



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA ÚNICO DE ESPECIALIZACIONES EN ECONOMÍA
FACULTAD DE ECONOMÍA

**FUNCIONES DE UTILIDAD DETERMINISTAS Y ESTOCÁSTICAS,
UNA APROXIMACIÓN TEÓRICA**

ENSAYO

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

ESPECIALISTA EN TEORÍA ECONÓMICA

PRESENTA:

JOSÉ EDUARDO REYES CASILLAS

TUTOR:

MTRO. MIGUEL CERVANTES JIMÉNEZ

MÉXICO, D.F. JUNIO DE 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Introducción.....	3
Capítulo I:.....	7
Funciones de utilidad deterministas.....	7
1.1 Preferencias y axiomas de la elección racional.....	8
1.2 Concepto de utilidad	9
1.3 Funciones de utilidad	10
1.3.1 CES (<i>constant elasticity of substitution</i>).....	12
1.3.2 Cobb-Douglas.....	13
1.3.3 Stone-Geary	15
1.3.4 Cuasilineales	16
1.3.5 Sustitutos perfectos.....	17
1.3.6 Complementos perfectos.....	18
1.3.7 Un bien y un mal	19
1.3.8 Un bien y un neutral	20
Conclusiones Capitulo I.....	21
Capítulo II:	22
Funciones de utilidad estocástica.....	22
2.1 Funciones de utilidad y la probabilidad.....	23
2.2 Concepto de utilidad esperada	24
2.2.1 Adverso, Amante y neutral al riesgo	24
2.3 Funciones de Utilidad.....	26
2.3.1 Von Neumann-Morgenstern.....	26
2.3.2 Bernoulli	28
2.3.3 Kahneman-Tversky	29
2.4 Concepto de la utilidad aleatoria.....	30
2.4.1 Modelo de utilidad aleatoria (RUM)	31
Conclusiones Capitulo 2	32
Conclusiones y Recomendaciones	35
Referencias	37

Introducción

"Una sociedad que priorice la igualdad sobre la libertad no obtendrá ninguna de las dos cosas. Una sociedad que priorice la libertad por sobre la igualdad obtendrá un alto grado de ambas."

Milton Friedman

Economista Norteamericano

Introducción

La economía, como la describió Lionel Robbins (1923), es la ciencia que estudia la conducta humana como una relación entre fines y medios limitados que tienen diversa aplicación; por tal razón la labor del economista es, y seguirá siendo establecer los fundamentos para analizar la elección de los agentes respecto al conjunto de decisiones a las que se enfrentan. Las ciencias económicas utilizan el lenguaje matemático, tal vez por la precisión que el lenguaje económico ha desarrollado o por la necesidad de obtener resultados teóricos más precisos y formales. Por tal motivo Descartes dijo que las matemáticas son un lenguaje natural de la economía ya que sus principales categorías, precios y cantidades; son cuantificables. Este lenguaje simplifica, ordena y demuestra; además es fuente de intuición y de teoría.

La teoría del consumidor es la parte del modelo microeconómico que estudia al agente económico y su comportamiento. En esta teoría existen temas imprescindibles como los son la restricción presupuestaria, las preferencias, la utilidad y la elección. En la segunda mitad del Siglo XIX se refería a la utilidad como un indicador de bienestar, incluso se ocupaba como una medida numérica de la felicidad de los individuos pues se creía que todas las decisiones de los individuos buscaban aumentar su felicidad.

Dada la subjetividad del concepto inmediatamente surgieron problemas para cuantificar y comparar utilidades, es por eso que se abandono esa definición y se adopto una más a modo la cual veía la utilidad como una forma de describir las preferencias. De este modo se dio importancia únicamente a la comparación entre preferencias de elección, mas no en el grado en que es mayor una a la otra. Las preferencias del consumidor son la descripción fundamental para analizar la elección, y la utilidad no es más que una forma de describirlas.

La idea de utilidad fue, es y será uno de los principales conceptos sobre los que se basa el análisis microeconómico, pues se supone que todos los procesos económicos pasan necesariamente por una toma de decisión.

Es por este entre otros motivos que resulta preponderante analizar detenidamente que instrumentos se tiene como economista para estudiar la utilidad.

Desde la época del pensamiento clásico de Adam Smith (1776), se creía que la economía debía ser privada dejando que los intereses de los consumidores y productores los llevaran a tomar decisiones buscando su propio beneficio; y no de modo estatista donde existe un régimen totalitario. Esta idea del bienestar económico como la suma de los deseos individuales de mejorar la condición propia es el primer indicio de la necesidad y la importancia de entender la toma de decisiones del individuo económico, en particular el consumidor.

Por su parte Jeremy Bentham (1748) y Jhon Stuart Mill (1806), introdujeron el “principio de mayor felicidad” estableciendo que la felicidad es el único fin del hombre siendo todo lo demás deseable solo en la medida que nos acerque a la felicidad.

Los desarrollos teóricos de Alfred Marshall (1890) y León Walras (1834) se enfocaron en conceptos de valoración de los bienes por parte del consumidor lo que ayudo a formalizar los conceptos de utilidad y utilidad marginal. Estos desarrollos entre otros, desembocaron en los axiomas de la elección racional, la teoría de la utilidad y las funciones de utilidad deterministas.

Más adelante los economistas y otros estudiosos percibieron que si bien la teoría de la utilidad y las funciones deterministas eran un modelo eficaz para describir y predecir la conducta de los consumidores, existían muchas otras decisiones las cuales no alcanzaban a ser explicadas con las herramientas que existían. Por este motivo economistas como John Von Neumann (1944) y Daniel Kahneman (1979) incorporaron técnicas de la estadística, la psicología y el marketing para complementar la modelación de las elecciones del consumidor. Es así como surgen las funciones de utilidad estocásticas, un instrumento más fino que sus predecesores para la modelación.

En este contexto, el objetivo general de este ensayo es evaluar las ventajas y desventajas de emplear funciones de utilidad determinista y estocástica, para comprender la importancia de cada una en el análisis microeconómico.

El ensayo se estructura en dos capítulos. En el primero, se aborda la teoría de la utilidad definiendo conceptos básicos y alcances prácticos, se presentan las funciones de utilidad deterministas más comunes que existen dentro de la literatura microeconómica. En el segundo, se exponen funciones de utilidad que tienen como característica la incorporación de elementos estocásticos, al igual que en primer capítulo se describen de forma detallada y se pone en evidencia su valor en la práctica. Al final del texto se concluye y se recomienda.

Esta investigación responde las siguientes preguntas:

¿Qué es y para qué sirve una función de utilidad?

¿Cuándo es preferible utilizar una función de utilidad determinista?

¿Cuándo es preferible utilizar una función de utilidad estocástica?

Esta investigación es conveniente según Ackoff (1953) y Miller (1977), por dos motivos: *i*) tiene *Valor teórico* porque apoya la necesidad de utilizar las funciones de utilidad como una herramienta que ayuda a los economistas a estudiar las elecciones de los individuos. Además ofrece la posibilidad de explorar más allá de los ejemplos específicos de funciones de utilidad más comunes; *ii) Implicaciones prácticas* por que la evaluación de las distintas funciones de utilidad ayudara a minimizar errores cuando se estimen las elecciones del consumidor, así mismo creara un panorama más amplio para los estudiantes que utilicen esta herramienta en el análisis microeconómico. Por otro lado puede ser un estudio que sirva como primer acercamiento para la realización de estudios más complejos de la teoría del consumidor.

Capítulo I:

Funciones de utilidad deterministas

"No puede existir un lenguaje más universal y simple, más carente de errores y oscuridades, y por lo tanto más apto para expresar las relaciones invariables de las cosas naturales [...] Las matemáticas parecen constituir una facultad de la mente humana destinada a compensar la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos."

Jean-Baptiste Joseph Fourier.

Matemático y físico francés.

1.1 Preferencias y axiomas de la elección racional

Antes de analizar la elección de los individuos se debe crear una base de postulados o axiomas que sirvan para entender el comportamiento racional visto desde la perspectiva económica. Dentro de la literatura económica se encuentran cuatro axiomas básicos, los cuales son:

Completas. Si A y B representan dos situaciones cualesquiera, un individuo puede en cualquier momento elegir una de las siguientes tres posibilidades:

- i. “A es preferido a B”
- ii. “B es preferido a A”
- iii. “A y B son igualmente atractivos”

Por lo tanto no existe la indecisión, esto quiere decir que los individuos tienen perfectamente claro la deseabilidad de cualquier alternativa.

Reflexivas: Se supone que cualquier situación cualquiera es al menos tan buena como ella misma “A es igual o más preferida que A” y “B es igual o más preferida que B”. Este axioma es trivial, una cesta cualquiera es tan buena como una cesta idéntica, el individuo identifica cada cesta de sí misma.

Transitividad. Si un individuo reporta que “A es preferido que B” y “B es preferido que C”, entonces el debe reportar que “A es preferido a C”. Este axioma supone que las decisiones de los individuos son consistentes. Este axioma es una hipótesis sobre la conducta de los individuos en sus elecciones y no una afirmación puramente lógica.

Continuidad. Si un individuo reporta “A es preferido que B” entonces las situaciones “muy cercanas a A también son preferidas a B”. Este postulado ayuda a analizar la elección individual ante pequeños cambios en ingreso o en precios (Nicholson, 2011).

1.2 Concepto de utilidad

Una vez comprendidas las bases de un agente económico racional se analizarán los conceptos básicos para la construcción de una teoría de la utilidad. De acuerdo con Jeremy Bentham:

“La utilidad es una clasificación que formulan los individuos con todas las posibles situaciones desde las más deseables a las menos deseables. Por consiguiente las situaciones más deseables ofrecen mayor utilidad que las menos deseables”.

Pareciera que los economistas entienden la utilidad únicamente como resultado del consumo dejando de lado un sinnúmero de factores que afectan la satisfacción de los individuos, sin embargo es necesario centrar el análisis de la elección a cuestiones cuantificables. El supuesto *ceteris paribus* es usado ampliamente en el análisis económico pues simplifica el entorno a estudiar pues propone que todos los demás factores que no se están incluyendo en el modelo permanecen sin variaciones.

Es importante recalcar que la utilidad es una medida de orden, el concepto de utilidad es únicamente una transformación monótona, que mantiene el orden. Cualquier conjunto de números que refleje un orden en las preferencias de un individuo puede ser utilizado.

Siguiendo con la notación de las preferencias, si un individuo prefiere la situación A a la situación B, se dice que le asigna mayor utilidad a la opción A contrastada con la opción B, en símbolos sería: $U(A) > U(B)$. Generalmente la opción A, B, C etc. se refieren a cestas de bienes que pueden contener desde uno a n bienes, por lo tanto al efectuar una decisión el individuo está eligiendo el consumo de determinados bienes.

1.3 Funciones de utilidad

Una función de utilidad es un instrumento para asignar un número a todas las cestas de consumo posibles de tal forma que las preferidas tengan un número más alto a las que no se prefieren. Es decir, la cesta (x_1, x_2) se prefiere a la cesta (y_1, y_2) si y solo si la utilidad de la primera es mayor que la utilidad de la segunda (Varian, 2010).

El tipo de utilidad ordinal es aquel que tiene como única propiedad importante la forma en la cual se ordenan las cestas de bienes, dicho de otra manera, la magnitud solo es importante en la medida en que nos permite determinar el orden relativo que ocupan las diferentes cestas de consumo. La dimensión de la diferencia de utilidad entre dos cestas de consumo es irrelevante.

Se supone que las preferencias de los individuos están representadas por una función de utilidad de la forma:

$$utilidad = U(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$$

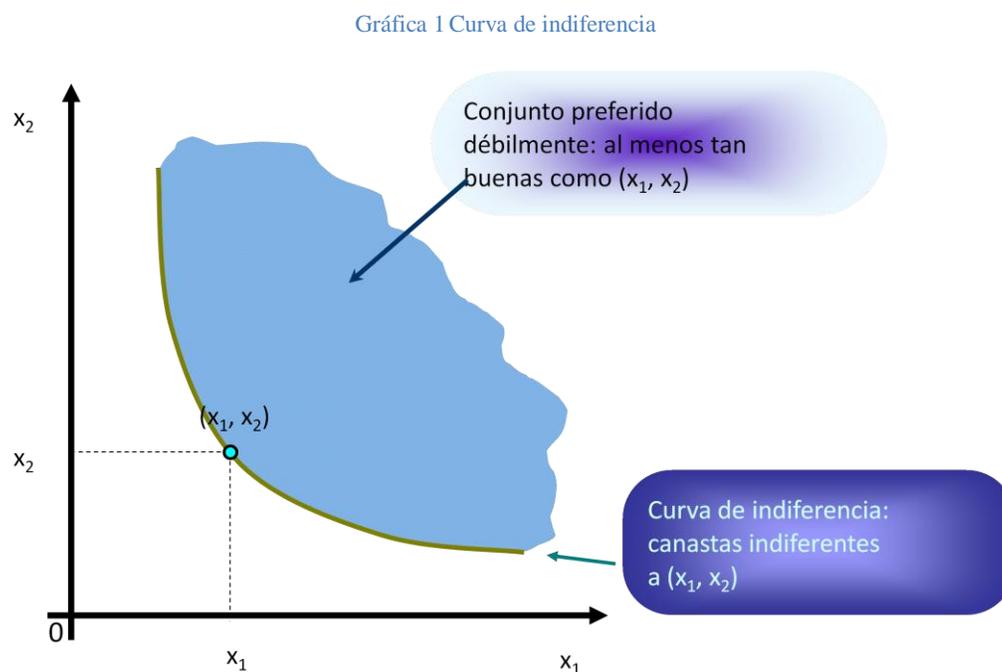
Donde x_1, x_2, x_3, x_n son las cantidades de cada uno de los n bienes que se pueden consumir en un periodo. Esta función es única sólo en cuanto constituye una transformación que refleja un orden (Nicholson, 2011).

Dado que solo importa el orden de las cestas de bienes puede existir varias maneras de representar la utilidad de un individuo a través de una función de utilidad, una función de utilidad se modificada siempre y cuando sufra una transformación en la que la serie de números resultante sea hecha de tal manera que se mantenga el orden de estos.

Como se menciona anteriormente la teoría de la elección del consumidor puede formularse en función de los cuatro axiomas que describimos con anterioridad, pero resulta didáctico y útil describirlas gráficamente a través de curvas de indiferencia, este método sirve en especial para representar preferencias entre cestas que contienen dos bienes.

Las curvas de indiferencia o curvas de preferencia es el conjunto de combinaciones de bienes para los que la satisfacción del consumidor es la misma, el consumidor es indiferente a todas las combinaciones de bienes que estén sobre esta curva. Las formas de las curvas de indiferencia pueden implicar distintos grados de disposición a sustituir un bien por otro.

Los economistas se enfrentan a dos posibles situaciones la primera es dada la función de utilidad tratar de describirla gráficamente, y la segunda es dada la curva de indiferencia encontrar su función de utilidad. La primera situación se soluciona de la siguiente manera:



Fuente: Cervantes (2013)

El segundo caso es un poco más complicado pues existen dos caminos: Uno es formal y matemático pues se trata de encontrar una función que sea constante a lo largo de la curva y asigne valores más altos a las cestas más preferidas. Otro es a partir de la descripción de las preferencias averiguar que combinación de bienes describe su conducta.

1.3.1 CES (*constant elasticity of substitution*)

Antes de explorar algunas formas específicas que las funciones de utilidad pueden adoptar se identificara una función general que puede englobarlas, la función de la cual se desprenden todas las funciones de utilidad de elasticidad de sustitución constante se llama CES. La función CES adopta la forma general:

$$u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$$

Donde $-\infty < \rho < 1$ y $\rho \neq 0$ el cual indica la importancia relativa de los bienes para un consumidor, lo importante de el parámetro ρ es que da información acerca de el grado de sustitución que tienen los bienes de la cesta. Para comprender un poco mejor se describirá la elasticidad de sustitución como σ y la mediremos de la siguiente manera:

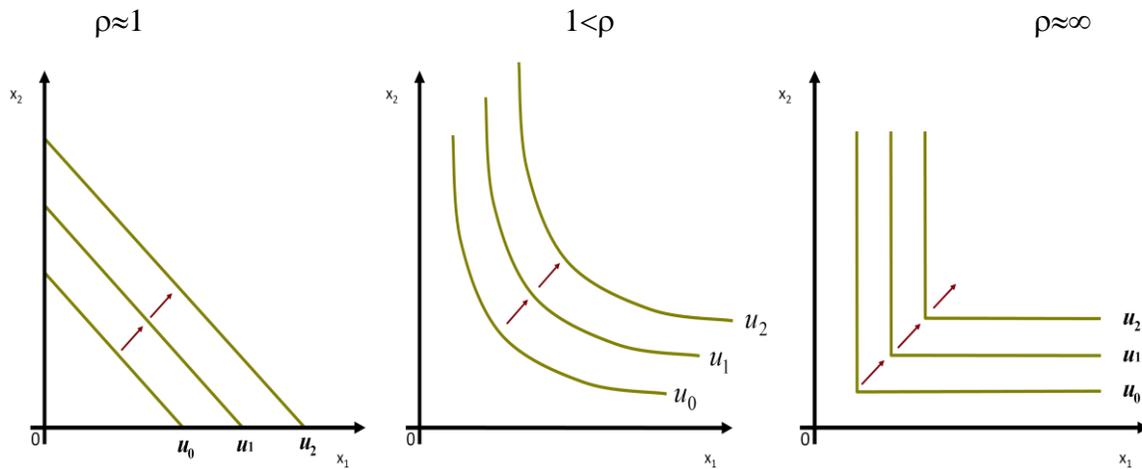
$$\sigma = 1/(1 - \rho)$$

Claramente cuando ρ tiende a ∞ la elasticidad de sustitución se acerca a cero, esto describe un tipo de bienes los cuales son diferenciables y deben ser consumidos en cierta proporción para generar utilidad al individuo. Por otro lado cuando ρ se acerca a 1 la elasticidad de sustitución se acerca a ∞ por lo tanto se está en la presencia de un modelo de bienes los cuales no importa tanto la proporción en la que se consumen sino la suma total de estos (Nechyba, 2009).

Al colocar un valor para el parámetro ρ entre 1 e ∞ , se pondera el grado en que se pueden sustituir los bienes consumidos sin alterar la utilidad versus la necesidad de consumirlos en cierta proporción para que la utilidad aumente. Puesto que la función CES permite analizar un sinnúmero de casos resulta bastante útil para reflejar la posibilidad de sustituir entre los variables en diversas relaciones económicas.

Dado que la función de utilidad CES es una forma general que engloba muchos casos posibles es imposible describirlas en una sola grafica, sin embargo es posible darse una idea general de las distintas curvas de indiferencia que se pueden lograr con esta función y como el parámetro ρ las transforma.

Gráfica 2 Funciones de utilidad CES.



Fuente: Elaboración propia

1.3.2 Cobb-Douglas

La función de utilidad Cobb-Douglas modela el consumo de una agente sobre bienes que son sustitutos imperfectos de manera que el consumidor prefiere consumir combinaciones de los bienes en lugar de consumir solo uno de ellos. La función de utilidad Cobb-Douglas tiene la forma:

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha * x_2^\beta$$

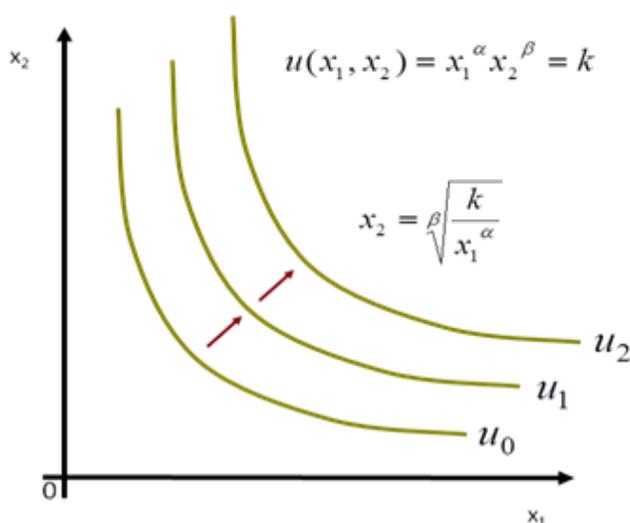
Donde α y β son constantes positivas, por lo general el tamaño de α y β indica la importancia relativa de dos bienes para este individuo. Otra forma de verlo es haciendo una transformación monótona tomando el logaritmo natural de la utilidad y el producto se transformara en una suma de la forma:

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha * x_2^\beta = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$$

Se aprecia que la utilidad está en función de la suma ponderada de los dos bienes, que α y β indican la deseabilidad de los bienes y que cualquier transformación es viable mientras no altere el orden de las cestas de la más deseada a la menos (Nicholson, 2011) (Hey, 2004).

Las curvas de diferencia construidas a partir de esta función son las más comunes dentro de los cursos de microeconomía por dos razones: la formula que las describe es una de las expresiones algebraicas más sencillas de todas las que generan preferencias de este tipo y son estrictamente convexas al origen lo que facilita los ejercicios de optimización. La grafica de curva de indiferencia Cobb-Douglas es:

Grafica 3 Funciones de utilidad Cobb-Douglas.



Fuente: Cervantes (2013)

1.3.3 Stone-Geary

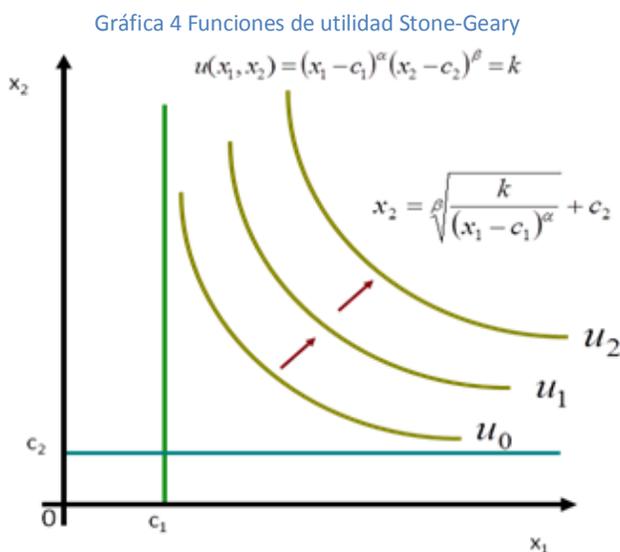
Una variante de la función de utilidad Cobb-Douglas es la función de utilidad Stone-Geary.

La función de utilidad Stone-Geary es de la forma:

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - c_1)^\alpha * (x_2 - c_2)^\beta$$

Donde α y β son parámetros positivos, c_1 y c_2 son positivos pero menores a x_1 y x_2 . La lógica de esta función se da la suponer que los valores de c son requerimientos de subsistencia de los bienes y que estos valores mínimos se conocen aun antes de saber la estructura de preferencias del consumidor (Chakravarty, 2005).

Al construir una grafica a partir de esta función se obtiene:



. Fuente: Cervantes (2013).

1.3.4 Cuasilineales

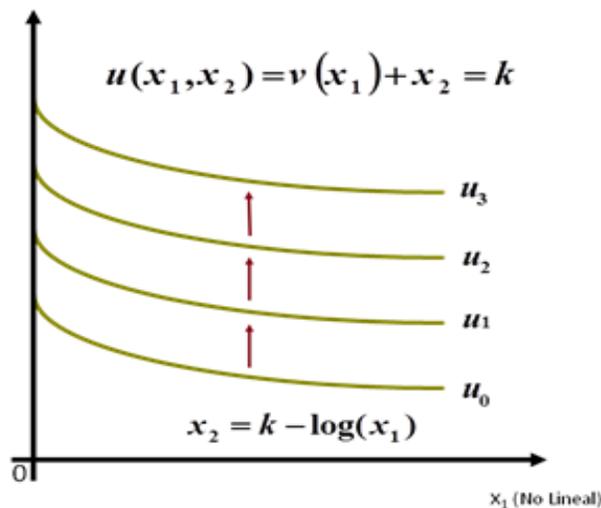
La función de utilidad que representa el caso de preferencias cuasilineales es:

$$u(x_1, x_2) = u(x_1) + x_2$$

Es importante señalar que el término $u(x_1)$ debe tener forma no lineal por lo tanto la utilidad debe ser producto de una transformación del consumo de x_1 como podría ser $\log x_1$ o bien $(x_1)^{1/2}$. Dada esta condición y siendo una función lineal en x_2 se cumplen las condiciones suficientes para calcular la utilidad generada por la cesta (Varian, 2010) (Hey, 2004).

Dado que la función de utilidad es lineal en x_2 pero no lo es en x_1 , las curvas de indiferencia que se desprenden de esta función son parcialmente lineales además todas las curvas de indiferencia son simplemente traslaciones de verticales de la curva de indiferencia. Al construir una grafica a partir de esta función de utilidad se obtiene:

Gráfica 5 Funciones de utilidad Cuasilineales.



Fuente: Cervantes (2013).

1.3.5 Sustitutos perfectos

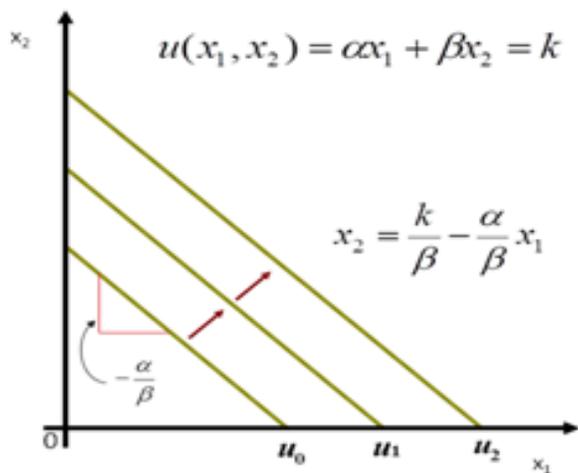
Los bienes sustitutos perfectos son aquellos que pueden ser utilizados de la misma forma y con el mismo resultado por lo tanto el consumidor no tiene ningún incentivo para preferir un bien sobre el otro. Una función de utilidad que representa las preferencias de sustitutos perfectos es de la forma:

$$u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$$

En donde α y β son valores positivos que miden el valor que el individuo les asigna a los bienes 1 y 2, si α es el doble que β significa que el individuo aprecia al bien 1 como el doble de valioso que el bien 2. Si se construyera una curva de indiferencia a partir de esta función se tendría que fijar la utilidad en un valor por lo tanto se reescribiría $\alpha x_1 + \beta x_2 = k$, pendiente de la curva de indiferencia representativa vendría dada por $-\alpha/\beta$ (Varian, 2010).

Dado que en este tipo de función lo importante es la cantidad total de bienes y no su proporción relativa, un individuo está dispuesto a renunciar al bien x_1 por consumir más x_2 independientemente de cuanto este consumiendo de los dos bienes. Las curvas de indiferencia que describe la disyuntiva entre el consumo de los dos bienes son líneas rectas. La grafica representativa de este tipo de función de utilidad donde la sustitución es perfecta sería:

Gráfica 6 Funciones de utilidad Sustitutos Perfectos



Fuente: Cervantes (2013).

1.3.6 Complementos perfectos

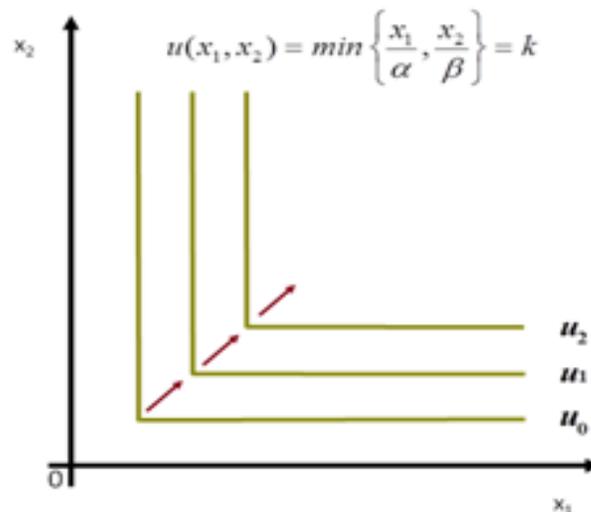
Los bienes complementos perfectos son aquellos que se consumen juntos, es decir que siempre se van a utilizar con una relación proporcional fija. Por lo tanto el consumidor elige una canasta de bienes en donde los bienes se complementen de forma perfecta aunque la proporción no sea unitaria. La relación de complementos perfectos es de la forma:

$$u(x_1, x_2) = \min \left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta} \right)$$

Donde α y β son parámetros positivos y \min que significa que la utilidad está en función de los dos términos entre paréntesis. En términos generales no habrá un exceso de ninguno de los dos bienes si $\alpha x_1 = \beta x_2$ (Nicholson, 2011) (Hey, 2004).

Al construir una curva de indiferencia con esta función se obtienen graficas en forma de L cuyo vértice se encuentra en el punto en el que los bienes son consumidos en la proporción adecuada. Al graficar esta función de utilidad donde existen complementos perfectos se obtiene lo siguiente:

Gráfica 7 Funciones de utilidad Complementos Perfectos



Fuente: Cervantes (2013).

1.3.7 Un bien y un mal

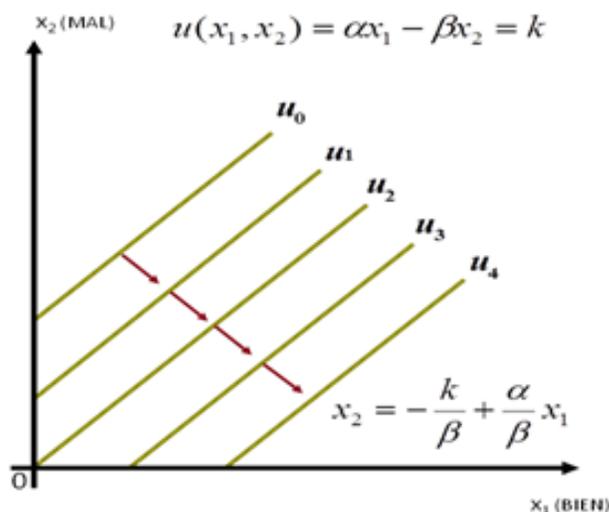
Los economistas consideran un mal como una mercancía la cual no le gusta al individuo pero aun así no tiene más remedio que consumirla, por lo tanto la utilidad que representan estas funciones representan la utilidad que obtiene al consumir un bien que reporta utilidad y otro que no. Lo importante de estas funciones es la posibilidad de representar las compensaciones que deben existir para que el individuo acepte soportar los males con tal de consumir los bienes. La función de utilidad que relaciona un bien con un mal es de la forma:

$$u(x_1, x_2) = \alpha x_1 - \beta x_2$$

Donde α y β son parámetros positivos y a x_2 se le considera un mal por lo tanto su “desutilidad” se le descuenta a la utilidad generada por el bien x_1 (Varian, 2010).

Las curvas de indiferencia construidas a partir de esta función de utilidad son líneas rectas de pendiente positiva que cortan el eje de x_1 donde se encuentra la utilidad del bien sin consumir nada del mal, exponen gráficamente la disposición que se tiene de consumir un mal únicamente si la cantidad consumida del bien es mayor. La grafica representativa de esta función de utilidad seria:

Gráfica 8 Funciones de utilidad Bien y Mal.



Fuente: Cervantes (2013).

1.3.8 Un bien y un neutral

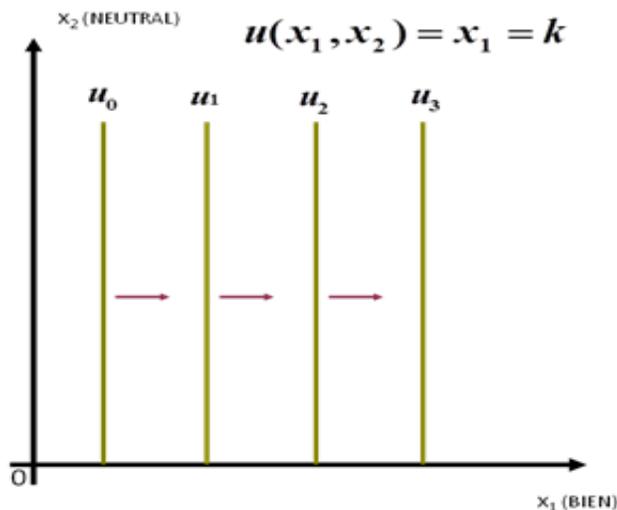
Un bien neutral es aquel que al individuo es indiferente entre consumir o no el bien, es decir no le genera utilidad pero tampoco necesita ser compensado por consumirlo como ocurre con los males. La función de utilidad que expresa matemáticamente la relación entre estos dos bienes es:

$$u(x_1, x_2) = \alpha x_1$$

Donde α es un parámetro positivo, x_1 es el bien y x_2 es el bien neutral, consecuentemente x_2 no reporta utilidad alguna. Construyendo la curva de utilidad de esa función se obtienen curvas rectas verticales las cuales representan la utilidad generada por x_1 si importar la cantidad consumida de x_2 (Varian, 2010).

Al graficar una función como esta se obtiene lo siguiente:

Ilustración 9 Funciones de utilidad Bien y Neutral.



Fuente: Cervantes (2013).

Conclusiones Capítulo I

Una función de utilidad es básicamente una herramienta para representar una ordenación de las preferencias del individuo, por lo tanto carecen de significado las magnitudes numéricas de los niveles de utilidad.

Los modelos determinísticos son aquellos donde se supone que todos los datos oportunos se conocen con certeza, es decir en ellos se supone que cuando se toma la decisión se encuentra disponible toda la información necesaria para tomarla. Estos modelos sirven para situaciones complejas con muchas posibles decisiones y muchas restricciones.

La utilidad de los modelos determinísticos es máxima si unas cuantas entradas no controladas presentan incertidumbre, por lo tanto si aumentan las decisiones bajo incertidumbre bajara su ventaja. Por este motivo son utilizadas frecuentemente dentro de organizaciones donde se supone información más completa por ejemplo la interior de una empresa o en el gobierno.

Dentro del ámbito académico los modelos determinísticos son importantes por:

- Es un recurso útil para reflexionar acerca de situaciones económicas concretas incluso si es básico y no se piensa optimizarlo
- La practica con modelos determinísticos ayuda a desarrollar habilidades para la formulación de modelos generales.
- Sus técnicas de análisis dotan de gran cantidad de información útil para la interpretación de los resultados por parte de los tomadores de decisión.
- Una gran variedad de problemas básicos de economía pueden formularse con modelos determinísticos.
- Las herramientas matemáticas y tecnológicas para optimizar los modelos determinísticos de maneara fiable y rápida están al alcance de los alumnos de educación superior.

Capítulo II:

Funciones de utilidad estocástica

“La economía no puede efectuar los experimentos controlados de los químicos y de los biólogos porque no está en condiciones de controlar todos los otros factores. Como los astrónomos o los meteorólogos, los economistas deben limitarse en gran medida a observar pasivamente.”

Paul Samuelson

Economista y Premio Nobel

2.1 Funciones de utilidad y la probabilidad.

En el capítulo anterior se analizó la practicidad de utilizar las funciones de utilidad para describir las preferencias de consumo de los individuos, sin embargo todas las funciones hasta ahora señaladas consideran las elecciones bajo total certidumbre. En la realidad muchas decisiones económicas involucran cierto riesgo, de ahí la necesidad de desarrollar teoría más especializada acerca de la utilidad.

La forma en que un individuo valore el consumo de cierta canasta de bienes en comparación con otra dependerá de la probabilidad de que ocurra realmente. Las preferencias en cuanto al consumo en diferentes estados de la naturaleza dependen de las opiniones del individuo sobre lo probable que sean esos estados.

Por lo tanto, es conveniente expresar la función de utilidad de modo que dependa de la probabilidad y del consumo del individuo. Suponiendo c_1, c_2 como el posible consumo en estados mutuamente excluyentes y π_1, π_2 las probabilidades de que ocurran. Podremos expresar la función de utilidad de consumo como:

$$\text{utilidad: } U(\pi c_1, \pi c_2)$$

Si en alguno de los estados existe certidumbre, esto quiere decir que $\pi = 1$, la utilidad que se desprende de este estado será el total como lo es en el caso de una función de utilidad determinista.

Dos cantidades idénticas del mismo bien no son equivalentes bajo la ocurrencia de distintos sucesos o estados de la naturaleza. Por ejemplo, beber agua en un día caluroso no es lo mismo que beber agua cuando la temperatura es baja. Por lo tanto, la caracterización completa de un bien debe precisar los estados en que este está disponible bajo este contexto los bienes son contingentes a la realización de ciertos sucesos. El individuo elige un espacio de acciones o loterías, donde cada una de ellas especifica cuanto consumirá en cada estado de la naturaleza.

2.2 Concepto de utilidad esperada

El consumidor se enfrenta a un número finito de alternativas de riesgo, cada uno de estos resulta en un posible consumo, pero dicho consumo está ligado a una probabilidad de ocurrencia en determinado tiempo. Como ya se describió los posibles consumos se denotan como c los cuales pueden ser bienes o pagos monetarios.

Existen razones para avalar a la utilidad esperada como una función objetivo razonable en los problemas de elección en condiciones de incertidumbre, una de ellas es el hecho de que a la larga solo se producirá un resultado de todos los posibles, por lo tanto solo se realizará uno de los planes de consumo contingente.

Por ejemplo al contratar un seguro de auto se tienen en cuenta tres situaciones: la riqueza si no se asegura, la riqueza si se asegura y se choca el auto y por ultimo nuestra riqueza si se asegura y se choca. Por otro lado se consideran las probabilidades de chocar y de no chocar. Es condición necesaria que exista independencia entre las posibles situaciones de la función de utilidad esperada (Varian, 2010).

2.2.1 Adverso, Amante y neutral al riesgo

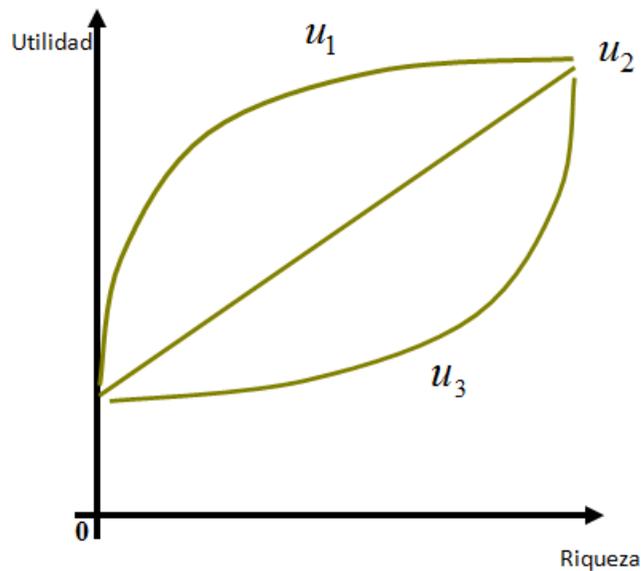
La función de utilidad esperada tiene propiedades muy convenientes para analizar la elección bajo incertidumbre, pues basa la elección en el valor esperado de los pagos. Por otro lado existen situaciones en donde el valor esperado de dos situaciones bajo incertidumbre es el mismo y aun así existe la sensación de que una es más arriesgada que otra.

Entendiendo riesgo como la variabilidad de resultados de determinada actividad incierta, es posible asegurar que cuando los individuos se enfrentan a una elección entre dos juegos de valor esperado igual, la mayoría de las veces elegirán la opción cuya variabilidad sea menor. Además en la mayoría de los casos los individuos rechazan juegos justos donde la probabilidad de perder es la misma que de ganar.

En resumen, una persona preferirá su riqueza actual a su riqueza participando en un juego justo y preferirá un juego con apuestas pequeñas a un juego con apuestas elevadas. Esto debido a que ganar una apuesta da menos utilidad que el daño que genera perderla. No obstante su valor esperado es el mismo, su utilidad disminuye más si tiene pérdida.

En caso de un adverso al riesgo, él preferirá tener el valor esperado de su riqueza más que entrar al juego, por otro lado el amante del riesgo es el consumidor el cual prefiere una inesperada distribución de su riqueza que el valor esperado de la misma. Un amante del riesgo tendrá una función de utilidad convexa u_1 , un adverso al riesgo la tendrá cóncava u_3 y por último una función lineal representara una función de utilidad de un neutral al riesgo u_2 .

Gráfico 10 Funciones de utilidad correspondientes a distintas actitudes ante el riesgo



Fuente: Elaboración propia.

2.3 Funciones de Utilidad

2.3.1 Von Neumann-Morgenstern (VNM)

También llamada simplemente función de utilidad esperada, es una función que sirve en casos en los cuales las preferencias del consumidor pueden ser representadas por cualquier función de utilidad o bien las preferencias de consumo tienen la propiedad de funciones de utilidad esperada. La ecuación de una función de utilidad VNM es:

$$u(c_i, \pi_i) = \sum_{i=1}^n \pi_i u(c_i)$$

Donde $u(c)$ son las utilidades que se desprenden del posible consumo y π son las probabilidades de que ocurran. Es importante señalar que, mientras ordenen de igual manera las preferencias, se puede alterar la forma de la función.

La función de utilidad VNM tiene la propiedad de la utilidad esperada: el agente es indiferente entre recibir una determinada riqueza o jugar un juego con valor esperado idéntico (Von Neumann, 1944).

Estas funciones desempeñan un papel crucial no sólo en la teoría de la utilidad, también permiten hacer cálculos de la utilidad esperada gracias al procedimiento de definir las opciones intermedias en términos de loterías entre la mejor y peor opción. De este modo es posible comparar diversas loterías, en el que cada acción equivale a una lotería en la que se combinan probabilidades o pagos (Sánchez-Cuenca, 2009).

De la misma manera que la función CES es la forma general de las funciones deterministas, la VNM es la madre de las ecuaciones estocásticas, una función frecuentemente utilizada de este tipo es la que considera a la utilidad en función del consumo y de la tenencia de saldos reales. Esta función de utilidad tiene la forma siguiente:

$$u(c_t, m_t) = E_0 \left\{ \int_0^{\infty} [u(c_t) + v(m_t)] e^{-\delta t} dt \right\}$$

Donde $u(c_t)$ es el índice de satisfacción por el consumo, $v(m_t)$ es la utilidad por mantener saldos reales, δ es la tasas subjetiva de descuento o tasas subjetiva intertemporal y E_0 es la esperanza condicional al conjunto de información disponible en el tiempo $t=0$.

Tanto la función de utilidad del consumo como del saldo real puede ser de distintas formas, las cuales serán determinadas por la conducta del individuo frente al riesgo: adverso, amante o neutral (Venegas, 2008).

2.3.2 Bernoulli

Esta función asigna utilidades cardinales a los resultados, es decir se requiere que el consumidor no solo identifique que cesta de bienes prefiere, sino también cuanto más la prefiere. Bernoulli propuso que la utilidad que aportaban los premios era proporcional al logaritmo del valor, si se acepta este postulado la utilidad esperada por el tomador de decisiones sería:

$$u(c_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\log(c_i + 2^{(i-1)})}{2^i}$$

Es decir, la utilidad de un determinado premio se reduce drásticamente cuando las probabilidades de obtenerlo son pequeñas. La propuesta de Bernoulli, el logaritmo del valor queda determinado por una transformación lineal y por la base del logaritmo.

Se entiende que el resultante de esta función es una suma convergente, esto permite asegurar que con los primeros términos se alcanza prácticamente el límite lo que concuerda con la idea de que los consumidores parecen percibir solo las utilidades que les generan las primeras posibilidades ya que la baja probabilidad de las últimas las considera como imposibles.

Según el criterio de utilidad esperada propuesto por Bernoulli en las 6 o 7 primeras combinaciones aportan casi el total de la utilidad esperada, ya que las siguientes prácticamente no aportan utilidad.

La propuesta de Bernoulli ha permitido exponer una conclusión: los consumidores no deciden en función del valor atribuido a las consecuencias de distintas alternativas, sino que lo hacen en función de la utilidad que dichas decisiones les proporcionan en el entorno de la decisión que van a tomar (Cabañete, 2004).

2.3.3 Kahneman-Tversky

Los psicólogos Daniel Kahneman y Amos Traversky desarrollaron la teoría de las perspectivas, la cual permite describir como las personas toman sus decisiones en situaciones donde tienen que decidir entre alternativas que involucran riesgos. Partiendo de evidencias empíricas muestran como los individuos evalúan potenciales pérdidas y ganancias.

Esta teoría alternativa se centra en el valor que le es asignado a las ganancias o pérdidas más que en el resultado final y en las probabilidades de los estados. La función básica de la teoría de perspectivas es:

$$u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2, w_1, w_2) = w_1 \pi_1 u(c_2) + w_2 \pi_2 [u(c_1) - (u c_2)]$$

Donde se incorpora w que es una función de ponderación de la probabilidad que expresa las sobre-reacciones de los individuos a los acontecimientos de pequeña probabilidad y no tener reacción a eventos de probabilidad cercana a 1 (Kahneman, 1979).

Esta función de utilidad se ha aplicado en muchas ramas de la economía donde el comportamiento del individuo parece irracional, por ejemplo el efecto dotación donde la disposición a pagar por un bien es menor a la disposición de aceptar una compensación si este se le es quitado. Por otro lado puede resultar ventajoso para medir utilidad basada en referencias, esto quiere decir que los consumidores no solo valoran lo que reciben sino también el valor recibido por los demás.

2.4 Teorías alternativas para modelación de decisiones

La modelación de la incertidumbre permite entender mejor la naturaleza de los eventos inciertos, tomar mejor decisiones y enfrentar mejor el riesgo. Se han desarrollado modelos para diferentes tipos de situaciones afectadas por eventos inciertos, estos modelos han sido desarrollados no solo por economistas sino también por psicólogos, sociólogos, mercadólogos entre otros.

Desde la teoría económica parte de una noción un tanto rígida y reduccionista del comportamiento del consumidor, por tal motivo surgieron intentos de integrar dentro de las teorías económicas los conocimientos obtenidos de otras ramas del conocimiento. Por este motivo se enunciaran algunos ejes de análisis importantes que han estudiado de forma alternativa el comportamiento económico de los individuos.

Estas perspectivas tienen como fin posibilitar una perspectiva más amplia que permita reflexionar sobre la relación entre los individuos y las normas económicas de la organización social en la que viven.

2.4.1 Teoría de utilidad aleatoria

La utilidad se deriva de los atributos o características de los bienes y no de los bienes propiamente, por tal motivo los bienes se emplean en conjunto o individualmente para producir utilidad. Una función de utilidad aleatoria tiene la siguiente forma:

$$u_i = v_i + \varepsilon_i$$

Donde v_i es un componente sistemático que es función de atributos observables por parte del consumidor, este componente se puede especificar como:

$$v_i = \sum_{i=1}^k \beta x_i$$

Donde x_i son funciones que representan los atributos de los bienes consumidos y β es una constante positiva que representa el impacto de los atributos de los bienes en la utilidad. Por ultimo ε_i que representa las perturbaciones estocásticas que el consumidor no es capaz de apreciar en el momento de adquirirlo pero si cuando lo consume, así como los errores de modelación o medición por parte del modelador (Nechyba, 2009).

2.4.2 Neuroeconomía

La neuroeconomía es una nueva disciplina científica que crea un puente entre la investigación neurocientífica y la teoría económica. Es el dominio entre los economistas, psicólogos, neurocientíficos, y físicos dedicados a comprender las bases neuronales del juicio y la toma de decisiones que determinan el comportamiento social y en una economía de mercado. Los paradigmas experimentales que utilizan incluyen la teoría de juegos, los modelos matemáticos de aprendizaje y el análisis de interacciones entre motivación, emoción confianza y adicción.

El principal objetivo de la neuroeconomía es establecer sólidas bases neurobiológicas del comportamiento económico: por un lado la neurociencia proporciona las herramientas científicas potencialmente capaces de revelar la neurobiología del comportamiento económico, por el otro la economía ofrece representaciones matemáticas rigurosas en la toma de decisiones.

Esta disciplina produjo un campo de estudios en expansión, pues cuestiona duramente los postulados económicos sobre la capacidad del hombre por razonar y plantear de manera lógica todas las situaciones. El desafío de la neuroeconomía es desarrollar modelos de comportamiento económico más válidos, integrando influencia de factores sociales, culturales y emocionales en la toma de decisiones económicas.

2.4.3 Mercadotecnia

El campo de acción del marketing se limita a la satisfacción de los clientes por parte de una organización para lograr sus propios objetivos de crecimiento y rentabilidad.

Supone una doble acción por parte de la empresa. Primero analiza sistemática y permanentemente las necesidades del mercado que aporte la información necesaria para el desarrollo de los conceptos de productos rentables, destinados a grupos de compradores específicos y que presenten cualidades distintivas que los diferencien de los competidores inmediatos. El segundo es la organización estratégica de las ventas y comunicación que tengan el propósito de que los consumidores potenciales conozcan y valoren las cualidades distintivas de los productos.

Para la mercadotecnia el proceso de elección del consumidor involucra numerosas actividades que preceden, acompañan y siguen a las decisiones de compra: la precompra en la que el consumidor detecta necesidades y problemas busca la información y evalúa sus alternativas, la compra en la que el consumidor selecciona el establecimiento, delimita las condiciones de intercambio y efectúa la transacción, y la poscompra que tiene lugar cuando se utilizan los bienes que desembocan en sensaciones de satisfacción o insatisfacción.

Los gestores de marketing consideran que el enfoque de maximización de la utilidad por parte de los economistas es limitado pues consideran que el proceso de toma de decisiones es conformado por varias etapas o fases. Los modelos matemáticos de comportamiento del consumidor se centran en la segmentación de los mercados y en el posicionamiento de producto.

Conclusiones Capítulo 2

El riesgo involucra algún grado de incertidumbre y la falta de habilidad para controlar los resultados de ciertas decisiones de consumo. El riesgo o la eliminación de este es un esfuerzo que los individuos buscan constantemente erradicar, a pesar de que en algunos casos eliminar este riesgo aumenta otros tipos de problemáticas. El manejo efectivo de la incertidumbre requiere la evaluación y el impacto subsiguiente del proceso de decisión.

Cuando el consumidor posee algún conocimiento sobre los estados de la naturaleza puede asignarle a la ocurrencia de cada estado una estimación subjetiva de la probabilidad. En esta situación, el problema se clasifica como toma de decisiones con riesgo donde además de evaluar los estados más probables de la naturaleza el consumidor observa el beneficio esperado y la pérdida de oportunidades de cada una de sus alternativas.

Dentro del ámbito académico los modelos estocásticos son importantes por:

- Incorporan la incertidumbre a través de asignar probabilidades en las variables aleatorias. Reportan su mayor provecho cuando intervienen entre ellos muchas entradas inciertas y hay pocas restricciones. Se usan a menudo para la toma de decisiones estratégicas referentes a la organización con su ambiente incierto.
- En muchos casos se apoyan en otras disciplinas como psicología, mercadotecnia, administración etc. Para dar una respuesta interdisciplinaria a la modelación de toma de decisiones.
- Los modelos estocásticos son vistos de manera similar a un juego donde las acciones están basadas en resultados esperados. Suelen ser más apegados a la toma de decisiones gerenciales pues la preocupación del individuo no es únicamente a los resultados obtenidos sino también por la cantidad de riesgo que cada decisión acarrea.

Conclusiones y Recomendaciones Finales

La modelación nos permite entender mejor las situaciones que enfrentamos, por tal motivo la mayoría de las buenas decisiones son sustentadas en los datos. En todos los ámbitos del ser humano y más aun en el mundo de las decisiones se tiene al alcance información pertinente para el reconocimiento y la aproximación analítica. Es campo de los economistas justifican las decisiones basándose en la información proporcionada por los datos, por tal motivo se ven en la necesidad de crear sistemas de soporte de decisiones basadas en modelos.

Herramientas tales como los modelos matemáticos y estadísticos han sido aplicados a una extensa variedad de escenarios en la toma de decisiones dentro de las ciencias sociales. En las decisiones de consumo siempre se busca realizar pronósticos y predicciones, pues con base en la comprensión de esta actividad el planeador social puede entender mejor la complicada realidad económica y buscar una vía hacia mejorar el bienestar económico y social.

Al desarrollar un modelo de decisión se busca simplificar la complicada realidad económica, esto significa buscar generalidades que permitan entender el funcionamiento de los agentes económicos. Por tal motivo el modelador puede complicar o simplificar tanto como le plazca el planteamiento del problema.

Las funciones de utilidad no son la excepción, partiendo de una función de utilidad de elasticidad de sustitución constante se pueden derivar la totalidad de las curvas de utilidad deterministas y si a esta función le incorporamos probabilidades obtendremos una función Von Neumann Morgensten de la cual se pueden obtener las funciones de utilidad estocásticas. Dicho lo anterior queda en evidencia que la función de utilidad es una herramienta adaptable, que puede acoplarse a gran infinidad de particularidades y complicarse tanto como el modelador no necesite.

La teoría del consumidor es parte esencial de la formación de un economista pues describe una parte del modelo de elección de los individuos, dentro de este esquema las funciones de utilidad son herramientas que utilizan tanto alumnos de primeros semestres de licenciatura como alumnos de posgrado.

Se recomienda que la enseñanza de curvas de utilidad determinista permanezca en los temarios pues como primer acercamiento es excelente para desarrollar conceptos básicos y desarrollar la intuición que el alumno necesita para posteriormente enfrentarse a problemas más cercanos a la realidad y por lo tanto más complicados.

Por otra parte las funciones de utilidad estocásticas han cobrado importancia en áreas como finanzas e investigación en operaciones donde ha mostrado mucha efectividad, sin embargo en la academia no han sido abordadas como un complemento de las deterministas. Se recomienda, con el fin de consumir la modelación de decisiones del consumidor, incorporar a los cursos de teoría del consumidor un apartado dedicado a las funciones de utilidad estocásticas.

Referencias

- **Barbera, Salvador** (1998) *Handbook of utility theory Volume I Principles*. USA: Kluwer Academic Publishers.
- **Barry, Render & Ralph, Stair** (2011) *Métodos cuantitativos para los negocios*. México: Pearson Educación.
- **Cañabate, Antonio** (2004) *Toma de decisiones. Análisis y entorno organizativo*. España. Ediciones UPC
- **Cervantes, Miguel** (2013) *Microeconomía: Análisis, simuladores computacionales y retos. (En proceso de publicación)*.
- **Chakravarty, Satya** (2005) *Microeconomics*. India: Allied Publishers Pvt
- **Corchuelo, María** (2006) *Curso práctico de Economía*. España: Delta Publicaciones.
- **Eppen, G. D.** (2000) *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*. México: Prentice-hall
- **Hernández Sampieri, Roberto.** (1991) *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill
- **Hey, John** (2004) *Microeconomía Intermedia*. España McGraw Hill.
- **Jhale, Goffrey** (2001) *Advanced Microeconomic theory* USA Addison Wesley
- **Kahneman, Daniel & Tversky, Amos** (1979) *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk* en *Econometrica*, 47(2), pp. 263-291, March USA
- **Nechyba, Thomas** (2009) *Microeconomics, An intuitive approach whit calculus*. USA: CENGAE Learning.
- **Nicholson, Walter** (2011) *Microeconomic theory, basic principles and extensions*. 11th Editon. USA: CENGAE Learning.
- **Sánchez-Cuenca, Ignacio** (2009) *Teoría de juegos*. España. Centro de investigaciones Sociológicas
- **Sydsaeter, Knut & Hammond, Peter** (1996) *Matemáticas para el Análisis Económico*. España Prentice Hall USA Princeton University Press.
- **Varian, Hal** (2010) *Microeconomía Intermedia Un enfoque actual*. 8va Edición. España: Antoni Bosch
- **Venegas-Martínez, Francisco.** (2008) *Riesgos financieros y económicos*. México: Cengage Learning
- **Von Neumann, John & Morgenstern, Oscar** (1944) *Theory of games and economic behavior*. USA. Princeton University Press

Referencias Complementarias

- **Ackoff, Rusell.** (1953). *The design of social research*. USA. Universidad de Chicago.
- **Arbeláez, Javier & Carcamo, Ulises** (2004) *Un Curso Rápido De Cálculo Estocástico Para Aplicaciones A Modelos Económicos*. Primera parte Semestre Económico, vol. 7, núm. 14, julio-diciembre, 2004, pp. 129-147 Universidad de Medellín Colombia
- **Armsham, Hossein** (2013) *Sitio web Merrick School of Business* <http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/Business-stat/home.html>
- **Bentham, Jeremy** (1843) *Critique of the Doctrine of Inalienable, Natural Rights* England. Anarchical Fallacies, vol. 2 of Bowring (ed.), Works.
- **López Zafra, Juan Manuel** (2006) *De la convexidad de la función de utilidad. Aportaciones de von Neumann y Morgenstern al concepto de utilidad en economía*. En Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA Vol. 11 Universidad Pontificia Comillas Facultad de CCEE – ICADE
- **Marshall, Alfred** (1890) *Principles of Economics* England. McMillan.
- **Mill, Jhon** (1848) *The Principles of Political Economy: with some of their applications to social philosophy*. USA. Parker
- **Miller, D.C.** (1977). *Handbook of research design and social measurement*. USA. Longman.
- **Robbins, Lionel** (1923) *Principles of economics*. Economics
- **Smith, Adam** (1776) *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. England. W. Strahan and T. Cadell
- **Walrras, Leon** (1896) *Études d'économie sociale; Théorie de la répartition de la richesse sociale*. Francia. Rouge.