UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIAS PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Estrategia para la Comprensión e Interpretación Geométrica de
la Derivada en el Bachillerato

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO
DE MAESTRO EN DOCENCIA PARA
LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR,
EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

Edgar Enrique Solís de los Reyes

Tutor: M en C Alejandro Raúl Reyes Esparza, FES. Acatlán

MÉXICO, D.F. JULIO 2013

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLAN

a mis padres Honorato Solís e Isabel de los Reyes

a mis hermanos Haydee, Viridiana e Ivan

a mis sobrinos Diana, Fernando, Natalia y Diego

a Lucero

Índice

Índice de Gráficas

Índice de Tablas

Índice de Esquemas

Índice de Ilustraciones

Introducción

Motivaciones

Como docente, al convivir con los estudiantes en las aulas, y estar inmerso en la vida académica de una institución, se llegan a observar características de los alumnos. Por ejemplo, se observa que una idea común sobre el estudio de las matemáticas entre los alumnos del bachillerato, en el Colegio de Ciencias y Humanidades, es que se trata de realizar procedimientos para resolver problemas rutinarios. Problemas como: ¿Cuál es el valor de x…? No obstante que esta es una visión muy escueta de las mismas, puede ser generalmente reforzada por desarrollos y ejercicios llevados a cabo en las clases de esta área del conocimiento.

Para el caso de la materia de Cálculo en el bachillerato esta percepción de sólo procedimientos es incluso compartida por algunos profesores de grado superior. Incluso algunos alumnos egresados mantienen esta concepción al menos en los primeros años de la licenciatura.

Esta mala concepción del Cálculo se debe parcialmente a su enseñanza por medio de procedimientos: métodos para calcular límites, métodos de derivación – incluso se enseña el método de los cuatro pasos –, métodos de integración, y aplicaciones de éstos métodos en problemas, principalmente de máximos y mínimos, y solidos de revolución.

Muchos profesores dejan a los alumnos realizar límites, derivadas e integrales en las que se requieren procesos algebraicos largos y elaborados para lograr su resolución. Justo lo que refuerza la idea de los procesos, que sólo se vuelven más elaborados. Como menciona Dávila Araiza, es común en los cursos de Cálculo enfatizar las practicas algorítmicas y privilegiar el trabajo en el registro algebraico.

Lo anterior da una muy alejada percepción de las matemáticas. Hace parecer que el Cálculo se trata de *derivar* e *integrar*, y en muchas ocasiones ni se le da un sentido a estas dos palabras.

Esta creencia es a grado tal que incluso profesionistas llegan a comentar: "quien sabe Cálculo sabe matemáticas", "el Cálculo es lo más difícil". Lo que demuestra sólo una pobre percepción del conocimiento matemático.

> La idea común de la gente es que las matemáticas ya están inventadas y que las matemáticas superiores están en ingeniería. De hecho incluso los ingenieros creen que las matemáticas superiores son nada más el Cálculo Diferencial e Integral y las Ecuaciones Diferenciales y ahí se acabaron las matemáticas superiores. Dr. Alejandro Díaz Barriga en el video ¿Qué hace hoy un matemático? (Barot, 2006)

Lo anterior repercute también en el aprendizaje del alumno:

> Esto puede ocasionar que el curso de Cálculo carezca de sentido para el alumno; que sus significados de los objetos matemáticos sean pobres; que presenten dificultades para usarlos en registros distintos del analítico y en problemas no rutinarios, en particular para modelar situaciones planteadas en contextos extramatemáticos e interpretar los resultados obtenidos. (Dávila Araiza, Grijalva Monteverde, & Bravo Tapia, 2011, p. 3)

Para tratar de contradecir ambas creencias, tanto que las matemáticas tratan sobre procedimientos, como que el Cálculo se trata de *derivar* e *integrar*; y propiciar una mejor comprensión del Cálculo y de las matemáticas en los alumnos, es necesario mostrar otros aspectos de las matemáticas, tales como: el análisis, la interpretación, el razonamiento matemático, y las relaciones entre conceptos, incluso entre diferentes áreas de la matemática.

Entonces, se plantea desarrollar un tema de Cálculo estudiando estos otros aspectos más que los procedimentales. Para mostrar que la importancia del

Cálculo, – y a título personal, su belleza –, no radica en sus procedimientos. Sino que, al igual que en todas las matemáticas, está en sus conceptos, ideas y razonamientos matemáticos, la forma de entrelazarlos para lograr una mejor comprensión y manipulación de los propios objetos matemáticos.

El tema que se seleccionó es uno de los más importantes para el Cálculo: el concepto de derivada. Se pretende mostrar el concepto no como un nombre y un proceder que se debe llevar a cabo. Sino mostrar a qué se refiere, qué es lo que significa y como se relaciona con conceptos de otras áreas de las matemáticas.

Mostrar que sí, hay que saber *derivar*. Pero, por qué y qué es lo que hacemos al realizar estos procesos, qué significado tiene lo que resulta de ellos. Específicamente, hacerlo con el Programa de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades para la materia de Cálculo Diferencia e Integral.

Problema

Se quiere mostrar que el estudio de las matemáticas es más que realizar procedimientos para hallar valores y resolver problemas rutinarios. Se busca hacer esto dentro del estudio del Cálculo, para el tema especifico del concepto de derivada.

Entonces, el problema es: ¿Cómo enseñar el concepto de derivada a los alumnos de bachillerato?

No se busca sólo lograr que los alumnos aprendan el concepto de derivada. Se busca que a través de este tema de estudio, se muestren aspectos de la matemática, mencionados anteriormente, como: el análisis, la interpretación, el razonamiento matemático, y las relaciones entre conceptos.

Se busca dar un significado para el alumno del CCH de la palabra “derivada”. Que entienda que es un concepto, no un procedimiento. Que dicho significado a su vez de un sentido al proceso de *derivar*, que lo lleve a interpretar mejor sus resultados.

Para propiciar la comprensión del significado del concepto de derivada, es necesario dar una interpretación al mismo.

De este modo nuestro problema resulta:

¿cómo enseñar el concepto de derivada a los alumnos del CCH en los cursos de Cálculo para lograr la comprensión del concepto?

Creo que un camino es a través de la interpretación geométrica de la derivada. El estudio de la interpretación geométrica del concepto permite que el alumno mejore su comprensión del mismo; entienda el por qué es así. Permite facilitar más su aprensión por comprensión que por manipulación o repetición.

Estudiar el concepto a través de su interpretación geométrica nos permitirá analizar sus características así como relacionarlo con otros conceptos matemáticos. Intercambiamos procesos algebraicos por análisis geométricos, definiciones analíticas por ideas geométricas, manipulación de expresiones y variables por interrelaciones entre objetos geométricos y gráficos.

Dando una respuesta al problema de enseñar el concepto de derivada para lograr una mejor comprensión de éste, por medio de su interpretación geométrica, dando prioridad a habilidades como el análisis geométrico por sobre manipulación algebraica, mostramos otros elementos de las matemáticas que no son sólo procesos.

Justificación

Por mucho tiempo fue considerada el área principal de las matemáticas, la rama más importante de ellas, debido en parte por ser una herramienta de gran amplitud de aplicación para resolver problemas tanto prácticos como teóricos. Algunos conceptos fundamentales en matemáticas crecieron y maduraron a partir de aquí, tales como el de función, números reales, límite y función continua. Conceptos que influenciaron ampliamente el desarrollo de las matemáticas.

Desde Newton con sus fluxiones y Leibniz con sus infinitesimales, el Cálculo ha nacido, crecido y madurado hasta ser una importante estructura del conocimiento matemático, y de diversas ciencias.

Actualmente es difícil seguir pensando que el Cálculo es la columna vertebral de las matemáticas, no obstante, es indiscutible que es una área muy importante, básica, para el estudio y comprensión de las mismas, uno de los principales soportes para el estudio de las matemáticas avanzadas.

Debido a su importancia, es que el estudio del Cálculo también es fundamental en el desarrollo de cualquier estudiante que piense profesionalizarse en cualquiera de las áreas físico – matemáticas y las ingenierías. Por ello, es considerado en los programas de estudio de bachillerato, en particular en el Colegio de Ciencias y Humanidades.

El Colegio plantea el estudio del Cálculo como el puerto de salida hacia el estudio profesional para las áreas físico – matemáticas y las ingenierías, el inicio de las matemáticas avanzadas. Justo por ello, que el alumno logre una buena comprensión de éste será una base muy favorable para su desarrollo posterior en dichas áreas.

Curricularmente, la amplitud del Cálculo y su basta diversidad de usos en diferentes áreas del conocimiento hace necesario dividir al cálculo en dos grandes ramas para su estudio, a saber, el Diferencial y el Integral. Tan estrechamente ligados y tan fundamental el uno como el otro. Por la forma en que se estructura la enseñanza básica de éstos, es conveniente la buena comprensión del Cálculo Diferencial para lograr la misma meta para el Cálculo Integral.

En el Cálculo, Diferencial e Integral, los conceptos medulares son el de número real y el de límite, pues sobre éstos dos está sentado todo su desarrollo, son la base. No obstante, el corazón del Cálculo Diferencial es el concepto de derivada. Dentro de éste concepto se guarda una idea fuente que dio origen al Cálculo, que ha sido planteada y trabajada desde los griegos: hallar rectas tangentes de una curva.

Por otro lado, la derivada resulta esencial por ejemplo en problemas de optimización en muy diversas áreas. En la industria: hallar la mayor capacidad con el mínimo de material, las máximas ganancias con los mínimos costo. En computación: el mínimo tiempo con la máxima precisión, el mínimo de recursos con el máximo rendimiento. En economía: el mínimo de riesgo con el máximo aprovechamiento. En el transporte: el máximo recorrido con el mínimo combustible. En la agricultura: el máximo sembradío en la mínima área.

Debido entonces, a lo fundamental de la derivada, tanto como herramienta como objeto matemático, es que este trabajo se centra en la comprensión del concepto. Con la idea de que una mejor comprensión del mismo, también mejora la realización de sus aplicaciones.

Antecedentes

Debido a la importancia del tema de derivada, éste se ha estudiado ampliamente en la enseñanza de las matemáticas, tanto en nivel bachillerato como en licenciatura. Bajo un enfoque teórico como aplicado.

En los últimos años una herramienta didáctica que ha sobresalido es el uso de software en la enseñanza de las matemáticas. Se han trabajado gran cantidad de temas matemáticos utilizando software como apoyo didáctico para su enseñanza. Y la derivada no es la excepción (ver p. ej. [11], [16], [19], [21], [24], [27], [28]).

El uso de software para la enseñanza de las matemáticas se ha implementado y ha generado diversas teorías de enseñanza (ver p. ej. [26]), una de ellas es la visualización dinámica. Trata de utilizar programas especializados que permiten interacción dinámica entre diversos elementos matemáticos y entre el usuario.

Por medio de la visualización dinámica se hacen modelaciones, tanto teóricas como de aplicación, usando elementos matemáticos interrelacionados dinámicamente, cuyos parámetros se pueden manipular.

Desarrollar el tema de la derivada usando como herramienta didáctica la visualización dinámica es un tema que también se ha trabajado en la literatura especializada (ver p. ej. [12], [25], [29]).

También se han desarrollado trabajos en los que se introduce a la derivada mediante una interpretación: como la razón de cambio (ver p. ej. [10]).

Hay diversidad de trabajos sobre este tema. Incluso están los que cuestionan que el tema de límites puede no ser anterior al de derivada, sino que se puede estudiar el concepto de derivada sin tener que caracterizarlo por el uso de límites (ver p. ej. [12]). Están los que enfocan el desarrollo del tema en la modelación y resolución de problemas (ver p. ej. [12]).

Pese a que el tema es ampliamente trabajado, y se coincide en el uso de la visualización dinámica como herramienta didáctica. Hay diferencias significativas con el trabajo que aquí se desarrolla:

Primero que nada, en el trabajo que se presenta el desarrollo se basa en el concepto, no en el proceso. Se centra en la derivada, no en la derivación.

Se construye el concepto a partir de una pregunta de conocimientos básicos: ¿qué es una tangente?

Todo el desarrollo se basa en análisis geométricos. Dichos análisis se realizan siempre de manera inicial con "una función cualquiera", es decir, no trabajamos con la expresión analítica que define a una función en particular. Para reforzar los análisis realizados, se aterrizan ahora sí con una función particular conocida.

Se analizan situaciones generales y luego de llegar a conclusiones deseadas, se aterrizan en casos específicos. Esto quiere decir que los cálculos refuerzan las ideas, y no que a partir de cálculos se llegue a las ideas.

Se desarrollaron aplicaciones de visualización dinámica de modo que cada una permitiera presentar, manipular y analizar características geométricas, que en conjunto nos lleven a la obtención del concepto.

Algo muy importante es que el trabajo no termina cuando se llega a la obtención del concepto. Se sigue desarrollando con la misma estructura y bajo el mismo enfoque para presentar consecuencias esenciales de él, consecuencias que lo determinan fuertemente al grado que le dan gran parte de su importancia teórica y práctica, tal como: el análisis de una función a partir de su derivada (crecimiento de una función, y, máximos y mínimos).

De este modo llegamos a construir la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función sólo analizando geométricamente a ésta última. El alumno puede realizar esta tarea y obtener la gráfica de la derivada.

El análisis que se realiza se lleva a cabo también con funciones definidas por pedazos, es decir, cuyas gráficas tienen "picos", "hoyos" y "están rotas". De esta manera, no sólo se trabaja y analiza el concepto, sino también las situaciones en las que éste no se satisface.

Para lograr una mejor comprensión de un concepto no basta sólo trabajar el concepto, también hay que poder discriminar cuándo éste no está presente.

Se logra un propuesta teórica de enseñanza de las matemáticas y se muestra un ejemplo de aplicación de la misma a un tema específico dentro de un curso, así como su trato en el salón de clases y el trabajo con un grupo.

Creo que este enfoque efectivamente muestra una visión no procedimental de las matemáticas, y sí ayuda a una mejor comprensión de las mismas, y de la derivada.

Descripción

El trabajo está formado por cuatro capítulos.

En el Capítulo 1 se menciona el contexto en el que se desarrolla el trabajo. Las características académicas y socio-culturales de los alumnos para los que se hace la presente propuesta de enseñanza, así como las características institucionales bajo las que se desarrolla y enmarca el mismo.

En este capítulo también se menciona la metodología utilizada, los instrumentos de evaluación y recursos didácticos utilizados.

En el Capítulo 2 se desarrollan los conceptos teóricos que dan sustento a la propuesta de enseñanza. Los conceptos fundamentales son los *conocimientos previos y aprendizaje significativo*, *registros de representación*, y *visualización dinámica*.

Este capítulo no es un desarrollo exhaustivo de las teorías mencionadas. En él se hace mención de los conceptos de las mismas en los que se sustenta el trabajo.

En el Capítulo 3 se presenta la propuesta didáctica general del trabajo. Se explica la parte teórica de la misma: el *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas.*

Se describe la estrategia didáctica con la que se llevo a cabo un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas* para un tema específico: el concepto de la derivada.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados de la aplicación de la propuesta, así como el análisis de los mismos.

Se presentan tanto datos cuantitativos como cualitativos. Y se hace un cruce entre ambos.

I. Marco de Referencia

Contexto

El estudio presentado a continuación está dirigido a alumnos del curso de Cálculo Diferencial e Integral I del quinto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades del plantel Azcapotzalco. Se enfoca en el aprendizaje del concepto de derivada por medio de su interpretación geométrica, como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto. Usando la visualización dinámica como recurso didáctico.

A continuación se describen de manera general las características académicas, sociales y culturales, de los alumnos para los que se elaboró el trabajo, así como el entorno y la metodología de trabajo.

1.1.1 Social y Cultural

Toda institución educativa debe responder a las necesidades y características de la sociedad a la que atiende. Una característica significativa de la sociedad actual, es el uso y propagación de los recursos tecnológicos: como medios de comunicación y entretenimiento, como herramientas de trabajo, como recursos financieros, etc. En estos usos de los recursos tecnológicos, un aspecto importante de ellos es la forma de presentar la información así como la manera de acceder e interactuar con ella.

Esta característica tecnológica de la sociedad actual, se remarca en las costumbres y cultura de sus adolescentes, inmersos en una era digital en la que las computadoras y el Internet son los principales medios de trabajo, comunicación e interacción.

Los adolecentes viven en una era digital, de mp3, celulares, redes sociales, Internet, correo electrónico, video juegos cada vez más sofisticados, etc. Los nacidos a partir de 1988 son los considerados "nativos digitales", la llamada Generación Einstein. Algunas de las características de éstos adolecentes son (Boschma, 2008):

> Ellos tienen intereses.
> Ellos se sienten como pez en el agua de la sociedad de la información.
> Ellos aprenden de forma lateral por asociación de ideas.
> Ellos investigan y descubren como quieren hacerlo.
> Ellos viven, aprenden y trabajan en red.

Los jóvenes que actualmente están en los salones de clases, son jóvenes de dicha generación. Éstos jóvenes están acostumbrados a moverse en un medio digital, versátil y dinámico, lleno de imágenes. "Estos jóvenes han nacido en la era de la televisión y se han educado en una cultura de la imagen en lugar de en una cultura de la palabra" (Boschma, 2008, p. 101).

La generación digital requiere que la educación vaya a su ritmo, en su mismo ambiente y con el mismo dinamismo que éste presenta. "Los jóvenes han crecido con un canal de *zapping* vanguardista: Internet. No más linealidad, ellos saltan de un asunto a otro, de aquí para allá" (Boschma, 2008, p. 101). El Internet y los recursos digitales permiten a los jóvenes no sólo el acceso al conocimiento y la información, sino que representan una manera distinta de obtenerlos, utilizarlos y apropiarse de ellos.

Internet permite que los adolescentes sean participes activos de la generación de la información y de la forma de apropiarse de su conocimiento.

Las características de su entorno se pueden y deben utilizar como herramientas en los contextos educativos, como medio de interacción, de llamar su atención y su gusto por aprender. Lo que es una característica de esta generación, la búsqueda de información y conocimiento, sólo hay que llevarlas a su contexto.

Se requiere de recursos didácticos interactivos que presenten los contenidos, faciliten su comprensión y que, al mismo tiempo, desarrollen habilidades creativas e intelectuales. Sobre todo, que permitan una interacción de los alumnos, así como la asociación de ideas o conceptos. Recursos que presenten diferentes características de un mismo concepto y las relaciones entre ellas de un modo dinámico, de manera que se propicie el análisis y la reflexión. Recursos que muestren características similares a las que tiene el mundo con el que interactúan, se relacionan y viven: el mundo digital. Se requieren recursos didácticos digitales dinámicos.

No sólo son requeridos los recursos didácticos digitales dinámicos, con ellos, se hace necesario para su implementación, un uso y diseño adecuado acorde con las diferentes necesidades educativas. Esto implica un cambio en la forma de enseñar, "una nueva forma de educación y un nuevo perfil de profesor son necesarios" (Boschma, 2008, p. 90).

Son estos adolescentes de la era digital, la Generación Einstein, éstos alumnos, los que presentan el reto a los docentes de llevar el dinamismo del mundo tecnológico digital hacia la educación, sin dejar de lado nuestra misión y la filosofía para ello.

1.1.2 Institucional

Una de las principales directrices de la labor de un profesor es la misión de la institución donde él ejerce. En el caso del Colegio de Ciencias y Humanidades, (CCH), parte de su misión, como institución de educación media superior es:

El buscar que sus estudiantes, al egresar, sean sujetos, actores de su propia formación, de la cultura de su medio, capaces de obtener, jerarquizar y validar información, utilizando instrumentos clásicos y tecnológicos para resolver con ello problemas nuevos.

Sujetos poseedores de conocimientos sistemáticos en las principales áreas del saber, de una conciencia creciente de cómo aprender, de relaciones interdisciplinarias en el abordaje de sus estudios, de una capacitación general para aplicar sus conocimientos, formas de pensar y de proceder, en la solución de problemas prácticos. Con todo ello, los alumnos tendrán las bases para cursar con éxito sus estudios de nivel superior y ejercer una actitud permanente de formación autónoma.

Por lo tanto, es primordial para los alumnos del Colegio, el conocimiento y las habilidades lógico deductivas, mismas que pueden ser logradas a través del estudio de las matemáticas.

Se espera que la estancia en la institución permita a los egresados lograr la filosofía del Colegio: Desarrollo del alumno crítico que *aprenda a aprender*, *a hacer y a ser*.

Por su trascendencia, lo anterior debe determinar el rumbo de toda acción docente que se emprenda dentro de la institución.

El CCH considera al estudiante como un individuo capaz de participar activamente en el desarrollo de su conocimiento y las aplicaciones del mismo. Por lo tanto, el concepto de aprendizaje cobra mayor importancia que el de enseñanza. Por ello, la metodología aplicada persigue que el alumno *aprenda a aprender*, *aprenda a hacer* y *aprenda a ser*. Que la actividad receptiva y creadora se desarrolle y que adquiera capacidad auto informativa.

Tomando como base los anteriores principios, el Colegio agrupa los conocimientos en cuatro áreas:

1. Matemáticas.
2. Ciencias Experimentales.
3. Histórico-Social.
4. Talleres de Lenguaje y Comunicación.

En particular, en el área de Matemáticas, de acuerdo a su Plan de Estudios, se enseña a los alumnos a percibir ésta disciplina como ciencia en constante desarrollo, la cual les permitirá la resolución de problemas de diversos tipos: físico, social, económico, biológico, etc. Igualmente se busca iniciar el desarrollo del rigor, la exactitud y la *formalización* sobre dicho conocimiento. Por *formalización* se entiende el análisis, comprensión y tratamiento abstracto de las situaciones, por medio de diferentes representaciones, como la esquemática o la algebraica.

Una de las principales distinciones del CCH con respecto a otros sistemas educativos, es su modelo educativo, el cual es de cultura básica, propedéutico, y está orientado a la formación intelectual ética y social de sus alumnos. Lo que significa que la institución fomentará en sus estudiantes actitudes y habilidades necesarias para que, por si mismos, se apropien de conocimientos racionalmente fundados y asuman valores y opciones personales.

El área de Matemáticas, de acuerdo con la filosofía educativa del Colegio, tiene una concepción de una disciplina que posee un carácter dual:

- **Es una ciencia**. Tiene un desarrollo que admite titubeos, conjeturas y aproximaciones, al igual que rigor, exactitud y formalidad; ya que es el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y sistematiza conocimientos, a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos.

- **Es una herramienta**. Constituye un poderoso instrumento que contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías, a la obtención de conocimientos y sus aplicaciones en diversos campos del saber tanto humanístico, como científico y tecnológico.

Como caso particular, en esta concepción dual del área de matemáticas, y en busca del logro de los objetivos educativos de la institución, el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, busca brindar a los alumnos conceptos y procedimientos básicos referentes a ésta importante rama de las matemáticas. Como ciencia, busca que el alumno logre la comprensión y el análisis de conceptos tales como el de *límite* y *derivada*, así como las habilidades operativas correspondientes. Como herramienta, busca desarrollar en el alumno las habilidades de resolver y plantear problemas de aplicación relacionados con el uso de estos elementos matemáticos.

Del programa de estudios del curso de Cálculo I, se sintetiza el énfasis en el desarrollo de habilidades matemáticas, a través del significado y manejo de conceptos y procedimientos, busca la integración de conocimientos y la habilidad de tránsito entre diferentes registro de representación.

Las habilidades específicas que el curso busca desarrollar en los estudiantes son:

- *Generalización.* Percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente.
- *Formalización.* Operar con estructuras más que con el contexto de una situación.
- *Reversibilidad de Pensamiento.* Invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento.
- *Flexibilidad de Pensamiento*. Disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que no se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos.
- *Visualización Espacial*. Percibir esquemas geométricos contenidos en otros más complejos.

Debido al enfoque, la perspectiva y los objetivos del curso, es importante que los alumnos interactúen de forma activa; organizando, sistematizando, comparando, clasificando, analizando, explorando, argumentando, aplicando, etc. Dicha interacción se debe lograr con la temática que va a conocer el alumno. Esto, además de favorecer una mejor comprensión de la misma, los dota de herramientas intelectuales.

Mediante el uso de un software especializado pueden diseñarse estrategias de aprendizaje que contribuyen a la búsqueda de significados, a la sistematización, a la exploración, a la formulación de conjeturas y al desarrollo de la imaginación espacial, entre otros.

El desarrollo de materiales que utilicen y potencialicen el uso de software, con el fin de lograr una mejor comprensión, así como el desarrollo de habilidades y formas de razonamiento es congruente con el modelo y objetivos educativos del CCH, y del área de matemáticas, en particular del curso de Cálculo I.

Por lo anterior, debido al dinamismo que permite el uso de software aunado con la conjunción de la cultura digital, que está presente en los alumnos del CCH, se hace necesario vincular ambas características en busca de una mejora en el aprendizaje de los alumnos. Lograr una renovación en la enseñanza de las matemáticas dentro de la institución, que posibilite ampliar el ambiente educativo, acorde a la cultura digital actual que presenta la población estudiantil del Colegio.

1.1.3 Académico

El bachillerato universitario de la Universidad Nacional Autónoma de México, (UNAM), en el sistema escolarizado, está dividido en dos subsistemas: La Escuela Nacional Preparatoria y La Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidad, (CCH). La duración de estudio en ambos subsistemas es de tres años, en el CCH se divide en seis semestres.

Al final del segundo año de estudio, en el CCH, los alumnos deben realizar un trámite importante para su continuación académica: *selección de materias*. Deben seleccionar un esquema preferencial preestablecido, acorde con la licenciatura que pretenden estudiar, según los requerimientos de la misma. La intención de éste proceso es iniciar la especialización de los alumnos de acuerdo a los estudios profesionales que desean cursar.

Los alumnos deben seleccionar las materias que los preparan con los conocimientos básicos y necesarios para sus estudios posteriores en un área específica. Por ejemplo, para cursar las licenciaturas del *Área 1. Física, Matemáticas y las Ingenierías*, se sugiere que se tomen los cursos de Cibernética I y II, Cálculo Diferencial e Integral I y II, y Física III y IV, los que se cursarán en quinto y sexto semestre, respectivamente. Específicamente, el curso de Cálculo I es sugerido, no obligatorio, para las áreas de matemáticas y ciencias experimentales, para todas las ingenierías, física, matemáticas, actuaría, urbanismo, diseño industrial, tecnología, optometría, farmacia, las relacionadas con química, computación, y con arquitectura.

Las materias que se sugieren de acuerdo al área y licenciatura específica que se desea estudiar, son seleccionadas respondiendo a las necesidades conceptuales y al desarrollo de habilidades requeridas para la mejor comprensión y desarrollo del alumno en el estudio de dicha licenciatura. No obstante, estas materias son literalmente una sugerencia. Los alumnos bien pueden no elegir los cursos que se especifican en el trámite.

Una característica conocida en los alumnos del bachillerato, es un disgusto general por las matemáticas. Éste aspecto se ve reflejado en la *selección de materias.* Es común que los alumnos escojan los cursos de Estadística y Probabilidad I y II, en lugar de los de Cálculo. Esta generalidad también se ve reflejada en la selección de licenciatura que la población estudiantil desea estudiar. En 2011 los egresados del CCH asignados a las licenciaturas de Ingeniería en Computación, Física, Matemáticas, Ciencias de la Computación e Ingeniería Civil, suman el 5.6% (Colegio de Ciencias y Humanidades. Dirección General, 2011).

Se observa, por lo tanto, que es bajo el porcentaje de alumnos del CCH que se inscriben a los cursos de Cálculo. Sin embargo, éstos tienen una característica importante: a ellos les gustan las matemáticas, tanto que incluso desean estudiar una licenciatura relacionada con esta área del conocimiento.

Los alumnos de los cursos de Cálculo, comparten un interés general que es característico de la población estudiantil del CCH: el deseo de estudiar una licenciatura: "…se trata de jóvenes que se han planteado como meta cursar una licenciatura y que en términos generales cuentan con condiciones adecuadas para realizar su labor de estudiantes" (Colegio de Ciencias y Humanidades. Dirección General, 2011). Éste interés está especialmente acentuado en los alumnos del tercer año, los que están próximos a egresar y alcanzar su meta de concluir el bachillerato, que es el caso de quienes cursan Cálculo I. Al ser alumnos de quinto semestre, están interesados en el *pase automático*, recurso que les permite ingresar como estudiantes a una de las licenciaturas de la UNAM sin necesidad de presentar el examen de ingreso. Para la UNAM, los alumnos pueden obtener el *pase* si egresan en máximo cuatro años y con un promedio mínimo de 7.

Lo anterior sugiere, que en particular los alumnos del curso de Cálculo I están interesados en acreditar la materia, egresar del colegio, y hacerlo con el mejor promedio posible para alcanzar sus metas de estudios profesionales.

Es común que los alumnos que deciden cursar ésta materia tengan interés por aprender y prepararse mejor, teniendo en mente llegar a la carrera que desean, y tener una preparación adecuada para ella.

No obstante, no necesariamente todos los alumnos que deciden cursar la materia de Cálculo I en el plantel Azcapotzalco del CCH, (CCHA), tienen las características descritas anteriormente. Sin embargo, es justamente en el quinto semestre, en él que se cursa Cálculo I, donde se observa un realce en la acreditación y la situación académica de los alumnos. Este es un aspecto general de la población del plantel Azcapotzalco, incluso del Colegio. Según datos del Consejo Técnico del Colegio, para la generación 2000 del plantel Azcapotzalco, el porcentaje de alumnos regulares en el 5to semestre era del 21%, y aumentó al 37% para el sexto semestre. Lo que indica que en el quinto semestre el 16% se volvió regular, es decir, acredito las materias que debía y no reprobó ninguna materia de quinto. Entonces, se reitera el punto antes mencionado sobre el interés de los alumnos del quinto semestre, en particular del curso de Cálculo I, de acreditar la materia y con el mejor promedio posible.

En general, los alumnos de los cursos de Cálculo del CCHA están motivados a seguir con sus estudios en el Colegio, a desarrollar sus habilidades y conocimientos en el área de las matemáticas, para continuar así con su desarrollo académico en sus estudios profesionales.

Metodología

1.2.1 Instrumentos de evaluación

Para la realización de esta investigación se trabajó con cuarenta alumnos del grupo 513 de Cálculo I del CCH plantel Azcapotzalco.

Durante 6 sesiones de dos horas, cuatro horas a la semana distribuidas en dos sesiones de dos horas, se llevo a cabo la puesta en práctica del planteamiento desarrollado en este trabajo. La primera y última sesión se dedicaron únicamente a aplicar instrumentos de evaluación.

Como instrumentos para valorar los resultados de la investigación, se aplicaron dos cuestionarios referentes al concepto de la derivada y su interpretación geométrica. Primero se aplicó un *pre test*, en la primera sesión, antes de aplicar la propuesta de este trabajo. En la última sesión se aplicó un *post test*, luego de concluir el trabajo de aplicación de nuestra propuesta.

La validación de los *test* fue realizada por expertos: cinco Profesores Titulares de Carrera, del CCHA, que tiene de 23 a 38 años impartiendo el curso de Cálculo I. En el CCH los profesores tiene la siguiente categorización ascendente, sub clasificada con letras: Interinos A, Definitivo A y B, de carrera asociado A, B y C, y de carrera titular A, B y C.

Los profesores validaron los siguientes aspectos:

- Pertinencia de las preguntas con respecto al tema.
- Que la dificultad de las preguntas fuera congruente con los objetivos del tema, del curso, y del nivel de estudios.
- El tiempo apropiado para que los alumnos respondan los *test*.
- La claridad de la redacción de las preguntas.
- La correcta elaboración de las preguntas de acuerdo a los conceptos y contenidos matemáticos.

Ambos *test* constan de veinte preguntas de opción múltiple, con cuatro opciones de respuesta.

Las preguntas entre los dos *test* son muy similares y algunas forman parte de ambos. Lo que se varió de uno a otro fue la forma de establecer la pregunta con la relación entre los diferentes registros de representación. También se hicieron modificaciones a las gráficas de las preguntas. Las preguntas similares, tienen gráficas similares, mas no iguales.

Como validación estadística de las preguntas de los *test*, todas las preguntas de ambos se aplicaron además a 84 alumnos de otros grupos de Cálculo I del CCHA para medir su alfa de Cronbach.

Ambos *test* se pueden consultar en los sendos anexos A y B de este trabajo.

Además de los *test*, al final, se aplicó un cuestionario de opinión de 29 preguntas, referentes a conocer el sentir de los alumnos referente al trabajo que se realizó.

La escala utilizada en el cuestionario de opinión fue de tipo Likert con cuatro niveles de respuestas:

- Nunca.
- A veces.
- Frecuentemente.
- Siempre.

El cuestionario de opinión se puede consultar en el Anexo C de este trabajo.

1.2.2 Materiales didácticos

Como materiales didácticos de apoyo se utilizaron Applets de diseño propio elaborados específicamente para este trabajo. El software utilizado para su elaboración fue GeoGebra. Para ver más de las características y beneficios de éste software vea (Solis de los Reyes, 2010).

Los Applets fueron utilizados a través de una plataforma Moodle, en el espacio *tu aula virtual*, del programa *habit@t puma* de la Dirección General de Tecnologías de la Información y la Comunicación de la UNAM.

La metodología educativa utilizada fue la *b-learning*, utilizando la plataforma Moodle del espacio de *habit@t puma* como el medio de apoyo fuera del aula, accesado a través de Internet.

II. Marco Teórico

En este capítulo se presentan los elementos de las teorías que sustentan la investigación realizada.

Conocimientos Previos y Aprendizaje Significativo

Siempre debe de haber un inicio. Así como la vida no surge por generación espontánea, el conocimiento y el aprendizaje tampoco.

La teoría más aceptable del inicio de la vida es el Big Bang. Así como ésta teoría da una respuesta a la pregunta ¿cómo inicio la vida?, del mismo modo diversas teorías dan una respuesta a las preguntas: ¿cuál es el inicio del conocimiento?, ¿cómo se genera nuevo conocimiento?, ¿cómo aprendemos?

Estas preguntas son muy generales, y una de las figuras más representativas que trabajó para responderlas fue Jean Piaget.

Además de Piaget, otro personaje que trabajó para responder preguntas similares fue David Ausubel. Él estudió la generación de nuevo conocimiento a través de los procesos de enseñanza y aprendizaje en un contexto educativo. Con base a la lectura de sus trabajos se generaron las siguientes preguntas:

¿Cómo debemos enseñar nuevos conceptos a los alumnos de bachillerato?

Más específicamente:

¿cómo enseñar el concepto de derivada a los alumnos de quinto semestre del CCH en los cursos de Cálculo I para lograr la comprensión del concepto?

Para construir la respuesta a esta pregunta se partió de la idea de: *lo que el alumno ya sabe*. Este debe ser el punto de partida de toda enseñanza, como lo afirmo Ausbel:

> Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente. (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010)

Lo que el alumno ya sabe, *los conocimientos previos*, no son sólo los requisitos curriculares para cursar una materia, es todo el aparato cognitivo que el alumno ha desarrollado a lo largo de su vida; incluye sus vivencias, sus experiencias y los conocimientos empíricos que adquiere a través de ellas; además los conocimientos y habilidades curriculares que ha adquirido a través de su labor de estudio.

La importancia de los conocimientos previos radica en que son éstos los que permiten lograr en el alumno un aprendizaje significativo.

Un *aprendizaje significativo* es el que logra generar nuevos significados, y el logró de éstos es la consumación de un proceso de aprendizaje significativo. Es decir, un *proceso de aprendizaje significativo* es el que lleva al alumno a la obtención de nuevos significados, teniendo así un aprendizaje significativo.

Para llegar entonces a un aprendizaje significativo se debe consumar un proceso de aprendizaje significativo. Para ello, es necesario considerar el aspecto principal de un proceso de aprendizaje significativo:

> La esencia del proceso del aprendizaje significativo reside en que ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario y sustancial con lo que el alumno ya sabe (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010, p. 48)

> Por relación sustancial y no arbitraria se entiende que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo un concepto o una proposición. (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010, p. 48)

Entonces, un aprendizaje es significativo si logramos generar un nuevo significado que se relacione sustancialmente con un significado existente en el alumno, que se relacione sustancialmente con sus conocimientos previos.

Un aspecto importante que siempre se debe de considerar es:

¿qué tipo de aprendizaje es el que se quiere lograr?

Por mencionar algunos, pueden ser de los siguientes tipos:

- Conceptual.
- Procedimental.
- Actitudinal.
- De análisis.

En esta investigación, el aprendizaje que se espera lograr es un concepto. Para éste tipo de aprendizaje los factores que afectan su adquisición son:

1. La heterogeneidad de los ejemplos después de la consolidación en un ambiente más homogéneo.
2. La combinación y la secuenciación de los ejemplos positivos y negativos.
3. La relevancia de la información presentada o disponible para el concepto en cuestión.

En la adquisición de conceptos, se consideran dos principales tipos: la *formación de conceptos* y la *asimilación de conceptos*. La primera es la que se da a temprana edad, en niños preescolares. Es un proceso de descubrimiento en el que intervienen procesos como el de abstracción y generalización, por mencionar algunos. Un ejemplo es cuando el niño aprende el concepto de “perro” o “casa”. Lo hace a través de la repetición y de observar diversos ejemplos, así el niño construye el concepto.

El segundo tipo, *la asimilación de conceptos*, se lleva a cabo en individuos de más edad, como adolescentes y adultos. En este caso se aprende nuevos significados conceptuales cuando se les presentan los atributos de criterio de los conceptos y cuando se relacionan éstos atributos con ideas pertinentes establecidas en sus estructuras cognitivas.

La asimilación de conceptos se lleva a cabo a través de analizar las características que definen el concepto, y comprobarlas en diferentes situaciones:

- En las que sí se cumplen y se tienen ejemplos del concepto.
- En las que alguna característica no se satisface y no se ejemplifica el concepto.

Por lo tanto, "el alumno deberá pasar por muchos de los mismos procesos de abstraer, diferenciar, generar y comprobar hipótesis, y generalizar, antes de que surja el significado nuevo" (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010, p. 92).

Debido a la naturaleza de la asimilación de conceptos, en la que se presentan las características del concepto y contextos apropiados en las que éstas se satisfacen o no, esta adquisición es, característicamente, una forma de aprendizaje significativo por recepción (no por descubrimiento). No obstante, ya que intervienen diversas operaciones cognoscitivas activas, no se le puede considerar pasivo ni perceptual.

En la asimilación de conceptos interfieren procesos activos de relación, diferenciación, e integración, referentes para la obtención de nuevos significados; mismos que interactúan con los conceptos previos que el alumno posee. De modo que tanto más activa sea dicha interacción, más significativo será el concepto asimilado.

La asimilación de conceptos consiste principalmente en un proceso de abstraer características comunes y esenciales de una clase de objetos o acontecimientos.

Los componentes psicológicos que intervienen en dicha asimilación los podemos enlistar de manera general de la siguiente forma:

1. Análisis discriminativo de diferentes patrones de estímulo.
2. Formulación de hipótesis relativa a elementos comunes abstraídos.
3. Comprobación subsecuente de la hipótesis en situaciones específicas.
4. Designación selectiva, una categoría general bajo la cual pueden incluirse los objetos a los que se les pueden atribuir las características comunes.
5. Relación de la designación selectiva con las ideas de afianzamiento pertinentes de la estructura cognitiva.
6. Diferenciación del concepto nuevo de los conceptos relacionados y previamente aprendidos.
7. Generalización de los atributos de criterio del concepto nuevo a todos los miembros de la clase.
8. Representación del nuevo contenido categorial por medio de símbolos lingüísticos que concuerden con el empleo convencional. (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010, p. 97)

La representación del nuevo concepto, es parte de un *aprendizaje representacional*, y es el último paso en la formación de conceptos.

> Aprendizaje representacional o de representaciones, consiste en hacerse del significado de símbolos solos (generalmente palabras) o de lo que éstos representan. (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010, p.52)

No obstante, si la representación de un concepto se da sin preceder todos los pasos previos, por ejemplo de modo repetitivo, entonces aunque se pueda expresar la representación de un concepto, éste no tiene un sustento en la estructura cognitiva y no representa un concepto genuino para el alumno.

Naturalmente, las ideas de afianzamiento de la estructura cognitiva, con las cuales se relacionan los atributos del criterio de los conceptos nuevos, varían de acuerdo a lo abstracto y complejo del concepto; además de las ideas en la estructura cognitiva en la que se espera afianzar el nuevo concepto, es decir, también dependen de los conocimientos previos que el alumno posea.

El uso incorrecto de la representación de algún concepto, generalmente evidencia una falta de comprensión cognitiva del concepto.

Registros de Representación

¿Cómo saber que sabemos algo? Sin duda es un tema interesante para investigar, no obstante su respuesta en forma general no necesariamente atiende las necesidades de la presente investigación. Para nosotros el problema es:

¿Cómo saber que sabemos algo en el área de las matemáticas?

Para los matemáticos la respuesta es simple: *sabes algo si y sólo si lo puedes demostrar*. De hecho ésta es la manera como se acepta o rechaza el conocimiento matemático, por medio de demostraciones.

Análogamente, se puede preguntar: ¿cómo saber que alguien aprendió matemáticas? Sin embargo, una vez más la pregunta es demasiado general para nuestros fines. Cambiémosla por la siguiente:

¿Cómo saber que un alumno aprendió un concepto de matemáticas?

Nuevamente, para los matemáticos la respuesta es simple: *si el alumno puede justificar y demostrar tanto ejemplos del concepto como los teoremas que lo relacionan, entonces lo aprendió; de lo contrario no lo aprendió.* Esto está bien hablando de un alumno que estudia para matemático, mas no para un alumno de bachillerato.

Para un alumno de bachillerato se podría decir que aprendió un concepto si puede aplicarlo para resolver problemas. Pero si nos quedamos hasta aquí estaríamos pensando en que este alumno vea a la matemática sólo como una herramienta. Falta ver el enfoque de la matemática como ciencia, un aspecto relevante para el CCH.

En el enfoque de la matemática como ciencia, decir que un alumno de bachillerato aprendió un concepto es cuando logra identificarlo y justificarlo en diferentes contextos. La diferencia en este sentido con el alumno matemático es el verbo, para él es demostrar, para el bachiller es justificar, cada uno en su respectivo nivel.

Es similar a cuando un niño aprende, por ejemplo el concepto *manzana*. Cuando se le enseña a un niño éste concepto, se le muestran representaciones de él. Se le muestra una manzana como una representación física, y también se le dice el sonido de la palabra "manzana", como una representación fonética del mismo concepto. Se asume que el niño aprendió el concepto cuando puede identificar las diferentes representaciones de él, pero no sólo identificarlas de manera aislada, sino que relaciona éstas entre sí; es decir, de la representación física puede pasar a la representación fonética y viceversa. Incluso se espera que el niño manipule las diferentes representaciones del concepto *manzana*, cada una de acuerdo al diferente contexto de su representación.

Del mismo modo que se asume que un niño aprende un concepto; igualmente se considera que un alumno aprendió un concepto de matemáticas si puede:

- Identificar el concepto en diferentes representaciones.
- Transitar el concepto entre diferentes representaciones.
- Manipular el concepto en cada representación.

De acuerdo con Monzoy *las representaciones semióticas* son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y funcionamiento. Citado en (Monzoy Vásquez, 2002).

Por ejemplo, el concepto *manzana*, tiene como representación semiótica la palabra "manzana" usando el alfabeto del español como sistema de representación.

Las representaciones semióticas en las matemáticas, no son sólo una forma de representar sus conceptos, sino que son necesarias para lograr la comprensión de éstos, como se manifestó en otro trabajo, "porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" Citado en (Solís de los Reyes & Canut Diaz Velarde, 2011).

Del mismo modo, las diferentes representaciones de un concepto también son la forma de accederlos, manipularlos y avanzar en el estudio matemático.

> Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, o en una experiencia intuitiva inmediata, como lo son los objetos comúnmente señalados como reales o físicos. Es necesario entonces poder proporcionar representantes. La posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación. Las representaciones semióticas juegan un papel fundamental en la actividad matemática y solamente por medio de ellas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Citado en (Cruz Resendiz, 2007).

En el caso de los objetos matemáticos, la relación entre éstos y sus representaciones semióticas es tan intrínseca que Duval la llama la *paradoja cognitiva del pensamiento*:

> Por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no pueden ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Citado en (Monzoy Vásquez, 2002)

Los objetos matemáticos sólo pueden ser asequibles por medio de sus representaciones; y sus representaciones son la forma de comprender los objetos. No obstante la estrecha relación entre los objetos matemáticos y sus representaciones semióticas, es necesario comprender la distinción entre el objeto y dichas representaciones.

> Una cosa es el objeto matemático y otra su representación. Nunca deben confundirse los objetos matemáticos con sus representaciones pues esto provocaría perdida de comprensión y los conocimientos adquiridos llegan a estar inutilizados. Poder diferenciar entre el objeto matemático y sus representaciones es básico para la comprensión de las matemáticas. Citado en (Cruz Resendiz, 2007).

Se puede concluir que "la distinción entre objeto matemático y su representación es el punto estratégico para la comprensión de la matemática" Citado en (Solís de los Reyes & Canut Diaz Velarde, 2011).

La comprensión de los objetos matemáticos se logra por medio de sus representaciones, son éstas representaciones las que nos permiten acceder a los conceptos y manipularlos; el poder representarlos en diferentes registros y transitar entre ellos, es lo que nos permite identificar al concepto en sí, y a sus representaciones... *esto es lo que llamamos aprender un concepto matemático.*

Estilos de Aprendizaje

Desde los trabajos de Piaget es generalmente aceptado que todo lo que una persona conoce, lo conoció por la estimulación de los sentidos. De ello se sigue que hay diferentes formas de aprender, escuchando, viendo, leyendo, practicando. Esto es lo que se llaman *estilos de aprendizaje*.

Los estudios muestran que en general cada persona tiene preferencia o facilidad para aprender por medio de ciertos *estilos de aprendizaje*. Esto claramente repercute en la forma de aprender de los alumnos. Hay alumnos que para aprender algo necesitan verlo, son alumnos visuales; están los que aprenden escuchando, son alumnos auditivos.

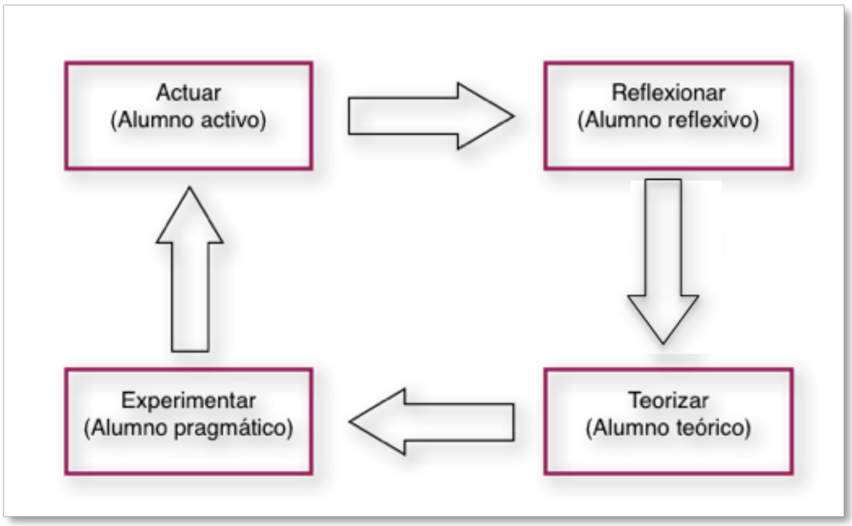
En el modelo elaborado por Kolb, (Cisnero, 2004), menciona que para aprender algo debemos trabajar o procesar la información que recibimos, por lo tanto se puede partir de:

- una experiencia directa y concreta: alumno activo.
- o bien de una experiencia abstracta, que es la que tenemos cuando leemos acerca de algo o cuando alguien nos lo cuenta: alumno teórico.

Las experiencias que tengamos, concretas o abstractas, se transforman en conocimiento cuando las elaboramos de alguna de estas dos formas:

- Reflexionando y pensando sobre ellas: alumno reflexivo.
- Experimentando de forma activa con la información recibida: alumno pragmático.

De acuerdo con el modelo de Kolb, mencionado en (Solís de los Reyes & Canut Diaz Velarde, 2011), un aprendizaje óptimo es el resultado de trabajar la información en cuatro fases:



Esquema 1. Fases de un aprendizaje óptimo en el modelo de Kolb

En general se puede decir que en el estudio matemático, debido a su naturaleza teórica, se cubren fácilmente los aspectos reflexivos y teóricos del modelo de aprendizaje; mas no necesariamente así, los aspectos pragmáticos y activos.

Una forma de cubrir éstos dos últimos aspectos del modelo de aprendizaje, en el estudio matemático, es por medio de la computadora como herramienta didáctica.

Visualización Dinámica

En esta sección trataremos el tema de visualización dinámica, contextualizado desde diferente enfoques.

2.4.1 En los estilos de aprendizaje

El uso de la computadora como herramienta didáctica, permite la manipulación digital de los elementos de un concepto, *visualización dinámica*. Por ejemplo, con ella se puede no sólo graficar una función, sino también modificar sus parámetros y visualizar los cambios que dichas modificaciones ocasionan en la gráfica; o bien, "mover" la gráfica, desplazándola en el plano, y observar la variación que ocurre en sus parámetros debido a este movimiento. De este modo, con la computadora experimentamos las relaciones algebraicas y geométricas de la gráfica de una función.

Un aspecto importante a resaltar en la experimentación que permite la visualización dinámica, como en el ejemplo que se menciona previamente, es que trabajamos dos registros de representación; en un mismo ambiente, en un mismo momento, y sobre todo, relacionando dinámicamente las características de ellos y su interrelación.

La visualización dinámica permite trabajar tanto las relaciones entre los elementos de distintas representaciones, que incluso se logra hacer no sólo con un concepto o tema, sino también con diferentes áreas de la matemática.

> Puede ayudar a expresar los datos en diferentes sistemas de representación (tabulares, gráficos y analíticos). Como consecuencia, resulta una herramienta poderosa para establecer conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas (geometría, cálculo, álgebra y aritmética) (Santos Trigo & Benítez Mojica, 2003)

Relacionar no sólo conceptos entre sí, sino diferentes áreas del conocimiento matemático es una de las principales directrices del Programa de Matemáticas I a IV y del sentido del Área de Matemáticas en general.

El uso de software como estrategia de enseñanza se presenta en el Programa de Matemáticas I a IV como una sugerencia general para el tratamiento de sus contenidos. Representa una herramienta que presenta muchos beneficios, que coinciden con la visón de enseñanza de las matemáticas en el Colegio y con el sentido del Área.

> El uso de estos recursos ofrece la posibilidad de formular y explorar hipótesis y conjeturas de tal suerte que la escuela no sea solamente un lugar donde los conocimientos se trasmiten, sino donde se construyen (Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, 2005, p. 8 y 9)

La visualización dinámica permite trabajar tanto los registros de representación como las relaciones entre ellos. Aspectos importantes y necesarios para el estudio matemático.

La manipulación digital que se logra por medio de la visualización dinámica es uno de los elementos didácticos más importantes de ella como herramienta didáctica. Hay que resaltar, que no sólo se presentan los elementos de un concepto en un monitor, y se hace que se muevan; sino que se puede permitir que sea el alumno el que interactúe con ellos, que sea él quien manipule, digitalmente, los objetos que estudia. La visualización dinámica permite hacer que sea el alumno el que participe de manera activa en la experimentación de los objetos que estudia, que sea él el que manipule los elementos de los diferentes registros de representación. Es factible tener alumnos interactuando con los objetos matemáticos.

Por lo tanto, la visualización dinámica apoya diferentes estilos de aprendizaje. Para los alumnos *visuales* resulta más atractivo el uso del software, obviamente por el aspecto visual. Para los alumnos que son *reflexivos*, ya que no sólo se trata de manipular elementos en la computadora si no en base a ello, de discutir y analizar diferentes situaciones que se presentan o modelan digitalmente, se propicia la reflexión. Para el alumno *pragmático* resulta atractivo el hecho de manipular los elementos de los conceptos.

La visualización dinámica permite abarcar en el estudio de las matemáticas, tanto el aspecto experimental como el activo del modelo de aprendizaje. Entonces, con ésta herramienta se puede cerrar el ciclo propuesto para la optimización del aprendizaje.

2.4.2 En el aprendizaje significativo

La visualización dinámica ayuda a propiciar el aprendizaje matemático por medio de la experimentación dinámica, y la integración en ella con los registros de representación. Cuando el alumno mueve elementos gráficos y observa el comportamiento, al tiempo que, respectivamente, cambian las características algebraicas, se propicia el aprendizaje. "El aprendizaje se propicia al modificar los valores de una o más variables y verificar sus efectos." (Álvarez-Manilla, 1991).

Esta interacción directa del alumno con los conceptos, sus características y sus relaciones, apoyado en el aspecto visual que permite una computadora, son un fuerte incentivo para que el aprendizaje del alumno sea significativo y más permanente, pues tiene diferentes maneras de anclar lo que está estudiando con sus conocimientos previos, ya sea por lo que ve, o bien, por lo que hace, digitalmente, o bien, por el movimiento que se presenta, por la explicación auditiva del profesor. Todo esto también hace que recordar lo que estudia sea mucho más fácil, pues de nuevo, tiene diferentes elementos para recordar un mismo concepto.

Por ejemplo, en el caso del estudio de funciones y sus gráficas, la visualización dinámica permite fácilmente mostrar las interrelaciones entre los parámetros de la función y sus características graficas. Mostrar éstas interrelaciones al alumno ya de por sí motivan un aprendizaje, pues la transición entre registros lo motiva.

> Sobre las representaciones de las funciones de forma geométrica, se deben de interpretar con algunas de sus propiedades con el propósito de establecer ciertas interrelaciones de correspondencia, con lo cual es posible llegar a una estructura de pensamiento deductivo e interpretativo en la forma geométrica, dando origen, a las representaciones gráficas (esquemas o dibujos) para establecer un vinculo y que sea un referente para el alumno, generando un aprendizaje de forma más permanente en él. (Márquez Ortega, Ramírez Teposteca, Romero Acosta, & Roldan Vázquez, 2010)

Si con la transición entre registros se motiva un aprendizaje más permanente y significativo, entonces, se espera que el aprendizaje se potencialice aún más por el hecho de presentar la transición en una forma dinámica y permitiendo la interacción directa entre el alumno y las diferentes representaciones.

Una ayuda más que presenta el uso de la visualización dinámica como herramienta didáctica, es que permite acercar los temas de estudio a un ambiente agradable y cercano al alumno; además de posibilitar extender el tiempo de estudio por medio de su presentación y trabajo a través de Internet.

Por medio de la visualización dinámica los alumnos pueden manipular los diferentes elementos que caracterizan un concepto, pero en un entorno más atractivo y común para ellos. Los nacidos después de 1988, la Generación Einstein , han crecido en la era de la tecnología, en el mundo digital. Desde que nacen tienen relación con las tecnologías de la información, y la manejan y usan de manera natural. (Boschma, 2008)

En general, para la Generación Einstein, es natural el uso de la computadora y el Internet, que es el caso de los alumnos con los que trabajamos, adolescentes y adultos jóvenes. Para ellos, el uso de la computadora no sólo es familiar, sino preferido sobre otras herramientas o medios, tanto de trabajo como de comunicación, muestra de ello son las crecientes redes sociales y sus usos no sólo comunicativos, sino laborales y de difusión.

En este sentido, en esta propuesta de enseñanza, se considera una de las principales características de la población a la que se atiende, respondiendo con ello a una necesidad también de la sociedad actual. La labor de cualquier institución educativa es atender las necesidades educativas de la sociedad.

Una característica de la sociedad actual es la presencia de las tecnologías de la información y la comunicación, y es prioritario considerar tal hecho en la labor de la institución y nuestra labor docente.

III. Propuesta didáctica

Del análisis del problema *¿cómo enseñar el concepto de derivada a los alumnos de quinto semestre del CCH en los cursos de Cálculo I para lograr la comprensión del concepto?* Se generaron tres argumentos que pretenden responder al mismo:

- Para llevar a cabo el estudio del conocimiento matemático, es necesario entender y manipular sus conceptos a través de sus registros de representación.

  De este modo, los registros de representación son una herramienta teórica que permiten considerar el logro de la aprensión de un concepto, y ayudan también a percibir el aprendizaje.

- La obtención de nuevo conocimiento se basa en el conocimiento que ya se tiene.

  Iniciar el nuevo conocimiento con los conocimientos previos, y de ahí establecer una didáctica que a través de un proceso de aprendizaje lleve al alumno a la obtención de nuevos significados, es nuestro objetivo de enseñanza.

  Es importante buscar generar un desequilibrio cognitivo en el alumno sobre los conceptos fundamentales. Confrontarlo con la incompletud de los conceptos que tiene formados para generar la necesidad de completar paulatinamente los conceptos matemáticos.

- La visualización dinámica es una herramienta didáctica con el potencial de trabajar distintas representaciones de un concepto, mostrando las relaciones que hay entre las diferentes características de cada representación.

La visualización dinámica permite conjuntar en un proceso de enseñanza de contenidos matemáticos, los cuatro aspectos que optimizan un aprendizaje: los aspectos teóricos y reflexivos; así como los aspectos de experimentación, y al ser el alumno quien interactúa con elementos matemáticos, se cubre el aspecto pragmático.

La visualización dinámica posibilita abarcar diferentes estilos de aprendizaje en un mismo proceso de aprendizaje.

La visualización dinámica permite acercar los contenidos matemáticos a los alumnos, al presentarlos en un entorno con el que éste está familiarizado.

Por lo tanto, si se conjuntan los diferentes aspectos presentados en los anteriores argumentos, en un proceso de aprendizaje de contenido matemático, tendremos lo que llamaremos: *un proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*.

De este modo, se puede propiciar una mejor comprensión de los contenidos de ésta área. En particular, aplicarlo para el concepto de derivada, con lo que se da respuesta al problema de investigación.

Proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas

En esta sección se describirá lo que es *un proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*.

Un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas* inicia a partir de los conocimientos previos del alumno.

Así como toda teoría matemática empieza a partir de ciertos supuestos, a saber sus axiomas. El aprendizaje matemático también empieza a partir de algo, sólo que en lugar de iniciar con axiomas: *afirmaciones que se aceptan como verdaderas*, a partir de las cuales se construye la teoría matemática. El aprendizaje matemático empieza a partir de las verdades que el alumno ya considera verdaderas: *sus conocimientos*, a partir de los cuales se construye su aprendizaje, en particular el matemático.

Los objetos matemáticos sólo son asequibles por medio de representaciones. Esta característica de los objetos matemáticos se refleja en las labores que realizamos en ésta área del conocimiento. Cuando se estudia un objeto matemático, como la circunferencia, por ejemplo. Ya sea que se estudie a través de ecuaciones que describen a los puntos que la componen; o bien por medio de figuras que quieren ser una representación de ella. No obstante, en ningún caso se trabaja con la circunferencia como tal, con el objeto, con el concepto en sí.

Por lo tanto, en la docencia se deben presentar los objetos matemáticos a través de sus representaciones, mostrar diferentes representaciones del mismo objeto. Enfatizar que las distintas representaciones se refieren al mismo objeto, que cada una muestra diferentes características del mismo; y sin embargo, ninguna de ellas es él como tal.

La visualización dinámica permite trabajar diferentes registros de representación, necesarios para la comprensión de conceptos matemáticos. Al tiempo que favorece diferentes estilos de aprendizaje y la interacción directa de los alumnos con los elementos de los conceptos.

Los elementos anteriores son consistentes con el Modelo del Colegio y su visión del área de las Matemáticas: hacen participe al alumno, transita entre diferentes representaciones y busca propiciar *aprendizaje significativo*.

Un aprendizaje es significativo, cuando éste cambia la estructura de conocimientos del sujeto para integrar en ella un nuevo conocimiento. Por ello la importancia de considerar los conocimientos previos del alumno para poder enseñarle nuevos conocimientos. Es decir, un aprendizaje es significativo cuando se relaciona con los conocimientos que el alumno ya tiene.

Esta relación entre el nuevo conocimiento y los conocimientos previos debe ir más allá que: "esto lo vieron en cursos anteriores" o "esto lo vimos la semana pasada". La estructura conceptual del alumno debe modificarse para integrar lo nuevo, se deben generar conexiones entre lo que ya sabe y lo que está aprendiendo.

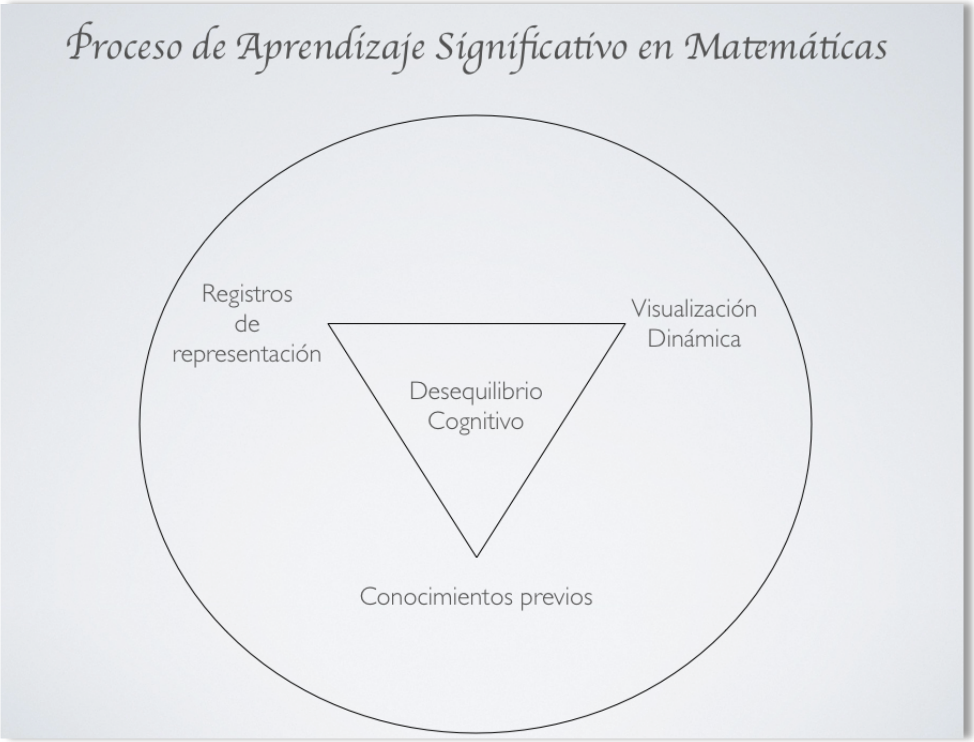
Se puede ejemplificar lo anterior de la siguiente manera. Cada persona tiene en su mente un mapa geográfico de la ciudad o lugar donde habita. Este mapa está formado de manera individual de acuerdo a los lugares que la persona conoce, los que frecuenta y las rutas que toma para llegar a ellos. Cuando una persona aprende una ruta nueva para llegar a un lugar, o bien cuando conoce un lugar nuevo, el mapa geográfico que tiene en su mente se modifica, ya sea porque se agregó una nueva ruta para llegar de un punto a otro, o bien porque se anexó un nuevo lugar conocido y la manera de llegar a él.

La misma situación se debe de dar para generar aprendizaje significativo, o bien se agrega a la estructura conceptual una nueva forma de hacer algo, o se agrega un nuevo concepto y su relación con otros que ya se tenían.

Por lo tanto, el fin que se busca y que es consistente con los objetivos del área de Matemáticas y el Modelo Educativo del Colegio, es que los alumnos logren aprendizajes significativos.

Una manera de propiciar un aprendizaje significativo es generando lo que se conoce como un *desequilibrio cognitivo*. Esto es un desajuste en la estructura conceptual o teórica de un alumno. Este desajuste lo obliga a analizar eso que generó el desajuste para poder reestructurar su cuerpo de conocimientos, y en el proceso integra el nuevo conocimiento relacionándolo con lo que ya sabia, *asimilación* y *acomodación*, es decir, un *aprendizaje significativo*.

El siguiente esquema presenta los diferentes elementos que forman la propuesta de enseñanza: *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*.



Esquema 2. Proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas

Un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*, comienza en un punto: un elemento de los conocimientos previos del alumno. Lo que se simboliza en el esquema como el vértice del triángulo que está en la leyenda de "conocimientos previos".

A partir del vértice de conocimientos previos, se construye el triángulo hacia arriba esquematizando que obtendremos una nueva estructura por encima de lo que ya se tiene. Nuevos conocimientos sobre los que ya se tenían.

Los otros dos elementos que determinan la propuesta son los registros de representación y la visualización dinámica, lo que se esquematiza como los otros dos vértices que determinan el triángulo que se construye.

El triángulo esquematiza la forma de trabajo, el inicio y las dos directrices del proceso. No obstante, durante el desarrollo de dicho proceso, se busca la generación de desequilibrios cognitivos, lo que se esquematiza con la leyenda al interior del triángulo.

El conjunto de los elementos anteriores, esquematizado poniendo todo dentro de una circunferencia, es un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*.

La propuesta del *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*, su estructuración para la enseñanza de contenidos matemáticos con el fin de lograr una mejor comprensión de los mismos por parte de los alumnos, es la conclusión y aportación teórica de este trabajo, mi aportación a la enseñanza de las matemáticas.

Descripción de la Estrategia

En esta sección se describirá, cómo se llevo a cabo el desarrollo de un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*, para un tema especifico, el caso particular del concepto de derivada.

El punto inicial de un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas* son los conocimientos previos del alumno. Para el desarrollo del tema del concepto de la derivada, se eligió hacerlo a través de su interpretación geométrica. Por lo tanto, el conocimiento previo que se seleccionó fue: *la idea intuitiva de recta tangente*, a saber: *la recta que toca en un solo punto a la curva*.

A partir de la idea intuitiva de recta tangente, se hace todo el desarrollo y la construcción de las actividades para generar el concepto de derivada en el alumno y propiciar su mejor comprensión del mismo.

Otro conocimiento previo que se tomará del alumno, es la idea intuitiva del límite, la que se generó en el alumno en el estudio previo, en la Unidad I del curso de Cálculo I en el CCH.

Con el uso del software GeoGebra, se diseñaron y desarrollaron nueve aplicaciones, Applets de visualización dinámica:

1. ¿Qué es una recta tangente a una curva?
2. Secante.
3. Tangente.
4. Pendiente de una recta.
5. Interpretación geométrica de la derivada.
6. La derivada de la parábola.
7. La gráfica de la derivada.
8. Sobre la existencia de la derivada.
9. Sacando derivadas geométricamente.

Las diferentes aplicaciones pretenden mostrar cada una diferentes elementos conceptuales necesarios para llegar al concepto de derivada. Elementos que se conjugan y aplican en el último Applet.

Todos los Applets se diseñaron para propiciar el análisis y la discusión de los elementos que cada uno presenta, referentes a la construcción del concepto de la derivada.

A continuación se describen los diferentes Applets que se diseñaron para el desarrollo del tema.

3.2.1 ¿Qué es una recta tangente?

El primer Applet, tiene como nombre, de hecho, la pregunta con la que se inicia todo el desarrollo del tema.

¿Qué es una recta tangente a una curva?

La primera parte de este Applet presenta una visualización de la idea intuitiva de recta tangente tomando como curva a la circunferencia. En ella se verifica que la idea intuitiva efectivamente se verifica para esta curva.

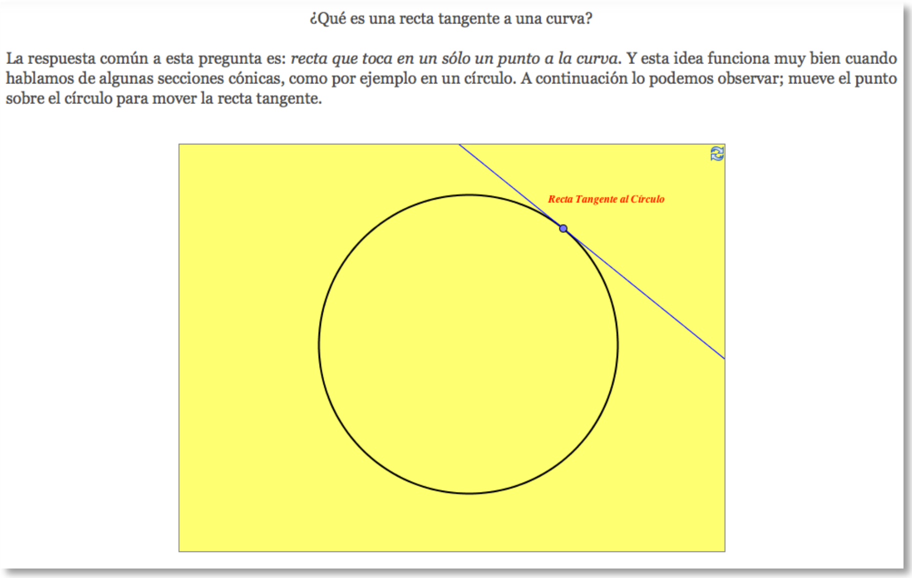
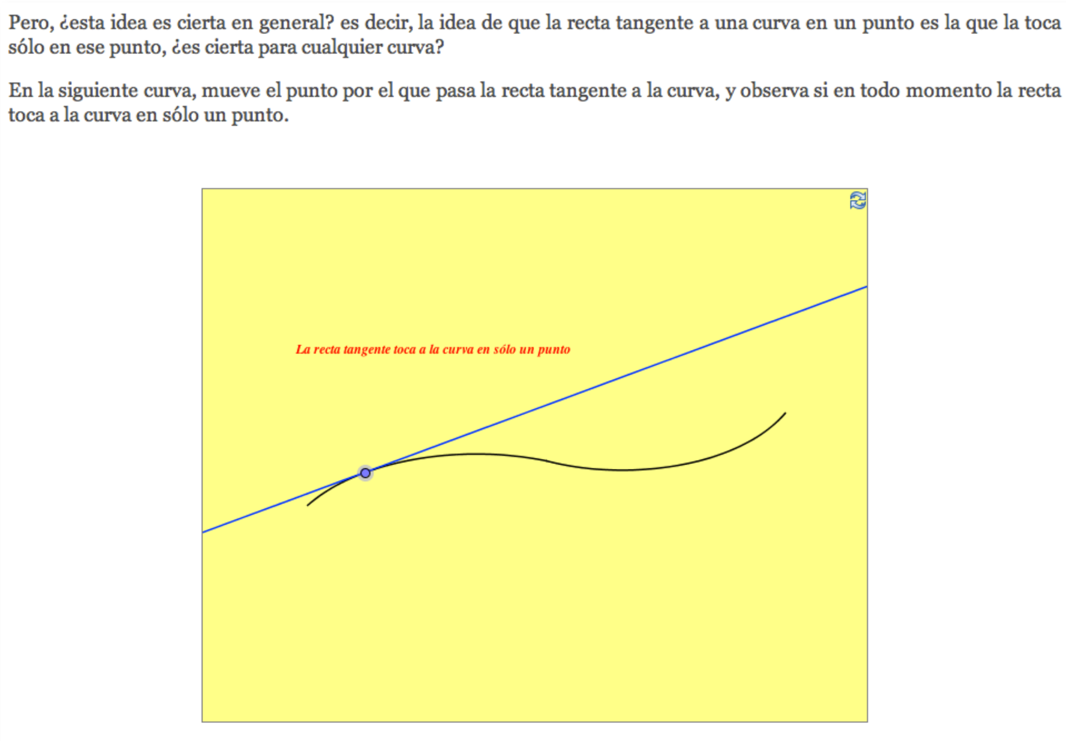


Ilustración 1. Visualización de la idea intuitiva de recta tangente

En esta aplicación el usuario puede mover el punto y visualizar cómo se mueve la recta tangente sobre la curva.

En la segunda parte de este Applet, se visualiza un caso más general, la recta tangente pero ahora sobre una curva diferente.


Pero, ¿esta idea es cierta en general? es decir, la idea de que la recta tangente a una curva en un punto es la que la toca sólo en ese punto, ¿es cierta para cualquier curva?

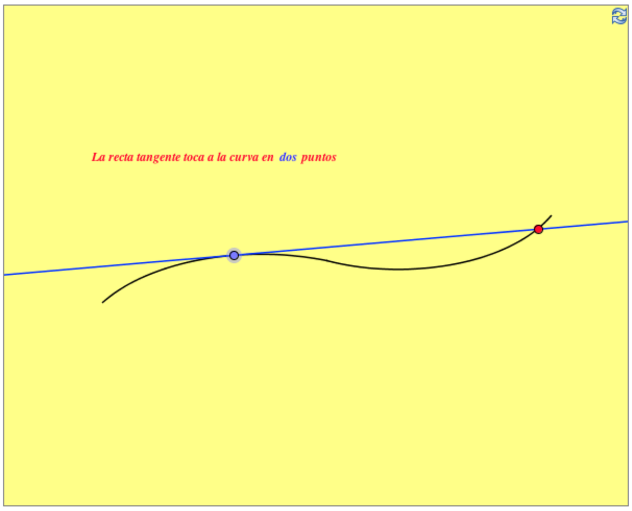
En la siguiente curva, mueve el punto por el que pasa la recta tangente a la curva, y observa si en todo momento la recta toca a la curva en sólo un punto.

Ilustración 2. Verificación de la idea intuitiva de recta tangente sobre otra curva

En esta aplicación, el usuario puede mover el punto sobre la curva e igualmente visualizar como se mueve la recta tangente sobre la curva.

De este modo, el usuario comprueba que sobre esta curva, hay puntos donde la recta tangente a la curva la toca en más de un punto.

Por lo tanto, se concluye que la idea intuitiva de recta tangente no es precisa. Que no se cumple para cualquier curva. Que la idea intuitiva tiene limitaciones.



Como puedes observar la idea de que la recta tangente a una curva es la que toca a la curva en sólo un punto, no es precisa, no funciona en general. Es sólo una idea intuitiva, pero esto no quiere decir que esté mal, sólo significa que hay que precisarla mejor.

Entonces, como no tenemos una respuesta precisa para la pregunta inicial, ¿qué es una recta tangente a una curva?, en este curso vamos a trabajar para responder esta pregunta, y lo haremos con la ayuda de la derivada.

Ilustración 3. Visualización de que la idea intuitiva de recta tangente no es general

El análisis y la discusión que se generan a partir de este primer Applet que se acaba de describir, no sólo es la introducción a nuestro desarrollo de un proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas, para el tema del concepto de la derivada. Sino que también es el elemento con el que se pretende generar un desequilibrio cognitivo en el alumno. Se le está confrontando con limitaciones de su propio conocimiento.

Se le muestra al alumno que lo que él sabe, “no está del todo bien”, “no está completo”. Con ello se pretende que entonces, él genere nuevos significados, que *asimile* y *acomode* estos nuevos significados, para poder reestructurar nuevamente sus conocimientos. Lo que a su vez se espera que ayude a lograr que el aprendizaje le sea *significativo*.

Con esto, se están cubriendo tres aspectos del *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*:

- Iniciar a partir de los conocimientos previos del alumno.

- Generar desequilibrio cognitivo en los conceptos fundamentales del tema.
- Utilizar la visualización dinámica como herramienta didáctica para el estudio de los temas permitiendo que sea el alumno quien interactúe con los diferentes elementos que conforman las aplicaciones.

3.2.2 Secante

Para seguir con el desarrollo del tema, se requiere estudiar características de un concepto muy cercano al de recta tangente, a saber, el de recta secante.

En el Applet Secante se revisa nuevamente la idea intuitiva de recta secante

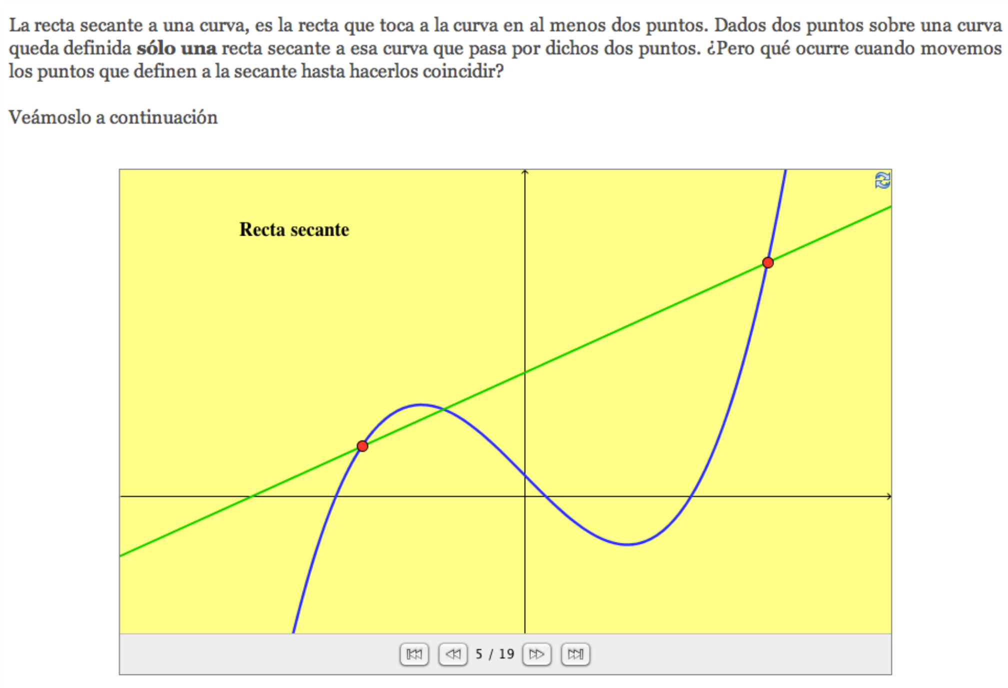


Ilustración 4. Idea intuitiva de recta secante a una curva

En el Applet el usuario puede mover los puntos rojos sobre la curva y visualizar como la recta secante cambia dependiendo de los puntos.

En el mismo Applet, el usuario puede seleccionar el visualizar la pendiente de la recta secante:

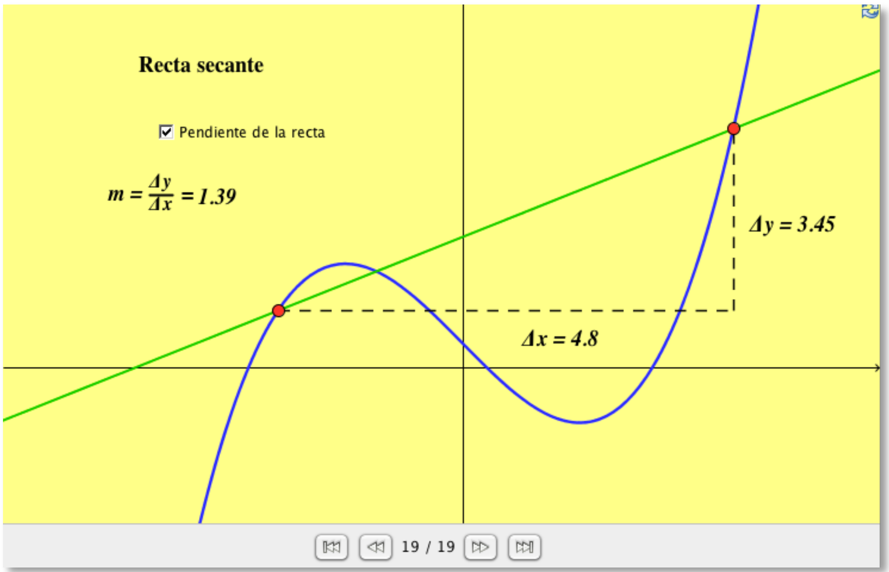


Ilustración 5. Pendiente de la recta secante

Conforme el usuario modifica la recta secante a través del movimiento de los puntos a lo largo de la curva, el parámetro de su pendiente cambia dinámicamente acorde a estas modificaciones.

En este punto estamos usando los registros de representación junto con la visualización dinámica, otro de los aspectos de un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*.

Se presenta tanto la representación geométrica del concepto pendiente, como su representación algebraica, con la idea de que propicie una mejor comprensión del concepto.

En el mismo Applet de secante se le pregunta al alumno qué sucede cuando se hace coincidir los puntos sobre la curva. Lo que genera el siguiente resultado:

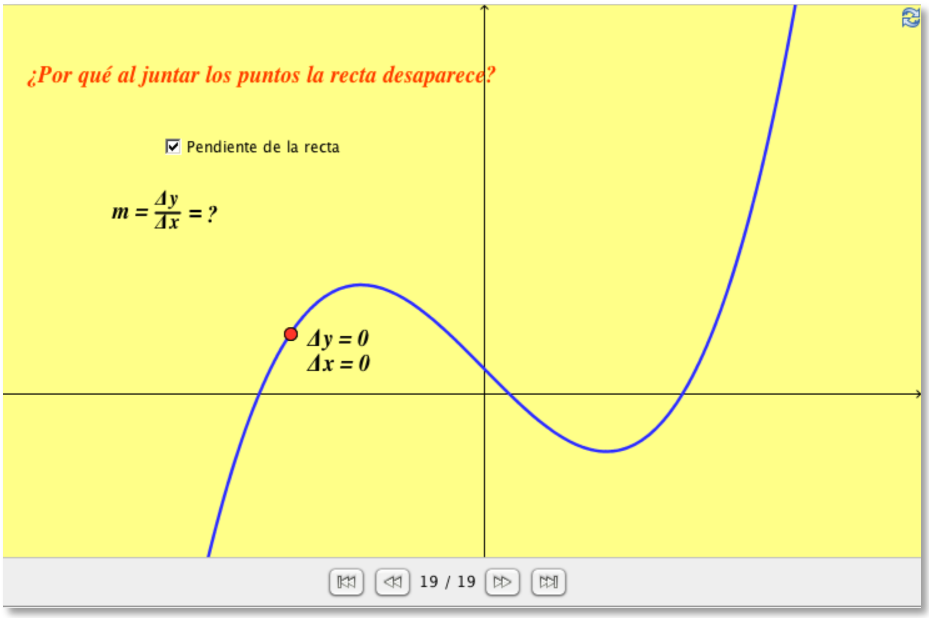


Ilustración 6. Visualización de coincidir los puntos que definen a una secante

Cabe observar que además de no haber recta alguna, el valor de la pendiente también se pierde. Se sabe que la pendiente se indetermina porque resulta una división entre cero, pero más allá de eso, el análisis y la discusión de esta situación es el siguiente eslabón para nuestro desarrollo.

3.2.3 Tangente

En este Applet, se da respuesta a la pregunta inicial: ¿qué es una recta tangente a una curva? Con ello también se llega al concepto de derivada a través de su interpretación geométrica.

Se trata nuevamente el concepto de secante, pero ahora mediante la función, es decir, no sólo se van a mover los puntos sobre la curva, sino que ahora también se van a mover puntos correspondientes al dominio de la función, y se observa cómo cambian las imágenes de acuerdo a dichos movimientos.

En la sección Secante estudiamos el comportamiento de la recta dejando un poco de lado a la función. Ahora estudiémosla considerando a la función.

Una forma de determinar de manera única una recta es teniendo un punto por dónde pasa y conociendo la pendiente de la recta.

Si tenemos una curva y un punto en ella, para determinar a la recta tangente a la curva en el punto, sólo nos hace falta conocer cuál es la pendiente que debe tener la recta que es tangente.

De manera intuitiva, ¿hubieras esperado que al hacer coincidir los puntos de la recta secante, ésta desapareciera?, es decir, ¿hubieras esperado que la recta no estuviera definida al coincidir los puntos?, ¿de manera natural que hubieras esperado que sucediera con la recta?

Veamos ahora que sucede.

Ilustración 7. Introducción del Applet Tangente

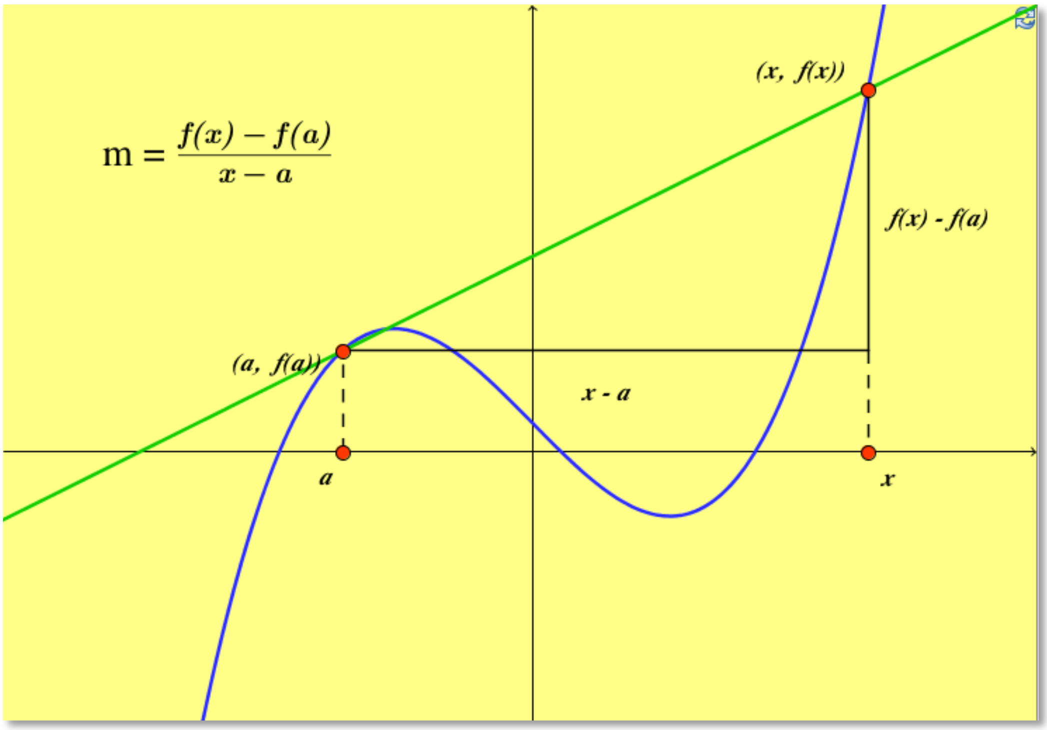


Ilustración 8. Visualización de secante variando los puntos en el dominio

En este Applet el usuario puede mover los puntos a o x sobre el eje X. Al mover estos puntos cambian las imágenes de los mismos sobre la función. En esta aplicación nuevamente se usan los registros de representación, ya que se muestra el concepto de pendiente tanto en su representación geométrica como algebraica. Relacionando el concepto con el de función, dominio y rango o imagen.

La discusión, luego de trabajar con los diferentes elementos y enfatizar que ahora se modificaron puntos en el dominio, se centra en qué ocurre cuando se hace que el punto x se acerque al punto a, ¿cómo afecto esto a la recta?, ¿qué va ocurriendo con las diferencias $f(x) - f(a)$ y $x - a$? Sobre todo, se desea que el alumno recuerde cómo se llama al proceso de acercar un punto a otro.

Se espera que el alumno recuerde que esa es justamente la idea de límite y, por lo tanto, lo que se obtiene al hacer coincidir los puntos es un límite, el límite de las pendientes de las secantes.

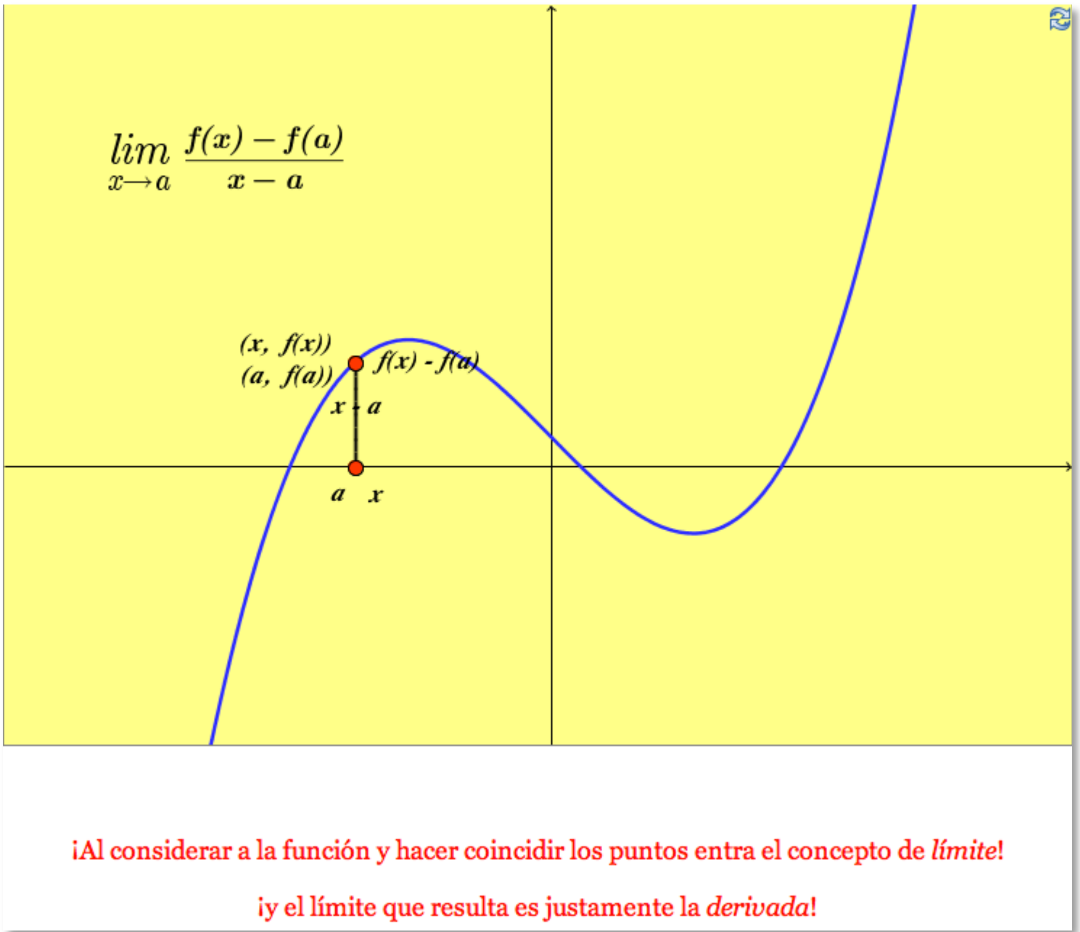


Ilustración 9. Visualización del límite de las pendientes de las rectas secantes

En este momento se presenta al alumno formalmente el concepto de derivada como el límite que se obtiene, que geométricamente es el límite de las rectas secantes, y su representación algebraica es:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cabe mencionar que el concepto de límite se puede usar al considerar los diferentes elementos de la función, y que se mueven puntos en su dominio. En esa aplicación también se espera reforzar el concepto de límite, tanto en su representación algebraica como geométrica.

Hasta aquí ya se tiene el concepto de derivada, pero qué tiene que ver con la pregunta original sobre la recta tangente. Sobre este aspecto es la segunda parte de este Applet.

¿Ahora si podemos determinar la recta tangente a la curva en un punto?, ¿quién es su pendiente?

Veamos lo anterior en un función concreta y en la que ya calculamos su *derivada* por medio de su definición de *límite*, en la función $f(x) = x^2$.

Ilustración 10. Inicio de la segunda parte del Applet Tangente

Como se sigue tratando con un concepto nuevo, el de derivada, se va a utilizar en una función conocida para los alumnos: la función cuadrática. Con esto se están utilizando los *conceptos previos* del alumno para anclar los nuevos conceptos y tratar de propiciar una vez más el *aprendizaje significativo*.

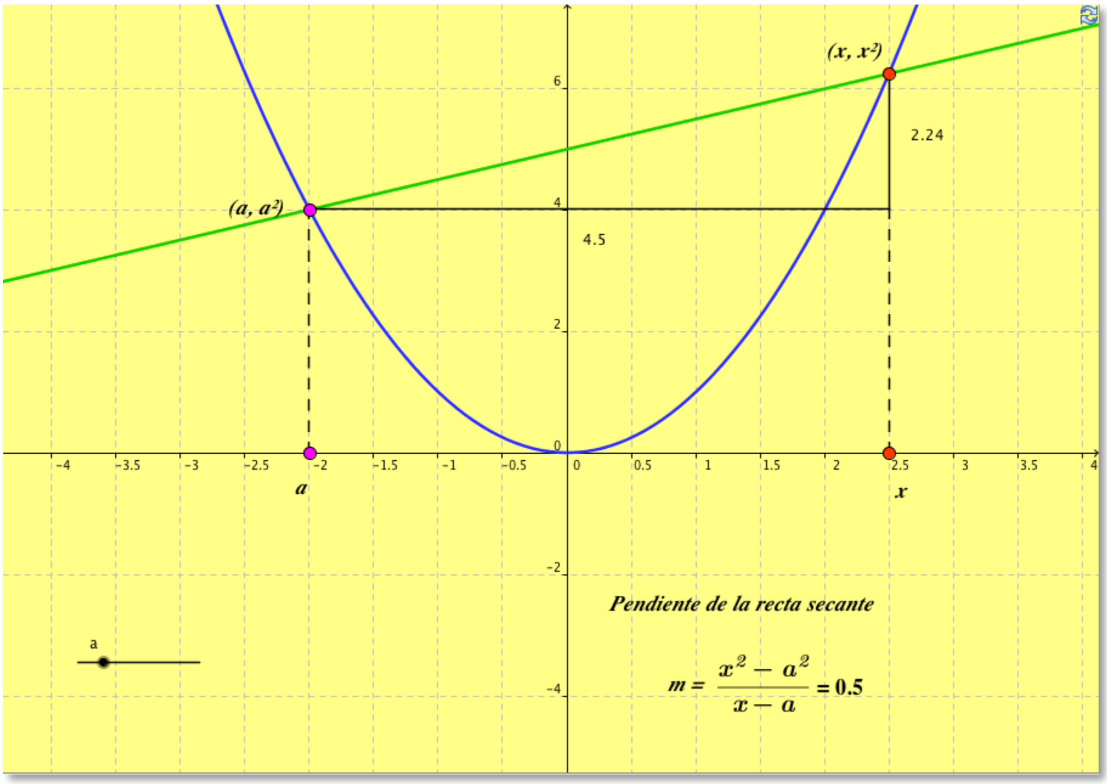


Ilustración 11. Visualización del límite de las secante sobre la función cuadrática

En esta segunda aplicación del Applet Tangente, se plantea la misma situación de las secantes pero con algunas diferencias. Ahora no se hace sobre una curva genérica, sino sobre una curva conocida, una de la que se tiene su definición algebraica: la función cuadrática.

Otra diferencia es que en esta ocasión el punto a, sobre el eje X, se mueve por medio del control ubicado en la esquina inferior izquierda, mientras que el punto x, también sobre el eje X, se mueve por medio del mouse, como en la aplicación anterior. El motivo de hacer esto es enfatizar los aspectos del concepto de límite: *un punto se fija, y se hace tender otro hacia él*. En nuestro caso el punto que se fija arbitrariamente es a, y el punto x es el que se hace tender hacia a.

Para esta segunda aplicación, como ya se conoce la función, entonces se puede tener un valor numérico para la pendiente. El valor de la pendiente nuevamente se modifica dinámicamente de acuerdo a la forma en que se modifiquen los puntos que determinan a la recta.

Nuevamente se tiene especial interés en visualizar lo que ocurre cuando se hacen coincidir los puntos a y x. De manera similar que en la situación general se observa que lo que se obtiene es la expresión de un límite y que la recta secante desaparece.

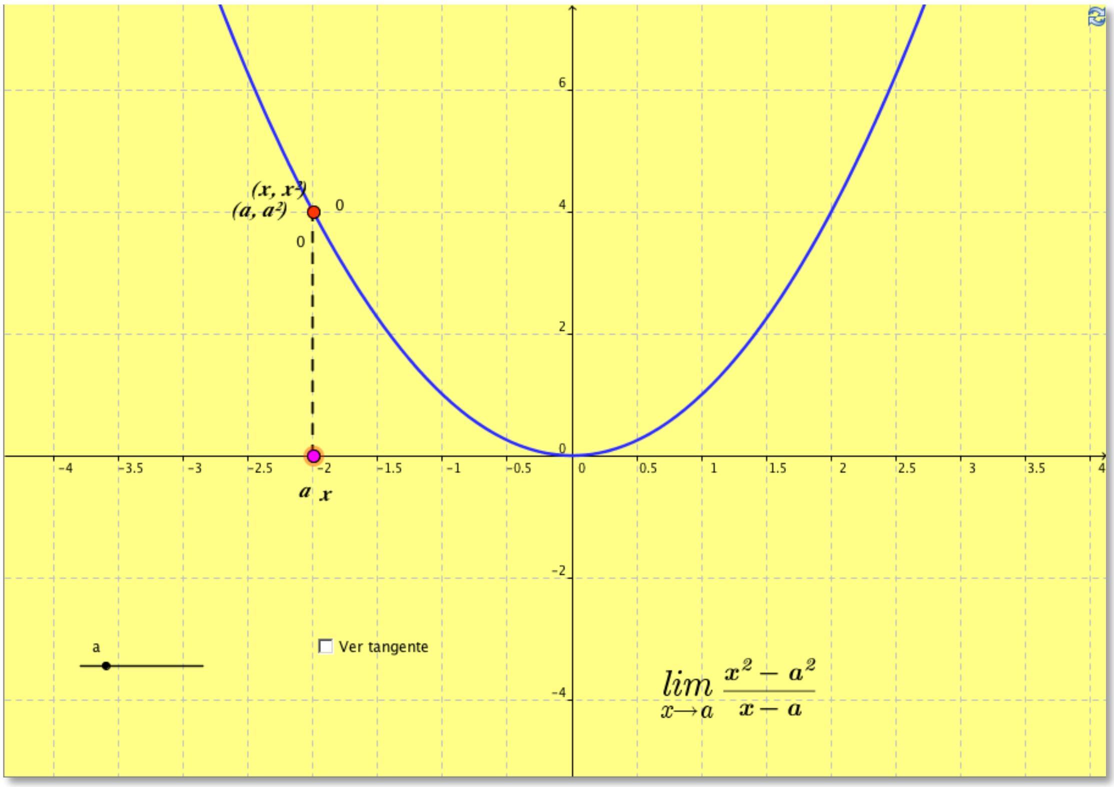


Ilustración 12. Visualización del límite de las pendientes de las secantes sobre la parábola

Desaparecer la recta tiene la función de enfatizar que el proceso de límite es de hecho un "brinco". No es como ir caminando por una vereda, rumbo a un río, acercarnos mucho al rio y esperar que en el proceso de seguir caminando simplemente se llegue al otro extremo del río. Que por el contrario, el límite es el proceso que permite dar ese "brinco" mediante el cual al irnos acercando al río, en algún punto se puede llegar a estar del otro lado, ¿en qué punto?: justamente en el límite.

En esta aplicación, al coincidir los puntos, se tiene la opción de visualizar la recta tangente a la curva en ese punto, la recta que intuitivamente se diría que es la tangente.

Cuando la recta desaparece es justo cuando se llega al punto del “brinco”, y de ahí ya se puede tener la recta tangente, en el límite.

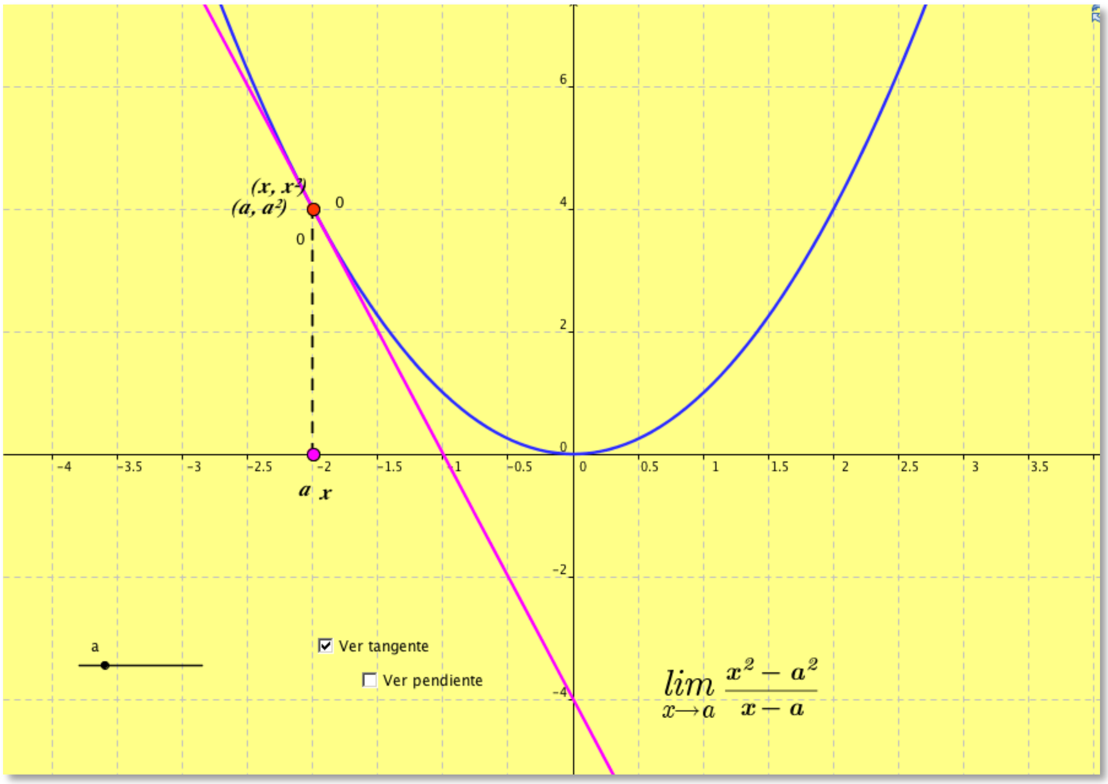


Ilustración 13. Visualización de la recta tangente a la parábola en un punto

Ahora también se tiene la opción de visualizar la pendiente de la recta tangente:

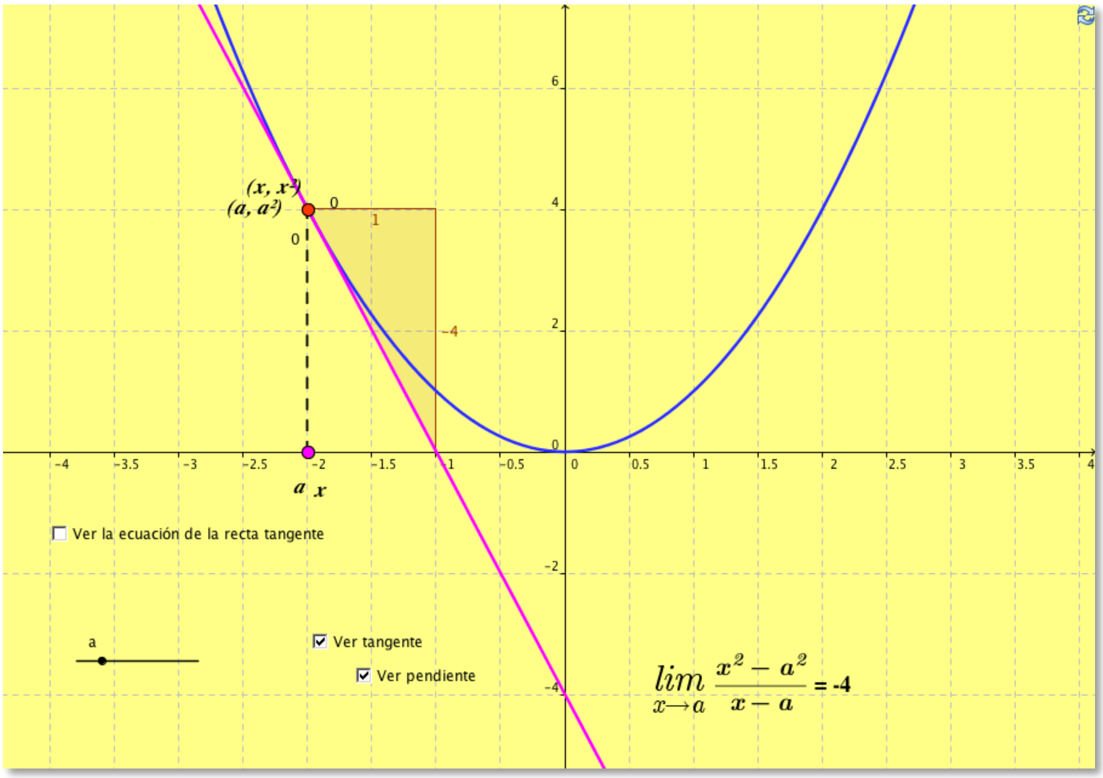


Ilustración 14. Visualización de la pendiente de la recta tangente a la parábola en un punto

Y se observa que el valor de la pendiente de la recta tangente coincide con el valor del límite que teníamos determinado.

Con esto se puede concluir:

¡la *derivada* es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto!

¡y la tangente es la que tiene como pendiente a la derivada en el punto!

Ilustración 15. Conclusión del concepto de Derivada con el de recta tangente

La conclusión es la parte final del Applet.

En este punto, se espera dar respuesta al *desequilibrio cognitivo* que se generó al inicio del desarrollo del tema. Se generó el desequilibrio, pero se debe ayudar al alumno a llegar a la reestructuración cognitiva de sus conceptos, a la *asimilación* y la *acomodación*.

Se explica al alumno la diferencia entre la idea intuitiva de recta tangente: *la recta que toca a una curva en un punto*, y la conclusión a la que llegamos, que es de hecho una definición formal de recta tangente: *la recta que pasa por el punto y que tiene como pendiente a la derivada de la función en el punto*.

Sobre todo, se plantea la discusión de si ahora ya con esta nueva definición se puede evitar el problema original: *que la recta tangente puede tocar a la curva en más de un punto*.

Se guía la discusión para llegar a que la idea es sobre un punto, es decir, que es un concepto local. De hecho, por eso se especifica: la recta tangente **en un punto**.

Por último, el Applet también permite obtener la ecuación de la recta tangente:

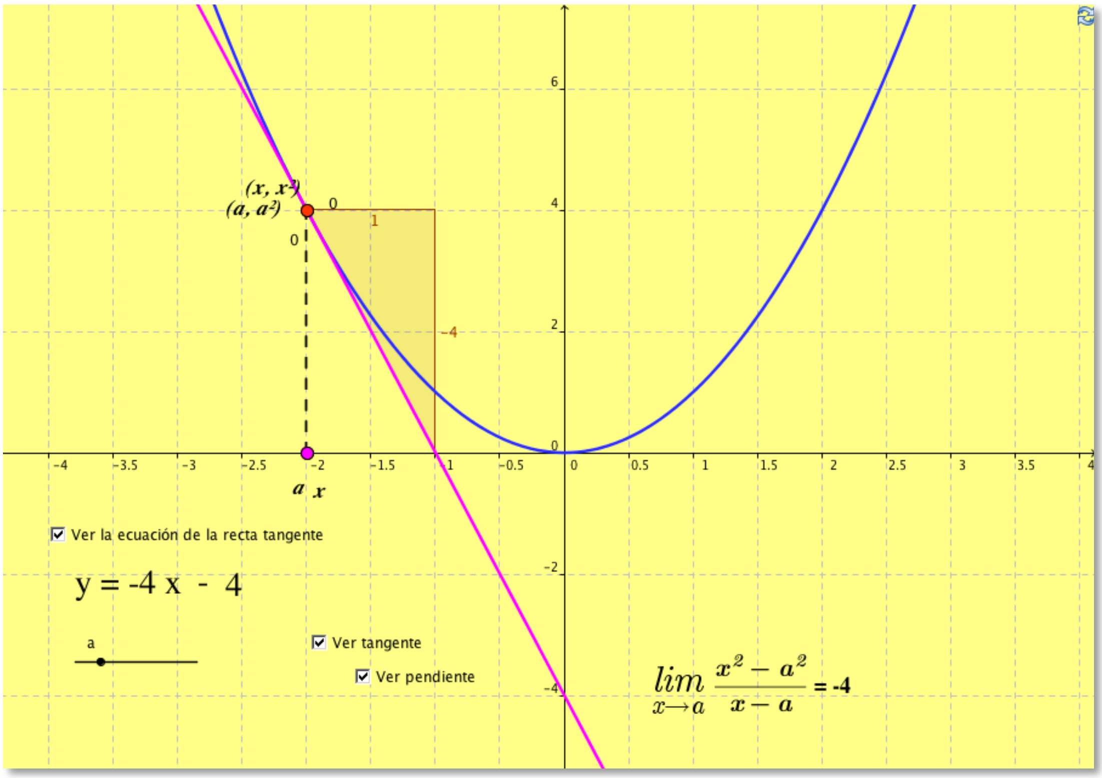


Ilustración 16. Visualización de la ecuación de la recta tangente a la parábola

Con esto se puede corroborar la conclusión.

De este modo se obtiene el concepto de derivada usando todos los elementos de un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*.

Sin embargo no es suficiente. Para comprender un concepto no basta sólo llegar a su construcción, hay que analizarlo; sus características, cuándo sí se satisface, cuándo no, e incluso aplicarlo. Esto es lo que se lleva a cabo en los siguientes Applets.

3.2.4 Pendiente de una recta

Al construir el concepto de derivada y relacionarlo con el de recta tangente es importante precisar que la pendiente de la recta señala el cambio de la función de acuerdo a la variación en puntos del dominio.

Para observar esto se inicia con el siguiente Applet, en el que se realiza un análisis de la pendiente de una recta.

Ahora ya sabemos lo que es la derivada, y cómo está relacionada con la recta tangente a una curva. ¿Pero cuál es la importancia de la recta tangente a una curva? Para responder a esta pregunta, primero vamos a recordar geométricamente el concepto de pendiente, y vamos a analizar la información que ésta nos da sobre la recta.

Estudiemos al respecto con la siguiente visualización:

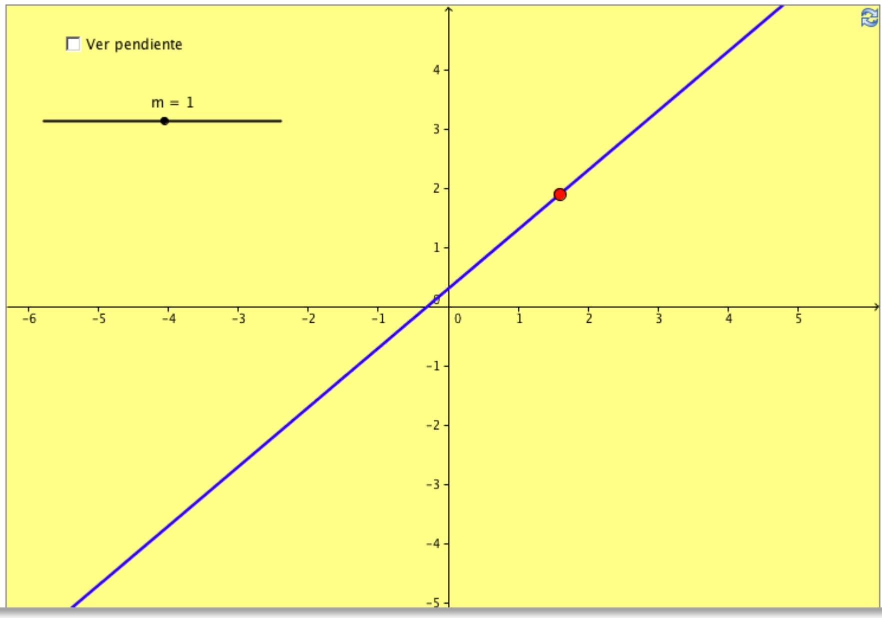


Ilustración 17. Visualización de la pendiente de una recta

Este Applet permite al usuario mover el punto rojo en cualquier parte del plano. Con el control de la esquina superior izquierda, se puede variar la pendiente de la recta y también se cuenta con la opción de visualizarla.

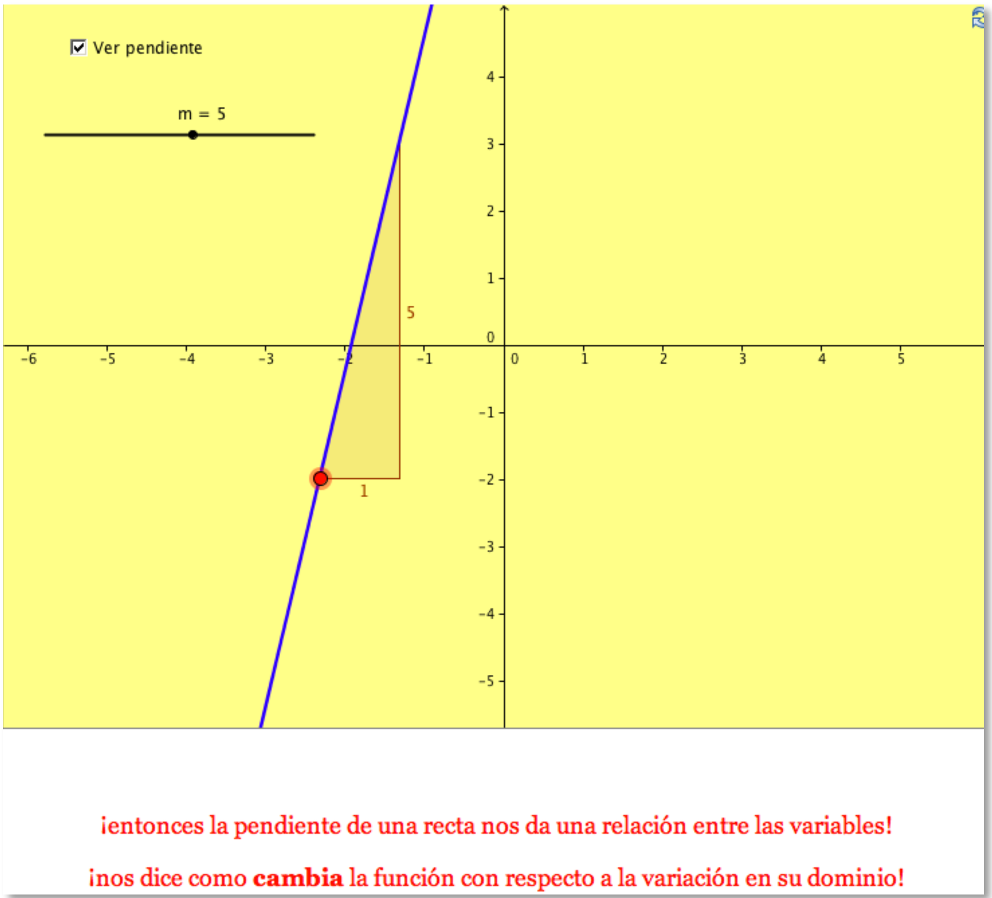


Ilustración 18. Conclusión del análisis de la pendiente de una recta

En este Applet se hace un análisis más fino para observar que la pendiente señala qué tanto crece la recta, qué tan rápido lo hace, y cuál es la relación entre variables, las de su dominio con respecto a las de su contradominio.

Se espera concluir que si esa es la importancia de la pendiente de una recta, entonces por eso es importante la tangente para una curva, por su pendiente: su crecimiento, el crecimiento de la curva.

3.2.5 Interpretación geométrica de la derivada

En este Applet se conjuntan los diferentes elementos que hasta ahora se han estudiado: tangente, pendiente, derivada.

Luego de recordar y estudiar la pendiente de una recta, el concepto de derivada y la relación entre ellos; ahora vamos a conjuntar esos conocimientos en el estudio de una función.

Veamos de manera directa qué información nos da la derivada de una función, y cómo se presenta esto en la gráfica de la función derivada.

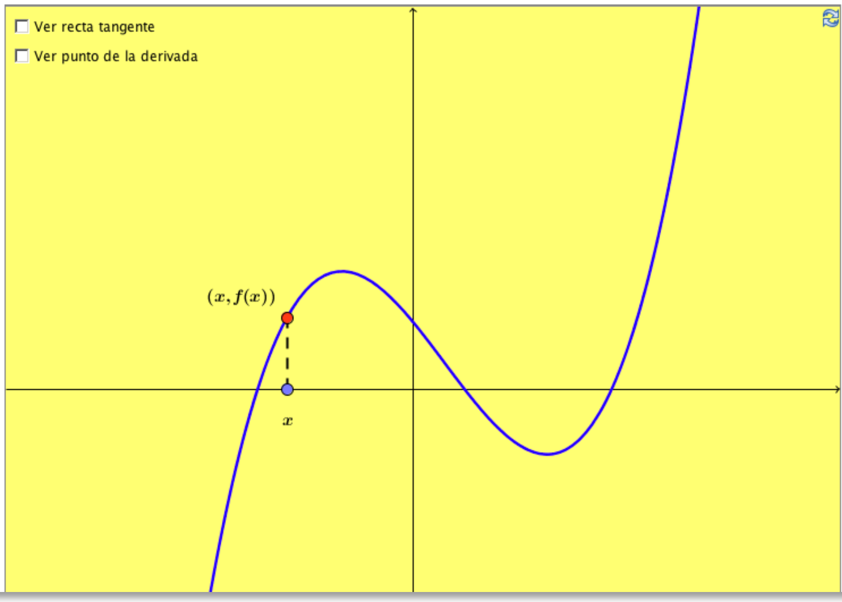


Ilustración 19. Visualización de la interpretación geométrica de la derivada

En el Applet, el usuario puede mover el punto x, sobre el eje X. El punto rojo sobre la función se mueve de acuerdo al punto x, al punto en el dominio.

Se puede visualizar la recta tangente a la curva en el punto e igualmente observar cómo ésta cambia al recorrer el punto x sobre el eje X.

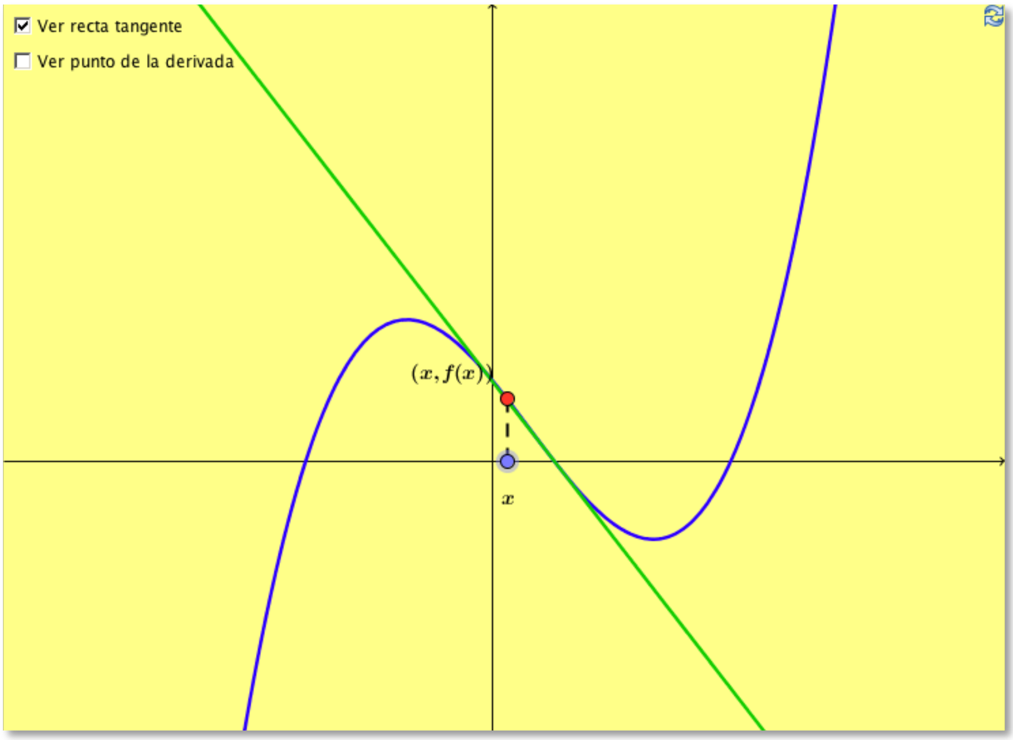


Ilustración 20. Visualización de la recta tangente a la curva

Lo importante de este Applet es generar la discusión sobre lo que se conoce de la derivada: que es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

Entonces, para cada punto, se tiene una pendiente diferente, así, la derivada toma un valor diferente para cada punto. Para observarlo se selecciona la opción "Ver punto de la derivada":

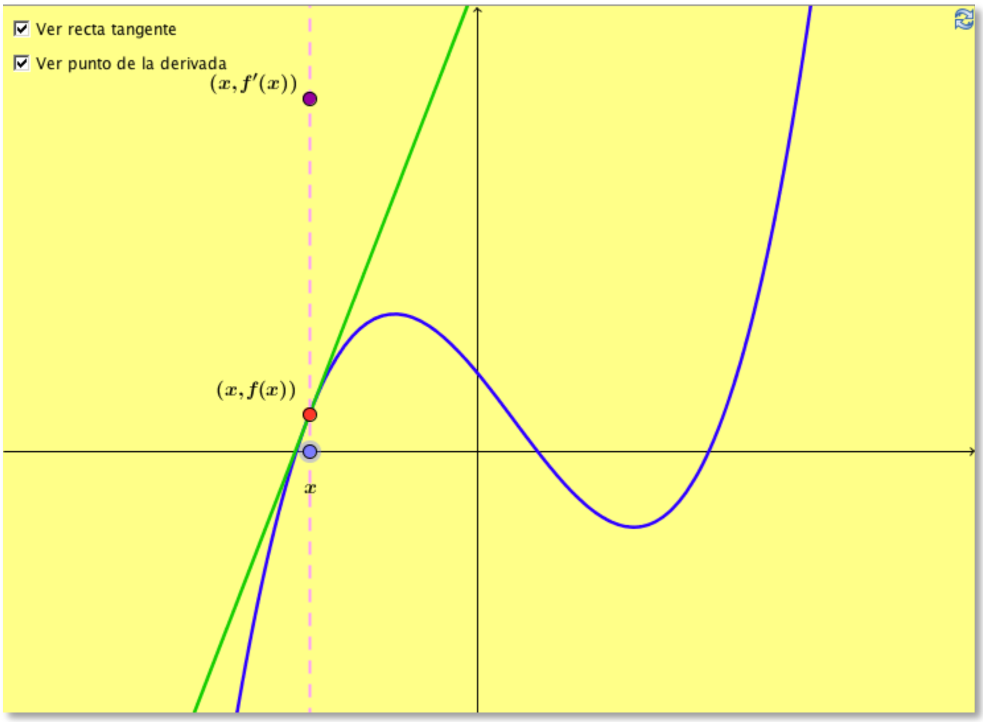


Ilustración 21. Visualización de los puntos de la derivada

Aquí toma importancia el análisis que se realiza en el Applet anterior acerca de la pendiente de la recta.

Para el punto x de la Ilustración 21, se observa que la pendiente de la recta es un valor positivo "grande". De hecho a pesar que la función en ese punto toma un valor "pequeño", la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto, tiene un valor mayor.

Por lo tanto, aparece en la parte alta de la imagen un punto púrpura de coordenadas $(x, f'(x))$. Es decir, es el punto que correspondería a la derivada de la función para el mismo valor de x. Esto se desprende de observar la pendiente de la recta tangente.

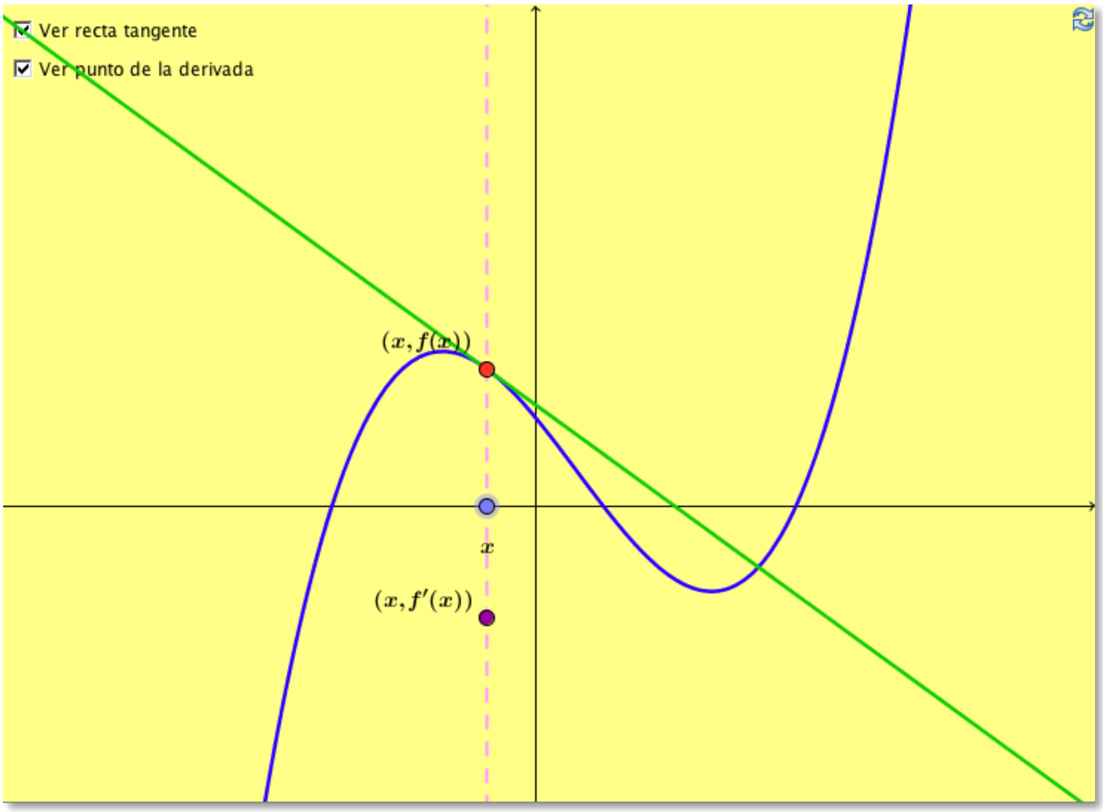


Ilustración 22. Visualización de los puntos de la derivada variando el punto en el dominio

En la Ilustración 22, se observa que ahora la recta tangente a la curva en el punto tiene pendiente negativa. Entonces, el punto que corresponde a la derivada para ese valor de x, es negativo. Por lo tanto, el punto purpura ahora aparece por debajo del eje X.

En este Applet, se puede variar un punto en el dominio, y de acuerdo a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto, visualizar cómo es la pareja ordenada $(x, f'(x))$ que corresponde a un punto de la derivada.

Se observa que para cada valor de x se tiene un valor correspondiente $f'(x)$. Que lo podemos representar con un punto en el plano. Es decir, se tiene una función: *la función derivada*.

El Applet, permite visualizar la función que se dibuja siguiendo los distintos puntos. Sobre el punto purpura, con el botón secundario, del menú contextual seleccionamos "activa rastro". Esto hace que la aplicación deje una imagen del punto en cada posición en la que se ubica, estas imágenes juntas dibujan la gráfica de la función derivada.

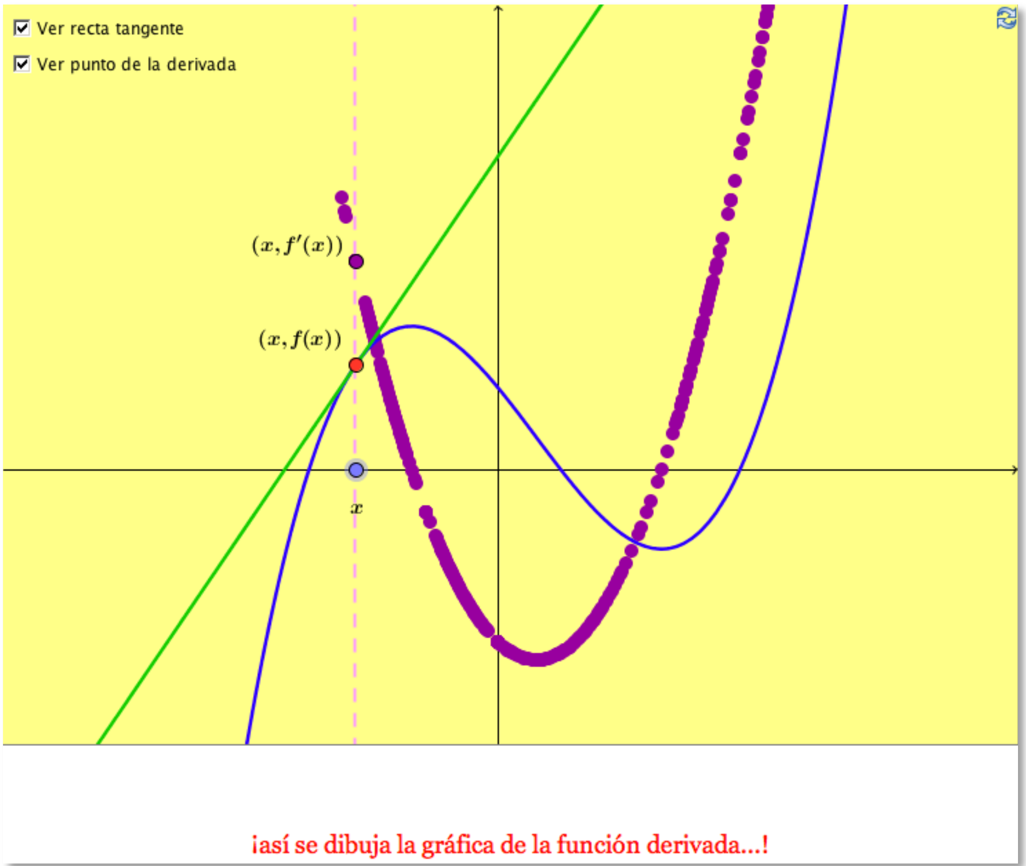


Ilustración 23. Visualización de la gráfica de la función derivada

Con esta aplicación se quiere dar sentido a por qué en el estudio de la derivada, al derivar una función, se obtiene una expresión que se puede evaluar: *porque la expresión que obtenemos es la función derivada, y como es una función se pueden evaluar valores en ella.*

Se presentan los diferentes elementos del concepto que se obtienen de analizar sus características. Y se prepara el camino para el estudio subsecuente del tema.

3.2.6 La derivada de la parábola

Este Applet tiene la intención de presentar la situación y el análisis del Applet anterior, pero ahora en un caso particular, con una función conocida por el alumno. Lo que repercute primero en la posibilidad de realizar cálculos y verificar las conclusiones anteriores, además de aterrizar el nuevo conocimiento con los *conocimientos previos* del alumno.

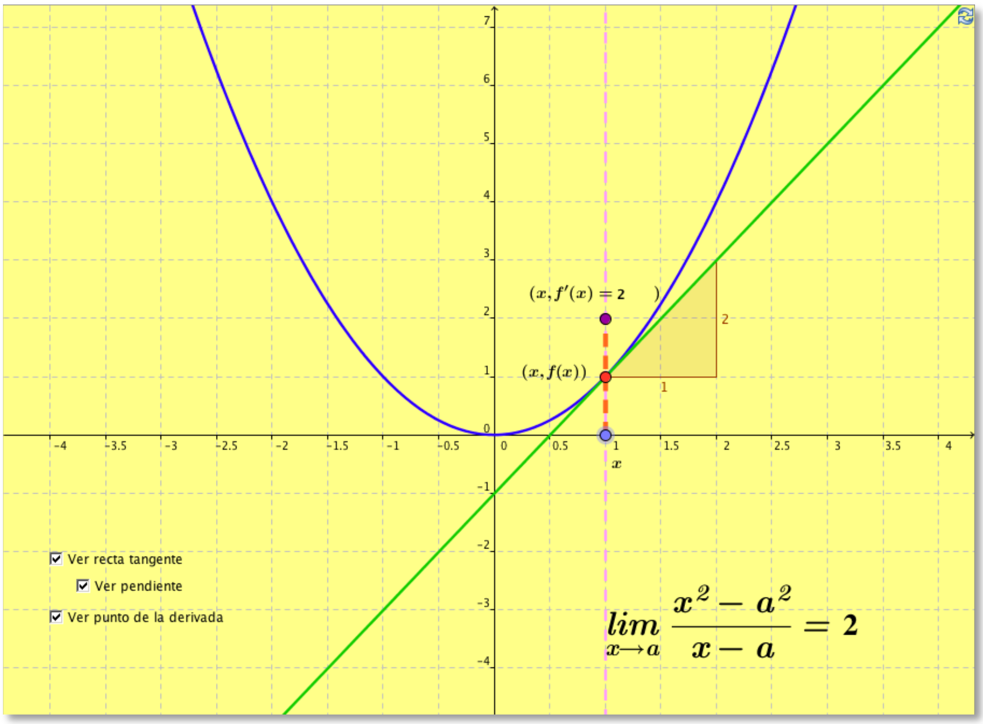


Ilustración 24. Visualización de los puntos de la derivada de la parábola

En el Applet nuevamente se tiene el punto x que se mueve a lo largo del eje X, el punto correspondiente sobre la función, a saber, la parábola; y el punto púrpura que corresponde al punto de la derivada para el valor de x.

Como en este caso se conoce la función, se pueden tener los valores: la pendiente de la recta tangente, y los valores de las coordenadas tanto del punto sobre la función como del punto de la derivada, observando que la segunda coordenada de este último es justamente el valor de la pendiente de la recta tangente, es decir, la derivada.

En el Applet se trabajan diferentes *registros de representación* de conceptos, tanto el de pendiente como el de derivada.

Igual que en el Applet anterior, se visualiza con las imágenes del punto púrpura, la gráfica de la función derivada de la parábola:

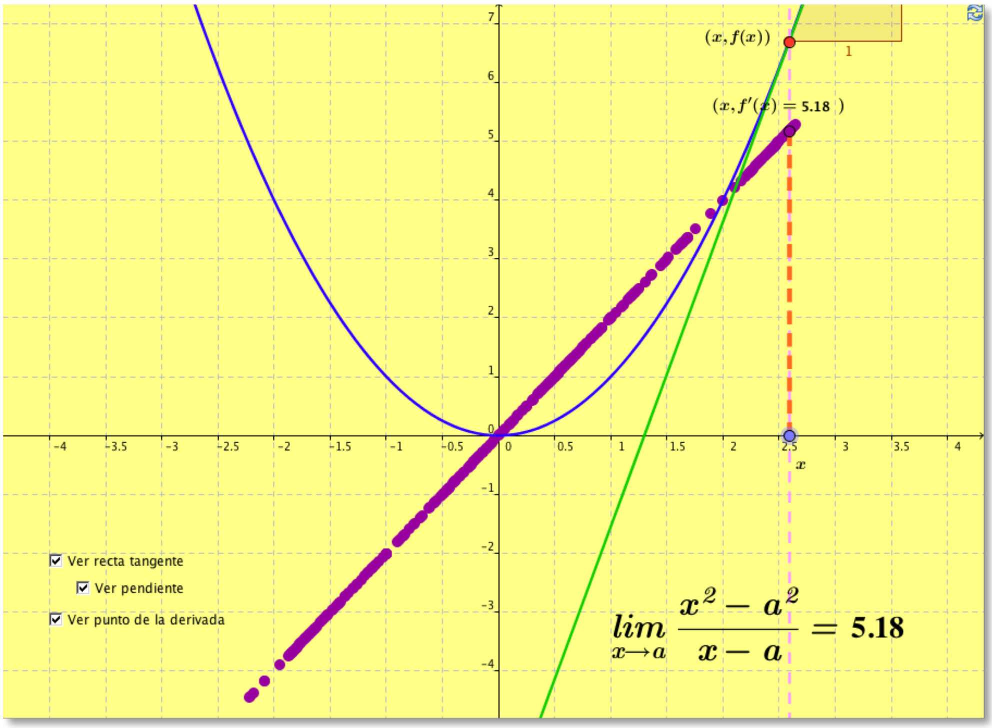


Ilustración 25. Visualización de la derivada de la parábola

3.2.7 La gráfica de la derivada

Este Applet pretende mostrar cómo se obtiene la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función. Para ello, se presentan dos planos en él.

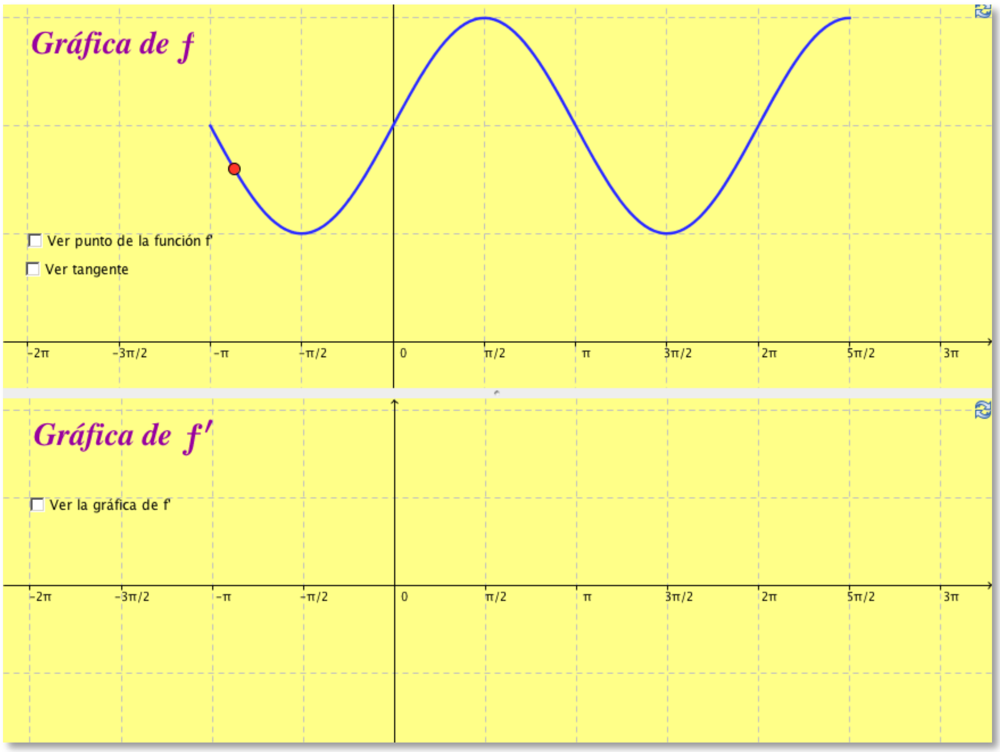


Ilustración 26. Visualización para obtener la gráfica de la función derivada

En el primer plano se tiene la gráfica de una función, la gráfica de f, y un punto sobre la gráfica, el que se puede mover a lo largo de ella.

En el primer plano se selecciona "Ver tangente" para ver la recta tangente a la curva en el punto. De acuerdo a la pendiente de la recta, se tiene el punto correspondiente de la función derivada. Dicho punto se visualiza en el segundo plano y cambia conforme se mueve el punto a lo largo de la gráfica de f.

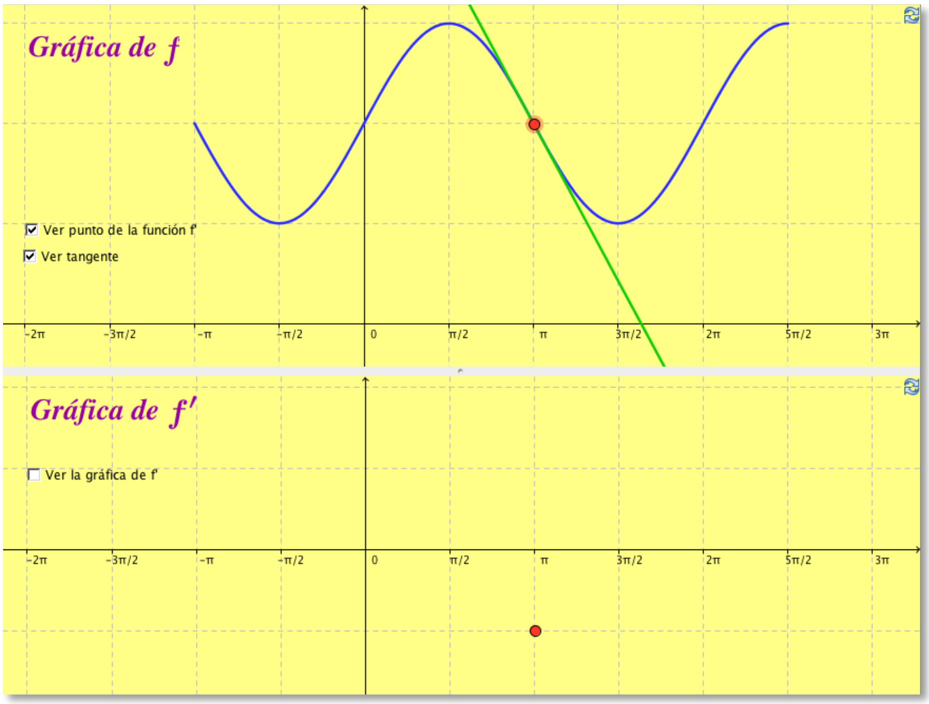


Ilustración 27. Visualización del punto de la función derivada

Este Applet sirve para analizar algunas características de la derivada. Como por ejemplo, el que cuando en la función se alcanza un máximo o un mínimo, entonces la derivada vale cero. Claro que esto no se presenta así, sino que se lleva a cabo una discusión para conjuntamente con el grupo llegar a esta conclusión.

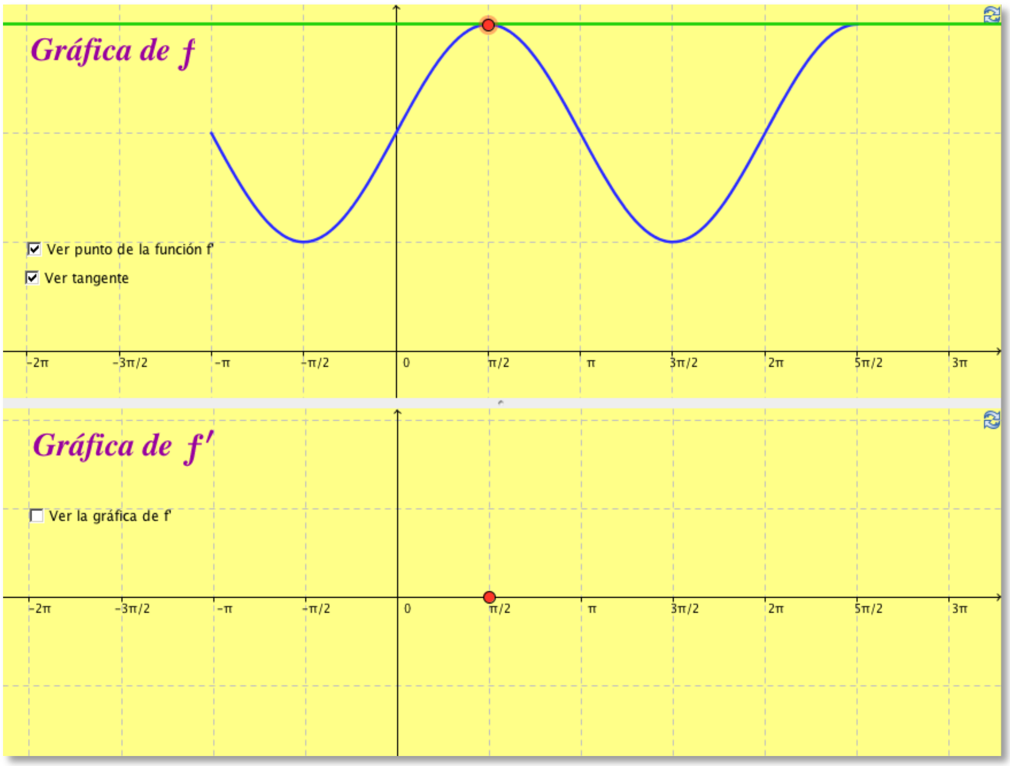


Ilustración 28. Visualización de los valores críticos de la función y su relación con la derivada

Por último, el Applet permite visualizar la gráfica de la función derivada.

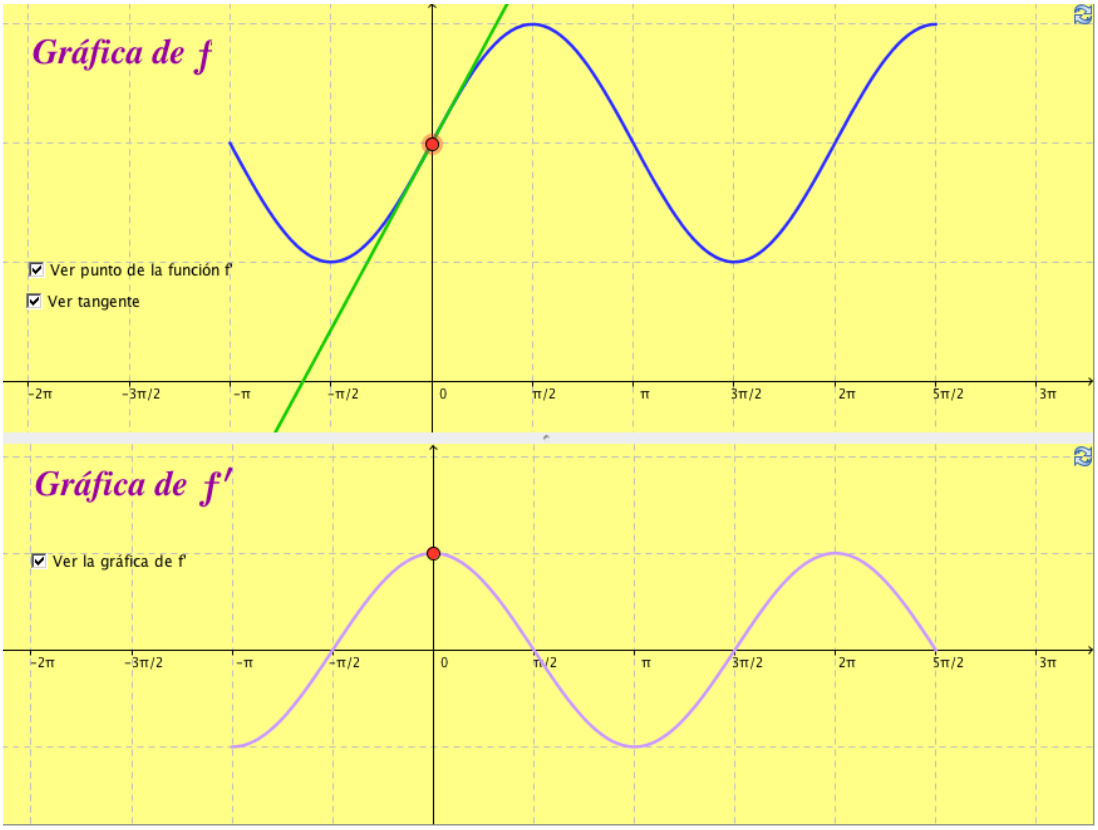


Ilustración 29. Gráfica de la función derivada

Con esto se puede hacer la pregunta: ¿cuándo la función derivada alcanza sus máximos y mínimos? Para llegar a la conclusión, luego de la discusión con el grupo, de que esto se cumple en ciertos puntos, y que éstos se llaman: *puntos de inflexión*.

Con este Applet además de analizar características del concepto de la derivada, se introducen elementos necesarios para el estudio subsecuente del tema y se les da significado. Tales como los máximos y mínimos, el criterio de la primera y el de la segunda derivada.

Aunado a ello, se aplica el concepto de la derivada en un análisis geométrico y se propicia una habilidad matemática importante, así como un conocimiento relevante del tema, obtener:

¡la gráfica de la derivada a partir de la gráfica de la función!

Ilustración 30. Conclusión del Applet de la gráfica de la derivada

3.2.8 Sobre la existencia de la derivada

Para propiciar la mejor comprensión de un concepto, no basta sólo con presentarlo y mostrar diversos ejemplos. También es necesario mostrar cuándo el concepto no se cumple, en qué condiciones no se satisface, es decir, mostrar ejemplos y contraejemplos.

En este Applet se presentan justo las circunstancias bajo las que el concepto no se cumple. Y se realiza analizando sus características mediante una discusión dirigida con la ayuda de la visualización dinámica.

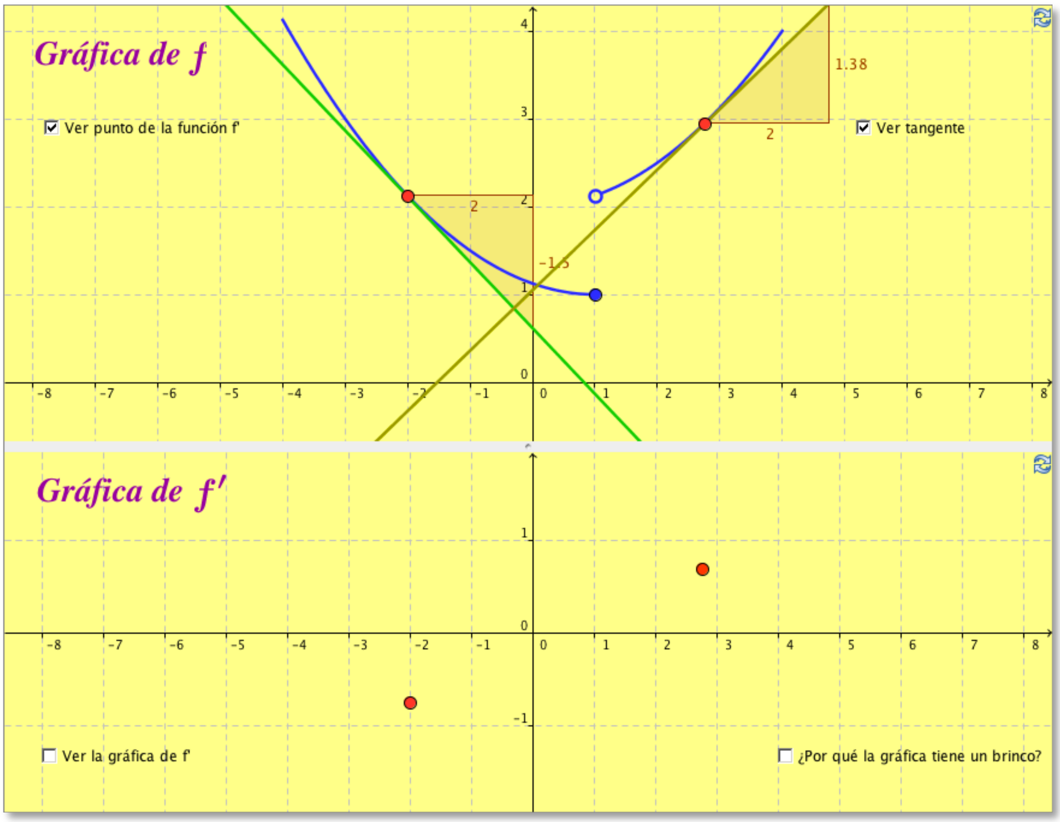


Ilustración 31. Visualización de un caso en el que no en todo punto hay derivada

El Applet nuevamente presenta dos planos. En el primero, la gráfica de una función, una función “partida”. Sobre cada una de las partes de la función, se tiene un punto que se puede mover a lo largo de su respectiva parte. Se visualiza en el segundo plano los puntos de la función derivada correspondiente a los puntos sobre la función. Asimismo se visualizan las rectas tangentes a la curva sobre los puntos.

Se pretende analizar los puntos de la función derivada conforme se van variando los puntos a lo largo de las dos partes de la función.

En particular, interesa analizar cuándo los puntos sobre la función se acercan al punto donde ésta se rompe, qué pasa con las pendientes de las rectas tangentes, y por lo tanto con los puntos de la función derivada.

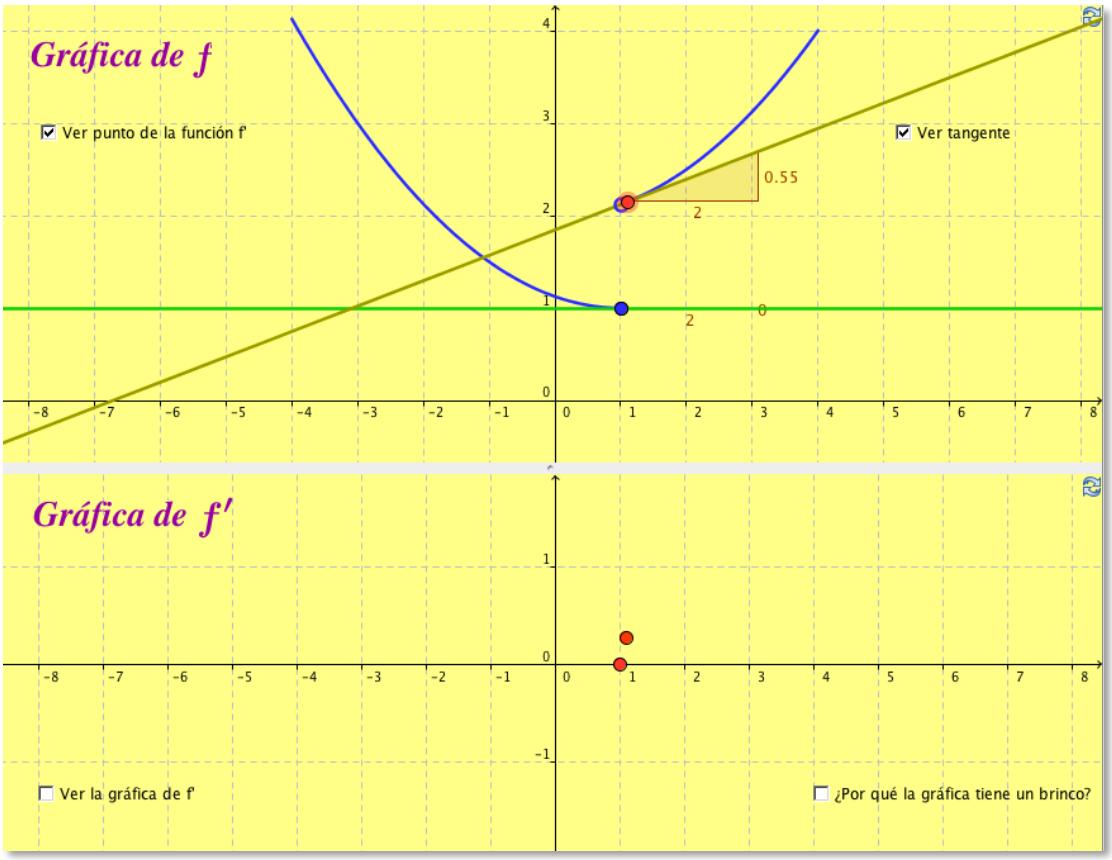


Ilustración 32. Visualización de las rectas tangentes en el punto donde la función se rompe

Se observa que justo en el punto donde la función está rota, los puntos correspondientes de la función derivada, no coinciden.

Se analiza con el grupo la situación, y se espera llegar a la conclusión de que los puntos no coinciden porque las pendientes de las rectas tangentes no son iguales.

En el Applet se puede visualizar la gráfica de la función derivada:

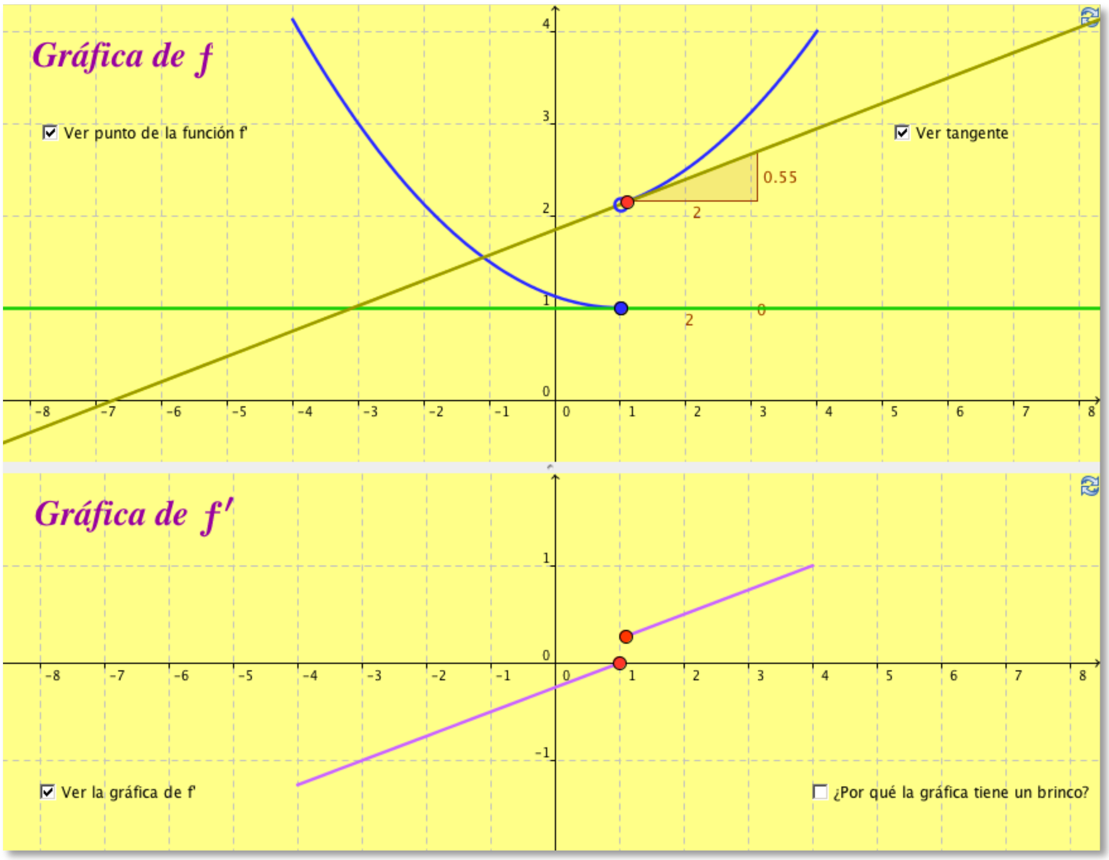


Ilustración 33. Visualización de la gráfica de la función derivada correspondiente

Se observa que la gráfica de la función derivada está rota. En el mismo punto donde las pendientes difieren la gráfica se rompe.

Luego de analizar con el grupo la situación, se puede visualizar la respuesta a la pregunta ¿por qué la gráfica tiene un brinco?

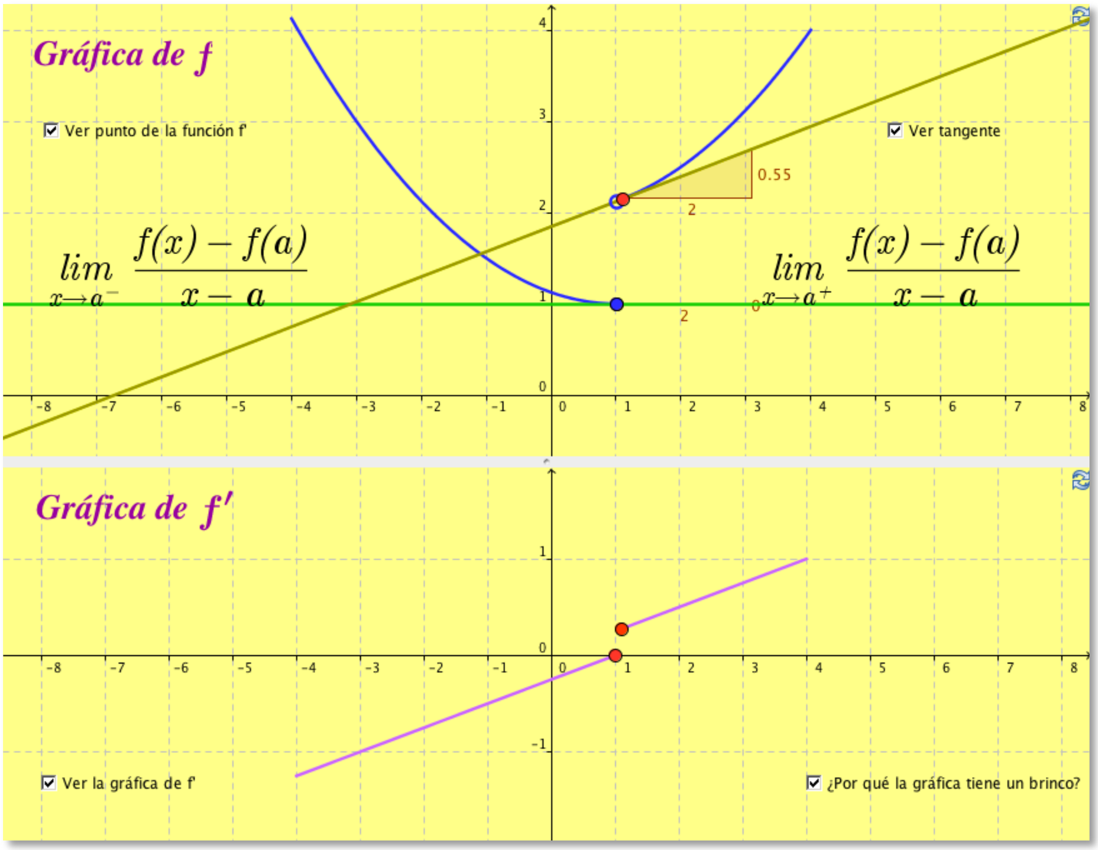


Ilustración 34. Visualización del porque la gráfica de la derivada está rota

Luego de la discusión se espera llegar a la conclusión de que como la derivada es un límite, el problema es justo ese: *el límite de la función al acercarse al punto donde está rota, no existe*. El límite no existe porque al acercarse por la izquierda y por la derecha no se llega al mismo valor. Por el lado izquierdo la pendiente de la recta tangente llega a cero, mientras que por el lado derecho la pendiente de la recta tangente es un valor positivo.

Este aspecto es de hecho sutil, pero apoyándonos en la visualización de las pendientes de las tangentes, que efectivamente una está horizontal y la otra no, se espera llegar a la comprensión por parte del alumno.

Con esto también se recuerdan y visualizan aspectos importantes del concepto de límite.

Del trabajo en este Applet se concluye:

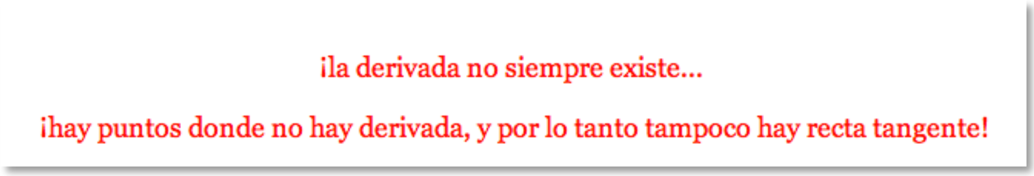


Ilustración 35. Conclusión del Applet sobre la existencia de la derivada

3.2.9 Sacando derivadas geométricamente

En este Applet se pretende recordar y practicar todo lo estudiado del concepto de la derivada.

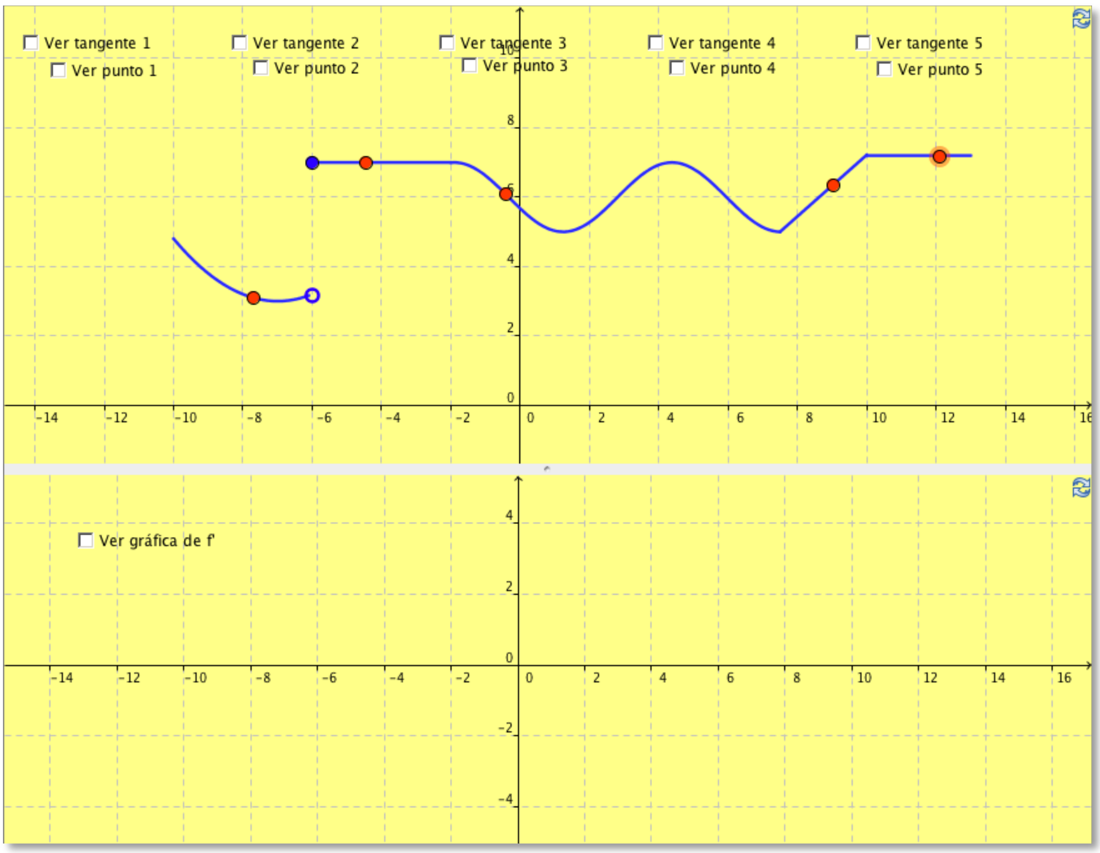


Ilustración 36. Visualización para obtener la gráfica de la función derivada

En el Applet nuevamente se presentan dos planos, en el primero la gráfica de una función, en el segundo se pretende obtener la gráfica de la función derivada.

Sobre diferentes secciones de la gráfica aparecen diferentes puntos, los cuales se pueden mover sobres cada una de sus respectivas secciones. Al igual que en los Applets anteriores, se puede visualizar para cada punto la recta tangente correspondiente, así como el punto de la función derivada que corresponda.

En este Applet, si es necesario, también se puede "activar el rastro" de los puntos de la función derivada, para darnos una idea de cómo es la gráfica de la derivada para una sección particular.

Se trabaja con el grupo, y se espera al final obtener una aproximación de la gráfica de la derivada de la función. Lo que al final se visualiza en el Applet.

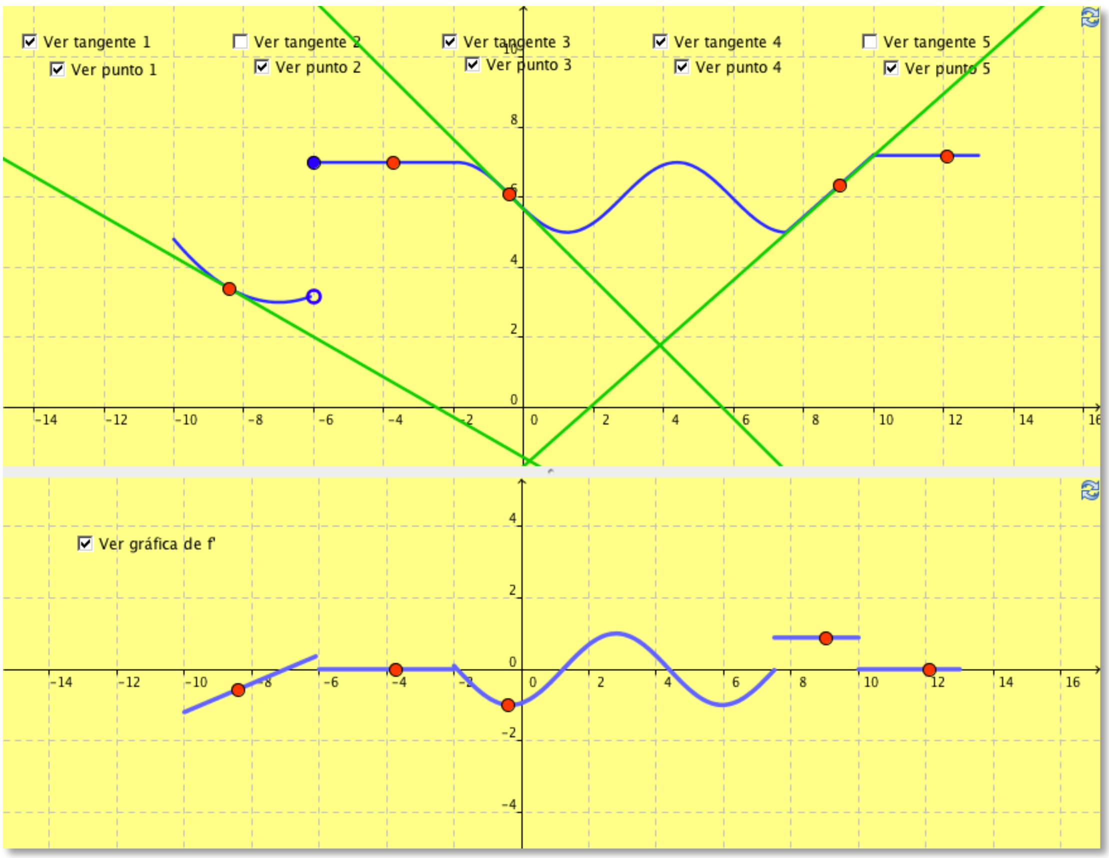


Ilustración 37. Visualización de la gráfica de la función derivada

Con este Applet se engloban los diferentes aspectos estudiados del concepto de la derivada, y es el cierre de nuestro desarrollo.

Así se desarrolla un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas* para el tema del concepto de la derivada.

IV. Aplicación y Resultados

Para la aplicación del *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*, para el tema del concepto de la derivada, desarrollado en el capítulo 3, se trabajó con un grupo de quinto semestre de Cálculo Diferencia e Integral I, del CCH plantel Azcapotzalco, en horario de 11 a 13 hrs.

Se pidió el favor a un profesor del plantel, que prestara su grupo para realizar el trabajo.

Aplicación

El grupo venía trabajando con su profesor desde el inicio del semestre. Con él estudiaron y concluyeron la unidad 1 del programa del curso: *Procesos Infinitos y la noción de límite*.

Para la unidad 2: *La Derivada: estudio de la variación y el cambio*. El grupo inició su estudio con su profesor de manera normal. Pero a las dos semanas de iniciado su trabajo, el martes 18 de Octubre de 2011, se inicio el trabajo con el grupo para llevar a cabo la aplicación de la Estrategia para la comprensión e interpretación geométrica de la derivada, basada en un proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas.

El método educativo utilizado para la aplicación fue el b-learning por medio de una plataforma Moodle en el espacio *tu aula virtual* del programa *h@bitat puma* de la Dirección General de Computo y Tecnologías de la Información y Comunicación de la UNAM.

En la plataforma Moodle se diseñó el apoyo digital dinámico para el desarrollo del tema. En ella se configuraron los diferentes Applets descritos en el capítulo 3.

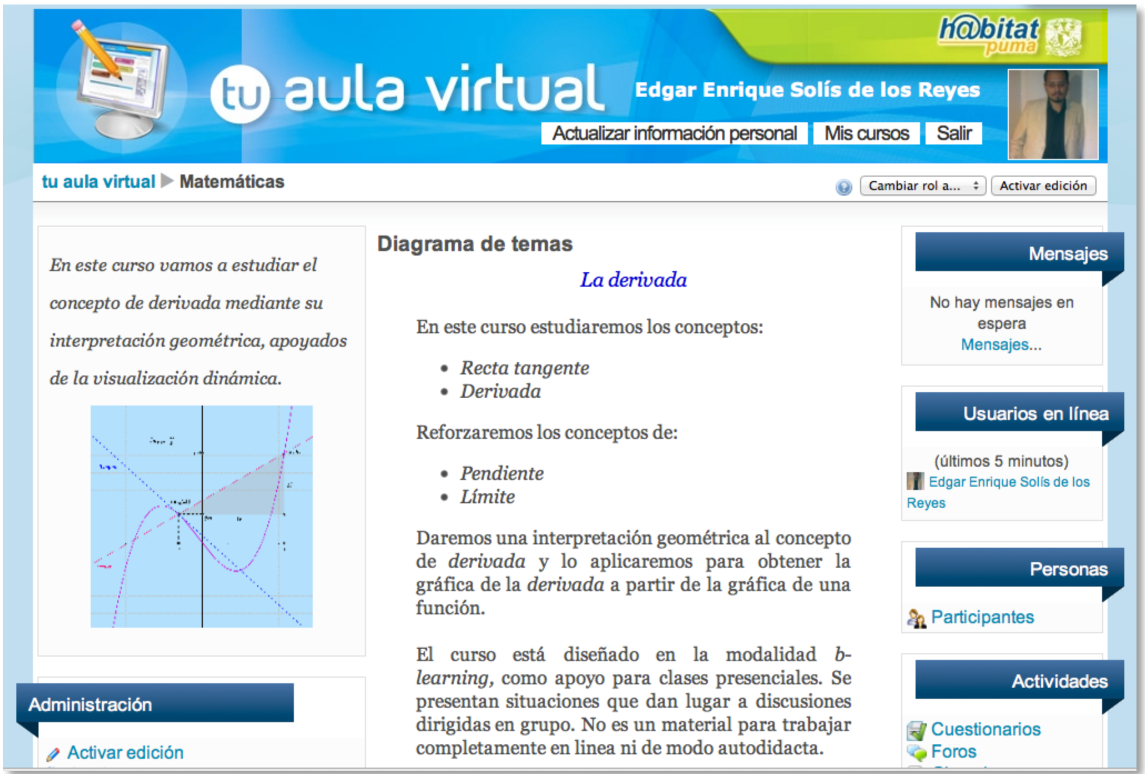


Ilustración 38. Plataforma Moodle de trabajo para el desarrollo del tema

El desarrollo del tema se organizó congruente con el orden de los Applets en la plataforma.

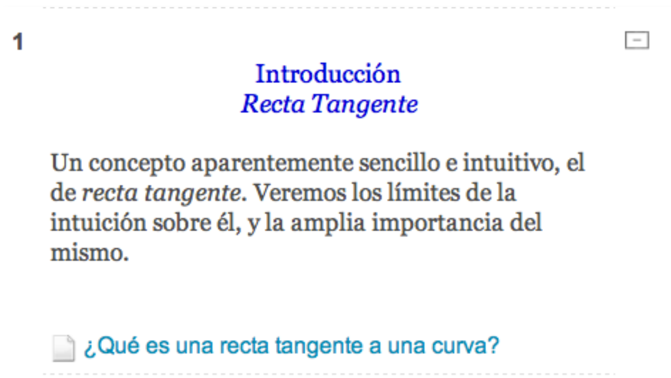


Ilustración 39. Introducción al tema

Como parte del uso de la plataforma, se habilitó un *Glosario de Conceptos*. Un espacio dedicado para que los alumnos escriban con sus palabras alguno de los conceptos que se trabajaron en el desarrollo del tema, a saber, *derivada*, *recta tangente*, y *recta secante,* etc.

El glosario se ubicó luego de que se obtuvo el concepto de la derivada.

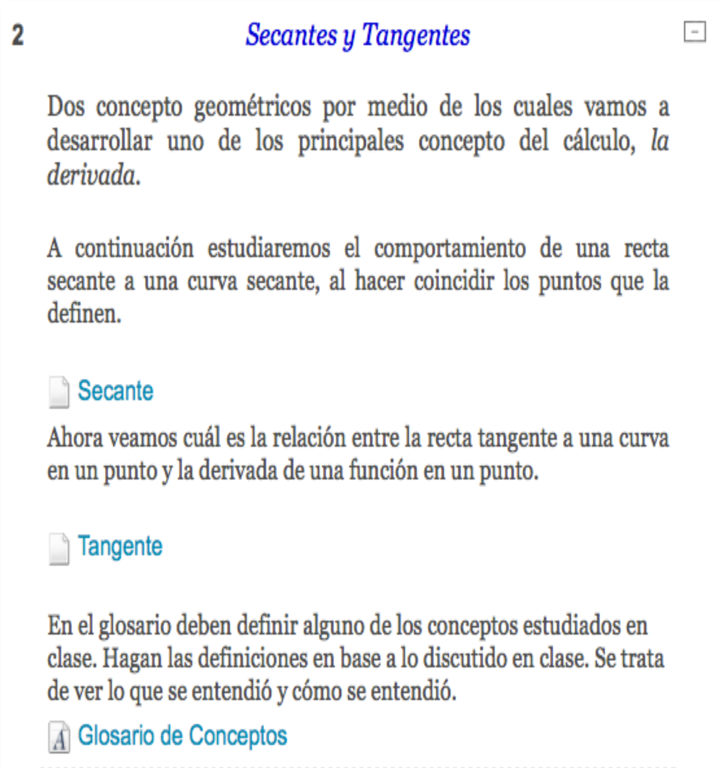
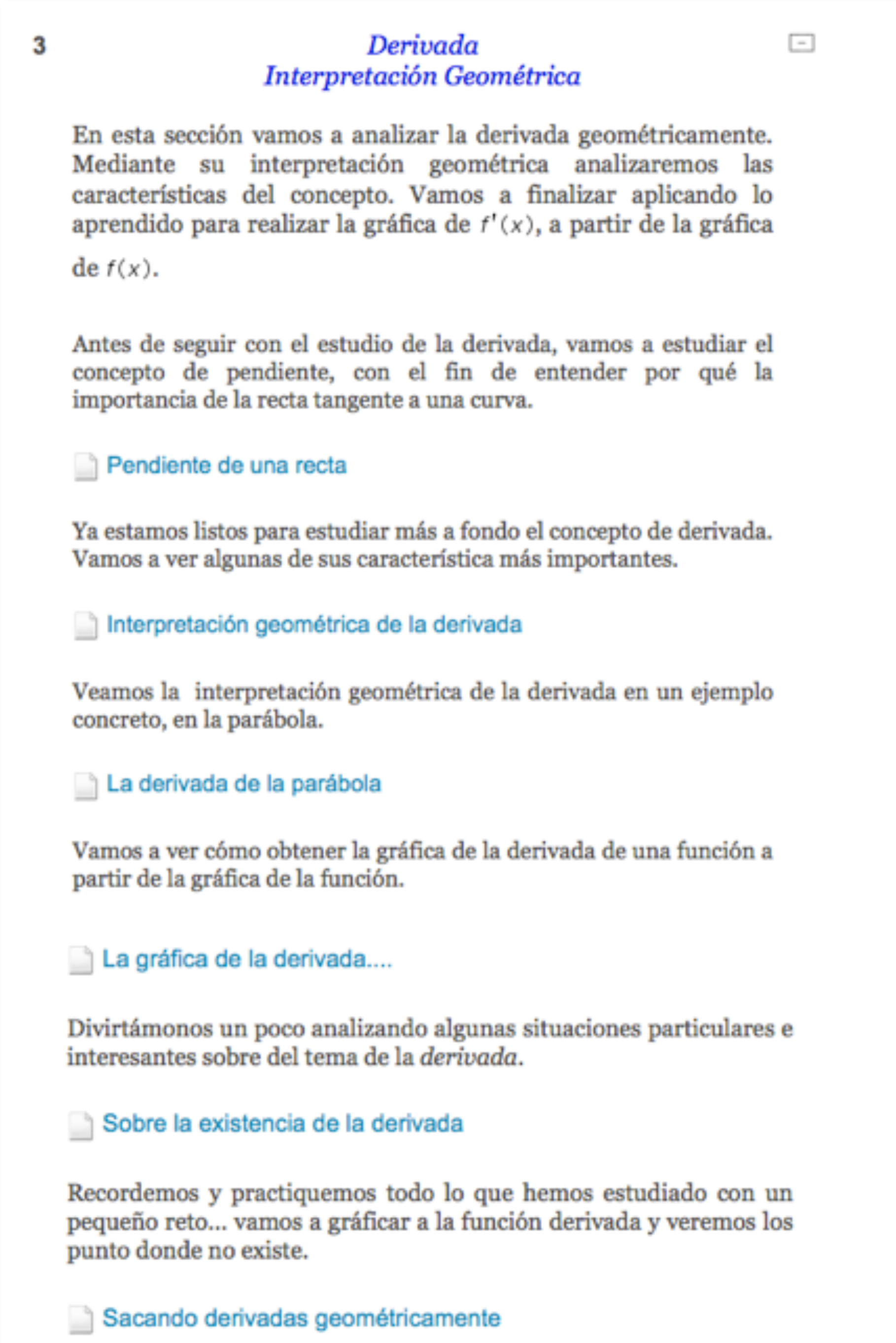


Ilustración 40. Applets que apoyan el desarrollo teórico

La última parte del desarrollo del tema es sobre la aplicación geométrica del concepto, para obtener la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función.


3

Derivada
Interpretación Geométrica

En esta sección vamos a analizar la derivada geométricamente. Mediante su interpretación geométrica analizaremos las características del concepto. Vamos a finalizar aplicando lo aprendido para realizar la gráfica de $f'(x)$, a partir de la gráfica de $f(x)$.

Antes de seguir con el estudio de la derivada, vamos a estudiar el concepto de pendiente, con el fin de entender por qué la importancia de la recta tangente a una curva.

Pendiente de una recta

Ya estamos listos para estudiar más a fondo el concepto de derivada. Vamos a ver algunas de sus característica más importantes.

Interpretación geométrica de la derivada

Veamos la interpretación geométrica de la derivada en un ejemplo concreto, en la parábola.

La derivada de la parábola

Vamos a ver cómo obtener la gráfica de la derivada de una función a partir de la gráfica de la función.

La gráfica de la derivada....

Divirtámonos un poco analizando algunas situaciones particulares e interesantes sobre del tema de la *derivada*.

Sobre la existencia de la derivada

Recordemos y practiquemos todo lo que hemos estudiado con un pequeño reto... vamos a gráficar a la función derivada y veremos los punto donde no existe.

Sacando derivadas geométricamente

Ilustración 41. Applets de aplicación del concepto y cierre del tema

El día que se inicio el trabajo con el grupo, sólo se les llevo a una sala de cómputo con acceso a Internet dentro del plantel, para que se inscribieran a la plataforma, pero principalmente para realizar el *pre test*.

Para evaluar los resultados se usa el método del *pre test* y el *post test*.

Tanto el *pre test* como el *post test* (Anexos A y B respectivamente), son cuestionarios de opción múltiple, referentes al tema, con cuatro opciones de respuesta. Ambos se aplicaron en línea, en una sala de cómputo en el plantel bajo mi supervisión. Cabe mencionar que los alumnos podían sacar su cuaderno para escribir lo que necesitarán para responder los cuestionarios.

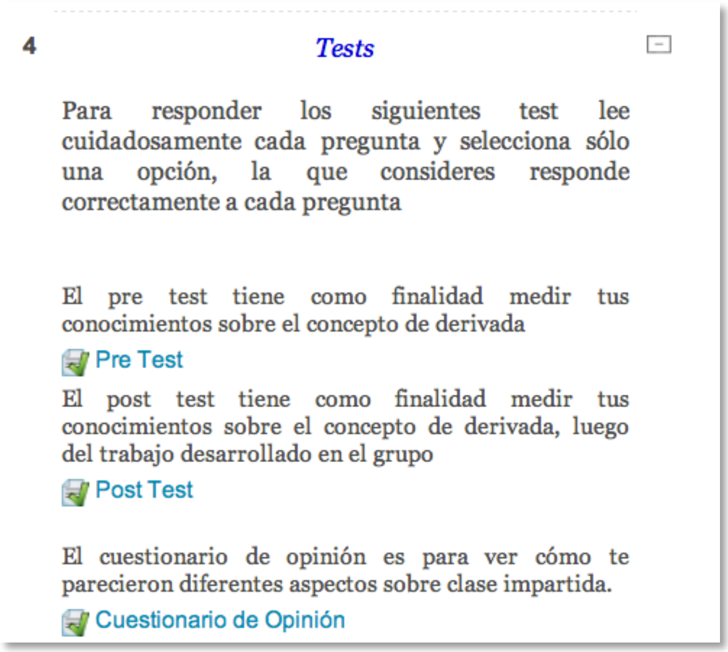


Ilustración 42. Cuestionarios en la plataforma

Ambos *test* fueron validados por *expertos*. Cinco profesores del plantel, de Carrera Titulares, quienes han impartido el curso de Cálculo I de 23 hasta 38 años.

Al ser exámenes de opción múltiple aplicados en línea, el alumno conoce su resultado al momento de terminar los cuestionarios; incluso se le muestran las preguntas donde fue correcta su respuesta y donde no, así como la opción de respuesta correcta correspondiente.

El día de la aplicación del *pre test*, lo presentaron 35 alumnos.

Ilustración 43. Alumnos del grupo realizando cuestionarios

El trabajo con el grupo inicio el 18 de octubre de 2011 y concluyo el 3 de noviembre del mismo año. Es decir, se llevo a cabo durante tres semanas. Dos sesiones de dos horas por semana, en total 8 horas de trabajo en clase.

Así, como la primera sesión de trabajo sólo se dedicó a la realización del *pre test*, la última sesión, la del 3 de noviembre, se realizo en una sala de computo con acceso a Internet en el plantel, y sólo se dedico a la realización por parte de los alumnos del *post test*, y de un cuestionario de opinión (Anexo C). Éste último con el fin de conocer la opinión de los alumnos sobre el trabajo realizado.

El *post test* lo presentaron 38 alumnos.

Salvo la primera y última sesiones de trabajo con el grupo, el resto se llevo a cabo en el salón de clases con apoyo de un cañón, una laptop, pizarrón y plumines.

La estrategia principal con la que se llevo a cabo el desarrollo del tema fue Dialogo/discusión.

Ilustración 44. Grupo en el salón de clases

Todos los Applets se presentaron en el salón de clases, y se llevaron a cabo para cada una de las discusiones referentes a los diferentes elementos que cada uno presenta, y que fueron detallados en el capítulo previo.

Los alumnos participaban en el pizarrón ya sea expresando sus ideas o bien analizando algunas gráficas.

Hay que aclarar que en el pizarrón se analizaron diferentes gráficas, tales que ejemplificaran las diferentes ideas o situaciones que surgieran durante las discusiones y los análisis de los Applets.

Los Applets presentaban las situaciones base para generar las discusiones y llevar a cabo los diferentes análisis, pero en modo alguno fueron las únicas gráficas o situaciones analizadas durante el desarrollo del tema.

Los Applets que se configuraron en la plataforma son los diferentes medios para presentar las diferentes *preguntas generadoras*, de ahí se guía la discusión y el análisis, pero siempre se revisan todas las ideas o sugerencias de parte del grupo. Se presentan ejemplos o contraejemplos que muestren la veracidad o falsedad de sus conclusiones.

Luego, en los Applets, una vez que el grupo llega a ella, se presenta la visualización de la conclusión final a la que se quería llegar para cada aplicación particular.

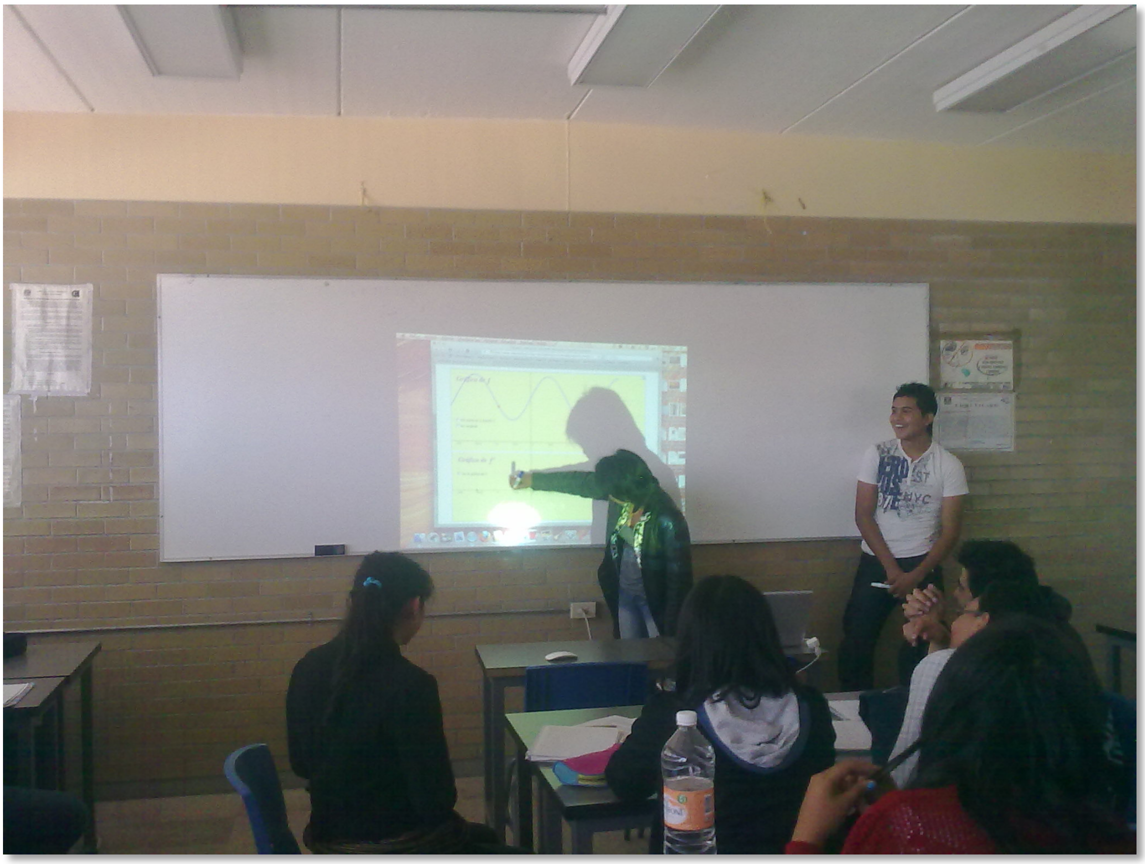


Ilustración 45. Trabajo en clase con los Applets

Por medio de un *mouse* inalámbrico, se permitió que fueran los alumnos quienes manipularan los elementos presentado en los Applets.

Si bien es cierto que sólo algunos alumnos fueron los que en el salón de clases pueden interactuar con las diferentes aplicaciones, esto se soluciona por medio de la plataforma.

A través de Internet, los alumnos podían acceder a la plataforma en cualquier momento, y en ella podían, cada uno, interactuar con los diferentes Applets que se trabajaron a lo largo de todo el desarrollo del tema, y que se discutieron en el salón de clases.

De este modo, la plataforma no sólo fue un medio para que el alumno interactuará con los Applets, sino que sirvió también como medio de estudio y de reforzamiento de lo visto en clase.

Análisis de Resultados

Antes de iniciar es importante mencionar que los grupos de Cálculo I en el CCH tienen inscritos alrededor de 50 o más alumnos.

Sin embargo el trabajo que se realizó con el grupo, nunca se tuvo a los 50 alumnos. Se trabajó realmente con 34 alumnos.

Todos los datos que se presentarán a continuación son obtenidos de los registros que guarda la propia plataforma de manera automática.

4.2.1 Applets y Glosario

Para presentar los resultados obtenidos, primero se van a mostrar los datos que se tienen en la plataforma sobre el acceso de los alumnos a los diferentes Applets fuera del salón de clases.
Recordamos el orden de los Applets:

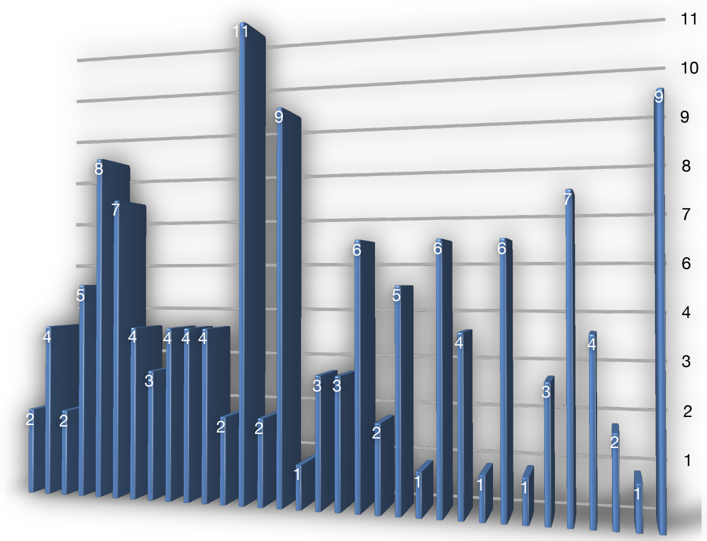
10. ¿Qué es una recta tangente a una curva?
11. Secante.

12. Tangente.
13. Pendiente de una recta.
14. Interpretación geométrica de la derivada.
15. La derivada de la parábola.
16. La gráfica de la derivada.
17. Sobre la existencia de la derivada.
18. Sacando derivadas geométricamente.

Para el primer Applet, a partir del día 18 de octubre y hasta el 3 de noviembre del 2011, es decir el tiempo que duro el trabajo con el grupo, entraron a la aplicación 33 alumnos distintos.

En la gráfica 1 se muestra el número de entradas que cada alumno realizó a la aplicación. Se observa que el rango es desde 1 hasta 11 veces que diferentes alumnos abrieron el primer Applet.

En total se tuvieron 136 entradas por parte de los alumnos a este Applet.

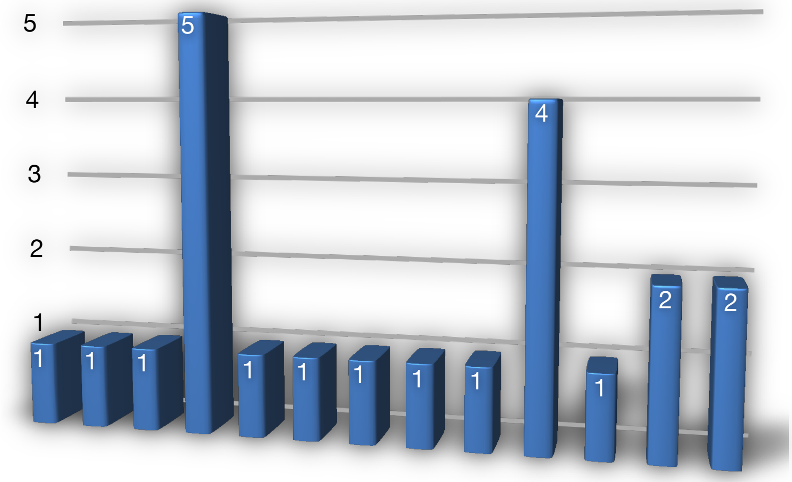


Gráfica 1. Entradas al Applet 1: ***¿Qué es una recta tangente?***

Para el segundo Applet, en el tiempo que duró el trabajo con el grupo, entraron a la aplicación 13 alumnos distintos.

En la gráfica 2 se muestra el número de entradas que cada alumno realizó a la aplicación. Se observa que el rango es desde 1 hasta 5 veces que los alumnos abrieron el segundo Applet.

En total se tuvieron 22 entradas por parte de los alumnos a éste Applet.

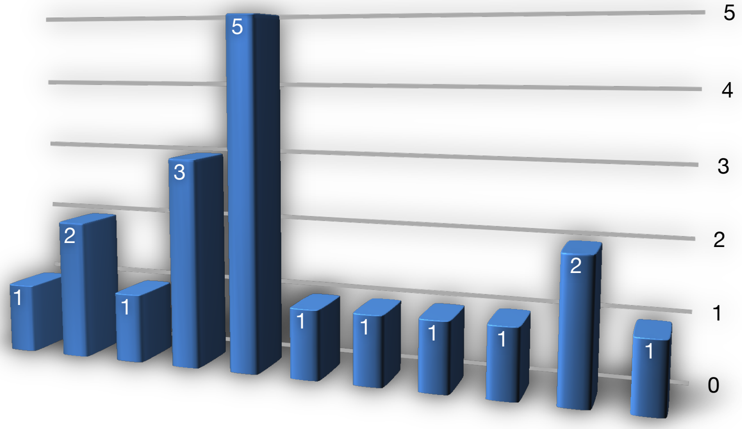


Gráfica 2. Entradas al Applet 2: *Secante*

Para el tercer Applet, en el tiempo que duró el trabajo con el grupo, entraron a la aplicación 11 alumnos distintos.

En la gráfica 3 se muestra el número de entradas que cada alumno realizó a la aplicación. Se observa que el rango es desde 1 hasta 5 veces que los alumnos abrieron el tercer Applet.

En total se tuvieron 19 entradas por parte de los alumnos a este Applet.

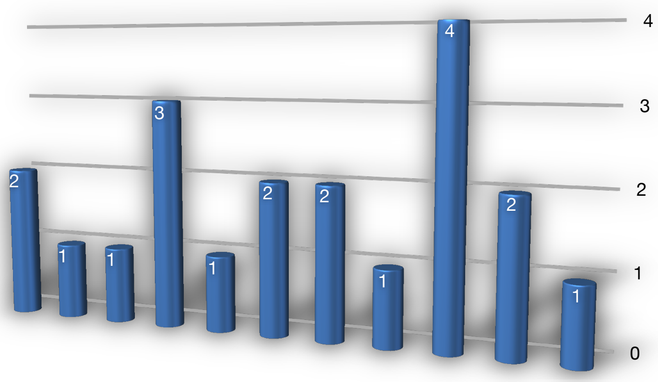


Gráfica 3. Entradas al Applet 3: ***Tangente***

Para el cuarto Applet, en el tiempo que duró el trabajo con el grupo, entraron a la aplicación 11 alumnos distintos.

En la gráfica 4 se muestra el número de entradas que cada alumno realizó a la aplicación. Se observa que el rango es desde 1 hasta 4 veces que los alumnos abrieron el cuarto Applet.

En total se tuvieron 20 entradas por parte de los alumnos a este Applet.

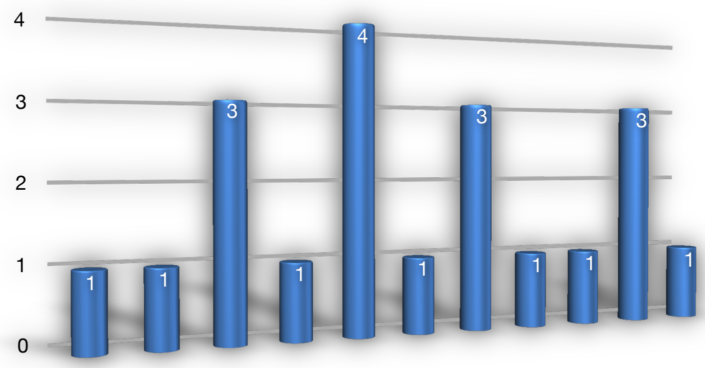


Gráfica 4. Entradas al Applet 4: ***Pendiente de una recta***

Para el quinto Applet, en el tiempo que duro el trabajó con el grupo, entraron a la aplicación 11 alumnos distintos.

En la gráfica 5 se muestra el número de entradas que cada alumno realizó a la aplicación. Se observa que el rango es desde 1 hasta 4 veces que los alumnos abrieron el quinto Applet.

En total se tuvieron 20 entradas por parte de los alumnos a este Applet.

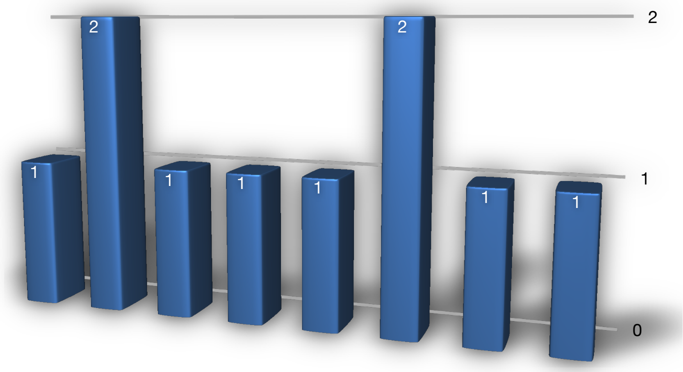


Gráfica 5. Entradas al Applet 5: ***Interpretación geométrica de la derivada***

Para el sexto Applet, en el tiempo que duró el trabajo con el grupo, entraron a la aplicación 8 alumnos distintos.

En la gráfica 6 se muestra el número de entradas que cada alumno realizó a la aplicación. Se observa que el rango es desde 1 hasta 2 veces que los alumnos abrieron el sexto Applet.

En total se tuvieron 10 entradas por parte de los alumnos a este Applet.

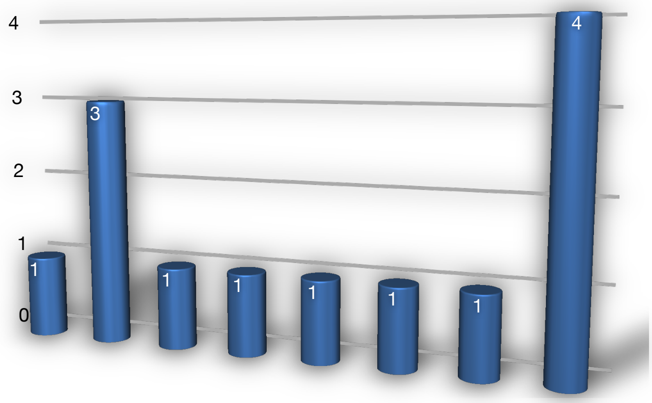


Gráfica 6. Entradas al Applet 6: *La derivada de la Parábola*

Para el séptimo Applet, en el tiempo que duró el trabajo con el grupo, entraron a la aplicación 8 alumnos distintos.

En la gráfica 7 se muestra el número de entradas que cada alumno realizó a la aplicación. Se observa que el rango es desde 1 hasta 4 veces que los alumnos abrieron el séptimo Applet.

En total se tuvieron 13 entradas por parte de los alumnos a este Applet.

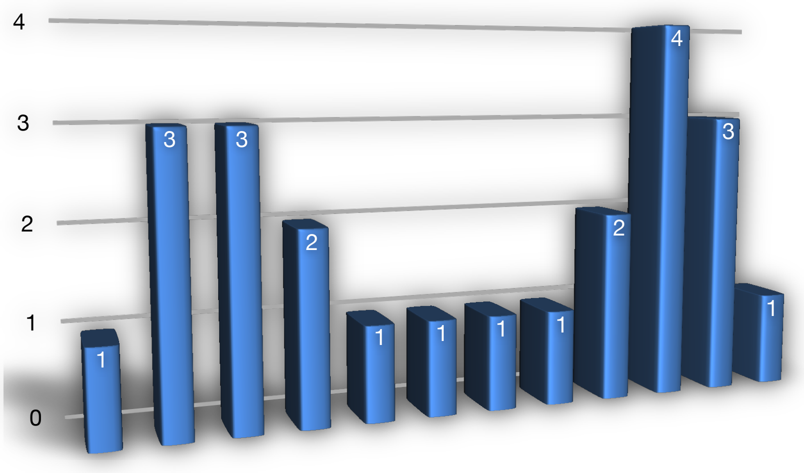


Gráfica 7. Entradas al Applet 7: *La gráfica de la derivada*

Para el octavo Applet, en el tiempo que duró el trabajo con el grupo, entraron a la aplicación 12 alumnos distintos.

En la gráfica 8 se muestra el número de entradas que cada alumno realizó a la aplicación. Se observa que el rango es desde 1 hasta 4 veces que los alumnos abrieron el octavo Applet.

En total se tuvieron 23 entradas por parte de los alumnos a este Applet.

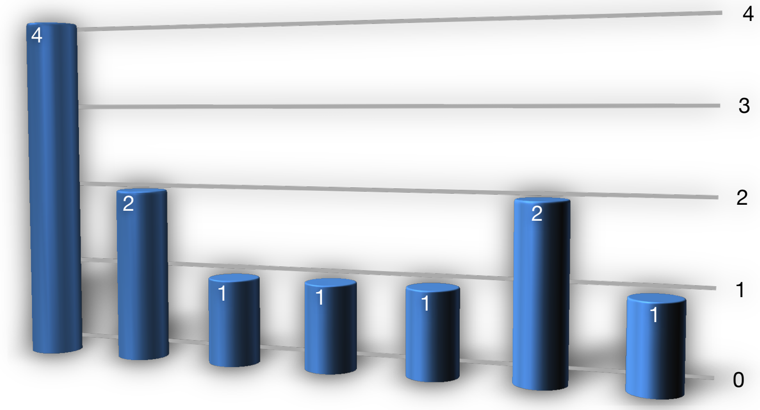


Gráfica 8. Entradas al Applet 8: ***Sobre la existencia de la derivada***

Para el noveno Applet, en el tiempo que duró el trabajo con el grupo, entraron a la aplicación 7 alumnos distintos.

En la gráfica 9 se muestra el número de entradas que cada alumno realizó a la aplicación. Se observa que el rango es desde 1 hasta 4 veces que los alumnos abrieron el noveno Applet.

En total se tuvieron 12 entradas por parte de los alumnos a este Applet.

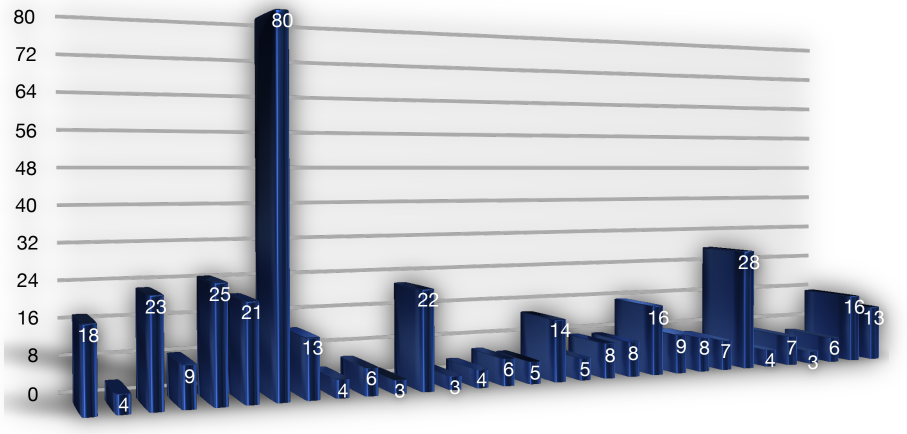


Gráfica 9. Entradas al Applet 9: *Sacando derivadas geométricamente*

En el caso del glosario de conceptos las entradas en el tiempo que duró el trabajo con el grupo, entraron a la aplicación 31 alumnos distintos.

En la gráfica 10 se muestra el número de entradas que cada alumno realizó al glosario. Se observa que el rango es desde 1 hasta 4 veces que los alumnos abrieron el décimo Applet.

En total se tuvieron 398 entradas por parte de los alumnos a esta sección.



Gráfica 10. Entradas al Glosario

En el caso del Glosario, a diferencia de los Applets, los alumnos debían participar definiendo con sus propias palabras algunos de los conceptos que trabajamos en el desarrollo del tema.

Algunas de las participaciones de los alumnos definiendo algunos conceptos como derivada, tangente, límite y secante fueron las siguientes:


Derivada
de kenia castillo leal - miércoles, 26 de octubre de 2011, 23:56
La derivada es la pendiente, es decir la inclinación de la recta tangente; y ésta a la vez depende del punto, ya que cada punto tiene su recta tangente (derivada) :D

Derivada y Tangente
de Maricruz Sánchez - lunes, 24 de octubre de 2011, 19:39
La tangente es la recta que tiene como pendiente a la derivada. Inversamente, la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva EN UN PUNTO.

También la derivada es una función.

derivada
de Mauricio Axel Reyes Ascencio - sábado, 22 de octubre de 2011, 12:41
la derivada es la pendiente de la recta tangente en el punto, es una funcion que da pendientes

Ilustración 46. Definiciones de los alumnos de los conceptos de derivada y tangente

De las participaciones anteriores se observa que los alumnos pueden expresar correctamente el concepto de derivada, pero además, que lo relacionan correctamente con el de recta tangente, más específicamente con la pendiente de la recta tangente, es decir, expresan la derivada a través de su interpretación geométrica.

Asimismo, la relación la expresan en ambos sentidos: pasan del concepto de la derivada a su representación geométrica y de su representación geométrica al concepto.

También hay que destacar que en sus definiciones expresan que la derivada es una función, que a cada punto de la curva le corresponde una recta tangente diferente, y por ende una derivada diferente.

En la siguiente participación un alumno definió el concepto de límite:

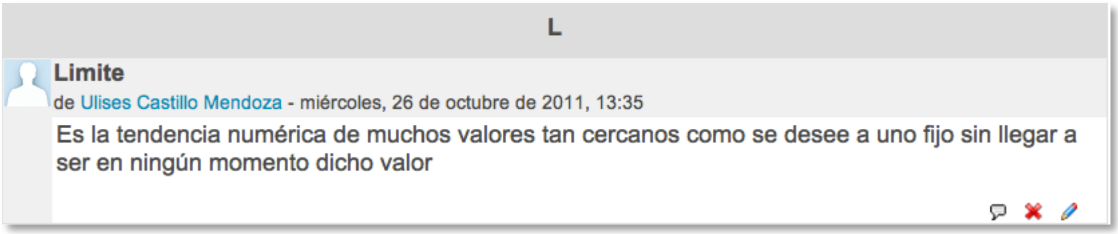
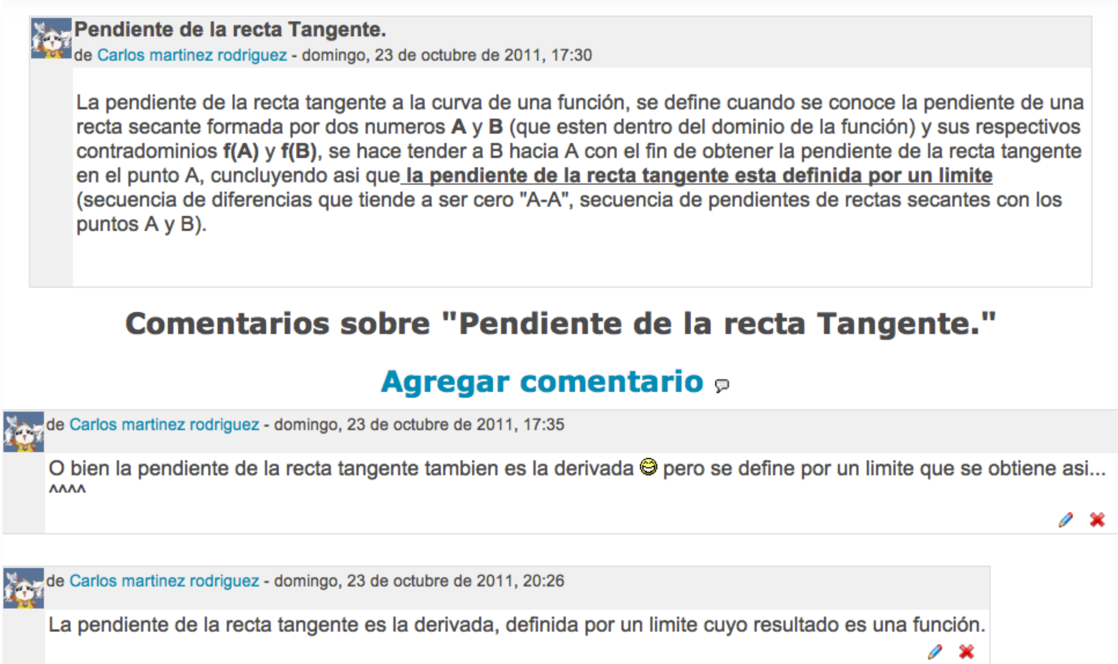


Ilustración 47. Definición de un alumno del concepto de límite de forma numérica

La definición que da es muy buena intuitivamente, y la realiza de manera numérica, como él menciona. Es decir, lo define a través de un registro aritmético.

En el glosario, además de definir conceptos, los alumnos pueden ver las definiciones de sus compañero, y comentar al respecto. En las siguientes participaciones para definir el concepto de tangente se observan algunos comentarios que se realizaron entre alumnos.



Pendiente de la recta Tangente.
de Carlos martinez rodriguez - domingo, 23 de octubre de 2011, 17:30

La pendiente de la recta tangente a la curva de una función, se define cuando se conoce la pendiente de una recta secante formada por dos numeros **A** y **B** (que esten dentro del dominio de la función) y sus respectivos contradominios **f(A)** y **f(B)**, se hace tender a B hacia A con el fin de obtener la pendiente de la recta tangente en el punto A, cuncluyendo asi que **la pendiente de la recta tangente esta definida por un limite** (secuencia de diferencias que tiende a ser cero "A-A", secuencia de pendientes de rectas secantes con los puntos A y B).

Comentarios sobre "Pendiente de la recta Tangente."

Agregar comentario

de Carlos martinez rodriguez - domingo, 23 de octubre de 2011, 17:35

O bien la pendiente de la recta tangente tambien es la derivada pero se define por un limite que se obtiene asi... ^^^^

de Carlos martinez rodriguez - domingo, 23 de octubre de 2011, 20:26

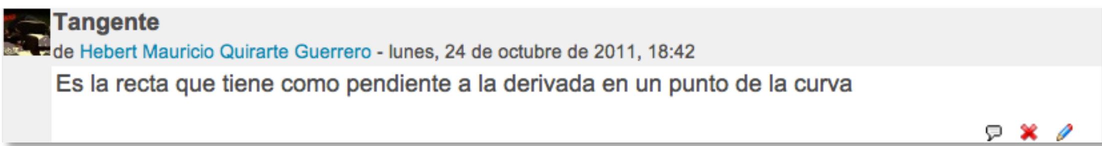
La pendiente de la recta tangente es la derivada, definida por un limite cuyo resultado es una función.

Ilustración 48. Definición de un alumno de recta tangente usando los conceptos de dominio, rango y límite

Los comentarios en esta participación son del propio alumno que la realizó. Si bien su definición inicial de recta tangente es algo elaborada, pues menciona diversos conceptos en ella, tales como dominio, rango y límite de una función, por la forma engorrosa de expresarse, así como la imprecisión y hasta mal manejo de los conceptos podemos asumir que sí es una definición realizada por el alumno usando sus propias palabras, conocimientos y medios. Pues de hecho trata de describir el proceso por medio del cual se obtiene la recta tangente.

Los comentarios que realiza son aclaraciones de su definición inicial. En ellos se observa que el alumno comprendió el concepto, así como la relación que tiene la recta tangente con los diferentes conceptos que él menciona.

Otra definición de recta tangente:



Tangente
de Hebert Mauricio Quirarte Guerrero - lunes, 24 de octubre de 2011, 18:42

Es la recta que tiene como pendiente a la derivada en un punto de la curva

Ilustración 49. Otra definición de tangente

Se reitera el hecho de que los alumnos están definiendo el concepto de derivada a través de su representación geométrica.

La siguiente definición de un alumno muestra dos aspectos fundamentales del aprendizaje:

Ilustración 50. Definición de una alumna de recta tangente relacionando sus conocimientos previos. Muestra también motivación de la alumna

Hay que observar que en la participación anterior se está integrando la idea intuitiva de recta tangente con el concepto de derivada. Es decir, se integra el conocimiento previo con el nuevo conocimiento. Se generó el desequilibrio cognitivo, que por la participación de la alumna al parecer se dio una asimilación y acomodación… ¡lo que se esperaba!. Es evidencia de que se dio un aprendizaje significativo.

Además de la importancia mencionada, cabe decir que el comentario que la propia alumna hace a su participación muestra una actitud muy positiva y de gusto.

La mejor motivación, y satisfacción, para un alumno es que vea que aprende, tal vez su comentario evidencia esto.

En la siguiente definición de un alumno del concepto de recta tangente, se presenta un comentario de otro alumno:

Ilustración 51. Comentario de un alumno sobre la definición de tangente de otro compañero

Vemos que la definición del alumno no está mal, de hecho es muy similar a la definición que acabamos de comentar previamente, la única diferencia es el verbo que usan, en la anterior es *pasar*, y en ésta es *tocar*.

Sin embargo, en este caso otro alumno le hace el comentario sobre la imprecisión de decir que la recta tangente toca a la curva en un punto. De hecho esa imprecisión que él menciona es justo la situación que se presentó al inicio del desarrollo del tema, con la que se pretendió causar un desequilibrio cognitivo en los alumnos.

La aclaración que hace el alumno en su comentario, también es imprecisa (es el mismo alumno que previamente definió la recta tangente usando los conceptos de límite, dominio y rango de una función), nuevamente no usa los conceptos apropiadamente.

No obstante, se entiende la idea que quiere expresar, y es correcta. De hecho, evidencia su nivel de comprensión del concepto, pues expresa situaciones en las que se cumple y en las que no, ejemplos y contraejemplos. Además, entiende la diferencia: porque aunque sea la misma situación, en ocasiones, en ciertos puntos, sí es una recta tangente y en otros no; y lo expresa relacionando aspectos geométricos con el concepto de derivada.

Algunas definiciones de recta secante:

Ilustración 52. Más comentarios de un alumno sobre definiciones de secante de otros compañeros

En ambas definiciones vuelve a comentar el mismo alumno que lo ha venido haciendo. Nuevamente comenta sobre imprecisiones.

Lo que hay que resaltar nuevamente, además de las definiciones intuitivamente correctas de los alumnos, es el nivel de comprensión de los alumnos que hacen los comentarios. Conjuntando sus comentarios, se evidencia su dominio del concepto, la comprensión que logró del concepto de recta tangente y de la derivada, cómo logró relacionarlos, entender uno a través de otro. Puede entender el concepto de derivada a través de su representación geométrica, y más aún, logra interpretar las diferentes situaciones geométricas a través del concepto, es decir, transita entre registros.

Cabe mencionar que en los comentarios del alumno también se muestra que comprendió algunas sutilezas de ambos conceptos, tangente y derivada, sutilezas que fueron usadas para explicar lo mismo.

Por último, también hay que mostrar la evidencia de que no todos los alumnos comprendieron el concepto de derivada ni de tangente:

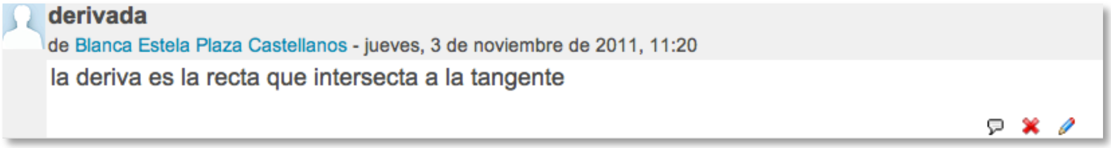


Ilustración 53. Definición incorrecta de la derivada realizada por una alumna

La definición muestra la completa incomprensión del concepto de derivada. No se logro que entendiera el concepto a través de su interpretación geométrica. De hecho, hay confusión entre el concepto y su representación geométrica.

No hay comprensión del concepto, por ende no hay transición entre registros, como con los alumnos anteriores.

4.2.2 Test. Análisis Cuantitativo

El *pre test* lo realizaron 35 alumnos. El *post test* lo realizaron 38 alumnos. De éstos últimos, 3 alumnos no realizaron el *pre test*, y un alumno que realizó el *pre test*, no realizó el *post test*.

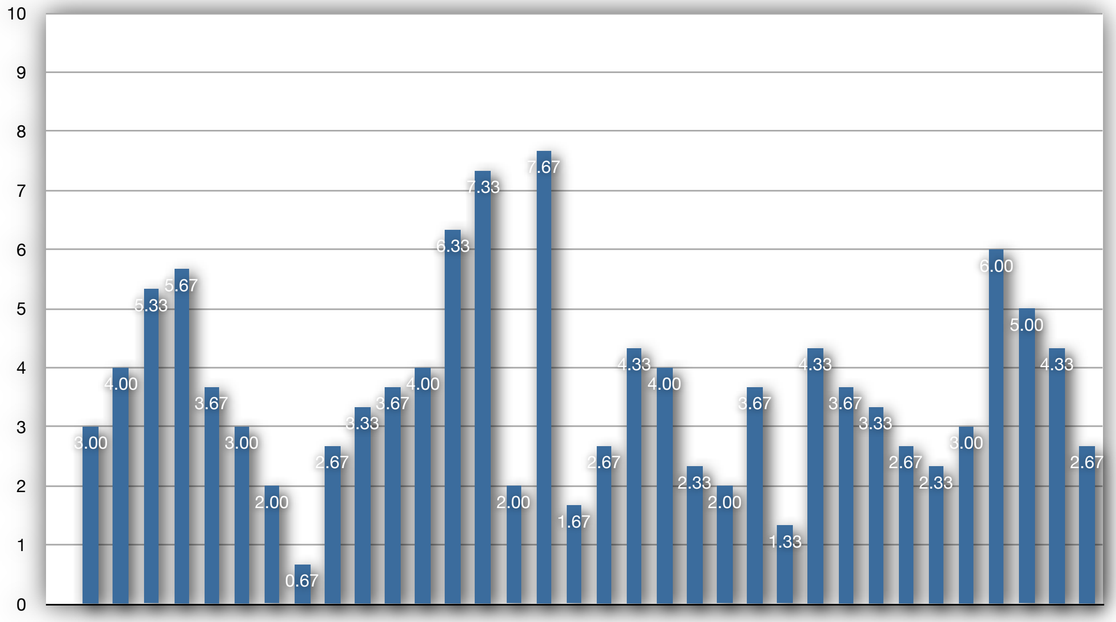
Por lo tanto, se presentan los datos de los 34 alumnos que realizaron ambos cuestionarios.

Las calificaciones obtenidas por los alumnos en el *pre test* se presentan en la tabla 1 y se esquematizan en la gráfica 11, en la que cada renglon corresponde a un alumno.

Alumno	Calificación
1	3
2	4
3	5.33
4	5.67
5	3.67
6	3
7	2
8	0.67
9	2.67
10	3.33
11	3.67
12	4
13	6.33
14	7.33
15	2
16	7.67
17	1.67
18	2.67
19	4.33
20	4
21	2.33
22	2
23	3.67
24	1.33
25	4.33
26	3.67
27	3.33
28	2.67
29	2.33
30	3
31	6
32	5
33	4.33
34	2.67

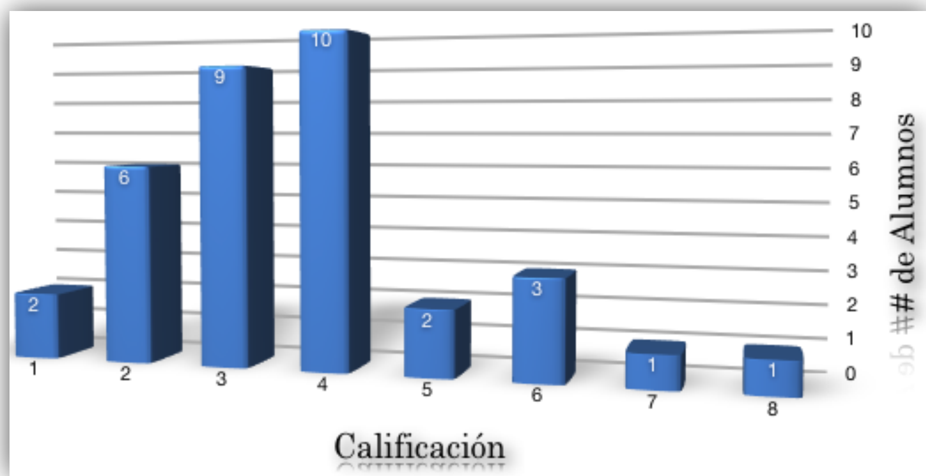
Tabla 1. Calificaciones del *pre test*

El promedio general en el *pre test* fue de 3.62.



Gráfica 11. Calificaciones del *pre test*

Redondeando las calificaciones, la distribución de alumnos según su calificación queda representada en la gráfica 12.



Gráfica 12. Distribución de alumnos en el *pre test* de acuerdo a su calificación

Se observa que la mayor parte de los alumnos tiene una calificación reprobatoria, entre 2 y 4.

Sólo 5 alumnos aprobaron el *pre test*, y de ellos la calificación más alta fue 8.

El rango de tiempos en que los alumnos contestaron el *pre test* es desde los 17 hasta los 33 minutos.

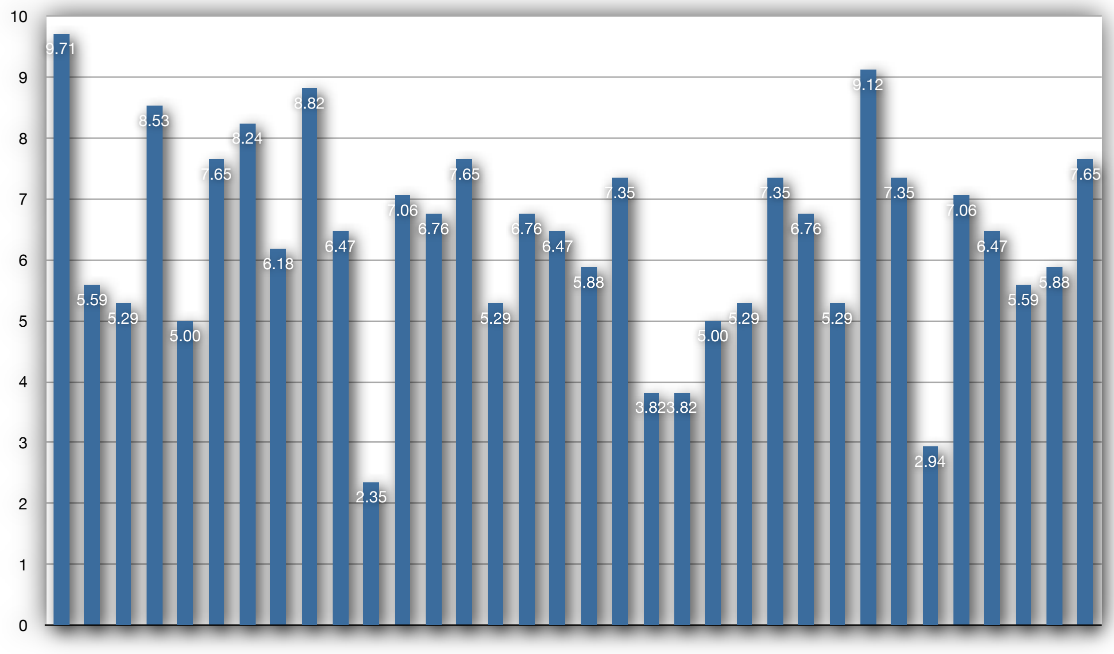
Las calificaciones obtenidas por los alumnos en el *post test* se presentan en la tabla 2, en el mismo orden que en la tabla 1, y se esquematizan del mismo modo en la gráfica 13.

Alumno	Calificación
1	9.71
2	5.59
3	5.29
4	8.53
5	5
6	7.65
7	8.24
8	6.18
9	8.82
10	6.47
11	2.35
12	7.06
13	6.76
14	7.65
15	5.29
16	6.76
17	6.47
18	5.88
19	7.35
20	3.82
21	3.82
22	5
23	5.29
24	7.35

25	6.76
26	5.29
27	9.12
28	7.35
29	2.94
30	7.06
31	6.47
32	5.59
33	5.88
34	7.65

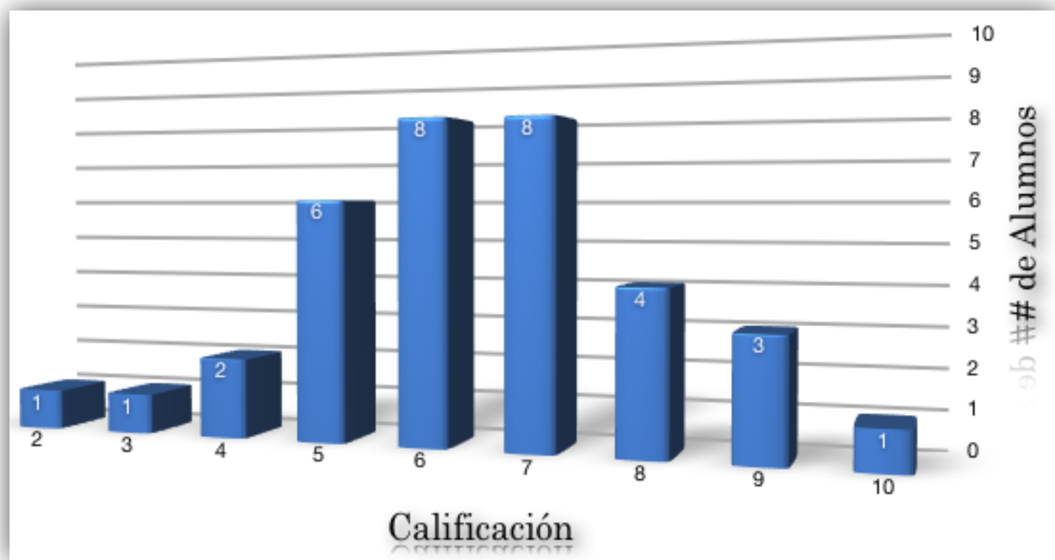
Tabla 2. Calificaciones del *post test*

El promedio general en el *post test* fue de 6.62, se duplico comparado con el del *pre test*.



Gráfica 13. Calificaciones del *post test*

Al redondear las calificaciones, la distribución de alumnos según su calificación queda representada en la gráfica 14.



Gráfica 14. Distribución de alumnos en el *post test* de acuerdo a su calificación

Se puede ver de la gráfica 14 que la mayor parte de los alumnos tiene una calificación aprobatoria, sólo 10 de ellos tienen calificación reprobatoria.

La mayoría de los alumnos acreditaron el *post test*, con un rango de calificaciones desde 6 hasta 10. La mayor parte está entre 6 y 8. Sólo un alumno obtuvo 10 de calificación.

El rango de tiempos en que los alumnos contestaron el *post test* es desde 11 minutos hasta una hora.

En la tabla 3 se expresan las calificaciones redondeadas de ambos test y las diferencias de las calificaciones del segundo con el primero.

Alumno	Calificación *pre test*	Calificación *post test*	Diferencia de calificación
1	3	10	7
2	4	6	2
3	5	5	0
4	6	9	3

5	4	5	1
6	3	8	5
7	2	8	6
8	1	6	5
9	3	9	6
10	3	6	3
11	4	2	-2
12	4	7	3
13	6	7	1
14	7	8	1
15	2	5	3
16	8	7	-1
17	2	6	4
18	3	6	3
19	4	7	3
20	4	4	0
21	2	4	2
22	2	5	3
23	4	5	1
24	1	7	6
25	4	7	3
26	4	5	1
27	3	9	6
28	3	7	4
29	2	3	1
30	3	7	4
31	6	6	0
32	5	6	1
33	4	6	2
34	3	8	5

Tabla 3. Diferencias de los *test*

De acuerdo a las diferencias, se observa que la mayoría de los alumnos mejoró su calificación. Sin embargo, también hubo quienes permanecieron igual y quienes bajaron.

En la tabla 4 se condensa la información de la cantidad de alumnos de acuerdo a la diferencia de sus calificaciones.

	Mejoraron	Permanecieron	Bajaron
Alumnos	29	3	2

Tabla 4. Conteo de alumnos según la diferencia de calificación

Es importante mencionar los casos de algunos alumnos específicos, a varios de ellos corresponden las participaciones que presenté de las definiciones que se realizaron en el glosario.

La alumna que en la participación del glosario realizó una definición completamente incorrecta, aquella que mostro una completa incomprensión del concepto de derivada. Ella es la correspondiente al siguiente renglón de la tabla de diferencias:

Alumno	Calificación *pre test*	Calificación *post test*	Diferencia de calificación
15	2	5	3

Tabla 5. Calificaciones de los test de la alumna que definió incorrectamente la derivada

En ambos casos reprobó los test, pero mejoró su calificación.

El alumno que en el glosario hizo varios comentarios a las definiciones de sus compañeros, aquél que hizo una definición muy elaborada que él mismo comentó para aclarar. Él es el correspondiente al siguiente renglón de la tabla de diferencias:

Alumno	Calificación *pre test*	Calificación *post test*	Diferencia de calificación
6	3	8	5

Tabla 6. Calificaciones del alumno que hizo comentarios a las definiciones de sus compañeros

Él reprobó el *pre test* pero mejoró y acreditó el *post test*.

La alumna con la que ejemplificamos la integración del conocimiento previo con el nuevo, aquélla que incluso hizo un comentario al parecer de gusto sobre su propia participación. Ella es la correspondiente al siguiente renglón de la tabla de diferencias:

Alumno	Calificación *pre test*	Calificación *post test*	Diferencia de calificación
32	5	6	1

Tabla 7. Calificaciones de la alumna que relacionó conocimientos previos y mostro motivación

También reprobó el *pre test*, e igualmente mejoró y acreditó el *post test*. De hecho ella salió mejor en el *pre test* comparada con los otros dos alumnos que estamos mencionando. Pero fue la que tuvo menor diferencia en sus calificaciones.

Por último, el alumno que en el glosario hizo una buena definición intuitiva de límite, aquél que lo hizo usando el registro numérico. Él es el correspondiente al siguiente renglón de la tabla de diferencias:

Alumno	Calificación *pre test*	Calificación *post test*	Diferencia de calificación
16	8	7	-1

Tabla 8. Calificaciones del alumno que definió el concepto de límite de forma numérica

Él es uno de los alumnos que bajo. Aunque en ambos casos aprobó los test.

En este punto se debe aclarar que las participaciones del foro que seleccioné como ejemplos para presentarlos, fueron escogidas por su representatividad, sólo se consideró la participación en sí, nunca al alumno como tal.

Por ello resulta interesante que de estos alumnos que hicieron participaciones representativas al hacer alguna definición, algunos también sean representantes de las diferentes situaciones que se muestran al analizar las calificaciones de los test.

Ya se mencionó que los test fueron validados por expertos, sin embargo también se realizó una validación estadística de las preguntas en ellos.

Las 36 preguntas de las que constan en total ambos test, se aplicaron en un solo cuestionario a 60 alumnos que no pertenecen al grupo con el que se trabajó. Se aplicaron en la modalidad en línea. Si se desea consultar el cuestionario como fue aplicado se puede hacer en el Anexo C

La fiabilidad que arrojaron los resultados utilizando el coeficiente de alfa de Cronbach mediante el programa estadístico SPSS 19 fue la siguiente:

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach basada en los elementos tipificados	N de elementos
,907	,924	36

Tabla 9. Fiabilidad de las preguntas de los test

De acuerdo con los resultados, como se obtiene un valor mayor a 0.8, se puede garantizar la fiabilidad de la escala utilizada.

En la tabla 10, se condensa la información de los test por pregunta. Se presenta el número de alumnos que respondió correctamente cada pregunta y el porcentaje que a esto corresponde.

Pregunta	*pre test*		*post test*	
	Alumnos	Porcentaje %	Alumnos	Porcentaje %
1	9	26.47	16	47.06
2	12	35.29	28	82.35

3	14	41.18	19	55.88
4	18	52.94	26	76.47
5	16	47.06	27	79.41
6	16	47.06	11	32.35
7	9	26.47	24	70.59
8	4	11.76	29	85.29
9	24	70.59	16	47.06
10	11	32.35	23	67.65
11	3	8.82	25	73.53
12	15	44.12	29	85.29
13	21	61.76	19	55.88
14	15	44.12	26	76.47
15	21	61.76	31	91.18
16	17	50.00	19	55.88
17	8	23.53	19	55.88
18	21	61.76	15	44.12
19	3	8.82	20	58.82
20	8	23.53	25	73.53

Tabla 10. Porcentajes de alumnos que responden correctamente cada pregunta de los test

Las preguntas tanto del *pre test* como del *post test* se clasificaron de acuerdo a la taxonomía de Bloom en: *conocimiento*, *comprensión*, *aplicación*, *análisis*.

En la tabla 11 se indica la clasificación de cada una de las preguntas de ambos test.

	Conocimiento	***Comprensión***	***Aplicación***	***Análisis***
pre test	1,5,16	7, 9,12,14,19,20	2,4,8,13,15	3,6,10,11,17,18
post test	7,15,20	2, 3, 9,10,11,18	1,4,8,12,17	5,6,13,14,16,19

Tabla 11. Clasificación de las preguntas de los *test*

Al realizar un cruce de la información presentada en las tablas 5 y 6 podemos observar para cada categoría la cantidad de respuestas correctas en cada uno de los test. Lo que se presenta en la tabla 12.

	Conocimiento	*Comprensión*	*Aplicación*	*Análisis*
pre test	42	74	76	73
post test	80	126	119	122

Tabla 12. Respuestas correctas por categoría

Se observa que para el *post test*, en todas las categorías hubo considerables aumentos en la cantidad de respuestas correctas comparadas con las del *pre test*.

4.2.3 Entrevistas y Cuestionario de Opinión. Análisis Cualitativo

Para continuar con el análisis de resultados, se entrevistó a los dos alumnos que bajaron su calificación, dos de los que se mantuvieron y dos de los que mejoraron, de éstos últimos los dos con las diferencias más grande.

También se entrevistó a un alumno extra, que no fue tan representativo en calificaciones o participaciones en el foro, pero en el trabajo en clase fue notoria su comprensión.

En total se entrevistaron a 7 alumnos.

Las entrevistas fueron video grabadas. En el Anexo D están las preguntas que se realizaron.

Las entrevistas pretenden rescatar percepciones de los alumnos sobre los *test*, así como evaluar para los casos seleccionados la comprensión del tema y la transición entre diferentes registros de representación.

De las respuestas a las entrevistas obtenemos los siguientes resultados:

- De la pregunta 1:

Los alumnos entrevistados, en general consideran que el *pre test*, y el *post test* presentan la misma dificultad. Hay que mencionar que uno de los alumnos que bajo en su calificación del *post test* comparada con el *pre test* mencionó que el tener más conocimientos lo confundió. Es decir, que haber estudiado el tema lo confundió comparado con antes del trabajo realizado.

- De la pregunta 2:

A todos los entrevistados les parece que las preguntas con gráficas son más fáciles que el resto, porque se pueden apoyar en la gráfica para responder. Y en su mayoría les parecen más difíciles las que tienen expresiones algebraicas, seguidas de las que sólo presentan texto. Principalmente estas últimas a dos de ellos.

- De la pregunta 3:

5 de los 7 alumnos identifican claramente una derivada en su expresión algebraica. 1 lo duda. 4 de ellos además identifican una relación geométrica con la recta tangente. Una alumna, de las que se mantuvo en su calificación de los test, no logra identificar la derivada algebraicamente, dice que no entendió límites.

El alumno que se entrevisto de extra, identifica la expresión algebraica, el sentido del valor numérico y su representación geométrica. Pasa a través de tres registros.

- De la pregunta 4:

4 de los 7 alumnos analizan correctamente la situación geométrica con la interpretación geométrica del concepto de derivada para dar una respuesta correcta. 3 de ellos mencionan que no pueden saber precisamente porque no tiene la función o valores específicos, que su respuesta está limitada a sólo un análisis visual de la función.

2 de los alumnos, uno de los que mejoró su calificación y uno de los que la mantuvo no pueden realizar el análisis. El que mejoró dice que sólo puede valer cero la derivada en máximos o mínimos y en la situación presentada no hay tales.

- De la pregunta 5:

2 lo plantean por medio de la representación algebraica de la derivada. 2 interpretan la derivada geométricamente y la usan para dar la ecuación de la recta tangente. 1 sabe que es una derivada pero no logra el planteamiento completo. 1 no puede hacer ningún planteamiento, este último es uno de los alumnos que mantuvo su calificación.

- De la pregunta 6:

Sólo uno de los alumnos que mejoró su calificación y el alumno que se entrevisto de extra logran hacer el análisis correcto. El otro alumno que mejoró entiende que hay que buscar cambios de signo pero no logra aclarar su idea. Los otros cuatro responden que el máximo está en el punto dónde la gráfica que se presenta tiene un mínimo. No logran transitar correctamente entre las características de la gráfica de la función derivada con las de la gráfica de la función.

Para conocer las percepciones del grupo en general sobre los diferentes aspectos del trabajo realizado con ellos, se aplicó un cuestionario de opinión después de realizar el *post test*. Este cuestionario también se aplicó por medio de la plataforma.

El cuestionario de opinión consta de 29 preguntas son tales como:

¿El diseño de los materiales utilizados por el profesor ayudó a tu comprensión del tema?

La escala de respuesta en todas las preguntas fue de tipo Likert:

- Nunca
- A veces
- Frecuentemente
- Siempre

Nuevamente, se analizó estadísticamente la fiabilidad del cuestionario de opinión. Los datos de aplicarlo a los 34 alumnos sobre los que se realizaron los análisis anteriores.

La fiabilidad que arrojaron los resultados utilizando el coeficiente de alfa de Cronbach mediante el programa estadístico SPSS 19 fue la siguiente:

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach basada en los elementos tipificados	N de elementos
,887	,894	29

Tabla 13. Fiabilidad del cuestionario de opinión

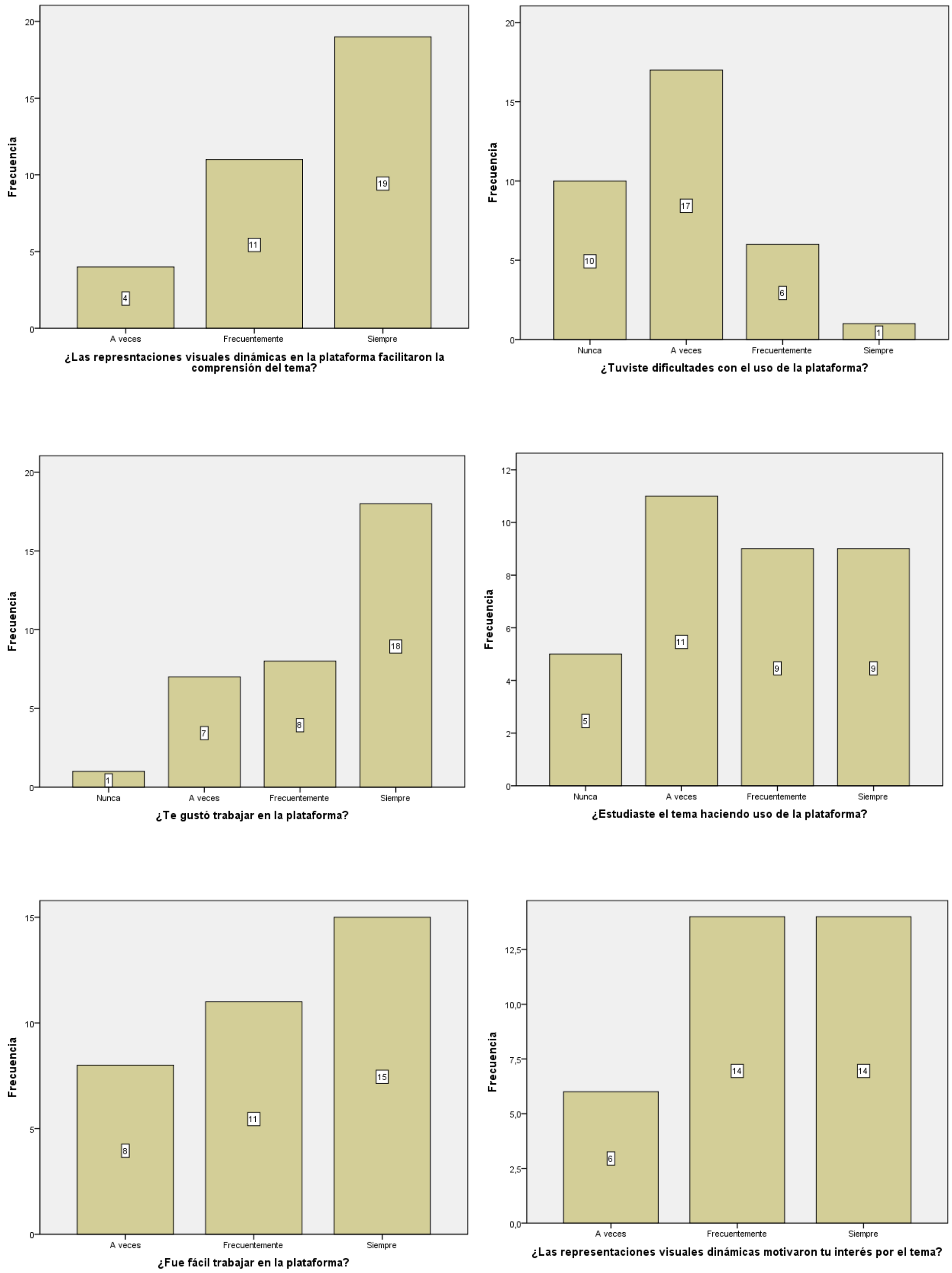
Nuevamente, de acuerdo con los resultados, como el valor obtenido es mayor que 0.8 se puede garantizar la fiabilidad de la escala utilizada.

El cuestionario de opinión puede ser consultado en el Anexo C.

De acuerdo a las respuestas de los alumnos en el cuestionario de opinión, en general el uso de la visualización dinámica como herramienta didáctica sí favorece la comprensión del tema.

Del mismo modo, en su mayoría, a los alumnos del grupo les gustó el trabajo con la visualización dinámica, y pocos de ellos tuvieron alguna dificultad al trabajar en la plataforma. De hecho salvo 5 alumnos del grupo, el resto dice haber usado la plataforma para estudiar el tema a raíz del trabajo realizado con el grupo.

Las siguientes gráficas muestran la frecuencia de respuesta de los alumnos a algunas de las preguntas del cuestionario de opinión.

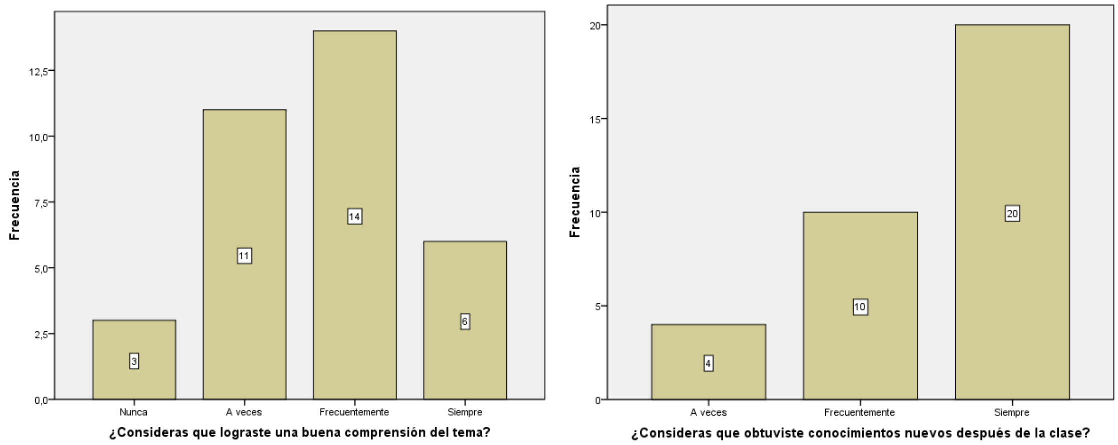


Gráfica 15. Percepción de los alumnos sobre la visualización dinámica

Un aspecto importante a resaltar es que en general los alumnos consideran:

- Que lograron una buena comprensión del tema.
- Que adquirieron conocimientos nuevos.

En la gráfica 16 se observa que sólo 3 alumnos consideran no haber logrado una buena comprensión del tema y que ningún alumno considera que no obtuvo conocimientos nuevos.



Gráfica 16. Percepción de los alumnos sobre su comprensión del tema

Aunque hay alumnos que no consideran tener una buena comprensión del tema, esos mismos alumnos también consideran que sí obtuvieron nuevos conocimientos.

Por los datos arrojados en los resultados de los *test* y las participaciones del glosario, se sigue que en general los alumnos del grupo aprendieron diferentes aspectos del concepto de derivada y muchos de ellos logran la transición entre al menos dos registros. No pocos lograron un buen análisis geométrico, y algunos incluso comprendieron sutilezas del concepto y las entienden en diferentes representaciones. En su mayoría lograron aprendizaje.

Incluso los alumnos que no lograron la comprensión del concepto, también lograron un cierto nivel de conocimiento del tema. Esto se refuerza en la propia percepción de los alumnos pues la totalidad considera haber adquirido nuevos conocimientos.

Conclusiones

Del trabajo desarrollado se generó una propuesta de enseñanza de las matemáticas, a saber, el *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*. Basado en enfatizar diferentes registros de representación de los objetos o conceptos matemáticos a través de la visualización dinámica como herramienta didáctica, buscando propiciar aprendizajes significativos por medio de los conocimientos previos del alumno y la generación de desequilibrios cognitivos en él.

Si bien la propuesta del *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas* recoge conceptos de diferentes teorías, la aportación resulta significativa por la estructuración de los diferentes elementos que en ella se incluyen.

Un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas* no lo es sólo por trabajar registros de representación y visualización dinámica, por ejemplo. Una parte fundamental de él es la estructuración que se hace del tema que se quiere tratar. Por lo que se vuelve necesario no sólo una amplia comprensión del tema, sino también amplios conocimientos matemáticos.

Como ejemplo de la estructuración de un tema para un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*, se presentó el desarrollo para el tema del concepto de la derivada. Iniciamos con conceptos geométricos para desarrollar conceptos de Cálculo, además de buscar propiciar el *desequilibrio cognitivo* a partir del mismo contexto geométrico y conocimientos básicos en esta área.

Indudablemente se debe de tener claro a dónde se quiere llegar y para qué. A partir de ahí ver lo que se tiene – conocimientos previos – para de ellos buscar cuál es el mejor punto para empezar y la mejor forma de interrelacionar los elementos, objetos, conceptos, y actividades para lograr una mejor comprensión de los conceptos, del nuevo conocimiento.

Si bien es cierto que en nuestro desarrollo el *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas* se presentó para lograr un concepto, un aprendizaje conceptual. Creo que se puede aplicar a diferentes tipos de aprendizaje matemático, que es generalizable. Un aspecto que queda abierto para seguir desarrollando esta propuesta de enseñanza, lo que hare en trabajos posteriores.

Además de seguir desarrollando la propuesta del *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*, generalizándola a diferentes tipos de aprendizajes matemáticos. También es necesario seguir investigando y desarrollando sobre el tema presentado en este trabajo, el concepto de derivada. Investigar en los temas siguientes del Cálculo Diferencial, cuáles son las ventajas y alcances de enseñar el concepto con el enfoque presentado, si es que las hay. Por ejemplo: si se logra una mayor comprensión del concepto de la derivada mediante un *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas* ¿esto repercute en una mayor comprensión de los procesos de derivación, así como de sus aplicaciones en la resolución de problemas, como por ejemplo máximos y mínimos?

Esperaríamos que la respuesta fuera sí: una mejor comprensión del concepto implica una mayor comprensión procedimental y una mejor aplicación del mismo.

Seguir con estos estudios, pueden dar pie a generar una teoría de enseñanza de las matemáticas, ya no sólo una propuesta.

Con respecto a los resultados obtenidos de la aplicación que se llevó a cabo para el tema del concepto de derivada con los alumnos de un grupo de Cálculo I del CCH Azcapotzalco. Los datos cuantitativos muestras que se logró un aprendizaje del concepto en la mayoría de los alumnos del grupo, y que muchos de ellos logran identificarlo en al menos dos representaciones – sobresaliendo la geométrica – así como aplicarlo en un análisis geométrico de funciones, incluso discontinuas.

Tiene relevancia que la mayoría de los alumnos lograran identificar la gráfica de la función derivada a partir del análisis geométrico de la gráfica de la función, sobre todo tratándose de funciones discontinuas y no suaves – con picos –. En casos sencillos algunos también lograron a partir de la gráfica de la función derivada deducir el tipo de gráfica de la función de la que es derivada.

Realizar el estudio incluyendo funciones discontinuas, de acuerdo a los expertos que validaron las preguntas de los *test*, no es un hecho común en los cursos de Cálculo en el Colegio. Sin embargo, en los resultados vemos que es algo alcanzable. Esperamos continuar con la investigación para responder si además es deseable y benéfico.

De acuerdo a nuestro desarrollo teórico el trabajo con funciones discontinuas fomenta mejor la comprensión del concepto, porque cumple la parte de mostrar situaciones en las que el concepto no se cumple, da la posibilidad de realizar un análisis más completo de las características del concepto.

Cabe aclarar que el concepto de continuidad como tal, nunca fue tratado en el desarrollo del tema. El trabajo con las funciones discontinuas se limita a un análisis geométrico del concepto de derivada.

Los resultados cualitativos presentados indican no sólo que en muchos alumnos del grupo se logró una comprensión del concepto, sino que incluso algunos de ellos lo comprendieron al grado de analizar sus diferentes elementos significativos e interpretarlos en distintas representaciones del mismo.

También se observa en la mayor parte del grupo aceptación y agrado hacia la forma de trabajo, al uso de la visualización dinámica y a la estructuración del tema. Pero sobre todo, en su totalidad, los alumnos sienten que aprendieron algo nuevo del tema.

Esta última conclusión puede parecer un aspecto insignificante, pero no lo es. Que un alumno sienta que aprendió algo es la mayor motivación para seguir aprendiendo. Y no necesariamente esto siempre se cumple.

Debemos mencionar también que hubo algunos alumnos, pocos, que lograron poca comprensión del concepto y que de hecho no lograron identificarlo en más de un registro. De este hecho podemos obtener dos conclusiones claramente conocidas:

- El trabajo se puede y debe mejorar, no es algo acabado ni completo.
- El desarrollo y la propuesta planteada no arrojan los mismos resultados en todos los casos ni para todos los alumnos.

Estos dos últimos hechos, son constantes en la docencia, en las teorías de enseñanza aprendizaje.

Sobre este último aspecto, también se observó que aunque los alumnos son adolescentes de la era digital, aún así, entre ellos, hay algunos pocos, muy pocos, a los que la tecnología no les es natural, que incluso es tal vez al contrario, son renuentes a ella. Para estos alumnos la propuesta planteada no resulta ser muy atractiva.

Especulo los alcances y el interés que puede generar el trabajo desarrollado, tanto del planteamiento para el desarrollo del tema del concepto de derivada, como de la propuesta del *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*. Ambos temas interesantes para seguir desarrollando y haciendo aportaciones.

En el trabajo presentado se mostró como relacionar elementos teóricos existentes en diferente teorías, conjuntamente con el diseño, uso y aplicación de una herramienta didáctica con recursos tecnológicos, buscando como objetivo un aprendizaje matemático especifico y la forma de aterrizarlo en el trabajo en el aula.

Se bosquejó un proceso general para poder llevar a cabo, bajo esta línea de ideas y conceptos, nuestra tarea docente en la enseñanza de las matemáticas. A este desarrollo se le llamo *proceso de aprendizaje significativo en Matemáticas*.

Bibliografía

[1] Álvarez-Manilla, J. M. (1991). *La esnseñanzar por computadora. Estrategias didácticas básicas.* Perfiles Educativos (51-52), 74-79.

[2] Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (2010). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (Segunda Edición ed.). (M. Sandoval Pineda, Trad.) México, México: Trillas.

[3] Boschma, J. (2008). *Generación Einstein. Más listos, más rápidos y más sociables.* Barcelona, España: Gestión 2000.

[4] Brower, G. H. (1989). *Teorias de aprendizaje.* México: Trillas.

[5] Cisnero, A. C. (2004). *Manual de Estilos de Aprendizajes.* S.E.P. . México.

[6] Colegio de Ciencias y Humanidades. *Programa de Estudio de Cálculo Diferencia e Integral I y II.* México, México.

[7] Colegio de Ciencias y Humanidades. *Programa de Estudio de Matemáticas Semestres I a IV.* México.

[8] Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM. (2005). *Sentido y Orientación del Área de Matemáticas.* México.

[9] Colegio de Ciencias y Humanidades. Dirección General. (2011). *Diágnostico Institucional para la Revisión Curricular.* D.F., México.

[10] Cortés Zavala, J. C. (2011). *Construir gráficas de funciones a partir de graficar los incrementos de las variables para introducir el concepto de función derivada.* Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, (págs. 75-78). Sonora.

[11] Cruz Resendiz, F. (2007). *Una experiencia didáctica con el apoyo de un micro mundo para el estudio de la función cuadrática.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, Matemática Educativa, México.

[12] Dávila Araiza, M. T., Grijalva Monteverde, A., & Bravo Tapia, J. M. (2011). *Construcción del significado geométrico de la derivada a partir de la resolución de problemas de optimización y uso de Geogebra.* Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, (págs. 3-8). Sonora.

[13] Díaz Barriga Arcero, F., & Hérnandez Rojas, G. (2010). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Una interpretación constructivista* (3ª edición ed.). México, México: Mc Graw Hill.

[14] Duval, R. (1988). *Graphiques et equations: I'Articulation de deux registres.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1 , 235-253.

[15] Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (M. V. Restrepo, Trad.) Santiago de Cali, Colombia: Grupo de Educación Matemática.

[16] Gutiérrez, P. Boero (eds) (2006). *Teaching and Learning Geometry with Technology.* Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future (pag. 275–304).

[17] Lozano, A. (2008). *Estilos de Aprendizaje y Enseñanza. Un panorama de la estilística educativa.* México: Trilla.

[18] Márquez Ortega, D., Ramírez Teposteca, F., Romero Acosta, M. I., & Roldan Vázquez, V. (2010). *La importancia de la representación geométricas de las funciones.* Ponencia, FES Cuaututilan, UNAM, Estado de México.

[19] M. A. Mariotti (1997). *Justifying and Proving in Geometry: the mediation of a microworld*. Revised and extended version of the version published in: Hejny M., Novotna J. (eds) Proceedings of the European Conference on Mathematical Education (pag. 21–26). Prague: Prometheus Publishing House.

[20] Montes de Oca, A. (Productor), & Barot, M. (Dirección). (2006). *¿Qué hace hoy un matemático?* [Película]. Instituto de Matemáticas UNAM y Televisión Universitaria UNAM, México.

[21] Monzoy Vásquez, J. A. (2002). *Una situación real como registro de representación en un entorno computacional. Un sustento cognitivo para promover la aprehensión conceptual.* Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, Matemática Educativa, México.

[22] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Edición en Castellano, Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas Thales (pag. 1–123).

[23] Negrete, j. (2002). *Estrategias para el Aprendizaje.* México: Banca y Comercio .

[24] Pantoja Rangel, R., Martínez Sandoval, J. C., & Nesterova, E. (2011). *Diseño instruccional con soporte en videos digitales y WinPlot para el aprendizaje de límites.*, (págs. 16-20). Sonora, México.

[25] Robles Arredondo, M. G. (2011). *Construcción de la función derivada a partir de una visualización dinámica de la linealidad local.*, (págs. 27-32). Sonora, México.

[26] Santos Trigo, M., & Benítez Mojica, D. (2003). *Herramientas tecnológicas en el desarrollo de temas de representación para la resolución de problemas.* Perfiles Educativos *, 25* (100), 23-41.

[27] Solis de los Reyes, E. E. (2010). *Uso de Software especializado en el desarrollo de los cursos de bachillerato a distancia.* 1er Colóquio Nacional de Educación Media Superior a Distancia. México.

[28] Solís de los Reyes, E. E., & Canut Diaz Velarde, M. E. (2011). *Visualización en Progrmación Lineal.* Segundo Coloquio: "Ambientes Virtuales y Objetos de Aprendizaje en la Educación Superior: Experiencias y Reflexiones". México.

[29] Tellechea Armenta, E. (2011). *Visualización dinámica en la enseñanza de la derivada.* Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, (págs. 33-38). Sonora.

[30] Valles P., R. E. (2010). *Nuevos actores en los procesos educativos a través de la tecnología y comunicación en la educación matemática.* Ponencia, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.

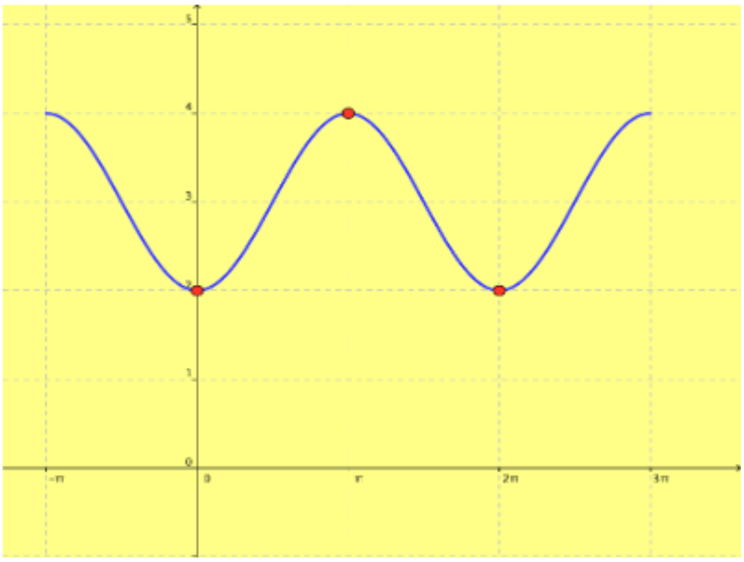
Anexo A

Pre test

1. ¿Cuál es la definición de derivada de una función f?

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\lim_{x\to a} f(x)$ $f'(x)$

2. Dada la siguiente gráfica de la función f. ¿Cuál es el valor de la derivada en los puntos marcados?

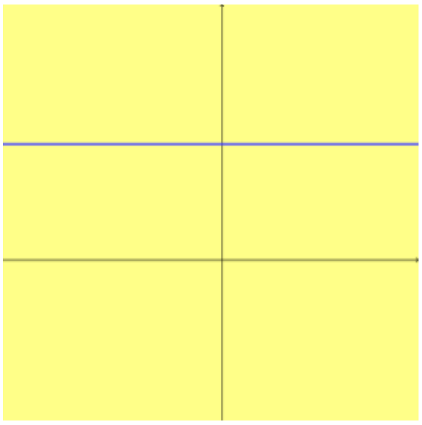


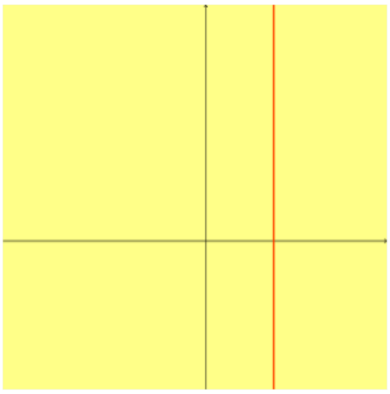
La derivada en los puntos vale 0
La derivada en los puntos vale 2, 4 y 2
La derivada en los puntos vale π
La derivada en los puntos vale 0, π y 2π

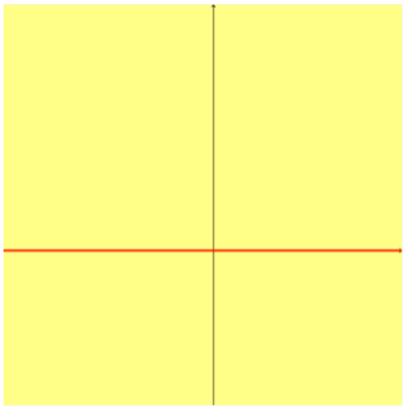
3. Si la derivada de una función f en un punto a es negativa. ¿Qué información se obtiene de f en el punto a?

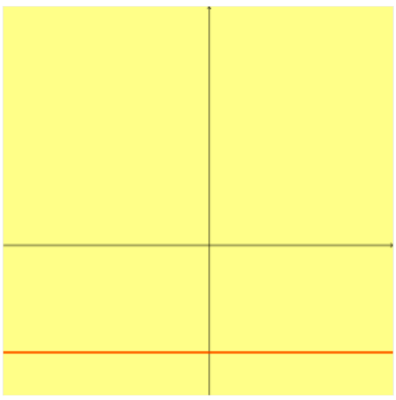
Que la función f no crece en el punto a
Que la función f no decrece alrededor del punto a
Que la función f es cero en el punto a
Que la función f es negativa en el punto a

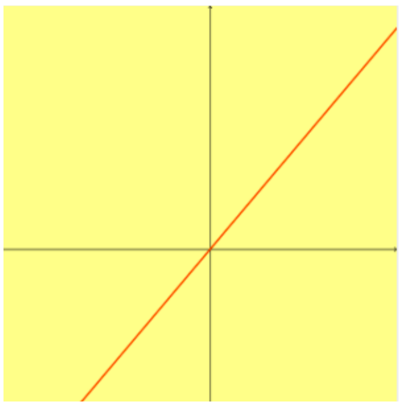
4. Dada la siguiente gráfica de la función f. Selecciona la gráfica que corresponde a la gráfica de f'.









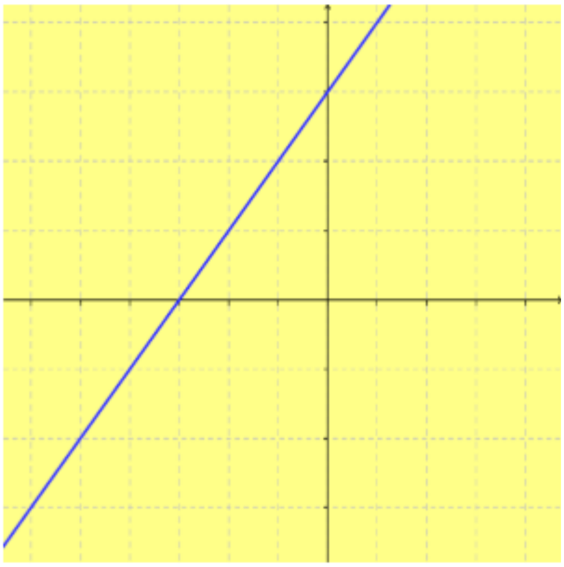


5. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto?

La derivada es la recta tangente a la curva en el punto
La derivada es pendiente de la recta tangente a la curva en el punto
La derivada es la pendiente de la función en el punto

La derivada es el valor de la recta tangente en el punto

6. Si la gráfica de una función $f'(x)$ es la siguiente. ¿La función f tiene un máximo o un mínimo?



Tiene un mínimo | Tiene un máximo

7. Si el valor de la derivada de una función f en $x = -6$ es 5. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la función en $x = -6$?

$-\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 5

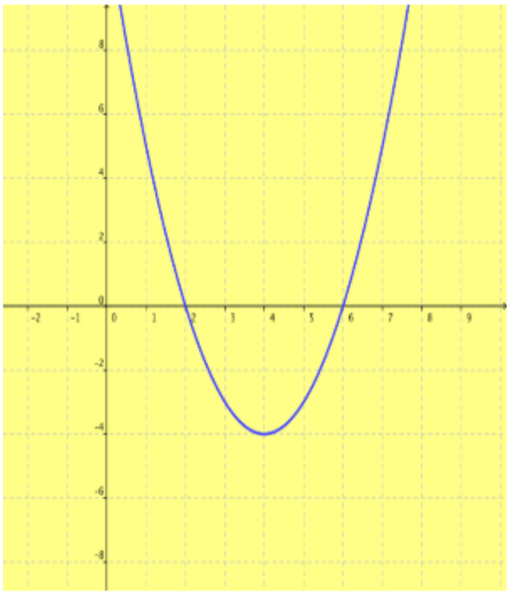
8. ¿Qué características tienen los puntos de una función f, dónde la derivada vale cero?

Son puntos de inflexión, o donde la función alcanza un máximo, o un mínimo.
Son puntos donde la función toca al eje X.
Son puntos donde la función es positiva, o negativa, o cero.
Son puntos donde la función crece, o decrece, o se mantiene constante.

9. Si dada un función f y un punto a tal que $f(a)$ es negativo, entonces el siguiente $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ también es negativo.

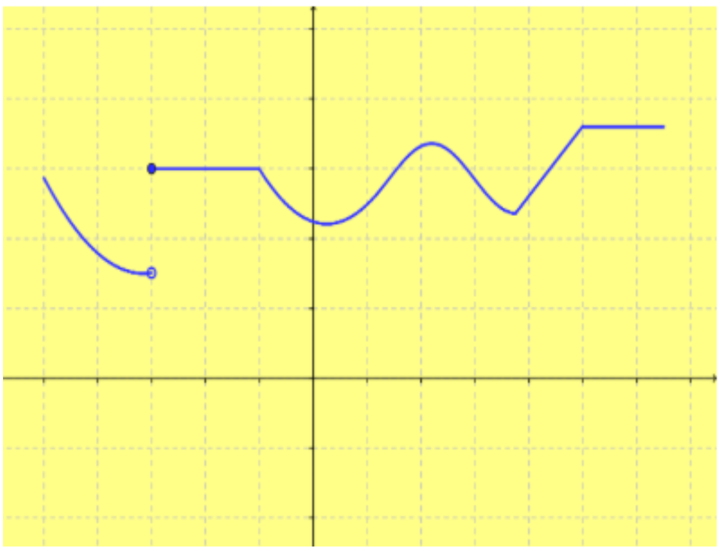
Verdadero | Falso

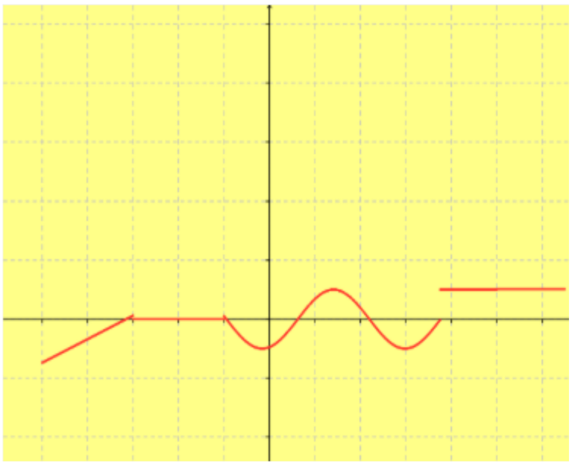
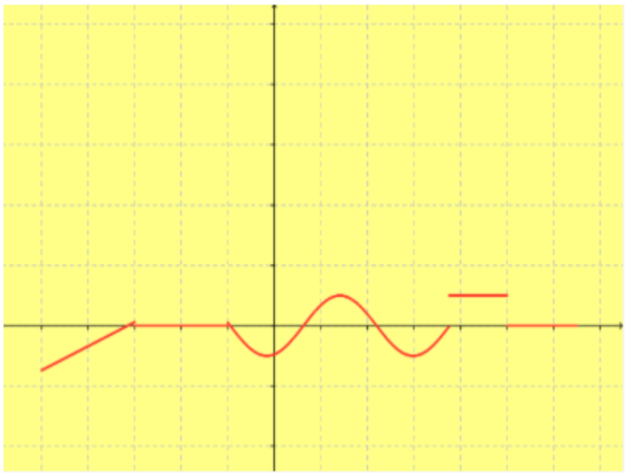
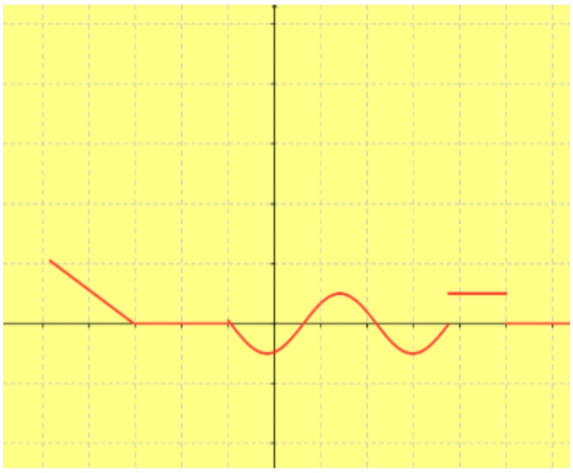
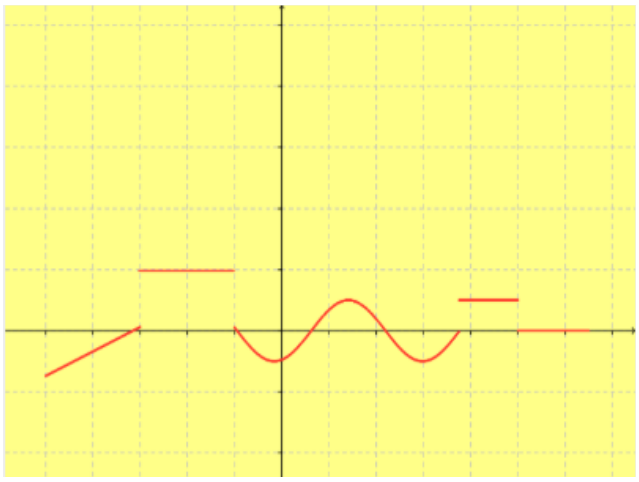
10. La siguiente gráfica representa la derivada f' de una función. Indica los intervalos dónde la función f es creciente y dónde es decreciente.



La función f es creciente en $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$ y decreciente en $(2,6)$.
La función f es creciente en $(4, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 4)$.
La función f es creciente en $(6, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 2)$.
La función f es creciente en $(2,6)$ y decreciente en $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$.

11. Dada la siguiente gráfica de una función, selecciona la gráfica de la función derivada.

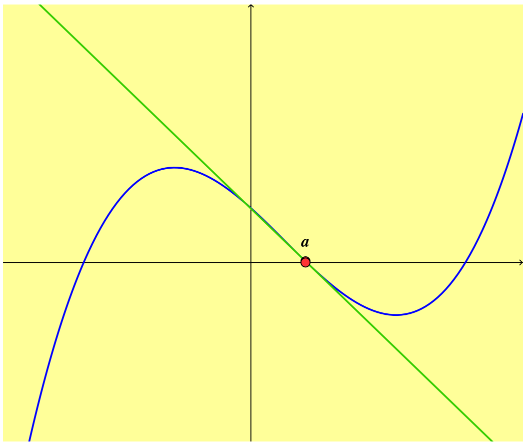


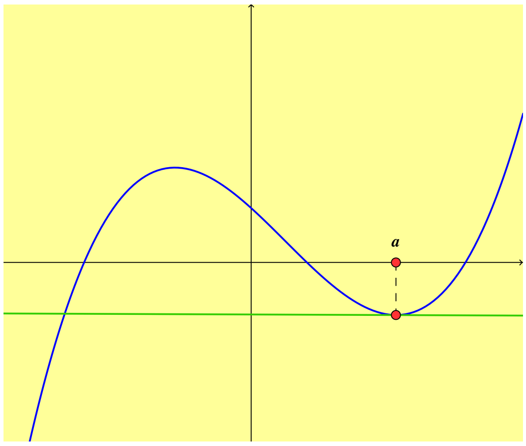





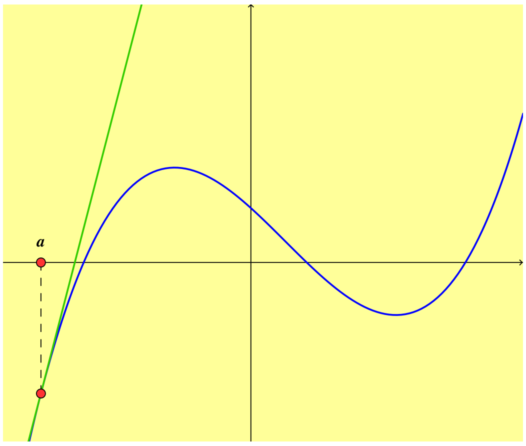
12. ¿Qué indica el valor del siguiente $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 5$?

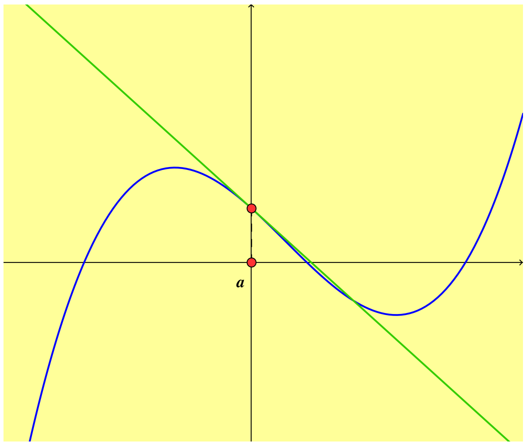
    Que la derivada de la función f en $x = 2$, es 5.
    Que la función f en $x = 2$, es 5.
    Que la función f tiene pendiente 5 en $x = 2$.
    Que la derivada y la función f en $x = 2$, valen 5.

13. Si la derivada de una función f es un punto a es cero. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa gráficamente esta situación?









14. Si el valor de la derivada de una función f en $x = \frac{1}{2}$ es $\sqrt{2}$. ¿Cuál es el valor del siguiente $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}}$?

∞ $\qquad$ $\sqrt{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ $\qquad$ 0

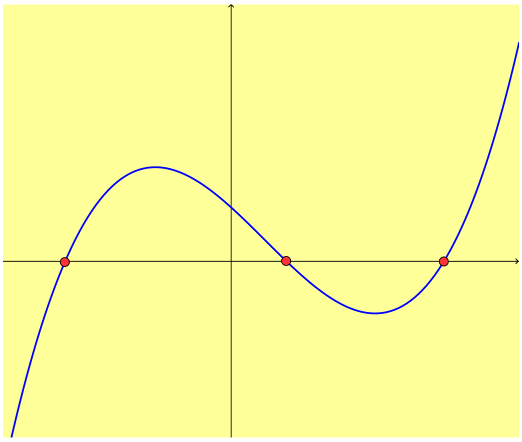
15. Si la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $(a, f(a))$ es horizontal. ¿Cuál es el valor de la derivada de la función en a?

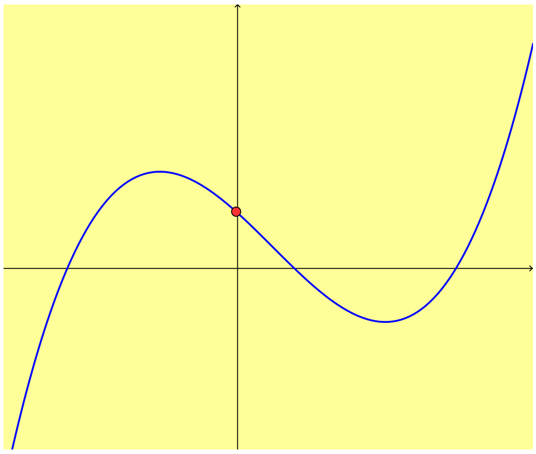
$f(a)$ $\qquad$ positivo $\qquad$ negativo $\qquad$ 0

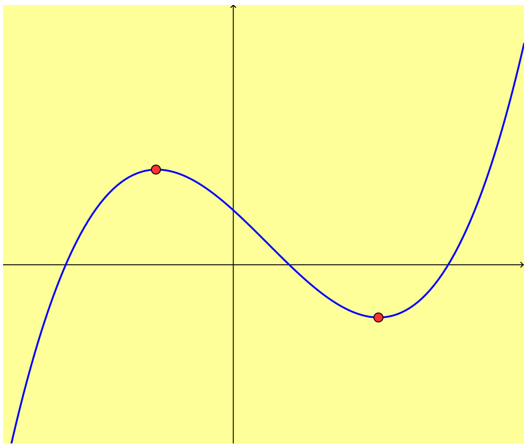
16. Dada la gráfica de una función f y un punto a en su dominio. ¿Cuál es la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$?

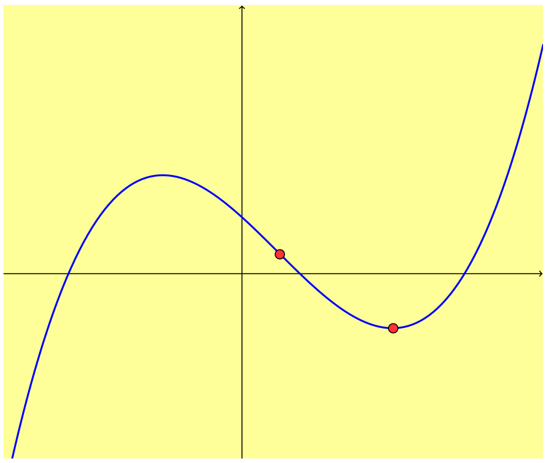
    La recta que pasa por $(a, f(a))$.
    La recta que tiene pendiente $f'(a)$.
    La recta que pasa por a y tiene pendiente $f'(a)$.
    La recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$.

17. De las siguientes gráficas de la función f, selecciona aquella que indica los puntos dónde la derivada de la función vale cero.









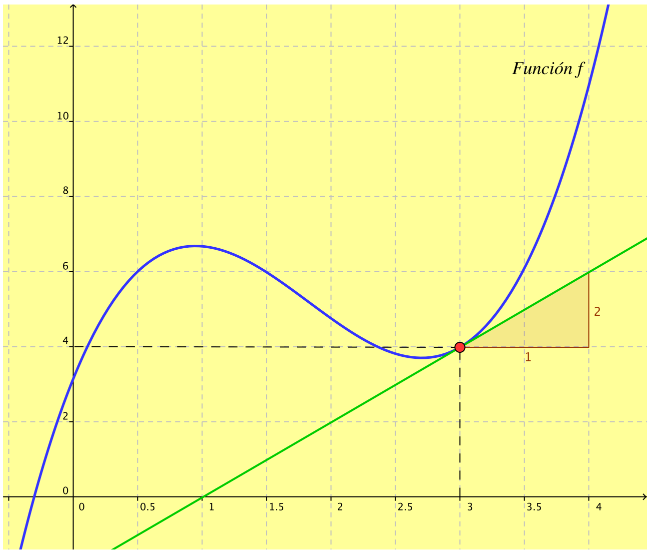
18. Si la gráfica de una función f' es una constante. ¿Cómo es la gráfica de la función f?

La gráfica de la función f es el eje X.
La gráfica de la función f es una línea recta.
La gráfica de la función f es una recta vertical.
La gráfica de la función f es una recta horizontal.

19. ¿Qué significado tiene el que el siguiente límite no exista? $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Que la función f no tiene recta tangente en el punto $(a, (f(a))$.
Que la función f no tiene límite en a.
Que la gráfica de la función f se corta en el punto $(a, (f(a))$.
Que la función f no está definida en a

20. Dada la siguiente gráfica de la función f. ¿Cuál es el valor de la derivada de f es $x = 3$?



2 6 4 1

Anexo B

Post test

1. Si la gráfica de una función f es una recta. ¿Cómo es la gráfica de la función $f´$?

   La gráfica de la función $f´$ es una recta vertical.
   La gráfica de la función $f´$ es la misma recta.
   La gráfica de la función $f´$ es un punto.
   La gráfica de la función $f´$ es una constante.

2. Si no existe la recta tangente a la gráfica de la función f en $(a, f(a))$. ¿Qué implica esto sobre el siguiente límite?

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

   Que el límite es ∞.
   Que el límite es no existe.
   Que el límite es cero.
   Que el límite existe.

3. Si el siguiente límite existe, ¿qué indica?

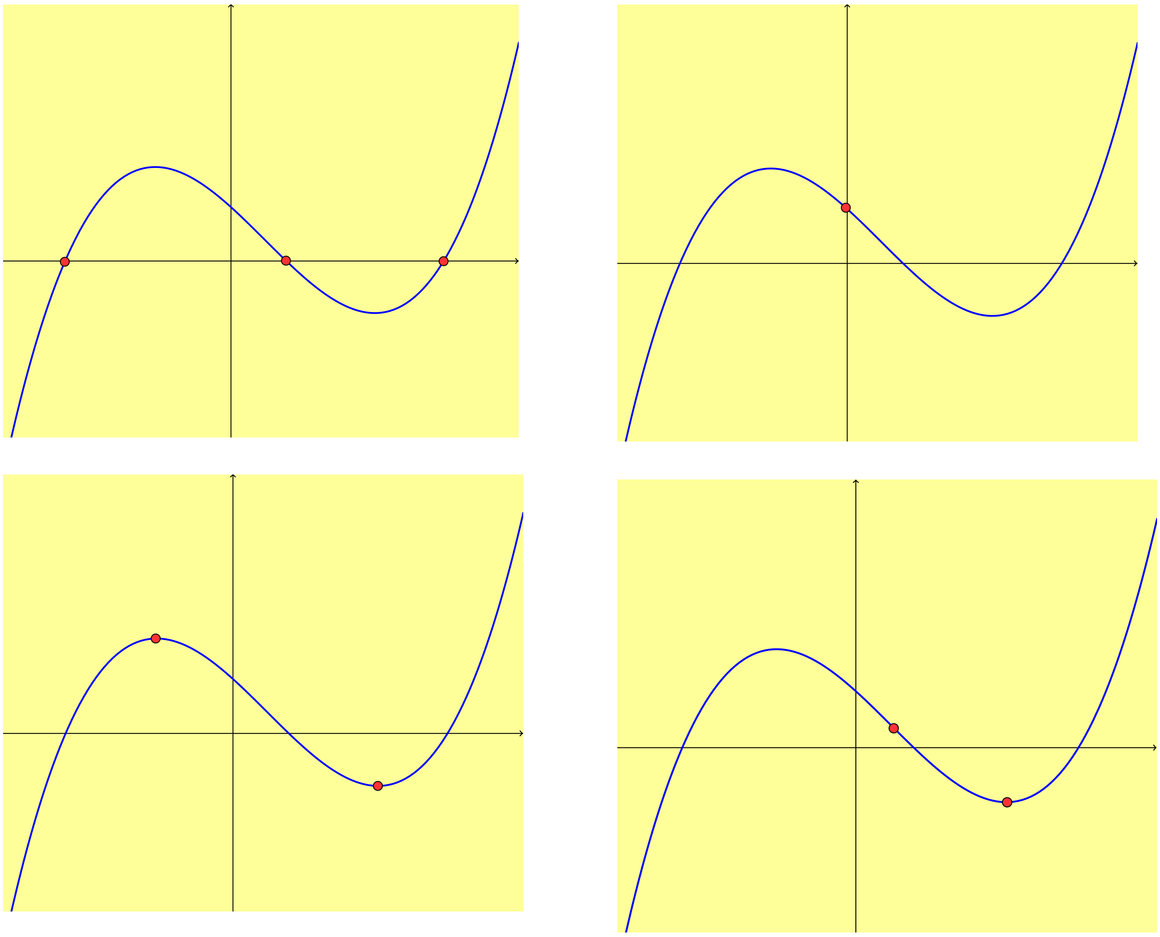
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$$

   Que la derivada de la función f en $x = 6$ existe.
   Que la función f no está definida en $x = 6$.
   Que la función f en $x = 6$ no tiene derivada.
   Que la derivada y la función f valen lo mismo en $x = 6$.

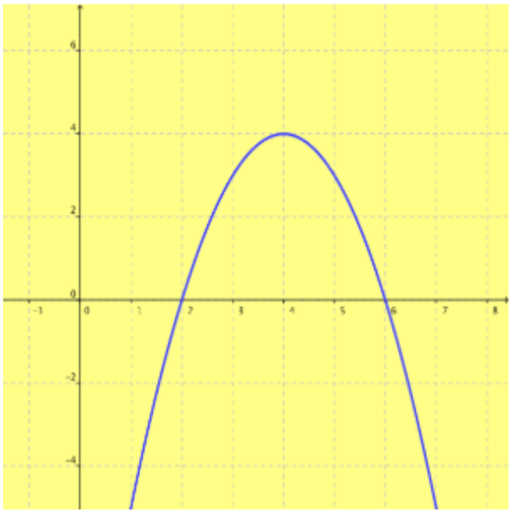
4. Si la derivada de una función f en un punta a es cero. ¿Cómo es la recta tangente a la curva en $(a, f(a))$?

   Es una recta vertical.
   Es una recta con pendiente positiva.
   Es una recta con pendiente negativa.
   Es una recta horizontal.

5. De las siguientes gráficas de la función f, selecciona aquella que indica los puntos dónde la derivada de la función vale cero.



6. La siguiente gráfica representa la derivada f' de una función. Indica los intervalos dónde la función f es creciente y dónde es decreciente.

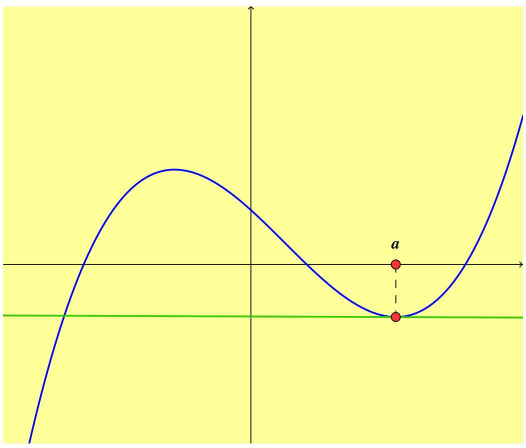


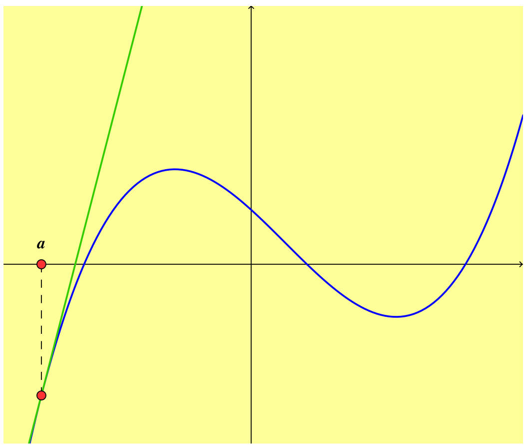
La función f es creciente en $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$ y decreciente en $(2,6)$.
La función f es creciente en $(2,6)$ y decreciente en $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$.
La función f es creciente en $(4, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 4)$.
La función f es creciente en $(6, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 2)$.

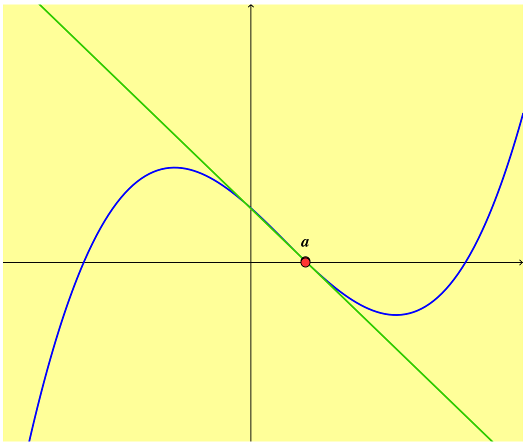
7. Dada la gráfica de una función f en un punto a en su dominio. ¿Cuál es la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$?

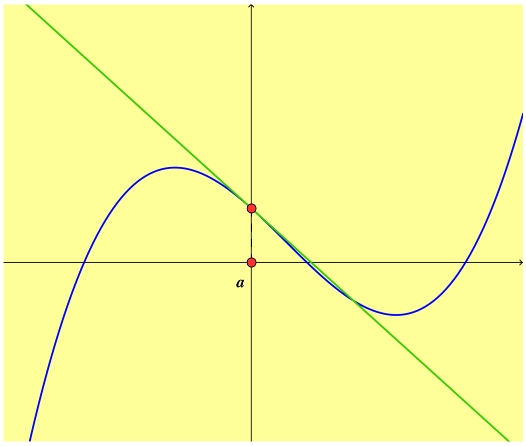
La recta que tiene pendiente $f'(a)$.
La recta que pasa por $(a, f(a))$.
La recta que pasa por a y tiene pendiente $f'(a)$.
La recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$.

8. Si la derivada de una función f es un punto a es cero. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa gráficamente esta situación?

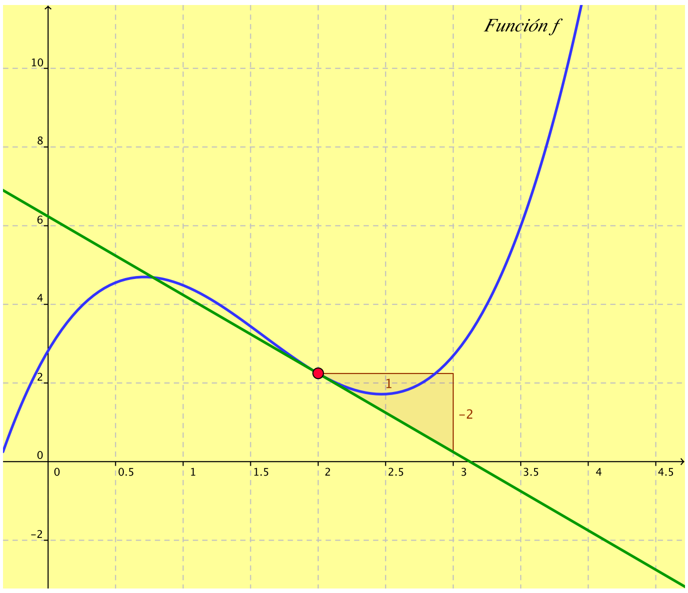








9. Dada la siguiente gráfica de la función f. ¿Cuál es el valor de la derivada de f en $x = 2$?



2.1   -2   2   1

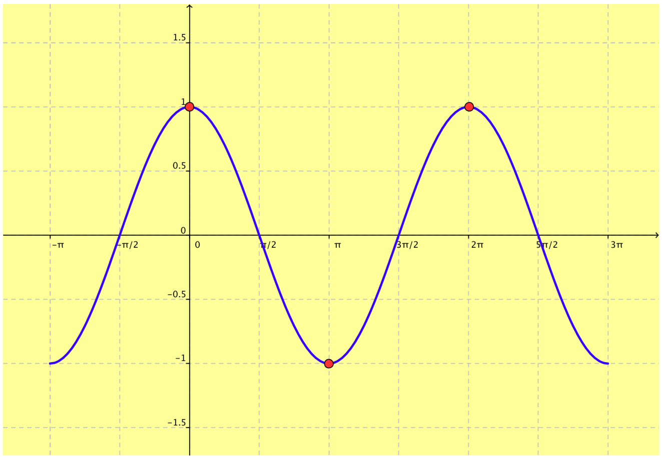
10. Si el valor de la derivada de una función f en $\sqrt{2}$ es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor del siguiente $\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{f(x)-f(\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}$?

∞ 0 $\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$

11. Si el valor de la derivada de una función f en $x = \frac{1}{2}$ es 5. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la función en $x = \frac{1}{2}$?

$\frac{1}{2}$ 2 5 $\frac{5}{2}$

12. Dada la siguiente gráfica de la función f. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en los puntos marcados?

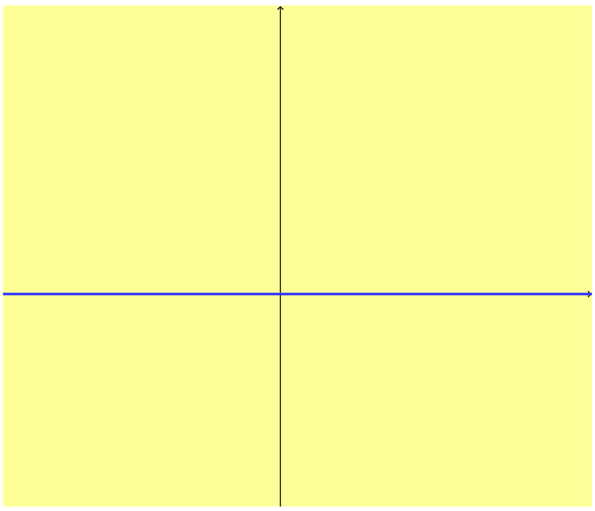


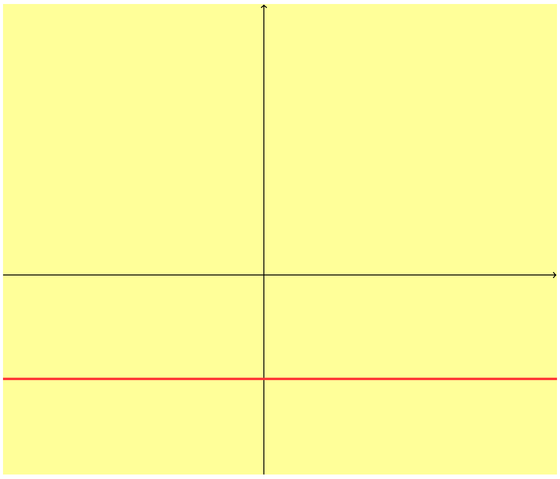
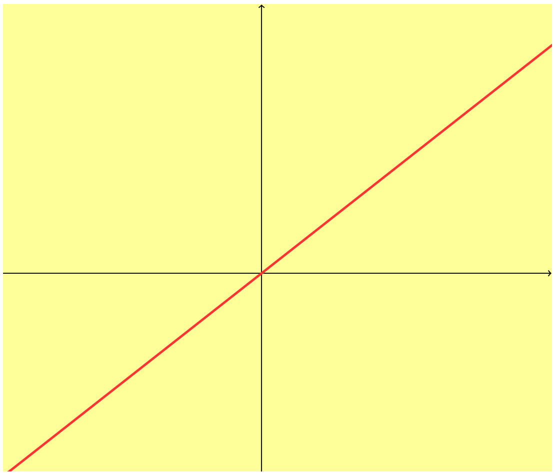
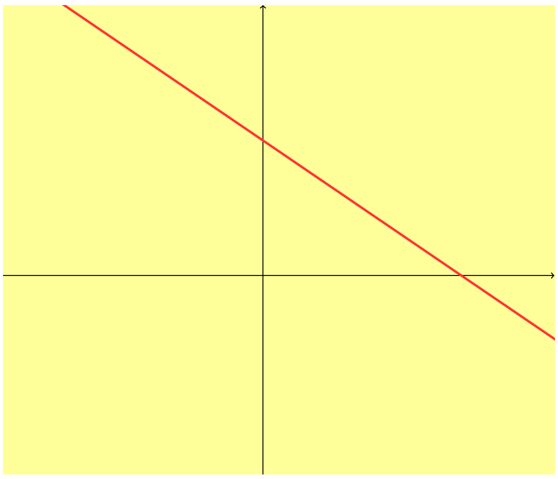
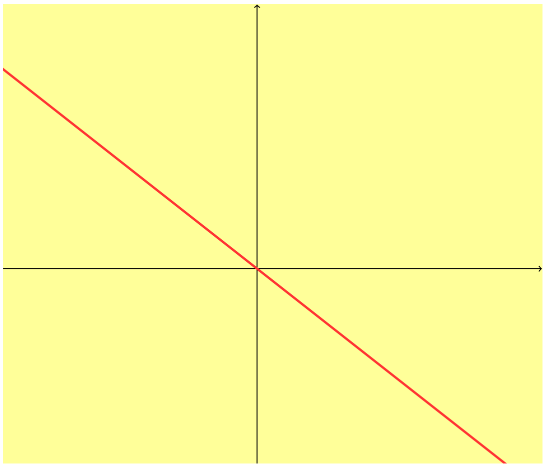
La derivada en los puntos vale π.
La pendiente de la tangente en los puntos es 0.
La derivada en los puntos vale 1 y -1.
La pendiente de la tangente en los puntos vale 0, π y 2π.

13. Si la derivada de una función f en un punto a es positiva. ¿Qué información se obtiene de f en el punto a?

Que la función f vale cero alrededor del punto a.
Que la función f no decrecer en el punto a.
Que la función f crece alrededor del punto a.
Que la función f es positiva en el punto a.

14. Dada la siguiente gráfica de la función f'. Selecciona la gráfica que corresponde a la gráfica de f.

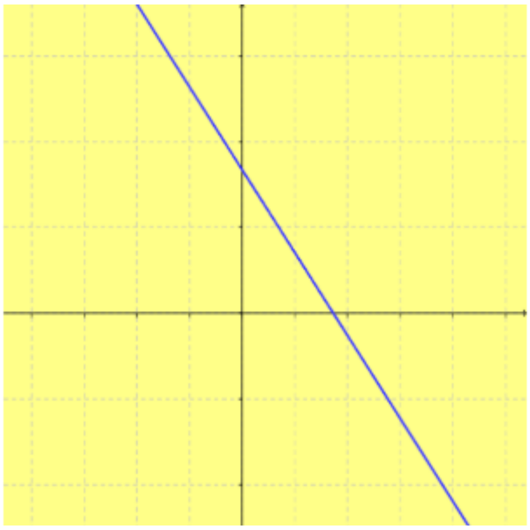


15. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto?

    La derivada es la pendiente de la función en el punto.
    La derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto.
    La derivada es el valor de la recta tangente en el punto.
    La derivada es la recta tangente a la curva en el punto.

16. Si la gráfica de una función $f'(x)$ es la siguiente. ¿La función f tiene un máximo o un mínimo?



Tiene un máximo

Tiene un mínimo

17. ¿Qué característica tienen los puntos de una función f, dónde la derivada vale cero?

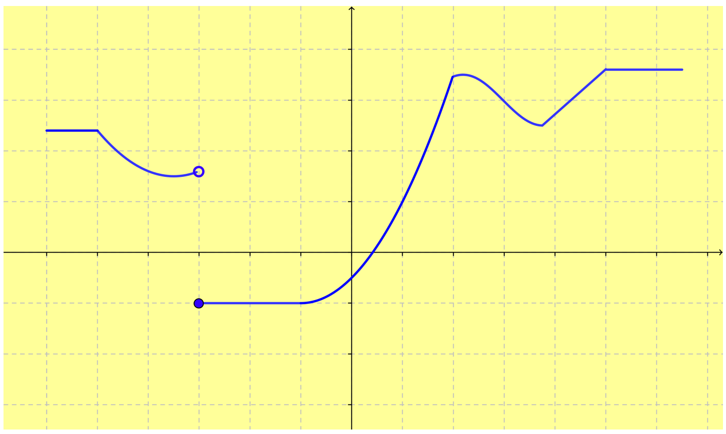
Son puntos donde la función crece, o decrece, o se mantiene constante.
Son puntos donde la función es positiva, o negativa, o cero.
Son puntos donde la función alcanza un máximo o un mínimo.
Son puntos donde la función toca al eje X.

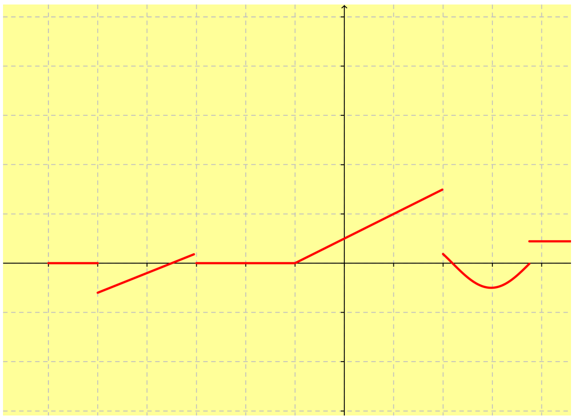
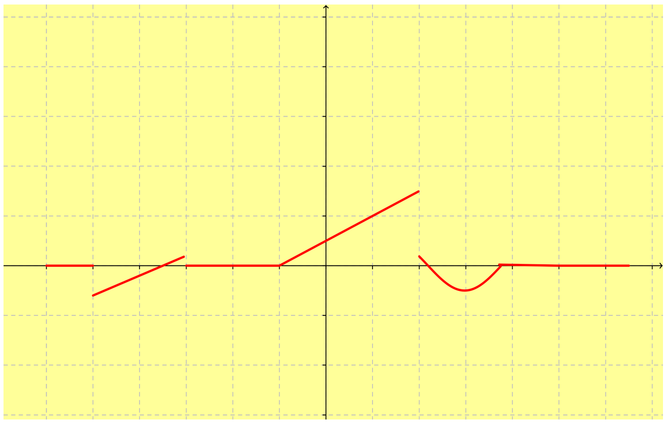
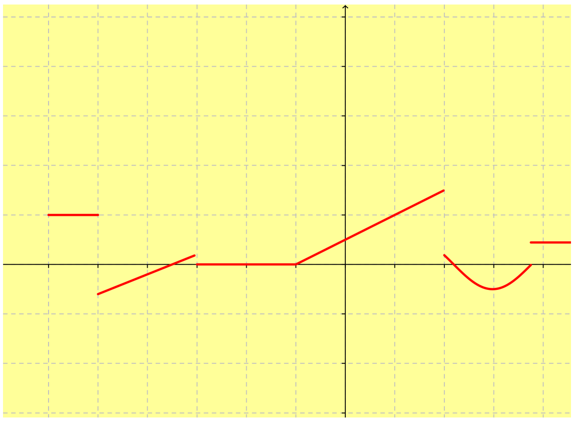
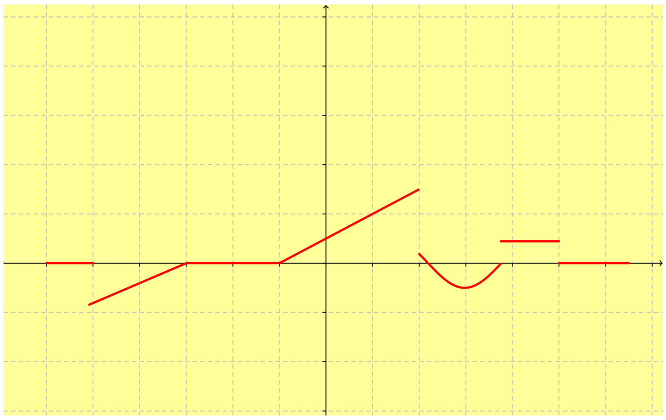
18. Si dada una función f y un punto a tal que $f(a)$ es positivo, entonces el siguiente $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ también es positivo.

Verdadero

Falso

19. Dada la siguiente gráfica de una función, selecciona la gráfica de la función derivada.



20. ¿Cuál es la definición de la derivad de un función f?

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\quad$ $f'(x)$ $\quad$ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\quad$ $\lim_{x\to a} f(x)$

Anexo C

Cuestionario de Opinión

Las respuestas en todas las preguntas fueron con una escala tipo Likert:

- Nunca
- A veces
- Frecuentemente
- Siempre

1. ¿Las representaciones visuales dinámicas en la plataforma facilitaron la comprensión del tema?
2. ¿Las herramientas digitales presentadas son apropiadas para el desarrollo del tema?
3. ¿Tuviste dificultades con el uso de la plataforma?
4. ¿Te gustó trabajar en la plataforma?
5. ¿Te gusto la forma de trabajo con las representaciones visuales dinámicas?
6. ¿Fue fácil trabajar en la plataforma?
7. ¿Ya conocías el tema antes de la exposición en clase?
8. Antes de la clase presentada, ¿estudiabas el tema?
9. La clase presentada, ¿propicio en ti el estudio del tema?
10. Después de la clase presentada, ¿estudiaste el tema?
11. ¿Estudiaste el tema haciendo usa de la plataforma?
12. ¿Utilizaste otros recursos (apuntes, libros, etc.) para estudiar el tema?
13. ¿El profesor organizo adecuadamente el tema?
14. ¿Consideras que lograste el objetivo de la clase?
15. ¿El tiempo que el profesor dedico al tema fue adecuado?
16. ¿El lenguaje utilizado por el profesor fue entendible para ti?

17. ¿El diseño de los materiales utilizados por el profesor ayudo a tu comprensión del tema?

18. ¿La exposición del profesor te ayudo a comprender mejor el tema?

19. ¿El profesor mostró dominio del tema?

20. ¿Las respuestas del profesor aclararon tus dudas?

21. ¿Las explicaciones del profesor fueron claras?

22. ¿El profesor motivo tu interés por el tema?

23. ¿Las representaciones visuales dinámicas motivaron tu interés por el tema?

24. ¿El profesor motivo tu participación en las actividades durante la clase?

25. ¿La dificultad del examen es acorde con el tema estudiado?

26. ¿El lenguaje utilizado en el examen es claro?

27. ¿La comprensión del análisis geométrico presentado en la clase resulto ser difícil?

28. ¿Consideras que lograste una buena comprensión del tema?

29. ¿Consideras que obtuviste conocimientos nuevos después de la clase?

Anexo D

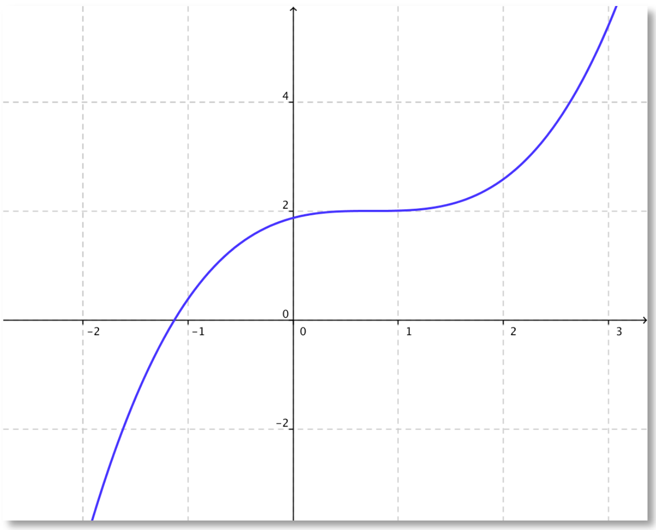
Entrevista

1. ¿Cuál de los dos exámenes fue más difícil?

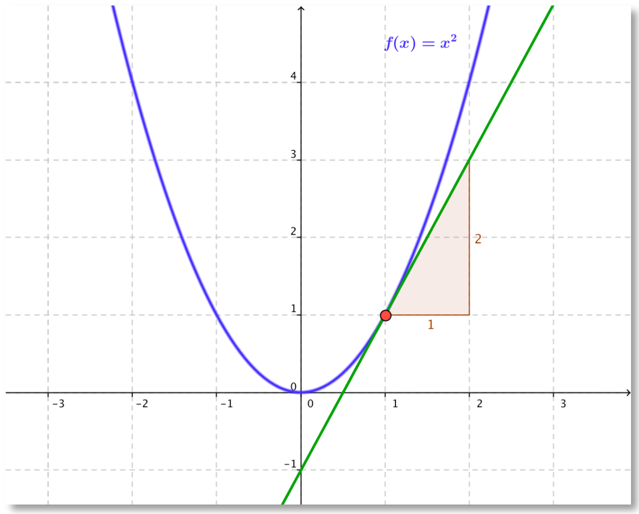
2. ¿Cuáles preguntas fueron más difíciles, las que tenias gráfica, las que eran puro texto, o las que tenias expresiones algebraicas?

3. ¿Qué significa la expresión $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -3$?

4. ¿Dónde vale cero la derivada de la siguiente gráfica?



5. Describe mediante una expresión algebraica la situación planteada en la siguiente imagen



6. Si la siguiente gráfica es la gráfica de la función f', indica si la función f tiene algún máximo y/o mínimo y en dónde