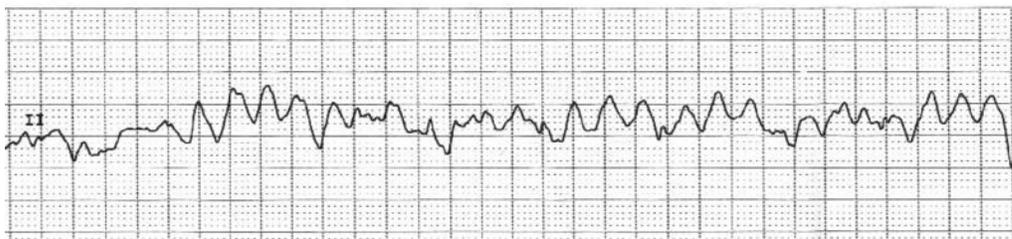


Figura 4.3: Electrocardiograma, asociado a la fibrilación ventricular.

Las perturbaciones que se presentan en los estados de excitación y relajación de las células cardiacas durante el potencial de acción, reciben el nombre

de *arritmias cardiacas*. Éstas se manifiestan como palpitaciones rápidas, lentas o sin sincronía alguna. Debemos decir que las arritmias, dependiendo de su efecto, pueden ser mortales para el paciente, por ejemplo la *fibrilación ventricular* o bien pueden afectar de manera leve el funcionamiento del corazón, como la *fibrilación auricular*. La fibrilación ventricular, se asocia con un impulso desordenado en los ventrículos, esto tiene efectos mortales ya que desorganiza el bombeo de la sangre y el sistema eléctrico del corazón. Dentro de las enfermedades del corazón, la fibrilación ventricular es la principal causa de muerte. Esto ha llevado a varios especialistas de diversas ramas del conocimiento (fisiólogos, médicos, físicos, matemáticos, etc.), a indagar sobre su comportamiento, incluidos los aspectos dinámicos subyacentes.

Se han realizado grandes esfuerzos para describir la dinámica de la fibrilación ventricular. En particular, hay evidencias experimentales que muestran que las *ondas reentrantes* son las responsables de la fibrilación. Una *onda reentrante* se define como un desorden electrofisiológico en el cual uno o varios frentes¹ de activación cíclicos viajan por rutas de propagación a través del miocardio. El efecto que esto tiene sobre las células que componen la ruta por la que transita la onda reentrante, es el siguiente: éstas se ven estimuladas con una frecuencia mayor que la frecuencia que emite el marcapasos natural. Es decir, en estas condiciones, el marcapasos natural (*nodo sinoauricular*), se sustituye por este pseudo-marcapasos local, lo que induce un desorden en el comportamiento eléctrico del corazón. Un individuo que presenta el síntoma de fibrilación ventricular debe ser tratado en los primeros diez minutos, pues de no hacerse morirá a causa de un paro cardiaco. Siendo más específicos, cuando sucede la fibrilación ventricular, la sangre rica en oxígeno no se bombea de forma correcta y, dado que el músculo cardiaco necesita un aporte constante de oxígeno, entonces aquél muere muy rápidamente. A continuación describimos con mayor detalle a las ondas reentrantes.

4.2.2. Las ondas reentrantes

Un poco de historia

Para la redacción de esta sub-sección nos basamos en el trabajo de Jalife [31]. Desde la época de Ebers Papyrus 3500 A.C, el hombre conocía algunas de las características (síntomas) de la fibrilación ventricular. En el libro, *De Humani Corporis Fabrica*, publicado en 1543, debido a la autoría de

¹El frente de onda se define como el conjunto de puntos que tienen el mismo potencial.

Andreas Vesalius, se hablaba de un movimiento (como de gusano) que ocurría justo antes de la muerte de corazones de animales. Posteriormente, en 1842, Erichsd publicó la primera descripción del inicio de la fibrilación ventricular como una patología asociada a la ligadura de la arteria coronaria.

En el año de 1850, Hoffa y Ludwing, demostraron que la fibrilación ventricular puede ser inducida por la aplicación de una corriente con una frecuencia específica. Yet Vulpian fue el primero en clasificar a la fibrilación ventricular como una arritmia. Esto lo publicó en 1874.

Durante 1887, McWilliam presentó una descripción visual de la fibrilación ventricular. Posteriormente demostró experimentalmente que ésta puede ser detenida aplicando una corriente eléctrica por medio de un par de electrodos: uno sobre el pecho donde se localiza el extremo superior de los ventrículos y el otro sobre la sexta o séptima vertebra dorsal. Con la aplicación oportuna de esta corriente, el corazón regresa a su estado normal. En 1908, el movimiento circular del potencial de acción, fue observado por Mayer, en cortes de tejido (en forma de disco). Mayer lo obtuvo de una parte superior de la estructura de la medusa, llamada “campana”. Debido a los trabajos de Mayer, se conocía que un estímulo aplicado después del final del periodo refractario, podía producir una fibrilación en el corazón.

La aportación de George Ralph Mines

Los trabajos realizados por el fisiólogo inglés George Ralph Mines, durante los primeros años de la década de 1910, dieron en aquella época una nueva perspectiva del estudio de las ondas reentrantes. Durante el periodo en el que hizo las mayores contribuciones, trabajaba en la Universidad de McGill, en Montreal, Canadá. La primera aportación de Mines (durante 1914) fue la de proponer una descripción del concepto de ondas reentrantes y su generación en los tejidos excitables. Sustentó sus ideas en los trabajos de Romanes, Kent, Mayer y Garrey, y con base en ellos, propuso que circuitos cerrados de tejido del miocardio, en forma de disco anular, pueden presentar un potencial en forma de onda de reentrada que rota. Con la finalidad de explicar sus ideas, considera de manera teórica, un tejido en forma de disco anular, como el que se observa en la figura 4.4.

Para las figuras 4.4.a) y 4.4.b), la región oscura dentro del disco anular, representa el potencial de acción que se propaga; mientras que el color blanco indica que el tejido no se encuentra excitado, la región punteada en los circuitos de las figura 4.4.a) y 4.4.b), indican la zona refractaria.

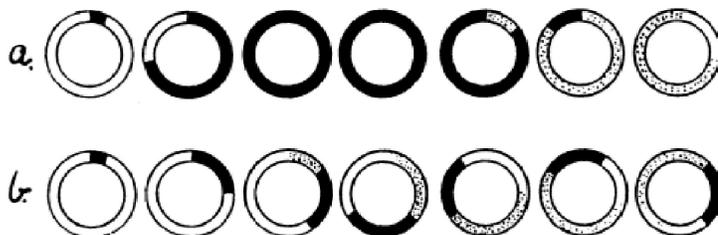


Figura 4.4: Figuras de George Ralph Mines. Obtenidas de [48].

En la figura 4.4.a), Mines explica que en condiciones normales estos circuitos cerrados, son excitables y una onda de excitación avanza de forma rápida por el circuito y, después de un cierto tiempo, se extingue. Mientras que en la figura 4.4.b), se tiene un tejido “anormal” con un retardo en la conducción del potencial. En aquél se observa una onda de tipo reentrante, la cual rota en el disco anular.

La segunda aportación importante de Mines, fue la de proponer que las ondas cíclicas de excitación en el miocardio tienen relación con la fibrilación. En efecto, Mines identifica que existen tiempos específicos en los cuales se puede producir por medio de un impulso eléctrico “apropiado”, una fibrilación en el miocardio.

El trabajo de Mines, era muy prometedor. Sin embargo, la noche del sábado 7 de Noviembre de 1914, el conserje del departamento de fisiología de la Universidad de McGill, lo encontró inconsciente en su laboratorio, con parte de su equipo de instrumentación conectado a su pecho. Inmediatamente fue llevado al Hospital Real Victoria, en donde recuperó la conciencia, sin embargo, después presentó convulsiones y murió. El diagnóstico de la autopsia no fue revelado. Pero se presume que él se propuso como sujeto de experimentación, para lo cual se indujo una arritmia al corazón. El propósito real de su experimento que culminó con su muerte, es un misterio.

Trabajando de forma separada, Garrey, en 1914 dio cuenta de un conjunto de experimentos. Uno de ellos consistió en el siguiente, al estar desarrollándose la fibrilación en los ventrículos del corazón de una tortuga, realizó un corte del tejido ventricular con forma de disco anular (de área más o menos cuatro centímetros cuadrados), se sorprendió, al observar que el tejido ventricular, mantenía el comportamiento de fibrilación. Más aun, cuando el “ancho” del disco anular era “pequeño”, surgían contracciones fibrilatorias



Figura 4.5: George Ralph Mines, 1886-1914. Fotografía tomada de [48].

en el tejido de forma desordenada pero que presentan la propiedad de que las correspondientes ondas de activación, tenían geometría parecida a ramas de espiral que rotaban y que surgían sucesivamente unas después de otras, de manera repetitiva. Este comportamiento ya lo había observado George Mines un año antes. Otra aportación de Garrey, fue el primer estudio formal, de la relación que guardan la fibrilación ventricular y el tamaño del corazón.

Durante 1930 Wiggers, fue el primero en proponer que, dado que las ondas reentrantes de excitación viajan en el músculo cardiaco, no se debería considerar a éstas actuando en dos dimensiones, si no más bien se debe pensar en ondas reentrantes viajando en un espacio de tres dimensiones. Además, usando técnicas cinematográficas de aquella época, describió cuatro etapas de la fibrilación ventricular.

En 1962, Moe postuló lo que llamó la hipótesis de “ondas múltiples” de la fibrilación ventricular. De hecho en 1964, Moe y colaboradores, probaron de forma numérica usando una computadora, la hipótesis de las “ondas múltiples” de la fibrilación ventricular en un medio de dimensión dos.

Bonke, en 1971, demostró que incluso en pequeños cortes de tejido (aparentemente homogéneo) de la aurícula, era posible producir una taquicardia. Él estimuló el tejido cardiaco con un voltaje, a una tasa de un estímulo cada 500 milisegundos, a estos estímulos los llamó básicos. Después aplicó 4 estímulos diferentes, en varios momentos durante el transcurso de los 500 milisegundos.

A estos los llama prematuros. La aplicación de un estímulo prematuro en el tejido cardiaco, puede provocar una serie de descargas rápidas (disparos) de voltaje en el tejido. Obsérvese la figura 4.6, en la que se muestra el registro del potencial de acción correspondiente a un estímulo prematuro aplicado en varios momentos, durante el intervalo de 500 milisegundos. El número debajo de cada registro del potencial de acción, indica el intervalo —medido en milisegundos— entre el último estímulo básico y el estímulo prematuro.

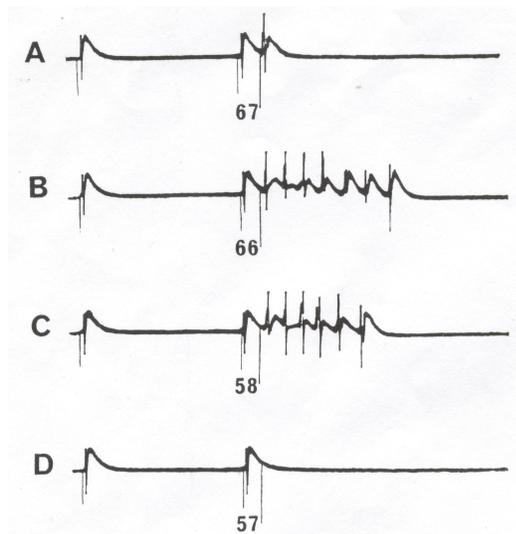


Figura 4.6: Aplicación de estímulos prematuros, en tiempos diferentes.

Después (en 1985), Allisee y su equipo lograron mapear la propagación de la onda reentrante de excitación. Para ello, usaron un corte delgado de tejido de la aurícula de un conejo. Su experimento demostró, por primera vez, que la propagación de la onda reentrante surge debido a una perturbación de la actividad del potencial de acción que viaja en el corte del tejido cardiaco. A continuación describimos sucintamente este último trabajo.

La aportación de Allisee y colaboradores

La evidencia experimental definitiva de que los potenciales con movimiento circular son los responsables el fenómeno de la fibrilación, fue proporcionada por Alessie y sus colegas. A continuación hacemos una breve descripción

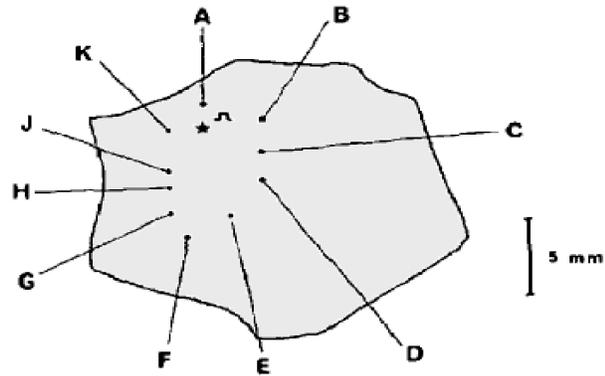
de estos trabajos. Para la redacción de esta parte, utilizamos las referencias [3], [4] y [5].

Durante la década de los 70 del siglo pasado, Alessie *et al*, proponen que los mecanismos responsables de la fibrilación en el corazón, puede deberse a dos factores:

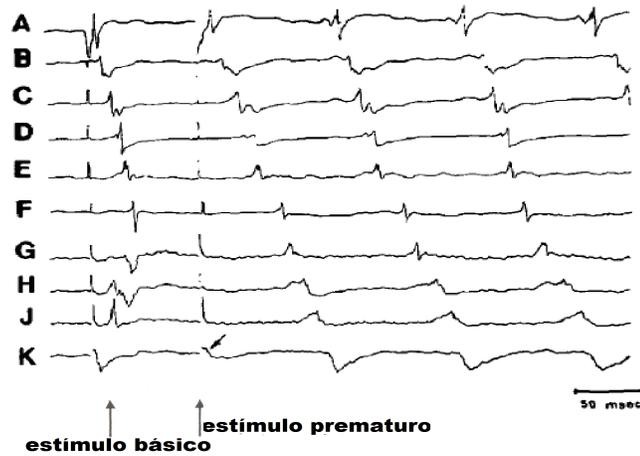
- a) La formación inusual de un potencial de acción,
- b) El movimiento circular del potencial.

Para los experimentos, Alessie y su equipo eligieron como sujetos de experimentación a conejos jóvenes con un peso de 2 a 3 kg, los cuales fueron anestesiados. Se procedió a remover el corazón de un conejo, se le extirpó la aurícula izquierda, incluyendo su parte superior. Teniendo cuidado en remover completamente el nodo sinoauricular, el nodo auriculoventricular y la bóveda interatrial. La bóveda interatrial es la parte del corazón que conecta la aurícula izquierda con las venas pulmonares. Las estimulaciones son realizadas con un electrodo bipolar, construido con alambres de plata. Éstos tienen un diámetro de 0.2 milímetros y la separación entre los electrodos es de 0.5 milímetros.

La figura 4.7, ilustra algunos de los resultados experimentales obtenidos por el equipo de Alessie. Aunque en el experimento realizado por Alessie y colaboradores, se colocaron electrodos en 300 sitios diferentes, en la figura 4.7.b), sólo se exhiben diez potenciales de acción, los cuales corresponden a los puntos con la misma etiqueta de la figura 4.7.a), son identificados con las letras de la A a la K. El tejido es estimulado con un voltaje el cual se aplica a una tasa regular de un estímulo (señal eléctrica), cada 200 milisegundos. La ubicación del electrodo de estimulación es indicada por el símbolo (\star). En 4.7.b) se observa la actividad eléctrica en los diez electrodos ubicados en el corte del tejido cardiaco. Se observa el potencial de acción durante la estimulación normal y, después se observa el potencial de acción al aplicarse un estímulo antes de los 200 milisegundos. A este estímulo los autores le dan el nombre de estímulo prematuro. En la figura 4.7.b) —para los diez electrodos mencionados anteriormente— se muestra el último estímulo normal después de 200 milisegundos (indicado por una flecha). Un estímulo prematuro es aplicado 81 milisegundos después del último estímulo normal. Este registro del potencial de acción nos muestra que la propagación va del centro de estimulación, hacia sitios más alejados, es decir, durante el ritmo básico se tiene una *propagación radial*.



(a) Ubicación de los diez electrodos, en un corte de aurícula.



(b) Potencial de acción correspondiente de cada uno de los diez electrodos.

Figura 4.7: En a), se muestra un esquema de la ubicación de los electrodos sobre el tejido cardiaco. Mientras que en b), se ve el potencial de acción generado por la aplicación del estímulo prematuro. Figura tomada de Allisee, *et al* [3].

Ahora bien, el estímulo prematuro puede propagarse en el tejido cardiaco de muy diversas formas. Una característica de esta propagación, es que su velocidad se reduce considerablemente. Durante la propagación del estímulo prematuro, la activación de los sitios del A al F, permanece sin alteraciones y la configuración del registro del potencial de acción correspondiente, no presentan cambios. Por lo que respecta al punto que corresponde al sitio K, éste presenta sólo una pequeña deflexión (indicado por una pequeña flecha) en el registro del potencial y se presenta una falla en la conducción en los sitios G, H y J. Estos sitios son activados después de que sucede una activación de los sitios E y F. Después surge una onda de activación que viaja en dirección angular contraria al giro de las manecillas del reloj, de los sitios K a G. Posteriormente, una pequeña área alrededor de K queda sin activación. Es decir, la aplicación de un estímulo prematuro bloquea la propagación del estímulo normal en una vecindad del punto K y el área bloqueada permanece sin activación durante un lapso. Además, en los sitios G, H, J y K, este cambio de activación, resultado del estímulo prematuro, refleja cambios significativos en la configuración del registro del potencial de acción. Después de esto, comienza a surgir una onda reentrante.

La propagación radial que se tiene durante el ritmo básico, al aplicarse un estímulo prematuro, da como resultado una propagación angular a lo largo de la ruta: A a B, B a C,..., J a K. Como resultado, la onda de activación aquí descrita, retorna al punto de origen y, nuevamente, recorre la misma ruta, dando origen a una onda reentrante.

En un segundo artículo, estos autores, con la intención a realizar observaciones más precisas, utilizan el mismo tejido y echan mano de un mecanismo para montar un conjunto de diez electrodos, los cuales colocaron de forma concéntrica, la distancia entre ellos es de 0.5 mm a 0.15 mm; mientras que el ángulo de ubicación de uno a otro varía en 36° grados. El electrodo correspondiente a la estimulación, lo situaron en el centro de la circunferencia formada por los electrodos. Véase la figura 4.8.

Esta forma de disponer los electrodos facilitó el registro de la propagación del potencial de acción en forma de onda reentrante. Cuando ellos realizaron sus mediciones en el laboratorio, se llegó a notar que el potencial de acción con ruta circular, en la periferia del cultivo, presenta la característica de que aquél, abarcaba más área y ahí su valor era mayor; mientras que cerca del punto de rotación, el potencial de acción abarcaba una área pequeña y el voltaje es más pequeño, comparado con el correspondiente en el área más

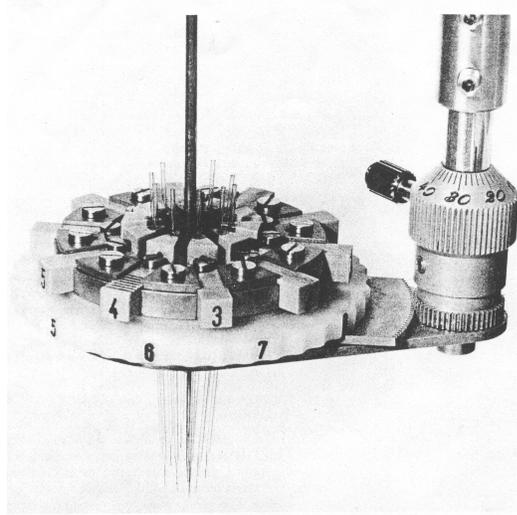


Figura 4.8: Disposición de los electrodos en el experimento realizado por Allisee, *et al* [4].

grande. Esto llevó a suponer a los fisiólogos que el centro del tejido no era excitable, lo cual es incorrecto. De hecho, ellos observaron que el potencial desaparece en el centro debido a la velocidad de rotación, pues no da tiempo a las células de recuperarse y se encuentran aún en el periodo refractario.

Ellos encontraron que el potencial de acción rota con una velocidad angular de $2\pi/0.105$ rad/seg, es decir, da una vuelta completa en 0.105 segundos. Véase la figura 4.9. En ésta vemos la propagación del potencial de acción en el sentido de las manecillas del reloj.

En la figura 4.9.b), cada tonalidad de gris indica el potencial en un intervalo de 10 milisegundos. El tiempo va de 0 a 105 milisegundos, con un rango de separación de 10 milisegundos y el último intervalo es de 5 milisegundos. En la parte izquierda de la figura 4.9.a), observamos el potencial de acción correspondiente, a cada uno de los 5 electrodos en el tejido cardiaco, cada uno se ubica en la ruta que sigue la onda reentrante. Éstos se denotan por las letras de la A a la E.

Es importante notar que estos autores establecen dos factores para que este comportamiento se desarrolle en el tejido en el que se efectúa el experimento. Hélos aquí:

- a) El arreglo que exhiben las fibras del tejido,

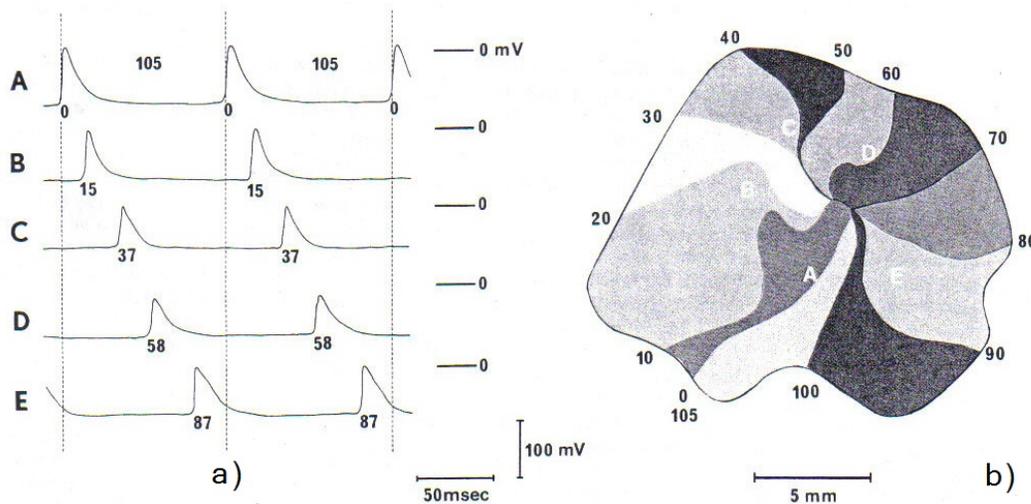


Figura 4.9: En a), el registro del potencial de acción correspondiente a los 5 electrodos. En b), observamos el potencial de acción que viaja en el tejido. Figura obtenida de Allesie, *et al* [5].

- b) Las diferentes formas de responder de las fibras de la aurícula al potencial de acción.

En este trabajo, sus autores señalan que los estudios de la actividad eléctrica en el tejido cardiaco por ellos realizados, demostraban que los siguientes sucesos:

- a) un retardo, en el tiempo de propagación del potencial de acción, o
 b) una falla en la conducción debida a un estímulo prematuro,

podían ocurrir, cuando se juntan dos áreas de tejido cardiaco, los cuales tienen la característica de que el potencial de acción tiene diferente duración.

Este fenómeno fue estudiado por Allisee y sus colegas. Nosotros no abundaremos en esto. El lector interesado puede consultar los trabajos originales.

Después, los autores referidos, publicaron un tercer artículo, en el cual hacen referencia a un modelo experimental en el cual se considera un obstáculo anatómico. Allisee y sus colaboradores, a partir de la descripción del potencial de acción en un tejido en forma de disco, se preguntaron si la geometría

del tejido era importante en la propagación circular del potencial de acción. En particular, se cuestionaron si la existencia de un tejido muerto, ubicado en el centro del tejido podía influir en la propagación del potencial. Esto se lo plantearon debido al hecho de que después de un ataque al corazón, ciertas partes del miocardio quedan muertas y entonces no conducen el potencial de acción.

El avance de las investigaciones realizadas por George Ralph Mines, que proponía un nuevo modelo fisiológico del comportamiento de la fibrilación ventricular en un tejido con forma de un disco anular, fue importante. Sin embargo, no realizó los experimentos detallados que comprobaran la veracidad de sus hipótesis. Esto llevó a Allesie *et al*, a proponer un experimento donde se considera un corte de tejido de aurícula, pero ahora parecido² a un disco anular. Véase la figura 4.10.

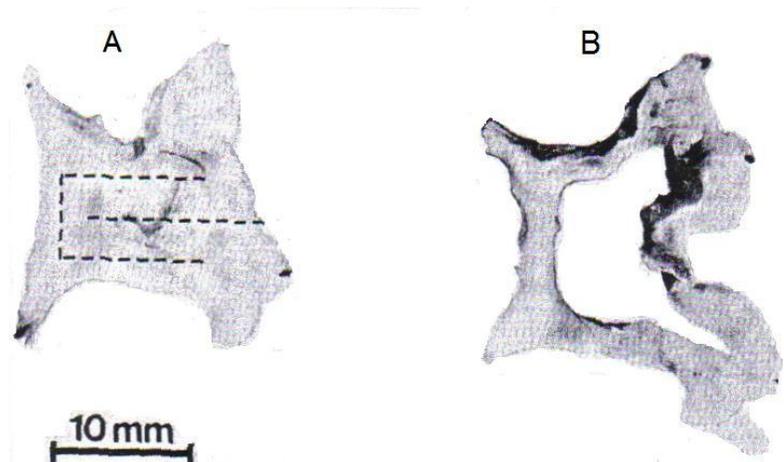


Figura 4.10: El segundo tejido es obtenido del primero, por medio de un corte que se indica a través de las líneas discontinuas. Figura tomada de Allesie, *et al* [5].

²Seamos más precisos con el uso que le damos a la palabra “parecido”. Desde el punto de vista matemático; existe una rama de las matemáticas llamada topología que se encarga del estudio de las propiedades de los objetos y cómo éstos pueden ser transformados en otros objetos. Estas transformaciones se hacen a través de funciones continuas e invertibles con inversa continua, llamadas *homeomorfismos*. Usando la topología, se puede pensar que la forma geométrica que exhibe el tejido de la figura 4.10.B), puede ser “transformada” a un disco anular de dimensión dos, usando un homeomorfismo.

Posteriormente, por medio de un electrodo, se aplica un estímulo que se propaga en el disco anular, como lo describe Mines en la subfigura 4.4.a). En seguida, se aplica otro estímulo, así se observa que se desarrolla un onda que viaja con una ruta circular por el tejido anular. Durante este fenómeno se comparan las propiedades electrofisiológicas del potencial en los tejidos A y B de la figura 4.10. Se encontró que:

- a) La velocidad de propagación de la onda reentrante, es diferente en los tejidos A y B,
- b) El periodo refractario, también es diferente.

La temperatura es un factor importante en la propagación de las ondas de activación cardiaca. Estudios realizados por Yamaguishi Sano (véase [5]), muestran que si el corazón de conejos se expone a un enfriamiento, esto causa un decrecimiento en la tasa de repolarización; mientras que la duración del potencial de acción se prolonga considerablemente. Así, la velocidad de conducción se hace pequeña y la duración de estado refractario, aumenta. Este cambio electrofisiológico en los tejidos A y B, influye para que se dé una disminución de la velocidad de propagación de la onda reentrante, cuando la temperatura se aplica en un rango de 27 a 37 grados centígrados.

También se realizaron experimentos para averiguar la influencia que tienen algunas sustancias en la velocidad de propagación de la onda de excitación. Para ello, se consideraron dos sustancias químicas las cuales son aplicadas a los dos tejidos. Se inyectó una solución de carbolina en el corazón del conejo, esto tanto en el tejido en forma de disco, como en el que tiene forma de disco anular. El efecto que tiene la sustancia inyectada, es el de aumentar la velocidad con la que se propaga la onda reentrante en el disco y lo mismo ocurre con la correspondiente en el disco anular. Véase la figura 4.11. De ésta, podemos inferir que la propagación de la onda en el disco, es más rápida que la correspondiente en el disco anular. Posteriormente se utilizó una segunda sustancia llamada tetrodoxina. Ésta tiene el efecto de acercar sólo un poco, el valor de la velocidad de propagación de la onda reentrante en el disco con la velocidad de propagación de la onda reentrante del disco anular. Véase la figura 4.12.

A manera de conclusión, podemos decir que en los tres artículos de Allisee y sus colegas, sus autores prueban experimentalmente de una manera convincente que la fibrilación ventricular, surge debido a un potencial de acción de tipo rotatorio.

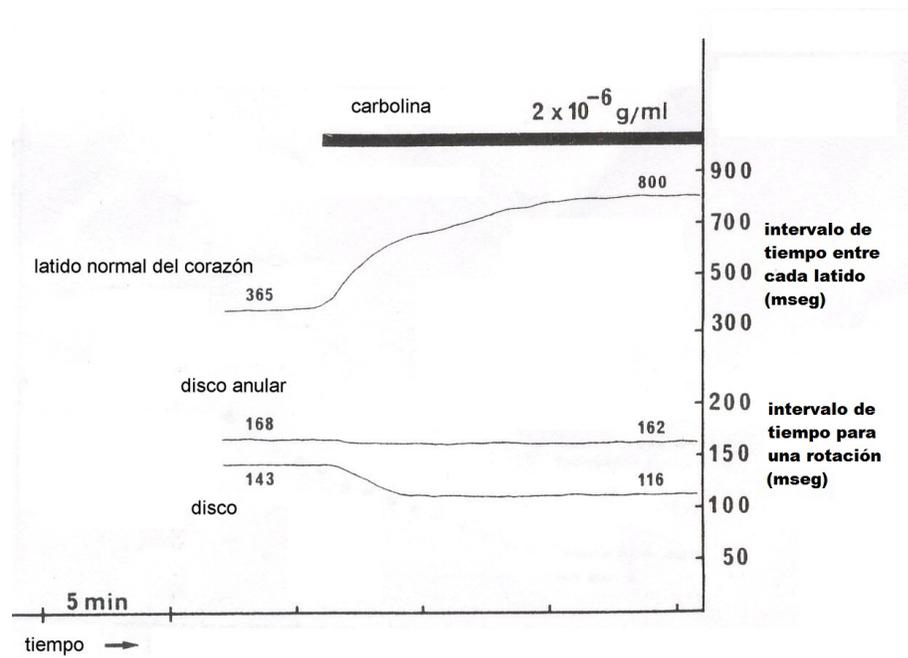


Figura 4.11: Efecto de la carbolina en la propagación de la onda de activación. Figura tomada de [5].

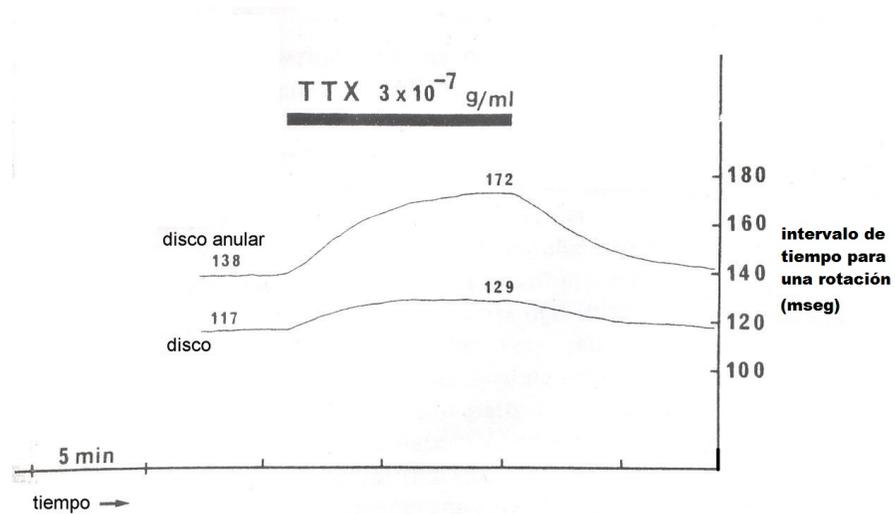


Figura 4.12: Efecto de la tetrodoxina. Figura tomada de [5].

La aportación de Hortensia González y colegas

Un trabajo experimental que se desarrolló para tratar de mostrar y explicar el comportamiento de ondas reentrantes subyacentes a la fibrilación ventricular, fue el realizado en 1999 por la Dra. Hortensia González y sus colaboradores de la Universidad de McGill, en Montreal, Canadá. Véanse [21] y [22]. De acuerdo al modelo propuesto por Mines en donde se propone que las arritmias de tipo reentrante se pueden asociar a ondas que rotan en un disco anular, en el Laboratorio de Biofísica de la Facultad de Ciencias de la UNAM, se utilizó un cultivo de células cardiacas de embrión de pollo las cuales se depositaron en una caja de Petri (Plexigas), utilizando el polímero llamado Polimetilmetacrilato, colocado como barrera y, con su ayuda, se obtiene la geometría de un disco anular, de manera que cuando las células de embrión se desarrollaron, generaron esta geometría. El disco interior tiene un diámetro de 6 mm; mientras que el disco exterior tiene un diámetro de 8 mm. Utilizando una sustancia química³ para observar el potencial de acción, se realizó una filmación con una video-cámara tipo CCD⁴. En la figura 4.13, podemos observar el cultivo.

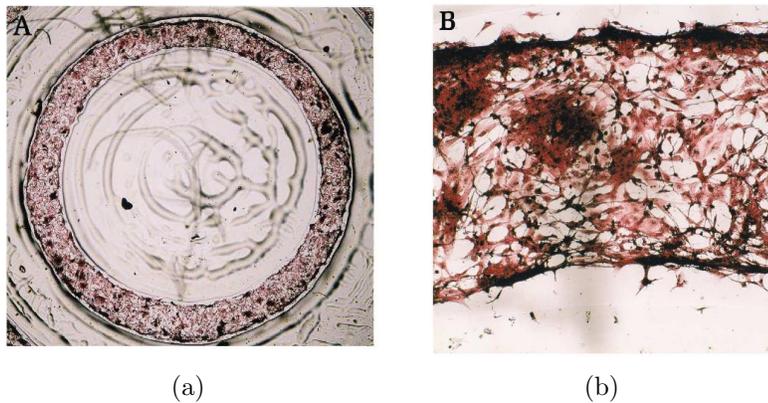


Figura 4.13: Cultivo de las células cardiacas de embrión de pollo. En 4.13.a), se tiene el cultivo completo; mientras que en la 4.13.b), sólo se exhibe una pequeña sección. Figura tomada de González et al [21].

³Ésta es el indicador, *Calcium Green-1*, el cual ubica a la onda reentrante, formada principalmente por la reacción de iones de calcio C^{+2} .

⁴Las filmaciones se pueden observar en las páginas electrónicas: de la Facultad de Ciencias de la UNAM, <http://sistemas.fcencias.unam.mx/hgg/index.html> o en la de la Universidad de McGill, <http://www.cnd.mcgill.ca/bios/glass/hortensia/index.htm>.

Se consideran cinco cultivos de células que exhiben marcapasos los cuales aparecen de forma espontánea en el cultivo. El patrón de la actividad que se asocia a un marcapasos, se caracteriza porque en algunos casos, de éste surge un par de ondas que viajan en dos direcciones opuestas y después de un lapso, chocan y se aniquilan. Esto ocurre en el punto antipodal del punto del que parten. Para ubicarnos en el cultivo, a éste se le asocia un número, en cada punto que corresponde a la horas de las manecillas del reloj. La dirección en que éstas giran, es la dirección negativa y la dirección opuesta, es positiva⁵. Enseguida describimos de forma sucinta los experimentos realizados por González y sus colegas, los cuales se reportan en [21].

Primer experimento (Marcapasos)

En un primer cultivo, se observó la existencia de un marcapasos natural ubicado en el punto que corresponde a las 5:00 hrs del reloj. Este marcapasos desarrolla un estímulo cada 2.8 segundos. La onda reentrante que viaja se representa por el color blanco y el cultivo por color negro⁶. La región en blanco corresponde a la región con mayor concentración de iones de calcio Ca^{+2} . Posteriormente, se observa un segundo marcapasos ubicado en el punto correspondiente a 11:00 hrs del reloj, de aquí surgen dos ondas que viajan en dirección opuesta. Observamos que los impulsos, cada uno provocado de manera separada por un marcapasos, chocan y se aniquilan en dos puntos que corresponden a las 1:00 y 9:00 hrs del reloj. En la sub-figura 4.14.a), se puede observar el viaje del potencial de acción en el cultivo. Entre cada imagen, transcurren 200 mseg. En la subfigura 4.14.b) se presenta un esquema que muestra el comportamiento que siguen las ondas de la sub-figura anterior. En la subfigura 4.14.c) se ha normalizado el valor de la fluorescencia (denotada por la letra F) de la sustancia a un valor entre 0 y 1. La fluorescencia se ha grabado en el punto donde surge el marcapasos de las 11:00 hrs. Ésta se denota por la curva discontinua; mientras que la curva continua, corresponde a la fluorescencia del marcapasos ubicado en el punto 5:00 hrs. En la tercera figura se debe tener claro que los cuadros que se observan en 4.14.a) y 4.14.b) corresponden a un lapso de tiempo indicado por un segmento de línea horizontal que se encuentra en la parte de arriba de la gráfica de la fluorescencia. La dinámica de los cuadros 4.14.a) se da en forma periodica.

⁵En el trabajo de la Dra. Hortensia González y sus colaboradores, la dirección en la que giran las manecillas del reloj es la dirección positiva y la opuesta es la dirección negativa.

⁶Sólo para el segundo experimento, exhibimos el tejido teñido de los colores, rojo, azul y verde. Para los otros tejidos se han usado los colores negro y blanco.

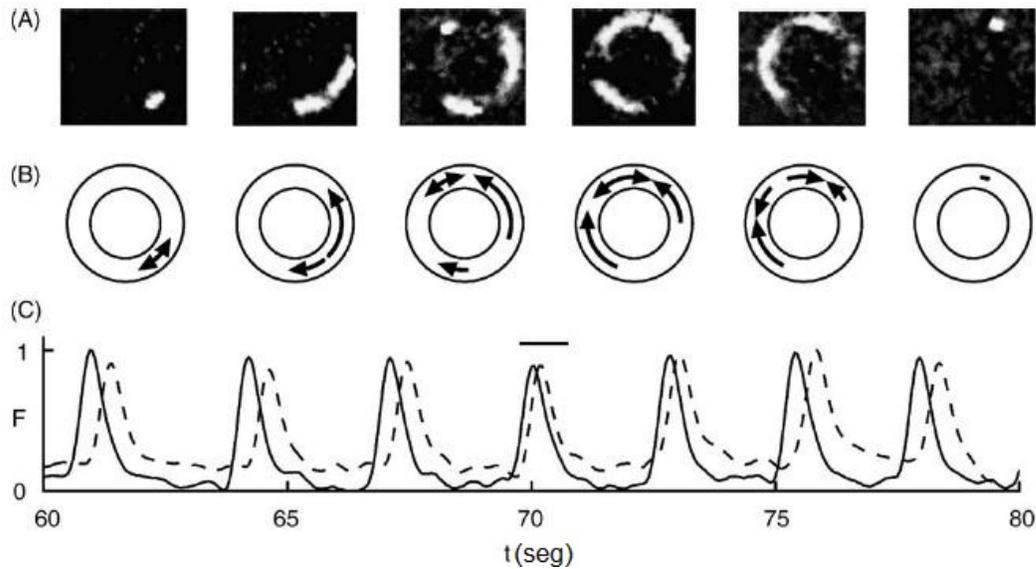


Figura 4.14: Primer experimento. Figura tomada de González [22].

Segundo experimento (Bloqueo unidireccional)

Sólo para este caso, el color rojo intenso indica al onda reentrante que se propaga, mientras que el color azul representa a la zona del tejido no excitada. Se tiene un marcapasos en el punto correspondiente a 12:00 hrs. De éste surgen dos ondas que viajan en direcciones opuestas. Sin embargo, la onda que viaja en dirección positiva se extingue en el punto marcado con las 8:00 hrs. De esta forma tenemos sólo una onda que viaja en dirección negativa, originándose una onda de tipo reentrante, la cual viaja con una velocidad de 8.4 mm/seg. Nuevamente, se han utilizado tres formas de exhibir este comportamiento. El segmento horizontal en la subfigura 4.15.c) indica el tiempo respectivo en que se muestran los cuadros de la subfigura 4.15.a). La curva discontinua representa la fluorescence en el punto 12:00 hrs; mientras que la curva continua se refiere al punto ubicado en las 8:00 hrs.

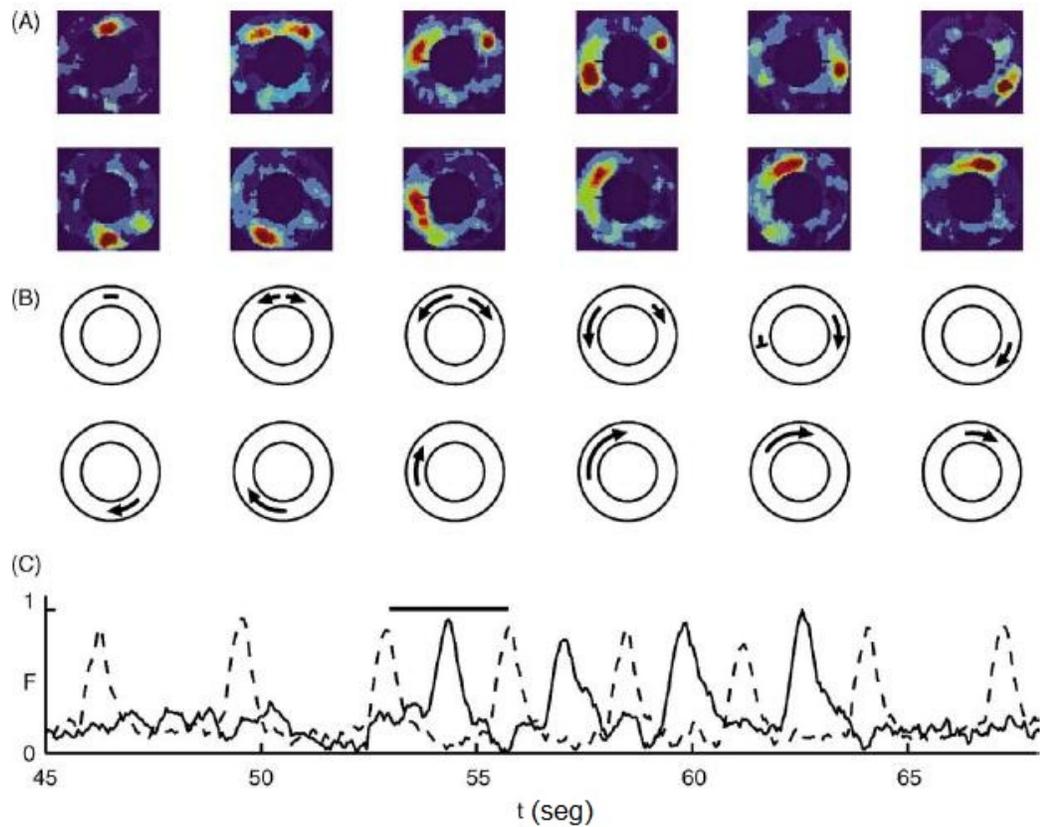


Figura 4.15: Segundo experimento. Figura obtenida de González [22].

Tercer experimento (Reinicio)

Se considera un cultivo en el que se presenta una onda reentrante, que viaja en sentido negativo. En su viaje, cuando esta onda pasa a través del punto 3:00 hrs, después de un pequeño lapso de tiempo, se aplica un estímulo en las 12:00 hrs. De aquí surgen dos ondas que viajan en direcciones opuestas, la onda que viaja en sentido positivo choca con la onda reentrante original, lo que produce la aniquilación. Sólo queda una onda la cual viaja en sentido negativo sobre el cultivo. En otras palabras tenemos una onda reentrante la cual, igual que la original, viaja en sentido negativo. Se puede decir entonces que tenemos un “reinicio” en la propagación de la onda reentrante. En la sub-figura 4.16.a), se puede ver el potencial de acción. En la sub-figura 4.16.b), se observa el esquema respectivo. En la última sub-figura 4.16.c), vemos el valor normalizado de 0 a 1 de la fluorescencia, para un punto del cultivo. La línea

por arriba de las curvas continua y discontinua, indica el tiempo para los cuales se exhiben los cuadros de la sub-figura 4.16.a). La curva discontinua indica la fluorescence de un estímulo aplicado en el punto 12:00 hrs; mientras que la curva continua, representa la fluorescence de la onda reentrante en el punto correspondiente a las 8:00 hrs.

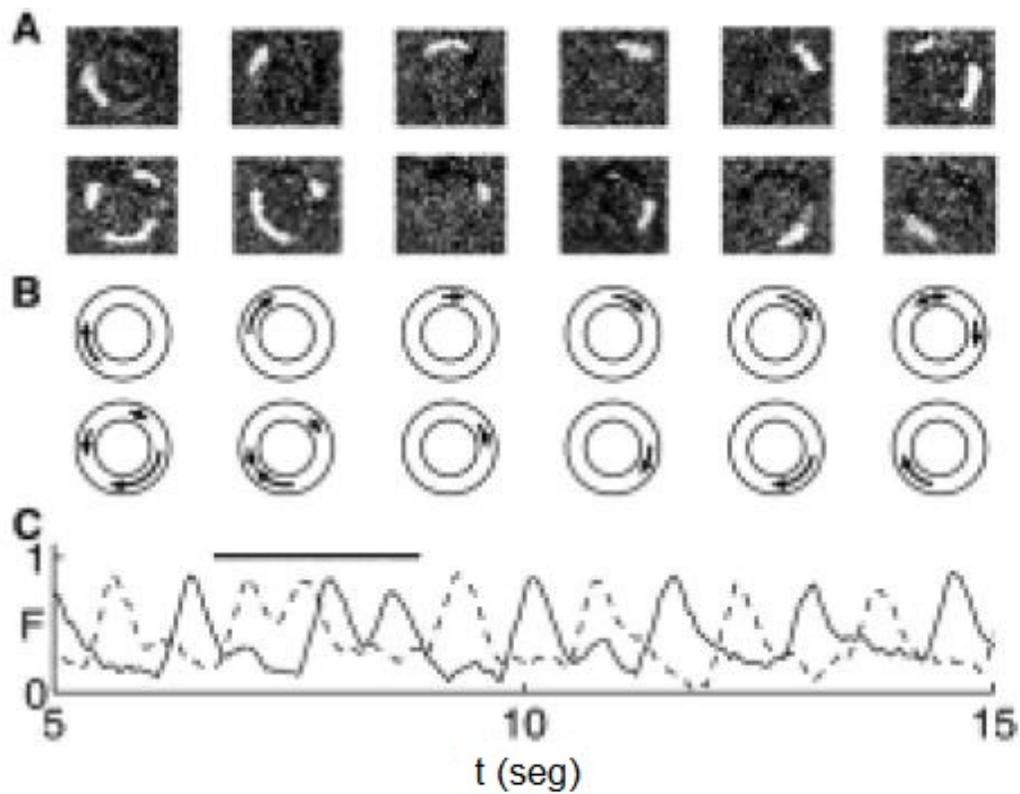


Figura 4.16: Tercer experimento. Figura obtenida de [22].

Cuarto experimento (Aniquilamiento)

En un cuarto experimento, se considera un cultivo que presenta una onda de tipo reentrante que viaja en sentido positivo a través del cultivo, cuando la onda reentrante pasa por el punto 12:00 hrs se aplica, por medio de un electrodo, un estímulo en ese punto. Esto produce que, del punto 12:00 hrs, surjan dos ondas bidireccionales en el cultivo. Posteriormente éstas, chocan en un punto antipodal ubicado en las 6:00 hrs, quedando sin actividad el cultivo. Se dice entonces que el comportamiento de tipo reentrante ha sido “aniquilado”. Véase la figura 4.17. La curva continua corresponde a un punto ubicado en las 5:00 hrs, y la curva discontinua registra la fluorescencia asociada al marcapasos ubicado en las 12:00 hrs.

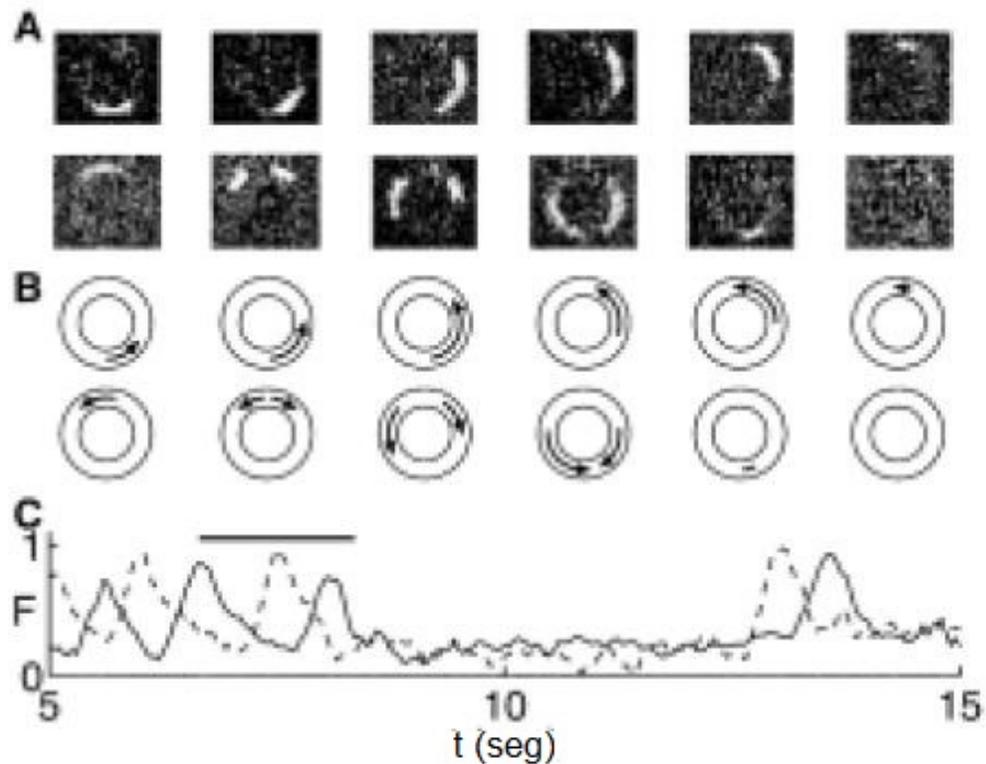


Figura 4.17: Cuarto experimento. Figura obtenida de [22].

Quinto experimento (Ballet cardíaco)

En un último experimento realizado por González *et al*, se muestra un comportamiento todavía más complejo que el observado en los experimentos previos. Se tiene un marcapasos en las 12:00 hrs, del cual surgen dos ondas que viajan en sentidos opuestos y chocan en un punto antipodal al marcapasos (6:00 hrs), aniquilándose. Después de un lapso de tiempo, del marcapasos de las 12:00 hrs, surgen nuevamente dos ondas que viajan en direcciones opuestas. Cuando estas dos ondas se encuentran viajando todavía, se observa la existencia de un marcapasos en las 5:00 hrs, del cual surgen dos nuevas ondas que viajan en direcciones contrarias. Éstas chocan, con las ondas originales, se da un primer choque en el punto 3:00 hrs, en donde las dos ondas no se aniquilan; de hecho del choque surge una onda que viaja en dirección negativa. Después se da un segundo choque en el punto 8:00 hrs, para este caso se tiene una aniquilación. Este comportamiento produce que el cultivo tenga una onda de reentrada que se encuentra viajando de la dirección negativa. Ésta se extingue en el punto 1:00 hrs. Después, en el punto de las 12:00 hrs surgen dos ondas, la que viaja en sentido positivo se extingue en el punto de las 7:00 hrs, de esta manera se tiene una onda reentrante que viaja en sentido negativo. La sub-figura 4.18.a), muestra la imagen de la fluorescencia de la sustancia para intervalos de 250 milisegundos.

La fluorescencia se normaliza de manera que sus valores los tome en el intervalo $[0, 1]$. Observamos tres segmentos horizontales, entre éstos se pueden ubicar dos regiones de inactividad de la fluorescencia. Esta inactividad corresponde al intervalo entre el primero y segundo renglón de las figuras 4.18.a) y el tiempo respectivo entre el tercer y cuarto renglón. La letra P, ubicada en los tres picos de la curva discontinua, indica la activación del marcapasos de las 12:00 hrs. La letra M indica a una onda (de las ondas que choca en 6:00 hrs), que pasa por el punto de las 5:00 hrs. Mientras que si P se encuentra en el pico de la curva continua, entonces indica la activación del marcapasos de las 5:00 hrs. La letra R sobre la curva discontinua, indica a la onda reentrante que pasa por el punto 12:00 hrs. La letra R sobre el último pico de la curva continua indica la onda reentrante que pasa por el punto correspondiente a las 5:00 hrs.

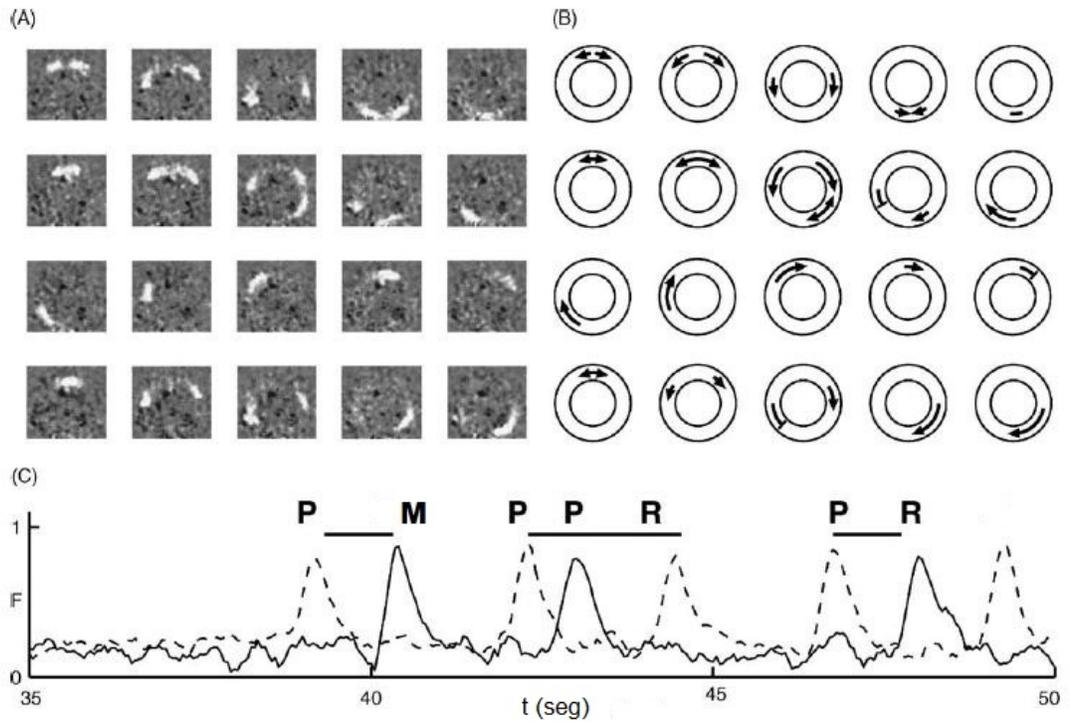


Figura 4.18: Quinto experimento

Todo lo expuesto anteriormente nos da la base fisiológica, para emprender un estudio de carácter teórico, que culmine con el enunciado de condiciones suficientes para la existencia de ondas viajeras que rotan, para un modelo matemático a través del cual pretendemos describir la propagación de aquellas. Antes presentamos una breve descripción del enfoque matemático de las ondas en el músculo cardíaco. Esto lo hacemos en la siguiente sección.

4.3. Sobre la modelación matemática

El enfoque matemático de las ondas del corazón

La redacción de esta sección se basó en la referencia [50]. Teniendo como sustento fisiológico los experimentos descritos en la sección anterior, ahora queremos presentar, aunque sea de una manera esquemática, cómo es que la matemática ha sido usada en los intentos de entender la dinámica asociada a nuestro vital órgano, en particular para describir las características “esenciales” del fenómeno de la fibrilación ventricular. Para la modelación matemática de la propagación espacio-temporal del potencial de acción en capas delgadas de tejido cardiaco, se deben tomar en cuenta:

- a) La peculiaridad de rotar del potencial de acción,
- b) Que la forma del frente de activación tiene las cualidades de una rama de espiral.

Ahora bien, efectivamente las ondas de activación causantes de la fibrilación son reentrantes. Sin embargo, la forma como giran puede ser bastante compleja. Para empezar, el punto —llamado polo (o punto singular)— en torno al cual gira el frente de activación, puede mantenerse fijo o presentar movimiento. Luego, en general el punto de rotación que actúa como pivote cambia de posición de forma continua y describe una curva en el plano.

Por otro lado, considerando que el corazón, en particular el músculo cardiaco tiene grosor, realmente el fenómeno que estamos estudiando se lleva a cabo en tres dimensiones. Luego, si consideramos la estructura tridimensional del músculo cardiaco, la onda de activación se convierte en una superficie de activación cuya gráfica “vive” en \mathbb{R}^3 . Esta superficie de activación, en condiciones de fibrilación, debe tener la característica de que si la cortamos con secciones transversales en forma de planos paralelos, la intersección que obtenemos son espirales: una para cada corte. A la onda en tres dimensiones, se le da el nombre de *onda enrollada*. Se define el *filamento* de ésta como la unión de los polos de todas la espirales que rotan. La forma del filamento, puede ser una recta o una curva con una dinámica particular, la cual influye en la dinámica de la superficie.

Cuando se estudia el fenómeno de la fibrilación desde el punto de vista matemático, primeramente se debe establecer desde la mirada biológica a qué nivel de organización nos referimos (célula, tejido u órgano) y a qué escala de tiempo, se desarrollan los fenómenos electroquímicos en el corazón.

Desde el punto de vista del nivel de organización, los modelos matemáticos se pueden clasificar en:

- a) **Modelos de dinámica local.** Su objetivo principal es describir la actividad eléctrica en regiones pequeñas del corazón. Como un ejemplo de éstos, tenemos a los modelos matemáticos, que describen la actividad eléctrica en una sola célula cardiaca. La característica que tienen estos modelos matemáticos es que las variables de estado, sólo dependen de la variable temporal. El modelo de Denis Noble para la propagación temporal de impulsos nerviosos en las células de las fibras de Purkinje, además de ser pionero en estos estudios, es un ejemplo de modelos cardiacos locales. Sin embargo, el fenómeno que estamos estudiando se lleva a cabo en un medio constituido por una gran cantidad de células. Por ello, con todo y la importancia que tienen los modelos locales, debemos considerar otro tipo de modelos que incluyan las variables espaciales.
- b) **Modelos de dinámica global.** Éstos estudian la dinámica eléctrica en regiones “grandes” del corazón, cuando el tiempo y las coordenadas espaciales cambian. Es aquí donde se introduce el concepto de *medio excitable*. Para definirlo, se debe tener presente que las células cardiacas que componen el músculo del corazón, además de ser contráctiles tienen la propiedad de ser excitables. Es así que las células cardiacas en conjunto *cooperan*, con el fin de producir contracciones rítmicas, primero en las aurículas y después en los ventrículos. La manifestación macróscopica de este fenómeno cooperativo es la de bombear la sangre a todo el cuerpo. Podemos decir que el corazón -visto como un todo- es un medio excitable, pues el *nodo sinoaricular* manda un estímulo rítmicamente el cual tiene el efecto de contraer y relajar el corazón para bombear la sangre al cuerpo.

Desde el punto de vista global, ya no se estudia la dinámica de una célula. El análisis ahora se hace considerando un conjunto “grande” de ellas. Es decir, se pasa a un nivel superior de organización. El lector no debe caer en el error, de tratar de extender el comportamiento individual (una célula cardiaca) a un conglomerado formado de millones de células (el corazón completo o bien tejidos de éste). No se puede describir el comportamiento del corazón a partir de la simple unión de la dinámica individual de millones de células cardiacas.

El hecho de que las células cardiacas, se agrupan en fibras que tienen desde la mirada matemática forma de cilindro, además de que las fibras forman capas que podemos considerar paralelas, con la particularidad de que el ángulo de orientación de las fibras cambia desde las capas más superficiales, hasta las más internas, le confiere al músculo cardiaco una inhomogeneidad que influye de forma determinante en la propagación del potencial. En los ventrículos, las fibras cambian su orientación, de forma continua desde el endocardio hasta el pericardio ⁷, hasta por 180°. La orientación de las fibras es importante, para el estudio de la conducción eléctrica del músculo cardiaco, ya que de ésta depende la dirección de propagación del potencial de acción. Lo que significa que el miocardio es un *medio excitable anisotrópico*⁸ en tres dimensiones. Keener [36], propone que esta propiedad debe ser considerada en los modelos matemáticos *globales* que incorporan la variable de propagación del potencial de acción en el corazón.

Los modelos matemáticos que se han usado a propósito de distintas dinámicas cardiacas, también se pueden clasificar con base en el tipo de valores que toman las variables de tiempo, espacio y las variables de estado. Así, con este criterio tenemos dos familias de modelos:

- a) **Los modelos discretos.** En un artículo publicado en 1946, debido al matemático estadounidense Norbert Wiener y al fisiólogo mexicano Arturo Rosenblueth [53], trabajando en el Instituto Nacional de Cardiología en México, construyeron por primera vez un modelo de tipo discreto para describir la propagación del potencial de acción en el corazón. Lo que ellos consideran es un modelo de tipo global usando lo que actualmente recibe el nombre de *autómata celular* ⁹. Estos autores proponen que una célula del tejido cardiaco representada por una celda puede estar en cualquiera de los tres estados: reposo, excitado o refractario. El autómata funciona de la manera siguiente: se tiene el

⁷El pericardio es una membrana que cubre la superficie externa del corazón; mientras que el endocardio recubre internamente las cavidades del corazón.

⁸Esta es una propiedad que presentan ciertos cuerpos, y consiste en la dependencia de sus propiedades físicas, en función de la dirección que en ellos se considere.

⁹Dicho de forma muy sencilla, en una dimensión, son arreglos de tipo discreto de celdas y sobre de ellas, se define, por ejemplo, una variable de la cual puede tomar diferentes valores o estados siendo estos finitos. Se tiene que dar: a)el estado inicial b)la regla de correspondencia.

cambio de un estado de reposo a excitación de una celda a otra contigua, cuando al menos uno se encuentra en el estado de excitación. Una observación muy importante hecha por ellos, fue la de proponer que la no homogeneidad del músculo cardiaco afecta la propagación del potencial de acción. Así, ellos estudiaron este efecto en su autómata. Sin embargo, su modelo tenía ciertas deficiencias las cuales se mejoraron utilizando un conjunto de autómatas más avanzados, así surgen los trabajos de Moe [42], Greenberg y Hastings [20]. Posteriormente, una importante deficiencia notada por Gerhardt fue que los autómatas celulares, hasta entonces propuestas, no consideraban que la curvatura de la onda de excitación influye en la velocidad de propagación. Con el desarrollo de computadoras más poderosas, se diseñaron autómatas celulares en los cuales ya se considera la curvatura.

- b) **Los modelos continuos.** Dentro de éstos, podemos considerar el modelo de Hodgking-Huxley, que dedujimos en el Capítulo 1. Aunque originalmente, se propuso para describir el potencial de acción en una neurona, después de realizar las adaptaciones pertinentes, ha sido punto de partida para proponer distintos modelos que describen el potencial de acción en células cardíacas. Dentro de estos modelos, mencionamos el de Denis Noble (1962). Él echó mano de un sistema no lineal de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias, donde una variable corresponde al potencial de acción. En su sistema, incluye las corrientes iónicas de sodio Na^+ y potasio K^+ , del potencial de acción en las fibras de Purkinje. Su trabajo no consideró la corriente de calcio Ca^+ , debido a que en ese tiempo, aun no había sido descubierta su influencia en el potencial¹⁰.

Durante el año de 1975, Mc Allister [41] propone un modelo matemático para describir la actividad eléctrica en las fibras de Purkinje, usando la hipótesis de que la dinámica eléctrica es gobernada por las corrientes iónicas. En 1985, trabajando de forma conjunta, DiFrancesco y Noble [13] dedujeron un modelo matemático para el potencial de acción en las fibras de Purkinje, el cual considera por primera vez, los cambios de las concentraciones iónicas junto con la actividad de las bombas iónicas de los canales. Mucho después, en 1991, Luo y Rudy [39], con la intención

¹⁰Actualmente se ha demostrado que la corriente de calcio juega un papel importante en la contracción y relajación de las células cardíacas.

de mejorar el modelo de DiFrancesco y Noble, proponen un modelo matemático para las corriente iónicas. Éste considera seis nuevas corrientes y se utilizan nueve variables es decir, se tiene un sistema de nueve ecuaciones diferenciables ordinarias. Luo y Rudy estudian la corriente de sodio Na^+ y la corriente de potasio K^+ , usando células de los ventrículos del cerdo de guinea, *Cavia Porcellus*, conocido también como conejillo de indias. Para la deducción de su modelo ellos utilizan el método que usaron Hodgkin y Huxley. En 1994, Rudy y Luo [40] incorporan dos nuevas corrientes a su modelo original, así se obtiene un modelo matemático que consiste de un sistema de 11 ecuaciones diferenciales ordinarias.

Nótese que todos los modelos anteriores, consideran como única variable independiente el tiempo, esto limita el estudio del potencial de acción, pues el fenómeno tiene una dinámica espacio-temporal. Por ello, a fin de describir de una forma más apegada a la realidad fisiológica, también debe incluirse la variable espacial. Vemos que algunos modelos (como el de 11 ecuaciones diferenciales) resultan complicados. En particular lo son si se pretende realizar el análisis que conduzca a determinar su espacio fase. Esta es la principal razón por la que, desde el punto de vista matemático, se han construido modelos más sencillos, pero que capturan las propiedades cualitativas esenciales de los sistemas en estudio. El modelo de FitzHugh-Nagumo es una de esas reducciones. A estos últimos se les conoce como modelos simplificados.

Regresando al estudio de las ondas reentrantes, se ha sostenido un debate en cuanto a si, el comportamiento en tres y dos dimensiones asociado a éstas, es organizado o aleatorio. En las palabras de Jalife (véase [31]):

“Los conceptos tradicionales a cerca de la fibrilación ventricular se basan en la hipótesis de que el surgimiento de ésta, es el resultado de múltiples frentes de ondas de excitación, tales ondas tienden a cambiar continuamente de forma y dirección, así se mueven independiente y aleatoriamente a través de los ventrículos lo que produce patrones de excitación irregulares. Sin embargo, las recientes aplicaciones de la teoría de la dinámica no lineal, en el estudio de la propagación de ondas en el corazón junto con los técnicas modernas de visualización, han llevado a los investigadores a pensar que la fibrilación ventricular es un problema no lineal de autoorganización de ondas eléctricas con las dos componentes: la estocástica y la determinista. Mucho

han aportado los métodos numéricos implementados a través de las modernas computadoras, ya que visualizan el comportamiento del potencial de acción de las ondas de reentrada en dos y tres dimensiones. El estudio de las ondas reentrantes en dos y tres dimensiones es una área todavía por explorar, desde la perspectiva matemática.”

Jalife nos dice que, no obstante los esfuerzos para intentar entender los mecanismos de la fibrilación ventricular, su estudio y resultados pueden tener consecuencias prácticas muy importantes. Por ejemplo, si se logra entender de manera cuantitativa y detallada la forma en que los choques eléctricos (a través de un desfibrilador), actúan en el miocardio se podrían desarrollar aparatos más eficaces para tratar este tipo de enfermedad cardíaca.

Por otro lado, debemos decir que la fibrilación ventricular ha sido tratada mediante antiarrítmicos que disminuyen o prolongan la velocidad de conducción del potencial de acción. Sin embargo, los estudios clínicos muestran que el uso de los antiarrítmicos, no siempre influye de manera efectiva en la disminución de la fibrilación. Para ello, existe una técnica llamada *ablación* cardíaca, la cual consiste en destruir (cicatrizando) una pequeña área de tejido cardíaco que presenta problemas en la conducción del potencial. Al usar aquella técnica existen riesgos, por ejemplo la formación de un coágulo de sangre que puede viajar al cerebro. Es decir, los resultados clínicos no son del todo satisfactorios. Por ello, es de interés conocer los mecanismos de propagación del potencial en el tejido del miocardio que inician y mantienen la fibrilación.

Una vez que hicimos esta presentación esquemática, enseguida damos lugar a la exposición del resultado técnico más importante de este capítulo en el cual se demuestra, para un modelo matemático particular, la existencia de ondas rotatorias.

4.4. Existencia de las ondas rotatorias

Aunque previamente se habían obtenido resultados numéricos los cuales mostraban que el sistema de FitzHugh-Nagumo tenía soluciones rotativas y se disponía de suficientes evidencias experimentales que mostraban fehacientemente la relación que guardan las ondas reentrantes con algunos padecimientos cardíacos, como la fibrilación, su existencia formal -para el sistema mencionado- fue demostrada hace apenas unos cuantos años. Esta fue labor

de Alford y Auchmuty [6], en 2006. El objetivo de esta sección es hacer un resumen de su trabajo. Estos autores usaron el sistema de FitzHugh-Nagumo, definido en un disco anular. En una primera presentación, ellos consideran el análisis en un dominio que es un caso extremo de un disco anular: un anillo.

4.4.1. El modelo de FitzHugh-Nagumo en un anillo

Aquí consideramos el sistema

$$u_t = D_0 u_{xx} + u(1-u)(u-a) - w + I_a \quad (4.1a)$$

$$w_t = bu - \gamma w, \quad (4.1b)$$

donde u_t y u_{xx} , u denotan la derivada de u respecto a t y la segunda derivada de u con respecto a x , respectivamente. Aquí $(x, t) \in [-\pi R, \pi R] \times [0, \infty)$.

Antes de empezar nuestro análisis, vamos a considerar ciertas relaciones sobre los parámetros de la ecuación FitzHugh-Nagumo, homogénea. Esta sub-sección fue redactada siguiendo el trabajo de Alford y Auchmuty. Véase [6].

Notemos que si consideramos el sistema (4.1) con $D_0 = 0$, siempre que los parámetros satisfagan (4.3), éste tiene un único punto de equilibrio no trivial: (\hat{u}, \hat{w}) , el cual define una solución estacionaria (independiente del tiempo) y homogénea (independiente de la posición) del sistema para $D_0 > 0$. Nótese que (\hat{u}, \hat{w}) satisface,

$$f(\hat{u}) - \hat{w} + I_a = 0 \quad \text{y} \quad \hat{w} = \tilde{m}\hat{u}, \quad \text{con} \quad \tilde{m} = b/\gamma, \quad (4.2)$$

donde $f(\hat{u}) = \hat{u}(1-\hat{u})(\hat{u}-a)$. La condición

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 < \tilde{m}, \quad (4.3)$$

sobre los parámetros garantiza que el *sistema algebraico* (4.2), tenga un único punto de equilibrio¹¹, $\hat{u}(I_a) > 0$, con $\hat{w}(I_a) > 0$, en la región donde $f'(u) < \tilde{m}$, para $I_a > 0$.

Si recordamos, en el Capítulo 2 probamos que el punto de equilibrio $(\hat{u}(I_a), \hat{w}(I_a))$ cambia su dinámica de estable a inestable y después de inestable a estable al cambiar el valor de la corriente I_a . Cuando Auchmuty y Alford

¹¹Véase la Proposición 2.5.

consideran el análisis del sistema de FitzHugh-Nagumo sin difusión, (*fijación de voltaje*) demuestran que para un valor, I_{a1} , de I_a , existe una bifurcación de Hopf; mientras que para otro valor, I_{a2} , hay una segunda bifurcación de Hopf¹² -lo cual es consistente con nuestros resultados del Capítulo 2-. Para ello, estos autores establecen la siguiente condición sobre los parámetros γ , a y b ,

$$\gamma < \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (4.4)$$

Ellos consideran, además, un nuevo parámetro: δ_0 , definido así

$$\delta_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 - \gamma. \quad (4.5)$$

Ahora, si (4.4) y (4.5) se satisfacen, entonces

$$0 < \delta_0 < \tilde{m} - \gamma; \quad (4.6)$$

mientras que de $0 < \tilde{m} - \gamma$, se tiene $\gamma^2 < b$. Cuando los parámetros satisfacen la desigualdad (4.6), ocurre una bifurcación de Hopf, centrada en el punto de equilibrio (u_r, w_r) , por lo que aparece un ciclo límite para el valor de la corriente I_{a1} que satisface, $I_{a1} + f(u_r) - \tilde{m}u_r = 0$. La segunda bifurcación de Hopf se da en el punto de equilibrio (u_l, w_l) , para I_{a2} que cumple con la igualdad $I_{a2} + f(u_l) - \tilde{m}u_l = 0$, donde

$$u_{r,l} = \frac{1+a}{3} \pm \sqrt{\frac{\delta_0}{3}} \quad \text{y} \quad w_{r,l} = \tilde{m} \left(\frac{1+a}{3} \pm \sqrt{\frac{\delta_0}{3}} \right). \quad (4.7)$$

Antes de empezar a analizar la existencia de soluciones de tipo onda viajera rotatoria en el disco anular es decir, ondas reentrantes, primero vamos a considerar el análisis en un anillo.

4.4.2. Ondas rotando en un anillo

Consideramos un dominio circular de radio R (constante) y denotamos por θ a la variable angular, como se ve en la figura 4.19. Si hacemos el siguiente cambio de variable $x = R\theta$, entonces el sistema de FitzHugh-Nagumo

¹²Esto ya era conocido antes del trabajo de Auchmuty y Alford. Véase [52].

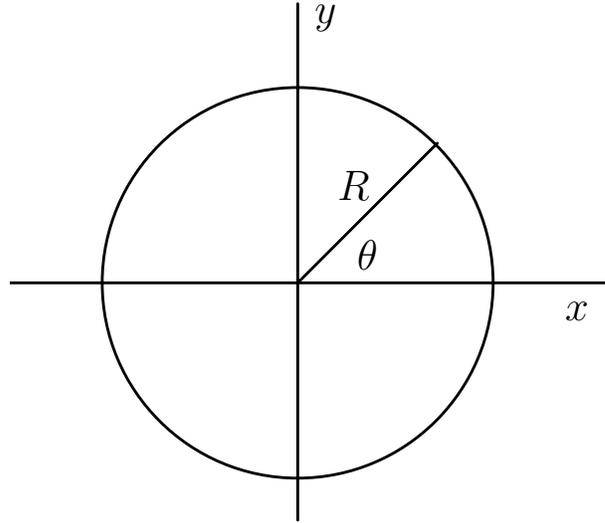


Figura 4.19: Dominio circular en donde se define el sistema (4.8).

(4.1), toma la forma,

$$u_t = (D_0/R^2)u_{\theta\theta} + u(1-u)(u-a) - w + I_a \quad (4.8a)$$

$$w_t = bu - \gamma w, \quad (4.8b)$$

donde $(\theta, t) \in [-\pi, \pi] \times [0, \infty)$ y con D_0 el coeficiente de difusión de (4.1), el nuevo término de “difusión”¹³ es, $D = D_0/R^2$. El término $u_{\theta\theta}$ significa segunda derivada parcial de u respecto a θ . Las condiciones de frontera son periódicas es decir,

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), \quad w(-\pi, t) = w(\pi, t), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(-\pi, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(\pi, t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.9)$$

Dado que estamos interesados en averiguar la existencia de soluciones de tipo onda viajera rotatoria, introduzcamos su definición formal.

Definición 4.1 Una solución $(u(\theta, t), w(\theta, t))$ de (4.8) en $0 < t < \infty$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$, es llamada una solución de tipo onda viajera rotatoria, si existen

¹³El proposito de Alford y Auchmuty, al definir $x \in [-\pi R, \pi R]$ y hacer el cambio de variable $x = R\theta$, es con el objetivo de analizar para que valores de R y D_0 , existe la onda reentrante en el anillo. El parámetro $D = D_0/R^2$, es adimensional.

una constante c y dos funciones ϕ , ψ , tales que u y w se expresen como,

$$u(\theta, t) = \phi(\theta - ct), \quad w(\theta, t) = \psi(\theta - ct), \quad (4.10)$$

donde c es la velocidad angular de propagación de la onda.

Si suponemos que (4.8) tiene soluciones de tipo onda viajera, al sustituir (4.10) en el sistema (4.8) e introduciendo la notación $\xi \equiv \theta - ct$, obtenemos que ϕ y ψ , deben satisfacer el siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$D\phi'' + c\phi' + f(\phi) - \psi + I_a = 0 \quad (4.11a)$$

$$c\psi' + b\phi - \gamma\psi = 0, \quad (4.11b)$$

donde $' \equiv \frac{d}{d\xi}$, u y w satisfacen, además, las condiciones de frontera 4.9). Que escritas en términos de ϕ y ψ son

$$\begin{aligned} \phi(-\pi - ct) &= \phi(\pi - ct), \quad \psi(-\pi - ct) = \psi(\pi - ct), \\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta}(-\pi - ct) &= \frac{\partial\phi}{\partial\theta}(\pi - ct), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Observamos que, debido a la geometría del dominio que estamos considerando, las soluciones, dependiendo del signo de c , pueden rotar de dos formas en el anillo: en el sentido de giro de las manecillas del reloj si $c < 0$ o bien en sentido contrario, si $c > 0$.

Una vez que hemos introducido ϕ y ψ como en (4.10). Este problema lo hemos llevado, en términos de la variable “rotatoria” ξ , al problema de condiciones de frontera, 4.11.a), 4.11.b) y 4.12). Lo que vamos a probar es que tal solución periódica respecto a la variable ξ , surge de una bifurcación de la solución estacionaria y homogénea $(\hat{u}(I_a), \hat{w}(I_a))$, del sistema (4.1). Las condiciones para que este fenómeno dinámico se dé, se establecerán en términos de los parámetros involucrados y el análisis detallado lo iniciamos a continuación.

Antes, debemos probar la existencia del punto de equilibrio $(\hat{u}(I_a), \hat{w}(I_a))$. Ésto se hace encontrando las raíces del polinomio de tercer grado,

$$\hat{u}^3 - \hat{u}^2(1 + a) + \hat{u}(\tilde{m} + a) - I_a, \quad (4.13)$$

el cual proviene de intersectar a las ceroclinas, $w_1(u) = u(1 - u)(u - a) + I_a$ y $w_2(u) = \tilde{m}u$. Echando mano de la Tabla B.1 del texto de Murray [43], la cual nos sugiere definir,

$$A = 3\varsigma = -(a + 1), \quad B = 3\vartheta = (a + \tilde{m}) \quad \text{y} \quad C = I_a, \quad (4.14)$$

junto con

$$\rho = \varsigma^2 - \vartheta \quad \text{y} \quad \beta = 2\varsigma^3 - 3\varsigma\vartheta + C, \quad (4.15)$$

donde

$$\varsigma = -\frac{a+1}{3} \quad \text{y} \quad \vartheta = \frac{a+\tilde{m}}{3}. \quad (4.16)$$

Al usar las condiciones de Murray, junto con la relación de los parámetros de la Proposición 2.2, llegamos a que las raíces del polinomio cúbico (4.13) son tres: dos complejas y una real. Nos interesamos por la raíz real, la cual es

$$\hat{u}(I_a) = -2(-\rho)^{\frac{1}{2}} \operatorname{senh}(\tilde{\theta}(I_a)) - \varsigma, \quad (4.17)$$

donde

$$\rho = \frac{(a+1)^2}{9} - \frac{a+\tilde{m}}{3} \quad \text{y} \quad \tilde{\theta}(I_a) = \frac{1}{3} \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{\beta(I_a)}{2(-\rho)^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (4.18)$$

con

$$\beta(I_a) = -2 \left[\frac{a+1}{3} \right]^3 + 3 \left[\frac{(a+1)(a+\tilde{m})}{9} \right] - I_a. \quad (4.19)$$

Luego, el punto que define a la solución de (4.13), que es estacionaria y homogénea, es $(\hat{u}(I_a), \tilde{m}\hat{u}(I_a))$.

4.4.3. Análisis local

Comenzamos realizando el análisis local del sistema (4.11), alrededor de la solución estacionaria y homogénea, $(\hat{u}(I_a), \hat{w}(I_a))$. Para esto, hagámonos una perturbación alrededor de $(\hat{u}(I_a), \hat{w}(I_a))$. Así, sean v_1 y v_2 tales que

$$\phi(\xi) = \hat{u}(I_a) + v_1(\xi) \quad \text{y} \quad \psi(\xi) = \hat{w}(I_a) + v_2(\xi). \quad (4.20)$$

Sustituyamos (4.20) en el sistema (4.11) y quedémonos con los términos lineales, obteniéndose que $v_1(\xi)$ y $v_2(\xi)$ satisfacen el sistema lineal

$$Dv_1'' + cv_1' + f'(\hat{u}(I_a))v_1 - v_2 = 0 \quad (4.21a)$$

$$cv_2' + bv_1 - \gamma v_2 = 0, \quad (4.21b)$$

donde f' significa la derivada de f con respecto a u . Obsérvese que el sistema anterior es un sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes el cual, si se desea, puede escribirse como un sistema de tres ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Ahora, nuestro objetivo es encontrar una solución para el sistema lineal (4.21). Dado que nuestro problema está planteado en coordenadas de la onda viajera ξ , es razonable suponer que el sistema linealizado tenga por solución a una función de la forma,

$$\begin{pmatrix} v_1(\xi) \\ v_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{im\xi}, \quad (4.22)$$

para algún entero $m \neq 0$ y un vector complejo transpuesto constante, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2)^\top$.

Ahora conviene introducir la siguiente definición.

Definición 4.2 *La solución propuesta (4.22) recibe el nombre de una solución de modo m de las ecuaciones 4.21.a) y 4.21.b). A los puntos de bifurcación con un número m particular, se les llama puntos de bifurcación de modo m .*

Sustituyendo (4.22) en el sistema (4.21), obtenemos que $\vec{\mathbf{b}}$ y m , deben satisfacer el sistema algebraico,

$$J_m(I_a) \vec{\mathbf{b}} = -imc \vec{\mathbf{b}}, \quad (4.23)$$

donde $J_m(I_a)$ es la matriz constante,

$$J_m(I_a) = \begin{pmatrix} -m^2 D + f'(\hat{u}(I_a)) & -1 \\ b & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

cuya traza y determinante son respectivamente

$$\text{tr}[J_m(I_a)] = -m^2 D + f'(\hat{u}(I_a)) - \gamma, \quad (4.25a)$$

$$\det[J_m(I_a)] = -\gamma[-m^2 D + f'(\hat{u}(I_a))] + b. \quad (4.25b)$$

Ahora bien, para que el sistema (4.23) tenga solución diferente de la trivial, el polinomio característico de la matriz de Jacobi, $J_m(I_a)$, debe satisfacer:

$$\det[J_m(I_a) - \lambda I] = \lambda^2 - \text{tr}[J_m(I_a)]\lambda + \det[J_m(I_a)] = 0. \quad (4.26)$$

Los valores propios de $J_m(I_a)$, son,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}[J_m(I_a)] \pm \sqrt{(\text{tr}[J_m(I_a)])^2 - 4\det[J_m(I_a)]}}{2}. \quad (4.27)$$

Ahora, a partir de la expresión de la traza 4.25.a), uno puede averiguar el signo de ésta al cambiar I_a . En efecto, al escribir explícitamente el término $f'(\hat{u}(I_a))$ en 4.25.a) y sustituyendo la expresión de $\hat{u}(I_a)$ en $\text{tr}[J_m(I_a)]$, ésta se escribe así,

$$\begin{aligned} \text{tr}[J_m(I_a)] = & -3(-2(-\rho)^{\frac{1}{2}}\text{senh}(\tilde{\theta}(I_a))-\tau)^2 + 2(-2(-\rho)^{\frac{1}{2}}\text{senh}(\tilde{\theta}(I_a))-\tau)(1+a) \\ & -(m^2D + \gamma + a). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Para facilitar nuestro estudio, procedimos a construir la gráfica de la traza (4.28) como función de la corriente, usando el valor de los parámetros que reportan Alford y Auchmuty. Ésta se ve en la siguiente figura.

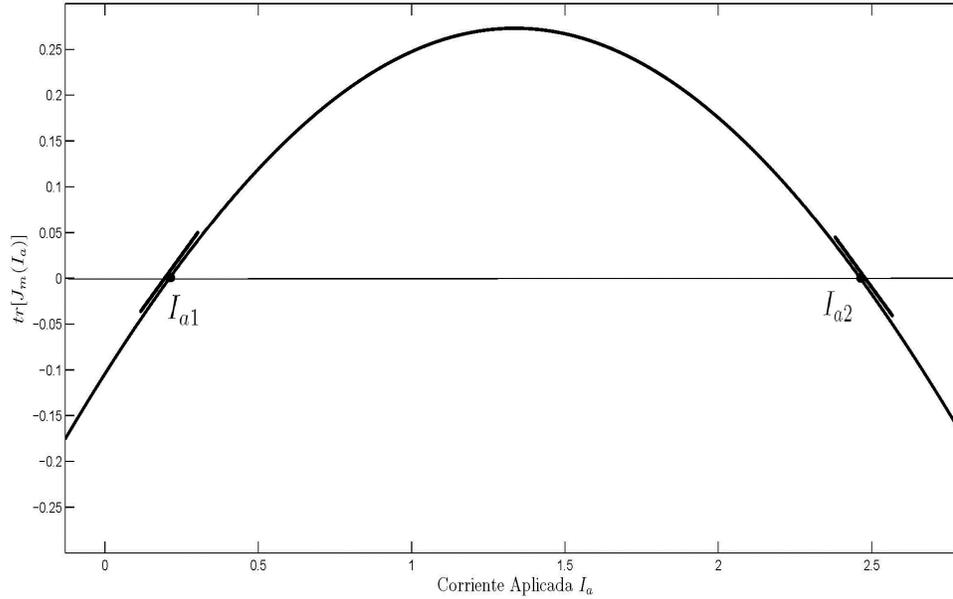


Figura 4.20: Cambio de signo de la traza cuando la corriente I_a aumenta. Para el valor de los parámetros $a = 0.139$, $m = 1$, $b = 0.008$, $\gamma = 0.002032$ y $D = 0.005$. Los valores aproximados de la corriente en los que la traza se anula son $I_{a1} = 0.311339$ e $I_{a2} = 2.56479$.

En ella, se puede apreciar que al aumentar el parámetro I_a desde cero, tenemos que $\text{tr}[J_m(I_a)]$, cambia de signo: de negativo a positivo y después de positivo a negativo. También se observa que la derivada de la traza con respecto a I_a , en los valores críticos de I_a en los que ésta se anula, no es cero. Este comportamiento de la traza es condición necesaria para la emergencia de un ciclo límite del sistema, a través de una bifurcación de Hopf. Sin embargo, debemos demostrar desde el punto de vista matemático la existencia de una bifurcación de Hopf en I_{a1} y una otra bifurcación de Hopf en I_{a2} .

Primero, encontraremos el punto de equilibrio $(\hat{u}(I_a), \hat{w}(I_a))$ en donde ocurre la bifurcación de Hopf. De las condiciones, $\det[J_m(I_a)] > 0$ y $\text{tr}[J_m(I_a)] = 0$, tendremos que el punto de equilibrio, (\hat{u}, \hat{w}) , es de tipo centro. De las igualdades 4.25.a) y 4.25.b), se sigue que,

$$f'(\hat{u}) = \gamma + m^2 D \quad \text{y} \quad b - \gamma^2 > 0. \quad (4.29)$$

Al usar (4.29) y dado que $f'(\hat{u}) = -3\hat{u}^2 + 2(1+a)\hat{u} - a$, resolvemos la ecuación cuadrática, $-3\hat{u}^2 + 2(1+a)\hat{u} - (a + \gamma + m^2 D) = 0$. De esta condición, obtenemos la abscisa, \hat{u} , del punto de equilibrio en donde se da la bifurcación de Hopf. Los valores de \hat{u} y m , están relacionados a través de la expresión,

$$\hat{u}_m^\pm = \frac{1+a}{3} \pm \sqrt{\frac{\delta_0 - m^2 D}{3}}. \quad (4.30)$$

Para que \hat{u}_m^\pm , sean reales y distintas, se impone la condición $\delta_0 > m^2 D$.

Observamos la forma de la traza la cual, como función de \hat{u} , es un polinomio cuadrático. De hecho, podemos escribir $\text{tr}[J_m(\hat{u})] = -3\hat{u}^2 + 2(1+a)\hat{u} - (\gamma + m^2 D + a)$. Veamos cuál es el signo de $\text{tr}[J_m(\hat{u})]$, en los intervalos $(-\infty, \hat{u}_m^-)$, $(\hat{u}_m^-, \hat{u}_m^+)$ y (\hat{u}_m^+, ∞) .

Haciendo los cálculos necesarios encontramos que,

- a) $\text{tr}[J_m(\hat{u})] < 0, \forall u \in (-\infty, \hat{u}_m^-)$,
- b) $\text{tr}[J_m(\hat{u})] > 0, \forall u \in (\hat{u}_m^-, \hat{u}_m^+)$,
- c) mientras que $\text{tr}[J_m(\hat{u})] < 0$ en (\hat{u}_m^+, ∞) .

Dado que \hat{u} depende de I_a , entonces al sustituir \hat{u} en términos de I_a , la traza depende de la corriente aplicada, es decir, $\text{tr}[J_m(\hat{u}(I_a))]$. Notamos que al variar I_a , de forma continua, desde cero hasta un valor de I_{a1} , $\text{tr}[J_m(\hat{u}(I_a))] <$

0 en el intervalo $(\hat{u}(0), \hat{u}(I_{a1}))$, y luego $\text{tr}[J_m(\hat{u}(I_{a1}))] = 0$; mientras que $\text{tr}[J_m(\hat{u}(I_a))] > 0$ en el intervalo $(\hat{u}(I_{a1}), \hat{u}(I_{a2}))$. Análogamente, existe otro valor, I_{a2} de I_a , tal que $\text{tr}[J_m(\hat{u}(I_{a2}))] = 0$, y $\text{tr}[J_m(\hat{u}(I_a))] < 0$, $\forall u \in (\hat{u}(I_{a2}), \hat{u}(I^*))$.

Otra condición para que ocurra una bifurcación de Hopf es la llamada *condición de transversalidad*, según la cual la derivada de $\text{tr}[J_m(\hat{u}(I_a))]$ con respecto al parámetro I_a , evaluada en I_{a1} , debe ser distinta de cero. La derivada tiene la forma,

$$\frac{d}{dI_a} \text{tr}[J_m(\hat{u})](I_{a1}) = -6\hat{u}(I_{a1}) \frac{d\hat{u}(I_{a1})}{dI_a} + 2(1+a) \frac{d\hat{u}(I_{a1})}{dI_a}, \quad (4.31)$$

dado que $\hat{u}(I_{a1}) = \hat{u}_m^-$,

$$\frac{d}{dI_a} \text{tr}[J_m(\hat{u})](I_{a1}) = +6\sqrt{\frac{\delta_0 - m^2 D}{3}} \frac{d\hat{u}(I_{a1})}{dI_a} > 0, \quad (4.32)$$

con

$$\frac{d\hat{u}(I_{a1})}{dI_a} = \frac{\cosh(\tilde{\theta}(I_{a1}))}{3(-\rho)\sqrt{\left(\frac{\beta(I_{a1})}{2(-\rho)^{3/2}}\right)^2 + 1}} > 0. \quad (4.33)$$

Análogamente, se verifica la condición de transversalidad en el otro valor crítico I_{a2} . En efecto, usando que $\hat{u}(I_{a2}) = \hat{u}_m^+$, se tiene

$$\frac{d}{dI_a} \text{tr}[J_m(\hat{u})](I_{a2}) = -6\sqrt{\frac{\delta_0 - m^2 D}{3}} \frac{d\hat{u}(I_{a2})}{dI_a} < 0, \quad (4.34)$$

con

$$\frac{d\hat{u}(I_{a2})}{dI_a} = \frac{\cosh(\tilde{\theta}(I_{a2}))}{3(-\rho)\sqrt{\left(\frac{\beta(I_{a2})}{2(-\rho)^{3/2}}\right)^2 + 1}} > 0. \quad (4.35)$$

Luego, usando el análisis anterior concluimos que para el sistema (4.23), existe una bifurcación de Hopf para el valor, I_{a1} , en el punto de equilibrio, $(\hat{u}_m^-, \tilde{m}\hat{u}_m^-)$. Mientras que la segunda bifurcación de Hopf ocurre para el valor de, I_{a2} , en el punto de equilibrio, $(\hat{u}_m^+, \tilde{m}\hat{u}_m^+)$.

Para ser consistentes con el trabajo de Alford y Auchmuty, vamos a denotar los valores de la corriente, $I_{a1} = I_m^-$ e $I_{a2} = I_m^+$. Con los elementos

y la notación anteriores, enunciarnos el siguiente lema cuya demostración realmente ya hemos hecho.

Lema 4.1 (Alford, Auchmuty [6]) *Supongamos que $f(\hat{u})$, δ_0 definidos como en (4.2) y (4.6) respectivamente se satisfacen para un número entero positivo m . Cuando se cumple la condición $0 < m^2 D < \delta_0$, existe un par de valores positivos de la corriente, I_m^\pm , para los cuales la matriz de Jacobi $J_m(I_a)$ tiene valores propios imaginarios. Cuando $m^2 D > \delta_0$, no existen puntos de bifurcación de modo m para cualquier valor de la corriente I_a .*

Ahora estamos interesados en determinar los valores críticos de la velocidad, con la que se propaga la onda por el anillo. Para ello, usamos los valores propios de la matriz $J_m(I_a)$, evaluada en el punto de equilibrio $(\hat{u}_m^-, \tilde{m}\hat{u}_m^-)$, es decir para $I_a = I_{a1}$,

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{b - \gamma^2}. \quad (4.36)$$

El valor de la velocidad, c , para la bifurcación de Hopf en I_{a1} , se obtiene como sigue. Al sustituir $\lambda_{1,2}$ en (4.23), se tiene

$$(\pm i\sqrt{b - \gamma^2}) \vec{\mathbf{b}} = J_m(I_a) \vec{\mathbf{b}} = -imc \vec{\mathbf{b}}, \quad (4.37)$$

la cual nos da dos valores críticos

$$c_m = \pm \frac{\sqrt{b - \gamma^2}}{m}, \quad \text{con } m \neq 0. \quad (4.38)$$

Elegiremos el valor positivo de c_m , por lo que la rotación de la onda reentrante es en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Análogamente, los valores propios de la matriz $J_m(I_a)$, evaluada en el punto de equilibrio $(\hat{u}_m^+, \tilde{m}\hat{u}_m^+)$, para $I_a = I_{a2}$ son,

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{b - \gamma^2}, \quad (4.39)$$

el valor (positivo) de la velocidad, en donde se da la bifurcación de Hopf en I_{a2} es,

$$c_m = \frac{\sqrt{b - \gamma^2}}{m}, \quad \text{con } m \neq 0. \quad (4.40)$$

En términos del cambio de variable $x = R\theta$, la condición $0 < m^2 D < \delta_0$, se escribe como $0 < m^2 D_0/R^2 < \delta_0$. Esta expresión nos indica que es

necesario un término de difusión D_0 suficientemente pequeño o un radio R suficientemente grande, para que se dé la bifurcación de Hopf.

Ahora estamos en condiciones de seguir nuestro análisis cuando el sistema está definido en una región anular.

4.4.4. Ondas rotando en un disco anular

Aquí consideramos el sistema (4.1), definido en un disco anular de radio interior R_1 y radio exterior R_2 . Lo primero que haremos será reescalar¹⁴ el dominio con el fin de que el radio del círculo de radio mayor, valga 1. Esto se hace considerando el cambio de variable $\tilde{r}(r) = r/R_2$. De aquí en adelante, a fin de no introducir notación adicional, a la variable \tilde{r} la denotaremos por r . Una vez reescalado el dominio, lo escribimos en coordenadas polares (r, θ) como,

$$\mathcal{A}_\eta = \{(r, \theta) \mid \eta < r < 1, \eta = R_1/R_2, \theta \in [-\pi, \pi]\}. \quad (4.41)$$

Luego, el sistema de FitzHugh-Nagumo toma la forma siguiente,

$$u_t = D\Delta u + u(1-u)(u-a) - w + I_a \quad (4.42a)$$

$$w_t = bu - \gamma w, \quad (4.42b)$$

con $D = D_0/R_2^2$, para $(r, \theta, t) \in \mathcal{A}_\eta \times [0, \infty)$. El laplaciano, Δu , en coordenadas polares, es

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (4.43)$$

El sistema (4.42) está sujeto a que el flujo (hacia afuera en dirección del vector normal exterior) en la frontera interior y exterior del disco anular, sea cero. Esto significa que las condiciones de frontera son de tipo Neumann homogéneas, es decir

$$(\text{grad } u) \cdot \vec{n}_{ext} = 0, \quad \text{con } r = \eta, \quad (\theta, t) \in [-\pi, \pi] \times (0, \infty), \quad (4.44a)$$

$$(\text{grad } u) \cdot \vec{n}_{ext} = 0, \quad \text{con } r = 1, \quad (\theta, t) \in [-\pi, \pi] \times (0, \infty). \quad (4.44b)$$

¹⁴El reescalamiento tiene como propósito, analizar los valores de D_0 y R_2 , para los cuales existe una onda reentrante en el disco anular.

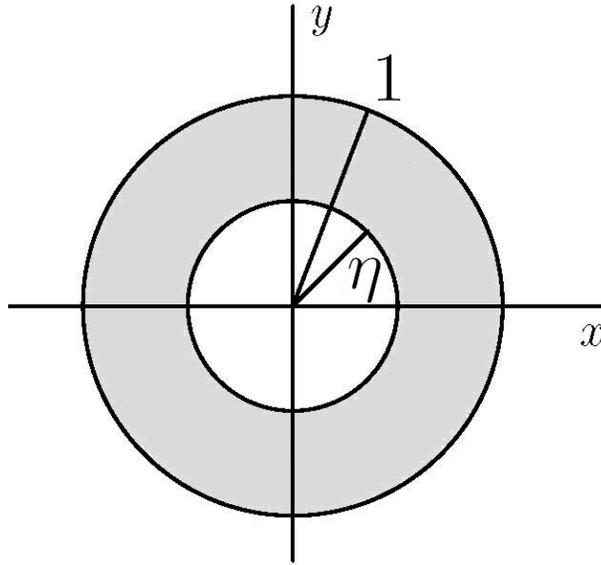


Figura 4.21: Dominio \mathcal{A}_η , en forma de disco anular, sobre el que se define el sistema (4.42).

De forma similar las condiciones de frontera para w , son

$$(\text{grad } w) \cdot \vec{n}_{ext} = 0, \text{ con } r = \eta, (\theta, t) \in [-\pi, \pi] \times (0, \infty), \quad (4.45a)$$

$$(\text{grad } w) \cdot \tilde{\vec{n}}_{ext} = 0, \text{ con } r = 1, (\theta, t) \in [-\pi, \pi] \times (0, \infty). \quad (4.45b)$$

En las condiciones de frontera (4.44)–(4.45) el punto, (\cdot) , denota el producto escalar entre los vectores en medio de los cuales aparece. \vec{n}_{ext} es el vector normal a la frontera interior del disco anular; mientras que $\tilde{\vec{n}}_{ext}$ es el vector normal a la frontera exterior del disco anular. Observe que $-\vec{n}_{ext} = \tilde{\vec{n}}_{ext}$.

Desde el punto de vista fisiológico la condición de que el flujo sea cero en la frontera, significa que estamos considerando una sección de tejido cardíaco plano en forma de disco anular la cual no interactúa con otras células cardíacas. Es decir, esta parte del tejido se encuentra aislado.

Introducimos ahora la definición de solución de tipo onda viajera escrita en coordenadas polares para el sistema (4.42),

Definición 4.3 Una solución $(u(r, \theta, t), w(r, \theta, t))$ de (4.42), en $0 < t < \infty$, con $r \in (\eta, 1)$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$ es llamada solución de tipo onda viajera rotatoria,

si existen una constante, c , y dos funciones, ϕ y ψ , tales que para todo (r, θ, t) , u y w , se expresan como,

$$u(r, \theta, t) = \phi(r, \theta - ct), \quad w(r, \theta, t) = \psi(r, \theta - ct), \quad (4.46)$$

donde c es la velocidad angular de propagación de la onda.

Suponiendo que (4.42) tiene soluciones de tipo onda viajera, al sustituir (4.46) en (4.42), se llega a que ϕ y ψ deben satisfacer el siguiente sistema de EDO

$$D\Delta\phi + c\phi'(\xi) + f(\phi) - \psi + I_a = 0, \quad (4.47a)$$

$$c\phi'(\xi) + b\phi - \gamma\psi = 0, \quad (4.47b)$$

donde $\xi = \theta - ct$. Aquí, $' \equiv \frac{d}{d\xi}$. Al sistema (4.47) hay que añadirle las condiciones de frontera (4.44)–(4.45), escritas en términos de ϕ y ψ .

Para valores dados de η , D e I_a , debemos encontrar valores diferentes de cero para la velocidad, c , tales que la pareja (ϕ, ψ) , sea una solución de (4.47) y que satisfaga las condiciones de frontera (4.44)–(4.45).

Demostraremos que dicha solución proviene de una bifurcación de Hopf de la solución estacionaria y homogénea correspondiente al punto de equilibrio $(\hat{u}(I_a), \hat{w}(I_a))$. La demostración es análoga a la que se hizo en la sub-sección anterior, por lo que aquí sólo bosquejaremos los puntos esenciales.

Comenzamos realizando el análisis lineal local del sistema (4.47) en el punto $(\hat{u}(I_a), \hat{w}(I_a))$.

4.4.5. Análisis local

Con el objetivo de realizar el análisis local en una vecindad del equilibrio $(\hat{u}(I_a), \hat{w}(I_a))$, consideremos una perturbación de este punto. Así, introduzcamos ν_1 y ν_2 tales que

$$\phi(r, \xi) = \hat{u}(I_a) + \nu_1(r, \xi) \quad \text{y} \quad \psi(r, \xi) = \hat{w}(I_a) + \nu_2(r, \xi). \quad (4.48)$$

Sustituyámos en el sistema (4.47) y quedémonos con los términos lineales, llegándose a que las perturbaciones ν_1 y ν_2 , satisfacen el sistema lineal

$$D\Delta\nu_1 + c\frac{\partial\nu_1}{\partial\xi} + f'(\hat{u}(I_a))\nu_1 - \nu_2 = 0, \quad (4.49a)$$

$$c\frac{\partial\nu_2}{\partial\xi} + b\nu_1 - \gamma\nu_2 = 0. \quad (4.49b)$$

f' significa derivada de f con respecto a u . Queremos que ν_1 y ν_2 sean funciones periódicas de periodo 2π en la variable ξ , ν_1 y ν_2 satisfacen las condiciones de frontera (4.44) y (4.45), respectivamente.

Nótese que los posibles puntos de bifurcación de los que emergen las soluciones de tipo onda viajera que estamos buscando, dependerán del valor de la corriente I_a . Lo que hacemos ahora, es proponer soluciones del sistema (4.49) de la forma

$$\begin{pmatrix} \nu_1(r, \xi) \\ \nu_2(r, \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(r) \\ a_2(r) \end{pmatrix} e^{im\xi}, \quad (4.50)$$

siendo m número entero, donde a_1 y a_2 son funciones desconocidas.

Sustituyendo (4.50) en (4.49), llegamos a que las funciones $a_1(r)$ y $a_2(r)$, deben ser solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$-DL_m(a_1(r)) + f'(\hat{u}(I_a))a_1(r) - a_2(r) = -imca_1(r), \quad (4.51a)$$

$$ba_1(r) - \gamma a_2(r) = -imca_2(r), \quad (4.51b)$$

donde L_m es la parte radial del operador laplaciano en dimensión dos, es decir

$$L_m(a_1(r)) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{da_1(r)}{dr} \right] + \frac{m^2}{r^2} a_1, \quad \text{con } r \in (\eta, 1). \quad (4.52)$$

Además, se deben satisfacer las condiciones de frontera,

$$a_1'(\eta) = a_2'(1) = 0. \quad (4.53)$$

De 4.51.b) tenemos,

$$a_2(r) = b(\gamma - imc)^{-1} a_1(r). \quad (4.54)$$

Ahora bien, para encontrar la solución que se propone en (4.50), debemos encontrar la forma que tiene el vector $(a_1(r), a_2(r))$. Al sustituir (4.54) en 4.51.a), obtenemos una ecuación diferencial sólo en términos de $a_1(r)$. En efecto, hecha la sustitución, esto nos conduce al siguiente problema: si $a_1(r)$ denota la solución no trivial (función propia) del operador L_m , entonces podemos escribir a 4.51.a), en la forma

$$L_m(a_1(r)) = \lambda a_1(r), \text{ con } r \in (\eta, 1), \quad a_1'(\eta) = a_1'(1) = 0, \quad (4.55)$$

donde $\lambda = D^{-1}(imc - b(\gamma - imc)^{-1} + f'(\hat{u}(I_a)))$.

La ecuación diferencial que aparece en la primera igualdad en (4.55), es una forma de la *ecuación de Bessel*¹⁵ cuya solución general es una combinación lineal de dos familias de *funciones de Bessel* (véase el Apéndice D): $J_m(\sqrt{\lambda}r)$ y $Y_m(\sqrt{\lambda}r)$, definidas así,

$$J_m(\sqrt{\lambda}r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{\sqrt{\lambda}r}{2} \right)^{2k+m}, \quad (4.57)$$

$$Y_m(\sqrt{\lambda}r) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} J_\alpha(\sqrt{\lambda}r) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \alpha} J_{-\alpha}(\sqrt{\lambda}r) \right] \Big|_{\alpha=m}, \quad (4.58)$$

donde Γ es¹⁶ la llamada función gama definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (4.59)$$

De esta manera, $a_1(r) = C_1 J_m(\sqrt{\lambda}r) + C_2 Y_m(\sqrt{\lambda}r)$, donde C_1 y C_2 son constantes. Una vez que se obtiene $a_1(r)$, se obtiene $a_2(r)$ simplemente sustituyendo $a_1(r)$ en (4.54).

El *problema de Sturm-Liouville* (4.55) tiene, para cada entero $m > 0$, un valor propio, λ_{mn} , con $n \in \{1, 2, \dots\}$. Introduzcamos la siguiente notación

¹⁵La ecuación (4.55), es una ecuación de Bessel en coordenadas polares. Esto se ve más claro si sustituimos $L_m(a_1(r))$ de (4.52) en (4.55) para obtener,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{da_1(r)}{dr} \right] + \left[-\frac{m^2}{r^2} + \lambda \right] a_1(r) = 0, \quad (4.56)$$

sujeta a las condiciones de frontera $a_1'(\eta) = a_1'(1) = 0$ con $\eta > 0$, lo cual nos define un *problema de Sturm-Liouville*. Véase el Apéndice D.

¹⁶Algunas de las propiedades de la función gama son: a) $\Gamma(1) = 1$, b) $\Gamma(n+1) = n!$, c) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ y c) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Véase [47].

$$\tilde{S} = \{\lambda_{mn}(\eta) : n \geq 1\}, \quad (4.60)$$

donde el valor propio más pequeño cumple que $\lambda_{m1} > 0$, con $m \neq 0$. Esto se fundamenta en la Teoría de Sturm Liouville. Véase el Apéndice D.

Lo anterior nos conduce al siguiente problema de valores propios,

$$S_{mn}(\eta, I_a) \vec{\mathbf{b}} = -imc \vec{\mathbf{b}}, \quad (4.61)$$

con $\vec{\mathbf{b}} = (a_1(r), a_2(r))^\top$, y

$$S_{mn}(I_a) = \begin{pmatrix} -\lambda_{mn}(\eta)D + f'(\hat{u}(I_a)) & -1 \\ b & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Aquí \top , denota transpuesto.

Una condición necesaria para que la corriente I_{mn}^\pm , sea un valor de bifurcación para las soluciones de 4.51.a) y 4.51.b) de tipo onda viajera que rotan, es que la matriz $S_{mn}(I_a)$ tenga un par de valores propios imaginarios. Para averiguar qué tipo de valores propios tiene la matriz $S_{mn}(I_a)$, escribamos su traza y su determinante. Hélos aquí

$$\text{tr}[S_{mn}(I_a)] = -\lambda_{mn}(\eta)D + f'(\hat{u}(I_a)) - \gamma, \quad (4.63a)$$

$$\det[S_{mn}(I_a)] = -\gamma[-\lambda_{mn}(\eta)D + f'(\hat{u}(I_a))] + b. \quad (4.63b)$$

Análogamente a como lo hicimos en el caso del anillo, es necesario encontrar el valor de la abscisa, \hat{u} , del punto de equilibrio donde la traza de la matriz vale cero. Esto se hace, expresando la traza en términos del parámetro I_a , considerando el valor específico de $\hat{u}(I_a)$, pidiendo, además, que sea válida la Proposición 2.5.

Para este fin, primero determinamos $\hat{u}(I_a)$, la cual proviene de una solución real del polinomio cúbico, $\hat{u}^3 - \hat{u}^2(1+a) + \hat{u}(\tilde{m}+a) - I_a = 0$, la que, a su vez, viene de intersectar a las ceroclinas, $w_1(u) = u(1-u)(u-a) + I_a$ y $w_2(u) = \tilde{m}u$. Luego

$$\hat{u}(I_a) = -2(-\rho)^{\frac{1}{2}} \text{senh}(\tilde{\theta}(I_a)) - \tau, \quad (4.64)$$

donde,

$$\rho = \frac{(a+1)^2}{9} - \frac{a+m}{3}, \quad \tau = -\frac{a+1}{3} \quad \text{y} \quad \tilde{\theta}(I_a) = \frac{1}{3} \text{senh}^{-1} \left(\frac{\beta(I_a)}{2(-\rho)^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (4.65)$$

con

$$\beta(I_a) = -2 \left[\frac{a+1}{3} \right]^3 + 3 \left[\frac{(a+1)(a+\tilde{m})}{9} \right] - I_a. \quad (4.66)$$

Sustituyendo $\hat{u}(I_a)$ en la expresión para la traza 4.63.a), tendremos a ésta en términos de I_a . El resultado es

$$\begin{aligned} \text{tr}[S_{mm}(I_a)] = & -3(-2(-\rho)^{\frac{1}{2}} \text{senh}(\tilde{\theta}(I_a)) - \tau)^2 + 2(-2(-\rho)^{\frac{1}{2}} \text{senh}(\tilde{\theta}(I_a)) - \tau)(1+a) \\ & - (\lambda_{mn}(\eta)D + \gamma + a). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Con la finalidad de determinar la posible existencia de valores de I_a , para los que la traza cambia de signo, realizamos una simulación numérica. El resultado de ésta se ve en la figura 4.22 (para el juego de parámetros que se indican en la nota de pie de figura).

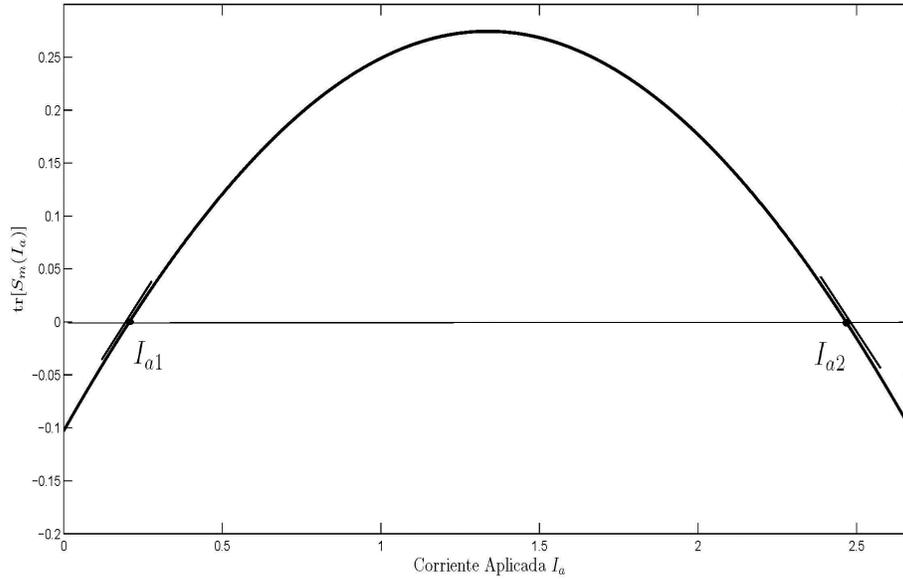


Figura 4.22: Se puede observar el cambio de signo de la traza cuando la corriente I_a aumenta. El valor de los parámetros es, $a = 0.139$, $m = 1$, $n = 1$, $b = 0.008$, $\gamma = 0.002032$, $D = 0.005$, $\lambda_{11} = 3.38$ y $\eta = 0.1$. Los valores aproximados de la corriente en los que la traza se anula son $I_{a1} = 0.20892$ e $I_{a2} = 2.46664$.

Aquella nos muestra la existencia de dos valores de I_a para los que la traza cambia de signo. También para esta figura se ve que, la derivada de la traza con respecto a I_a , en los valores críticos no es cero.

Sin embargo, nos interesa demostrar que la traza cambia de signo y la derivada con respecto a I_a es distinta de cero, para I_{a1} e I_{a2} . Esto es lo que hacemos enseguida.

Encontraremos el valor particular de la abscisa, $\hat{u}(I_a)$, del punto de equilibrio, para el cual la matriz $S_{mn}(I_a)$ tiene valores propios imaginarios. Esto sucede si, $\det[S_{mn}(I_a)] > 0$ y $\text{tr}[S_{mn}(I_a)] = 0$. Estas condiciones conducen a que,

$$f'(\hat{u}) = \gamma + \lambda_{mn}(\eta)D \quad \text{y} \quad (b - \gamma^2) > 0, \quad (4.68)$$

lo que, a su vez, nos lleva a resolver el polinomio cuadrático $3\hat{u}^2 - 2(1+a)\hat{u} + a + \gamma + \lambda_{mn}(\eta)D = 0$. La abscisa es,

$$\hat{u}_{mn}^{\pm} = \frac{1+a}{3} \pm \sqrt{\frac{\delta_0 - \lambda_{mn}(\eta)D}{3}}, \quad (4.69)$$

a fin de que \hat{u}_{mn}^{\pm} sean reales, imponemos la condición

$$\lambda_{mn}(\eta)D < \delta_0. \quad (4.70)$$

Ahora, dado que la traza en función de \hat{u} , es un polinomio cuadrático, $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u})] = -3\hat{u}^2 + 2(1+a)\hat{u} - (\lambda_{mn}(\eta)D + \gamma + a)$, podemos concluir que:

- a) $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u})] < 0, \forall \hat{u} \in (-\infty, \hat{u}_{mn}^-)$,
- b) $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u})] > 0$, en el intervalo $(\hat{u}_{mn}^-, \hat{u}_{mn}^+)$,
- c) $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u})] < 0, \forall \hat{u} \in (\hat{u}_{mn}^+, \infty)$.

Siendo que \hat{u} se expresa en términos de I_a , entonces la traza es, a final de cuentas, función de I_a , por lo que podemos expresar las condiciones anteriores en términos de I_a .

Al cambiar I_a , desde cero hasta un valor de I_{mn}^- , $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u}(I_a))] < 0$, en el intervalo $(\hat{u}(0), \hat{u}(I_{mn}^-))$ y $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u}(I_{mn}^-))] = 0$. Luego, $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u}(I_a))] > 0$, en el intervalo $(\hat{u}(I_{mn}^-), \hat{u}(I_{mn}^+))$, y después $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u}(I_{mn}^+))] = 0$. Finalmente, $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u}(I_a))] < 0$, en $(\hat{u}(I_{mn}^+), \hat{u}(I_{mn}^*))$.

Además se satisface la condición de transversalidad en ambos valores de I_a . En efecto, al derivar $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u}(I_a))]$ con respecto a I_a y evaluar en I_{mn}^-

$$\frac{d}{dI_a} \text{tr}[S_{mn}(\hat{u})](I_{mn}^-) = -6\hat{u}(I_{mn}^-) \frac{d\hat{u}(I_{mn}^-)}{dI_a} + 2(1+a) \frac{d\hat{u}(I_{mn}^-)}{dI_a}, \quad (4.71)$$

dado que $\hat{u}(I_{mn}^-) = \hat{u}_{mn}^-$,

$$\frac{d}{dI_a} \text{tr}[S_m(\hat{u})](I_{mn}^-) = +6\sqrt{\frac{\delta_0 - \lambda_{mn}(\eta)D}{3}} \frac{d\hat{u}(I_{mn}^-)}{dI_a} > 0, \quad (4.72)$$

con

$$\frac{d\hat{u}(I_{mn}^-)}{dI_a} = \frac{\cosh(\tilde{\theta}(I_{mn}^-))}{3(-\rho)\sqrt{\left(\frac{\beta(I_{mn}^-)}{2(-\rho)^{3/2}}\right)^2 + 1}} > 0. \quad (4.73)$$

Análogamente, se verifica la condición de transversalidad de $\text{tr}[S_{mn}(\hat{u}(I_a))]$ en I_{mn}^+ , usando que $\hat{u}(I_{mn}^+) = \hat{u}_{mn}^+$. En efecto

$$\frac{d}{dI_a} \text{tr}[S_{mn}(\hat{u})](I_{mn}^+) = -6\sqrt{\frac{\delta_0 - \lambda_{mn}(\eta)D}{3}} \frac{d\hat{u}(I_{mn}^+)}{dI_a} < 0, \quad (4.74)$$

con

$$\frac{d\hat{u}(I_{mn}^+)}{dI_a} = \frac{\cosh(\tilde{\theta}(I_{mn}^+))}{3(-\rho)\sqrt{\left(\frac{\beta(I_{mn}^+)}{2(-\rho)^{3/2}}\right)^2 + 1}} > 0. \quad (4.75)$$

Esto nos indica que existe una bifurcación de Hopf, para el valor crítico I_{mn}^- , que satisface, $I_{mn}^- - f(\hat{u}_{mn}^-) - \tilde{m}\hat{u}_{mn}^- = 0$ y una segunda bifurcación de Hopf para I_{mn}^+ que cumple la condición, $I_{mn}^+ - f(\hat{u}_{mn}^+) - \tilde{m}\hat{u}_{mn}^+ = 0$. Para el sistema (4.61).

Alford y Auchmuty, enuncian y demuestran el siguiente lema.

Lema 4.2 (Alford, Auchmuty [6]) *Supongamos que f y δ_0 , cumplen las ecuaciones (4.2) y (4.6), con m un entero positivo. Si $\lambda_{mn}(\eta)$ es el n -valor propio del problema de Sturm-Liouville (4.55), y si $0 < \lambda_{mn}(\eta)D < \delta_0$ entonces hay un par de valores positivos de la corriente, I_{mn}^\pm , para los cuales $S_{mn}(\eta, I)$ tiene valores propios imaginarios. Cuando $\lambda_{mn}(\eta)D > \delta_0$ entonces no existen puntos de modo m para los que ocurra una bifurcación para algún valor de I_a .*

En nuestro caso, todos los cálculos y razonamientos hechos anteriormente, constituyen la demostración de éste.

Análogamente, a como lo hicimos en el caso del anillo, aquí nos interesa conocer el valor crítico de la velocidad de propagación c . Para ello, evaluaremos la traza $S_{mn}(I_a)$ en I_{mn}^- y calculemos los valores propios de $S_{mn}(I_{mn}^-)$, que son

$$\tilde{\lambda} = \pm i\sqrt{b - \gamma^2}, \quad (4.76)$$

sustituyendo $\tilde{\lambda}$ en (4.61), el valor positivo de bifurcación es,

$$\tilde{c}_m = \frac{\sqrt{b - \gamma^2}}{m}, \quad \text{con } m \neq 0. \quad (4.77)$$

Para I_{mn}^+ , el valor positivo de c es también,

$$\tilde{c}_m = \frac{\sqrt{b - \gamma^2}}{m}, \quad \text{con } m \neq 0. \quad (4.78)$$

Es decir la onda reentrante rota en dirección contraria de las manecillas del reloj. La condición (4.70), nos garantiza la existencia de soluciones de tipo onda rotatoria para el sistema de FitzHugh-Nagumo las cuales provienen de una bifurcación de Hopf.

La desigualdad (4.70), en términos del cambio de variable $\tilde{r}(r) = r/R_2$ (recuérdese que a \tilde{r} la denotamos como r), se escribe como

$$0 < \lambda_{mn}(\eta)D_0 < \delta_0 R_2^2. \quad (4.79)$$

Esta condición significa que si $\eta = R_1/R_2$ es fijo, entonces D_0 debe ser suficientemente pequeño o bien R_2 debe ser suficientemente grande para que la bifurcación ocurra.

Notemos que los puntos críticos, $(\hat{u}_{mn}^\pm, \hat{w}_{mn}^\pm)$, dependen de $\lambda_{mn}(\eta)$. A su vez, éstos dependen de η . Para nosotros, es importante conocer el comportamiento del valor propio $\lambda_{mn}(\eta)$ con respecto a η . Esto con el objetivo de determinar qué valores del radio η debemos elegir, para que exista la bifurcación de Hopf. Véase la condición (4.70). Ahora bien, como el conjunto de valores propios, \tilde{S} , es infinito (pero numerable), lo que hacemos es considerar sólo un valor propio y trabajamos con él. Enseguida lo hacemos para un caso particular.

4.4.6. Análisis para $m = 1$ y $n = 1$

De las propiedades de los valores propios del problema de *Sturm-Liouville* (4.55) se cumple que, para cada valor fijo m y η , los valores propios pueden ser ordenados de la forma siguiente ¹⁷,

$$\lambda_{m1}(\eta) < \lambda_{m2}(\eta) < \lambda_{m3}(\eta) < \dots \quad (4.80)$$

En términos generales, puede decirse que, dada la forma de como se pueden ordenar los valores propios $\lambda_{mn}(\eta)$, para un número m fijo y aumentando n , se debe elegir el coeficiente de difusión D_0 suficientemente pequeño de manera que cumpla la condición (4.79).

Lo que haremos ahora será considerar dominios de forma anular “apropiados” para encontrar alguna bifurcación de Hopf a través de la cual vamos a encontrar ondas viajeras que rotan para un valor adecuado del coeficiente de difusión D . Debemos decir que sólo consideramos el caso $m = 1$ y $n = 1$. De ahora en adelante, todos los resultados que se presentan dependen del valor propio más pequeño $\lambda_{11}(\eta)$, del problema de *Sturm-Liouville* (4.55). Lo primero que hacemos es acotar a $\lambda_{11}(\eta)$. Usando el *principio de Rayleigh* (véase Temple y Bickley [51]), se prueba que, para un valor fijo del parámetro $\eta \in (0, 1)$, se cumple la desigualdad,

$$\lambda_{11}(\eta) < \frac{4}{1 + \eta^2} < 4, \quad (4.81)$$

la cual nos indica que, $\lambda_{11}(\eta)$ está acotado superiormente. Ahora queremos encontrar una cota inferior para $\lambda_{11}(\eta)$. Para el valor propio más pequeño del problema de *Sturm-Liouville* (4.55), usando el cociente de *Rayleigh*, existe una función propia $y_1(r)$ tal que,

$$\lambda_{11}(\eta) \int_{\eta}^1 r y_1^2 dr = \int_{\eta}^1 r (y_1')^2 dr + \int_{\eta}^1 \frac{1}{r} y_1^2 dr, \quad (4.82)$$

donde $' = \frac{d}{dr}$. Dado que $r \in (0, 1)$, también tenemos que

$$\lambda_{11}(\eta) \int_{\eta}^1 r y_1^2 dr < \lambda_{11}(\eta) \int_{\eta}^1 y_1^2 dr. \quad (4.83)$$

¹⁷Véase el Apéndice D.

Además,

$$\int_{\eta}^1 y_1^2 dr < \int_{\eta}^1 r(y_1')^2 dr + \int_{\eta}^1 \frac{1}{r} y_1^2 dr, \quad (4.84)$$

por lo que, utilizando las tres expresiones anteriores, llegamos a que,

$$1 < \lambda_{11}(\eta). \quad (4.85)$$

Por otro lado, Achmuty y Alford enunciaron dos condiciones sobre el valor propio $\lambda_{11}(\eta)$ con respecto a η . Esto es lo que expresa el siguiente lema.

Lema 4.3 (Alford y Auchmuty [6]). *El valor propio $\lambda_{11}(\eta)$ tiene las siguientes características:*

- a) $\lambda_{11}(\eta)$ es una función decreciente y continua de η en el intervalo $(0, 1)$.
- b) El valor propio, $\lambda_{11}(\eta)$, está acotado así $1 < \lambda_{11}(\eta) < \mu_{11}$.

Aquí, $\mu_{11} = \sqrt{\lambda_{11}} r^*$, con r^* un valor crítico. μ_{11} , es un valor crítico de la función de Bessel J_{11} de primer orden es decir $J_{11}'(\mu_{11}) = 0$, donde, $' \equiv \frac{d}{dr}$. Véase nota de pie de página¹⁸.

Usando el Lema 4.3, obtenemos que si el radio interior es tal que $\eta = 1$, entonces $\lambda_{11}(\eta) = 1$, esto significa que el disco anular se convierte en el anillo, es decir $R_1 = R_2$. Sucede un comportamiento similar con la corriente I del disco anular y la corriente del anillo, esto se puede observar con más detalle en las ecuaciones (4.69) y (4.30). En efecto, usándolas, podemos convencernos que,

$$\text{si } \eta \uparrow 1 \text{ entonces } I_{11}^{(-)} \downarrow I_1^{(-)} \text{ y } I_{11}^{(+)} \uparrow I_1^{(+)}, \quad (4.86)$$

donde los símbolos \uparrow, \downarrow indican el límite por: la derecha y la izquierda, respectivamente. Aquí, $I_1^{(\pm)}$ denota los valores críticos de la corriente donde sucede la bifurcación de Hopf en el caso del anillo; mientras que $I_{11}^{(\pm)}$ denota

¹⁸Utilizando la referencia [1] página 370, μ_{11} es el primer cero de $J_1'(\sqrt{\lambda_{11}}r)$, el cual cumple que $\mu_{11} > 1$, y al desarrollar $(\mu_{11} - \lambda_{11})^2 > 0$, usando que $r^* \in (0, 1)$ con $\lambda_{11} > 1$, se verifica la condición b), del Lema 4.3. Alford y Auchmuty, usando el valor de los parámetro $a = 0.139$, $b = 0.008$ y $\gamma = 0.0196$, encuentran que $\mu_{11} \approx 3.4$, lo cual es consistente con (4.81). Esto se utilizara más adelante.

los valores de la corriente para los cuales sucede la bifurcación de Hopf en el disco anular, correspondiente a $m = 1$ y $n = 1$.

La condición (4.86), es cierta dado que si, $I_{11}^{\pm} - f(\hat{u}_{11}^{\pm}) + \tilde{m}\hat{u}_{11}^{\pm} = 0$ para el disco anular; mientras que $I_1^{(\pm)} - f(\hat{u}_1^{\pm}) + \tilde{m}\hat{u}_1^{\pm} = 0$ para el anillo, cuando η tiende a 1 las abscisas \hat{u}_{11}^{\pm} y \hat{u}_1^{\pm} se acercan.

Vamos ahora a averiguar qué restricciones deben tener los parámetros para los cuales existe una bifurcación de ondas viajeras que rotan en el disco anular para $0 < \eta < 1$. Utilizaremos la condición $0 < \lambda_{11}(\eta)D < \delta_0$, junto con el Lema 4.3, para encontrar qué condiciones deben satisfacer los parámetros, de difusión D y el radio η para que ocurra una bifurcación de Hopf cuando $\eta > 0$. Es decir, queremos encontrar cuál es la relación que deben guardar, el coeficiente de difusión D y el radio interior η para encontrar soluciones de tipo onda viajera que rotan en el disco anular. Vamos a considerar a D comparado con los parámetros $\delta_0\mu_{11}^{-1}$ y δ_0 . Se tienen los tres casos siguientes:

- a) Si escogemos D “suficientemente pequeña”, entonces

$$D < \delta_0\mu_{11}^{-1}, \quad (4.87)$$

utilizando la parte b) del Lema 4.3, se tiene que $D < \lambda_{11}(\eta)D < \mu_{11}D$ y de la condición anterior $\mu_{11}D < \delta_0$, por lo que llegamos a,

$$\lambda_{11}(\eta)D < \delta_0 \quad \forall \eta \in (0, 1), \quad (4.88)$$

de manera que si el radio interior $\eta \in (0, 1)$, entonces existe un par de valores positivos de la corriente $I_{11}^{(\pm)}$, para los cuales la matriz, $S_{11}(\eta, I)$, tiene valores propios imaginarios correspondientes al modo 1, para los cuales existe una bifurcación Hopf, para I_{11}^+ y otra para I_{11}^- , de las ondas viajeras rotatorias.

- b) Para un valor intermedio del parámetro D , digamos

$$\delta_0\mu_{11}^{-1} < D < \delta_0, \quad \text{es decir} \quad \mu_{11}^{-1} < \frac{D}{\delta_0} < 1, \quad (4.89)$$

del Lema 4.3, tenemos que $\lambda_{11}^{-1}(\eta)$ es una función continua y creciente, en el intervalo $(\mu_{11}^{-1}, 1)$.

Ahora bien, como $D/\delta_0 \in (\mu_{11}^{-1}, 1)$ y $\lambda_{11}^{-1}(\eta)$ es una función continua en $(0, 1)$, por el teorema del valor intermedio, existe un valor $\rho_D \in (0, 1)$, tal que $\lambda_{11}^{-1}(\rho_D) = D/\delta_0$. Es decir, $\lambda_{11}(\rho_D)D = \delta_0$.

Dado que $\lambda_{11}^{-1}(\mu)$ es una función creciente, sucede lo siguiente:

- i) Tenemos que $\lambda_{11}^{-1}(\eta) > D/\delta_0$, cuando $\eta \in (\rho_D, 1)$ en este caso $\lambda_{11}(\eta)D < \delta_0$, de manera que existen puntos de bifurcación de modo 1.
 - ii) Ahora bien, se tiene que $\lambda_{11}^{-1}(\eta) < D/\delta_0$, cuando $\eta \in (0, \rho_D)$. De manera que $\lambda_{11}(\eta)D > \delta_0$, es decir no existen puntos de bifurcación de modo 1.
- c) Si elegimos el coeficiente de difusión D , “suficientemente grande”, es decir

$$D > \delta_0, \tag{4.90}$$

utilizando el Lema 4.3, tenemos que $D < D\lambda_{11}(\eta) < \mu_{11}\delta_0$ y dado que $D > \delta_0$, entonces $\lambda_{11}(\eta)D > \delta_0$, para todo $\eta \in (0, 1)$. El Lema 4.2, nos asegura que no existen puntos de bifurcación de modo 1 para algún valor de la corriente I .

A continuación, presentamos dos diagramas realizados por Alford y Auchmuty. Aquéllos se construyen usando los valores $a = 0.139$, $b = 0.008$ y $\gamma = 0.0196$.

Para la figura 4.23, se observa la gráfica del coeficiente de difusión D como función del radio η . Se ven tres regiones denotadas por 1, 2 y 3. Al elegir valores de η y D en 3, no existen ondas reentrantes en el disco anular. Aquéllas existen cuando los valores de η y D , son elegidos en las regiones 1 y 2.

Mientras que en la figura 4.24, se ve la gráfica del coeficiente de difusión D como función de la corriente I_a . En en la regiones 1 y 3, se encuentra ubicado el valor de I_{11}^- y D , para existencia de la onda reentrante, donde I_{11}^- corresponde a un valor de bifurcación de Hopf. En la región constituida por 2 y 4, se ubican los valores de I_{11}^+ y D , para la existencia de la onda reentrante, en donde I_{11}^+ , corresponde al otro valor de bifurcación de Hopf.

Con base en los resultados anteriores, ahora estamos en condiciones de resolver numéricamente el problema (4.42) de condiciones de frontera (4.44)

y (4.45), junto con condiciones iniciales que especificaremos más adelante. Debemos elegir el rango de parámetros apropiado, esto con la finalidad de obtener las ondas reentrantes en el disco anular. Este es el propósito de la siguiente sección.

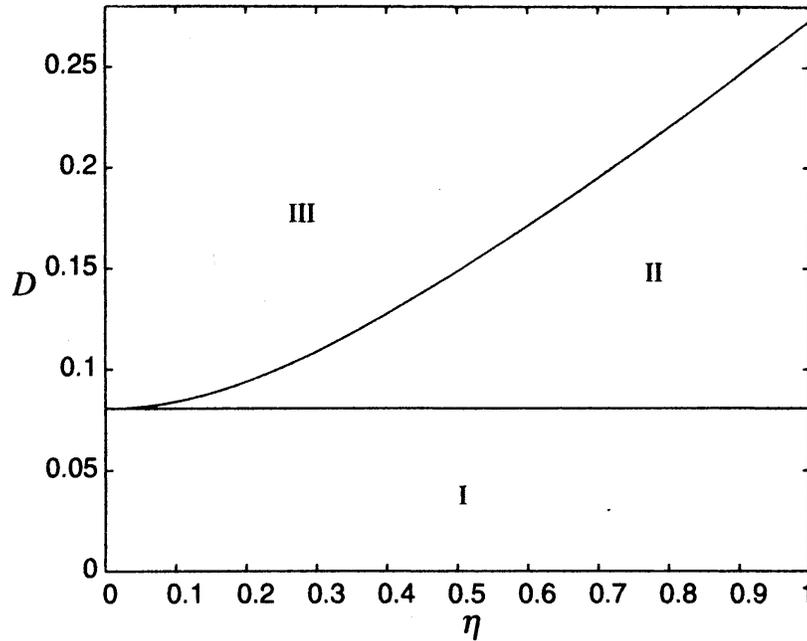


Figura 4.23: Gráfica del coeficiente D con respecto al radio interior η . Las regiones II y III se encuentran separadas por la gráfica de $D = \delta_0[\lambda_{11}(\eta)]^{-1}$, cuando $\eta = \rho_D$. Mientras que las regiones I y II , se encuentran separadas por la recta horizontal $D = \delta_0\mu_{11}^{-1}$. La bifurcación para las ondas que rotan no puede suceder cuando la pareja (η, D) se encuentra en la región III . La bifurcación de ondas reentrantes puede ocurrir en un disco anular de radio exterior 1 y radio interior η en las regiones I y II . Figura obtenida de Alford y Auchmuty [6].

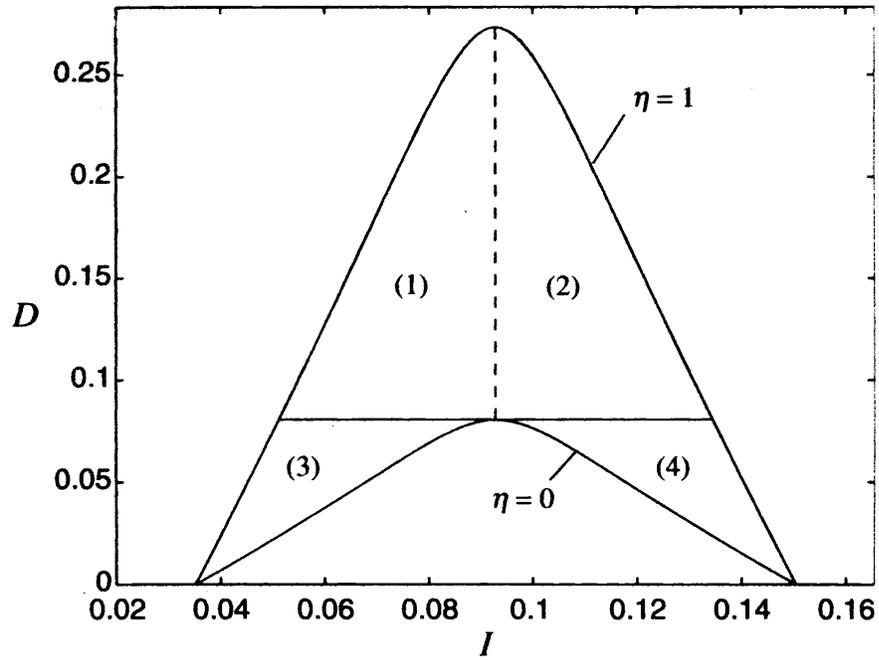


Figura 4.24: Coeficiente de difusión D en función de la corriente I_a . Las curvas frontera se construyen usando los valores críticos de la ecuación (4.69), para $\eta = 1$ (anillo de radio 1) y $\eta = 0$ (disco unitario). Las regiones 1, 2 y 3, 4, están separadas por $D = \delta_0 \mu_{11}^{-1}$, esta es la línea horizontal. Mientras que las regiones 1, 3 y 2, 4, están separadas por la línea discontinua vertical. La cual corresponde al valor de $I_a = 0.0928$, cuando $\lambda_{11}(\eta)D = \delta_0$. Las regiones 1, 3 y 2, 4 contienen los valores críticos $I_{11}^{(-)}$ e $I_{11}^{(+)}$, respectivamente para la existencia de la bifurcación de Hopf en el disco anular con $0 < \eta < 1$. Figura tomada de Alford y Auchmuty [6].

4.5. Simulaciones numéricas

Una vez demostrada la existencia de las ondas rotatorias en el sistema de FitzHugh-Nagumo, en esta sección nos proponemos realizar una serie de simulaciones numéricas del problema de condiciones iniciales y de frontera (4.42). Para este propósito, utilizamos el *software* público *FEMLAB*. Consideramos un sistema de ejes coordenados, en el que vamos a definir como negativa a la dirección en que se mueven las manecillas del reloj y positiva a la dirección opuesta. Además, vamos a identificar las marcas de las horas de la carátula del reloj como puntos numerados del 1 al 12. Empezamos describiendo brevemente el *software* *FEMLAB* que usaremos.

4.5.1. Breve descripción de FEMLAB

FEMLAB es un programa interactivo que permite resolver numéricamente sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales parciales. Éste usa el *Método de Elemento Finito* (véase [11]). *FEMLAB* es relativamente fácil de usar, para ello tiene EDP's predeterminadas de manera que la persona que lo utiliza pueda acceder de forma independiente a un modelo base. La declaración del problema empieza con especificar la dimensión del dominio y además se puede especificar el tipo de coordenadas (cartesianas o cilíndricas), que se desea usar. Posteriormente, se define la región en donde se pretende resolver el problema de condiciones iniciales y de frontera. Hecho lo anterior, se procede a discretizar la región por medio de triángulos equiláteros, el usuario puede elegir la calidad del refinamiento. Algo que debemos decir es que las ecuaciones predeterminadas al estar expresadas con tal nivel de generalidad pueden adaptarse para describir gran variedad de fenómenos de la ciencia y la ingeniería. Por ejemplo, se pueden elegir las ecuaciones que rigen la dinámica de fluidos, la transferencia del calor, etc.

En nuestro caso (el sistema de FitzHugh-Nagumo), lo que hicimos fue elegir, para cada una de las ecuaciones del sistema de FitzHugh-Nagumo (4.42), una EDP predeterminada en *FEMLAB*. Así, elegimos para 4.42.a) una ecuación de calor y también para 4.42.b) con coeficiente de difusión igual a cero. Al definirse las variables u y w traducidas en el código de *FEMLAB*, se tiene el sistema deseado. Elegimos un dominio en forma de disco anular y especificamos las condiciones de frontera e iniciales que se indican más adelante. *FEMLAB* tiene la opción de presentar el resultado de las simulaciones (los valores de u y w) en una escala de colores. En ésta, el

color rojo indica la zona de mayor valor; mientras que el color azul, es la zona en la que las variables u y w toman el menor valor.

Cuando se resuelve numéricamente el sistema de EDP's, al aumentar el tiempo desde $t = 0$, para cada lapso de tiempo posterior, el dominio se tiñe del color que le corresponde en la escala mencionada. Si el usuario lo requiere, puede obtener una filmación de la dinámica espacio-temporal de la variable que se desee.

4.5.2. La onda reentrante

Para realizar nuestras simulaciones numéricas, consideramos el sistema de FitzHugh-Nagumo (4.42) definido sobre el disco anular. El valor de los parámetros que usamos los tomamos del trabajo de Alford y Auchmuty. El radio exterior es igual a uno; mientras que el radio interior es $\eta = 0.1$. Del análisis que se realizó en la sección anterior, la condición que deben satisfacer η y el radio exterior (unitario), a fin de que existan ondas reentrantes es, $\lambda_{11}(\eta)D < \delta_0$. Observe que esta es una condición implícita sobre los radios la cual nos sugiere que el “ancho” de la región anular, juega un papel importante en la existencia de las ondas reentrantes. Podemos decir que, para este caso, la región anular es relativamente “gruesa”.

Desde el punto de vista fisiológico, recordemos que Mines postuló que el ancho del tejido en forma de disco anular, es importante para la instalación de las ondas reentrantes en el tejido cardiaco. Véase la sub-sección 4.2.2. Elegimos el conjunto de parámetros propuestos por Alford y Auchmuty, $a = 0.139$, $b = 0.008$, $\gamma = 0.0196$, $I_a = 0.0928$, $D = 0.005$ y $\eta = 0.1$. Con éstos, calculamos una aproximación al estado estacionario y homogéneo del sistema 4.42. El cual resulta, $(u(I_a), w(I_a)) \approx (0.078, 0.030708661417323)$.

Enseguida daremos una condición inicial adecuada para que se desarrolle una solución que corresponde al potencial de acción en forma de onda reentrante que debe viajar en dirección positiva. Precisemos, realizamos una perturbación del punto de equilibrio, $(u(I_a), w(I_a)) = (0.078, 0.030708661417323)$. Se considera la perturbación $(u_0(\theta, r, 0), w_0(\theta, r, 0))$, con $r \in (\eta, 1)$, donde u_0 , la seleccionamos como, sigue

$$u_0(\theta, r, 0) = \begin{cases} 0.5, & \text{si } 50^\circ \leq \theta \leq 140^\circ, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

mientras que para w_0 la elegimos así

$$w_0(\theta, r, 0) = 3.4(r - 0.1)(1 - r)\exp(-0.8(r - \theta - 0.4)^2).$$

La perturbación $u_0(r, \theta, 0)$ nos dice que en el sector circular del disco anular, que va de $\theta_1 = 50^\circ$ a $\theta_2 = 140^\circ$ y con el radio que va de $\eta=0.1$ hasta el radio exterior (igual a 1), la perturbación $u_0(r, \theta, 0)$ toma el valor de 0.5; mientras que fuera de esa zona, toma el valor cero. Para la perturbación $w_0(r, \theta, 0)$, elegimos una distribución gaussiana en términos de r y θ . Es decir, si r es fija, tenemos una distribución gaussiana en θ ; mientras que si θ es fija, se tiene una distribución gaussiana en términos de r . Desde el punto de vista fisiológico la perturbación para u , que corresponde al voltaje, nos dice que esta zona específica está compuesta por células cardiacas y todas ellas están excitadas. En esta región se cumple, $u_0 > a$, donde a es el umbral de excitación.

Luego, sobre el disco anular, la condición inicial tiene la forma,

$$u_1(\theta, r, 0) = u(I_a) + u_0(\theta, r, 0);$$

mientras que la condición inicial para w es

$$w_1(\theta, r, 0) = w(I_a) + w_0(\theta, r, 0).$$

Las condiciones de frontera son de tipo Neumann homogéneas. Estamos interesados en observar —de hecho, ésta es la que reportamos— la evolución de la condición inicial para la variable u , que representa el potencial de acción, cuya dinámica espacio-temporal la gobierna el sistema (4.42). Esto no significa que restemos importancia al comportamiento de w . Sobre esto observamos que en la simulación numérica, cuando se eligen las condiciones iniciales u_1 y w_1 , éstas deben estar ubicadas adecuadamente sobre la región anular afin de generar a la onda reentrante.

Dependiendo de dónde exactamente se realiza la perturbación en el disco anular, la condición inicial al avanzar el tiempo, va a converger a una onda reentrante que viaja en sentido positivo o negativo en el disco anular¹⁹. Si consideramos de manera separada a la perturbación u_0 , observamos que está ubicada en la región del número 12; mientras que la perturbación w_0 , se localiza en la región número 2, cuando el tiempo avanza, la zona en color naranja (que en $t = 0$ es u_1), empieza a rotar en dirección contraria de las manecillas del reloj. Si ahora, w_0 se ubica en la región del número 11, la

¹⁹Lo que queremos decir es que, nuestra condición inicial, (u_1, w_1) , gobernada por la dinámica asociada al sistema (4.42), al avanzar el tiempo converge a una onda reentrante que rota en dirección positiva. En otras palabras la onda entrante que rota en sentido positivo, en el espacio de soluciones es un atractor.

zona en color naranja en el número 12, empieza a rotar en dirección de las manecillas del reloj.

En la sub-figura 4.25.a) podemos observar la condición inicial u_1 , que corresponde a la suma de $u(I_a)$ y de la función de tipo salto u_0 ; mientras que en las sub-figuras siguientes (4.27 a 4.29), podemos observar el desarrollo de la onda reentrante que viaja en dirección positiva, sobre el disco anular. También para w_1 surge una onda reentrante que empieza a viajar en dirección positiva. El comportamiento dinámico que exhibe la onda que rota, cuyo frente de activación tiene forma de rama espiral sobre el disco anular, corresponde a una onda reentrante. Desde el punto de vista fisiológico como ya lo documentamos en la sección 4.2, aquélla es el origen del fenómeno de fibrilación ventricular. Este fenómeno se había observado en el tercer trabajo de Allesie (véase [5]), en el tejido de la aurícula de conejo en forma de disco anular.

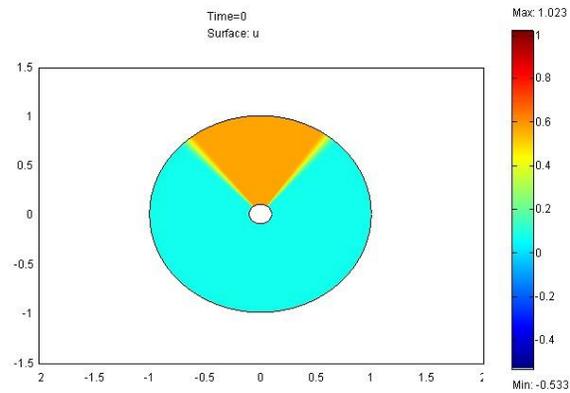
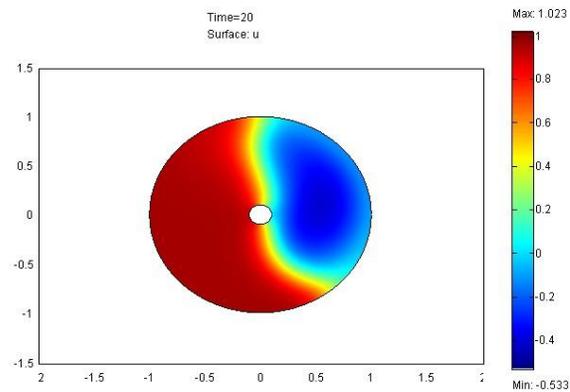
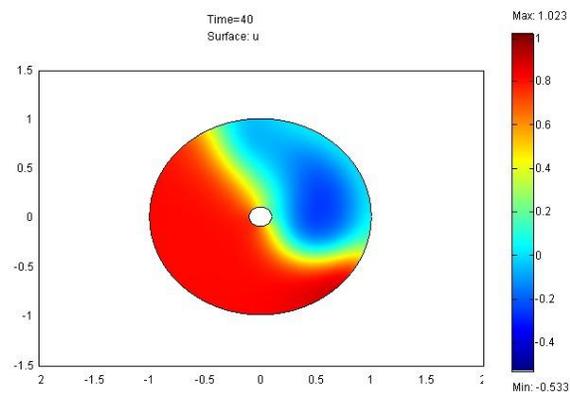
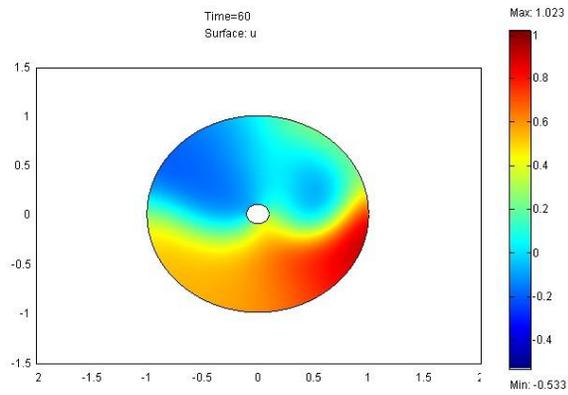
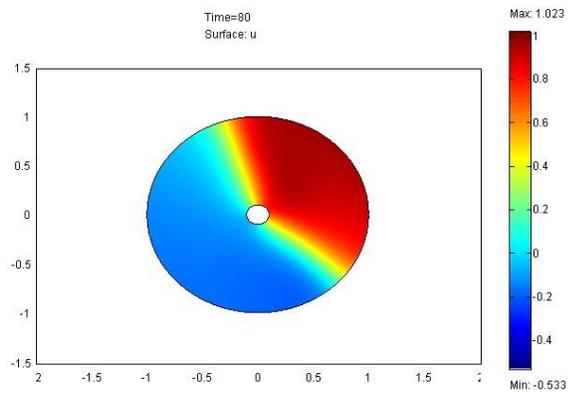
(a) Condición inicial $u_1(\theta, r, 0)$.(b) $t=20$.(c) $t=40$.

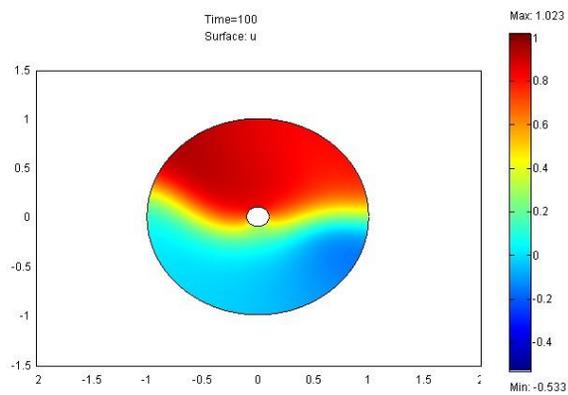
Figura 4.25: Comportamiento del potencial de acción descrito por el sistema (4.42) a distintos tiempos de corrida del programa: a) En $t = 0$; b) En $t = 20$; c) En $t = 40$.



(a) $t=60$.



(b) $t=80$.



(c) $t=100$.

Figura 4.26: Aquí se observa la evolución espacio-temporal del potencial de acción descrito por el sistema (4.42).

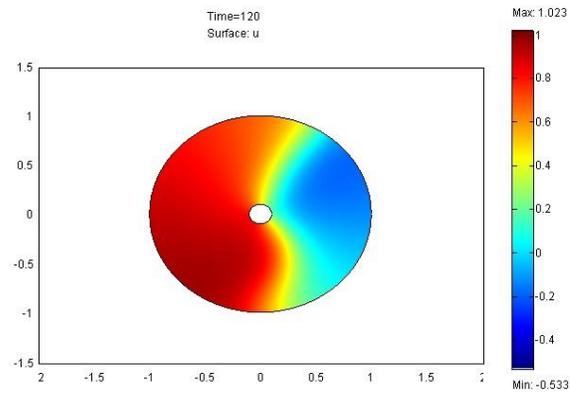
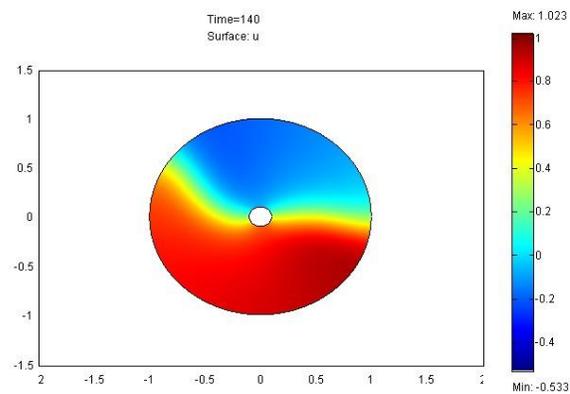
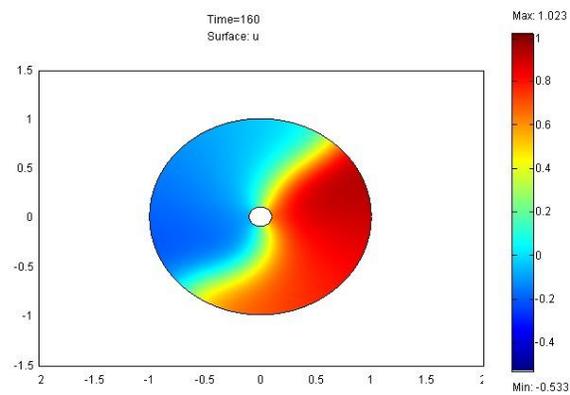
(a) $t=120$.(b) $t=140$.(c) $t=160$.

Figura 4.27: Aquí ya tenemos instalada a la onda reentrante que viaja en sentido positivo sobre el disco anular.

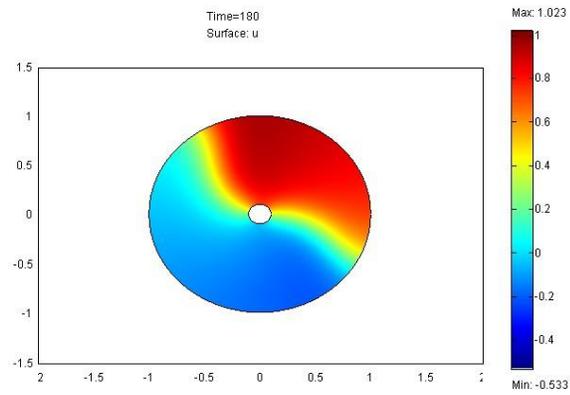
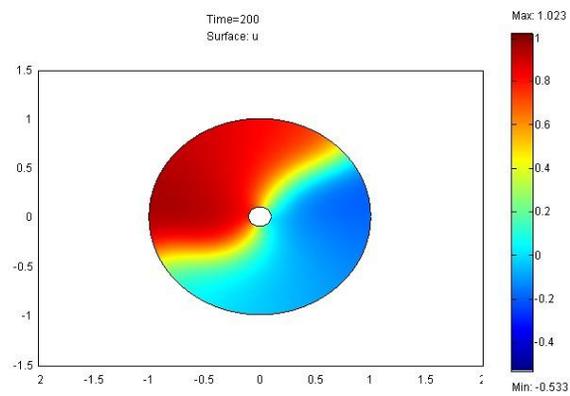
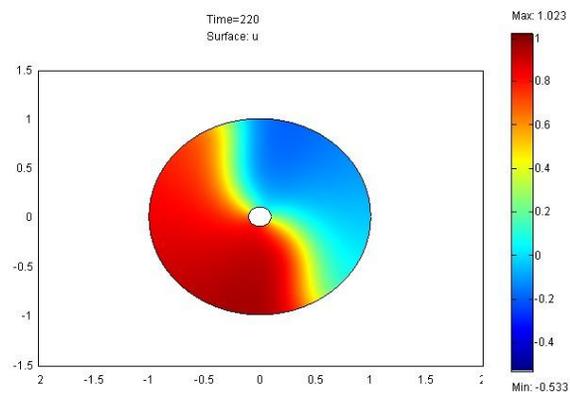
(a) $t=180$.(b) $t=200$.(c) $t=220$.

Figura 4.28: Evolución de la onda reentrante sobre el disco anular.

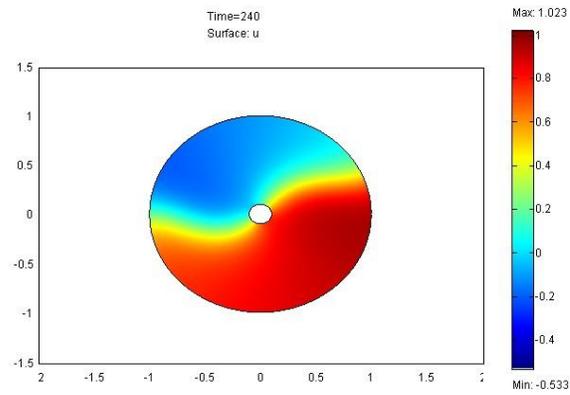
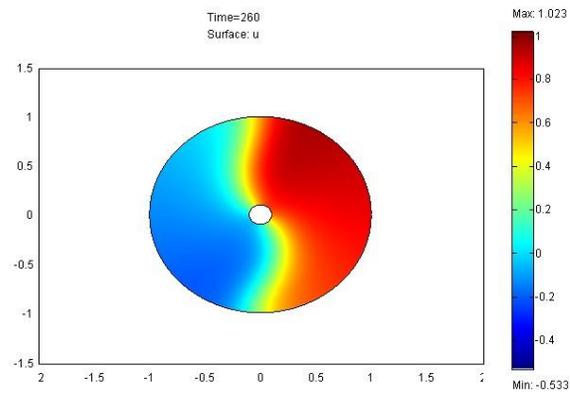
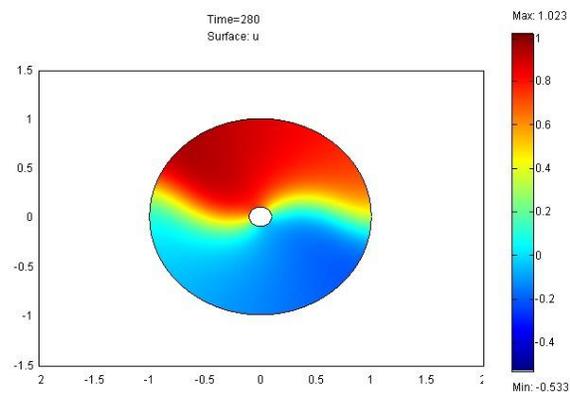
(a) $t=240$.(b) $t=260$.(c) $t=280$.

Figura 4.29: Continuamos observando la onda reentrante.

4.5.3. Otra onda reentrante

Como lo señalamos antes, la geometría del dominio influye en la propagación de la onda reentrante que se instala. Así, realizamos otra serie de simulaciones numéricas usando el mismo conjunto de parámetros, excepto que para el radio interior, ahora elegimos $\eta = 0.44$. Nuevamente la colección de parámetros satisface la condición $\lambda_{11}(\eta)D < \delta_0$. Ahora la región anular es más “delgada”, que la que consideramos anteriormente. Las condiciones iniciales sólo se modifican en el parámetro correspondiente al radio interior, η . Éstas son,

$$u_1(\theta, r, 0) = u(I_a) + u_0(\theta, r, 0);$$

mientras que para w es,

$$w_1(\theta, r, 0) = w(I_a) + w_0(\theta, r, 0),$$

con $r \in (\eta, 1)$. Donde la perturbación del punto de equilibrio, es

$$u_0(\theta, r, 0) = \begin{cases} 0.5, & \text{si } 50^\circ \leq \theta \leq 140^\circ, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y para w es,

$$w_0(\theta, r, 0) = 3.4(r - 0.44)(1 - r)\exp(-0.8(r - \theta - 0.4)^2).$$

Las condiciones de frontera son de tipo Neumann homogéneas. Cuando se resuelve numéricamente el sistema (4.42), con la condición inicial (u_1, w_1) , y se observa la evolución de u_1 , se nota que el área que corresponde a la zona de excitación, comienza a alargarse y acortarse, cuando el tiempo aumenta. Véanse las figuras 4.33 y 4.34. Sin embargo, después de un tiempo “grande”, tenemos que ésta tiende a la onda reentrante (esto supone que la onda reentrante, tiene una forma tal que, en el espacio de soluciones es un atractor). Lo que significa que la condición inicial tiende a la onda reentrante de forma oscilatoria o pulsante. La onda reentrante tiene un frente de activación, aproximadamente en forma de rama de espiral. Se han ubicado adecuadamente u_1 y w_1 , para obtener la onda reentrante que gira en dirección contraria a las manecillas del reloj.

Al comparar los experimentos de la Dra. González, con la simulaciones numéricas, sólo en el caso de la onda reentrante que viaja en dirección positiva, en el cultivo de células cardiacas, encontramos un gran parecido con la simulación numérica que nosotros realizamos. Compárense los experimentos de los cinco primeros cuadros la figura 4.17.b), con la simulaciones en las figuras 4.34 a 4.37.

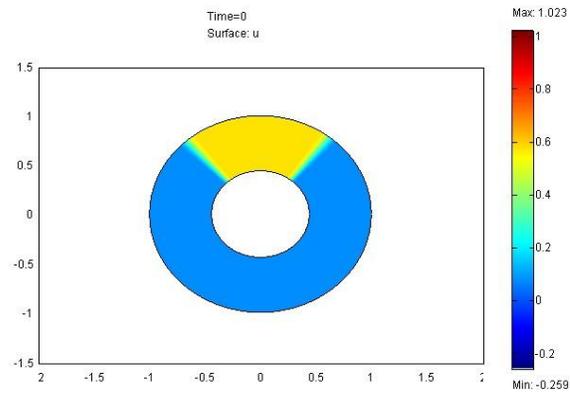
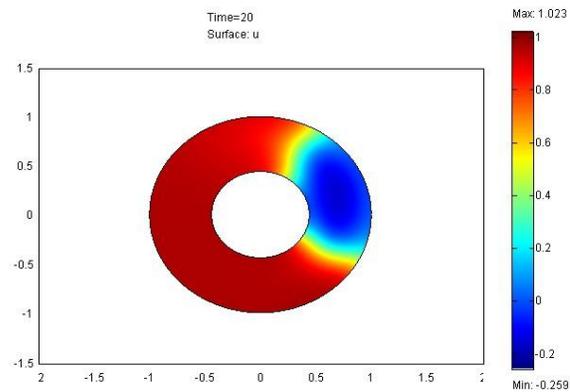
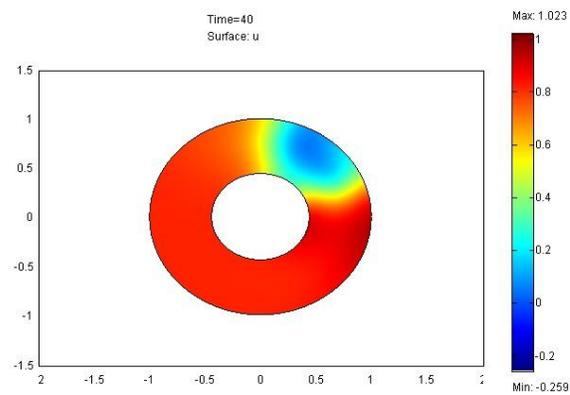
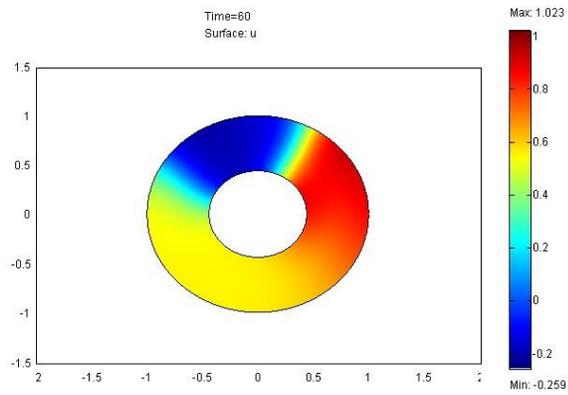
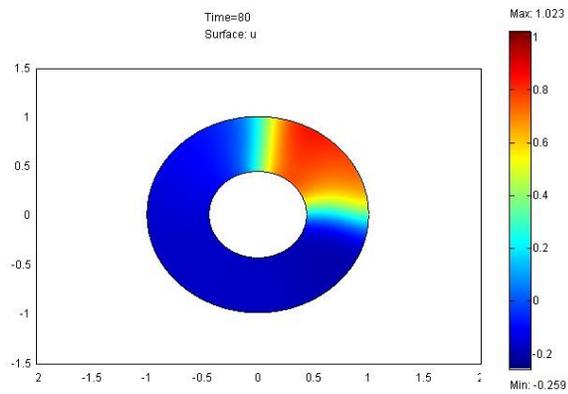
(a) Condición inicial $u_1(\theta, r, 0)$.(b) $t=20$.(c) $t=40$.

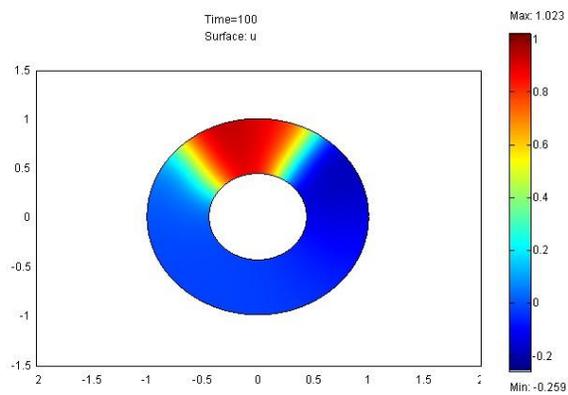
Figura 4.30: El potencial de acción a diferentes tiempos de corrida: a) En $t = 0$, b) $t = 20$ y c) $t = 40$.



(a) $t=60$.



(b) $t=80$.



(c) $t=100$.

Figura 4.31: Evolución del potencial de acción a medida que el tiempo de corrida aumenta. Observe que la onda se “alarga” y “acorta”.

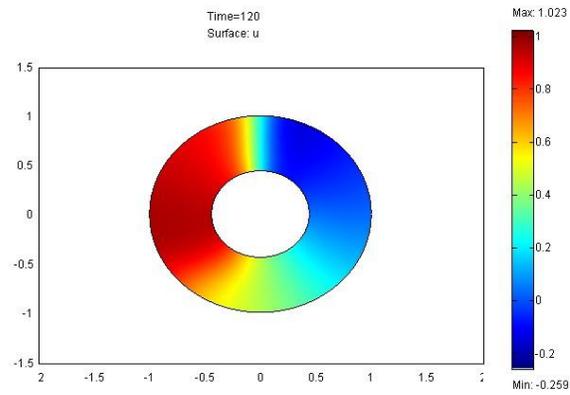
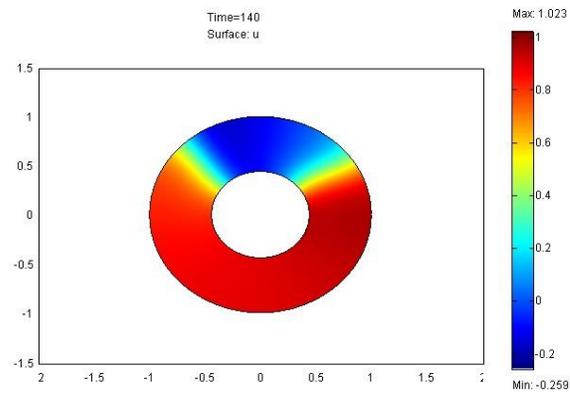
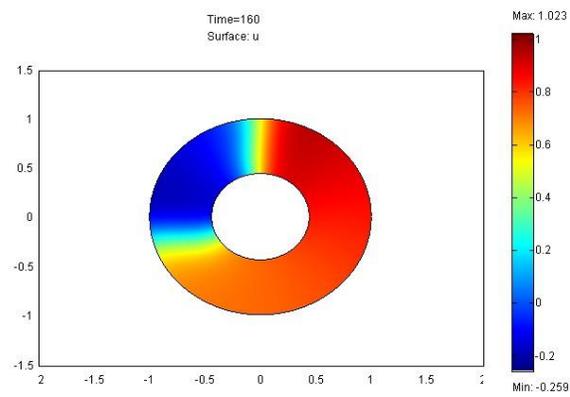
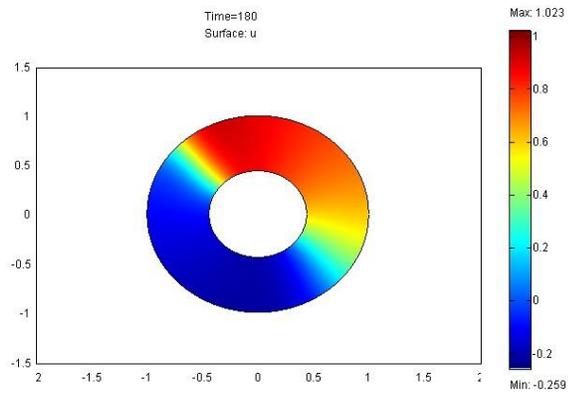
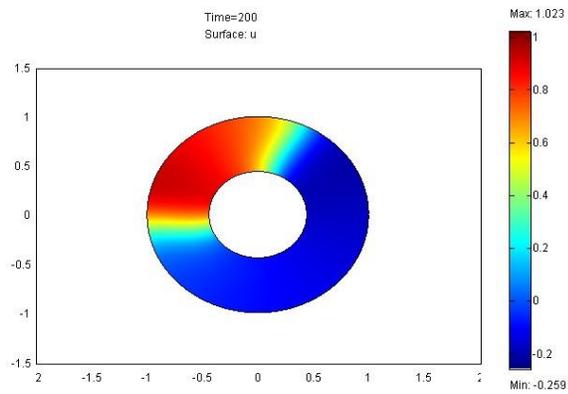
(a) $t=120$.(b) $t=140$.(c) $t=160$.

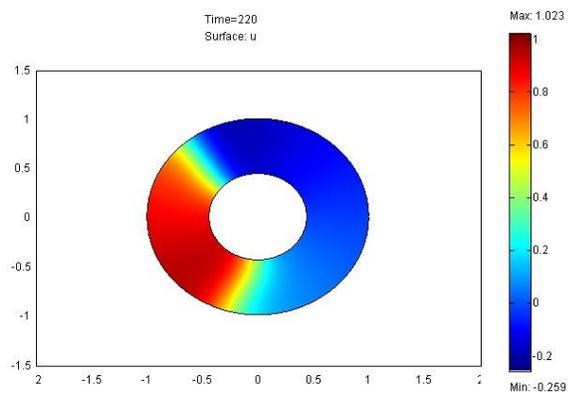
Figura 4.32: Nuevamente observamos que la onda se “alarga” y “acorta”.



(a) $t=180$.



(b) $t=200$.



(c) $t=220$.

Figura 4.33: Todavía tenemos el mismo comportamiento que el observado en la figura 4.32.

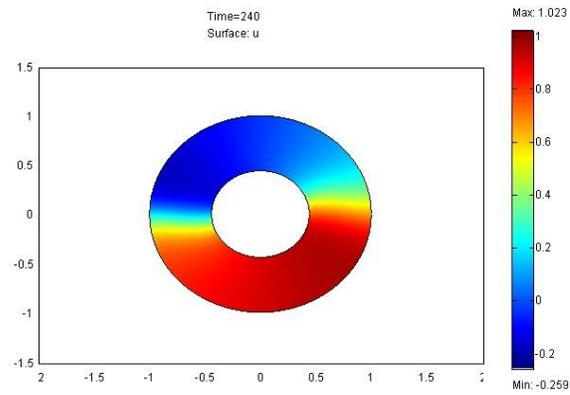
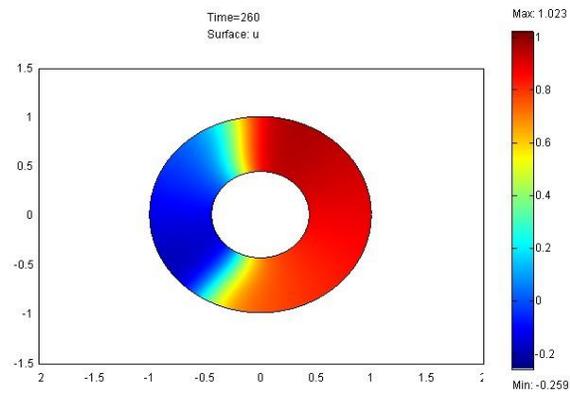
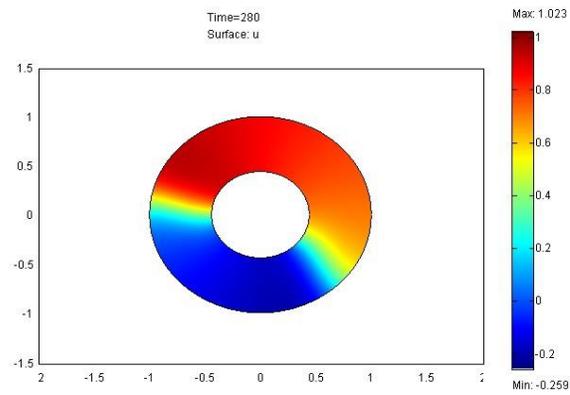
(a) $t=240$.(b) $t=260$.(c) $t=280$.

Figura 4.34:

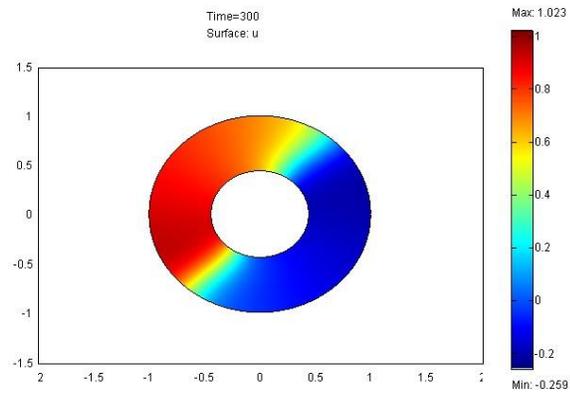
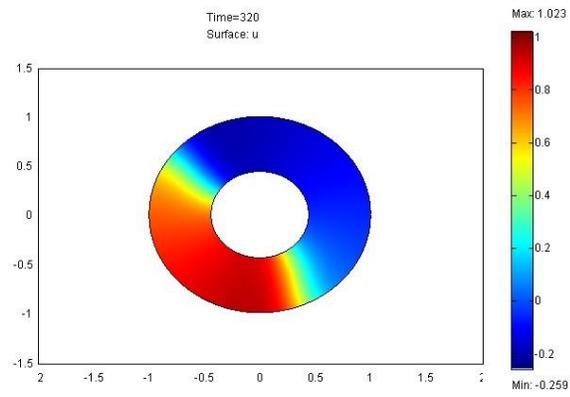
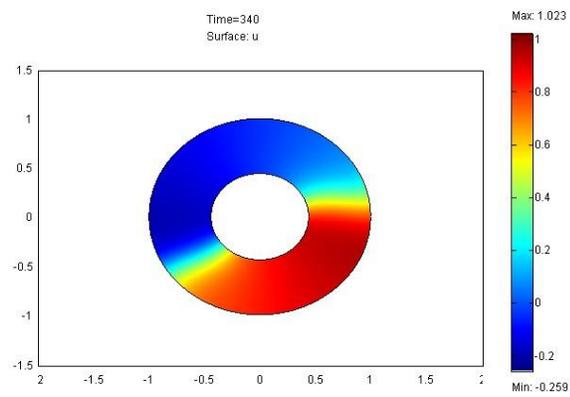
(a) $t=300$ (b) $t=320$.(c) $t=340$

Figura 4.35:

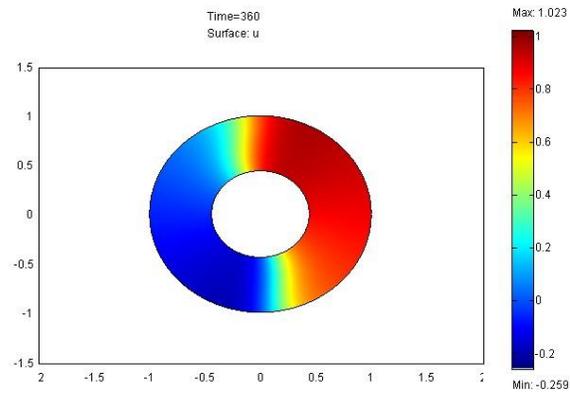
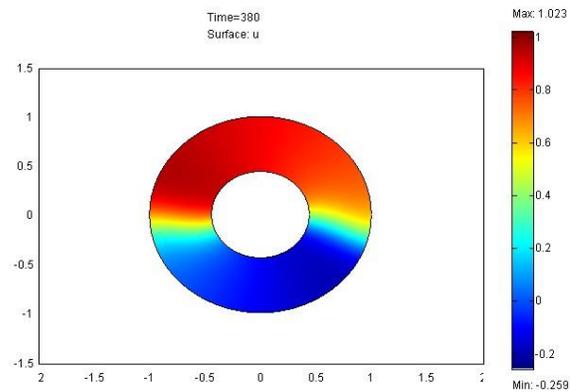
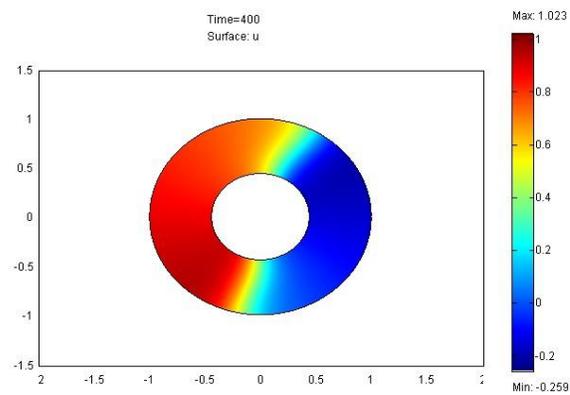
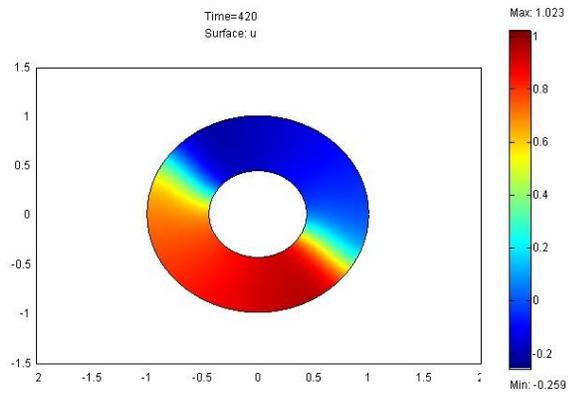
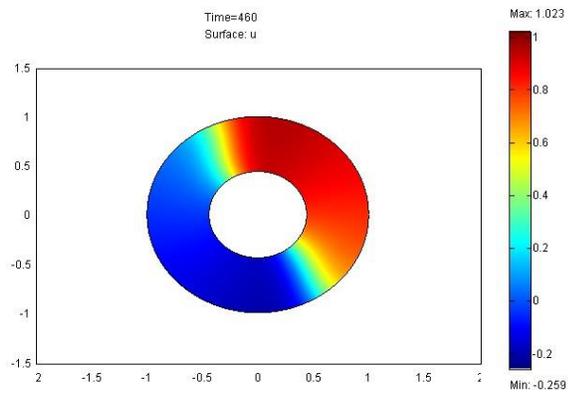
(a) $t=360$.(b) $t=380$.(c) $t=400$.

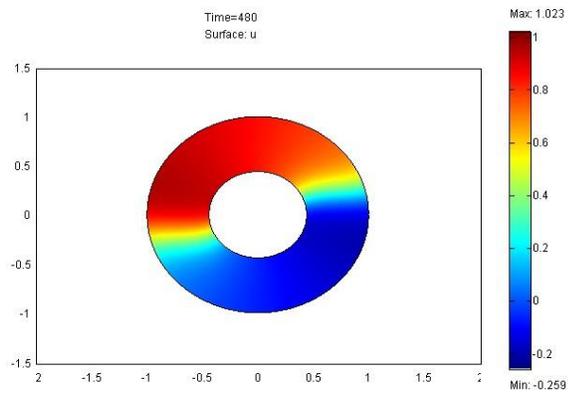
Figura 4.36: Aquí ya tenemos la forma de la onda reentrante que viaja en sentido positivo sobre el disco anular.



(a) $t=420$.



(b) $t=460$.



(c) $t=480$.

Figura 4.37: Onda reentrante que viaja en sentido positivo sobre el disco anular.

Con esto concluimos las simulaciones numéricas del sistema (4.42) y terminamos este capítulo con el que, a su vez, cerramos este trabajo, para dar lugar a las conclusiones y discusión a las que dieron motivo, la revisión realizada a lo largo de estos cuatro capítulos.

Conclusiones y discusión

El objetivo que nos planteamos en este trabajo, fue estudiar la propagación de ondas de activación en medios excitables, siendo el corazón uno de éstos. Para llegar al objetivo último, antes realizamos un viaje que nos permitió irnos acercando de manera gradual a la fase culminante de este trabajo: la propagación de ondas reentrantes en una región anular, la cual es el modelo de un corte muy delgado de tejido cardiaco cuya parte central es tejido necrosado.

En esta parte final del trabajo, pretendemos hacer un resumen de lo realizado a lo largo del mismo, así como plantear algunos estudios que constituirían la continuación del escrito que el lector tiene en sus manos. El resumen lo presentamos siguiendo el orden en el que aparecen los capítulos; mientras que los problemas que vislumbramos como la continuación de éste, los exponemos separadamente.

Lo hecho y sus limitaciones

A partir de un modelo electrónico, ideado por los fisiólogos ingleses Alan Llyond Hodgkin y Andrew Fielding Huxley, consistente en un circuito electrónico que simula los fenómenos electroquímicos a través de la membrana neuronal en el Capítulo 1 se dedujo el modelo matemático. Éste es quizás, el más conocido para la descripción de la propagación de impulsos nerviosos a través del axón neuronal. La deducción se hizo en un escenario que histórica y fisiológicamente fue clave: bajo la técnica de fijación de voltaje. En términos matemáticos este escenario conduce a un sistema autónomo no lineal de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias.

Debido a que el sistema de EDO, tiene asociado un espacio fase de dimensión cuatro, esto dificultó su estudio desde el punto de vista numérico y dinámico. Por ello, el biofísico estadounidense Richard FitzHugh y el ingenie-

ro japonés Jin-Ichi Nagumo, presentaron de manera separada, una reducción del modelo de Hodgking-Huxley. Las dos reducciones con las adaptaciones adecuadas, se unifican y conducen al modelo de FitzHugh-Nagumo temporal.

En el Capítulo 2, al trabajar bajo la premisa de la técnica de fijación de voltaje siendo el valor de la corriente aplicada, I_a , igual a cero, el modelo de F-N temporal describe sólo un aspecto del fenómeno de la propagación del impulso nervioso a través del axón de la neurona. Sin embargo, es importante la riqueza matemática del sistema no lineal de dos EDO. Por esta razón, estudiamos la dinámica local del sistema cuando tiene uno, dos y tres puntos de equilibrio. El análisis global se realizó cuando el sistema de FitzHugh-Nagumo temporal tiene al origen como único punto de equilibrio, lo anterior porque desde el punto de vista fisiológico el axón tiene un solo estado de reposo.

Para un conjunto de parámetros particulares obtenidos de Murray ([43]), se utilizó el *Software pplane*, con el cual se exhibió la forma del potencial de acción con sus cuatro fases respectivas: ascenso, excitación, refracción y recuperación. Se demostró de manera formal, la existencia de una región atrapadora y la no existencia de trayectorias cerradas alrededor del origen, así toda trayectoria que entra a dicha región tiende al origen.

En un segundo análisis cuando $I_a > 0$, echamos mano de un sistema más sencillo (el modelo lineal a trozos) el cual nos permitió demostrar la existencia de una bifurcación de Hopf centrada en un único punto de equilibrio. Al retornar al modelo original de FitzHugh-Nagumo, demostramos la existencia de dos valores de la corriente para los que existe una bifurcación de Hopf. Para ello, usamos la técnica de formas normales, en esta parte nuevamente se exhibió una simulación numérica.

En el Capítulo 3, con el propósito de comprender mejor el fenómeno aludido, se incorporó una variable espacial al sistema de FitzHugh-Nagumo temporal. Es decir, se supone que el axón es un medio unidimensional infinito. Cuando el potencial de acción viaja a través del axón, conserva su forma. Por ello, se propone una solución de tipo onda viajera para el sistema de FitzHugh-Nagumo. Al sustituir la expresión matemática de las ondas viajeras, el sistema original se convierte en un sistema no lineal de tres EDO. En este nuevo sistema la trayectoria homoclínica (basada en el origen) correspondió a la solución de tipo onda viajera deseada. Para la demostración de la existencia de la trayectoria homoclínica, la herramienta matemática usada fue la técnica de bloques aislantes de Carpenter.

En esta parte, fue necesario usar una aproximación lineal del polinomio cúbico, con ella exhibimos una simulación numerica con *MATLAB*, primero para la trayectoria homoclínica simple y después para una trayectoria homoclínica compuesta. Cuando observamos la coordenada que corresponde al voltaje, se notó la forma del potencial de acción con sus cuatro fases respectivas.

En el Capítulo 4, agregamos una nueva variable espacial al modelo de FitzHugh-Nagumo. Nos intereso estudiar la propagación de ondas de excitación en un tejido cardiaco muy delgado con forma de disco anular. Antes, fue necesario exponer, un resumen de la fisiología de nuestro vital órgano. El trabajo de George Mines, nos introdujo al concepto de onda reentrante, además de mostrarnos la gran dedicación de nuestro personaje, que culminó con su vida al proponerse como sujeto de experimentación.

Los trabajos experimentales de Allisee y colegas, en donde se usaron cortes de tejido cardiaco de conejos, mostraron que las ondas reentrantes son las responsables del fenómeno de la fibrilación cardiaca. Los trabajos experimentales de la Dra. Hortencia González y colegas fueron muy importantes ya que nos mostraron la propagación de ondas en un tejido de corazón de pollo, con una geometría de disco anular.

Posteriormente, presentamos una panorámica de los tipos de modelos matemáticos que se utilizan en el estudio del potencial de acción que viaja a través del músculo cardiaco (miocardio). En ellos, dependiendo de la forma como se incorporan las variables involucradas pueden ser: discretos o continuos. Y con respecto al nivel de organización biológico: locales o globales.

Alford y Auchmuty ([6]) llevaron a cabo la demostración matemática de la existencia de las ondas rotatorias, en un dominio en forma de disco anular. Realizamos una breve exposición de su trabajo y, usando valores particulares de los parámetros del sistema de FitzHugh-Nagumo definido en el disco anular, mostramos la simulación numérica (usando *FEMLAB*), de potencial de acción que tiene la forma de una rama de espiral que rota (onda reentrante) a través del disco anular, para dos radios interiores diferentes.

Continuación

En el estudio anterior, sobre todo el realizado en el Capítulo 4, consideramos un tejido homogéneo de dimensión dos. Es decir, el medio tiene la propiedad física de *isotropía*. Sin embargo, la propagación de la onda reen-

trante se lleva a cabo en un espacio de dimensión tres, además que de que el tejido es no homogéneo. Al realizar un corte del tejido cardiaco de los ventrículos, aquél se constituye de tres capas, desde la interna a la externa: endocardio, miocardio y pericardio. El endocardio es un tejido que recubre la cavidad interior del corazón, en el miocardio se llevan a cabo las contracciones debidas a la actividad eléctrica. Por último el pericardio es un tejido que rodea la parte externa del corazón. En cada una de las tres capas anteriores, las fibras formadas por las células, tienen desde el punto de vista matemático forma de cilindro. Y los cilindros pueden llegar a cambiar su ángulo de orientación de 0° a 180° , desde el endocardio hasta el pericardio. Es decir el miocardio es un medio *anisotrópico*, esta propiedad física se observa en la conducción eléctrica del miocardio, dado que ésta depende de la dirección en que viaja el potencial de acción que surge del nodo sinoauricular. La anisotropía debe ser considerada en el modelo de FitzHugh-Nagumo definido en un dominio tridimensional.

El nuevo dominio podría ser el disco anular dotado de altura. En un primer estudio, el medio puede ser homogéneo, de manera que el coeficiente de difusión será constante y en un segundo estudio, se puede soportar un medio no homogéneo, es decir el coeficiente de difusión dependerá del medio. Además se deberán especificar las condiciones iniciales y las condiciones de frontera, del sistema de FitzHugh-Nagumo en tres dimensiones.

Un estudio más ambicioso, es analizar la propagación de ondas en el corazón completo (sano o enfermo), sobre esto se han realizado grandes esfuerzos utilizando diferentes técnicas matemáticas. Por ejemplo, las simulaciones numéricas que han mostrado la existencia de ondas de excitación en tres dimensiones que tienen la forma de ondas enrolladas cilíndricas u ondas enrolladas toroidales. El estudio de tales ondas es una línea de investigación actual, en la cual se encuentran trabajando, matemáticos, físicos, fisiólogos, etcétera.

La herramienta matemática que usamos, fueron los sistemas dinámicos. Sin embargo, existen otras técnicas matemáticas, por ejemplo la geometría diferencial, topología (bloques aislantes), teoría de perturbaciones, simulaciones numéricas y las redes neuronales.

Su uso no se limita al estudio de la dinámica de ondas de excitación en el corazón completo o partes de él, aquéllas tienen aplicaciones en otros órganos, por ejemplo en el cerebro las ondas de excitación se asocian con los ataques epilépticos; mientras que en la retina se relacionan con alucinaciones.

En química, las ondas reentrantes con forma de espiral, surgen en la llamada reacción de Belousov-Zhabotinsky, (véanse las referencias [36] y [50]).

Nuestro trabajo es una pequeña parte del estudio de la propagación de ondas en sistemas excitables. Esperamos que lo realizado, dé pie para que los estudiantes de la carreras afines a la nuestra, se interesen en realizar la continuación de esta tesis.

Apéndice A

Ecuaciones de reacción-difusión

En este apéndice presentamos algunas leyes físicas, por medio de las cuales se deducen las ecuaciones de reacción-difusión que utilizamos en el Capítulo 1 para la deducción del modelo espacio-temporal de FitzHugh-Nagumo.

Las ecuaciones de reacción-difusión, modelan la dinámica espacio-temporal de variables involucradas en distintos procesos de origen físico, químico, fisiológico, biológico, etc. y las ecuaciones que las describen incorporan dos procesos básicos que ocurren simultáneamente. Éstos son:

- a) La difusión (dispersión) de sustancias (reactivos) por el medio.
- b) La reacción (interacción) o parte cinética, de las sustancias.

Aquí deduciremos las ecuaciones mencionadas. Para ello, nos apoyaremos en el trabajo de Pérez [46]. La deducción se puede realizar utilizando cualquiera de los dos enfoques siguientes:

- a) **Caminatas aleatorias.** En este enfoque, se usa la teoría de probabilidad; los pasos básicos de éste se pueden ilustrar considerando un medio de dimensión uno cuya abstracción es la recta real. Aquí $p(x, t)$ denota la probabilidad de que una partícula se encuentre en el punto x al tiempo t . Dependiendo de las hipótesis que se hagan sobre el movimiento de la partícula y de las características del medio donde éste se realiza, se da origen a distintas ecuaciones para la variable $p(x, t)$. Por ejemplo, si el medio es homogéneo (la probabilidad de moverse a la izquierda o la derecha, es la misma) y suponiendo que la partícula

está obligada a moverse exactamente un paso transcurrida una unidad de tiempo, así como que p es “suficientemente suave” respecto a x y t , se demuestra que p satisface la ecuación de difusión,

$$p_t(x, t) = Dp_{xx}(x, t), \quad (\text{A.1})$$

donde D , es el coeficiente de difusión de $p(x, t)$.

- b) **Medios continuos.** Este enfoque proviene de la mecánica de fluidos, en donde interesa deducir una ecuación que dé la dinámica espacio-temporal de una sustancia que se difunde. La concentración de la sustancia en el punto x al tiempo t , se denota por $u(x, t)$. Además, usa una ley física de validez universal: la *ley de la conservación de la materia*.

En física las *Leyes de conservación*, afirman que en un sistema cerrado que experimenta un proceso físico, determinadas cantidades medibles permanecen constantes.

En esta presentación utilizaremos el enfoque del medio continuo y supondremos que se cumple la ley más básica que rige los procesos difusivos: la *ley de Fick*.

A.1. La ley de conservación

Para el propósito que nos interesa, el movimiento de materia que describiremos será en un espacio unidimensional, para lo cual vamos a considerar un tubo muy delgado como modelo.

Sea x la distancia (medida desde cierto punto de referencia) a lo largo del tubo. Consideramos ahora un tramo del tubo: el comprendido entre x y $x + \Delta x$ con $\Delta x > 0$. Denotemos por $V_{\Delta x}$ a este tramo del tubo. Con el objetivo de describir el cambio de la concentración de partículas (masa en el punto x al tiempo t), consideramos la producción (o destrucción) local más el flujo, tanto al interior como al exterior. El Diagrama 1, nos ayudará a entender mejor el comportamiento anterior. Deduiremos una ecuación de conservación a partir de aquél. Para ello consideramos,

- a) $N_{\Delta x}(t)$, denota el número de partículas en $V_{\Delta x}$ al tiempo de t .

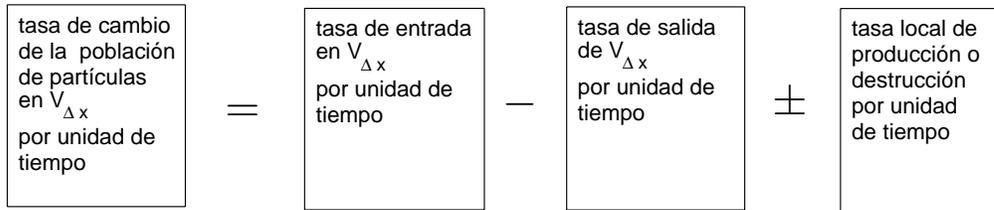


Figura A.1: Diagrama 1.

- b) La variable $u(x, t)$ es la concentración de partículas, en el punto x al tiempo t .
- c) A denota el área de la sección transversal del tubo que suponemos constante.

Usando los incisos a), b) y c), obtenemos la expresión para $N_{\Delta x}(t)$ en términos de la siguiente integral,

$$N_{\Delta x}(t) = \int_x^{x+\Delta x} Au(s, t) ds. \tag{A.2}$$

Ahora consideramos un lapso de duración $h > 0$. La expresión $N_{\Delta x}(t+h)$, se interpreta como el número de partículas contenidas en $V_{\Delta x}$ al tiempo $t+h$.

Nuestro propósito es obtener una expresión para $N_{\Delta x}(t+h)$. Para ello, vamos a definir el *flujo de partículas* $J(x, t)$ en (x, t) , como el número de partículas que cruzan una unidad de sección transversal por unidad de tiempo, en la posición x en dirección positiva. Sea $f(x, t, u)$ el número de partículas creadas o destruidas por unidad de sección transversal y por unidad de tiempo en x al tiempo t , cuando la concentración en ese punto es $u(x, t)$.

Utilizando el Diagrama 2, la ecuación para la *ley de conservación*, que corresponde a $N_{\Delta x}(t+h)$ tiene la forma,

$$\int_x^{x+\Delta x} Au(s, t+h) ds =$$

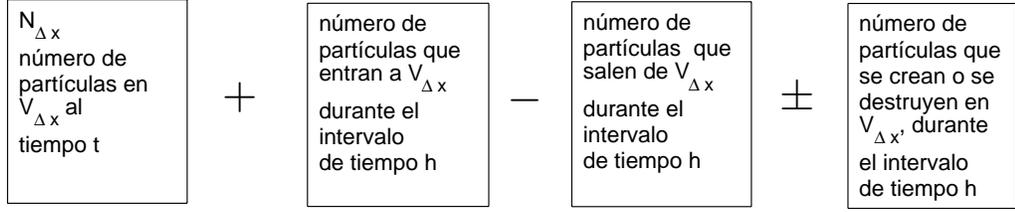


Figura A.2: Diagrama 2.

$$\left[\int_x^{x+\Delta x} Au(s, t) ds \right] + \left[AJ(x, t)h - AJ(x+\Delta x, t)h \right] \pm \left[h \int_x^{x+\Delta x} Af(t, s, u) ds \right], \quad (\text{A.3})$$

simplicando y considerando que $A \neq 0$, es constante, se obtiene la siguiente expresión,

$$\int_x^{x+\Delta x} (u(s, t+h) - u(s, t)) ds = -(J(x+\Delta x) - J(x, t))h \pm h \int_x^{x+\Delta x} f(s, t, u) ds, \quad (\text{A.4})$$

donde la integral del lado derecho, con los signos \pm , se interpreta como el número de partículas creadas (+) o destruidas (-) en $V_{\Delta x}(t)$ durante el intervalo de tiempo h .

Dividiendo ambos lados de (A.4) entre h y tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$, esa igualdad se transforma en

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} ds = -(J(x+\Delta x, t) - J(x, t)) \pm \int_x^{x+\Delta x} f(s, t, u) ds. \quad (\text{A.5})$$

Ahora, haciendo algunas consideraciones sobre la continuidad de las funciones u , f y J , obtenemos ¹

$$\frac{\partial u(s_1, t)}{\partial t} \Delta x = -(J(x+\Delta x, t) - J(x, t)) \pm f(s_2, t, u) \Delta x, \quad (\text{A.6})$$

donde $s_1, s_2 \in (x, x + \Delta x)$.

¹Suponemos que u y J son funciones diferenciales de clase $C^1(I_\Delta)$, donde $I_\Delta = [x, x + \Delta x] \times [0, t]$, en x y $t > 0$. Mientras que f es continua en $I_\Delta \times [u(x, 0), u(x + \Delta x, t)]$.

Si ahora dividimos entre Δx a ambos miembros de esta igualdad y calculamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial x}(x, t) \pm f(s, t, u). \quad (\text{A.7})$$

La ecuación anterior, recibe el nombre de *ecuación de conservación o de continuidad*. En el caso de que el movimiento de la sustancia se realice en espacios de dimensión mayor que uno, un razonamiento análogo al desarrollado aquí puede seguirse para obtener la correspondiente *ley de conservación* en dimensiones mayores. En la literatura consultada (véase [43]) tenemos que la forma de aquélla es,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) \pm f(\vec{r}, t, u), \quad \forall (\vec{r}, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+, \quad (\text{A.8})$$

donde $\nabla \cdot \vec{J}$, denota la divergencia del flujo calculada respecto a las variables espaciales, Γ , es una región contenida en el espacio físico, en el que se llevan a cabo los procesos difusivo y reactivo. Dependiendo de la forma que tenga el flujo, será la ecuación de difusión que se obtenga.

A.2. La ley de Fick

Una forma para el flujo, quizás la más simple, proviene de la *ley de Fick* que fue obtenida en la segunda década del siglo *XIX* por el fisiólogo alemán Adolf Eugene Fick (1829-1901) al hacer una extensión de la ley del calor de Fourier. Dicha ley se enuncia de así:

“El flujo de la sustancia -con concentración $u(\vec{r}, t)$ - por unidad de área y por unidad de tiempo, en el punto \vec{r} al tiempo t , es directamente proporcional, al gradiente de la concentración en dicho punto.”

La expresión matemática de ésta, es:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -D\nabla u(\vec{r}, t), \quad (\text{A.9})$$

donde el término $D > 0$ es la difusividad de la sustancia. El signo menos significa —pensando el espacio en dimensión uno— que la sustancia se difunde de sitios de alta concentración hacia sitios en los que hay baja concentración.

Luego, sustituyendo la expresión (A.9) en la ecuación (A.8), obtenemos la llamada *ecuación de difusión y reacción*,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u \pm f(\vec{r}, t, u), \quad \forall (\vec{r}, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+, \quad (\text{A.10})$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano que, escrito en coordenadas cartesianas en tres dimensiones, es

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_3^2}. \quad (\text{A.11})$$

Para la deducción en el caso general se consideran n sustancias que se difunden y además interaccionan entre ellas. Así, denotamos por $\vec{U}(\vec{r}, t)$, al vector n -dimensional cuyas componentes, $U_i(\vec{r}, t)$, para $i = 1, \dots, n$; son la concentración de las respectivas sustancias. Lo cual da origen a un sistema de ecuaciones de reacción-difusión de dimensión n .

De forma general, podemos decir que los sistemas de reacción-difusión son sistemas acoplados de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de tipo parabólico. Un ejemplo de éstas es,

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \mathcal{D}\nabla^2 \vec{U} \pm \vec{F}(\vec{U}, \vec{\mu}), \quad (\text{A.12})$$

donde \mathcal{D} es la matriz diagonal cuyos elementos son los coeficientes de difusión de cada sustancia; mientras que el campo vectorial representado a través de $\vec{F}(\vec{U}, \vec{\mu})$, está asociado a los términos de interacción de las sustancias y, por último el vector $\vec{\mu}$, representa un vector de parámetros cinéticos.

Por ejemplo, si estamos interesados en estudiar el fenómeno que describe la reacción de sustancias químicas, entonces la cinética química será gobernada por la *ley de acción de masas*, y con su auxilio, escribimos de manera explícita la forma del vector $\vec{F}(\vec{U}, \vec{\mu})$ en (A.12).

Debemos hacer notar que en nuestro trabajo las ecuaciones de FitzHugh-Nagumo en su versión espacio-temporal, en una y dos dimensiones, así como sus simplificaciones, son un caso particular del sistema (A.12).

A fin de completar el problema matemático, es necesario agregar a la (o las) ecuación de reacción-difusión (A.12), las condiciones iniciales y las de frontera. Las primeras, indican la concentración de la sustancia que se difunde, para el tiempo $t = 0$ en la región, Γ , donde el proceso difusivo tiene lugar. Mientras que las segundas indican como es la concentración en la frontera, $\partial\Gamma$, de Γ . De éstas las hay de tres tipos:

a) Dirichlet,

$$\vec{U}^0(\vec{r}') = (U_1^0(\vec{r}'), \dots, U_n^0(\vec{r}')), \quad \forall \vec{r}' \in \Gamma, \quad (\text{A.13})$$

donde $U_i^0(\vec{r}')$, son funciones dadas para $i = 1, 2, \dots, n$.

b) Neumann,

$$\nabla U_i^0(\vec{r}') \cdot \vec{n} = g_i^0(\vec{r}'), \quad \forall \vec{r}' \in \partial\Gamma, \quad (\text{A.14})$$

donde $g_i^0(\vec{r}')$, son funciones dadas para $i = 1, 2, \dots, n$. \vec{n} es un vector normal a $\partial\Gamma$.

c) Robin,

$$C_{1i}U_i^0(\vec{r}') + C_{2i}\nabla U_i^0(\vec{r}') \cdot \vec{n} = \tilde{g}_i^0(\vec{r}'), \quad \forall \vec{r}' \in \partial\Gamma, \quad (\text{A.15})$$

nuevamente $\tilde{g}_i^0(\vec{r}')$ es una función dada, C_{1i} y C_{2i} , son constantes, con $i = 1, 2, \dots, n$.

Apéndice B

Teoremas usados

El objetivo de este apéndice es enunciar una colección de teoremas que, además de su importancia propia, fueron usados en el cuerpo principal del manuscrito. Dichos resultados caracterizan la dinámica (local o global, según sea el caso) de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para la redacción de este apéndice consultamos los libros de texto Guckenheimer y Holmes [24] y el de Wiggins [54]. En ellos el lector encontrará más detalles de lo que presentamos aquí.

Cuando se estudian sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos, es común que aparezcan parámetros con una importante interpretación. Es de interés estudiar el comportamiento cuando los parámetros cambian. El siguiente resultado -tomado de Arnold [7]- siempre que el campo vectorial satisfaga condiciones apropiadas, garantiza la diferenciabilidad de las trayectorias respecto a las condiciones iniciales y los parámetros.

B.1. Diferenciabilidad respecto a parámetros

Consideramos el sistema,

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}_p), \quad (\text{B.1})$$

donde $\vec{F} : \Omega \times I_p \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos que (B.1) es de clase $C^K_{(a,b) \times \Omega \times I_p}$, donde $t, t_0 \in (a, b)$, Ω es un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n , mientras que $I_p \subset \mathbb{R}^k$, es un subconjunto abierto en \mathbb{R}^k .

El siguiente Lema (Arnold [7]), nos asegura que bajo ciertas condiciones, las trayectorias de (B.1), son diferenciables con respecto al vector de parámetros $\vec{\alpha}_p$,

Lema B.1 *Consideremos el sistema (B.1), con $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{\alpha}_{p0}) \neq 0$, donde $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$. Entonces la trayectoria $\varphi(t, t_0, \vec{x}_0, \vec{\alpha}_p)$, es una función diferenciable de clase $C_{\vec{U}}^K$, con respecto a t , t_0 , \vec{x}_0 y $\vec{\alpha}_p$. Donde $\vec{U} = (a, b) \times \Omega \times I_p$, es un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.*

B.2. El teorema de Hartman-Grobman

En esta sección consideramos el sistema autónomo,

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \quad (\text{B.2})$$

donde $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es un campo vectorial de clase C_{Ω}^1 . El punto $\vec{x}^* \in \Omega$ es un punto de equilibrio de (B.2) siempre que $\vec{F}(\vec{x}^*) = \vec{0}$. Introduzcamos la siguiente definición.

Definición B.1 *Se dice que el punto de equilibrio \vec{x}^* es hiperbólico si ninguno de los valores propios de la matriz de Jacobi, $J[\vec{F}]_{\vec{x}^*}$, de \vec{F} , evaluada en \vec{x}^* tiene parte real igual a cero. Por negación, se tiene que \vec{x}^* es no hiperbólico si al menos un valor propio de $J[\vec{F}]_{\vec{x}^*}$ tiene parte real igual a cero.*

Bajo condiciones adecuadas de “suavidad” en una vecindad de \vec{x}^* del campo vectorial \vec{F} que define el sistema (B.2), éste puede aproximarse por el sistema no lineal,

$$\dot{\vec{x}} = J[\vec{F}]_{\vec{x}^*} \vec{x} + \vec{R}(\vec{x}), \quad (\text{B.3})$$

donde, $\vec{R}(\vec{x}) = (R_1(\vec{x}), R_2(\vec{x}), \dots, R_n(\vec{x}))$, el cual cumple,

$$\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow 0} \frac{|R_i|}{\|\vec{x}\|} = 0, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (\text{B.4})$$

De hecho \vec{R} contiene los términos cuadráticos en adelante del desarrollo de Taylor de \vec{F} alrededor de \vec{x}^* .

Nótese que en el sistema (B.3), se realizó una traslación, a saber: la que lleva el origen al punto de equilibrio \vec{x}^* .

A partir de (B.3) se tiene la aproximación lineal de (B.2). Ésta es el sistema lineal,

$$\dot{\vec{x}} = J[\vec{F}]_{\vec{x}^*} \vec{x}. \quad (\text{B.5})$$

Una pregunta importante aquí es la siguiente: ¿qué relación hay entre la dinámica de los sistemas (B.2), (B.3) y (B.5)?

El Teorema de Hartman-Grobman da condiciones suficientes bajo las cuales la dinámica local (alrededor de \vec{x}^*) del sistema (B.2), es la misma que la del sistema (B.5) alrededor del origen. Éste es su enunciado:

Teorema B.1 (Teorema de Hartman-Grobman. Tomado de [24]). *Consideramos un subconjunto, Ω , abierto de \mathbb{R}^n tal que $\vec{x}^* \in \Omega$ y sea $\vec{F} \in C_{\Omega}^1$, fijémonos en el flujo (denotado por ϕ_t), asociado al sistema no lineal (B.2). Supongamos que $\vec{F}(\vec{x}^*) = \vec{0}$, $A = J[\vec{F}]_{\vec{x}^*}$ y además \vec{x}^* es un punto de equilibrio hiperbólico. Entonces existe un homeomorfismo,*

$$H : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n, \quad (\text{B.6})$$

con $\vec{x}^* \in U$, U es una vecindad contenida en Ω , $H(\vec{x}^*) \in V$. De tal forma, que para cada $\vec{x}_0 \in U$ existe un intervalo $I_0 \subset \mathbb{R}$, que contiene al cero, tal que para todo $(\vec{x}_0, t) \in U \times I_0$, se cumple lo siguiente¹,

$$H \circ \phi_t(\vec{x}_0) = e^{At} \circ H(\vec{x}_0). \quad (\text{B.7})$$

La condición (B.7), significa que el homeomorfismo H manda trayectorias del sistema (B.2) en una vecindad de \vec{x}^* , de manera biyectiva en trayectorias del sistema (B.5) en una vecindad de $H(\vec{x}^*)$, preservando la orientación de la parametrización. Aunque esto es sólo para el intervalo de tiempo I_0 .

B.3. Variedades invariantes

El Teorema de Hartman-Grobman es de gran utilidad cuando el punto de equilibrio es hiperbólico; mientras que si éste es no hiperbólico es necesario otro resultado a fin de obtener la dinámica local del sistema no lineal. Empezamos introduciendo las siguientes definiciones,

¹En la igualdad B.7 el símbolo “ \circ ” denota composición. Así, del lado izquierdo primero se aplica el flujo al punto \vec{x}_0 y enseguida se aplica el homeomorfismo. Análogamente del lado derecho.

Definición B.2 Un conjunto S^* , se llama conjunto invariante del campo vectorial que define el sistema (B.2), si para una condición inicial $\vec{x}_0 \in S^*$, la trayectoria asociada, $\vec{\varphi}(t)$, cumple que $\vec{\varphi}(t) \in S^*$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición B.3 Un conjunto S_1^* , es llamado conjunto positivamente invariante del campo vectorial que define el sistema (B.2), si para una condición inicial, $\vec{x}_0 \in S_1^*$, la trayectoria $\vec{\varphi}(t) \in S_1^*$, para todo $t \geq 0$. De forma análoga, S_2^* es negativamente invariante si $\vec{\varphi}(t) \in S_2^*$, para todo $t \leq 0$.

Definición B.4 Un conjunto invariante S^* de (B.2), se le da el nombre de variedad invariante de clase $C_{\Omega^*}^K$, con $K \geq 2$, $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$, cuando S^* , posee la estructura de una variedad diferenciable de clase $C_{\Omega^*}^K$.

Nos interesa estudiar la dinámica del sistema lineal (B.5) y la dinámica local del sistema no lineal (B.2), alrededor de un punto de equilibrio: \vec{x}^* para éste y $\vec{0}$ para aquél. También debemos observar la existencia y relación que guardan las variedades invariantes. A este tipo de cuestiones dedicamos las siguientes líneas.

B.3.1. Variedades invariantes sistema lineal

Considérese el sistema lineal (B.5) y supóngase que la matriz de Jacobi, $J[\vec{F}]_{\vec{x}^*}$, tiene: k valores propios con parte real negativa, l valores propios con parte real positiva y m valores propios con parte real igual a cero, con la condición de que, $k + l + m = n$. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$, los vectores propios de $J[\vec{F}]_{\vec{x}^*}$ correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$; mientras que $\vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \dots, \vec{v}_{k+l}$, corresponden a los valores propios, $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_{k+l}$, por último $\vec{v}_{k+l+1}, \vec{v}_{k+l+2}, \dots, \vec{v}_{k+l+m}$, se asocian a $\lambda_{k+l+1}, \lambda_{k+l+2}, \dots, \lambda_{k+l+m}$. Vamos a considerar los siguientes tres conjuntos,

$$E^s(\vec{x}^*) = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle, \quad (\text{B.8a})$$

$$E^u(\vec{x}^*) = \langle \vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \dots, \vec{v}_{k+l} \rangle, \quad (\text{B.8b})$$

$$E^c(\vec{x}^*) = \langle \vec{v}_{k+l+1}, \vec{v}_{k+l+2}, \dots, \vec{v}_{k+l+m} \rangle, \quad (\text{B.8c})$$

donde el símbolo \langle, \rangle significa el espacio generado por los vectores que aquél encierra. Así, $E^s(\vec{x}^*)$ es el subespacio vectorial generado por los vectores

proprios asociados a los valores propios con parte real negativa, $E^u(\vec{x}^*)$ es el subespacio vectorial generado por los vectores propios correspondientes a los valores propios con parte real positiva; mientras que $E^c(\vec{x}^*)$ es el subespacio vectorial generado por los vectores propios correspondientes a los valores propios con parte real igual a cero.

Al elegir una condición inicial, $\vec{x}_0 \in E^s(\vec{x}^*)$, la trayectoria que parte de \vec{x}_0 , no sólo permanece en $E^s(\vec{x}^*)$ para todo $t \geq 0$, sino que además, cumple $\vec{\varphi}(t) \rightarrow \vec{x}^*$, cuando $t \rightarrow \infty$. Análogamente, si $\vec{x}_0 \in E^u(\vec{x}^*)$, sucede que $\vec{\varphi}(t) \rightarrow \vec{x}^*$, cuando $t \rightarrow -\infty$. Obsérvese que la dinámica local de (B.2) sobre $E^c(\vec{x}^*)$, alrededor del punto de equilibrio, no puede ser descrita, dado que el teorema de Hartman-Grobman exige que el punto de equilibrio sea hiperbólico. Para enfrentar esta dificultad, es necesario desarrollar análisis no lineales. Este es el contenido de la siguiente subsección.

B.3.2. Variedades invariantes sistema no lineal

Si elegimos el sistema no lineal (B.3), existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, invertible de tal manera que localmente el sistema anterior se escribe así,

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_s \\ \vec{x}_u \\ \vec{x}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_s \\ \vec{x}_u \\ \vec{x}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{R}_s(\vec{x}_s, \vec{x}_u, \vec{x}_c) \\ \vec{R}_u(\vec{x}_s, \vec{x}_u, \vec{x}_c) \\ \vec{R}_c(\vec{x}_s, \vec{x}_u, \vec{x}_c) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

donde A_s , denota la matriz de tamaño $k \times k$, cuyos valores propios tienen parte real negativa, A_u la matriz de $l \times l$ con valores propios con parte real positiva y A_c una matriz de $m \times m$ con valores propios con parte real igual a cero. Donde $T^{-1}\vec{x} = (\vec{x}_s, \vec{x}_u, \vec{x}_c) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$, con $k + l + m = n$. Los términos no lineales en (B.9) provienen del término $T^{-1}\vec{R}(T(\vec{x}_s, \vec{x}_u, \vec{x}_c))$. En (B.9) el punto de equilibrio es el origen.

Ahora enunciamos un teorema que será de gran ayuda. Éste fue tomado de Wiggins [54].

Teorema B.2 *Suponemos que el sistema (B.9) es de clase C^K , con $K \geq 2$.*

Variedad local estable no lineal

Por lo tanto el punto de equilibrio \vec{x}^ , de (B.9) tiene una variedad local estable (de clase C^K),*

$$W^s(\vec{x}^*) = \{(\vec{x}_s, \vec{x}_u, \vec{x}_c) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m, \vec{x}_u = \vec{h}_1(\vec{x}_s), \vec{x}_c = \vec{h}_2(\vec{x}_s)\}. \quad (\text{B.10})$$

las funciones $\vec{h}_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ y $\vec{h}_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, cumplen las dos siguientes condiciones,

$$J[\vec{h}_1]_{\vec{x}^*} = \mathcal{O}_{l \times l}, \quad J[\vec{h}_2]_{\vec{x}^*} = \mathcal{O}_{m \times m} \quad (\text{B.11})$$

lo anterior para una vecindad de \vec{x}^* .

Variedad local inestable no lineal

Además el sistema (B.9), tiene una variedad local no lineal inestable (de clase C^K),

$$W^s(\vec{x}^*) = \{(\vec{x}_s, \vec{x}_u, \vec{x}_c) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m, \vec{x}_s = \vec{h}_3(\vec{x}_u), \vec{x}_c = \vec{h}_4(\vec{x}_u)\}. \quad (\text{B.12})$$

las funciones $\vec{h}_3 : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $\vec{h}_4 : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$, cumplen las dos siguientes condiciones,

$$J[\vec{h}_3]_{\vec{x}^*} = \mathcal{O}_{k \times k}, \quad J[\vec{h}_4]_{\vec{x}^*} = \mathcal{O}_{m \times m} \quad (\text{B.13})$$

lo anterior para una vecindad del punto de equilibrio \vec{x}^* .

Variedad central local no lineal

El sistema (B.9) tiene una variedad local central (de clase C^K),

$$W^c(\vec{x}^*) = \{(\vec{x}_s, \vec{x}_u, \vec{x}_c) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m, \vec{x}_s = \vec{h}_5(\vec{x}_c), \vec{x}_u = \vec{h}_6(\vec{x}_c)\}. \quad (\text{B.14})$$

las funciones $\vec{h}_5 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $\vec{h}_6 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, cumplen las dos siguientes condiciones,

$$J[\vec{h}_5]_{\vec{x}^*} = \mathcal{O}_{k \times k}, \quad J[\vec{h}_6]_{\vec{x}^*} = \mathcal{O}_{l \times l} \quad (\text{B.15})$$

lo anterior para una vecindad de \vec{x}^* .

Las funciones \vec{h}_i , $i = 1, 2, 3, \dots, 6$, son de clase C^K . Las tres variedades locales no lineales, $W^s(\vec{x}^*)$, $W^u(\vec{x}^*)$ y $W^c(\vec{x}^*)$, se intersectan en \vec{x}^* . Las

variedades $E^s(\vec{x}^*)$ y $E^u(\vec{x}^*)$, son tangentes a $W^s(\vec{x}^*)$ y $W^u(\vec{x}^*)$, en \vec{x}^* respectivamente, y, dada una condición inicial, si $\vec{x}_0 \in W^s(\vec{x}^*)$, entonces $\vec{\varphi}(t) \rightarrow \vec{x}^*$, cuando $t \rightarrow \infty$, mientras que si $\vec{x}_0 \in W^u(\vec{x}^*)$, se cumple $\vec{\varphi}(t) \rightarrow \vec{x}^*$, cuando $t \rightarrow -\infty$.

Para $E^c(\vec{x}^*)$, debemos decir en general, que a partir de $W^c(\vec{x}^*)$ para estudiar estudiar la dinámica lineal de $E^c(\vec{x}^*)$, deben usarse técnicas específicas, por ejemplo la técnica de formas normales, que pueden ser consultadas en el la referencia [54] capítulo 2.

El Teorema (B.2), se puede ver como la generalización del Teorema de Hartman-Grobman, pues en aquél se consideran los valores propios con parte real cero.

B.4. El teorema de bifurcación de Hopf para sistemas planos

En esta sección vamos a considerar sistemas planos autónomos no lineales de EDO con un parámetro. La dinámica de aquéllos en general cambia al cambiar el parámetro. Presentamos un teorema que asegura la emergencia de un ciclo límite a partir de un valor crítico del parámetro. Para precisar, consideramos el siguiente sistema no lineal de dos EDO,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_1(x, y; \mu) \\ \dot{y} &= F_2(x, y; \mu), \end{aligned} \tag{B.16}$$

donde $F_i : D \times I_\mu \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, 2$, denota funciones de clase C_D^1 , en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y $\mu \in I_\mu$ es un parámetro que toma valores reales. Supongamos que (B.16) tiene un punto de equilibrio no hipérbolico, para el valor de $\mu^* = 0$, que denotamos por $\vec{x}^* = (x_*, y_*)$. Al estudiar la dinámica local alrededor del punto de equilibrio, el sistema lineal tiene la forma,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{x}^*, \mu^*) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{x}^*, \mu^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{x}^*, \mu^*) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{x}^*, \mu^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{B.17}$$

Donde la matriz $J[\vec{F}]_{\vec{x}^*}$ es la matriz de Jacobi. El teorema de Hartman-Grobman no garantiza que la dinámica lineal alrededor de \vec{x}^* de (B.16), sea topológicamente equivalente a la dinámica de (B.17), cerca de \vec{x}^* .

Observamos que el sistema lineal (B.17), depende del parámetro μ , nuestra intención es saber qué sucede con la estructura de las trayectorias cerca de \vec{x}^* , para ello utilizaremos el sistema no lineal (B.16), para valores diferentes del parámetro μ .

Supongamos que $J[\vec{F}]_{\vec{x}^*}$, tiene dos valores propios imaginarios para el valor de $\mu = 0$ por lo que el punto de equilibrio \vec{x}^* es no-hiperbólico. Utilizando el Teorema B.2, obtenemos que la estructura de las trayectorias cerca del punto de equilibrio \vec{x}^* , está determinada por el campo vectorial (B.16), restringido a la variedad central local no lineal, considerando los términos no lineales. De esta manera, la restricción del campo vectorial sobre la variedad central local no lineal (B.17) toma la forma,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & -\operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ \operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y; \mu) \\ f_2(x, y; \mu) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

donde f_1, f_2 son no-lineales, μ es un parámetro de bifurcación, mientras que $\lambda(\mu)$ junto con su conjugado $\overline{\lambda(\mu)}$, son los valores propios de la matriz de Jacobi que define la aproximación lineal en \vec{x}^* . Es decir $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$, con $\alpha(0) = 0$ y $\omega(0) \neq 0$.

Ahora transformaremos el sistema (B.18) a su forma normal. Usando la técnica de formas normales, que sugiere la utilización de una transformación lineal compleja, la cual puede ser consultada en la tesis de Carrillo[9] o bien en el Texto de Wiggins [54], podemos sustituir el sistema (B.18) por el sistema siguiente,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(5) \\ \dot{y} &= \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + (b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(5), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

donde $O(5)$, significa polinomios homogéneos en las dos variable $x^m y^n$, tal que $m + n = 5$. Los términos de orden par no aparecen en (B.19), debido a que la forma normal no los incluye, para una explicación más detallada, véase la referencia citada líneas arriba.

Escribimos el sistema anterior, en coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + O(r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega(\mu) + b(\mu)r^2 + O(r^4). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Como estamos interesados en el análisis de la dinámica, de (B.20) alrededor de $\mu = 0$, desarrollamos en serie de Taylor de grado 3, a los parámetros

B.4. EL TEOREMA DE BIFURCACIÓN DE HOPF PARA SISTEMAS PLANOS 249

α , a , w y b , en una vecindad de $\mu = 0$. El resultado es

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha'(0)\mu r + a(0)r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, \mu^2 r^3, r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega(0) + \omega'(0)\mu + b(0)r^2 + O(\mu^2, \mu r^2, \mu^2 r^2, r^4),\end{aligned}\tag{B.21}$$

donde hemos usado que $\alpha(0) = 0$. Queremos estudiar la dinámica del sistema (B.21) para μ suficientemente pequeño. Para este fin, estudiaremos la forma normal sin términos de orden superior. Definimos $\alpha'(0) = d$, $a(0) = a$, $w(0) = w$, $w'(0) = c$ y $b(0) = b$.

Por lo tanto, podemos escribir (B.21) alrededor de $\mu = 0$ como,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= d\mu r + ar^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2,\end{aligned}\tag{B.22}$$

Las trayectorias periódicas (ciclos límite) de (B.22), corresponden a valores de $r > 0$ y μ , tales que $\dot{r} = 0$ y $\dot{\theta} \neq 0$.

Ahora bien, si pedimos la siguiente condición sobre los parámetros μ , d y a . Para valores $-\infty < \frac{\mu d}{a} < 0$ y μ suficientemente pequeña, tenemos que

$$(r(t), \theta(t)) = \left(\sqrt{\frac{-\mu d}{a}}, \left[w + \left(c - \frac{bd}{a} \right) \mu \right] t + \theta_0 \right),$$

es un ciclo límite para (B.22). Además, éste es:

- a) asintóticamente estable para $a < 0$,
- b) inestable para $a > 0$.

El análisis anterior, lo sintetizamos en el siguiente teorema.

Teorema B.3 (Teorema de bifurcación de Hopf para sistemas planos) Consideramos un sistema plano no lineal de EDO, de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_1(x, y; \mu), \\ \dot{y} &= F_2(x, y; \mu),\end{aligned}\tag{B.23}$$

donde $F_i : D \times I_\mu \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, 2$, denota funciones de clase C_D^1 , en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y $\mu \in I_\mu$ es un parámetro real. Si (B.23) posee un punto de equilibrio no hiperbólico \vec{x}^* , para el valor del parámetro $\mu = 0$. Además

de que, $Re(\lambda(\mu))$ cambia de signo cuando el parámetro μ , pasa por el valor crítico $\mu = 0$ y se da la condición,

$$d = \left. \frac{dRe(\lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=0} \neq 0, \quad (\text{B.24})$$

entonces surge un ciclo límite centrado en el punto de equilibrio no hiperbólico \vec{x}^* , del sistema (B.23).

Demostración. El análisis que desarrollamos anteriormente, es la demostración del teorema. \diamond

B.4.1. Estabilidad del punto de equilibrio y existencia del ciclo límite

Dentro de la estabilidad del punto de equilibrio, y la estabilidad del ciclo límite en el caso de que este exista, podemos considerar los siguientes casos,

- a) Si $d > 0$, $a > 0$ el punto de equilibrio es inestable para $\mu > 0$; para este conjunto de parámetros, no existe un ciclo límite. Mientras que para los valores de los parámetros anteriores pero con $\mu < 0$, el punto es asintóticamente estable y existe un ciclo límite asintóticamente inestable.
- b) Si $d > 0$, $a < 0$ el punto de equilibrio es asintóticamente estable para $\mu < 0$, y no existe un ciclo límite. Mientras que para $\mu > 0$ el punto es asintóticamente inestable y existe un ciclo límite estable.
- c) Cuando $d < 0$, $a > 0$ el punto de equilibrio es inestable para $\mu < 0$, no existe un ciclo límite. Para $\mu > 0$ el punto es asintóticamente estable y existe una ciclo límite inestable.
- d) Si sucede que, $d < 0$, $a < 0$, $\mu > 0$ el punto es asintóticamente estable y no existe un ciclo límite. Mientras que para $\mu < 0$ el punto de equilibrio es asintóticamente inestable y existe un ciclo límite asintóticamente estable.

En todos los casos anteriores el punto de equilibrio resulta estable cuando $\mu = 0$ para $a < 0$ e inestable para $a > 0$. Para $a > 0$ puede existir un ciclo

límite si $\mu > 0$ ó $\mu < 0$, pero en ambos casos es inestable. Para $a < 0$ puede existir un ciclo límite si $\mu > 0$ ó $\mu < 0$, pero en ambos casos es asintóticamente estable. Por lo tanto, a determina la estabilidad del ciclo límite.

De forma general, podemos decir que el teorema de bifurcación de Hopf demuestra que la dinámica exhibida por la forma normal truncada es cualitativamente equivalente a la del sistema original considerando la aportación de términos de orden mayor.

Para el estudio de la dinámica global, en un espacio de dimensión dos, es importante conocer la existencia de ciclos límite (trayectorias periódicas). También nos interesa, conocer el destino final de una trayectoria correspondiente a una condición inicial. Los dos teoremas siguientes, cumplirán los dos propósitos anteriores.

B.5. La prueba de Dulac

En la presente sección, consideramos sistemas planos de ecuaciones diferenciales autónomos de la forma,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_1(x, y) \\ \dot{y} &= F_2(x, y),\end{aligned}\tag{B.25}$$

donde, $F_i : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, 2$, denota funciones continuas de clase C_D^1 . De manera que si existe una solución para un problema de condiciones iniciales asociado al sistema (B.25), ésta es única.

El teorema que nos asegura la no existencia de trayectorias cerradas, de manera particular ciclos límite, se le llama *Prueba de Dulac*. Éste es un criterio negativo y se enuncia así,

Teorema B.4 *Consideramos una región D simplemente conexa del plano y supongamos que existe una función $\sigma(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C_D^1 , con $\sigma(x, y) > 0, \forall (x, y) \in D$. Si tenemos que la expresión para el sistema (B.25),*

$$\operatorname{div}[\sigma(x, y)(F_1(x, y), F_2(x, y))],\tag{B.26}$$

no es cero y no cambia de signo en la región D , entonces el sistema (B.25) no tiene trayectorias cerradas en esta región.

Resultados con suficiente generalidad que den la dinámica de sistemas autónomos de dimensión “grande” ($n \geq 3$), son encasos por no decir que no existen. Sin embargo, para sistemas planos se tiene un teorema que da absolutamente toda la dinámica de ellos. El objeto de esta sección final es enunciar dicho teorema. El cual nos será útil, ya que nos interesa saber quiénes son los conjuntos, a los que se dirijen las trayectorias de los sistemas planos cuando éstos son “suaves”.

B.6. El teorema de Poincaré-Bendixson

Teorema B.5 (Teorema de Poincaré-Bendixson). Tomado de ([24]). Supongamos que el sistema plano (B.25) tiene un número finito de puntos de equilibrio. Si la trayectoria positiva $\gamma^+(\vec{x}_0)$ para la condición inicial, $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ es acotada, entonces uno y sólo uno de los siguientes resultados se cumple:

1. El conjunto ω -límite, $\omega(\vec{x}_0)$, es un punto de equilibrio \vec{x}^* .
2. $w(\vec{x}_0)$ es una trayectoria cerrada (ciclo límite) $\Gamma_{\vec{x}_0}$, y se cumple que, $\gamma^+(\vec{x}_0) = \omega(\vec{x}_0) = \Gamma_{\vec{x}_0}$ ó $\gamma^+(\vec{x}_0)$ tiende a $\Gamma_{\vec{x}_0}$.
3. El conjunto ω -límite, $\omega(\vec{x}_0)$, es un conjunto finito de puntos de equilibrio. Y $\gamma^+(\vec{x}_0)$, tiende a sólo uno (lo que dependerá de la condición inicial \vec{x}_0) de estos puntos de equilibrio.

Apéndice C

Los bloques aislantes

En este apéndice presentamos un resumen del trabajo de Durand [14], al que le hemos agregado algunos detalles, que en dicho documento no están desarrollados.

Vamos a definir las nociones de bloques aislantes, tiempos de entrada y salida, los cuales se usaron en el Capítulo 3 para demostrar la existencia de la trayectoria homoclínica del sistema (3.7).

Aquí consideramos sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos de la forma,

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \quad (\text{C.1})$$

donde $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\vec{\varphi}(t)$ la solución de (C.1) que satisface la condición inicial $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$.

Definición C.1 Si \vec{x}_1 es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema (C.1) las variedades inestable y estable $W^u(\vec{x}_1)$ y $W^s(\vec{x}_1)$, de (C.1) en \vec{x}_1 , satisfacen

$$W^u(\vec{x}_1) = \{\vec{x}_0 \in \Omega \mid \vec{\varphi}(t) \rightarrow \vec{x}_1 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}$$

y

$$W^s(\vec{x}_1) = \{\vec{x}_0 \in \Omega \mid \vec{\varphi}(t) \rightarrow \vec{x}_1 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty\},$$

respectivamente.

Ilustremos estos conceptos a través de un ejemplo,

Ejemplo C.1. Consideremos el sistema,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

$P_0 = (0, 0)$ es el único punto de equilibrio y los valores propios la matriz de Jacobi son, $\lambda_1^* = 1$ y $\lambda_2^* = -1$, por lo que el punto de equilibrio P_0 es de tipo silla. Las variedades inestable y estable del sistema (C.2) en el origen son,

$$W^u(0, 0) = \{(u, w) \mid w = u\} \quad \text{y} \quad W^s(0, 0) = \{(u, w) \mid w = -u\},$$

respectivamente.

Definición C.2 Sean \vec{x}_1 y \vec{x}_2 dos puntos de equilibrio hiperbólicos de (C.1). Decimos que $\vec{\varphi}(t)$ es una trayectoria heteroclínica (de \vec{x}_1 a \vec{x}_2) del sistema (C.1) si $\vec{x}_0 \in W^u(\vec{x}_1) \cap W^s(\vec{x}_2)$. De hecho

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{\varphi}(t) = \vec{x}_1, \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{\varphi}(t) = \vec{x}_2;$$

mientras que $\vec{\varphi}(t)$ es una trayectoria homoclínica de (C.1) basada en \vec{x}_1 si $(\vec{x}_0 \in W^u(\vec{x}_1) \cap W^s(\vec{x}_1)) \setminus \{\vec{x}_1\}$, es decir

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{\varphi}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{\varphi}(t) = \vec{x}_1.$$

Finalmente $\vec{\varphi}(t)$ es una trayectoria periódica en I , si existe $T \neq 0$, tal que $\vec{\varphi}(t + T) = \vec{\varphi}(t)$, $\forall t \in I$.

Ahora vamos a definir lo que se entiende por un bloque, B , para el sistema (C.1).

Definición C.3 $B \subset \mathbb{R}^n$ es un bloque para (C.1) si existen funciones,

$$\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{C.3}$$

de clase C^1 en \mathbb{R}^n , tales que $B = \bigcap_{i=1}^N \tilde{f}_i^{-1}([0, \infty))$, es decir B es homeomorfo a $[0, 1]^n$ y $\nabla \tilde{f}_i \cdot \vec{F} \neq 0$ en la frontera, ∂B , de B .

En la Definición C.3 el punto “ \cdot ” denota el producto escalar usual, de los vectores entre los que este símbolo aparece. La condición de $\nabla \tilde{f}_i \cdot \vec{F} \neq 0$, en ∂B para todo $i = 1, \dots, n$, garantiza que el campo vectorial de (C.1) es transversal a la frontera, ∂B , de B .

Expresado en palabras, tenemos que un bloque es un conjunto definido en una región del espacio fase de (C.1), de tal manera que la transversalidad sobre la frontera del bloque nos asegura que las trayectorias no son

ortogonales a la frontera de aquél. Además, un bloque aislante B puede ser deformado continuamente para convertirlo en un n -cubo ¹. La propiedad de transversalidad de las trayectorias sobre la frontera del bloque nos permite identificar a las trayectorias del sistema (C.1) que salen y las que entran del bloque aislante.

Procedemos ahora a definir los conjuntos de entrada y salida, para el bloque B ,

Definición C.4 *El conjunto, b^+ , de entrada es,*

$$b^+ = \{ \vec{x} \in \partial B \mid \tilde{f}_i(\vec{x}) = 0 \text{ y } \nabla \tilde{f}_i \cdot \vec{F} > 0, \text{ para alguna } i \}.$$

El conjunto de salida, b^- , es

$$b^- = \{ \vec{x} \in \partial B \mid \tilde{f}_i(\vec{x}) = 0 \text{ y } \nabla \tilde{f}_i \cdot \vec{F} < 0, \text{ para alguna } i \}.$$

Nuevamente ilustraremos a través de un ejemplo los conceptos anteriores,

Ejemplo C.2. Elegimos al sistema (C.2). Si definimos el conjunto B como,

$$B = \{(u, w) \mid |u| + |w| \leq 0.4\},$$

observamos que éste es un bloque aislante para (C.2). Los conjuntos de entrada y salida se pueden observar en la figura C.1.

Ahora bien, si consideramos el conjunto,

$$C = \{(u, w) \mid |u - 1.25| \leq 1.25, |w| \leq 0.6\},$$

observamos que éste no es un bloque aislante para el sistema (C.2). Esto es por el hecho de existe una trayectoria, $\vec{u}_*(t)$, que no es transversal a la frontera de C . Véase la figura C.2.

¹Dos conjunto A y B son homeomorfos, si existe una función continua que transforma al conjunto A en el conjunto B . Esta función tiene inversa continua la cual lleva al conjunto B en A .

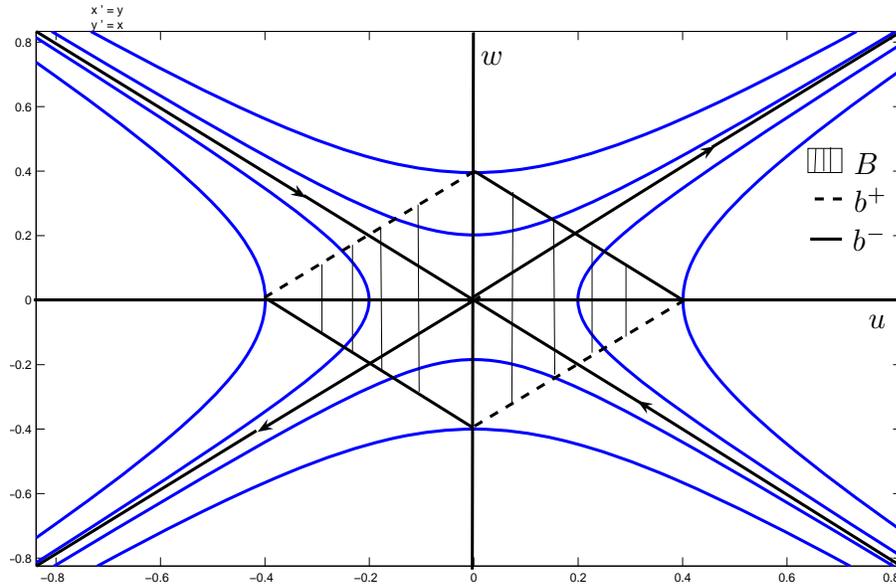


Figura C.1: Un bloque aislante B para el sistema (C.2). Figura obtenida de Durand [14].

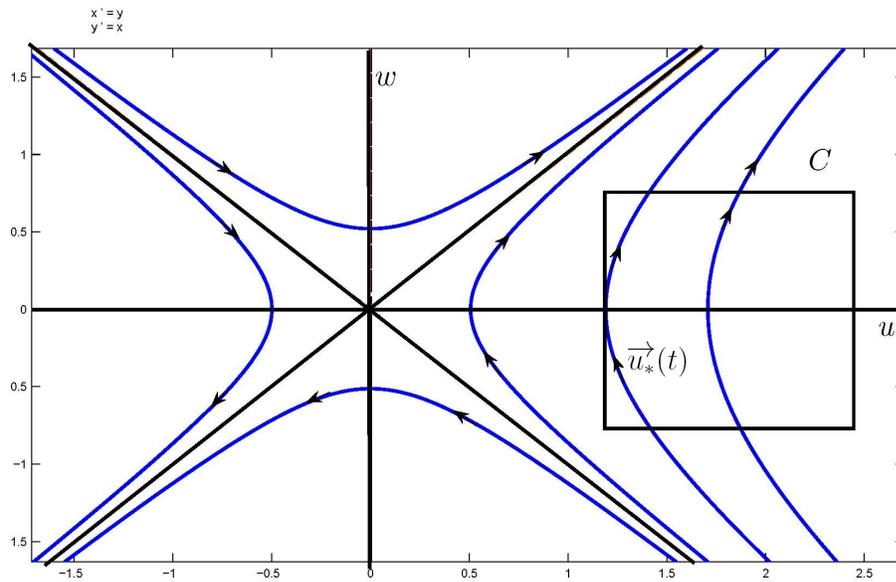


Figura C.2: Aquí podemos notar que C no es un bloque aislante para el sistema (C.2). Tomada de Durand [14].

Introducimos los conceptos de tiempo de llegada y tiempo de salida para el bloque aislante B .

Definición C.5 *El tiempo de llegada al bloque B de \vec{x}_0 , es*

$$T^+(\vec{x}_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } \vec{x}_0 \in b^+, \\ \sup\{t > 0 \mid \vec{\varphi}(t) \cap b^+ = \emptyset\}, & \text{si } \vec{x}_0 \notin b^+. \end{cases}$$

El tiempo de salida de \vec{x}_0 se define así,

$$T^-(\vec{x}_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } \vec{x}_0 \in b^-, \\ \sup\{t > 0 \mid \vec{\varphi}(t) \cap b^- = \emptyset\}, & \text{si } \vec{x}_0 \notin b^-. \end{cases}$$

Despojándola de tecnicismos, lo que expresa la Definición C.5 es: $T^\pm(\vec{x})$ es el tiempo necesario para que la trayectoria $\vec{\varphi}(t)$ asociada a \vec{x}_0 , toque a b^\pm .

Necesitamos los siguientes conceptos.

Definición C.6 *Se definen los conjuntos D^+ y D^- ,*

$$D^+ = \{\vec{x}_0 \in \Omega \mid 0 < T^+(\vec{x}_0) < +\infty, \varphi(T^+(\vec{x}_0)) \notin b^-\},$$

$$D^- = \{\vec{x}_0 \in \Omega \mid 0 < T^-(\vec{x}_0) < +\infty, \varphi(T^-(\vec{x}_0)) \notin b^+\},$$

definimos el punto de llegada de \vec{x}_0 a B como,

$$\phi^+ : D^+ \rightarrow b^+, \phi^+(\vec{x}_0) = \varphi(T^+(\vec{x}_0)),$$

y el punto de salida de \vec{x}_0 a B como,

$$\phi^- : D^- \rightarrow b^-, \phi^-(\vec{x}_0) = \varphi(T^-(\vec{x}_0)).$$

En palabras simples, los dos conjuntos anteriores definen al conjunto de puntos (condiciones iniciales), que después de un tiempo finito tienen el siguiente comportamiento: si elegimos a $\vec{x}_0 \in D^+$, entonces en un tiempo finito, $T^+(\vec{x}_0)$, la trayectoria correspondiente toca al conjunto de entrada b^+ . Mientras que si $\vec{x}_0 \in D^-$ la trayectoria toca al conjunto de salida b^- en un tiempo finito $T^-(\vec{x}_0)$. Es decir, los conjuntos D^+ y D^- nos definen los puntos (condiciones iniciales) los cuales definen trayectorias que tocarán al conjunto de entrada o salida de un bloque aislante. Estos puntos que tocan a b^+ ó b^- , son los que se definen a través de la funciones ϕ^+ y ϕ^- respectivamente.

Para el ejemplo C.2, tenemos que

- El conjunto D^+ es la región sombreada que se muestra en la figura C.3. Si elegimos una condición inicial $\vec{x}_0 \in D^+$, la trayectoria $\vec{\varphi}(t)$ correspondiente, tocará al conjunto de entrada en un tiempo finito $T^+(\vec{x}_0)$. Este punto de contacto se define por la función $\phi^+(\vec{x}_0)$.
- Mientras que $D^- = (D^+ \cup B) \setminus (b^- \cup W^S(0, 0))$. Nuevamente, obsérvese que si elegimos una condición inicial $\vec{x}_0 \in D^-$ la trayectoria $\vec{\varphi}(t)$, después de un tiempo finito $T^-(\vec{x}_0)$ toca al conjunto de salida b^- , en el punto $\phi^-(\vec{x}_0)$.

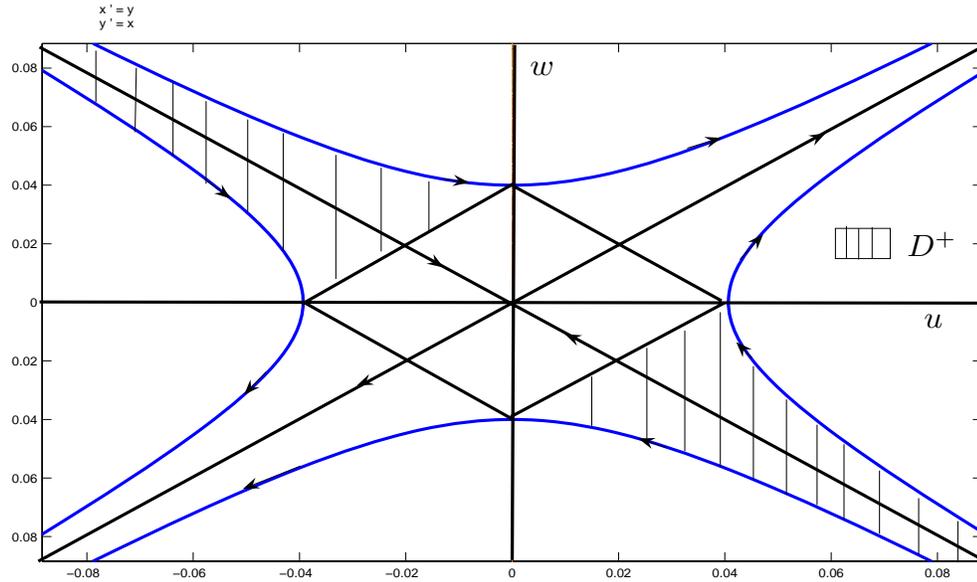


Figura C.3: Región D^+ para el sistema (C.2). Tomada de Durand [14].

Con todo lo hecho anteriormente, podemos enunciar ahora que el punto de llegada o salida de $\vec{\varphi}(t)$ a un bloque, depende continuamente de \vec{x}_0 , esto debido a la transversalidad de las trayectorias en la frontera ∂B . Es decir, que si elegimos condiciones iniciales en una vecindad de la condición inicial \vec{x}_0 , las trayectorias correspondientes que llegan al conjunto de entrada (salida) de un bloque y los puntos de entrada (salida) deberán estar cerca. También los correspondiente tiempos de entrada (salida) deben tomar valores parecidos. La siguiente proposición, formaliza esta idea,

Proposición C.1 (Durand [14]) Sea B un bloque para el sistema (C.1) entonces T^\pm y ϕ^\pm son funciones continuas en D^\pm .

Demostración. Sea $\vec{x}_0 \in D^+$ y $\epsilon > 0$. De manera que la trayectoria asociada a \vec{x}_0 , que denotamos como $\vec{\varphi}_x(t)$, cumple que $\vec{\varphi}_x(t) \cap b^+ \neq \{\emptyset\}$ si consideramos $t \in (T^+(\vec{x}_0) - \epsilon, T^+(\vec{x}_0) + \epsilon)$. Por la continuidad y la transversalidad de la trayectorias a b^+ , podemos encontrar una vecindad, U , de \vec{x}_0 tal que si $\vec{y}_0 \in U$ entonces $\vec{\varphi}_y(t)$ interseca a b^+ si $t \in (T^+(\vec{y}_0) - \epsilon, T^+(\vec{y}_0) + \epsilon)$. Ahora observamos que $\vec{\varphi}_x(t) \cap B = \{\emptyset\}$, si $t \in [0, T^+(\vec{x}_0) - \epsilon]$, elegimos U de tal forma que $\vec{\varphi}_y(t) \cap B = \{\emptyset\}$ cuando $t \in [0, T^+(\vec{x}_0) - \epsilon]$ si $\vec{y}_0 \in U$ entonces,

$$|T^+(\vec{y}_0) - T^+(\vec{x}_0)| < \epsilon,$$

Como ϵ es arbitraria, $T^+(\vec{x}_0)$ es continua (véase la figura C.4). Ahora dado que ϕ^+ es composición de funciones continuas, es continua. Análogamente podemos usar el mismo argumento para demostrar que T^- y ϕ^- son continuas.

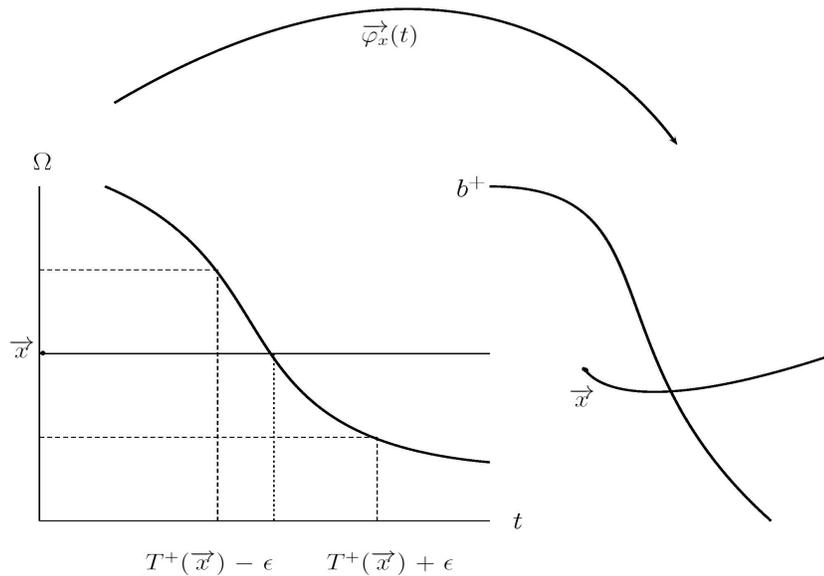


Figura C.4: Figura que ilustra la continuidad de T^+ . Figura tomada de Durand [14].

Los conceptos anteriores se pueden extender a sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos, los cuales incluyen un vector de parámetros $\vec{\sigma} \in \mathbb{R}^k$.

Aquí, consideramos el sistema,

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x}, \vec{\sigma}), \quad (\text{C.4})$$

donde $\vec{G} : \Omega \times \Sigma \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$. \vec{G} es C_Ω^K , $K \geq 1$ y continua en una vecindad de $\vec{\sigma}^* \in \Sigma$. El conjunto Σ es abierto en \mathbb{R}^k .

De la transversalidad del campo vectorial, se tiene que si B es un bloque para el sistema (C.1) con $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^*$, entonces también lo es para el sistema (C.4) si la norma $\|\vec{\sigma} - \vec{\sigma}^*\|$ es suficientemente pequeña. Con esta condición sobre la norma, los conjuntos de entrada b^+ y salida b^- de (C.1), son también conjuntos de entrada y salida para (C.4).

Sea B un bloque para (C.4) con $\vec{\sigma} \in \Sigma$. Consideremos,

$$T^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma}) \equiv T^\pm(\vec{x}) \quad \text{con} \quad \vec{\sigma} \in \Sigma \quad (\text{C.5a})$$

$$\phi^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma}) \equiv \phi^\pm(\vec{x}) \quad \text{con} \quad \vec{\sigma} \in \Sigma. \quad (\text{C.5b})$$

Podemos enunciar y demostrar la siguiente proposición,

Proposición C.2 (Durand [14]) *Las funciones $T^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma})$ y $\phi^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma})$ son continuas respecto a \vec{x} y a $\vec{\sigma}$.*

Demostración. Esto es consecuencia de la Proposición C.1, considerando $T^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma})$ y $\phi^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma})$ en el sistema,

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x}, \vec{\sigma}) \quad (\text{C.6a})$$

$$\dot{\vec{\sigma}} = \vec{0}, \quad (\text{C.6b})$$

es decir $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^*$ es constante. Por la Proposición C.1 tenemos que $T^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma})$ y $\phi^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma})$ son funciones continuas de \vec{x} . Nuevamente por la transversalidad del campo vectorial, si $\|\vec{\sigma}^{**} - \vec{\sigma}^*\| < \epsilon$, los conjuntos de entrada y salida con $\vec{\sigma}^{**}$ son también conjuntos de entrada y salida para $\vec{\sigma}^*$. Por lo tanto, $T^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma})$ es una función continua de $\vec{\sigma}$. Con un argumento análogo se prueba que $\phi^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma})$ es una función continua. \diamond

El siguiente teorema garantiza la existencia de trayectorias homoclínicas bajo las hipótesis de la existencia de ciertos bloques aislantes para el sistema (C.4). En este teorema, denotamos b_i^\pm a los conjuntos de entrada y salida del bloque B_i , $T_i^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma})$ los tiempos de entrada y salida de B_i , y $\phi_i^\pm(\vec{x}, \vec{\sigma})$ con sus respectivos dominios, D_i^\pm los puntos de entrada y salida de B_i .

Teorema C.1 (Durand [14]). (Existencia de trayectorias homoclínicas de (C.4)). Si existen bloques B_1 y B_2 para el sistema (C.4) con $\vec{\sigma} \in \Sigma$. Y además se cumplen las condiciones siguientes:

- a) Si \vec{x}_* es punto de equilibrio del sistema (C.4) para $\vec{\sigma} \in \Sigma$ y $\vec{\varphi}(t) \subset B_1$, si $t \in [t_0, \infty)$, entonces la condición inicial \vec{x}_0 que define a $\vec{\varphi}(t)$ cumple, $\vec{x}_0 \in W^s(\vec{x}_*)$.
- b) Toda trayectoria que entra a B_2 , en un tiempo finito sale de él.
- c) Existe un conjunto $\Delta \neq \{\emptyset\}$, tal que $\Delta \subset b_2^-$, con Δ un conjunto abierto de b_2^- tal que,
 - i) $\Delta \subseteq D_1^+$,
 - ii) $b_2^- \setminus \Delta$ tiene dos componentes β_0 y β_1 ,
 - iii) $\delta_0 \equiv \beta_0 \cap \bar{\Delta} \subset D_1^-$, $\delta_1 \equiv \beta_1 \cap \bar{\Delta} \subset D_1^-$,
 - iv) $\phi_1^- \circ \phi_1^+(\delta_0)$ y $\phi_1^- \circ \phi_1^+(\delta_1)$ están en distintas componentes de b_1^- .
- d) Existe una trayectoria,

$$\{(\vec{x}_s, \vec{\sigma}_s) \mid \vec{x}_s \in D_2^+, \vec{\sigma}_s \in \Sigma, 0 \leq s \leq 1\},$$

tal que,

- i) $\vec{x}_s \in W^u(\vec{x}_*)$ en (C.4) con $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_s$,
- ii) $\phi_2^- \circ \phi_2^+(\vec{x}_0, \vec{\sigma}_0) \in \beta_0$, $\phi_2^- \circ \phi_2^+(\vec{x}_1, \vec{\sigma}_1) \in \beta_1$.

entonces el sistema (C.4) admite una trayectoria homoclínica basada en \vec{x}_* con $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_s$ para alguna s .

La demostración del Teorema C.1, consiste en fijarse en la trayectoria $(\vec{x}_s, \vec{\sigma}_s)$ (que denotamos como \vec{x}_s) de (C.4).

Demostración: Debemos considerar la trayectoria $\vec{\gamma}_s = \phi_2^- \circ \phi_2^+(\vec{x}_s, \vec{\sigma}_s)$ en b_2^- . Notamos que $\vec{\gamma}_s$, es la imagen bajo la funciones $\phi_2^- \circ \phi_2^+$ de la trayectoria de la condición d). Ahora, de la condición d.ii) tenemos que $\vec{\gamma}_0 \in \beta_0$ y $\vec{\gamma}_1 \in \beta_1$.

Por la continuidad de la trayectoria $\vec{\gamma}_s$ con respecto a el parámetro s , la curva $\vec{\gamma}_s$ interseca a los conjuntos δ_0 y δ_1 ; es decir existen s_0 y $s_1 \in (0, 1)$ tales que $\vec{\gamma}_{s_0} \in \delta_0$ y $\vec{\gamma}_{s_1} \in \delta_1$. Usando c.iv) tenemos que como $\phi_1^- \circ \phi_1^+(\vec{\gamma}_{s_0})$ y

$\phi_1^- \circ \phi_1^+(\vec{\gamma}_{s_1})$ están en distintas componentes de b_1^- , debe existir $s^* \in (s_0, s_1)$ tal que $\vec{\gamma}_{s^*} \in \Delta \subset D_1^+$ pero $\vec{\gamma}_{s^*} \notin D_1^-$, esto significa que la trayectoria $\vec{\gamma}_{s^*}$ entra al bloque B_1 y permanece ahí, de manera que podemos utilizar la condición *a*) y concluimos que existe una trayectoria $\vec{\varphi}_{s^*}(t) \rightarrow \vec{x}_*$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto $\vec{\gamma}_{s^*}$ es la solución homoclínica que buscamos.

En palabras más simples, existe un valor s^* para el cual la trayectoria \vec{x}_{s^*} , sale del origen a través de la variedad inestable $W^u(\vec{x}_*)$ y, en un tiempo finito, sale del bloque B_1 , para posteriormente entrar al bloque B_2 por b_2^+ y sale por la región $\Delta \subset b_2^-$ para después llegar al bloque B_1 por b_1^+ , de manera que permanece en B_1 , debe suceder entonces que llega al punto de equilibrio \vec{x}_* , a través de la variedad estable $W^s(\vec{x}_*)$, con esto terminamos la demostración. \diamond

Apéndice D

El problema de Sturm-Liouville

En esta sección vamos a exponer algunos de los teoremas que se usan en el Capítulo 4 para demostrar la existencia de la onda reentrante. Estos teoremas aparecen a la Teoría de EDP, pero corresponden a la Teoría de EDO.

Para la redacción de este apéndice nos basamos principalmente en las referencias, [7] y [11].

D.0.1. El problema de Sturm-Liouville

Un método muy popular para obtener la solución del problema de condiciones iniciales y de frontera asociado a ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden, es el llamado método de separación de variables. Por ejemplo, para la ecuación de calor o para la ecuación de onda, el método consiste en suponer la existencia de dos funciones: una $X(\vec{r})$ que depende exclusivamente de las variables espaciales y otra, $T(t)$, que depende sólo del tiempo, de manera que,

$$U(\vec{r}, t) = X(\vec{r})T(t), \quad (\text{D.1})$$

sea una solución de la correspondiente ecuación diferencial parcial. Al sustituir en la EDP e imponer las condiciones iniciales y de frontera, se llega a que $X(\vec{r})$ debe ser solución de un problema de condiciones de frontera de los llamados de tipo *Sturm-Liouville*, cuya formulación explícita depende tanto de la dimensión del espacio como del tipo particular de condiciones de frontera. Aquí nos restringiremos al intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y al llamado pro-

blema de *Sturm-Liouville*, el cual consiste de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden,

$$\frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left[q(x) + \lambda w(x) \right] y(x) = 0, \quad \text{en } I = [a, b], \quad (\text{D.2})$$

donde $P(x)$, $q(x)$, $w(x)$ y $P'(x)$ son funciones continuas en I , además de que $w(x) > 0$ y $P(x) > 0 \forall x \in I$. Sujeta a las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + b_1 y'(a) &= 0 \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

donde λ es un parámetro, con a_1 , a_2 , b_1 y b_2 , parámetros constante reales tal que a_1 y b_1 ó a_2 y b_2 no son cero los dos.

Nótese que el problema (D.2)-(D.3), es un problema de valores propios homogéneo y por la tanto $y(x) \equiv 0$ es solución para todo valor de λ . Sin embargo, desde el punto de vista interpretativo la solución trivial es de poco interes. Por ello, es importante averiguar si, además de la trivial, el problema (D.2)-(D.3) tiene otras soluciones. Puede probarse (véase [7]) que (D.2)-(D.3), tiene otras soluciones dependiendo del valor de λ . De hecho, se prueba que si $y_1(x, \lambda)$ y $y_2(x, \lambda)$, son dos soluciones linealmente independientes de (D.2) entonces el problema (D.2)-(D.3) tiene soluciones diferentes de la trivial si y sólo si,

$$\det \begin{bmatrix} a_1 y_1(a, \lambda) + b_1 y_1'(a, \lambda) & a_1 y_2(a, \lambda) + b_1 y_2'(a, \lambda) \\ a_2 y_1(b, \lambda) + b_2 y_1'(b, \lambda) & a_2 y_2(b, \lambda) + b_2 y_2'(b, \lambda) \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{D.4})$$

Los valores de λ que satisfacen (D.2), son llamados *valores propios del problema* (D.2)-(D.3) y a las correspondientes soluciones no triviales, se les llama *funciones propias* de dicho problema.

También puede probarse que una función propia de (D.2)-(D.3) correspondiente a un valor propio, está unívocamente determinada, salvo un factor constante.

Los siguientes dos teoremas se refieren tanto al tipo de valores propios de (D.2)-(D.3) como a la forma en que éstos pueden ser ordenados.

Teorema D.1 *Los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville (D.2) y (D.3) son reales.*

Esto es importante ya que entonces se puede establecer un orden entre ellos. A esto se refiere el siguiente teorema.

Teorema D.2 *Los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville, (D.2) y (D.3), forman una sucesión infinita cuyos elementos se pueden arreglar de forma monótona creciente, es decir,*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$$

y aquéllos satisfacen,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

D.0.2. El principio de Rayleigh

En esta subsección exponemos algunas propiedades de los valores propios del problema regular *Sturm-Liouville*. Para ello conviene escribir (D.2) en términos de un operador diferencial $L : C_I^2 \rightarrow C_I$, tal que si $y(x) \in C_I^2$, entonces

$$L[y(x)] = \frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y(x) = -\lambda w(x)y(x), \quad \text{en } I = [a, b], \quad (\text{D.5})$$

donde $w(x)$ recibe el nombre de *función de peso*. También se consideran, las condiciones de frontera, (D.3).

Definición D.1 *El valor propio mínimo del problema regular de Sturm-Liouville es llamado el valor propio principal y su correspondiente función propia es llamada función propia principal. La expresión,*

$$R(u) = \frac{\int_a^b u L[u] dx}{\int_a^b u^2 dx}, \quad (\text{D.6})$$

es llamada *cociente de Rayleigh*, en donde $u \in H$, con

$$H = \left\{ u \in \mathbb{R} : \int_a^b |u^2(x)| dx < \infty \right\}. \quad (\text{D.7})$$

La siguiente proposición caracteriza al valor propio principal.

Proposición D.1 *El valor propio principal λ_1 del problema regular de Sturm-Liouville, (D.2) y (D.3), satisface,*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H} - \frac{\int_a^b uL[u]dx}{\int_a^b u^2 dx}, \quad (\text{D.8})$$

De forma general los valores propios del problema regular de *Sturm-Liouville*, están caracterizados a través del cociente de *Rayleigh*, de la forma siguiente,

$$\lambda_n = \frac{-P(x)y_n(x)y_n'(x) \Big|_a^b + \int_a^b (P(x)(y_n'(x))^2 + q(x)(y_n(x))^2) dx}{\int_a^b (y_n'(x))^2 w(x) dx}, \quad (\text{D.9})$$

donde $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

D.0.3. La función de Bessel

La ecuación de Bessel, surge al obtener la solución de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en coordenadas cilíndricas. Por ejemplo, en la ecuación de la membrana vibrante con simetría radial, se obtiene una ecuación de aquél tipo. Aquélla tiene la forma,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha)y = 0. \quad (\text{D.10})$$

La obtención de la solución de la ecuación de Bessel (D.10), usa el método de Frobenius, según el cual, se propone por solución a la serie,

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (\text{D.11})$$

donde a_n son coeficientes reales desconocidos. Si se sustituye (D.11) en la ecuación de Bessel (D.10), se obtienen dos soluciones para r . A saber, $r = \alpha$ y $r = -\alpha$. Podemos considerar los siguientes dos casos,

a) Si $r = \alpha$, la solución es

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \alpha}, \quad (\text{D.12})$$

esta solución es llamada la función de Bessel de primer tipo, de orden α .

b) Cuando $r = -\alpha$, la solución es

$$J_{-\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k - \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k - \alpha}, \quad (\text{D.13})$$

la cual recibe el nombre de la función de Bessel de primer tipo, de orden $-\alpha$.

En (D.12) y (D.13), $\Gamma(x)$ denota a la *función gamma*, la cual se define así,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (\text{D.14})$$

Algunas propiedades de esta función, son:

- a) $\Gamma(1) = 1$,
- b) $\Gamma(n + 1) = n!$,
- c) $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$,
- d) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Las funciones $J_{\alpha}(x)$ y $J_{-\alpha}(x)$ son linealmente independientes, cuando $x > 0$, entonces la solución general de la ecuación de Bessel es una combinación lineal de J_{α} y $J_{-\alpha}$, por lo que aquella tiene la forma,

$$y(x) = C_1 J_{\alpha}(x) + C_2 J_{-\alpha}(x), \quad (\text{D.15})$$

donde C_1 y C_2 son constantes. En nuestro trabajo, $\alpha = n$, donde $n \in \mathbb{N}$, en esta situación, la solución general de (D.10) tiene la forma,

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x), \quad (\text{D.16})$$

donde,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \quad (\text{D.17})$$

y

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} J_\alpha(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \alpha} J_{-\alpha}(x) \right] \Big|_{\alpha=n}, \quad (\text{D.18})$$

las soluciones $J_n(x)$ y $Y_n(x)$ son acotadas y linealmente independientes para todo $x > 0$. Se define a $J_n(x)$ como la función de Bessel de primer tipo, de orden n y a $Y_n(x)$ como la función de Bessel de segundo tipo, de orden n .

Apéndice E

Raíces del polinomio característico

En este apéndice presentaremos una clasificación de los valores propios que puede tener una matriz A de 3×3 . Los resultados aquí contenidos fueron usados en la sub-sección 3.2.1. La presentación que aquí hacemos es una adaptación de la correspondiente que hace Murray en su texto [43]. Empezamos recordando que el polinomio característico particular que obtuvimos en la sub-sección 3.2.1, es

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2\left(c - \frac{\epsilon\tilde{\gamma}}{c}\right) - \lambda(a + \epsilon\tilde{\gamma}) + \frac{\epsilon}{c}(1 + a\tilde{\gamma}) = 0. \quad (\text{E.1})$$

Murray, nos sugiere definir los siguientes parámetros los cuales se expresan en términos del polinomio característico (E.1),

$$\begin{aligned} \tilde{A} = 3\tilde{a} &= \left(c - \frac{\epsilon\tilde{\gamma}}{c}\right), & \tilde{B} = 3\tilde{b} &= -(a + \epsilon\tilde{\gamma}), \\ \tilde{\alpha} &= (\tilde{a})^2 - \tilde{b}, & \tilde{\beta} &= 2(\tilde{a})^3 - 3\tilde{a}\tilde{b} + C, & C &= \frac{\epsilon}{c}(1 + a\tilde{\gamma}), \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Por el teorema fundamental del algebra el polinomio (E.1), tiene exactamente tres raíces, las cuales dependiendo de los coeficientes son de un tipo o de otro. Se consideran los siguientes casos.

a) Para que las tres raíces sean reales, se debe cumplir que,

$$|\tilde{\beta}| \leq 2(\tilde{\alpha})^{1/2}, \quad (\text{E.3})$$

y éstas son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2(\tilde{\alpha})^{1/2}\text{sen}(\vartheta), & \lambda_2 &= -2(\tilde{\alpha})^{1/2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right), \\ \lambda_3 &= 2(\tilde{\alpha})^{1/2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right),\end{aligned}\tag{E.4}$$

donde,

$$\vartheta = \frac{1}{3}\text{sen}^{-1}\left(\frac{\tilde{\beta}}{2(\tilde{\alpha})^{1/2}}\right), \quad \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right],\tag{E.5}$$

para el análisis que realizamos en la sub-sección 3.2.1, se ha utilizado este caso.

- b) También las tres raíces son reales cuando se cumple la siguiente condición,

$$\tilde{\alpha} > 0, \quad \tilde{\beta} = 0,\tag{E.6}$$

y, en este caso

$$\lambda_1 = -\tilde{a}, \quad \lambda_2 = (3\tilde{\alpha})^{1/2} - \tilde{a}, \quad \lambda_3 = -(3\tilde{\alpha})^{1/2} - \tilde{a}.\tag{E.7}$$

- c) Ahora bien, si la condición

$$\tilde{\beta} > 2(\tilde{\alpha})^{3/2},\tag{E.8}$$

se satisface entonces el polinomio (E.1) tiene una raíz real y una compleja,

$$\lambda_1 = -2(\tilde{\alpha})^{1/2}\text{cos}(\psi - \tilde{a}), \quad \lambda_2 = -(\tilde{\alpha})^{1/2}\text{cos}(\psi) - \tilde{a} + i(3\tilde{\alpha})^{1/2}\text{sinh}(\psi),\tag{E.9}$$

donde ψ es,

$$\psi = \frac{1}{3}\text{cosh}^{-1}\left(\frac{|\tilde{\beta}|}{2(\tilde{\alpha})^{1/2}}\right),\tag{E.10}$$

la tercera raíz es $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$.

d) Por otro lado, si se cumple la siguiente condición,

$$\tilde{\beta} < -2(\tilde{\alpha})^{3/2}, \quad (\text{E.11})$$

el polinomio (E.1) tiene una raíz real y dos complejas. La forma explícita de éstas es

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\tilde{\alpha})^{1/2} \cosh(\psi) - \tilde{a} + i(3\tilde{\alpha})^{1/2} \sinh(\psi), \\ \lambda_2 &= -(\tilde{\alpha})^{1/2} \cosh(\psi) - \tilde{a} - i(3\tilde{\alpha})^{1/2} \sinh(\psi), \\ \lambda_3 &= 2(\tilde{\alpha})^{1/2} \cosh(\psi) - \tilde{a}. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Este caso se ha utilizado en la sub-sección 3.2.1.

e) Cuando se satisface la condición,

$$\tilde{\alpha} = 0, \quad -\infty < \tilde{\beta} < \infty, \quad (\text{E.13})$$

$P(\lambda)$, tiene una raíz real y dos complejas, que tienen la forma,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\tilde{\beta})^{1/3} - \tilde{a}, \quad \lambda_2 = \frac{(\tilde{\beta})^{1/3}}{2} - \tilde{a} + i\frac{3}{4}(\tilde{\beta})^{2/3}, \\ \lambda_3 &= \frac{(\tilde{\beta})^{1/3}}{2} - \tilde{a} - i\frac{3}{4}(\tilde{\beta})^{2/3}. \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

f) Por último, si se cumple la condición,

$$\tilde{\alpha} < 0, \quad -\infty < \tilde{\beta} < \infty, \quad (\text{E.15})$$

$P(\lambda)$ tiene dos raíces complejas y una real. Éstas tienen la forma,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2(-\tilde{\alpha})^{1/2} \sinh(\theta) - \tilde{a}, \quad \lambda_2 = (-\tilde{\alpha})^{1/2} \sinh(\theta) - \tilde{a} + i(-3\alpha)^{1/2} \cosh(\theta), \\ \lambda_3 &= (-\tilde{\alpha})^{1/2} \sinh(\theta) - \tilde{a} - i(-3\alpha)^{1/2} \cosh(\theta). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

donde el argumento, θ , está definido como,

$$\theta = \frac{1}{3} \sinh^{-1} \left(\frac{\tilde{\beta}}{2(-\tilde{\alpha})^{3/2}} \right). \quad (\text{E.17})$$

Con este caso terminamos el resumen del análisis de las raíces del polinomio característico (E.1).

Bibliografía

- [1] Abramowitz M. and Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc, New York. 1972.
- [2] Aidley D. J. *The Physiology of Excitable Cells*. Cambridge University Press. 1998.
- [3] Allesie A. Circus Movement in Rabbit Muscle as a Mechanism of Tachycardia. *Circulation Research*. **33**, July 1973.
- [4] Allissie A. Circus Movement in Rabbit Muscle as a Mechanism of Tachycardia. *Circulation Research*. II The Role of Nonuniform Recovery of Excitability in the Occurrence Of Unidirectional Block, as Studied with Multiple Microelectrodes. *Circulation Research*. **39**, July 1976.
- [5] Allissie A. Circus Movement in Rabbit Muscle as a Mechanism of Tachycardia. *Circulation Research*. III The “Leading Circle” Concept: A New Model of Circus Movement in Cardiac Tissue without the Involvement of an Anatomical Obstacle. *Circulation Research*. **41**, July 1977.
- [6] Alford J. G. and Giles A. Rotating wave solutions of the FitzHugh-Nagumo equations. *Journal of Mathematical Biology*. **53**. pp. 797-819, 2006.
- [7] Arnold V.I. *Ordinary Differential Equations*. The MIT Press. 1973.
- [8] Beuter A., Leon G., Michael M. and Michèle T. *Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Mathematical Biology. Springer Verlag. 2003.

- [9] Carrillo N. F. *Control de Oscilaciones en Sistemas No Lineales alrededor de Puntos de Equilibrio No hiperbólicos*. Tesis de Maestría en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, 2006.
- [10] Carpenter G. A. A Geometric Approach to Singular Perturbation Problems with Applications to Nerve Impulse Equations. *Journal of Differential Equations*. **23**, pp. 335-376, 1977.
- [11] Coddington E. A. and Norman L. *Theory of Ordinary Differential Equations*. International Series In Pure Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York. 1955.
- [12] Coleman P. M. *An Introduction To Partial Differential Equations With Matlab*. Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Chapman and Hall/CRC. Boca Raton, London, New York and Washington, D.C. 2004.
- [13] DiFrancesco D. and Denis N. A model of cardiac electrical activity incorporating ionic pumps and concentration changes. *Philosophical Transactions of The Royal Society*. London. **307**, pp. 353-398. 1985.
- [14] Durand E. H. *Existencia y Estabilidad de Pulsos Viajeros en la ecuación de FitzHugh-Nagumo*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM. 1988.
- [15] Evans J., Neil F. and John F. Double Impulse Solutions in Nerve Axon Equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. **42**, pp. 219-234, 1982.
- [16] Feroe J. Temporal Stability of Solitary Impulse Solutions Of A Nerve Equation. *Biophysical Journal*. **21**, pp.103-110, 1978.
- [17] Feroe J. Existence and Stability Of Multiple Impulse Solution Of A Nerve Equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. **42**, pp. 235-246, 1982.
- [18] FitzHugh R. Impulses and Physiology States in Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*. **1**, pp. 445-466, 1961.

- [19] Flores G. *Ondas viajeras en modelos físicos y biológicos*. XVI Escuela Venezolana de Matemáticas. IIMAS y FENOMECC. UNAM. 2003.
- [20] Greenberg J. M and Stuart H. Spatial patterns for discrete models of diffusion in excitable media, SIAM, Journal Application Mathematical. **34**, pp.515-523, 1987.
- [21] González H., Yoshinico N., Bud G. and Leon G. Reentrant waves in a ring of embryonic chick ventricular cells imaged with a Ca^{2+} sensitive dye. **71**. pp. 71-78, 2003.
- [22] González H., Yoshinico N., Bud G. and Leon G. Resetting and Anihilating Reentrant Waves in a Ring Tissue: Theory and Experiment. Progress of Theoretical Physics Supplement. **139**, 2000.
- [23] González M. G: Santiago Ramón y Cajal a cien años del premio Nobel. Revista Ciencias UNAM, **86**, octubre-diciembre de 2006.
- [24] Guckenheimer J. and Philip H. J. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag. 1983.
- [25] Guzmán V. A. *Modelos Matemáticos de Conducción Cardíaca, un enfoque comparativo*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2011.
- [26] Haderler K. P, U. an der Heiden and Schumacher K. Generation of the Nervous Impulse and Periodic Oscillations. Biological Cybernetics. **23**. pp. 211-218. 1976.
- [27] Hale K. J. and Hüseyin K. *Dynamics and Bifurcations*. Springer Verlag, 2000.
- [28] Hastings S. P. On the existence of the homoclinic and periodic orbits for the FitzHugh-Nagumo equations. Quarterly Journal Mathematical. **27**. pp. 123-134, 1976.
- [29] Hastings S. P. Single and Multiple Pulse Waves For The FitzHugh-Nagumo Equations. SIAM. Journal Application Mathematical. **42**. pp, 247-260, 1982.

- [30] Hirsch M. W., Stephen S. and Robert L.D. *Differential System Equations, Dynamical System, and An Introduction to Chaos*. Academic Press. 2003.
- [31] Jalife J. Ventricular Fibrillation: Mechanics of Initiation and Maintenance. *Annual Review Physiology*. **26**. pp.25-60, 2000.
- [32] Jones D. S. *Differential Equations and Mathematical Biology*. Mathematical Biology and Medicine Series, Chapman & Hall/CRC. 2003.
- [33] Jordan D. and Peter S. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. 1987.
- [34] Kane J. W. and Sternheim M. M. *Física*, Segunda Edición. Editorial Reverté. 1989.
- [35] Kandel R. E., Schwartz J. H. and Jesel M. T. *Principios de Neurociencia*. McGraw-Hill Interamericana. 2001.
- [36] Keener J. and James S. *Mathematical Physiology*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Mathematical Biology. Springer Verlag. 1998.
- [37] Kogan B. J. Introduction to Computation Cardiology. Mathematical Modeling and Computer Simulation. Springer Verlang. 2010.
- [38] Lawrence P. *Differential Equations And Dynamical System*, Text Applied Mathematics 7. Springer Verlag. 1991.
- [39] Luo C. and Yoram R. A model of the ventricular cardiac action potential. *Circulation Research*. **68**, pp.1501-1526. 1991.
- [40] Luo C. and Yoram R. A dinamical model of the cardiac ventricular action potential. Simulation of ionic currents and concentration changes. *Circulation Research*. **74**. pp. 1071-1094, 1994.
- [41] Mc Allister R. and Denis N. Reconstruction of the electrical activity of cardiac Pukinje fibers. *Journal of Physiology*. **25**. pp:1-59, 1975.
- [42] Moe G. K., Werner. R. C. and Abildskov J. A. A computer model of atrial fibrillation. *American Heart Journal*. **67**. pp.56-58, 1964.

- [43] Murray, J.D. *Mathematical Biology*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Volumen 19. Springer Verlag. 2004.
- [44] Nagumo J, Arimoto and Yoshizawa. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon. *Proceedings of Ire.* **50**. pp. 2061-2070, 1962.
- [45] Nicholls G. M. and Wallace B. *From Neuron To Brain*. Sinauer Associates. 1992.
- [46] Pérez V. J. *Algunas Ondas En Medios Excitables*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2001.
- [47] Pinchover Y. and Jacob R. *An Introduction Partial Differential Equations*. Cambridge, University Press. 2005
- [48] Regis A. and Moukarbel G.V. Ventricular Fibrillation and the Discovery Vulnerable Period. *American College Of Cardiology.* **29**, 1997.
- [49] Rinzel J. and Joseph K. Travelling wave solutions of a nerve equation. *Biophysical Journal.* **13**. pp. 1313-1337, 1973.
- [50] Sánchez G. F. Morfogénesis y emergencia de patrones en sistemas biológicos: del rompimiento de la simetría a la autoorganización y la excitabilidad. En: *Las ciencias de la complejidad y la innovación médica. Ensayos y modelos*. Ruelas E., Mancilla R. y Posada J. (coordinadores). pp.79-130, 2006.
- [51] Temple G. and Bickley D. *Rayleigh's Principle. And Its Applications To Engineering*. Dover Publications, Inc. 1956.
- [52] Troy C. W. Bifurcation Phenomena in FitzHugh's Nerve Conduction Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **54**. pp. 678-690, 1976.
- [53] Wiener N. and Rosenblueth R. The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in a cardiac muscle. *Archivos del Instituto Nacional de Cardiología México.* Número 3, pp. 205-265.
- [54] Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics 2. Springer-Verlag. 1990.

Páginas web

- [55] Fondo de Cultura Económica: La Ciencia para Todos. Página web: <http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/>.
- [56] Fundación Nobel. Página web oficial sobre premios Nobel, personas premiadas su obra y bibliografía. <http://nobelprize.org>.
- [57] Microsoft Encarta 2008, Premium. Copyright 1993-2007, Microsoft Corporation, <http://www.microsoft.com/latam/encarta>.
- [58] SIAM. Sociedad de Matematicas Aplicadas e Industriales. Página web oficial, <http://www.siam.org/news/news>.
- [59] Wikipedia, <http://en.wikipedia.org>.