



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Simulación de una bobina gradiente cilíndrica  
transversal, construcción y caracterización

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

Miguel Sánchez Islas.



DIRECTOR DE TESIS:  
M. en C. Ricardo Martín Hernández Flores  
2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Objetivos.

Escribir un programa que nos permita conocer las posiciones de las espiras de una bobina gradiente, para poder construirla y caracterizarla.

# Resumen

En este trabajo se construyó el prototipo de una bobina de gradiente de campo magnético. Existen distintos métodos para poder encontrar la distribución de los cables en una bobina de tal forma que nos genere en una componente del campo magnético un comportamiento lineal, como es requerido en una bobina de campo gradiente.

Para poder encontrar las distribuciones de las espiras, se utilizó un método conocido como Simulated Annealing (Simulación por recocido SA). Este algoritmo consiste en minimizar un funcional, por medio de métodos estadísticos, en específico una variante del método de Monte Carlo. A diferencia de otros métodos de optimización combinatoria el método SA, es un método que busca mínimos globales. Usando este método se buscó minimizar la desviación estándar del gradiente del campo magnético que cada espira generaba con el gradiente del campo magnético promedio esperado.

Finalmente para validar nuestros resultados obtenidos de la simulación se procedió a realizar el prototipo de la bobina en las mismas condiciones que en la simulación. De la parte experimental se encontró un error porcentual del 8 % entre la simulación y los datos experimentales.

También se observó que se podía cambiar de geometría de forma relativamente fácil, es decir en el presente trabajo se partió con la idea de construir una bobina de campo gradiente cilíndrica, pero se encontró que también se puede construir bobinas con geometrías esféricas.

# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>6</b>
1.1. Momento angular nuclear. . . . .	6
1.2. Momento magnético. . . . .	7
1.2.1. Efecto Zeeman Nuclear. . . . .	9
1.3. Movimiento del espin nuclear. . . . .	11
1.4. Magnetización en RM. . . . .	13
1.4.1. Magnetización longitudinal. . . . .	13
1.4.2. Magnetización Transversal. . . . .	14
1.5. Instrumentacion en Imagen por RM . . . . .	15
1.5.1. Imán. . . . .	16
1.5.2. Sistema Radio Frecuencia. . . . .	17
1.5.3. Bobinas de campo gradiente magnético . . . . .	18
1.5.3.1. intensidad máxima del campo magnético . . . . .	18
1.5.3.2. Razón de cambio . . . . .	19
1.5.3.3. Inductancia. . . . .	19
1.5.3.4. Estimulación periférica . . . . .	21
<b>2. Gradientes de Campos Magnéticos .</b>	<b>22</b>
2.1. Gradientes de Campos Magnéticos . . . . .	22
2.2. Electromagnetismo. . . . .	24
2.3. Metodo Target Field . . . . .	25
2.4. Optimización combinatoria. . . . .	27
2.4.1. Cademas de Markov. . . . .	28
2.4.2. Algoritmos de Monte Carlo y Metropolis. . . . .	28
2.4.3. Metodo Simulated annealing . . . . .	30
2.5. Bobina de geometría cilíndrica . . . . .	34
<b>3. Implementación numérica y experimental.</b>	<b>39</b>
3.1. Implementación numérica. . . . .	39
3.1.1. Integrales elípticas. . . . .	41
3.1.2. Temperatura . . . . .	42
3.1.3. Resultados del programa . . . . .	45
3.2. Implementación experimental . . . . .	50
3.2.1. Construcción del Prototipo . . . . .	50

<b>4. Resultados Experimentales.</b>	<b>55</b>
<b>5. Discuciones.</b>	<b>63</b>

# Capítulo 1

## Introducción.

Una de las técnicas más comúnmente utilizadas en medicina para diagnóstico es la resonancia magnética RM. Este principio se basa en la propiedad del spin nuclear. Al igual que en el espín de un electrón bajo la influencia de un campo magnético externo se presenta un efecto Zeeman, para el espín nuclear. Mediante un tratamiento clásico se puede observar que al introducir este campo magnético el espín procesara a una cierta frecuencia angular, esta frecuencia es utilizada enviando un pulso con esta frecuencia, para que el espín nuclear cambie de estado de energía, y al decaer emita un pulso de la misma frecuencia.

### 1.1. Momento angular nuclear.

Si el núcleo es un sistema aislado, es decir con torque igual a cero, entonces su momento angular es una cantidad constante. Esta situación es análoga a la de un sistema clásico en donde no intervienen fuerzas externas y se conserva su momento angular. De la misma forma ocurre en un átomo con operador de momento angular  $L$ , siguiendo esta analogía, si  $I$  representa el momento angular total nuclear, entonces los eigenvalores del cuadrado del operador de momento angular total son  $I(I + 1)$  en unidades de  $\hbar$ . Expresados en la ecuación de eigenvalores:[3]

$$\hat{I}^2 \Psi_{IM} \rangle = I(I + 1) \hbar^2 | \Psi_{IM} \rangle \quad (1.1)$$

En esta ecuación  $\hat{I}^2$  es el operador que pertenece al cuadrado del momento angular total y  $\Psi_{IM}$  es una eigenfunción común entre  $\hat{I}^2$  y  $I_z$ , Donde  $I_z$  es la componente-z del momento angular total. Para este operador tenemos:

$$\hat{I}_z \Psi_{IM} \rangle = m_z \hbar | \Psi_{IM} \rangle \quad (1.2)$$

Las ecuaciones anteriores se satisfacen para un conjunto de eigenfunciones comunes y esto se debe a que el conmutador de  $\hat{I}^2$  y  $I_z$  es cero.

$$[\hat{I}^2, I_z] = 0 \quad (1.3)$$

De la ecuación (1) se observa que la magnitud del momento angular total esta cuantizada y sus valores están restringidos a valores  $\sqrt{I(I+1)}\hbar$ , de la ecuación (2) vemos que la componente  $z$  del momento angular puede tomar solo valores  $M\hbar$ . Los números cuánticos  $I$  y  $M$  son enteros y para un valor dado de  $I$ ,  $M$  puede tomar  $2I + 1$  valores desde  $-I$  hasta  $I$ . El espacio de cuantización del momento angular nuclear es expresado en el siguiente diagrama (fig 1.1):

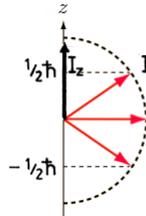


Figura 1.1 Este diagrama vectorial muestra las posibles orientaciones del vector de momento angular total  $I$ . El diagrama muestra  $I = \frac{1}{2}$ , los  $(2I+1)=2$ , posibles estados son,  $\frac{1}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar$

Los valores permitidos de  $I$  no son solo enteros, sino también semi-enteros. En los valores semi-enteros son un resultado de la propuesta de Pauli de un espín intrínseco. El momento angular total es la suma del momento angular orbital y el momento angular de espín. Experimentalmente se ha observado que los núcleos con número de masa par tienen espín cero o entero, mientras que los núcleos con número de masa impar tienen espín semi-entero. Y en particular núcleos con número de masa y número atómico par tienen espín cero.

## 1.2. Momento magnético.

A continuación consideraremos el momento dipolar electromagnético asociado con el núcleo y nucleones. El momento dipolar magnético  $\mu$  asociado a un circuito de área  $A$  y corriente  $i$ , es de la forma:[3]

$$\mu = iA \quad (1.4)$$

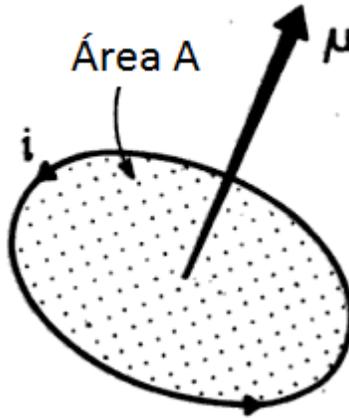


Fig 1.2 Momento magnético dipolar, generado por un circuito de corriente de área  $A$ .

Ahora para un electrón que se mueve en una órbita circular de radio  $r$  y periodo  $T$ :

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e\nu}{2\pi r} \quad (1.5)$$

Y  $A = \pi r^2$ , entonces de la definición de momento magnético tenemos que:

$$\mu = \frac{e\nu}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{e}{2} \nu r \quad (1.6)$$

$$\mu = \frac{e}{2m} \nu m r = \frac{e}{2m} L \quad (1.7)$$

Donde  $L$  es el momento angular. La ecuación (7) implica un hecho importante, el hecho de que el momento angular  $L$ , da lugar al aumento de momento dipolar  $\mu$  de una partícula cargada. El momento angular puede ser generalizada de la siguiente forma:

$$\mu = \frac{e}{2m} Lg \quad (1.8)$$

Donde  $g$  es un factor conocido como constante giromagnética. Para un núcleo se puede escribir como:

$$\mu = \frac{e}{2m} I g \quad (1.9)$$

Usualmente  $e$  es definida como positiva y el signo del momento dipolar magnético  $\mu$  es dado por el signo de la constante giromagnética.  $I$ , el momento angular nuclear tiene unidades de  $\hbar$  así que la ecuación anterior se suele escribir como:

$$\mu = \frac{1}{\hbar} I \mu_0 g \quad (1.10)$$

Donde a  $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m}$  se le conoce como el magnetón y es la unidad de medida del momento magnético. Sin embargo en cuestiones nucleares se utiliza con más frecuencia el magnetón nuclear definido como:  $\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p} = \frac{\mu_0}{1836}$ , en donde la masa del protón,  $m_p$  es 1836 veces la masa del electrón. Utilizando el momento dipolar de esta sección consideraremos el efecto Zeeman nuclear.

### 1.2.1. Efecto Zeeman Nuclear.

Si a un núcleo le es aplicado un campo magnético, la degeneración en los estados se rompe, justo como en el caso del momento angular normal. El desdoblamiento entre los niveles de espín nuclear se llama el desdoblamiento nuclear Zeeman. La RMN es la espectroscopia de los subniveles nucleares Zeeman

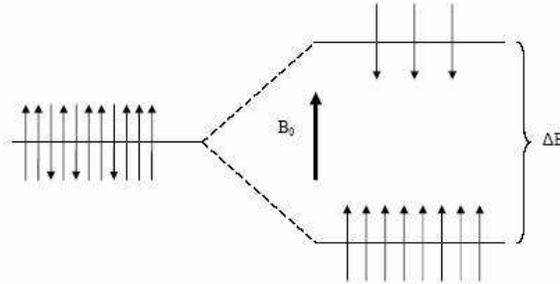


Figura 1.3 Desdoblamiento de los niveles de energía del espín. Al introducir un campo magnético externo.

Para poder ver esto consideremos el desdoblamiento Zeeman del nivel de energía  $E_0$ , cuando un campo magnético estático de magnitud  $B_0$  es aplicado. El momento magnético de la partícula  $\mu$  va a interactuar con el campo magnético  $B_0$ , y la energía de interacción es  $-\mu \cdot \vec{B}$ . Entonces el hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger  $\hat{H} | \Psi \rangle = E | \Psi \rangle$  [3]

$\hat{H}$  Es de la forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (1.11)$$

Donde  $\hat{H}_1 = -\mu \cdot \hat{B}$ , con lo que tenemos:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \mu \cdot \hat{B} \quad (1.12)$$

De la sección anterior, ec 1.10 podemos sustituir  $\mu$  tenemos:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{1}{\hbar} I \mu_0 g \cdot \hat{B} \quad (1.13)$$

Donde el hamiltoniano  $H_0$  corresponde a una energía  $E_0$  dada por:

$$H_0 | \Psi \rangle = E_0 | \Psi \rangle \quad (1.14)$$

Si se elige  $z$  al hacer  $I \cdot B$

$$I \cdot \hat{B} = I \hat{B} \cos \theta = I_z B_0 \quad (1.15)$$

Ya que  $I B \cos \theta$  es la proyección de  $I$  sobre el eje  $z$ . Y donde los eigenvalores de  $I_z$  son  $\hbar$ , por lo que al operar  $\hat{H} | \Psi \rangle = (H_0 - \frac{1}{\hbar} I_z \mu_0 g B_0) | \Psi \rangle$  tenemos como eigenvalores  $E$ :

$$E = E_0 - \mu_0 g M B_0 \quad (1.16)$$

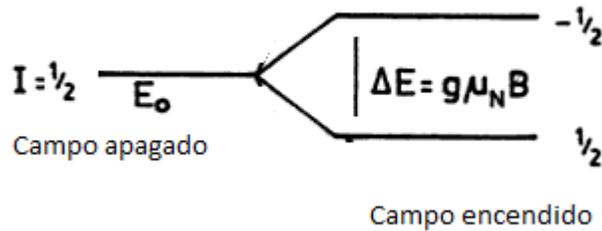


Fig.1.4 Efecto Zeeman nuclear en un campo magnético externo con  $I = \frac{1}{2}$

Experimentalmente se puede conocer la constante giromagnética  $g$  usualmente esta constante en la literatura se denota por  $\gamma = \frac{eg}{2m}$ , al determinar  $\Delta E = gB_0\mu_n = \gamma B_0\hbar$ . Si conocemos  $B_0$ , entonces  $\gamma$  es obtenida fácilmente de la relación:

$$\mu = I\mu_n\gamma \quad (1.17)$$

La relación  $\Delta E = \gamma B_0\hbar = \omega\hbar$  implica que entre dos estados de energía próximos, la condición de resonancia  $\omega_{RF} = \gamma B_0$  indica que los principios de la resonancia magnética, pueden ser descritos de forma clásica.

### 1.3. Movimiento del espín nuclear.

El átomo más simple, el hidrógeno, se encuentra en casi cualquier compuesto orgánico y está compuesto por un solo protón y un electrón. Para propósitos de la RM, el aspecto clave del núcleo de hidrógeno es su momento angular, el cual se asemeja al de un giróscopo clásico, en este caso un giróscopo magnético que precesara en torno al eje de magnetización. Como el espín del núcleo de hidrógeno está cargado positivamente, este genera un campo magnético y posee momento magnético  $\mu = \gamma I$  de acuerdo con la ec 9. Siendo  $\mathbf{I} I(\frac{\hbar}{2\pi}), (\frac{\hbar}{2\pi})(I - 1), \dots - (\frac{\hbar}{2\pi})I$ .

La dirección de un campo magnético externo define la dirección del eje  $z$ , y la energía del espín está dada por  $-\mu \cdot B$ . El comportamiento del momento magnético del núcleo tiende a alinearse paralelamente al campo externo, lo mismo que al poner una barra de un imán en las cercanías de un campo magnético externo. En este caso la posición paralela es la más común ya que requiere la menor energía por lo que habrá un número mayor de núcleos alineados en esa dirección. Esto ocasiona que el momento magnético precese, movimiento conocido como precesión de Larmor(Fig1.3). [4]

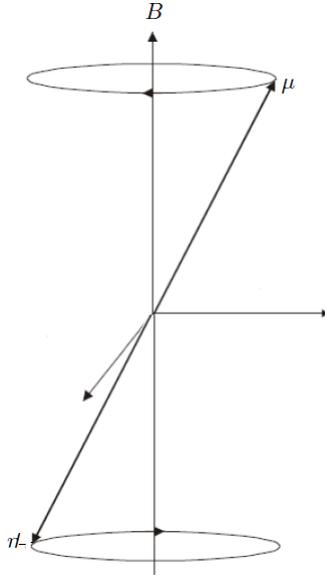


Figura 1.3 Precesión del momento magnético nuclear  $\mu$ , respecto al campo magnético externo  $B$ , en el eje  $z$ .

Esta precesión del momento magnético alrededor de  $B$ , ocurre con velocidad angular  $\omega$ , llamada frecuencia de Larmor, donde existe una proporción directa entre la frecuencia de Larmor, y el campo magnético externo aplicado:

$$\omega = \gamma B \quad (1.18)$$

En términos de energía el cambio de energía en el sistema está dado por la frecuencia de Larmor es decir:

$$\Delta E = \hbar\omega = \hbar\gamma B \quad (1.19)$$

Esta diferencia representa, la cantidad de energía necesaria para cambiar entre los posibles estados del espín (fig.1.4).

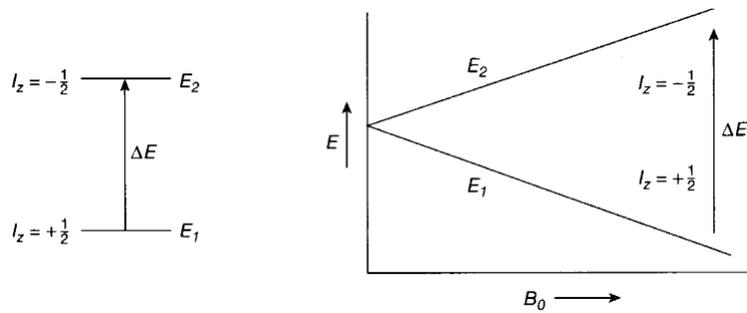


Figura 1.4 Cambio en la energía del espín

Por lo que al usar RM para conocer  $\gamma$ , se fija un campo magnético externo constante y paralelo al eje  $z$ , de esta forma los espines quedan alineados en la dirección del campo magnético. Al introducir un segundo pulso el cual es variable con el tiempo, en forma más precisa es un pulso de radio frecuencia RF (ya que típicamente las frecuencias usadas son de 10 a 500 Mhz), perpendicular a  $z$ . Estos fotones tendrán una energía  $h\omega$ , pero cuando coincide  $\omega = \gamma\hbar B$  entonces los espines pueden cambiar de nivel de energía. Al decaer del estado excitado emitirán un fotón de frecuencia  $\omega = \gamma\hbar B$

## 1.4. Magnetización en RM.

Para utilizar la técnica de RM, se necesita un campo magnético  $B$  estático, y un pulso de RF. Sin embargo este pulso puede ser perpendicular a la dirección del campo magnético estático o puede estar antiparalelo a este. Con lo que origina que la muestra quede magnetizada transversal o longitudinalmente dependiendo del pulso.

### 1.4.1. Magnetización longitudinal.

En los experimentos de resonancia magnética existen dos tipos de magnetización la magnetización longitudinal la cual consiste en la magnetización de los espines cuando están paralelos al campo externo, supongamos que una muestra que contiene núcleos con espines  $\frac{1}{2}$ , por ejemplo una muestra de agua. En ausencia de un campo magnético externo, la polarización de los espines se mantiene uniformemente distribuida, apuntando en todas las posibles direcciones espaciales. Si el campo magnético externo es encendido súbitamente la magnetización nuclear macroscópica es inicialmente cero pero gradualmente crece. La magnetización longitudinal sigue un comportamiento de la forma:

$$M_z = M_{nucl}(1 - e^{-\frac{t-t_{inicial}}{T_1}}) \quad (1.20)$$

Como la interacción de decaimiento de la magnetización longitudinal es un fenómeno colectivo es decir depende de los espines en los alrededores, este proceso se le conoce como relajación longitudinal. La constante  $T_1$  se le conoce como constante temporal de relajación longitudinal. Esta constante depende del isótopo y de la muestra así como de la temperatura. Típicamente el valor de  $T_1$  está en el rango de los milisegundos a segundos, en algunos casos excepcionales  $T_1$  puede llegar a ser de días a meses. Cuando el campo magnético externo es apagado la magnetización decae con un comportamiento de la forma:

$$M_z = M_{nucl}(e^{-\frac{t-t_{apagado}}{T_1}}) \quad (1.21)$$

Sin embargo esta tipo de magnetización es para fines experimentales indetectable MR toma otro enfoque en vez de medir la magnetización nuclear de los espines a lo largo del campo, se mide la magnetización de forma perpendicular. Este estado de equilibrio corresponde un número largo de espines, que procesan sobre la dirección del campo magnético. Sin embargo con el puro campo externo, no existe una magnetización neta perpendicular al campo.

### 1.4.2. Magnetización Transversal.

En la resonancia magnética se utiliza otro tipo de magnetización para poder tener resultados experimentales, conocida como magnetización transversal esta magnetización funciona de la siguiente forma. Al introducir un pulso de radio frecuencia al sistema muestra, el espin experimenta dos campos magnéticos, un campo estático generado por el imán y un campo oscilante debido al pulso R.F. El campo estático es de mucha mayor amplitud que el campo oscilante pero solo con el campo de RF se pueden obtener resultados experimentales en donde la señal detectada es más fácilmente medible, lo importante del pulso R.F es como produce una señal que puede ser detectada. En este sistema es importante que al estar el espin precesando en torno al vector de magnetización, este gira a una cierta frecuencia, por lo que la señal de radio frecuencia es igual a esta frecuencia de precesión originando un fenómeno de resonancia. Esto permite que un pulso débil de R.F aumente conformé el tiempo pasa. Si el pulso es aplicado un tiempo suficiente, entonces el pulso de R.F aunque no tenga una gran amplitud, da lugar a un gran cambio en el estado de los espines.

Supongamos que el sistema de espines se le permite llegar a un estado de equilibrio térmico en presencia de un campo magnético externo, y la magnetización nuclear macroscópica del sistema en equilibrio con valor  $M_{equilibrio}^{nuclear}$  a lo largo del campo externo. En este caso no hay magnetización perpendicular al campo, debido a que en promedio, la distribución de la magnetización en equilibrio termodinámico es de simetría cilíndrica alrededor del eje  $z$ . Si los espines son rotados 90 alrededor del eje  $x$ , el resultado es que la polarización de los espines estará a lo largo del eje  $y$ . Como esto ocurre para cada espin en la muestra.

La polarización neta a lo largo del eje  $z$  es transferida en una polarización neta a lo largo del eje  $y$  que es perpendicular al campo aplicado. A esto se le conoce como magnetización perpendicular.

Cuando el pulso es apagado los espines reanudan su movimiento de precesión. Los espines de manera individual precesan cada uno. Sin embargo macroscópicamente aparece un nuevo fenómeno. El estado justamente después del pulso corresponde a una polarización neta a lo largo del eje  $y$  perpendicular al campo externo. Como cada espin precesa, el momento magnético también precesa. Por lo que la magnetización nuclear rota en el plano  $xy$ , perpendicular al campo externo. Las ecuaciones despues de apagar el pulso son:

$$M_y = -M_{equilibrio}^{nuclear} \cos(\omega t) e^{(-\frac{t}{T_2})} \quad (1.22)$$

$$M_y = M_{equilibrio}^{nuclear} \text{sen}(\omega t) e^{(-\frac{t}{T_2})} \quad (1.23)$$

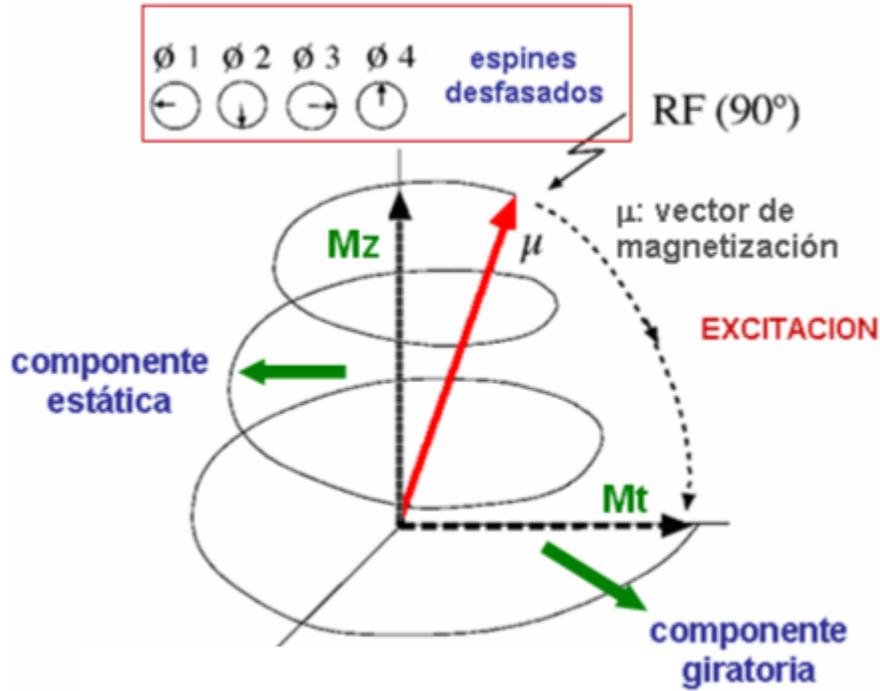


Figura 1.5 Magnetización Transversal, en donde al no poder mantener la sincronía en el decaimiento de los espines el decaimiento se asemeja en dos dimensiones a un movimiento amortiguado.

El decaimiento de la magnetización transversal decae lentamente porque es imposible el mantener sincronía exacta entre las diferentes precesiones magnéticas nucleares. Este proceso de decaimiento es irreversible.

## 1.5. Instrumentación en Imagen por RM

Gracias a la resonancia Magnética Nuclear, se pudo desarrollar la idea de Imagenología por Resonancia Magnética (IRM). Esta técnica es no invasiva y que a diferencia de técnicas que utilizan rayos-X, no utiliza radiación ionizante. Esta técnica permite visualizar bastante bien los tejidos, y diferenciar los tejidos en buen estado y los que presentan alguna anomalía. Sin embargo un sistema de IRM consta de tres componentes principales, el Imán, Antena de gradiente, Antena de RF

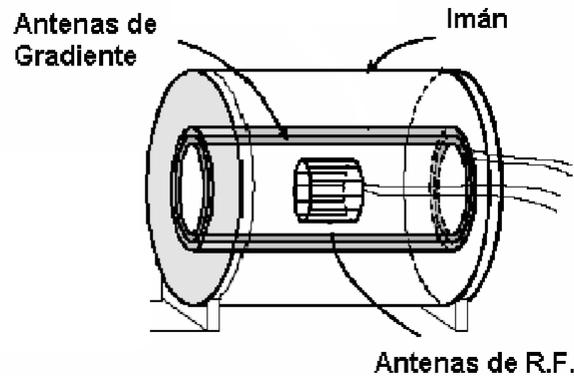


Figura 1.6 Equipo de IRM principal.

### 1.5.1. Imán.

Para generar el campo magnético principal se pueden utilizar tres tipos diferentes de imanes, Imanes permanentes, imanes resistivos e imanes superconductores. Las principales características, son la magnitud del campo  $B_0$ , la homogeneidad espacial, la estabilidad temporal espacial.[16]

- Los imanes permanentes en IRM, son típicamente contruidos del material magnético NdBFe. Los materiales de los imanes permanentes están caracterizados por la curva de histéresis, la cual describe la respuesta no lineal del material a un campo magnético externo. Esto ocasiona que al encender un campo magnético externo la magnetización del material se incrementara. Estos imanes tienen como ventajas el que no necesitan electricidad para funcionar y tampoco necesitan de mantenimiento. Debido a su construcción el campo magnético es ortogonal al paciente. Las desventajas de estos equipos es su gran peso de más de 10 toneladas y sus elevados costos debido al material para crear los imanes. Además de que se necesita que la temperatura permanezca constante, es decir que no existan variaciones mayores a 1 k.

- Imanes resistivos, su funcionamiento se basa en hacer pasar una corriente a través de un conductor, pero en conductores convencionales por ejemplo cobre, la resistencia del material origina que la mayor parte de la energía eléctrica termina convertida en energía térmica. Este tipo de imanes requieren una fuente de corriente para mantener el campo magnético, además de que requieren de un sistema de enfriamiento para disipar el aumento en la temperatura generada por la resistencia del conductor. Estos imanes son susceptibles a variaciones en su campo magnético causadas por inestabilidades en el suministro de corrientes.



Figura 1.7 Imán de IRM

- Imanes superconductores en principio, estos imanes operan en una manera similar a los imanes resistivos, estos imanes generan el campo magnético por medio de circuitos que tienen una corriente. Pero en vez de usar cobre, los imanes superconductores usan una aleación de Niobio- Titanio (NbTi), al bajar la temperatura se presenta el efecto de superconductividad. Para mantener la baja temperatura se requiere de la utilización de helio líquido, con lo cual se mantiene una temperatura menor a  $270^{\circ}\text{C}$ , mientras en la habitación fuera del imán se mantiene a una temperatura de  $20^{\circ}\text{C}$ . Para poder mantener este gran gradiente de temperatura, el imán superconductor se coloca dentro de un tanque conocido como criostato. Este es un dispositivo no magnético, de estructura metálica que contiene escudos de radiación para prevenir que exista un flujo de calor. Si se interrumpe o falla el aislamiento ocasionara que el alambre de la bobina superconductora se caliente, y pierda el efecto superconductor ocasionando que la corriente se transforme en energía térmica.



Figura 1.8 Imán superconductor.[17]

### 1.5.2. Sistema Radio Frecuencia.

El sistema de radio frecuencia RF, en RM es usado para crear la magnetización transversal necesitada en RM. El sistema RF consiste en una cadena de transmisión y recepción señales de radio frecuencia.

- Transmisor, al principio de la cadena de transmisión, se encuentra el transmisor de RF, el cual consiste en un generador y un amplificador de RF. El

generador de baja potencia oscila a la frecuencia de Larmor. Su señal de salida es modulada por un controlador digital que da la forma del pulso. Este pulso es entregado a una bobina de RF.

- Bobinas RF, para acoplar el pulso RF del transmisor de RF al cuerpo humano se requiere de una antena de RF. Antes de empezar una imagen por RM, la bobina se sintoniza con la frecuencia de resonancia del sistema (sintonización RF). Simultáneamente, las propiedades del circuito cambian para que la resistencia de la bobina coincida con la resistencia del cable transmisor. Una vez que la bobina es sintonizada, el transmisor es ajustado. Durante este proceso, el sistema de RM determina el voltaje requerido para hacer que haya magnetización transversal. Para acoplar la potencia del pulso de RF del transmisor al cuerpo humano se requiere de una antena de RF, se llaman usualmente bobinas de RF. Antes de que empiece la imagen por RM, la bobina de RF se sintoniza a la frecuencia de resonancia de sistema de RM. Las bobinas de radiofrecuencia se categorizan en bobinas de transmisión y de recepción, y bobinas transmisión-recepción. Las bobinas de transmisión solo se usan para exponer el objeto a estudiar a un pulso de RF, mientras que la bobina de recepción detecta una pequeña señal emitida por el cuerpo humano, mientras más cerca este la bobina del cuerpo mejor será la imagen.. Si una bobina puede hacer las dos tareas se le conoce como bobina transmisión recepción

### 1.5.3. Bobinas de campo gradiente magnético .

Para poder localizar las señales emitidas en RM, se necesita el uso de bobinas que incrementen el campo magnético de forma lineal, este gradiente  $G$ , se sobrepone al campo estático  $B$ . Estos campos de gradiente magnético son creados por bobinas, llamadas bobinas de campo gradiente magnético. Y se necesitan tres bobinas para poder hacer una imagen en tres dimensiones, una para cada dimensión espacial. Por lo general la geometría más usada en los aparatos de imagenología por resonancia magnética (IRM) se utilizan bobinas gradientes cilíndricas debido a que usualmente se utiliza un imán cilíndrico superconductor. La idea principal de este tipo de campo lineal se expondrá con más detalle en el capítulo 2[16]. Mediante un tipo de bobina conocida como bobina de Maxwell, las cuales consisten en dos espiras separadas a una distancia de  $3\sqrt{r}$  y nos generan un campo gradiente magnético. La calidad de un sistema gradiente se caracteriza por diversos parámetros; la intensidad máxima del campo magnético, la razón de cambio de la bobina, la homogeneidad de este campo magnético, el tipo de bobina escudo, y la estabilidad y precisión del gradiente.

#### 1.5.3.1. intensidad máxima del campo magnético

Usualmente para un sistema de RM clínico, se utiliza un gradiente en donde la intensidad máxima es de 40mT/m. La intensidad máxima del gradiente está limitada por la capacidad de la fuente de alimentación del sistema gradiente. En

equipos modernos usan voltajes de más de 2,000 V y corrientes arriba de 500A. Por otro lado otro factor que limita la intensidad máxima de un gradiente es el calentamiento del mismo.

### 1.5.3.2. Razón de cambio

La razón de cambio es, la razón entre la intensidad máxima del gradiente y el tiempo más bajo requerido para cambiar las corrientes en la bobina. Ya que cuando la corriente en la bobina gradiente se incrementa durante un tiempo de cambio en las corrientes, esto es debido a la ley de Lenz en donde la bobina creara una corriente que se oponga al cambio en las corrientes. Por lo que contrarrestara el proceso de tiempo de cambio, y el tiempo en el que aumenta (tiempo de alza) la corriente no podrá ser infinitamente pequeño. Por lo que siempre es deseable que la inductancia en una bobina permanezca lo más baja posible. La razón de cambio en equipos de IRM por lo general se quiere que sea lo más grande posible, lo que originaría que el tiempo de alza de la corriente sea pequeño. Si la bobina gradiente es conectada a un switch rápido a través de un capacitor, se pueden conseguir tiempos de alza bastante pequeños, tan pequeños dependiendo de la inductancia en la bobina y del capacitor para crear un circuito resonante. La desventaja que la frecuencia característica del circuito determinara el posible tiempo de alza. Y además no pueden ser intercambiadas las corrientes hasta que el capacitor ha sido cargado.

### 1.5.3.3. Inductancia.

Supongamos que tenemos dos circuitos en reposo. Si en estos circuitos tenemos una corriente en estado estacionario, si examinamos el circuito 1, este produce un campo magnético  $B_1$ . Es inevitable que algunas de estas líneas atraviesan el segundo circuito. Sea  $\phi_2$  el flujo de  $B_1$  a través de 2. Es decir:

$$\Phi_2 = \int B_1 \cdot da_2 \quad (1.24)$$

Si suponemos que variamos la corriente en el circuito 1. El flujo a través del circuito 2 variara de acuerdo a la corriente, y la ley de Faraday nos dice que este cambio en el flujo inducirá una fem en el circuito 2.

$$Fem = -\frac{d\phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (1.25)$$

Cada vez que cambia la corriente en el circuito 1, una corriente se inducida fluye en el circuito 2.

Tal como el concepto del coeficiente de capacitancia en un sistema de conductores mantenidos a un potencial electrostático diferente es útil. El concepto

de auto inductancia mutua es útil para sistemas que portan corrientes. Imaginemos un sistema de  $N$  distintos circuitos de corriente, el  $i$ -ésimo con corriente total  $I_i$ . La energía total puede ser expresada como:

$$W = \frac{1}{2} \sum L_i I_i^2 + \sum \sum E_{ij} I_i I_j \quad (1.26)$$

Para conocer el valor de  $L$  y  $ME$  procedemos de la siguiente forma. La energía magnética es:

$$W = \frac{1}{2} \int J \cdot A dV$$

Usando la definición del potencial vectorial tenemos:

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \int dV \int \frac{J \cdot J}{|x - x'|} dV' \quad (1.27)$$

Las integrales pueden ser puestas en dos sumas de integrales separadas sobre cada circuito:

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \sum_{i=1}^N \int dV_i \sum_{j=1}^N \int \frac{J \cdot J}{|x_i - x_j|} dV'_j \quad (1.28)$$

En las sumas hay términos con  $i = j$  y términos con  $i \neq j$ . Si  $i = j$  definimos:

$$L_i = \frac{\mu}{4\pi I_i^2} \int_{c_i} dV_i \int_{c_i} \frac{J \cdot J}{|x_i - x_j|} dV'_j \quad (1.29)$$

y

$$E_{ij} = \frac{\mu}{4\pi I_j I_i} \int_{c_i} dV_i \int_{c_j} \frac{J \cdot J}{|x_i - x_j|} dV'_j \quad (1.30)$$

Para circuitos simples donde cambia la corriente la Fem creada es de la forma:

$$Fem = -L \frac{dI_1}{dt} \quad (1.31)$$

Entre más baja sea esta fem, mejor será el desempeño de la bobina al hacer el cambio en la corriente, ocasionando que el tiempo de alza sea pequeño. Esto es una de las características buscadas en una bobina gradiente.

#### 1.5.3.4. Estimulación periférica

Las[16] corrientes inducidas debido al gradiente en el cuerpo humano, pueden ocasionar que se estimule el sistema nervioso periférico, o a grandes amplitudes que se estimule el corazón. Estos efectos fisiológicos no dependen solo de la amplitud sino también de la frecuencia de cambio del campo gradiente. Por lo que los aparatos clínicos operan cerca de este umbral sin embargo es sabido que también depende de cada paciente, ya que en algunos se puede exceder este umbral ocasionando una sensación de cosquilleo durante una cesión de IMR. Como el cambio en el campo, es menor a distancias más pequeñas del iso-centro, la estimulación del sistema periférico puede ser evadida si se utilizan gradientes de longitud pequeña. Desafortunadamente un gradiente corto presenta una baja región de estudio o baja región de interés, por lo que se combinan distintos sistemas gradiente.

## Capítulo 2

# Gradientes de Campos Magnéticos .

Para poder obtener información útil en la imagen por resonancia magnética, se necesitan otras tres bobinas que modifiquen las componentes del campo magnético estatico, estas bobinas se les conoce como bobinas gradiente. El termino gradiente hace referencia a que va a existir un gradiente magnético que en la mayoría de los casos es lineal en una dirección espacial. Para poder hacer una imagen médica se requieren de tres bobinas gradiente, una para cada dirección espacial. En este trabajo, solo se consideró como prototipo la dirección que es paralela al eje de una bobina de geometría cilíndrica. Como característica principal se buscó que el campo en una región de interés fuese lo más lineal posible es decir no se consideraron efectos adicionales más que la pura linealidad del campo magnético. Se decidió usar una configuración cilíndrica debido a que es la más comúnmente usada en imágenes médicas. Pero como se verá en el capítulo 4, se puede cambiar la simetría de la bobina.

### 2.1. Gradientes de Campos Magnéticos .

En la ausencia de un gradiente de campo magnético , el campo magnético estatico principal es homogéneo. Tiene la misma magnitud, y la misma dirección en todos los puntos del espacio. Si a la intensidad del campo magnético la denotamos por  $B_0$ , y su dirección es definida en la dirección  $z$ , en donde el campo está dado por:[4]

$$B(z) = B_0 \hat{e}_z$$

Lo que implica la ecuación anterior es que a lo largo de  $z$  el campo magnético no cambiara. Al menos es lo que se espera del imán principal del equipo de resonancia, que dentro de una cierta región de interés el campo se lo mas constante posible.

Recordando el principio de superposición si tenemos dos campo en la misma región espacial se puede adicionar la componente del campo principal con la componente de la bobina, con esto el campo magnético producido por la bobina gradiente sumado al campo de la bobina principal, lo ocasionara que el campo magnético en la dirección de la bobina gradiente decrezca de acuerdo al campo o crezca en la dirección que esta genera. Es decir ya no tendríamos un campo constante si no un campo que puede cambiar su magnitud de forma controlada. Esta es una de las razones por las que, se requiere que el campo magnético producido por la bobina sea lo más lineal posible. En la siguiente figura(2.1) muestra un campo gradiente para una región en  $x$  de  $[-1, 1]$ , en donde la componente  $z$  del campo magnético se comporta de forma lineal. Y podemos observar que hay regiones que la bobina generara un campo negativo.

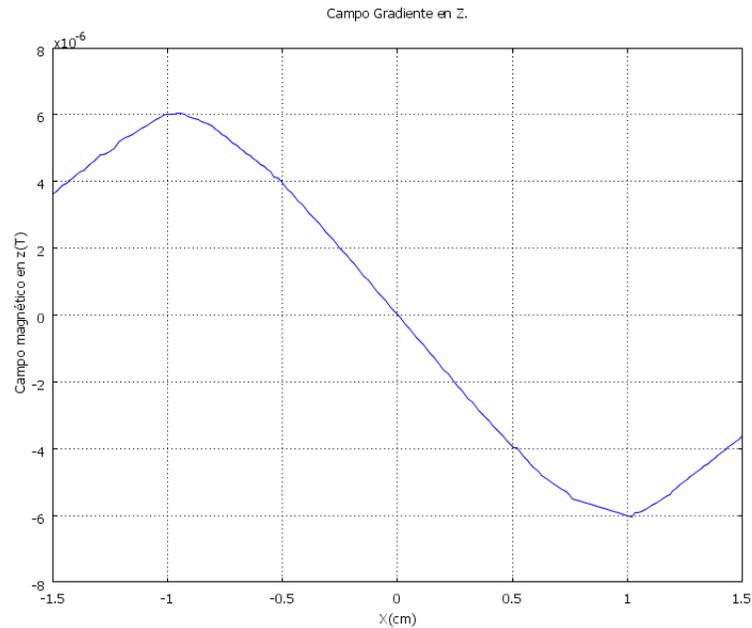


Figura 2.1 Gráfica de la componente z de un gradiente

Consideremos el campo gradiente  $G_x$ , en la dirección  $x$  perpendicular al campo magnético principal. El campo magnético en un punto  $r$  en la presencia de este gradiente es:

$$B(r) = B_0 \hat{e}_z + G_x x \hat{e}_x$$

Y donde  $x$  es la coordenada a lo largo de este eje. En este caso la ecuación anterior describe un campo magnético en la dirección  $z$ , pero cuya magnitud varia como función de  $x$ . La magnitud del campo en presencia de  $G_x$  la podemos ver de la siguiente forma:



Figura 2.2 Funcionamiento del Campo Magnético Gradiente. Se puede observar como la densidad de líneas del campo disminuye en la parte en donde el gradiente es negativo y aumenta en la región positiva.

Lo que se observa en la figura 2.2 es que al ser el gradiente negativo la densidad de líneas del campo magnético cerca de la parte negativa va a ser menor a la densidad de líneas cerca de la parte positiva, esto ocasiona que el campo magnético sea menor en la dirección  $z$  cerca de la parte negativa del gradiente en  $x$  y el campo magnético va a ser mayor cerca de la parte positiva del gradiente.

De igual forma tenemos gradientes en  $G_y$ ,  $G_z$ .

## 2.2. Electromagnetismo.

Para poder adentrarnos en el prototipo de la bobina de campo gradiente, a continuación se revisaran algunas de las ecuaciones fundamentales en el electromagnetismo. Las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, o ecuaciones de Maxwell, son ecuaciones que en su forma diferencial se escriben como:[15]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D &= \rho & \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B &= 0 & \nabla \times B &= J + \frac{\partial D}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cuando los campos ya sean electricos o magneticos no varian con el tiempo, entonces se dice que el campo es estáticos, en este caso las ecuaciones de Maxwell se escriben como:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{B} &= 0 \\ \nabla \times \hat{B} &= \mu \hat{J} \end{aligned} \quad (2.2)$$

De la primera ecuación sabemos que existe un potencial vectorial  $A$  tal que:

$$\hat{B} = \nabla \times \hat{A} \quad (2.3)$$

En el caso en que no exista una corriente entonces la ecuación se modifica por:

$$\nabla \times \hat{B} = 0 \quad \nabla \cdot \hat{B} = 0 \quad (2.4)$$

De la segunda ecuación y expresando  $B$  como el potencial magnético  $A$ , usando el hecho de que  $\nabla \times \nabla \times \hat{A} = \nabla(\nabla \cdot \hat{A}) - \nabla^2 \hat{A}$ , obtenemos:

$$\nabla(\nabla \cdot \hat{A}) - \nabla^2 \hat{A} = \mu \hat{J} \quad (2.5)$$

Haciendo  $\nabla \cdot \hat{A} = 0$  Obtenemos:

$$\nabla^2 \hat{A} = \mu \hat{J} \quad (2.6)$$

Que con ayuda de las funciones de Green podemos obtener:

$$\hat{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J}{|r - r'|} dV \quad (2.7)$$

Utilizando el rotacional obtenemos la expresión para  $B$  en forma integral:

$$\hat{B}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int J \times \frac{r - r'}{|r - r'|^3} dV \quad (2.8)$$

la cual es la ecuación de Biot Savat y es parte importante en el desarrollo de la bobina a lo largo de esta tesis. Esta ley la cual se suele escribir como:

$$\hat{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \frac{Id\mathbf{s} \times \hat{R}}{R^2} \quad (2.9)$$

La cual nos da una relación para el campo magnético  $\hat{B}$ , y la corriente en un alambre de determinada geometría. Esta relación es de gran utilidad cuando conocemos la geometría del alambre y queremos conocer como es el campo magnético en un cierto punto. Cabe mencionar que al hacer las espiras de una forma en especifica no tenemos que invertir la ley de Ampere, ya que conocemos los caminos que siguen las corrientes en todo momento, por lo que tiene la ventaja que al fijar la forma trabajamos en el espacio real y usamos la ecuación de Biot Savat, bueno la derivada de esta que es el gradiente en la dirección deseada.

### 2.3. Metodo Target Field

Este método, descansa en la idea de representar el campo en términos de una expansión tipo furier bessel. Y se invierte la ley de Ampere, para poder calcular las corrientes que generan el campo pedido. Se empieza al hacer:

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{\pi} \sum \int e^{im\theta} e^{ikz} I_m(\kappa r^<) K_m(\kappa r^>) \quad (2.10)$$

Donde I y K son funciones de Bessel, y  $r^<$  y  $r^>$  es la menor o mayor distancia de  $r$  y  $r'$ . Con esto se puede reescribir las ecuaciones del campo magnético en la componente z y queda de la forma:

$$B_z(r, \theta, z) = -a \frac{\mu}{2\pi} \sum \int_{-\infty}^{\infty} e^{im\theta} e^{ikz} I_m(\kappa r^<) K_m(\kappa r^>) k a J_\phi^m(k) \quad (2.11)$$

Donde  $J_\phi^m(k)$  es la transformada de Fourier de la componente azimutal de la densidad de corriente.

$$J_\phi^m(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{im\theta} e^{ikz} J(\phi) \quad (2.12)$$

Si se utiliza la transformada inversa de Fourier tenemos:

$$J_\phi^m(k) = -\frac{B_z^m(c, k)}{\mu K I_m(\kappa r^<) K_m(\kappa r^>)} \quad (2.13)$$

Después se usa una extensión conocida como inductancia mínima en la cual se expresa la inductancia también en términos de funciones de Bessel, usando el siguiente funcional.

$$U(J_\phi^m(k)) = L + \frac{1}{I} \sum \lambda_n (B_n - B_z) \quad (2.14)$$

Donde  $B_n$  es el campo magnético deseado, en el punto Bz, y  $\lambda_n$  son un conjunto de multiplicadores de Lagrange. Sin embargo a veces se utiliza otro funcional para minimizar, el cual es el siguiente.

$$U = \alpha L + \sum (B_n - B_z)^2 \quad (2.15)$$

En este funcional lo que se minimiza es la desviación del campo gradiente deseado en un conjunto de puntos localizados dentro de la región de interés, y  $\alpha$  es la inductancia. Y en este caso al encontrar los coeficientes de Fourier que minimicen el funcional, se propone una expresión para la densidad de corriente.

Si utilizamos solamente la ecuación de Biot Savat, es decir suponemos que conocemos la trayectoria que sigue la corriente, podemos utilizar el funcional anterior pero con la ventaja de trabajar en el espacio real y solo preocuparnos por encontrar los puntos donde sea mínimo. En este trabajo esa fue la idea que se aprovechó para encontrar las posiciones de las espiras una vez que se fijó la forma de estas en este caso circulares. Por lo que solo faltaba buscar una forma para poder minimizar el funcional.

$$U = \alpha L + \sum (< G_n > - G_z)^2 \quad (2.16)$$

Una de las formas para poder encontrar mínimos de funciones complicadas se basa en la idea de optimización combinatoria.

## 2.4. Optimización combinatoria.

Resolver un problema de optimización combinatoria equivale a encontrar la mejor o la solución más óptima entre un número finito, o contable infinito de soluciones alternativas. Un problema de optimización se puede formalizar como una pareja  $(S, f)$ , donde el espacio soluciones  $S$  representa un conjunto finito y la función costo  $f$ , se define como:

$$f : S \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.17)$$

En caso de minimizar el, problema consiste en encontrar una solución  $i_{opt} \in S$  que cumpla:

$$f(i_{opt}) \leq f(i) \quad \forall i \in S \quad (2.18)$$

En caso de maximización,  $i_{opt}$  satisface:

$$f(i_{opt}) \geq f(i) \quad \forall i \in S \quad (2.19)$$

Lo que nos dicen las expresiones anteriores es que dada una función o funcional, (denotado por la función costo), buscar un elemento en el espacio de soluciones tal que sea máximo o mínimo dependiendo de lo que estemos buscando. Uno de los métodos usados en problemas de optimización combinatoria es usar el algoritmo simulated annealing (Recocido Simulado), el cual es una variante del algoritmo de metrópolis. Otro método comúnmente usado es el algoritmo genético.

### 2.4.1. Cademas de Markov.

Cuando se realizan eventos que se desarrollan en el tiempo en donde el resultado del evento depende de alguna variable azarosa se denomina proceso estocástico. Uno de los casos más simples de procesos estocásticos es cuando un resultado depende de otro, es decir el resultado en cada etapa depende del resultado anterior y no de los resultados previos. Tal proceso se le denomina proceso de Markov. Estas cadenas reciben su nombre del matemático ruso Andreí Andreevitch Markov. Estas cadenas en cierta forma tienen memoria, es decir recuerdan el último evento y eso condiciona las posibilidades de los eventos futuros, más formalmente:

Una cadena de Markov es una serie de variables aleatorias,  $X^0, X^1, \dots, X^n$  en donde la influencia de los valores  $X^0, \dots, X^n$  en la distribución de  $X^{n+1}$  está relacionada solamente por el valor de  $X^n$

$$P(X^{n+1} | X^n, \{x^t : t \in E\}) = P(X^{n+1} | X^n) \quad (2.20)$$

En donde  $E$  es cualquier subconjunto de  $0, 1, 2, \dots, n-1$ . Los índices  $t = 0, 1, 2, \dots$ , representa tiempos sucesivos. Y lo que representa la expresión anterior es que la transición de probabilidad de un estado depende del anterior solamente y no de la evolución anterior del sistema.

### 2.4.2. Algoritmos de Monte Carlo y Metropolis.

Los algoritmos de Simulated Annealing y Metropolis se basan en algoritmos conocidos como algoritmos de Monte Carlo. El algoritmo de Monte Carlo es un método numérico en el cual es posible estudiar diversos sistemas termodinámicos o mejor dicho ensambles termodinámicos, además de que estos métodos son conocidos por que incorporan un generador de números aleatorios. En este método partimos de las siguientes premisas:

- Primero consideramos un sistema en donde el estado del sistema se denota por  $S$ .
- La energía del sistema en el estado, se denota por  $E(S)$ . En un ensamble canónico el cual está a una temperatura  $T$ , y denotando con  $\beta = \frac{1}{kT}$ , se le puede asociar una probabilidad relativa de ocurrencia dada por  $e^{-\beta E(S)}$ .
- Y como sabemos de física estadística el promedio termodinámico de cualquier cantidad  $O$  está dado por:

$$\langle O \rangle = \frac{\sum e^{-\beta E(S)} O}{\sum e^{-\beta E(S)}} \quad (2.21)$$

Esto puede verse debido a que al incrementar el número de elementos en el ensamble es decir al hacer tender a infinito el número de elementos entonces nuestra suma se convierte en una integral y obtenemos:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{\int e^{-\beta E(S)} dx} \int e^{-\beta E(S)} O dx \quad (2.22)$$

El cual es un resultado de la física estadística del valor promedio de  $O$ .

La idea del algoritmo es generar por computadora una secuencia de estados  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, C_{n+1}$ . En donde en cada paso se les va a asignar una probabilidad relativa dependiendo de la temperatura del sistema y la energía en cada paso. Adicionalmente sabemos que el sistema empieza con una condición inicial arbitraria, y después de un número de pasos o de un periodo  $n$ , el sistema tiende a un equilibrio.

Este proceso de equilibrio es logrado a través de un proceso de Markov con la probabilidad de transición  $P(C_1 | C_2)$  para  $C_1 \rightarrow C_2$ . Esta es la probabilidad condicionada de encontrar el sistema en el estado  $C_2$ , cuando esta inicialmente en el estado  $C_1$ . Imponiendo las siguientes condiciones:

$$P(C_1 | C_2) > 0$$

$$\sum P(C_1 C_2) = 1$$

$$e^{-\beta E(S_1)} P(C_1 | C_2) = e^{-\beta E(S_2)} P(C_2 | C_1) \quad (2.23)$$

El último término es el proceso de Markov, que nos va a llevar eventualmente a un ensamble en equilibrio.

**Metrópolis.** El artículo de Metrópolis de, Rosenbluth, Teller, fue el primero en emplear muestreo por cadenas de Markov, en la forma conocida por algoritmo de Metropolis. Este algoritmo desde entonces a sido aplicado de manera extensiva, a problemas en la física estadística, de manera que algunas veces el método de Montecarlo es sinónimo del algoritmo de Metropolis. Este algoritmo comparte muchas similitudes con un procedimiento llamado muestreo de Gibbs, pero se puede aplicar a problemas más generales, el cual sigue las siguientes reglas:

- Supongamos que el sistema esta en el estado  $S$ .
- Hacemos que el sistema cambie al estado  $S'$ .
- Si  $E(S') \leq E(S)$  aceptamos el cambio.
- Si  $E(S) < E(S')$ , aceptamos el cambio de manera condicional es decir con la condición

Esta última condición, simula fluctuaciones térmicas. La transición relativa de probabilidad que corresponde al algoritmo es:

$$T(S | S') = \begin{cases} 1 & E(S') \leq E(S) \\ e^{-\beta \Delta E} & E(S) < E(S') \end{cases} \quad (2.24)$$

### 2.4.3. Metodo Simulated annealing

En 1983 Kirkpatrick[7], propuso una nueva técnica de búsqueda basada en el proceso de enfriamiento de los metales fundidos. La técnica es llamada simulación de recocido, o (Simulated Annealing, SA). A pesar de ser un método sencillo, ha probado ser increíblemente poderoso, como técnica de búsqueda.

En física de materia condensada, el recocido es conocido como un proceso térmico para obtener estados de baja energía de un sólido en un baño térmico. El proceso contiene los siguientes dos pasos:

- Incrementar la temperatura del baño térmico hasta que el sólido se funde.
- Lentamente bajar la temperatura del baño hasta que las partículas se arreglen por si solas en un estado base del sólido.

En la fase líquida todas las partículas del sólido se arreglan ellas mismas de forma aleatoria. En el estado base las partículas se arreglan en una estructura periódica y la energía del sistema se vuelve mínima. El estado base de un sólido es obtenido solo si la temperatura es suficientemente alta y el proceso de enfriamiento es realizado de forma lenta. De otra forma el sólido se congelara en un estado meta estable, en vez del estado base, y la energía no será mínima. Este método de recocido se utiliza en la industria para obtener materiales más resistentes, o más cristalinos, en general, para mejorar las cualidades de un material. Al final del proceso, los átomos forman una estructura cristalina altamente regular, el material alcanza así una máxima resistencia y la energía del sistema es mínima. Experimentalmente se comprueba que si la temperatura se hace descender bruscamente o no se espera suficiente tiempo en cada etapa, al final la estructura del material no es la óptima.

Este algoritmo evita encontrar mínimos locales, al aceptar soluciones que no minimicen la energía es decir al asociarle una probabilidad, distinta de cero a que el sistema acepte soluciones que no son las más óptimas. Pensemos de la siguiente forma supongamos que deseamos encontrar el punto más bajo de una montaña, entonces si pensamos como el algoritmo del escalador tendríamos la siguiente situación empezariamos a descender por la montaña, y en el caso de que la montaña tenga mínimos locales nos encontraríamos con el primer mínimo. Pero como el algoritmo del escalador no acepta soluciones a menos que minimicen por decir de alguna forma la altura de la montaña entonces al llegar al primer mínimo el algoritmo no podría avanzar ya que no podría subir la colina y encontrar el mínimo global o la altura mínima de la montaña. Por

otro lado en el método del método SA tenemos otra situación ya que en este caso la altura, que es lo que queremos optimizar, si de repente el sistema entra a un mínimo local el algoritmo permite que el sistema pueda salir de este con una probabilidad dada por  $e^{-\beta\Delta H}$ . En este caso como  $\beta$ , depende de la temperatura, se observa la importancia que tiene la temperatura en el algoritmo. Ya que si la temperatura desciende de forma muy rápida, el sistema podría quedar atrapado en un mínimo local, ya que la probabilidad de cambio, o la aceptación de una solución que no sea óptima, tiende a 0 cuando la temperatura tiende a 0, por lo que si se enfría muy rápido no podría pasar el primer mínimo (Figura 2.3)[12].

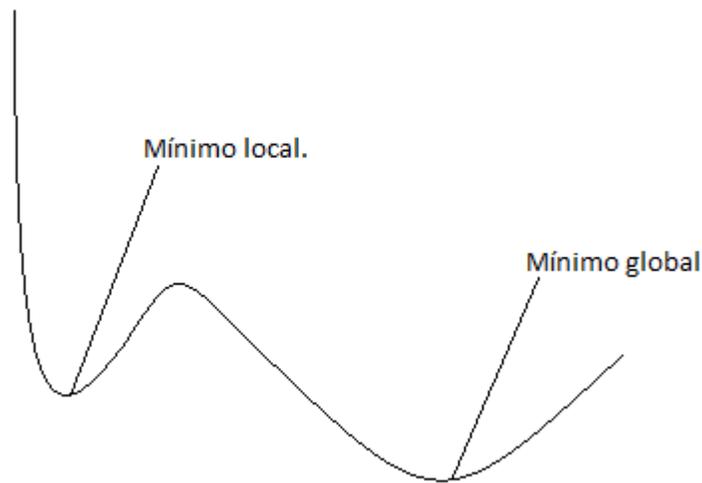


Figura 2.3 Mínimo Global y Local, se puede ver que pueden existir más de dos mínimos y solo nos interesa el global.

Algoritmo de Simulated Annealing, para minimizar funciones.

- Se inicia con un ciclo  $for(i = 0, i \leq i + +)$  que determina el tamaño del muestreo entre más grande mejor
- Se inicia una variable con una posición aleatoria  $x_0$  sobre la región de interés  $(x_i, x_f)$
- Se evalúa la función a minimizar en  $F(x_0)$
- Se genera un número aleatorio que determina hacia donde se mueve  $x_0$  es decir izquierda o derecha, guardando el valor en  $x_f$
- Se vuelve a evaluar la función en el último punto  $F(x_f)$
- Se calcula la diferencia de energías es decir,  $\Delta E = F(x_f) - F(x_0)$ , si esta diferencia es menor a cero el cambio es aceptado.

- Si la diferencia es mayor, usando la temperatura del sistema la cual va disminuyendo, se acepta el cambio con probabilidad  $e^{-\beta\Delta E}$
- Avanza el ciclo en  $i$ .

De acuerdo con la idea de formalizar el algoritmo de Simulated Anealing como un problema de optimización combinatoria en términos de la pareja  $(S, f)$ , podemos decir que la probabilidad de aceptación  $P_t$ , (como en el algoritmo Metrópolis), pero ahora en términos de la función costo y de dos soluciones consecutivas  $i, j$  con la función costo de  $f(i), f(j)$ , respectivamente, se define como:

$$P_t\{\text{aceptación en } j\} = \begin{cases} 1 & f(j) \leq f(i) \\ e^{\frac{f(i)-f(j)}{t}} & f(j) > f(i) \end{cases} \quad (2.25)$$

Que es el mismo criterio de aceptación que el algoritmo metrópolis.

Si tenemos un problema de optimización combinatoria y despues de un gran número de transiciones en algun valor de  $T$  fijo, al aplicar la probailidad de aceptación, el algoritmo de SA encontrara una solución  $i$  en  $S$  con una probabilidad igual a:

$$P_t(X = i) = q_i = \frac{1}{N_0(t)} e^{-\frac{f(i)}{t}} \quad (2.26)$$

$$N_0 = \sum_{j \in S} e^{-\frac{f(j)}{t}} \quad (2.27)$$

En donde  $X$  es una variable estocástica que denota la solución actual obtenida por el algoritmo. Y  $N_0$  es una constante de normalización que es análoga en física estadística a la función de partición, ya que la suma se extiende sobre todos los estados en  $S$ .

Un concepto útil para los conjuntos es la función característica. Tienen la propiedad de que si  $A$  es un subconjunto de un conjunto universal  $U$ , la función característica  $\chi_A$  de  $A$  se define como[13]:

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} q_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{f(i)}{t}}}{\sum_{j \in S} e^{-\frac{f(j)}{t}}} \quad (2.29)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} q_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{f_{opt} - f(i)}{t}}}{\sum_{j \in S} e^{\frac{f_{opt} - f(j)}{t}}} \quad (2.30)$$

En donde podemos ver que la parte de arriba tiende a 1 conforme  $t$  tiende a 0, y poniéndolo en términos de la función característica tenemos:

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{j \in S} e^{\frac{f_{opt} - f(j)}{t}}} \chi_{S_{opt}}(i) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{f_{opt} - f(i)}{t}}}{\sum_{j \in S} e^{\frac{f_{opt} - f(j)}{t}}} \chi_{S \setminus S_{opt}}(i) \quad (2.31)$$

Es decir separamos el limite en dos parte, en la primera parte estamos en el conjunto que contiene a la solución óptima ( $i$ ) por eso la función exponencial nos da 1 ya que  $\lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{a}{t}} = 1$  cuando  $a$  es cero, la segunda parte tenemos el conjunto en donde no tenemos el conjunto de las soluciones óptimas, como  $i$  está dentro del subconjunto de las soluciones óptimas entonces por definición de la función característica tenemos:

$$= \frac{1}{|S_{opt}|} \chi_{S_{opt}}(i)$$

en donde  $S_{opt}$  es el conjunto de soluciones globales óptimas. Este resultado nos garantiza la convergencia asintótica del algoritmo SA.

Otra definición importante en el método de SA se denomina la tasa de aceptación a la razón entre el número de transiciones aceptadas, y el número de transiciones propuestas es decir:

$$T_{aceptación}(t) = \frac{\text{Número de transiciones aceptadas}}{\text{Número de transiciones propuestas}}$$

Cuando la diferencia entre la solución optimizada y el paso anterior es mayor a cero, se le asigna una probabilidad de transición si contamos todas las probabilidades que ocurren a lo largo del algoritmo obtenemos el número de transiciones propuestas, sin embargo no todas las transiciones son aceptadas y las transiciones aceptadas corresponden al número de transiciones aceptadas. Como este resultado depende de la temperatura al graficar esta razón en función de la temperatura obtenemos una curva parecida a la siguiente (figura 2.4):

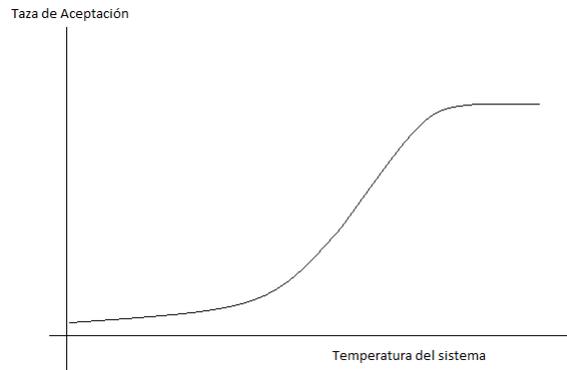


Figura 2.4 Taza de aceptación del sistema respecto a la temperatura. Se observa que a menor temperatura la tasa de aceptación es cercana a cero.

Lo que nos dice la grafica anterior es que a menores temperaturas tenemos una menor tasa de aceptación es decir el número de transiciones aceptadas disminuye al disminuir la temperatura.

## 2.5. Bobina de geometría cilíndrica .

La geometría más usada en las bobinas gradiente es una geometría de tipo cilíndrica. Una de las configuraciones más usadas en la física son las bobinas de Helmholtz estas bobinas son adecuadas para una geometría cilíndrica, que consisten en dos bobinas circulares del mismo radio, con un eje común, separadas por una distancia elegida de tal modo que la segunda derivada de  $B$  se anule en un punto del eje que esté a la mitad de la separación entre las bobinas.

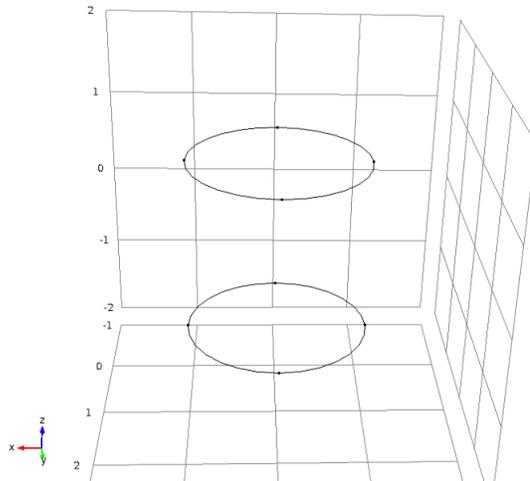


Figura 2.5 En este esquema podemos observar una bobina de Helmholtz

Usando Biot Savat es fácil encontrar que la inducción magnética en un punto sobre el eje de las bobinas, y suponiendo que las bobinas están situadas en  $z = \pm \frac{r}{2}$  es:

$$B_z = \frac{\mu_0 I r^2}{2} \left( \frac{1}{(r^2 + (z - \frac{r}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(r^2 + (z + \frac{r}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.32)$$

Diferenciando respecto a  $z$  tenemos:

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{-3\mu_0 r^2}{2} \left( \frac{z + \frac{r}{2}}{(r^2 + (z + \frac{r}{2})^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{z - \frac{r}{2}}{(r^2 + (z - \frac{r}{2})^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \quad (2.33)$$

A continuación se muestran el campo obtenido de una bobina de Helmholtz. En estas gráficas podemos observar como la componente  $z$  del campo magnético en el centro de las bobinas es constante.

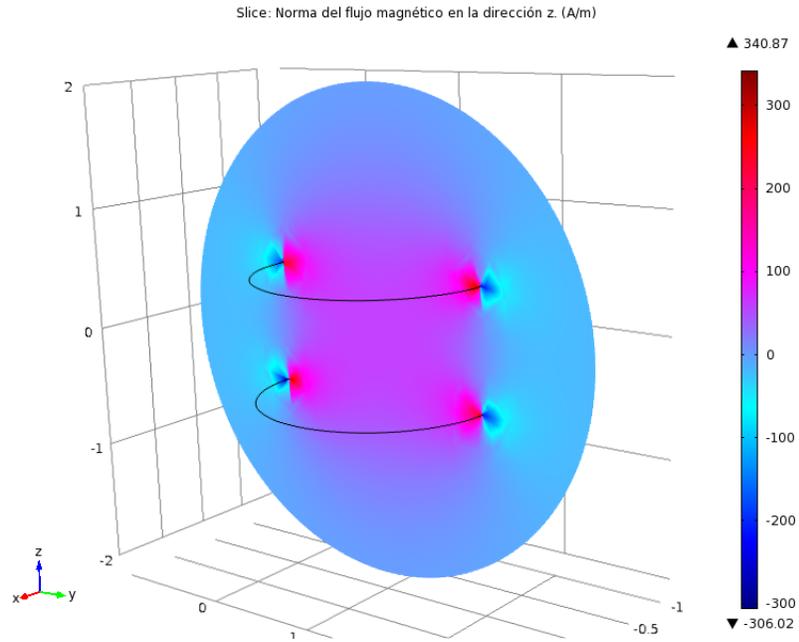


Figura 2.6 Representación en colores del campo magnético en la dirección  $z$

A continuación se muestra la forma del campo magnético sobre el eje:

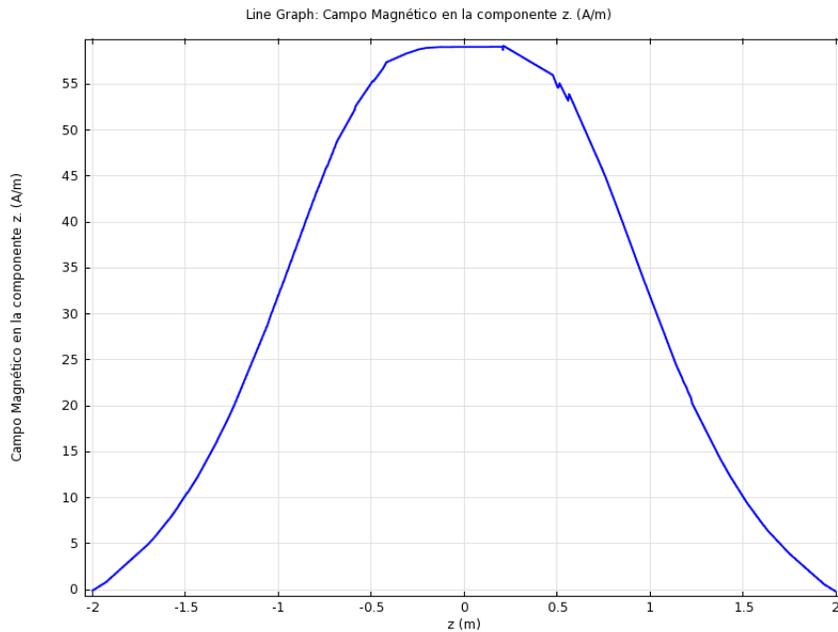


Figura 2.7 Gráfica del campo en la componente z en el eje de las bobinas

Si en una de las bobinas invertimos la corriente, el signo en el primer termino , se obtienen las bobinas de Maxwell en donde la principal característica es que tienen un gradiente lineal en  $z$  , como podemos observar a continuación.

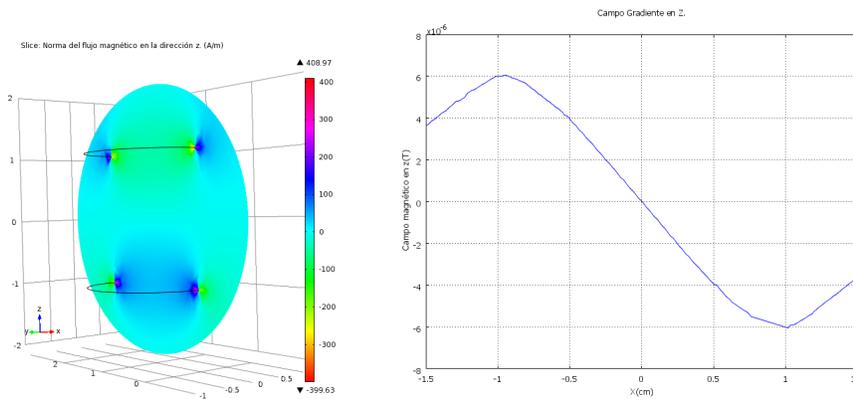


Figura 2.8 Bobinas de Maxwell con su respectiva gráfica sobre el eje.

Sin embargo si queremos el campo magnético fuera del eje las ecuaciones se complican un poco más se necesitan incluir integrales elípticas de primer y segunda especie es decir para la componente  $z$  tenemos que el campo está dado por la siguiente ecuación:

$$B_z = \frac{\mu IR}{2\pi(2Ry)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{Rb\sqrt{2b}E(b)}{2-2b} + y\sqrt{2b}K(b) - \frac{y(2-b)\sqrt{2b}E(b)}{2-2b} \right) \quad (2.34)$$

$$b = \frac{4Ry}{R^2 + z^2 + y^2 + 2Ry} \quad (2.35)$$

En el caso de que la bobina esté desplazada es decir no se encuentre sobre el origen entonces  $z$  cambia a  $z - z_0$ . En la ecuación anterior los términos  $K$  y  $E$ , representan integrales elípticas de primer y segunda especie. Y se puede ver que el gradiente en  $z$  o  $\frac{\partial B}{\partial z}$  es mucho más complicado, ya que incluye derivadas de las integrales elípticas. Utilizando esta expresión y graficándola obtenemos el siguiente campo magnético de la componente  $z$  de una sola espira centrada en el origen de radio 5.

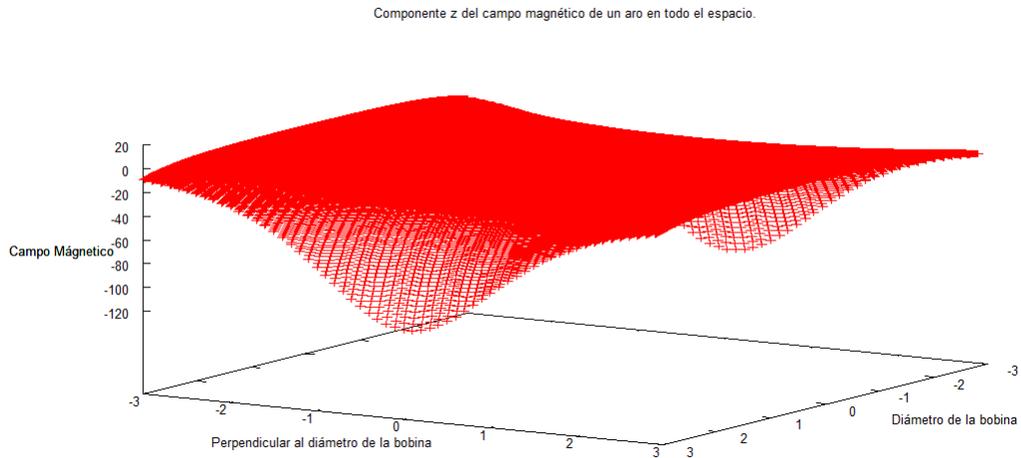


Figura 2.9 Campo Magnético en la componente  $z$  de una sola espira.

En la gráfica anterior lo que podemos observar es que al ver la componente  $z$  su comportamiento dependerá de la distancia al eje de la bobina en la dirección  $z$  y en la gráfica anterior dicha componente es nombrada el diámetro de la bobina en alusión a que nos movemos sobre el diámetro, y la componente  $z$  es nombrada perpendicular al diámetro.

Para construir nuestra bobina gradiente prototipo en  $z$ , necesitamos conocer el gradiente en esta dirección es decir,  $\frac{\partial B}{\partial z}$ , esta ecuación es necesaria para poder hacer la simulación que nos va a permitir encontrar las bobinas gradientes.

$$l = \frac{4Ry}{R^2 + z^2 + y^2 + 2Ry} \quad (2.36)$$

$$h = R^2 + 2Ry + z^2 + y^2 \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial z} = & \frac{\mu IR}{2\pi(2Ry)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{8R^2yz\sqrt{I}K(b)}{h(2-2b)} - \frac{32R^2yz\sqrt{I}E(b)}{h^2(2-2b)} - \frac{128R^3y^2z\sqrt{I}E(b)}{h^3(2-2b)^2} - \frac{8Ry^2z\sqrt{I}K(b)}{h^2(2-2b)} + \frac{4yz\sqrt{I}K(b)}{h(2-2b)} + \right. \\ & \left. \frac{32Ryz\sqrt{I}E(b)}{h^2(2-2b)} - \frac{64Ry^2z\sqrt{I}E(b)}{h^2(2-2b)^2} - \frac{8yz\sqrt{I}E(b)}{h(2-2b)} + \frac{128R^2y^3z\sqrt{I}E(b)}{h^3(2-2b)^2} - \frac{2\sqrt{2}yz\sqrt{I}E(b)}{R^2-2Ry+z^2+y^2} \right) \end{aligned}$$

Una vez que tenemos como calcular el gradiente del campo fuera del eje para una bobina podemos, encontrar una distribución para cualquier número de bobinas y de esta forma obtener un gradiente magnético en  $z$  lineal utilizando la expresión anterior. La idea para poder simular esta bobina, se basa en el método (SA). Utilizando el funcional [6]

$$U = \alpha L + \sum (< G_n > - G_z)^2 \quad (2.38)$$

Con lo anterior lo que esperamos de nuestro algoritmo es que dado el gradiente promedio en la región de interés encontrar las posiciones, de las espiras que minimicen este funcional. Para cada punto del espacio se calcula el gradiente debido a todas las espiras en ese punto y calcula su desviación respecto al gradiente promedio, se le puede adicionar el termino de inductancia  $L$ , con lo que obtendríamos un funcional que va a estar minimizado tanto en la desviación del gradiente promedio y su inductancia. Por lo que queremos un algoritmo que, dada la corriente el radio de las espiras y el número de estas, mueva cada una de las espiras a lo largo del eje de la bobina, hasta que se encuentren las posiciones donde el funcional sea mínimo.

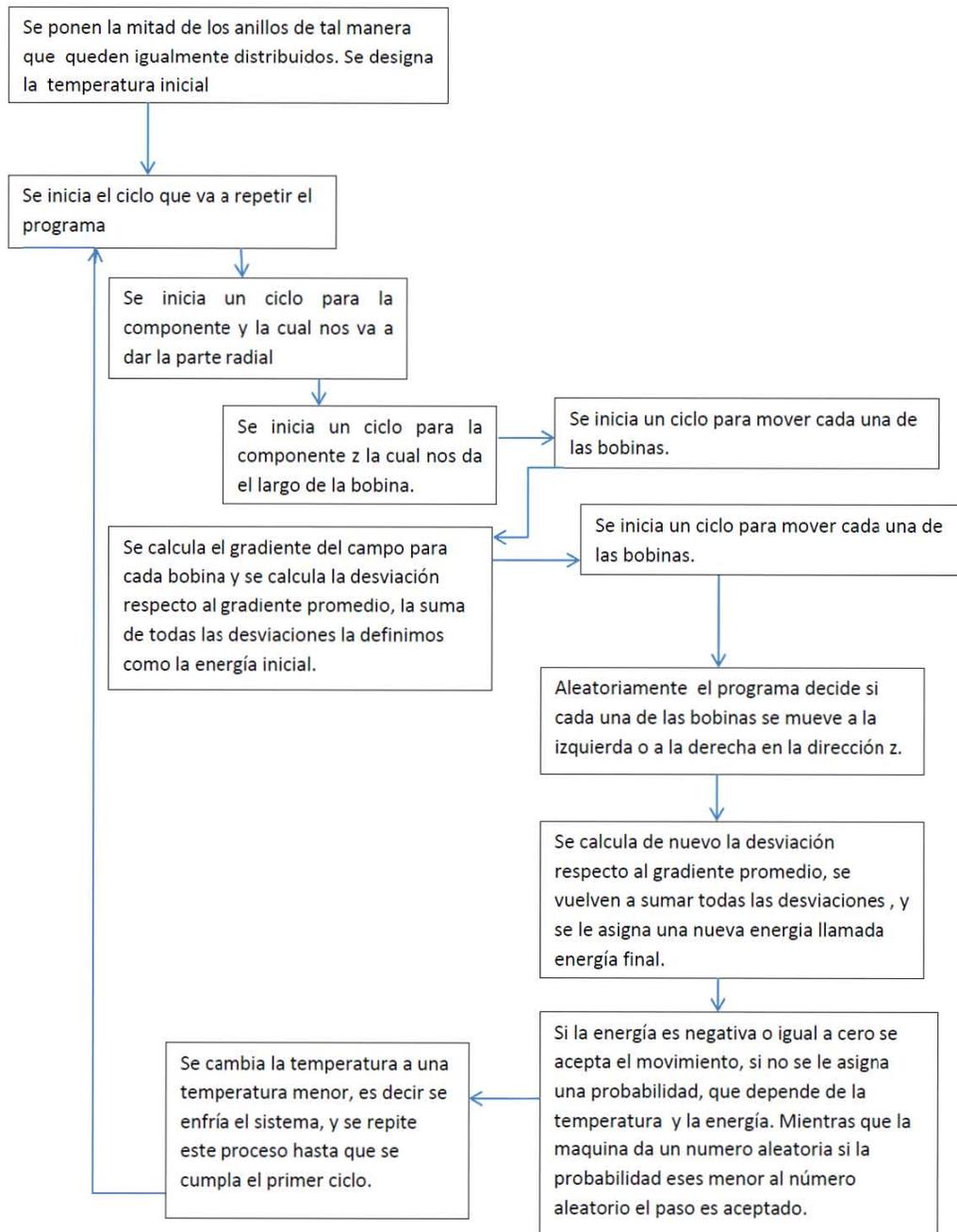
## Capítulo 3

# Implementación numérica y experimental.

En el capítulo anterior se revisaron algunas ideas que nos permitirán, realizar un algoritmo para poder construir nuestra bobina prototipo. Como mencionamos anteriormente hay métodos que recurren a la inversión de la ley de ampere en este caso trabajan en un espacio de Fourier y hay métodos que utilizan el espacio real. En el diseño de esta bobina se obtuvo por utilizar un método en donde se utilizara el espacio real. Para esto se utilizó la ley de Biot-Savart para la región de un anillo, el campo que este anillo genera se calculó en la sección anterior a gradiente. En esta observaremos cómo funciona el algoritmo basado en la idea de optimización usando SA. Compararemos los resultados obtenidos de la simulación con los resultados obtenidos de construir una bobina con los resultados de la optimización, con la finalidad de darle validez a la simulación.

### 3.1. Implementación numérica.

El algoritmo que se utilizó para diseñar la bobina fue programado en C (ver el programa en el apéndice). A continuación se muestra el algoritmo del programa en forma esquemática.



En el algoritmo solo se toma en cuenta la mitad de los anillos totales que se van a utilizar, es decir si queremos que en total nuestra bobina tenga 40 espiras

solo tomamos en cuenta 20 que son las que irán en un lado de la bobina. Esto es debido a la simetría que existe.

### 3.1.1. Integrales elípticas.

Una de las partes esenciales en el programa fue que se aproximaron las integrales elípticas usando la idea de aproximación por media geométrica, la cual tiene la ventaja de que converge de manera más rápida que una serie de Taylor por lo que se requieren un número menor de términos en cada valor. En el caso de la presente simulación se utilizó ocho términos para cada valor. Cabe mencionar que esta aproximación es la usada por el software comercial MATLAB para generar los valores de las integrales. En la función *struct Intelipt eliptica(struct Intelipt p, float x)*, esta toda la programación de estas integrales, se optó por utilizar una función de estructuras la cual nos permite obtener a la vez el valor de las dos integrales es decir de primera y segunda especie.

Para eso se utilizaron las siguientes aproximaciones:[10]

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad (3.1)$$

$$E(m) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-mt^2} dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (3.2)$$

Donde K y E son integrales de primer y segundo orden.

Para utilizar el método de media aritmética se calcula usando una sucesión de tripletas es decir:

$a_n = \frac{a_{n-1} + g_{n-1}}{2}$  es la media aritmética de  $a_{n-1}$  y  $g_{n-1}$

$g_n = \sqrt{a_{n-1}g_{n-1}}$  es la media geométrica de  $a_{n-1}$  y  $g_{n-1}$

$s_n = \frac{a_{n-1} - g_{n-1}}{2}$  es la semidiferencia de  $a_{n-1}$  y  $g_{n-1}$

Para calcular las integrales de m tenemos el siguiente algoritmo:

- inicializamos  $a_0 = 1$ ,  $g_0 = \sqrt{1-m}$ ,  $s_0 = \sqrt{m}$
- Iteramos  $(a_n, g_n, s_n)$ , para  $n = 1, \dots, N$ , donde N representa el número de terminos en nuestra aproximación.
- Finalizamos calculando K y S

$$K(m) = \frac{\pi}{2a_N} \quad (3.3)$$

$$S(m) = \frac{K(m) - E(m)}{K(m)} \simeq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N 2^n s_n^2 \quad (3.4)$$

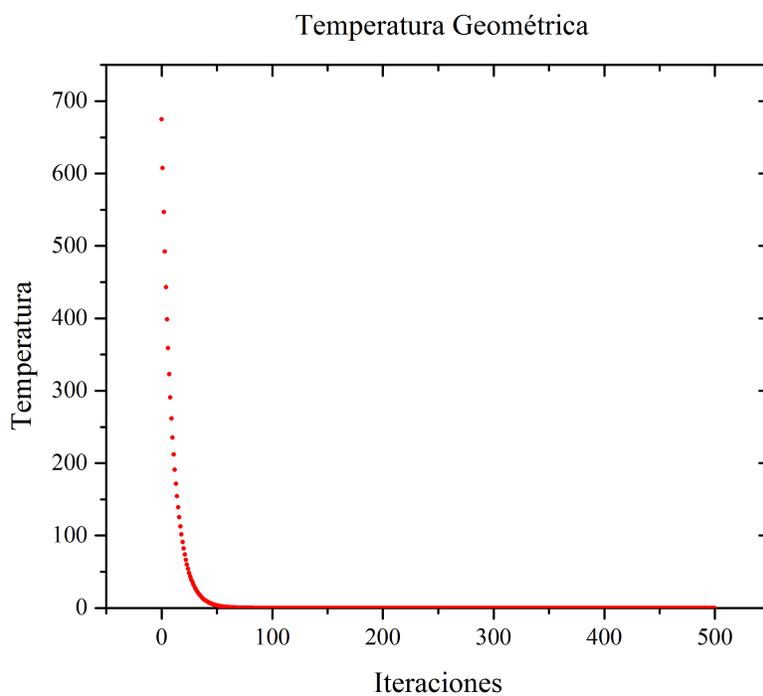
Por lo que finalmente:

$$E(m) = (1 - S) K \quad (3.5)$$

### 3.1.2. Temperatura

Una de las partes más importantes a la hora de optimizar usando el método de Simulated Annealing, es el cambio de la temperatura conforme el algoritmo es ejecutado, ya que previene que el sistema quede atrapado en un mínimo local. Y se puede condicionar una regla para que la temperatura decrezca con las iteraciones una de las más simples se le conoce como decaimiento geométrico, y es de la siguiente forma:

$$T = cT$$



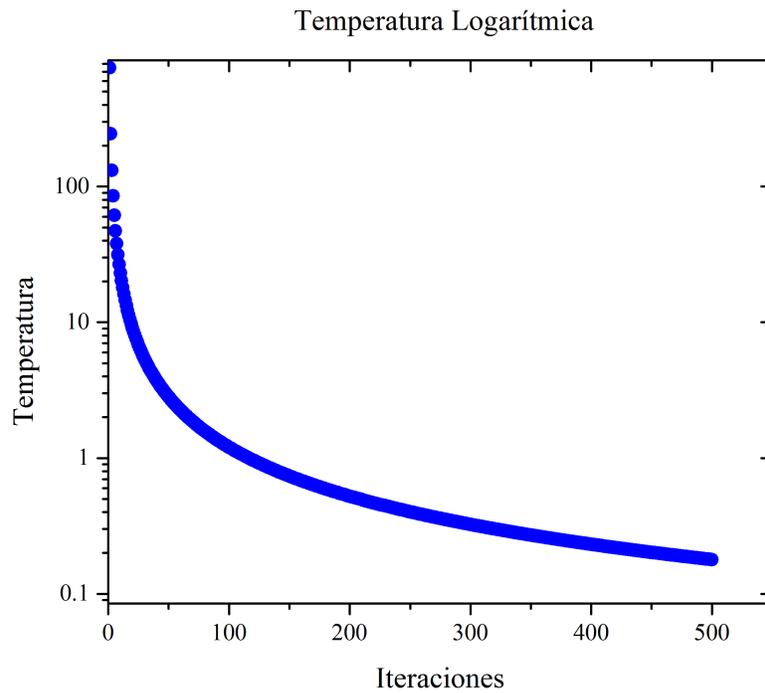
Gráfica 3.1. Temperatura vs Iteraciones

Este modelo de temperatura se puede pensar como un modelo Malthusiano, en una población, solo que en este caso en vez de ser una población es la temperatura del sistema y esta decrece conforme el algoritmo avanza. Esta es una

forma discreta de bajar la temperatura y en cada paso dependerá del valor anterior. En este caso  $c$  puede ser cualquier valor entre 0 y 1 dependiendo de qué tan rápido se quiera que la temperatura decrezca.

Por otro lado se puede bajar la temperatura usando una función logarítmica como la siguiente:

$$T = \frac{d}{\log(t)}$$



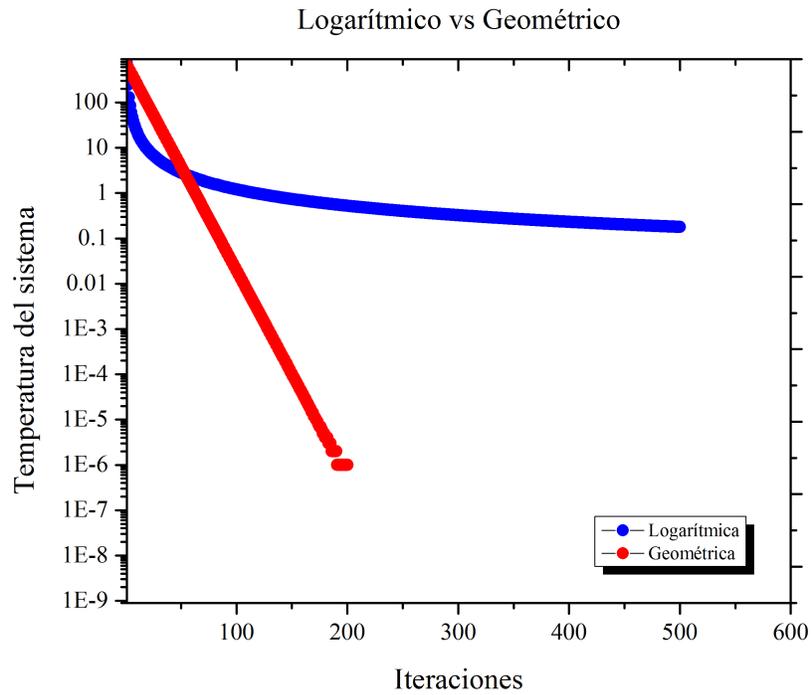
Gráfica 3.2. Log de Temperatura vs Iteraciones

En este caso aunque no se aprecie mucho la diferencia conforme el sistema avanza, la temperatura disminuye cada vez más lentamente. En este trabajo se utilizó la siguiente función para disminuir el valor de la temperatura. La grafica anterior representa dicha función.

$$T = \frac{5000}{\log(i+1.1)} \left( \frac{1}{9i} \right)$$

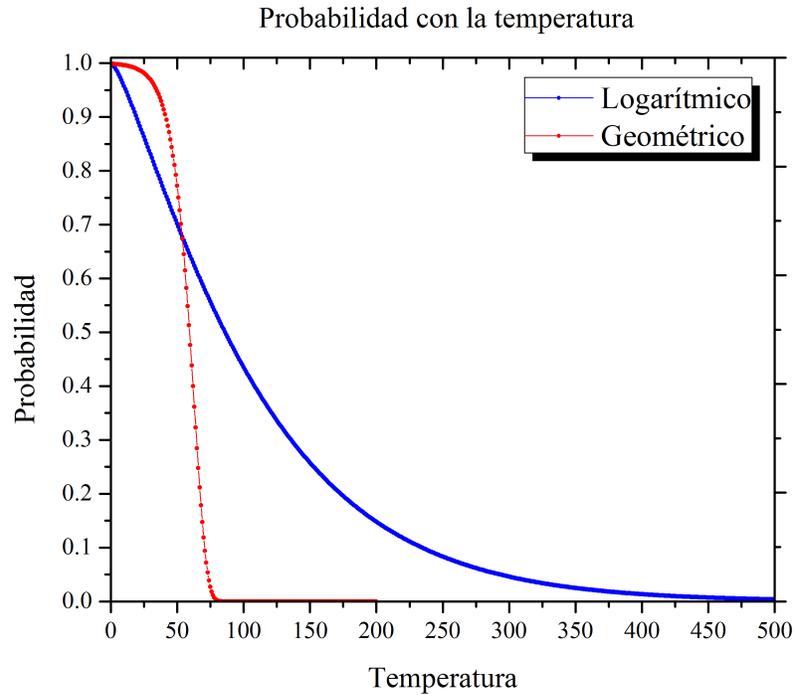
La principal diferencia entre la función logarítmica y la geométrica es que después de 50 pasos la función geométrica decrece más rápido que la logarítmica por lo que el sistema después de esto solo aceptara cambios que disminuyan la energía. A continuación se observa la comparación entre el comportamiento de

la función geométrica y la logarítmica. En donde podemos ver que la logarítmica va mucho más lenta.



Gráfica 3.3. Comparación de los dos modelos.

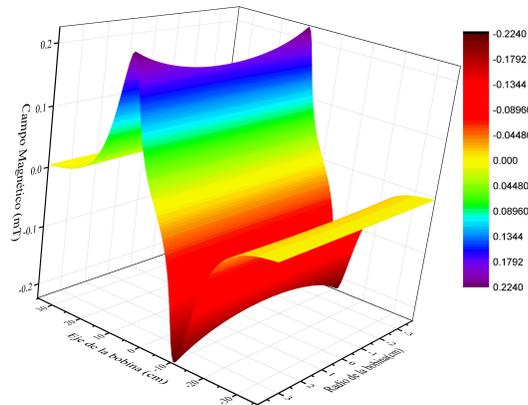
Al graficar la aceptación en función de los pasos en el programa se puede observar que antes de 100 pasos la probabilidad de aceptación de un estado de mayor energía es cero a diferencia del caso logarítmico en donde después de 500 pasos la probabilidad de aceptación se vuelve cero. Esto mejora la habilidad del algoritmo de no caer en mínimos locales, ya que al enfriarse más lentamente el sistema puede llegar a ocupar más estados, obteniendo un mínimo local. La gráfica siguiente muestra esa probabilidad de aceptación  $e^{-\beta\Delta E}$ , en este caso se gráfico solo tomando en cuenta la temperatura es decir  $e^{-\beta}$ .



Gráfica 3.4. Probabilidad de aceptación en función de la temperatura.

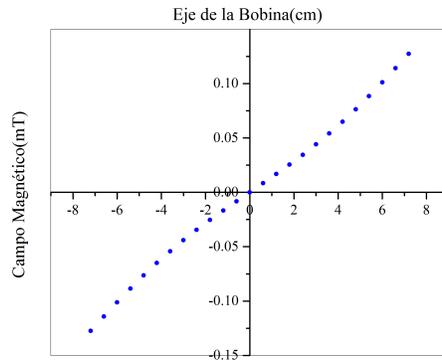
### 3.1.3. Resultados del programa

Al correr varias veces la simulación para un cilindro se encontró que cuando el largo total de la bobina es decir de un extremo a otro, era mayor que el diámetro de las espiras no se podía obtener una linealidad óptima. A continuación se muestra los resultados obtenidos de correr la simulación bajo los siguientes parámetros, 8 espiras con 8 cm de radio y 8 cm de largo. En la gráfica siguiente se puede observar que el comportamiento después de optimizar no es exactamente un comportamiento de tipo lineal, sino que tiene algunas fluctuaciones.



Grafica 3.5 obtenida de la simulación para una bobina no cuadrada.

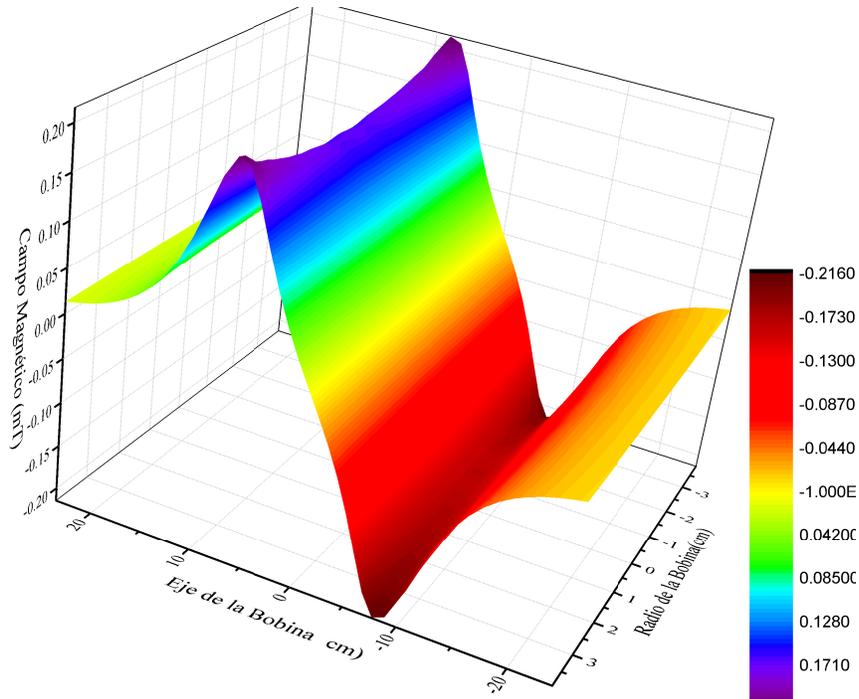
En un corte sobre el eje de la bobina podemos observar que el comportamiento es lineal en una pequeña región con un largo total de 8 cm, es decir 4 cm en cada lado del origen.



Gráfica 3.6 sobre el eje de la bobina con los datos de la gráfica 5.

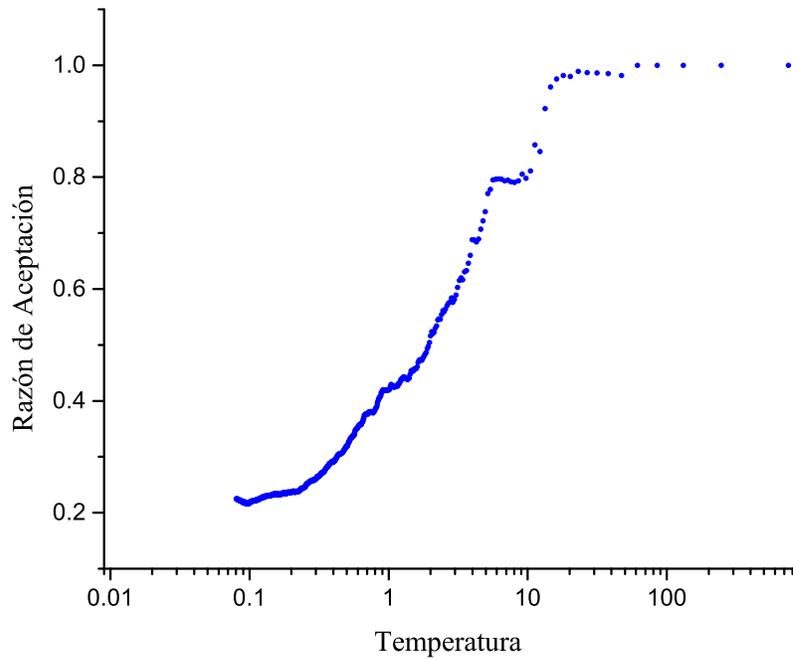
En la gráfica anterior podemos ver que cada color se conserva sin cambios sobre el radio de la bobina, siempre que se mantenga un largo fijo en el eje de la bobina. También esquemáticamente podemos observar cómo cambia de color al movernos sobre el eje de la bobina. Este cambio de color representa el cambio en la componente  $z$  del campo magnético.

Finalmente se optó por un diseño simétrico para la bobina en donde se obtuvo el siguiente comportamiento para el campo magnético:



Gráfica 3.7 en donde se muestra en escala de colores el campo magnético en la dirección z en (mT) dado por la simulación.

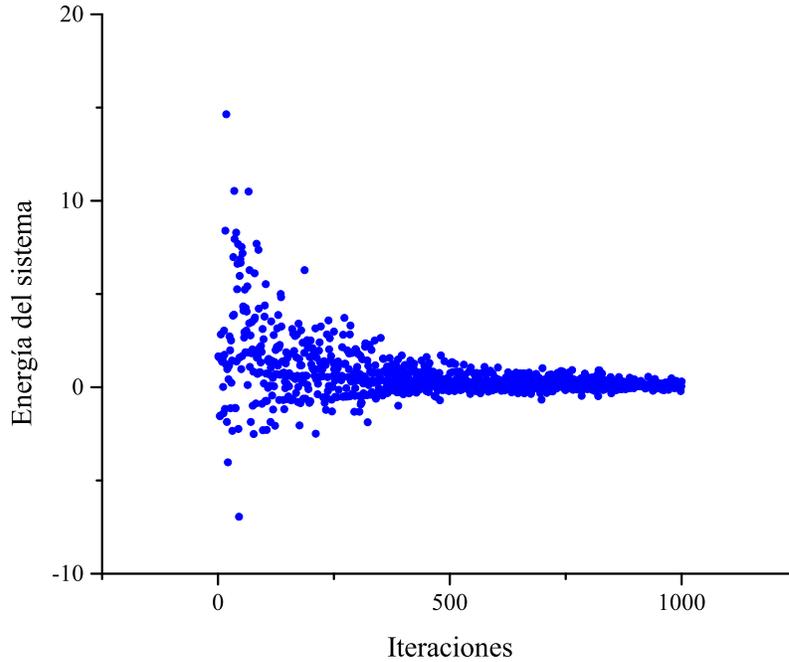
La tasa de aceptación del sistema, es decir cómo cambia a lo largo del algoritmo la aceptación a estados de mayor energía. La siguiente grafica nos muestra esta razón de aceptación de la simulación, en donde podemos ver que conforme la temperatura disminuye la aceptación también. Es decir para temperaturas bajas prácticamente no se realizan cambios a niveles de mayor energía. Podemos ver que al principio de la simulación la razón de aceptación es de 1.



Grafica 3.8 En esta gráfica podemos observar que al disminuir la temperatura la razón de aceptación disminuye.

Sin embargo a temperaturas cercanas a 0.1 la razón se estabiliza por lo que prácticamente no cambia el sistema a estados de mayor energía, es decir para temperaturas más bajas, solo se aceptan cambios de menor energía.

Analizando la energía total del sistema es decir la desviación estándar del gradiente, obtenemos la siguiente gráfica en donde podemos ver que conforme se avanza en las iteraciones, cada vez se obtiene una menor energía hasta que por fin se llega un momento en donde la energía esta tan cercana a cero que prácticamente no se mueve del cero.



Grafica 3.9 Al disminuir la energía se obtiene una mejor aproximación lineal ya que la energía depende de la desviación cuadrática, y entre menor sea esta se obtiene una mejor aproximación con el campo gradiente promedio.

Para el caso de la simulación cilíndrica se construyó la bobina en base a los resultados finales de las espiras obtenidos en la simulación, con la finalidad de contrastar con los datos experimentales con los de la simulación. En todas las simulaciones solo se utilizó el siguiente funcional:

$$U = \sum (\langle G_n \rangle - G_z)^2$$

Es decir solo minimizamos la desviación del gradiente promedio con el gradiente en cada punto del espacio. Por simplicidad del diseño y debido a que nuestras fuentes de corriente son de 3 amperes, se decidió por no incluir el término de la inductancia. En el algoritmo, aparte de conocer las posiciones de las bobinas al final de todos los cálculos, se pidió que se guardara la energía del sistema (la desviación) en cada paso del algoritmo, para corroborar que en verdad se estuviese minimizando el funcional. Cuando finaliza el algoritmo, se crean varios archivos todas las posiciones de las espiras se guardaron bajo el nombre de espiras, la energía del sistema se guarda bajo el nombre de energía,

y finalmente el campo magnético que genera el conjunto de espiras se guarda en un archivo de nombre campo.

## 3.2. Implementación experimental .

### 3.2.1. Construcción del Prototipo

En base a la sección anterior se pudo observar que los diseños no simétricos no generaban, un gradiente lo suficientemente lineal. Para poder construir el prototipo se consideró una bobina simétrica, es decir que el diámetro fuese igual al largo de la bobina. Las medidas en base a las cuales se diseñó la bobina, fue que el largo fuese de 16 cm con este largo el radio de la bobina estaría en 8 cm por espira. Se decidió por una bobina de tamaño pequeño ya que abre la posibilidad de trabajar en el futuro con sistemas de resonancia de menor tamaño, en donde se podrían usar en animales pequeños, si se usase un aparato de mayor tamaño para el estudio de animales pequeños no se alcanza la resolución suficiente a como lo haría un sistema de menor tamaño. La corriente de la bobina en base a la cual se simulo en el programa fue de 3 A. Este valor en específico fue debido a que se observó que la magnitud de gradiente máximo es de 0.2 mT/cm. Con estos valores se ingresaron en el programa y se obtuvo las siguientes posiciones para las espiras de la bobina:

Tabla 1 a continuación ponemos las posiciones de las espiras determinadas por la simulación.

Espiras
$\pm 6.95$
$\pm 7.22$
$\pm 7.39$
$\pm 7.52$
$\pm 7.87$
$\pm 8.02$
$\pm 8.14$
$\pm 8.19$

El número de espiras que se eligió para la bobina prototipo no fue arbitraria, ya que se consideró un número de espiras el cual generas un gradiente lo suficientemente lineal y que no se tardase tanto tiempo el procesamiento del programa. Se empezó con un prototipo de 12 espiras, y al empezar su construcción se observó que existía la complicación de que en algunos puntos, las espiras quedaban demasiado cercanas que el diámetro del cable impedía su construcción. En este punto se optó por utilizar otro tipo de alambre pero se observó que era difícil que no se rompiese. Por lo que se volvió a correr el programa y buscamos un número de espiras en el cual no estuviesen lo suficientemente cercanas, y se encontró que con 8 espiras en cada lado se podía construir el prototipo sin tener que cambiar de cable en nuestro caso se usó alambre de cobre de número 23.

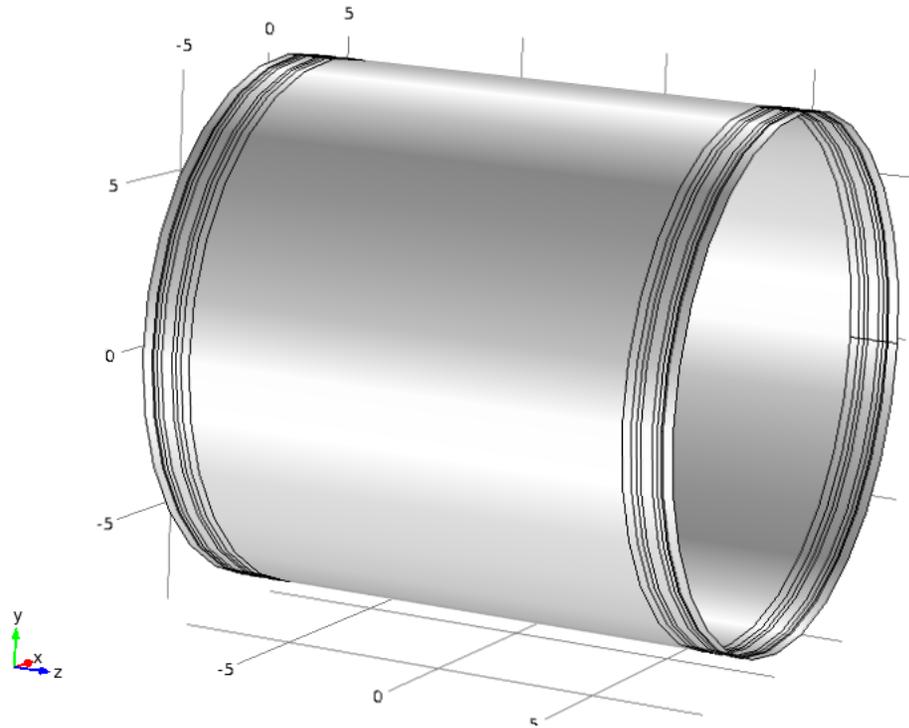
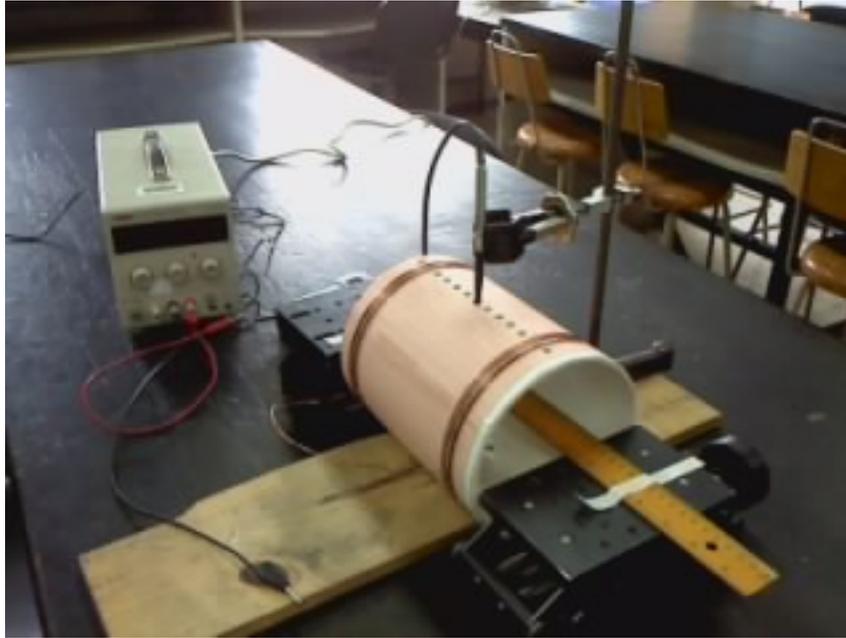


Figura 3.1. Representación a esquemática de la bobina gradiente construida.

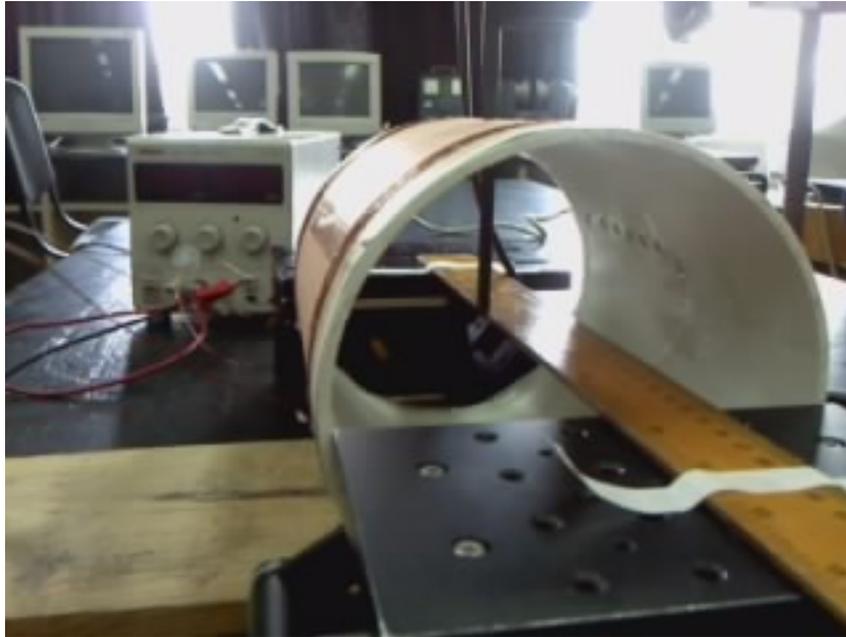
En base a la figura anterior y a la tabla 1, se procedió a construir la bobina. En la construcción de la bobina se requirió tiempo en su elaboración ya que no se encontró de manera fácil un materia que cumpliera con las dimensiones necesitadas. Se empezó por intentar con madera ya que es un material fácilmente moldeable, se intentó usar un torno pero no se logró obtener el tamaño deseado. Después se procedió a moldear la bobina por medio del uso de hojas de plástico, se consiguió las medidas que se deseaban sin embargo no se obtuvo la suficiente dureza por lo que al realizar mediciones se obtenía un gradiente desplazado. Finalmente se intentó utilizando un tubo de PVC, con el diámetro que se quería que era de 16 cm. Para poder hacer que las espiras quedasen en el lugar en el que se requerían de manera precisa, se recubrió la parte exterior de la bobina con papel milimétrico. Finalmente para poder realizar las mediciones se realizaron orificios sobre la pared del cilindro de tal forma que se pudiese meter la punta del teslametro para poder medir el campo magnético sobre el eje de la bobina. Estos orificios están espaciados cada 1.5 cm cada uno en total son 8 orificios, estos orificios tienen la finalidad de ser útiles para poder insertar el teslametro sobre la región de interés.

A continuación se muestran, las fotos de la bobina una vez que se construyó en base a los datos de la tabla anterior. Esta bobina como se mencionó anteriormente está construida sobre un tubo de PVC de 16 cm de diámetro.



Fotografía 3.1, se muestra la bobina con el respectivo arreglo experimental

Para realizar las mediciones de manera precisa se tuvo que ajustar a cero el teslametro cada vez que se realizaba una nueva corrida de datos. El teslametro se ajustaba a cero debido al campo magnético terrestre el cual podía interferir con nuestras mediciones ya que este campo magnético tiene una magnitud de 0.05mT comparable al campo magnético de nuestras mediciones. De manera que una vez fijada la bobina se procedía a hacer las mediciones sin moverla.



Fotografía 3.2, se muestra la bobina en donde se muestra que la regla coincide con el eje, cabe mencionar que al mover las mesas elevadoras se cambia la coordenada y.

Para conectar las espiras de los dos extremos se utilizó un arreglo en donde estuviesen conectadas por un solo cable, es decir primero se colocaron las espiras de un extremo en una misma dirección para un extremo de la bobina, al acabar con las ocho espiras se dejó un extremo de cable suelto para conectar el otro extremo de la bobina. En este extremo las espiras se enrollaron en dirección contraria a las de la primera bobina empezando del centro hacia afuera.

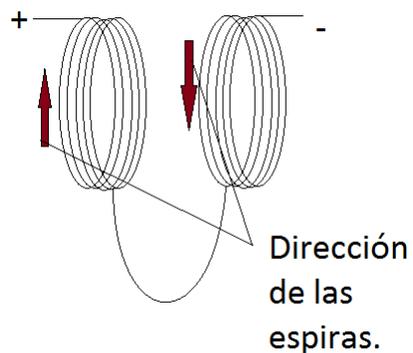


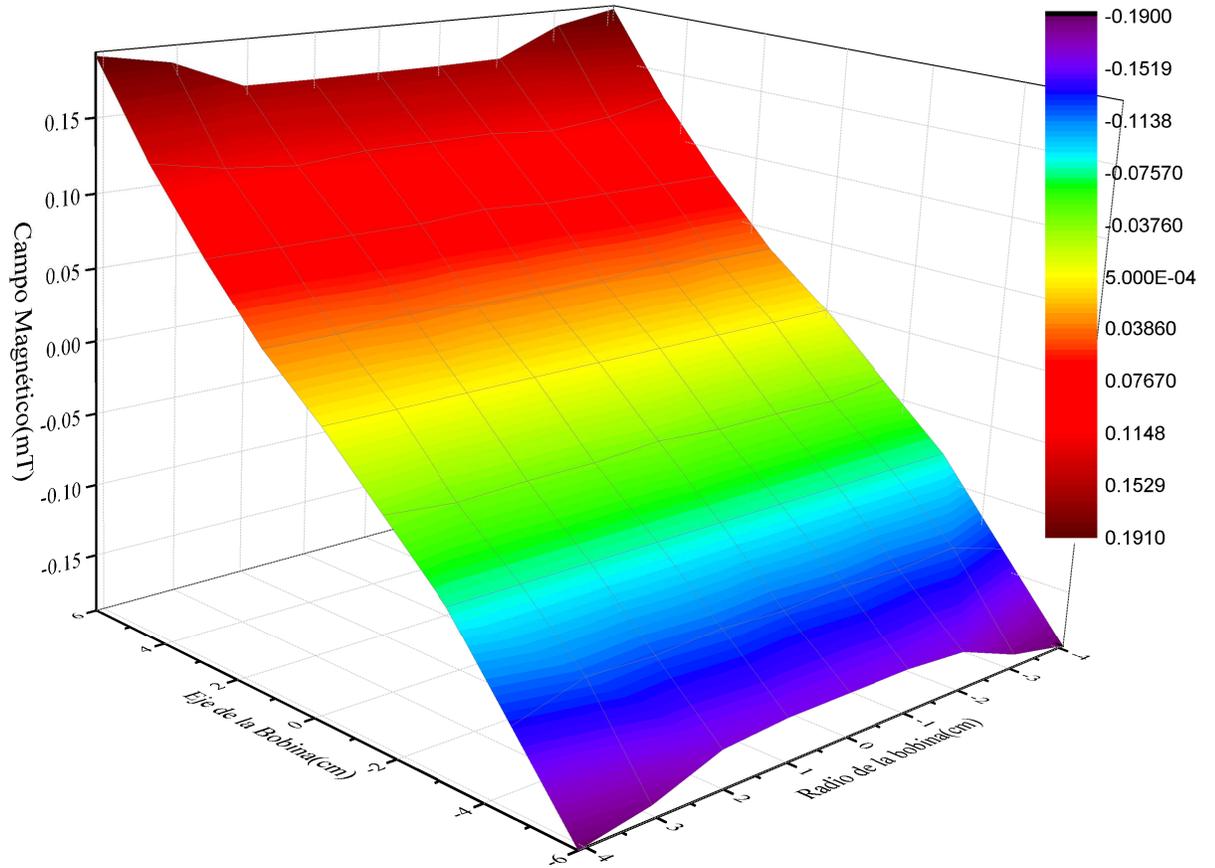
Figura 3.2 En el esquema anterior se puede observar la dirección de las espiras y su concección.

Para realizar las mediciones con el teslametro, de acuerdo con el manual este presenta una incertidumbre de 10 % respecto a la medición obtenida.

## Capítulo 4

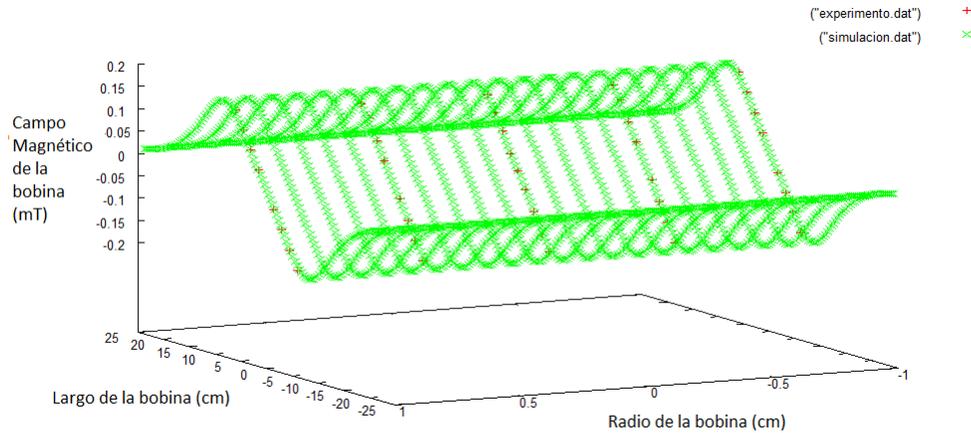
# Resultados Experimentales.

Utilizando los datos experimentales podemos ver la siguiente grafica, que se obtuvieron de medir la componente  $z$  del campo magnético sobre el eje para diferentes radios de la bobina. Una vez medido el campo magnético generado por la bobina se obtuvo la siguiente gráfica, en donde podemos ver que en una gran región el comportamiento es bastante lineal. En esta grafica solo se toma en cuenta la región de interés es decir de  $-6cm$  a  $6cm$  en la dirección del eje y hasta un radio de  $4cm$  sobre el eje del radio de la bobina. Dentro de esta región podemos ver que la variación del campo magnético es muy parecida a la simulación es decir cambia en el mismo rango es decir de  $-20\text{ mT}$  a  $-20\text{mT}$ .



Gráfica 4.1 en donde se muestra en escala de colores el campo magnético en la dirección z en (mT) que se obtuvieron de forma experimental.

Contrastando los datos obtenidos con los simulados tenemos la siguiente gráfica. Cosa que es realmente fácil en gnuplot. Los datos experimentales están de color rojo mientras que los datos generados en la simulación son de color verde. Una de las desventajas de usar gnuplot es que no se puede colocar barras de incertidumbre.



Gráfica 4.2 Comparación de datos experimentales(rojo) con simulados (verde), para el campo manético en la dirección z en (mT).

Los siguientes datos muestran, los resultados obtenidos experimentalmente con ayuda del teslametro. La parte en y hace referencia a medidas en donde la componente y es cero y cuando deja de ser cero, el comportamiento obtenido es el mismo a esa misma distancia.

**Tabla 2 de resultados experimentales en diferentes radios ( $y$  cm).**

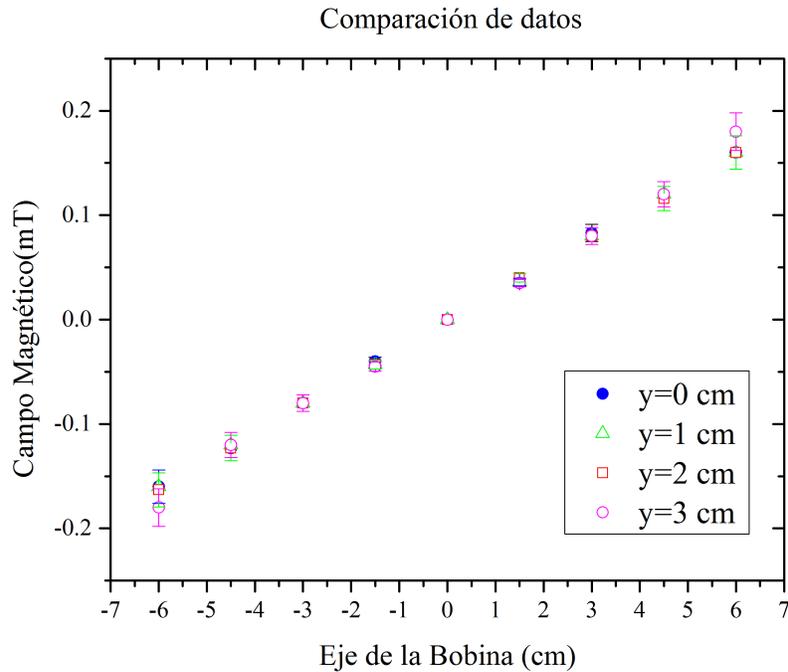
Largo de la bobina ( $y = 0cm$ )	Campo Magnético(mT)
-6	$-0.16 \pm 0.016$
-4.5	$-0.123 \pm 0.012$
-3	$-0.08 \pm 0.008$
-1.5	$-0.04 \pm 0.004$
0	0
1.5	$0.036 \pm 0.003$
3	$0.083 \pm 0.008$
4.5	$0.12 \pm 0.012$
6	$0.16 \pm 0.016$

Largo de la bobina( $y = 1cm$ )	Campo Magnético(mT)
-6	$-0.16 \pm 0.016$
-4.5	$-0.12 \pm 0.012$
-3	$-0.08 \pm 0.008$
-1.5	$-0.043 \pm 0.004$
0	0
1.5	$0.036 \pm 0.003$
3	$0.08 \pm 0.008$
4.5	$0.12 \pm 0.012$
6	$0.16 \pm 0.016$

Largo de la bobina( $y = 2cm$ )	Campo Magnético(mT)
-6	$-0.163 \pm 0.016$
-4.5	$-0.123 \pm 0.012$
-3	$-0.08 \pm 0.008$
-1.5	$-0.043 \pm 0.004$
0	0
1.5	$0.04 \pm 0.004$
3	$0.08 \pm 0.008$
4.5	$0.116 \pm 0.011$
6	$0.16 \pm 0.016$

Largo de la bobina( $y = 3cm$ )	Campo Magnético(mT)
-6	$-0.18 \pm 0.018$
-4.5	$-0.12 \pm 0.012$
-3	$-0.08 \pm 0.008$
-1.5	$-0.045 \pm 0.004$
0	0
1.5	$0.035 \pm 0.003$
3	$0.08 \pm 0.008$
4.5	$0.12 \pm 0.012$
6	$0.18 \pm 0.018$

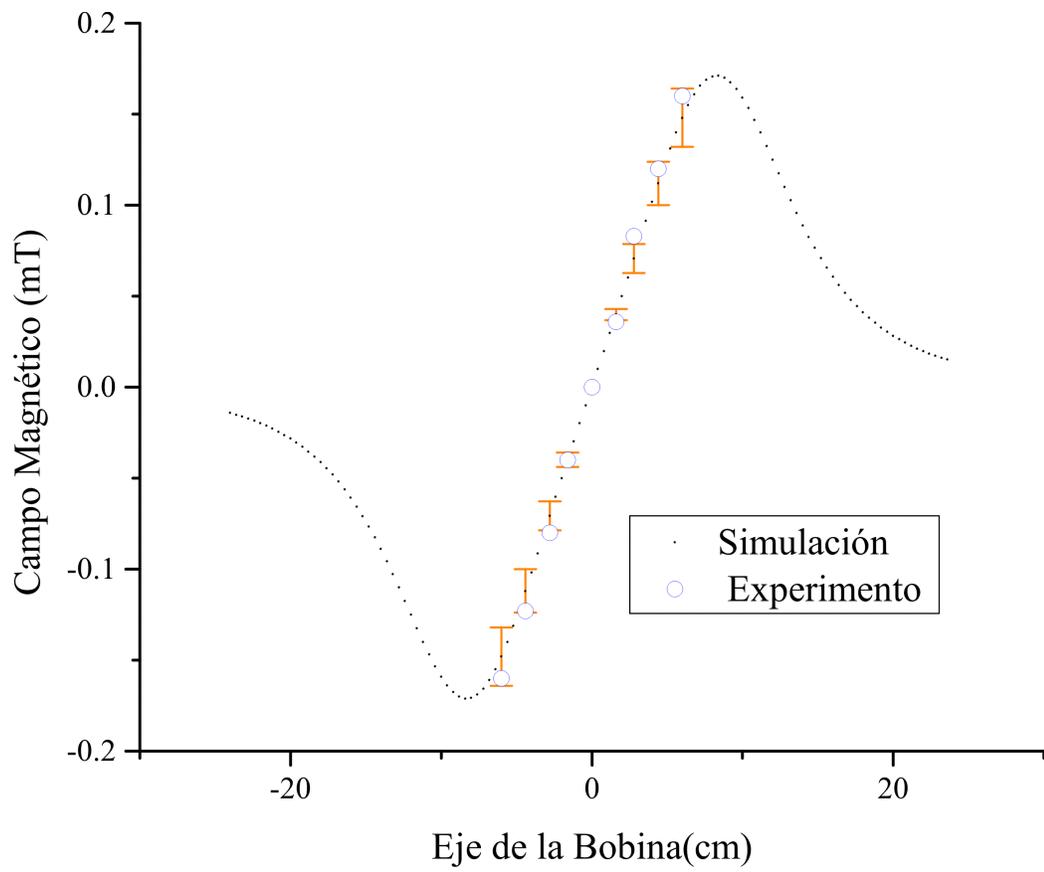
Graficando estas tablas obtenemos la siguiente grafica en donde podemos ver que el comportamiento es casi el mismo, en  $y = 0cm$  que en  $y = 3cm$ , con sus respectivas incertidumbres, y podemos ver que en la región donde nos hemos alejado  $3cm$  del eje de la bobina los datos obtenidos están dentro del rango de incertidumbres de los datos experimentales que se obtuvieron sobre el eje de la bobina..



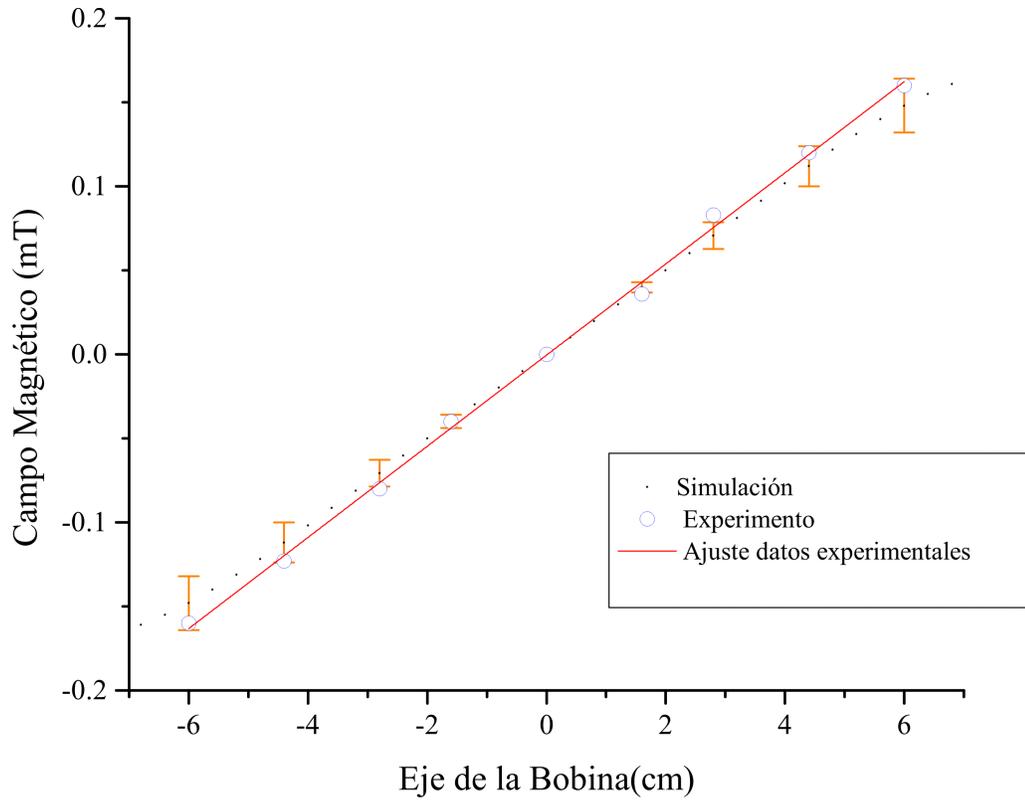
Gráfica 4.3, se observan los datos de la tabla 1 sobreponiendo la componente  $y$ .

Con la gráfica anterior podemos decir que basta con conocer el comportamiento sobre el eje ya que el comportamiento fuera de este es muy similar al menos  $3\text{cm}$  alejados del eje de la bobina, es decir en una región total de  $6\text{cm}$  ( $3\text{cm}$  a la izquierda del eje y otros tres a la derecha del eje) ya que presenta simetría.

Por lo que sin pérdida de generalidad podemos solo centrarnos en el comportamiento experimental, de los datos obtenidos sobre el eje de la bobina. La siguiente gráfica contrasta los datos obtenidos de la simulación sobre el eje con los datos experimentales también en el eje. Podemos ver que en la región de interés el comportamiento es muy parecido al comportamiento predicho por la simulación por lo que en cierta forma es una manera de corroborar los datos obtenidos de manera simulada, ya que a pesar de que la simulación está teóricamente bien simulada siempre hay discrepancias entre la parte experimental y lo predicho teóricamente, ya que en ocasiones se suele simplificar las cosas. Como en el caso de las integrales elípticas en donde se simplificó al usar una aproximación de tipo geométrica. Sin embargo lo que demuestra la siguiente gráfica es que esta discrepancia está dentro del margen de incertidumbre.



Gráfica 4.4 en esta grafica podemos ver el campo en la dirección z experimental con su respectiva incertidumbre, y los datos experimentales.



Gráfica 4.5 en esta gráfica podemos observar los datos experimentales y su respectivo ajuste lineal.

En el ajuste lineal se obtuvieron los siguientes datos para la pendiente experimental:

**Tabla 3 Ajuste Lineal.**

	$\left(\frac{mT}{cm}\right)$	Error estándar
Pendiente simulada	0.025	$3.40 * 10^{-5}$
Pendiente Experimental	0.027	$4.16 * 10^{-4}$

Con los datos anteriores podemos obtener un error porcentual del 8% con lo que encontramos que experimental mente la componente magnética z de nuestro prototipo en la región de interés está regido por la ecuación:

$$B(x) = 0.027 \pm 4.16 * 10^{-4} \frac{mT}{cm} \quad (4.1)$$

De las gráficas anteriores podemos observar que se obtuvo una bobina que genera un campo magnético que cambia de manera lineal en una región de interés de aproximadamente 12 cm de largo. Y se observó que existía una buena homogeneidad ya que para mediciones fuera del eje se observó que el campo no variaba mucho.

## Capítulo 5

# Discuciones.

En la sección anterior se explicó la idea del algoritmo que nos permitió conocer las posiciones de los anillos en una bobina cilíndrica, que después se procedió a su construcción. La parte experimental mostro resultados muy similares a la simulación, con apenas un error del 8 %, el cual está dentro del rango de incertidumbre del teslametro utilizado. Esta linealidad se encontró que estaba en una región de interese de aproximadamente 12 cm de largo.

Al poder conocerse la desviación del gradiente del campo en cada punto y el gradiente promedio, podemos ver de la gráfica 3.9 que si se minimiza. Por otro lado el comportamiento fuera del eje de la bobina a 4 cm del eje podemos ver que casi no es muy diferente del comportamiento en el eje de la bobina esto lo podemos ver en la gráfica 3.10, lo que nos habla de que el proceso de optimización fue aceptable.

También en el caso de la simulación se obtuvo la razón de aceptación con respecto a la temperatura en donde se pudo observar que conforme bajaba la temperatura también disminuía la razón de aceptación gráfica 3.8. Para esto se tuvo que ver cual tipo de función convenía más, a la hora de hacer decrecer la temperatura, ya que para el caso geométrico se observó que rápidamente tendía a cero a diferencia del logaritmo, esto implica que la razón de aceptación disminuía más lentamente originando que se eviten los mínimos locales.

En este prototipo no se concidero la inductancia, ya que no se trabajó con corrientes mayores a 3 amperes y la corriente tampoco oscilaba. Sin embargo podemos tomar en cuenta esos efectos como se observo al final del capitulo anterior. Y lo que podemos ver al comparar la figura 3.1 con la figura 3.2 en donde podemos ver un esquema de las posiciones finales de las espiras es que si consideramos los efectos de la inductancia cambia la distribución de las espiras, de tal forma que ya no están todas en una pequeña región de la bobina si no que se distribuyen más sobre esta. De las gráficas 3.14 y 3.15 podemos observar que el comportamiento sigue siendo de carácter lineal.

A pesar de ser un prototipo la bobina construida, este trabajo puede servir como un primer intento en la construcción de una bobina gradiente que se pueda utilizar para fines de imagen médica, ya que si bien es bastante simple el

modelo lo podemos el tiempo, ir mejorando y hacerlo más realista, por ejemplo incluir efectos de calor, ya que al trabajar con corrientes de 100 A, se genera bastante calor por lo que se deberá trabajar en un sistema de refrigeración. Otro problema que sé tampoco incluimos en nuestro modelo es el de adicionar lo que se le conoce como una bobina shielding.

También podríamos explorar otras geometrías con el fin de utilizarlas en partes específicas, al finalizar las pruebas con la bobina cilíndrica se intentó cambiar el algoritmo para una geometría esférica, y se obtuvo lo siguiente

### **Inductancia.**

En la sección anterior, se observó que en las bobinas en donde el largo total es equiparable con el diámetro de la bobina, se obtiene un campo magnético para la componente z bastante lineal. En nuestro caso esta linealidad es de aproximadamente 12 cm, 6 cm en cada lado del eje de la bobina. Esta linealidad se obtuvo de forma experimental y por simulación. A pesar de esto en el modelo estudiado anteriormente no se metió el término de la inductancia ni de la eficiencia de la bobina es decir, solo se minimizo la desviación estándar:

$$U = \sum (\langle G \rangle - G_i)^2 \quad (5.1)$$

En este caso no se agregaron términos de inductancia por dos razones. Para cuestiones experimentales solo deseábamos medir el comportamiento lineal de la bobina por lo que la corriente no oscilaba. Y por otro lado las corrientes que manejamos en el experimento se mantenían por debajo de los 5 A, en concreto fueron 3 A, contrastando con un equipo de resonancia que trabaja a 100 A . Le podemos agregar el término de la inductancia al funcional y le ponemos una corriente de 100 A. Nuestro funcional a minimizar toma la siguiente forma:

$$U = \sum (\langle G \rangle - G_i)^2 + 158 \quad (5.2)$$

En donde el 158 representa la inductancia, es decir le pedimos al programa una bobina con una inductancia de 158 mH. Con esto obtuvimos la siguiente bobina en donde el radio se fijo en 15 cm, y la corriente en 100 A:

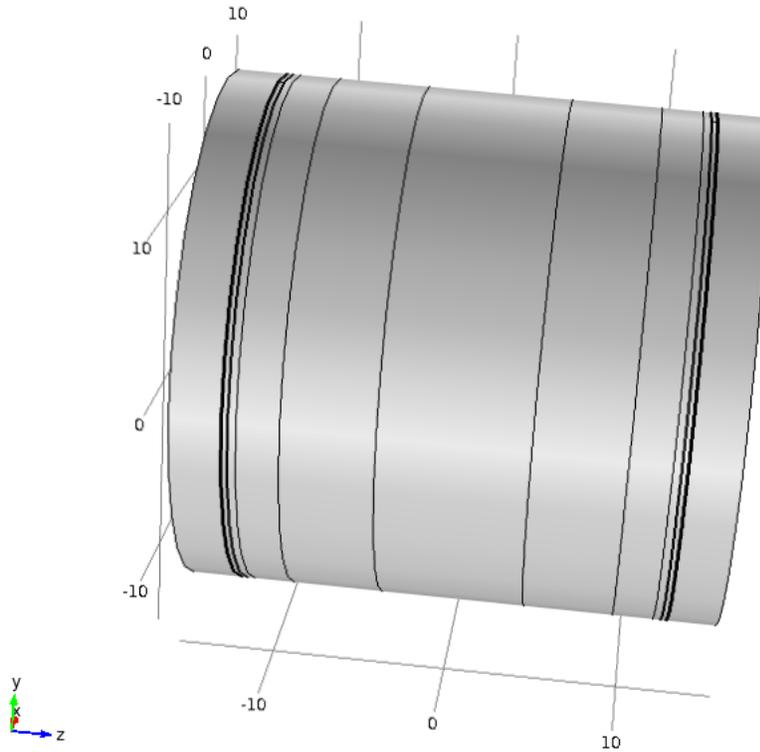
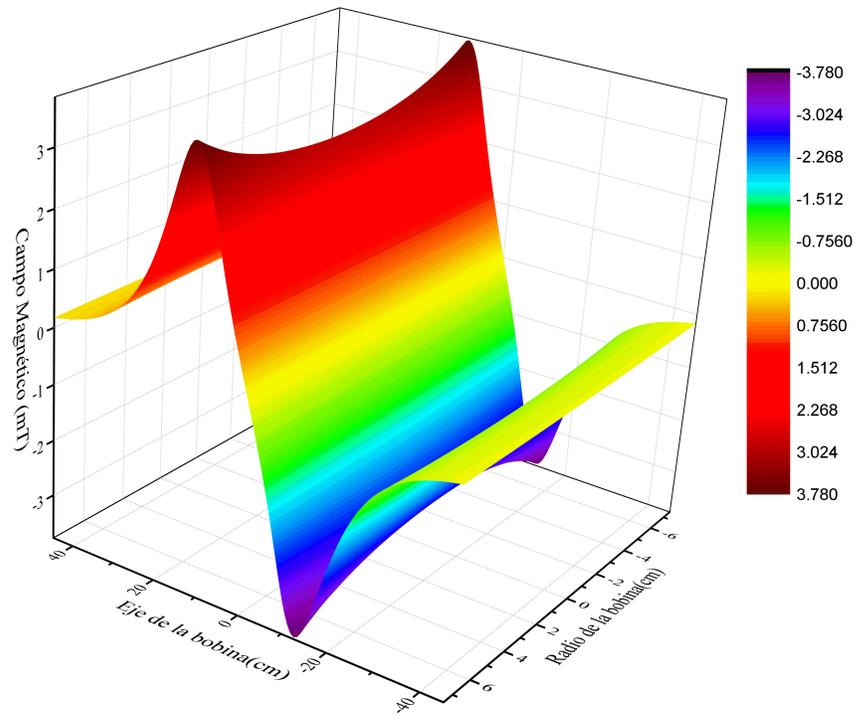
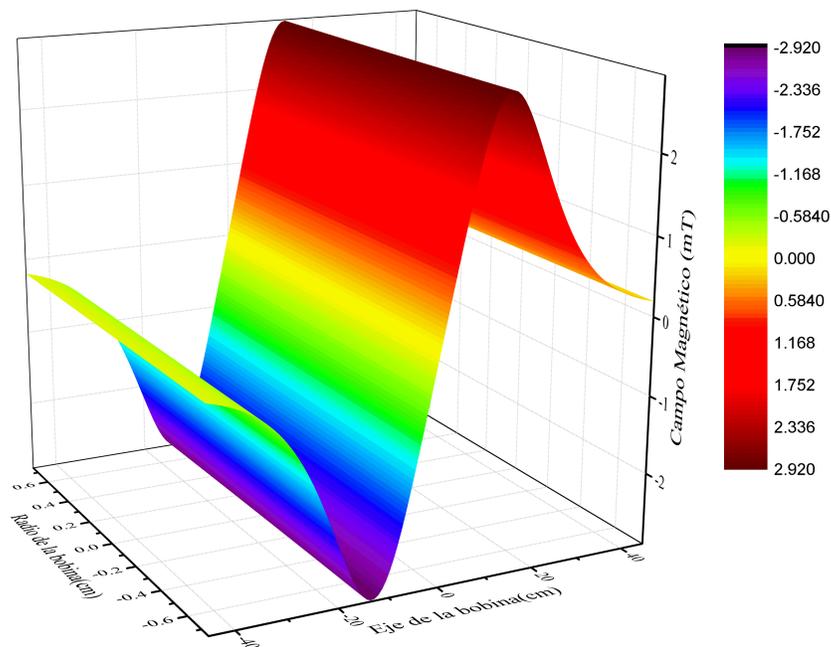


Figura 4.9 Arreglo espacial de las espiras para una corriente de 100A e inductancia de 158 mH.

En el esquema anterior podemos ver que las espiras en la bobina no se encuentran en tan pegadas como en la bobina que se construyó experimentalmente. Por otro lado la primera espira del centro de la bobina su corriente esta en dirección contraria a las otras espiras en el mismo lado de la bobina. Con lo anterior se puede ver que las espiras cambian bastante de posición al cambiar la corriente y agregar el término de la inductancia. ¿Pero que tanto se modifica nuestro campo magnético? En la siguiente grafica podemos ver justamente el campo generado.



Gráfica 4.10 Campo Magnético de la componente z para una corriente de 100A e inductancia de 158 mH.



Gráfica 4.11 Campo Magnético de la componente z para una corriente de 100A e inductancia de 158 mH cerca del eje.

De las gráficas anteriores podemos ver que si bien el campo aumento en intensidad este sigue comportándose de manera lineal en una gran región de interés, con una inductancia de 158 mH.

### Bobinas en otra geometría.

Otro tipo de arreglo que se puede hacer con espiras circulares es el de una esfera en donde las espiras se colocan sobre alrededor de una esfera es decir como lo muestra la siguiente esquema:

También en el caso de la simulación se obtuvo la razón de aceptación con respecto a la temperatura en donde se pudo observar que conforme bajaba la temperatura también disminuía la razón de aceptación. Para esto se tuvo que ver cual tipo de función convenía más, a la hora de hacer decrecer la temperatura, ya que para el caso geométrico se observó que rápidamente tendía a cero a diferencia del logaritmo, esto implica que la razón de aceptación disminuya más lentamente originando que se eviten los mínimos locales.

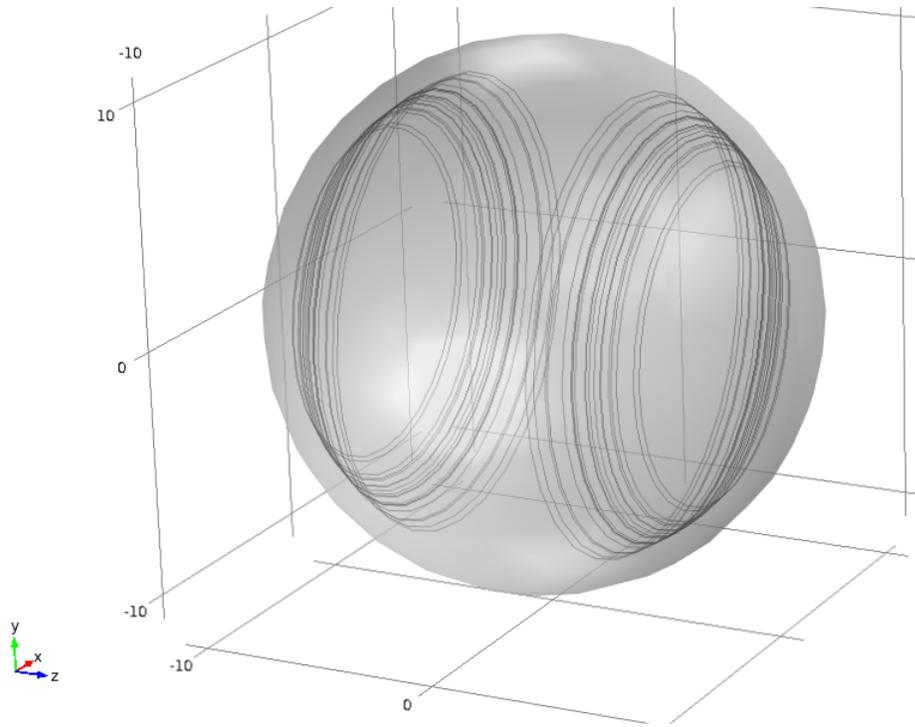


Figura 1 Esquema de una bobina con simetría esférica.

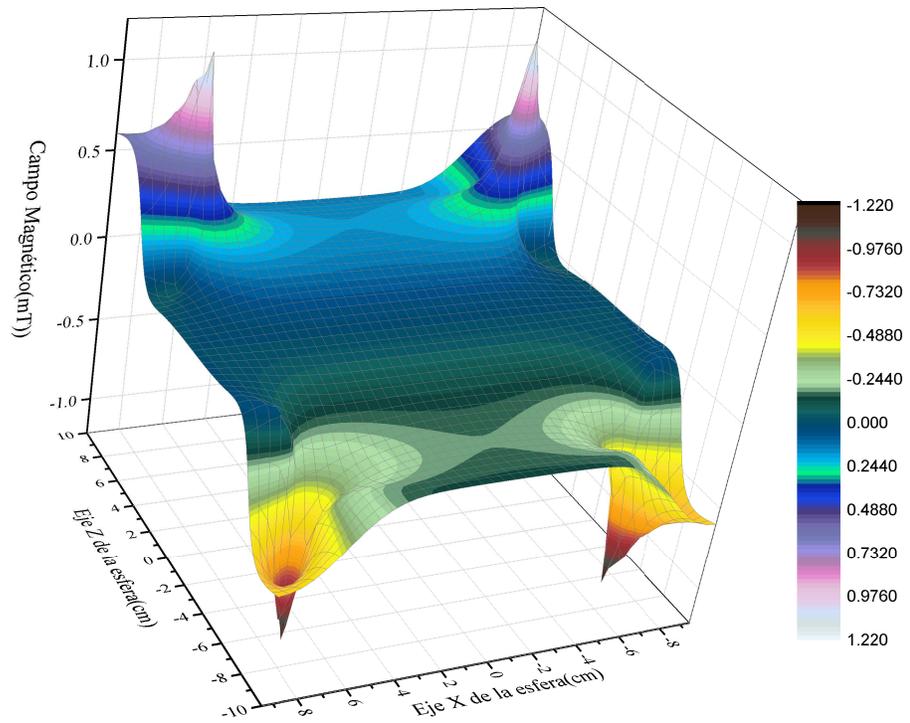
En donde lo único que cambia del programa es parametrizar el radio con la altura, de esta forma al desplazarnos en el eje  $z$  de la bobina también cambiaremos su radio en cada paso que se de optimizando de esta forma la bobina.

Para esto se fijó el radio de la esfera  $R$  y se varió el radio de cada espira conforme se optimizaba, es decir cada vez que se desplazaba. Para esto se utilizó que:

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

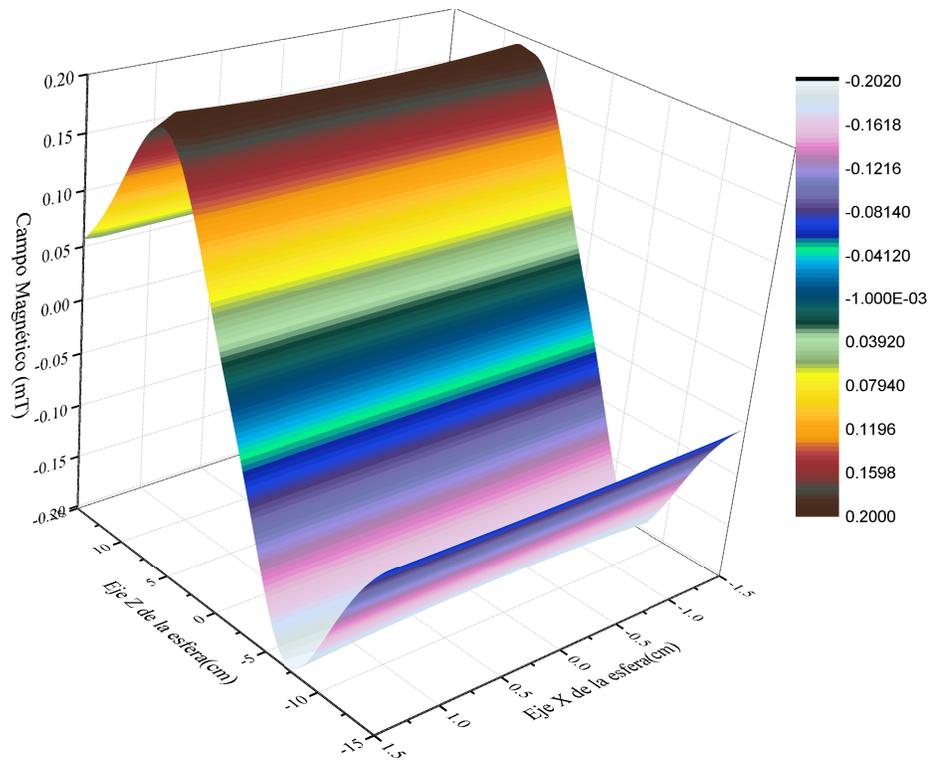
Por otro lado se condicionó el algoritmo para que si la espira pasaba de  $0.8R$ , el cambio no se diera es decir que la espira no superara ese umbral, ya que si  $Z$  es mayor que  $R$  el resultado no tendría sentido.

De correr esta simulación se obtuvieron los siguientes datos para la componente  $z$  del campo magnético.



Gráfica 2 se puede observar el campo magnético de la componente z

En la gráfica anterior parece no observarse esta linealidad, sin embargo si quitamos los extremos que es donde obtenemos estos picos obtenemos la siguiente gráfica:



Gráfica 3 se puede observar el campo magnético de la componente z de un distancia 1.5 cm a -1.5cm sobre el eje en x

En esta grafica podemos observar que se obtiene un comportamiento bastante lineal y además tiene la ventaja de que se presenta en una región de interés bastante grande en el eje z de la bobina. Una de las desventajas es que solo es válida para regiones muy cercanas al eje de la bobina.

# Conclusiones.

Se realizo un programa que nos permitiera conocer las posiciones de las espiras para un prototipo de bobina gradiente cilíndrica. Y de manera experimental se pudo validar los datos obtenidos de la simulación al encontrar un error del 8% entre la recta dada por la simulación y los datos experimentales. También se observó que una de las ventajas del método de simulated annealing es que nos permite diseñar bobinas con geometrías establecidas, en nuestro caso espiras circulares, a diferencia de otros métodos en los que no se tiene una geometría definida y se calcula una función de corriente. Estas bobinas al ser muy simétricas, son más fáciles de construir, y tienen la ventaja de que no se tiene que preocupar por posibles torques debido a la falta de simetría. Cabe mencionar que a pesar de que en el capítulo de desarrollo experimental no se mencionó, la bobina final fue el resultado de diversos intentos es decir se realizaron maquetas con la finalidad de poder obtener una idea de cómo conectar los cables en la bobina. Y esto fue una de las principales causas de que se escogiera un método en dónde se pudiese controlar la geometría del embobinado, ya que para métodos en donde los cables no adoptan una geometría específica como el método Target Field, la construcción de la bobina puede resultar algo complicado.

Por otro lado una de las posibles desventajas de este método es que es un método un poco tardado ya que requiere probar muchos pasos, que ahora con la ayuda de programas paralelizables nos pueden ayudar a que se un método rápido. Y el método de SA presenta la ventaja de que se puede paralelizar, ya que se podría mover en vez de una bobina en cada paso todas las bobinas en el mismo paso, y utilizando las posiciones antes de mover las bobinas obtener la probabilidad de aceptación. Con esto la velocidad del programa aumentaría bastante. En el momento de estar usando distintas temperaturas para el sistema se encontró que la mejor función para nuestros fines era una función tipo logaritmo decreciente, ya que de esta forma la temperatura baja más lentamente que una función tipo maltusiana, al no disminuir la temperatura tan rápidamente podemos lograr que el sistema no quede atrapado en mínimos locales.

A lo mejor sería interesante cambiar a otro método de búsqueda de mínimos globales como podría ser optimización Tabú u optimización por colonia de hormigas, y poder comparar cuál de los tres métodos ofrece el mejor desempeño en cuestiones de tiempo y de linealidad, en este caso se optó por SA ya que es un método en donde la convergencia está garantizada como vimos en el capítulo 2 y además es un algoritmo de búsqueda global. Por ejemplo en el caso de opti-

mización por colonia de hormigas, en vez de disminuir la temperatura en cada paso se utiliza una sustancia que dejan las hormigas al moverse conocida como feromonas entre más feromonas tenga un camino más hormigas pasan por esté, y esta forma de optimizar caminos es bastante útil, sin embargo en cuestiones de diseño de bobinas sería cuestión de investigar ya que no solo es construir el algoritmo si n también encontrar una función que emule la evaporación de las feromonas dejadas por las hormigas. Como podemos ver existen muchas formas de optimización, sin embargo por ser un proceso físico y no biológico fue que también se optó por usar este método. Cabe mencionar que en otras áreas, como en el caso de la criptología, para descifrar imágenes cifradas el uso de métodos de optimización combinatoria es usado ampliamente, en donde se a encontrado que el método Tabú es mucho más rápido que el método de SA, por lo que a pesar de ser una primera aproximación a un diseño más realista en el futuro se puede seguir investigando que algoritmo funciona mejor, y nos genera mejores bobinas.

Además este método parece funcionar mejor en bobinas bastante simétricas, ya que en el programa se observó que para una bobina en donde se requiere que el largo sea diferente del diámetro de la bobina la linealidad era no era tan buena como en el caso de las bobinas simétricas. Fue por esta razón que el prototipo que se diseñó tuviese el mismo largo que el diámetro de las espiras.

A pesar de que se aproximaron gran parte de las funciones que son esenciales en el algoritmo este se pudo validar de manera experimental con el prototipo construido, al contrastar los datos experimentales con los datos obtenidos de la simulación. Se encontró que el comportamiento en la región de interés en el caso del cilindro era bastante amplia de 12 cm y además se comportaba de forma lineal. Esta linealidad se mantenía por 4 cm fuera del eje de la bobina.

Una vez que obtenemos como varía el gradiente podemos obtener información de nuestra muestra si conocemos, la constante giromagnética. Ya que de la ecuación 1.19 vemos que la frecuencia depende del campo magnético aplicado. y del hecho que

$$B(z) = 0.027 \pm 4.16 * 10^{-4} \frac{mT}{cm} \cdot z \quad (5.3)$$

Tenemos que:

$$\omega = \gamma(B_0 e_z + z(0.027 \pm 4.16 * 10^{-4} \frac{mT}{cm}) e_z) \quad (5.4)$$

Por lo que podemos ver que la frecuencia va a depender de en qué punto nos encontremos de nuestra bobina y de esta forma obtener información en cada punto donde el gradiente es lineal. Si bien el prototipo que se diseño es a lo largo del eje z, esta bobina podría ser usada para conocer como esta conformado un material en una sola componente. Claro que haría falta más equipo para poder hacer esto, aparte de la bobina como las antenas y un imán externo, por este motivo fue por lo que la bobina no se probó en un material.

La importancia de poder validar los datos de la simulación es que, nos puede dar cierta validez para la construcción de bobinas de otras geometrías. Esto es importante ya que se modificó el algoritmo para una geometría esférica, esta bobina por cuestiones prácticas no se construyó pero el hecho de que la parte experimental del cilindro concuerde con la parte simulada nos da un cierto grado de fiabilidad para los datos obtenidos de la simulación para la esfera.

Con lo anterior podemos ver que este trabajo sí es, una primera aproximación a un sistema gradiente ya que lo que se buscó principalmente fue la linealidad del prototipo, pero se puede mejorar y hacerse mucho más realista. Pero dentro de esta primera aproximación este prototipo cumple con la principal característica de su linealidad.

# Bibliografía

- [1] Nuclear Magnetic Resonance and spectroscopy, Joseph B. Lambert, Eugene P. Mazzola. Pearson Prentice Hall. Pag 1-10}
- [2] Principles in Magnetic Resonance , C.P.Slichter, Springer -Verlag.Pag 4-10
- [3] Nuclear Physics: An Introduction S. B. Patel, 4.I.5, pag 125-131, New Age International Publishers
- [4] Espin Dynamics Basics of Nuclear Magnetic Resonance, Malcolm H. Levitt, The University of Southampton, UK, Second Edition, Jhon Wiley & Sons
- [5] Novel Gradient Coils Designed Using a Boundary Element Method, Micheal Poole, Richard Bowtell, Sir Peter Mansfield Magnetic Resonance Centre, Department of Physics and Astronomy, University of Nottingham, Nottingham NG7 2RD, United Kingdom.
- [6] Gradient-Coil Design by Simulated Annealing, Stuart Crozier and David M. Doddrell, Centre for Magnetic Resonance, University of Queensland. St Lucia. Journal of Magnetic Resonance Series A 103,354-357(1993)
- [7] S. Kirkpatrick, Jr. C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by Simulated Annealing. Science, 220(4598):671-680, May 1983.
- [8] Surface Gradient Coil Design R. Lemdiasov and R. Ludwig ECE Department Worcester Polytechnic Institute Worcester, MA 01609 July 16, 2002
- [9] Simulated Annealing Dimitri's Bersimas and John Tsitsiklis, Statistical Science 1993, vol 8, No1, 10-15
- [10] Approximate Calculation of Integrals, V.I.Krylov, Dover Publications
- [12] Simulated Annealing Theory with Applications, Rui Chibante, Sciyo Chapter 1, 2010
- [13] Facts, Conjectures and Improvements for Simulated Annealing, Peter Salamon, Pablo Sibani, Richard Frost, SIAM, Capitulo 5-7

- [14] An. R. Acad. Nac. Farm., 2004, 70: 33-39, Impacto de la imagen por resonancia magnética (IRM) en la práctica médica DR. JOAQUÍN FERREIRÓS DOMÍNGUEZ.
- [15] Classical Electrodynamics, Third Edition, Jhon David Jackson, Jhon Wiley and Sons.
- [16] Magnetic Resonance Tomography edited by Maximilian F. Reiser, Wolfhard Semmler, Hedvig Hricak, paginas 84-85
- [17] [www.supraconductivite.fr](http://www.supraconductivite.fr)

# Apéndice 1 Programas.

## Programa de Simulated Annealing.

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define nbob 17
/*****Definimos nuestras variables globales*****/
float I=3;
float a=5;
float l=15;
float gprom=-4-5;
double Z0[nbob];
double Zf[nbob];
/*****La siguiente funcion genera integrales elipticas*****/
/*****Usa una funcion de estructuras*****/
/****En la siguiente parte del programa se define una estructura, con esta estructura podremos calcular las funciones elípticas usadas a lo largo del programa*/
struct Intelipt { float K, E; };
struct Intelipt eliptica(struct Intelipt p, float x)
{
struct Intelipt q;
/*****En este caso m es el numero a calcular*****/
double a,m=x,g,am,Ke,s[8],S=0,Ee;
/***** i es necesario para los ciclos for*****/
int i;
/*****Inicializamos variables*****/
a=1;
g=sqrt(1-m);
s[0]=sqrt(m);
/*****Ciclo donde se calcula la integral K de primer especie*****/
for(i=0;i<=7;i++)
{
am=(a+g)/2;
s[i+1]=(a-g)/2;
g=sqrt(g*a);
a=am;
}
/****Finlamente el valor de la integral de primer especie es*****/ Ke=(M_PI)/(2*a);
/****Calculo de la integral de segunda especie E*****/ for(i=0;i<=7;i++)
{ S+=(s[i]*s[i]*pow(2,i))/2; } Ee=Ke*(1-S);
q.K = Ke;
q.E = Ee;
return q;
} /*****Calculamos el gradiente fuera del eje*****/

```

```

/*****
float gcampofoje(float z1, float y1, float iE, float iK)
{
float Gz, b, z=z1, E=iE, K=iK, y=y1, parte1, parte1s, parte1E, dbz, dE, dK, parte1f, calc1, calc2, clac3
;
if(y==0)
{
Gz=-(3*I*a*a*z)/(2*pow(a*a+z*z,2.5));
}
else{
/*****Calculos de la segunda parte*****/
float parte12s, parte12k, parte2f;
/*****Calculos de la tercera parte*****/
float parte13, parte13s, parte13k, parte3f;
b=4*a*y/(a*a+z*z+y*y+2*a*y);
dbz=-8*a*y*z/(pow(a*a+z*z+y*y+2*a*y,2));
dE=(E-K)/b; dK=(E/(b-b*b)-K/b);
// dK=(E/(b(1-b*b))-(K/b))*(db);
/*****derivando el primer termino*****/
parte1=a*(dbz/(2-2*b)+(b*2*dbz)/(pow(2-2*b,2)))*pow(2*b,0.5)*E;
parte1s=a*((b/(2-2*b))*dbz*E)/pow(2*b,(1/2));
parte1E=a*((b/(2-2*b))*dE*dbz*pow(2*b,(1/2)));
parte1f=parte1+parte1s+parte1E;
/*****derivando el segundo termino*****/
parte12s=y*pow(2*b,0.5)*dK*dbz;
parte12k=y*dbz*K/pow(2*b,0.5);
parte2f=parte12s+parte12k;
/*****Derivando el tercer termino*****/
parte13=y*(-1/(2-2*b)+(2-b)*2/(pow(2-2*b,2)))*E*sqrt(2*b);
parte13s=(y*(2-b)*dbz*E)/(pow(2*b,0.5)*(2-2*b));
parte13k=(y*(2-b)*pow(2*b,0.5)*dE*dbz)/(2-2*b);
parte3f=parte13+parte13s+parte13k;
/*****Gradiente*****/
Gz=((I*a)/(2*M_PI*pow(2*a*y,(3/2))))*(parte1f+parte2f+parte3f);
// Gz=(I*a)*(parte1f+parte2f+parte3f)/(2*M_PI*pow(2*a*y,1.5)); return
Gz;
}
}
/*****Inicio del main*****/
/*****
main()
{
/*****Definicion de la estructura*****/
struct Intelipt p;
p.K ;
p.E;

```

```

/*****Abrimos archivos para guardar los datos*****/
FILE *f1,*f2;
f1=fopen("prueba.txt","wt");
f2=fopen("prueba2.txt","wt");
/*****Variables del programa*****/
int i,j,n,promedio;
double x,u,z,y,bf,z0,zf,boltz,b,K,E,zf2;
/*****I es la corriente en la bobina, a el radio de las bobinas y nbob el
numero de bobinas mientras que l es la mitad de la longitud transversal de la
bobina*****/
double espaciado=l/nbob;
/*****A continuación declaramos Sgb, y Sgbf que nos van a dar la
suma del gradiente promedio mientras que gb y gb f representa el gradiente en
z,mientras que T es la temperatura*****/
double Sgb,Sgbf,T,gb,gbf,energia,p2;
/*A continuacion declaramos un paso para optimizar z*/
double paso=0.0010*l;
/*****El siguiente ciclo nos da un espaciado uniforme entre los circuitos de
corriente*****/
for(n=1;n<=nbob;n++)
{
Z0[n]=(n*espaciado);
Zf[n]=(n*espaciado);
}
/*****Fin del espaciado a continuacion empieza la simulación*/
for(i=0;i<=7500;i++)
{
for(y=0.0;y<=0.5*a;y+=(0.5*a/50))
{
/*****A continuaciÃ³n vamos cambiar las diferentes posiciones
de las bobinas con el siguiente ciclo*/
for(j=1;j<=nbob;j++)
{
energia=0;
Sgb=0;
Sgbf=0;
for(z=0.0;z<=0.8*l;z+=(0.8*l/40))
{
/*****Inicializamos variables*****/
gb=0;
for(n=1;n<=nbob;n++)
{
zf=z-Z0[n];
/*****Integrales elipticas*****/ b=4*a*y/(a*a+zf*zf+y*y+2*a*y);
p=eliptica(p,b);
K=p.K;

```

```

E=p.E; /*****/
gb+=gcampefeje(zf,y,E, K);
//fprintf(f2, " %f %d %d %f %f \n",gb,n,j,z,Z0[n]);
}
/*****Fin de ciclo en n**/ Sgb+=pow((gprom-gb),2);
}
//Fin de ciclo en z /*****A continuación generamos un numero
aleatorio para determinar el avance ya sea positivo o negativo dependiendo del
valor obtenido*****/
srand(time(NULL));
x=drand48();
if(x<0.5)
{
u=1;
}
else
{
u=-1;
}
Zf[j]=Z0[j]+paso*u;
/*****Calculamos sgbf*****/
for(z=0;z<=0.8*1;z+=0.1)
{
zf=z-Zf[j];
gbf=0;
for(n=1;n<=nbob;n++)
{
/*****Integrales elipticas*****/
b=4*a*y/(a*a+zf*zf+y*y+2*a*y);
p=eliptica(p,b);
K=p.K;
E=p.E; /*****/
gb+=gcampefeje(zf,y,E, K);
}
/*****Fin de ciclo en n*****/
Sgbf+=pow((gprom-gbf),2);
}
//Fin de ciclo en z//
/////fin de calculos en sgb y sgbf/////////
/*****Checamos la energia*****/
energia= Sgbf-Sgb;
if(energia<=0)
{
Z0[j]=Zf[j];
}
else

```

```

{
T=5*0.1/log(i+1.1);
boltz=-energia/(T);
p2=exp(boltz);
srand(time(NULL));
x=drand48();
if(x<=p2)
{
Z0[j]=Zf[j];
}
}
} //fin de ciclo en j
fprintf(f2, "%d %f \n", i, energia);
} //fin del ciclo en y
} //fin del ciclo en i
/*****Vlores finales*****/
for(n=1;n<=nbob;n++)
{ fprintf(f1, "%f \n", Zf[n]);
}
/*****/
for(y=-0.5*a;y<=0.5*a;y*=(0.5*a/20))
{
for(z=-2*1;z<=2*1;z+=(2*1/40))
{
bf=0; gbf=0; for(n=1;n<=nbob;n++)
{
zf=z-Zf[n];
b=4*a*y/(a*a+zf*zf+y*y+2*a*y);
p=eliptica(p,b);
K=p.K;
E=p.E;
gbf+=gcampoje(zf,y,E, K);
zf2=z+Zf[n];
b=4*a*y/(a*a+zf2*zf2+y*y+2*a*y);
p=eliptica(p,b);
K=p.K;
E=p.E;
gbf+=-gcampoje(zf2,y,E, K);
}
} //fin del ciclo en n
fprintf(f2, "%f %f %f \n", z,y,gbf);
}
} //fin del ciclo en z
}
} //fin del ciclo en y
} //fin del programa

```