UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS DE HILBERT Y FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

CESAR DOMINGUEZ BAUTISTA

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. FEDERICO LASA GOSEBATT

2013

1. Datos del alumno
Apellido paterno
Apellido materno
Nombre(s)
Teléfono
Universidad Nacional
Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Carrera
Número de cuenta

2. Datos del Tutor
Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

3. Datos del Sinodal 1
Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

4. Datos del Sinodal 2
Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

5. Datos del Sinodal 3
Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

6. Datos del Sinodal 4
Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido

7. Datos del trabajo escrito
Título
Subtítulo
Páginas
Año

1. Datos del alumno
Dominguez
Bautista
Cesar
5676 9371
Universidad Nacional
Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
94341074

2. Datos del Tutor
M. en C.
Federico
Lasa
Gonsebatt

3. Datos del Sinodal 1
Dr.
Pablo
Barberis
Blostein

4. Datos del Sinodal 2
M. en C.
Vinicio Antonio
Gómez
Gutiérrez

5. Datos del Sinodal 3
Mat.
Martín Rafael
Pérez
Hernández

6. Datos del Sinodal 4
Dr.
José Lino
Samaniego
Mendoza

7. Datos del trabajo escrito
Elementos de la teoría de operadores lineales en
espacios de Hilbert y fundamentos matemáticos
de la mecánica cuántica
195 p
2013

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tesis de Licenciatura en Matemáticas

Elementos de la Teoría de Operadores Lineales en Espacios de Hilbert y Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica.

Cesar Dominguez Bautista

M. en C. Federico Lasa Gonsebatt (Tutor)

Índice

0.1. INTRODUCCIÓN.

El objetivo de este trabajo de tesis es exponer una parte de la elegancia y belleza del análisis funcional en lo que respecta a la teoría elemental los operadores lineales en espacios de Hilbert.
Luego de esto, se pasa a realizar consideraciones en lo que respecta a los fundamentos matemáticos de la teoría de la mecánica cuántica.

Para mí como estudiante de matemáticas en la facultad de ciencias, realmente fue algo insospechado encontrar en los libros de análisis funcional tratantes de teoría de espacios de Hilbert, frecuentemente una nota o un capítulo de mecánica cuántica.
Es decir, después de estar familiarizado con el ambiente de la teoría básica de los operadores lineales en espacios de Hilbert, se hace una "aplicación" a la mecánica cuántica.

En realidad, históricamente los hechos sucedieron en otro sentido.

Fue $John\ Von\ Neumann$ quien en 1932 formuló su famoso trabajo: $Mathematische\ Grundlagen\ der\ Quantenmechanik$, en el cual establece los $Fundamentos\ Matemáticos\ de\ la\ Mecánica\ Cuántica.$
En esta obra $Neumann$ define los espacios conocidos como $Espacios\ de\ Hilbert$ y además propone el papel que juegan los $Operadores\ Lineales$ en estos espacios para la mecánica cuántica.

$-$ El trabajo de $Neumann$ unifica las dos teorías cuánticas que en ese entonces existían, la mecánica matricial de $Heisenberg$ y $Born$ y la mecánica ondulatoria de $Schrödinger.$ $-$

En esta tesis se dan ejemplos de espacios de Hilbert de dimensión infinita al igual que se dan ejemplos de operadores lineales en estos espacios. Para esto se exponen las demostraciones de los pertinentes teoremas requeridos.

Luego de esto se procede a establecer varias propiedades de estos operadores, en particular propiedades de operadores lineales autoadjuntos.

En la parte de la exposición de conceptos correspondientes a la Física, se hacen las definiciones básicas necesarias.

En este trabajo de tesis se usan los conocimientos adquiridos en los cursos de licenciatura, tales como: cálculo, álgebra lineal, análisis matemático, análisis de Fourier, funciones especiales y transformadas integrales y ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

1. ESPACIOS MÉTRICOS, ESPACIOS NORMADOS, ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR, ESPACIOS DE BANACH Y ESPACIOS DE HILBERT.

Esta sección contiene material basado en los siguientes: [1] capítulo 1; [2] capítulo I; [4] capítulos 1 y 3; [8] capítulos I, II y III.

1.1. Introducción.

En esta sección se definen los espacios vectoriales en los cuales se desarrolla la teoría de los operadores lineales de esta tesis, a saber los espacios de funciones donde se tiene una métrica dada en términos de una norma, la cual a su vez viene dada por un producto interior.
Estos espacios se conocen como $L_p(X)$, para presentar estos espacios es necesario tener a la mano teoremas que permitan establecerlos.
Veremos que sólo cuando $p = 2$, lo que obtenemos es un espacio de Hilbert.

1.2. Definiciones.

Definición 1. Producto interior ó interno.

Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el campo de los números reales ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, el campo de los números complejos. Un Producto Interior en V es una función,
$<,>: V \times V \longrightarrow K$ donde $(f, g) \longmapsto < f, g >$ es tal que $\forall f, g, h \in V$ y $\forall t \in K$ cumple lo siguiente:

1. $< f, f > \in \mathbb{R}^+ := [0,\infty)$ (Positividad)
2. $< f, g >= \overline{< g, f >}$ (Simetría)
3. $< tf, g >= t < f, g >$ (Linealidad 1)
4. $< f + g, h >=< f, h > + < g, h >$ (Linealidad 2)
5. $< f, f >= 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

Definición 2. Norma.

Ahora, una Norma en V es una función $\| \ . \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$donde $f \longmapsto \|f\|$ es tal que cumple lo siguiente $\forall \ f, g \in V$ y $\forall t \in K$:
1. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Desigualdad del triángulo)
2. $\|tf\| = |t|\|f\|$ (Homogeneidad)
3.$\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

Definición 3. Métrica.

Luego, una métrica en V es una función $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ donde $(f, g) \longmapsto d(f, g)$ tal que cumple lo siguiente $\forall \ f, g, h \in V$:
1. $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ (Desigualdad del triángulo)
2. $d(f, g) = d(g, f)$ (Simetría)
3. $d(f, g) = 0 \Longleftrightarrow f = g$.

De esta forma el espacio vectorial V se llama espacio con producto interior si en V se tiene definido un producto interno;

V se llama espacio normado si se ha definido una norma en V;

V se llama espacio métrico si se tiene definida una métrica en V.
(Para definir espacio métrico es suficiente que V sea un conjunto.)

Veamos a continuación que en el caso de un espacio vectorial V, estos conjuntos están relacionados. Para esto necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 4. *En un espacio con producto interior V, se cumple la siguiente desigualdad conocida como Desigualdad de Cauchy - Schwarz:*

$$|< f,g >|^2 \leq < f,f > < g,g > . \tag{1.1}$$

Demostración.

$i)$ Si $f=0$ ó $g=0$, la desigualdad se satisface, ya que para $h \in V$: $< h,0 >=< h,0+0 >=< h,0 > + < h,0 >= 2 < h,0 > \Longrightarrow 0 = 2 < h,0 > - < h,0 >=< h,0 >$ por lo tanto, $< h,0 >= 0$, $\forall h \in V$.

Suponga que $g=0$, así tenemos que $| < f,0 > | = 0 =< f,f > < 0,0 >= 0$. Por lo tanto $| < f,0 > |^2 \leq < f,f > < 0,0 >$.
El caso $f=0$, es análogo.

$ii)$ Sean $f \neq 0$ y $g \neq 0$, luego tomando $k \in \mathbb{C}$ tenemos lo siguiente:

$$0 \leq < f-kg, f-kg > = < f, f-kg > - < kg, f-kg > = < f,f > - \overline{k} < f,g > - k < g,f > + |k|^2 < g,g >;$$

sea $k = \frac{<f,g>}{<g,g>}$, $\overline{k} = \frac{<g,f>}{<g,g>}$ y $|k|^2 = \frac{|<f,g>|^2}{<g,g>^2}$, así se tiene esto:

$$0 \leq < f,f > - \frac{<g,f>}{<g,g>} < f,g > - \frac{<f,g>}{<g,g>} < g,f > + \frac{|<f,g>|^2}{<g,g>^2} < g,g >, \Longrightarrow$$

$$0 \leq < f,f > - \frac{|<f,g>|^2}{<g,g>} - \frac{|<f,g>|^2}{<g,g>} + \frac{|<f,g>|^2}{<g,g>} = < f,f > -2\frac{|<f,g>|^2}{<g,g>} + \frac{|<f,g>|^2}{<g,g>} = < f,f > - \frac{|<f,g>|^2}{<g,g>}, \Longrightarrow$$

$\frac{|<f,g>|^2}{<g,g>} \leq < f,f >$, por lo tanto $| < f,g > |^2 \leq < f,f > < g,g >$.

■

Por la proposición anterior tenemos: $|Re < f,g > | \leq | < f,g > | \leq \sqrt{< f,f >}\sqrt{< g,g >}$, para $f,g \in V$ y $Re(z)$ denota la parte real de $z \in \mathbb{C}$.

Veamos a continuación lo siguiente.

1.3. Una métrica en espacios con producto interior.

Proposición 5. *En un espacio con producto interior V, se puede definir una norma de la siguiente manera:*

$$\|f\| := \sqrt{< f, f >}, \tag{1.2}$$

de esta forma cada espacio con producto interior se puede ver como un Espacio Normado;

además una norma puede definir una métrica de la siguiente manera:

$$d(f, g) := \|f - g\| \tag{1.3}$$

así se tiene que cada espacio normado es un Espacio Métrico.

Además todo espacio métrico es un Espacio Topológico, donde los abiertos están dados en términos de las bolas abiertas.

Demostración.

Veamos que al definir $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$, se cumplen los axiomas de norma.

$i)$ $\|f\| \geq 0$, ya que por los axiomas de producto interior $< f, f > \geq 0$.

$ii)$ Sea $\|f\| = 0$, entonces $\sqrt{< f, f >} = 0$, lo que implica que $< f, f >= 0$, por lo tanto $f = 0$, esto por el axioma de producto interior.

Ahora sea $f = 0$, entonces $0 =< 0, 0 >=< f, f >= \sqrt{< f, f >} = \|f\|$; por lo tanto $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

$iii)$ Sea $z \in \mathbb{C}$, luego se tiene esto: $\|zf\| = \sqrt{< zf, zf >} = \sqrt{z\overline{z} < f, f >} = \sqrt{|z|^2 < f, f >} = |z|\sqrt{< f, f >} = |z|\|f\|$, por lo tanto $\|zf\| = |z|\|f\|$.

$iv)$ Sean $f, g \in V$, tenemos que

$$\|f + g\|^2 =< f + g, f + g > = < f, f > + < f, g > + < g, f > + < g, g > = \|f\|^2 + 2Re < f, g > + \|g\|^2 \leq$$

$$\|f\|^2 + 2\sqrt{< f, f >}\sqrt{< g, g >} + \|g\|^2 = \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2,$$

$$\text{por lo tanto } \|f + g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2,$$

en definitiva se tiene que: $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, se cumple la desigualdad del triángulo.

Por lo tanto al definir $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$, se cumplen los axiomas de norma, por lo que de esta forma el espacio con producto interior V, se puede ver como un espacio normado.

Ahora veamos que al definir $d(f, g) = \|f - g\|$, la función d, cumple los axiomas de métrica.

$i)$ $d(f,g) \geq 0$, ya que $\|f-g\| \geq 0$, para $f,g \in V$.

$ii)$ $d(f,g) = 0 \Longleftrightarrow f = g$, ya que por los axiomas de norma se tiene que: $\|f-g\| = 0 \Longleftrightarrow f-g = 0$, es decir $\Longleftrightarrow f = g$.

$iii)$ $d(f,g) = d(g,f)$, ya que, $\|f-g\| = \|(-1)(g-f)\| = |-1|\|g-f\| = \|g-f\|$, para $f,g \in V$.

$iv)$ $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$, ya que, $\|f-g\| = \|f+(-g)\| \leq \|f\| + \|-g\| = \|f\| + \|g\|$, para $f,g,h \in V$.

Por lo tanto $d(f,g) = \|f-g\|$, define una métrica en el espacio normado V, de esta forma V se puede ver como un espacio métrico.

Por último, en un espacio métrico, la métrica induce una topología la cual es generada por las bolas abiertas. Una bola abierta con centro en x_0 y radio r es el conjunto: $\mathcal{B}(x_0,r) = \{x \in V | d(x,x_0) < r\}$. De esta forma cada espacio métrico V se puede ver como un espacio topológico.

La proposición anterior puede verse como una proposición de existencia en el sentido de que, dado un producto interior, existe una norma que es inducida por ese producto interior (aunque puedan existir otras normas); dada una norma, existe una métrica que es inducida por esa norma (aunque puedan existir otras métricas); dada una métrica, existe una topología inducida por esa métrica (aunque puedan existir otras topologías).

De aquí en adelante, a menos que se diga lo contrario, cuando se hable de "la" norma, "la" métrica y "la" topología, nos referiremos a la norma inducida por el producto interior, a la métrica inducida por la norma, y a la topología inducida por la métrica.

■

Veamos a continuación que la norma y el producto interior son funciones continuas.

1.4. La norma y el producto interior son funciones continuas.

Teorema 6. *La norma es una función continua que va de un espacio normado a* $\mathbb{R}$.

Demostración.

Sea $(x_n) \longrightarrow x$ una sucesión convergente en un espacio normado, así que $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, $(n \longrightarrow \infty)$ luego entonces

$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$, esto demuestra que la norma es una función continua.

■

Veamos a continuación el siguiente teorema acerca de la continuidad del producto interior. Ya que esta nos servirá para responder la pregunta acerca de en qué situación una norma puede ser definida en términos de un producto interior, este resultado es el teorema de $Jordan - Von\ Neumann$.

Teorema 7. *El producto interior,* $<,>: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$*) es una función continua.*

Demostración.

Sea $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ una sucesión convergente en $V \times V$ con la métrica producto, tenemos que $(x_n) \longrightarrow x$ y $(y_n) \longrightarrow y$ son sucesiones convergentes en V, luego se tiene esto:

$$|< x_n, y_n > - < x, y >| = |< x_n - x + x, y_n > - < x, y >| = |< x_n - x, y_n > + < x, y_n > - < x, y >| \leq$$

$$+ |< x, y_n > - < x, y >| \leq \|x_n - x\| \|y_n\| + |< x, y_n - y >| \leq$$

$$\{\|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\|\} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Esto usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la linealidad del producto interno, la desigualdad del triángulo del valor absoluto que es una norma en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Por lo tanto el producto interno es continuo, es decir: $\lim_{n \to \infty} < x_n, y_n > = < x, y >$.

■

Ahora podemos establecer la situación en la cual, dado un espacio normado V, en éste se puede definir un producto interior en términos de la norma.

1.5. Espacios normados que son espacios con producto interior; Teorema de Jordan-Von Newmann.

Teorema 8. *(Jordan-Von Newmann): Una norma $\|.\|$ en un espacio vectorial normado V proviene de un producto interno de la manera*

$$\|f\| = \sqrt{< f, f >}$$

si y sólo si se verifica la $Igualdad\ Del\ Paralelogramo$, $\forall\ f, g \in V$:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\ \|f\|^2 + \|g\|^2) \tag{1.4}$$

en tal caso se cumple lo siguiente:

$$4 < f, g > = \|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 \text{ para } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$\text{y } 4 < f, g > = \|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2 \text{ para } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{1.5}$$

Esto quiere decir que todo espacio normado se puede ver como un espacio con producto interior si en éste se cumple la igualdad del paralelogramo.

Para demostrar la implicación directa hay que ver que la norma que define un espacio con producto interno cumple la igualdad del paralelogramo.
La implicación en sentido contrario se demuestra verificando lo siguiente:

$i)$ que se cumple la igualdad: $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$;

$ii)$ que al definir $< f, g > = \frac{1}{4}\{\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2\}$ se cumplen los axiomas de producto interno.

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea V un espacio con producto interior, por lo que V es un espacio normado donde la norma está dada por:

$\|f\| = \sqrt{<f,f>}$, veamos que se cumple la igualdad del paralelogramo.

$$\|f+g\|^2 = <f+g, f+g> = <f,f> + <f,g> + <g,f> + <g,g>;$$

$$\|f-g\|^2 = <f-g, f-g> = <f,f> - <f,g> - <g,f> + <g,g>;$$

luego sumando se tiene esto:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2<f,f> + 2<g,g> = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2,$$

por lo tanto se cumple la igualdad del paralelogramo.

$\Longleftarrow$) Sea V un espacio normado tal que la norma cumple la igualdad del paralelogramo, es decir que para $f, g \in V$ se cumple:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.$$

Definimos en $V \times V$ la siguiente función: $<f,g> = \frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2\}$, veamos que se satisfacen los axiomas de producto interior.

$$i) <f,f> = \frac{1}{4}\ \{\|f+f\|^2 - \|f-f\|^2 + i\|f+if\|^2 - i\|f-if\|^2\} = \frac{1}{4}\ \{\|2f\|^2 + i\|f(1+i)\|^2 - i\|f(1-i)\|^2\} =$$

$\frac{1}{4}\ \{4\|f\|^2 + i|1+i|^2\|f\|^2 - i|1-i|^2\|f\|^2\} = \frac{1}{4}\|f\|^2\{4 + i2 - i2\} = \frac{1}{4}\ \|f\|^2 4 = \|f\|^2$, por lo tanto, $<f,f> = \|f\|^2$,

podemos concluir que $<f,f> \geq 0$ y además $\sqrt{<f,f>} = \|f\|$.

$ii)$ Ahora sea $<f,f> = 0$, esto quiere decir que $\|f\|^2 = 0$, osea, $\|f\| = 0$, lo que se cumple $\Longleftrightarrow f = 0$, por los axiomas de norma.

Por lo tanto $<f,f> = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

$iii)$ Tenemos que:

$$<f,g> = \frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\} + i\frac{1}{4}\{\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2\}$$

por otro lado,

$$<g,f> = \frac{1}{4}\ \{\|g+f\|^2 - \|g-f\|^2\} + i\frac{1}{4}\{\|g+if\|^2 - \|g-if\|^2\} = \frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\} + i\frac{1}{4}\{\|g+if\|^2 - \|g-if\|^2\},$$

luego conjugando:

$$\overline{<g,f>} = \frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\} - i\frac{1}{4}\{|i|^2\|g+if\|^2 - |i|^2\|g-if\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\} - i\frac{1}{4}\{\|(i)(g+if)\|^2 - \|(i)(g-if)\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\} - i\frac{1}{4}\{\|ig+i^2f)\|^2 - \|ig-i^2f)\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\} - i\frac{1}{4}\{\|ig-f\|^2 - \|ig+f\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\} - i\frac{1}{4}\{\|f-ig\|^2 - \|f+ig\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\} + i\frac{1}{4}\{\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2\} = < f,g >,$$

por lo tanto: $< f,g > = \overline{< g,f >}$.

$iv)$ Para probar la linealidad veamos lo siguiente, tomamos primero el caso $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, esto es: $< f,g >= \frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\}$, de esta forma tenemos
$< f,g > + < h,g >= \frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\} + \frac{1}{4}\ \{\|h+g\|^2 - \|h-g\|^2\}$, por otro lado usando la igualdad del paralelogramo se tiene,

$$< f+h, 2g >= \frac{1}{4}\ \{\|(f+h)+(g+g)\|^2 - \|(f+h)-(g+g)\|^2\} = \frac{1}{4}\ \{\|(f+g)+(h+g)\|^2 - \|(f-g)+(h-g)\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4}\ \{2\|f+g\|^2 + 2\|h+g\|^2 - \|(f+g)-(h+g)\|^2\} - \frac{1}{4}\ \{2\|f-g\|^2 + 2\|h-g\|^2 - \|(f-g)-(h-g)\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4}\ \{2\|f+g\|^2 + 2\|h+g\|^2 - \|(f+g)-(h+g)\|^2\} - \frac{1}{4}\ \{2\|f-g\|^2 + 2\|h-g\|^2 - \|(f+g)-(h+g)\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4}\ \{2\|f+g\|^2 + 2\|h+g\|^2\} - \frac{1}{4}\ \{2\|f-g\|^2 + 2\|h-g\|^2\} = \frac{1}{2}\ \{\|f+g\|^2 + \|h+g\|^2\} - \frac{1}{2}\ \{\|f-g\|^2 + \|h-g\|^2\} =$$

$$2\frac{1}{4}\ \{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\} + 2\frac{1}{4}\ \{\|h+g\|^2 - \|h-g\|^2\} = 2 < f,g > + 2 < h,g >,$$

por lo tanto, $< f,g > + < h,g >= \frac{1}{2} < f+h, 2g >$.

En particular al hacer $h=0$, se obtiene esto: $< f,g >= \frac{1}{2} < f,2g >$; luego entonces

$< f,g > + < h,g >= \frac{1}{2} < f,2g > + \frac{1}{2} < h,2g >$, igualando lo anterior vemos que: $< f+h,2g > = < f,2g > + < h,2g >$,

haciendo $G=2g$, en definitiva se verifica lo siguiente:

$$< f+h, G >= < f,G > + < h,G >.$$

Luego, como

$$< -f,g >= \frac{1}{4}\ \{\|-f+g\|^2 - \|-f-g\|^2\} = \frac{1}{4}\ \{\|g-f\|^2 - \|(-1)f+g\|^2\} = -\frac{1}{4}\ \{\|f+g\| - \|f-g\|^2\} = - < f,g >,$$

queda establecido que $< nf, g >= n < f, g >$, para $n \in \mathbb{Z}$.
Ahora,

$$< \frac{1}{n}f, g >= \frac{1}{4}\ \{\|\frac{1}{n}f + g\|^2 - \|\frac{1}{n}f - g\|^2\} = \frac{1}{4}\ \{\frac{1}{n^2}\|f + ng\|^2 - \frac{1}{n^2}\|f - ng\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4n^2}\ \{\|f + ng\|^2 - \|f - ng\|^2\} = \frac{1}{n^2} < f, ng > = \frac{1}{n^2} < ng, f > = \frac{n}{n^2} < g, f > = \frac{1}{n} < f, g >$$

(ya que estamos en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), por lo tanto: $< \frac{1}{n}f, g > = \frac{1}{n} < f, g >$.

Así que para $(\frac{m}{n}) \in \mathbb{Q}$ se verifica:

$$< \frac{m}{n}f, g >= m < \frac{1}{n}f, g >= \frac{m}{n} < f, g >,$$

esto muestra que $<, >$ es lineal en el conjunto $\mathbb{Q}$ (los números racionales), el cual es denso en $\mathbb{R}$, de esta forma, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$, se tiene una sucesión (x_n) la cual consta de elementos de $\mathbb{Q}$ tal que

$$x_n \longrightarrow x,$$

usando la continuidad del producto interior (proposición anterior) se tiene lo siguiente:

$$< xf, g > = < (lim_{n \longrightarrow \infty} x_n)f, g > = lim_{n \longrightarrow \infty} < x_n f, g > = lim_{n \longrightarrow \infty} x_n < f, g > = x < f, g >, \forall x \in \mathbb{R},$$

por lo tanto $<, >$ es lineal sobre $\mathbb{R}$. Denotemos por $<, >_{\mathbb{R}}$, a la expresión: $\frac{1}{4}\ \{\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2\}$.

Ahora el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, esto es: $< f, g >= \frac{1}{4}\{\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2\}$, podemos ver que en este caso

$$< f, g > = < f, g >_{\mathbb{R}} + i < f, ig >_{\mathbb{R}}.$$

Veamos que $< if, g >= i < f, g >$;

$$< if, g >= \frac{1}{4}\{\|if + g\|^2 - \|if - g\|^2 + i\|if + ig\|^2 - i\|if - ig\|^2\} = \frac{1}{4}\{\|if + \frac{i}{i}g\|^2 - \|if - \frac{i}{i}g\|^2 + i|i|^2\|f + g\|^2 - i|i|^2\|f - g\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4}\{|i|^2\|f + \frac{1}{i}g\|^2 - |i|^2\|f - \frac{1}{i}g\|^2 + i\|f + g\|^2 - i\|f - g\|^2\} \overset{-i = i^{-1}}{=} \frac{1}{4}\{\|f - ig\|^2 - \|f + ig\|^2 + i\|f + g\|^2 - i\|f - g\|^2\} =$$

$$\frac{1}{4}i\{\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2\} = i < f, g >.$$

Para el caso $x \in \mathbb{R}$ se tiene,

$$< xf, g > = < xf, g >_{\mathbb{R}} + i < xf, ig >_{\mathbb{R}} = x < f, g >_{\mathbb{R}} + xi < f, ig >_{\mathbb{R}} = x\{< f, g >_{\mathbb{R}} + i < f, ig >_{\mathbb{R}}\} = x < f, g >,$$

es decir, $< xf, g > = x < f, g >, \forall x \in \mathbb{R}$.

Para la suma tenemos lo siguiente:

$$< f + h, g > = < f + h, g >_{\mathbb{R}} + i < f + h, ig >_{\mathbb{R}} = < f, g >_{\mathbb{R}} + < h, g >_{\mathbb{R}} + i < f, ig >_{\mathbb{R}} + i < h, ig >_{\mathbb{R}} =$$

$$< f,g >_{\mathbb{R}} + i < f,ig >_{\mathbb{R}} + < h,g >_{\mathbb{R}} + i < h,ig >_{\mathbb{R}} = < f,g > + < h,g >.$$

por lo tanto, $< f+h,g > = < f,g > + < h,g >$.

Por último, sea $(x+iy) = z \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}$), luego $zf = xf + iyf$, así que:

$$< zf,g > = < xf+iyf,g > = x < f,g > +iy < f,g > = (x+iy) < f,g > = z < f,g >,$$

por lo tanto $< zf,g > = z < f,g >$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Hemos probado la linealidad, lo que concluye la demostración. ■

1.6. Convergencia y espacios métricos completos.

La convergencia es un concepto importante en el contexto de los espacios métricos, ya que al hablar de límite se hace referencia precisamente a estos espacios.

Definición 9. Sea $(x_n) := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio métrico (V,d), decimos que la sucesión (x_n) converge a $x \in V$ esto es que $x_n \longrightarrow x$, cuando $n \longrightarrow \infty$, si

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

el elemento x se llama límite de la sucesión (x_n) y éste es único.

Formalmente esto significa que, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$, (este límite es en $\mathbb{R}$ con la métrica usual del valor absoluto).

En un espacio normado tenemos la métrica dada por la norma, así en un espacio normado decimos que la sucesión (x_n) converge a x cuando $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Ahora tenemos la siguiente definición importante.

Definición 10. Una sucesión (x_n) en (V,d) se llama Sucesión de Cauchy, si $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ cuando $m,n \longrightarrow \infty$, de manera precisa esto es:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n,m > N \text{ se tiene que } d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Claramente una sucesión convergente es una sucesión de Cauchy, ya que usando la desigualdad del triángulo de la métrica se tiene:
$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ siempre que $n,m > N \in \mathbb{N}$ (esta N existe porque la sucesión es convergente).

Sin embargo, no toda sucesión de Cauchy es convergente ya que puede suceder que se satisface la definición de sucesión convergente excepto que $x \notin V$.

Por ejemplo considere la sucesión $(\frac{1}{n})$ en el espacio $(0,1]$ con la métrica usual, esta sucesión es de Cauchy, y no es convergente ya que $0 \notin (0,1]$. La misma sucesión sí es convergente en el espacio $[0,1]$ con la misma métrica.

Definición 11. Un espacio métrico (V,d) se llama espacio métrico completo si toda sucesión de Cauchy en (V,d) es convergente.

A continuación damos paso a la definición importante para esta tesis.

Definición 12. Un espacio normado que es completo con la métrica asociada a la norma se llama $ESPACIO\ DE\ BANACH.$

Definición 13. Un espacio con producto interno que es completo con la métrica asociada a la norma que define el producto interno se llama $ESPACIO\ DE\ HILBERT.$

Es decir, un Espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interno en el cual toda sucesión de Cauchy tiene límite $x \in V$, y la norma es de la forma $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$.

Observación 14*.* Por el teorema de Jordan-Von Newmann, tenemos que un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si en éste se verifica la igualdad del paralelogramo.

Pues todo espacio normado que verifica la igualdad del paralelogramo es un espacio con producto interno (la norma es la que define éste producto interno).
En el caso de espacios de Banach y espacios de Hilbert se tiene además la completez de espacio métrico.

1.7. Un espacio de Banach que no es espacio de Hilbert.

Ejemplo 15. Veamos este ejemplo de un espacio de Banach que no es espacio de Hilbert.

Sea $E = C_{[0,\pi]}$, el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0,\pi]$. En primer lugar, E es un espacio vectorial, donde las operaciones lineales se definen de manera usual. Luego podemos definir en E una norma de la manera siguiente:

$$\|f\| = sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)|, \text{ para cada } f(x) \in E.$$

Para probar que $\|\cdot\|$, satisface la definición de norma, veamos que se satisfacen los axiomas:

$i)$ $sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)| = \|f\| \geq 0$, ya que el valor absoluto en $\mathbb{R}$ es mayor o igual a cero y esto se conserva al tomar el supremo.

$ii)$ $\|tf\| = sup_{x\in[0,\pi]}|tf(x)| = sup_{x\in[0,\pi]}|t||f(x)| = |t|\{sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)|\} = |t|\|f\|$, para cualquier $t \in K$.

$iii)$ Con el valor absoluto en $\mathbb{R}$ se tiene: $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, luego tomando el supremo en ambos lados,

$$sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)+g(x)| \leq sup_{x\in[0,\pi]}\{|f(x)|+|g(x)|\} \leq sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)| + sup_{x\in[0,\pi]}|g(x)|$$

por lo tanto, $sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)+g(x)| \leq sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)| + sup_{x\in[0,\pi]}|g(x)|$

es decir, $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Se concluye que se cumplen los axiomas de norma, por lo que el espacio $E = C_{[0,\pi]}$ es un espacio normado.

$Nota$: La noción de convergencia de una sucesión de funciones en este espacio, asociada a esta norma, es la noción de convergencia uniforme.

Veamos que este espacio normado es completo, sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de Cauchy en E, defina para $x \in [0,\pi]$ la función:

$$f(x) = lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x),$$

este límite existe, en vista de que para cada x_0 fijo, la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico completo $\mathbb{R}$, por lo tanto la función $f(x)$ está bien definida.

Veamos que $f(x) \in E$. Tenemos por hipótesis que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n(x)$ es continua en $[0,\pi]$, esto es:

$\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ se tiene que $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$.

Tenemos lo siguiente, sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in [0,\pi]$, luego se cumple esto:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

estas desigualdades se cumplen siempre que $|x - x_0| < \delta$, en vista de la continuidad de la función $f_n(x)$ en $x_0 \in [a,b]$;

y siempre que $n > max\{N_1, N_2\}$, las N_1 y N_2 que existen porque $f_n(x_0) \longrightarrow f(x_0)$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, para $x, x_0 \in [0,\pi]$.

Podemos concluir que la función $f(x)$ es continua en x_0, para cualquier $x_0 \in [0,\pi]$, por lo tanto $f \in E$.

Veamos que E no es espacio de Hilbert, considere las funciones continuas en $[0,\pi]$, $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = x$.

Luego

$$\|f\| = sup_{x\in[0,\pi]}|sen(x)| = 1; \ \|g\| = sup_{x\in[0,\pi]}|x| = \pi,$$

así que $\|f\|^2 = 1$, $\|g\|^2 = \pi^2$, resulta esto: $2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 2 + 2\pi^2$.

Por otro lado,

$$\|f+g\| = sup_{x\in[0,\pi]}|sen(x) + x|,$$

veamos donde alcanza el máximo la función $sen(x) + x$, para esto derivamos y obtenemos $cos(x) = -1$, por lo que en $x = \pi$ se alcanza el máximo, así que

$$\|f+g\| = sup_{x\in[0,\pi]}|sen(x) + x| = |sen(\pi) + \pi| = \pi, \text{ por lo que } \|f+g\|^2 = \pi^2;$$

luego

$$\|f-g\| = supx_{x\in[0,\pi]}|sen(x) - x| = \pi,$$

así se tiene esto:

$$\|f-g\|^2 = \pi^2, \text{ se concluye que } \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\pi^2.$$

Podemos concluir que

$$2\pi^2 = \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \neq 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 2 + 2\pi^2,$$

no se satisface la igualdad del paralelogramo, por lo tanto, por el teorema de Jordan-Von Neumann se concluye que el espacio de Banach $E = C_{[0,\pi]}$ no es un espacio de Hilbert.

■

Es pertinente a continuación, hacer la siguiente definición.

Definición 15.1
Una isometría es una función continua entre espacios métricos que preserva las distancias. Es decir, una isometría es una función continua F entre dos espacios métricos $F : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ que cumple con:

$$d_1(x_1, x_2) = d_2(F(x_1), F(x_2)), \text{ donde } x_1,\, x_2 \in X.$$

A continuación tenemos un teorema básico de la teoría de los espacios métricos.

1.8. Completación de un espacio métrico.

Teorema 16. *(Completación de un espacio métrico).*

Para cada espacio métrico (V, d) , existe un espacio métrico completo ($\widetilde{V}$, $\widetilde{d}$) y una isometría $F : V \longrightarrow \widetilde{V}$ tal que

$F(V)$ es un subespacio denso en $\widetilde{V}$,
(en este caso se dice que V está inmerso isométricamente en $\widetilde{V}$ por medio de F).

Además en $F(V)$ se tiene que $\widetilde{d} = d$; si V es espacio vectorial entonces $\widetilde{V}$ también lo es; si la métrica d proviene de una norma entonces también $\widetilde{d}$ proviene de una norma, esto es que la norma en V induce una norma en $\widetilde{V}$ y en este caso ($\widetilde{V}$,$\widetilde{d}$) es un Espacio de Banach;

Si la norma en V proviene de un producto interno entonces la norma en $\widetilde{V}$ también proviene de un producto interno el cual define precisamente la métrica $\widetilde{d}$ la cual proviene de la norma anteriormente mencionada.

En este caso el espacio ($\widetilde{V}$,$\widetilde{d}$) es un Espacio de Hilbert. En esta tesis se consideran básicamente sólo espacios métricos en los cuales la métrica proviene de la norma que define un producto interno, osea $d(x_n, y_n) = \|x_n - y_n\|$.

Demostración.

Considere al conjunto de las sucesiones de Cauchy (x_n) en V y defina la siguiente relación en este conjunto:

$$(x_n) \sim (y_n) \text{ cuando } \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

Esta relación es de equivalencia ya que se puede ver que $(x_n)\sim(x_n)$ pues la distancia entre ambas es cero.

Luego la relación es simétrica ya que $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$, en vista de la simetría de la métrica d , la cual se conserva al tomar límite $n \longrightarrow \infty$.
Por último la transitividad se prueba usando la desigualdad del triángulo de la métrica d.

Ya que si $(x_n) \sim (y_n)$ y $(y_n) \sim (z_n)$ luego la desigualdad: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ se conserva al tomar el límite $n \longrightarrow\infty$ por lo que se tiene que
$(x_n) \sim (z_n)$.

Ahora defina $\widetilde{V}$ como el conjunto de clases de equivalencia $[x_n] := [(x_n)]$ que induce la relación de equivalencia anterior, es decir

$$\widetilde{V} = \{[(x_n]\}$$

Luego defina $\widetilde{d} : \widetilde{V} \times \widetilde{V} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, de la siguiente manera:

$$\widetilde{d}([x_n], [y_n]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),$$

esta distancia esta bien definida ya que las sucesiones consideradas son de Cauchy y éstas son acotadas, por lo que al aplicarle el limite éste es un número real finito.

Ahora definimos la función $F : V \longrightarrow\widetilde{V}$ así:

$F(x) = [x]\ \forall x \in V$, ya que $x = x_n\ \forall n \in\mathbb{N}$, es una sucesión constante la cual es de Cauchy.

De esta manera identificamos los elementos $x \in V$ con el elemento $[x] = [x_n] \in \widetilde{V}$. Por la forma en que está definida la métrica $\widetilde{d}$ y la función F, ésta es una isometría entre V y $\widetilde{V}$.

Con la identificación entre V y $F(V) \subseteq \widetilde{V}$ veamos la densidad del subespacio $F(V)$ en $\widetilde{V}$.

Un subconjunto E de un espacio métrico X es denso en éste si para cada $x \in X$ se tiene que existe una sucesión $(e_n) \subseteq E$ tal que $(e_n) \longrightarrow x$, cuando $n \longrightarrow \infty$.

Así tenemos por la definición del espacio $\widetilde{V}$ y por la definición de la función F que cada punto $[(x_n)]$ del espacio $\widetilde{V}$ es el límite de la sucesión $(F(x_n))$, es decir $F(V)$ es denso en $\widetilde{V}$.

Para ver que el espacio $\widetilde{V}$ es completo sea (A_n) una sucesión de Cauchy en $\widetilde{V}$, como $F(V)$ es denso en $\widetilde{V}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in V$ tal que

$$\|F(a_n) - A_n\| < \tfrac{1}{n},$$

tenemos las siguientes desigualdades: (usando la distancia de espacio normado y la isometría F)

$$\|a_n - a_m\| = \|F(a_n) - F(a_m)\| \leq \|F(a_n) - A_n\| + \|A_n - A_m\| + \|A_m - F(a_m)\| \leq (\|A_n - A_m\| + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m}) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto (a_n) es una sucesión de Cauchy en el espacio V, así podemos definir $A = [(a_n)] \in\widetilde{V}$.
Veamos que

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0,$$

para esto se tiene que

$$\|A_n - A\| \leq \|A_n - F(a_n)\| + \|F(a_n) - A\| < (\|F(a_n) - A\| + \tfrac{1}{n}) \longrightarrow 0,$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} \|F(a_n) - A\| = 0,$$

por lo tanto, $\widetilde{V}$ es un espacio métrico completo.

Luego si V tiene estructura de espacio vectorial la correspondiente estructura lineal en $\widetilde{V}$ está dada por:

$$[x_n] + [y_n] := [x_n + y_n] \text{ y } t[x_n] := [tx_n],$$

donde $t \in \mathbb{K}$ es el campo sobre el cual V es espacio vectorial (y por lo tanto $\widetilde{V}$ también).

Si V es normado la norma en $\widetilde{V}$ es:

$$\|[x_n]\| := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

éste límite esta bien definido en vista de que (x_n) es una sucesión de Cauchy y por lo tanto $\|x_n\|$ es una sucesión de Cauchy de números reales en el espacio métrico completo $\mathbb{R}$.

(La razón de esto es porque la norma es una función continua).

Así $\widetilde{V}$ es un espacio de Banach.

Si V es espacio con producto interno, en $\widetilde{V}$ se define el siguiente producto interno:

$$< [x_n], [y_n] >:= \lim_{n\to\infty} < x_n, y_n >.$$

Este límite está bien definido, en virtud de la continuidad del producto interior (proposición anterior), lo que significa que

$$\lim_{n\to\infty} < x_n, y_n > = < x, y >.$$

Con esto tenemos que bajo el producto interno $(x_n, y_n) \longmapsto < x_n, y_n >$ es una sucesión de Cauchy en el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ el cual es completo.

Por lo tanto tenemos que $\widetilde{V}$ es un espacio de Hilbert si V es un espacio con producto interno. Esto termina la demostración.

$\blacksquare$

1.9. Ejemplos de espacios normados y espacio de Hilbert.

En esta sección se usa material de: [1] capítulo 3; [2] capítulos 1, 2 y 3; [5] capítulos 2,3, 4, 5 y 6; [6] capítulo 10; [10] capítulo 12.

Ejemplos muy útiles de espacios de Banach corresponden a los llamados espacios de Lebesgue L_p, fueron los que dieron impulso al desarrollo de la teoría de espacio normados y espacios de Hilbert.

Para mostrar estos espacios necesitamos de los conceptos de sigma álgebra, espacio medible, medida en un espacio medible y función medible.

Definición 17. Dado un conjunto X, una $sigma\ álgebra$ $(\sigma - álgebra)$ de subconjuntos de X, es una colección $\mathbb{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$

de subconjuntos de X que cumple lo siguiente:

$i)$ X y $\emptyset$ pertenecen a $\mathbb{X}$.

$ii)$ Si $A \in \mathbb{X} \Longrightarrow A^c \in \mathbb{X}$.

$iii)$ Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una colección numerable de elementos de $\mathbb{X} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{X}$.

De esta forma el par $(X, \mathbb{X})$ se llama $espacio\ medible.$

Definición 18. Luego, dado un espacio medible $(X, \mathbb{X})$, una función $\mu : \mathbb{X} \longrightarrow [0, \infty]$, que cumple con:

$i)$ $\mu(\emptyset) = 0$

$ii)$ Si la colección de elementos en $\mathbb{X}$, $A_1, A_2, ...$ cumple con $A_i \cap A_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$, entonces $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

De esta forma , la función μ se llama $medida$ en el espacio medible $(X, \mathbb{X})$ y la tripleta $(X, \mathbb{X}, \mu)$ se llama $espacio\ de\ medida.$

$Nota$: La convergencia o no, de la serie a la derecha de la igualdad anterior, puede usarse precisamente para determinar si una función es o no una medida.

Definición 19. Una función $f : X \longrightarrow Y$, dados los espacios medibles $(X, \mathbb{X})$ y $(Y, \mathbb{Y})$, se llama $función\ medible$ si

$$f^{-1}(E) \in \mathbb{X} \text{ , } \forall E \in \mathbb{Y}.$$

Definición 20. Sea $(X, \mathbb{X}, \mu)$ un espacio de medida donde μ es una medida en $\mathbb{X}$, si $1 \leq p < \infty$, considere al conjunto $\Omega = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \mathbb{R} \mid f$ es medible y $\displaystyle\int_X |f|^p < \infty\}$. Definimos los espacios de funciones de potencia p-ésima integrable como los espacios de clases:

$$L_p(X, \mathbb{X}, \mu) = \{[f] \ \mid \ f \in \Omega\} \tag{1.6}$$

La clase $[f]$ corresponde a la que induce la relación de equivalencia $f \sim g$, si $f = g$ casi donde quiera, esto es que $f = g$ excepto en un conjunto de medida cero.
Así queda claro escribir f como un representante de la clase $[f]$ y no se hace distinción.

Teorema 21. *Los espacios de funciones $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$, son espacios vectoriales normados (las operaciones se definen de manera habitual),*

donde la norma está dada por:

$$\|f\|_p = \{\int |f|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

Demostración.

Veamos que se cumplen los axiomas de norma.

$i)$ $\|f\| \geq 0.$

$ii)$ $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0,$ (esto se cumple en vista de que al referirnos a f, se hace referencia la clase $[f]$).

$iii)$ $\|tf\|_p = \{\int |tf|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} = \{\int\ |t|^p\ |f|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} = \{\ |t|^p\ \int |f|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} = |t| \|f\|_p.$

$iv)$ $\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$, esta es la desigualdad de Minkowski (se demuestra más adelante).

Por lo tanto, se cumplen los axiomas de norma y podemos hablar de los espacio normados $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$.

■

En el caso particular de que μ sea la medida de contar en el espacio de subconjuntos de $\mathbb{N}$ (la $\sigma - \acute{a}lgebra$ potencia de $\mathbb{N}$) se identifican los espacios L_p con los espacios

$l_p = \{(x_n) \mid x_n \in \mathbb{C}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ además en este caso cada clase de equivalencia tiene sólo un elemento.

A veces es más fácil visualizar algunos resultados en el espacio l_p que en L_p. Para mostrar que estos espacios son espacios de Banach hay que tener a la mano las siguientes desigualdades y teoremas.

1.10. Desigualdad de Hölder.

Veamos la siguiente desigualdad importante.

Teorema 22. *(Desigualdad de Hölder): Sea $f \in L_p$ y $g \in L_q$ donde $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (son índices conjugados); entonces se tiene que*

$$fg \in L_1 \text{ y } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.8}$$

Demostración.

Veamos que la desigualdad:

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha), \text{ vale para } 0 < \alpha < 1 \text{ y } t \geq 0.$$

Considere la función, $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha, \text{ donde } 0 < \alpha < 1.$$

Tenemos que

$$\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1}.$$

Luego para ver donde se anula la derivada hacemos $\varphi'(t) = 0$, esto es: $\alpha = \alpha t^{\alpha-1}$, o sea $1 = t^{\alpha-1}$ por lo tanto $\varphi(t)$ se anula en $t = 1$.

Para ver si $t = 1$ es un máximo o un mínimo veamos donde crece y donde decrece la derivada.

Para $\varphi'(t) < 0$ tenemos que $\alpha < \alpha t^{\alpha-1}$, es decir $1 < t^{\alpha-1}$, luego tomando logaritmo natural en ambos lados tenemos que:

$$ln(1) < (\alpha - 1)ln(t).$$

Así que $0 < (\alpha - 1)ln(t)$, luego como $(\alpha - 1) < 0$, concluimos que, $ln(t) < 0$, por lo tanto la función $\varphi(t)$ decrece en $0 < t < 1$.

En el caso $\varphi'(t) > 0$, tenemos que $\alpha > \alpha t^{\alpha-1}$, con lo que obtenemos la desigualdad:

$$ln(1) > (\alpha - 1)ln(t), \text{ es decir } 0 > (\alpha - 1)ln(t).$$

Ya que $(\alpha - 1) < 0$, concluimos que $ln(t) > 0$, con lo que sabemos que la función $\varphi(t)$ crece en $t > 1$.

Por lo anterior, en definitiva sabemos que la función $\varphi(t)$ tiene un mínimo global en $t = 1$, esto es que

$$\varphi(t) \geq \varphi(1), \text{ para } t \in [0, \infty).$$

Así tenemos la desigualdad: $\alpha t - t^\alpha \geq \alpha - 1$, con la cual establecemos que vale la siguiente:

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha), \text{ para } t \geq 0 \text{ con } 0 < \alpha < 1.$$

Ahora si a y b son no negativos hacemos $t = \frac{a}{b}$, luego sustituimos y multiplicamos por b para obtener:

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b,$$

donde la igualdad se da si y sólo si $a = b$.

Como es el caso que $1 < p < \infty$ y $0 < \frac{1}{p} < 1$, para los índices conjugados $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sea $\alpha = \frac{1}{p}$, luego si los números A y B son no negativos ponemos $a = A^p$ y $b = B^q$, así se cumple esto:

$$AB = (A^p)^{\frac{1}{p}} (B^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

además la igualdad se da si y sólo si $A^p = B^q$.

Ahora sean $f \in L_p$ y $g \in L_q$ con $\|f\|_p \neq 0$, $\|g\|_q \neq 0$ (en el caso $f = 0$ ó $g = 0$, el resultado se cumple trivialmente),

luego como el producto de funciones medibles es medible, concluimos que fg es medible.

Luego haciendo $A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ y $B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ y sustituyendo en la expresión anterior que se tiene para cualesquiera dos números no negativos A y B tenemos:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g(x)\|_q^q}$$

como sabemos que el lado derecho de la desigualdad es integrable se concluye que fg es integrable.

(Ya que si f es medible, g integrable y $|f| \leq |g| \Longrightarrow f$ es integrable y $\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu$; también αf es integrable si f lo es, $\alpha \in K$.)

Por lo tanto $fg \in L_1$, más aún, integrando se obtiene:

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

por lo tanto, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

es la desigualdad de $Hölder$.

■

De la anterior desigualdad observamos en que el producto de dos funciones (en realidad dos clases de funciones) en el espacio L_2 es una función en L_2 ya que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Es así como obtenemos la siguiente desigualdad importante en análisis conocida como desigualdad C.B.S.

1.11. Desigualdad de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz.

Corolario 23. *En el caso $p = 2$, en el espacio $L_2(X)$ se tiene la siguiente desigualdad conocida como desigualdad C.B.S.*

Si $f, g \in L_2(X) \Longrightarrow fg$ es integrable y

$$\left|\int fg d\mu\right| \leq \int |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2. \tag{1.9}$$

Demostración.

Inmediata de la desigualdad de Hölder.

■

Ahora se presenta la siguiente desigualdad importante.

1.12. Desigualdad de Minkowski.

Teorema 24. *Desigualdad de Minkowski. Si* $f, h \in L_p(X)$ *, con* $p > 1 \Longrightarrow \ f + h \in L_p$ *y*

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p, \tag{1.10}$$

(esta es la desigualdad del triángulo para la norma en $L_p(X)$).

Demostración.

Tenemos que $f + h$ es medible, ya que la suma de funciones medibles es medible. Luego considere esto,

$$|f(x) + h(x)|^p \leq (2 m\acute{a}x\, \{|f(x)|, |h(x)|\})^p =$$

$$2^p\, (m\acute{a}x\, \{|f(x)|, |h(x)|\})^p \leq 2^p\, (|f(x)|^p + |h(x)|^p) = 2^p|f(x)|^p + 2^p|h(x)|^p,$$

esta desigualdad implica que $(f + h) \in L_p$,

ya que si F es medible, $G = |f|^p + |h|^p$ es integrable y $|F| \leq |G| \Longrightarrow F$ es integrable; haciendo $F = |f + h|^p$.

La siguiente desigualdad se verifica en vista de la desigualdad del triángulo del valor absoluto,

$$|f + h|^p = |f + h|\ |f + h|^{p-1} \leq |f||f + h|^{p-1} + |h||f + h|^{p-1}.$$

Por otro lado, ya que p y q son índices conjugados, se tiene que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, despejando tenemos esto, $p = (p-1)q$,

también esto, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p}(p-1)$, luego

$$\|(f + h)^{p-1}\|_q = \{\int |f + h|^{(p-1)q}\, d\mu\}^{\frac{1}{q}} = \{\int |f + h|^p\, d\mu\}^{\frac{1}{p}(p-1)} = \|f + h\|_p^{p-1}$$

Ahora si $\|f+h\|_p = 0$, se tiene la desigualdad de Minkowski trivial; suponga pues que $\|f+h\|_p \neq 0$, aplicando la desigualdad de Hölder se infiere:

$$\|f+h\|_p^p = \int |f+h|^p \, d\mu = \int |f+h||f+h|^{p-1} \, d\mu \leq \int |f||f+h|^{p-1} \, d\mu + \int |h||f+h|^{p-1} \, d\mu \overset{Hölder}{\leq}$$

$$\|f\|_p \|(f+h)^{p-1}\|_q + \|h\|_p \, \|(f+h)^{p-1}\|_q = \{\|f\|_p + \|h\|_p\} \, \|(f+h)^{p-1}\|_q = \{\|f\|_p + \|h\|_p\} \, \|f+h\|_p^{p-1}$$

por lo tanto,

$$\|f+h\|_p^p \leq \{\|f\|_p + \|h\|_p\} \, \|f+h\|_p^{p-1}$$

dividiendo en ambos lados de la desigualdad por: $\|f+h\|_p^{p-1}$ tenemos que,

$$\|f+h\|_p^{p-(p-1)} \leq \{\|f\|_p + \|h\|_p\} \, \|f+h\|_p^{(p-1)-(p-1)}$$

por lo tanto

$$\|f+h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p,$$

se obtiene la desigualdad de Minkowski.

■

A continuación veremos teoremas que establecen resultados importantes en cuanto a convergencia. Para el siguiente teorema, de la convergencia monótona, necesitamos de la siguiente proposición.

Proposición 25.a. Sea $(X, \mathbb{X}, \mu)$ un espacio de medida, al definir:

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_{_E} d\mu,$$

λ es una medida en $\mathbb{X}$.

Demostración.
Pongamos a la función en su representación estándar,

$$\varphi \chi_{_E} = \textstyle\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j \cap E},$$

luego tenemos esto,

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_{_E} d\mu = \textstyle\sum_{j=1}^n a_j \displaystyle\int \chi_{E_j \cap E} d\mu = \textstyle\sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j \cap E).$$

Vemos que que la asignación: $E \longrightarrow u(E_j \cap E)$, define una medida en $\mathbb{X}$, ya que la intersección de conjuntos medibles es un conjunto medible, por lo tanto hemos expresado a λ como una suma finita de medidas en $\mathbb{X}$, podemos concluir que λ es una medida en $\mathbb{X}$.

■

1.13. Teorema de la convergencia monótona.

Teorema 25. *(De la convergencia monótona):*
Si (f_n) es una sucesión monótona creciente de funciones en $M^+(X,\mathbb{X})$ la cual converge casi donde quiera a $f \Longrightarrow$

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu. \tag{1.11}$$

Demostración.

$M(X,\mathbb{X})$ es el espacio de funciones medibles de valores reales extendidos, ($\mathbb{X}$ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X).

$M^+(X,\mathbb{X})$ es el espacio de funciones medibles no negativas en $M(X,\mathbb{X})$.

Tenemos que la función f es medible, ya que si (f_n) es una sucesión de funciones medibles en $M(X,\mathbb{X}) \Longrightarrow$ las funciones:

$$f = inf\ f_n(x);\ F(x) = supf_n(x);\ f^*(x) = lim\ inf\ f_n(x) \text{ y } F^*(x) = lim\ sup\ f_n(x)$$

pertenecen a $M(X,\mathbb{X})$.

En este caso tenemos que la sucesión (f_n) es monótona creciente. Luego como $f_n\leq f_{n+1} \leq$ .....$\leq f$ se tiene lo siguiente:

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq ... \leq \int f d\mu,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

(ya que si $f, g \in M^+(X,\mathbb{X})$ y $f \leq g \Longrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$),

luego entonces,

$$lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Ahora se establecerá la desigualdad opuesta, para esto es necesaria la siguiente definición.

Definición 25.1 (Función simple): Una función simple es una función medible que toma un número finito de valores.

Continuando, sea $0 < \alpha < 1$ y sea φ una función simple que satisface $0 \leq \varphi \leq f$,

también sea,

$$A_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$$

se tiene que $A_n \in \mathbb{X}$ $(n \in \mathbb{N})$, ya que las funciones f_n y φ son medibles.

De la definición tenemos que $A_n \subseteq A_{n+1}$ y además

$$X = \bigcup A_n, \text{ ya que } A_n \subseteq X \ (n \in \mathbb{N}) \text{ y también } X \subseteq \bigcup A_n,$$

esto se debe a que cada f_n es una función definida en X. De este modo podemos establecer que,

$$\int_{An} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{An} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu;$$

luego, como la sucesión A_n es monótona creciente cuya unión es X, por la proposición anterior se puede concluir que

$$\int \varphi d\mu = lim \int_{An} \varphi d\mu.$$

$$\text{Por lo tanto, } \alpha \int \varphi \ d\mu = lim \int_{An} \varphi d\mu$$

luego, tomando el límite cuando n tiende a infinito en la desigualdad anterior se obtiene: $\alpha \int \varphi \ d\mu \leq lim \int f_n \ d\mu$,

lo cual se cumple para $0 < \alpha < 1$, por lo que se infiere: $\int \varphi \ d\mu \leq lim \int f_n \ d\mu$,

y como φ es una función simple cualquiera en $M^+(X, \mathbb{X})$, que satisface $0 \leq \varphi \leq f$, se concluye que

$$\int f d\mu = sup_\varphi \int \varphi \ d\mu \leq lim \int f_n \ d\mu,$$

$$\text{o sea, } \int f d\mu \leq lim \int f_n \ d\mu$$

por lo tanto, hemos obtenido desigualdades en ambos sentidos, concluimos que

$$\int f d\mu = lim \int f_n \ d\mu,$$

se ha probado el teorema. ■

Ahora veamos el siguiente teorema, el cual establece una desigualdad entre la integral del límite y el límite de la integral, de una sucesión de funciones.

1.14. Lema de Fatou.

Teorema 26. *(Lema de Fatou): Para (f_n) una sucesión en $M^+(X, \mathbb{X})$ se cumple lo siguiente:*

$$\int (lim \ inf \ f_n) d\mu \leq lim \ inf \int f_n \ d\mu. \tag{1.12}$$

Demostración.

Sea $g_m = inf\{f_m, f_{m+1}, ...\}$, de esta definición se tiene que $g_m \leq f_n$ cuando $m \leq n$.

Luego integrando

$$\int g_m \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu, \, (m \leq n)$$

de aquí podemos ver que la integral $\int g_m \, d\mu$, es una cota inferior de las integrales $\int f_n \, d\mu$, $(m \leq n)$; de esto podemos establecer que $\int g_m \, d\mu$, es menor o igual que el ínfimo de $\int f_n \, d\mu$, $(m \leq n)$, luego de la definición de límite inferior tenemos que

$$\int g_m \, d\mu \leq lim \; inf \int f_n \, d\mu.$$

Ya que la sucesión (g_m) es creciente y converge a $(lim \; inf \; f_n)$, por el teorema de la convergencia monótona se obtiene que

$$\int (lim \; inf \; f_n) \, d\mu = lim \int g_m \, d\mu \leq lim \; inf \int f_n \, d\mu \, .$$

■

(Cabe observar que es necesario tener por hipótesis $f_n \geq 0$.)

1.15. Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Teorema 27. *Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables la cual converge casi donde quiera a una función real valuada medible f. Si existe una función g tal que $|f_n| \leq g \; \forall n \in \mathbb{N} \implies f$ es integrable y*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu. \tag{1.13}$$

Demostración.

Convergencia casi donde quiera significa que se tiene convergencia excepto en un conjunto de medida cero.

Luego redefiniendo las funciones f_n y f en un conjunto de medida cero se puede asumir convergencia en todo el espacio X.

Por lo tanto tenemos que f es integrable.

(si F es medible, G integrable y $|F| \leq |G| \implies F$ es integrable y $\int |F| d\mu \leq \int |G| d\mu$)

Ahora tenemos que $(g + f_n) \geq 0$ podemos aplicar el lema de Fatou para obtener lo siguiente,

$$\int g d\mu + \int f d\mu = \int (f+g) d\mu \leq lim\ inf \int (g+f_n)\ d\mu = lim\ inf(\int g d\mu + \int f_n\ d\mu) = \int g d\mu + lim\ inf \int f_n\ d\mu.$$

Por lo tanto

$$\int f d\mu \leq lim\ inf\ \int f_n\ d\mu.$$

Por otro lado tenemos que $(g - f_n) \geq 0$ otra vez aplicamos el lema de Fatou, de este modo,

$$\int g d\mu - \int f d\mu = \int\ (g-f) d\mu \leq lim\ inf\ \int (g - f_n)\ d\mu = \int g d\mu - lim\ sup\ \int f_n\ d\mu$$

por lo tanto,

$$lim\ sup \int f_n\ d\mu \leq \int f d\mu.$$

Por lo tanto, ya que tenemos las desigualdades en ambos sentidos podemos concluir la igualdad:

$$\int f d\mu = lim\ \int f_n\ d\mu\ .$$

■

Veamos la siguiente proposición que nos proporciona una subsucesión adecuada, cuando se tiene una sucesión de Cauchy.

Proposición 28. *Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (d, X), entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que*

$$d(f_{n_{k+1}}, d_{n_k}) \leq 2^{-k}.$$

Demostración.

Para cada $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que $d(f_j, f_k) < \varepsilon$, si $j, k > N(\varepsilon)$; elijamos una subsucesión de la siguiente manera:

$$n_1 > N(2^{-1}),$$
$$n_k > N(2^{-k})$$

y $n_k > n_{k-1}$, para $k = 2, 3, ...$

De esta forma, como $n_{k+1} > n_k > N(2^{-k})$, se tiene que

$$d(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) \leq 2^{-k}.$$

■

Veamos la siguiente proposición que usaremos en el teorema siguiente.

Proposición 29. *Sea $F : X \longrightarrow [0, \infty]$ una función $\mu - medible$ tal que*

$$\int F \, d\mu < \infty$$

entonces $F < \infty$, excepto en un conjunto de medida cero.

Demostración.

Sea

$$B = \{ \, x \in X \mid F(x) = \infty \, \}$$

probaremos que $\mu(B) = 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la siguiente función simple medible $k\chi_B$ satisface:

$$0 \leq k\chi_B \leq F,$$

por lo que

$$\int k\chi_B \, d\mu \leq \int F \, d\mu,$$

se concluye lo siguiente, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\mu(B) \leq \left(\tfrac{1}{k}\right) \int F \, d\mu.$$

■

A continuación, haciendo uso de los teoremas anteriores, podemos probar la completez de los siguientes espacios normados, con lo que tendremos ejemplos de espacios de Banach y espacios de Hilbert.

1.16. Teorema de Riesz-Fischer (completez de los espacios de Lebesgue $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$).

Teorema 30. *El espacio de funciones $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$, donde $1 \leq p < \infty$, es un espacio normado completo, es decir*

$$L_p(X, \mathbb{X}, \mu) \text{ es un espacio de Banach.} \tag{1.14}$$

Demostración.

La norma en $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$ está dada por:

$$\|f\|_p = \{\int |f|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}};$$

Probemos que $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$ es un espacio métrico completo. (Ver teorema 21.)

sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de Cauchy en $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$, luego si $\varepsilon > 0$ existe $M(\varepsilon)$ tal que si $m, n > M(\varepsilon) \Longrightarrow$

$$\{\int |f_m(x) - f_n(x)|^p \, d\mu \}^{\frac{1}{p}} = \|f_m(x) - f_n(x) \|_p < \varepsilon$$

luego, por la proposición anterior, existe una subsucesión $\{g_k(x)\}$ de $\{f_n(x)\}$ tal que $\|g_{k+1}(x) - g_k(x)\|_p < 2^{-k}$, donde $k \in \mathbb{N}$.

Definimos ahora la función $g(x)$ así: $g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$, de esta manera $g(x) \in M^+(X,\mathbb{X})$, es decir $|g(x)| = g(x)$.

Luego, elevando a la potencia $p \geq 1$, (la función z^p, es creciente), y considerando que la sucesión de sumas parciales converge a la serie infinita, por el lema de Fatou tenemos:

$$\int |g(x)|^p d\mu \leq \lim_{n\to\infty} inf \int \{|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|\}^p d\mu \; ,$$

a continuación, ya que $1 \leq p$, tomamos en ambos lados la raíz p-ésima (la función $z^{\frac{1}{p}}$ es creciente),

$$\{\int |g(x)|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} \leq \{\lim_{n\to\infty} inf \int \{|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|\}^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{n\to\infty} inf \; \{\int \{|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|\}^p d\mu\}^{\frac{1}{p}},$$

esto es

$$\{\int |g(x)|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{n\to\infty} inf \; \{\int \{|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|\}^p d\mu\}^{\frac{1}{p}},$$

por lo que, tomando en cuenta la definición de la norma en L_p, tenemos

$$\|g(x)\|_p \leq \lim_{n\to\infty} inf \; \|g_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1}(x) - g_k(x))\|_p$$

luego, aplicando la desigualdad de Minkowski y considerando el límite inferior, se tiene

$$\|g(x)\|_p \leq \lim_{n\to\infty} inf \; \{\|g_1(x)\|_p + \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1}(x) - g_k(x)\|_p\} \leq \|g_1(x)\|_p + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1}(x) - g_k(x)\|_p$$

a continuación, considerando que $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$, esto es

$$\|g(x)\|_p \leq \|g_1(x)\|_p + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1}(x) - g_k(x)\|_p \leq \|g_1(x)\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \|g_1(x)\|_p + 1,$$

luego, ya que por hipótesis la función $g_1(x)$ cumple con $\|g_1(x)\|_p < \infty$, de la desigualdad

$$\|g(x)\|_p \leq \|g_1(x)\|_p + 1.$$

podemos ver que la función $g(x)$ verifica que $\|g(x)\|_p < \infty$.

Ahora definamos el siguiente conjunto,

$$E = \{x \in X \mid g(x) < \infty\}$$

por la proposición anterior se tiene $\mu(X - E) = 0$ y $E \in \mathbb{X}$, por lo que la serie que define a $g(x)$, es convergente para casi toda $x \in X$, además la función $g\chi_E \in L_p$.

Se define ahora esta función f en X:

$$f(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{g_{k+1}(x) - g_k(x)\} \text{ para } x \in E \text{ ; y } f(x) = 0 \text{ si } x \notin E \text{ .}$$

Luego, ya que

$$|g_k(x)| \leq |g_1(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq g(x),$$

se tiene la siguiente situación:

la sucesión $\{g_k(x)\}$ converge $casi\ en\ todas\ partes$ a la función $f(x)$, también la sucesión $\{g_k(x)\}$ está dominada por la función integrable $g(x)$, por lo tanto, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y concluir que la función $f(x)$ es integrable.

Además como $|f(x)| \leq g(x)$, tenemos que $|f(x)|^p \leq |g(x)|^p$, luego

$$\int |f(x)|^p d\mu \leq \int |g(x)|^p d\mu,$$

lo que a su vez implica que $f(x) \in L_p$.

A continuación queremos probar que $\{g_k(x)\}$ converge a $f(x)$ en L_p.

Para esto, considerando que $|f(x) - g(x)| \leq g(x) \Longrightarrow |f(x) - g_k(x)|^p \leq g^p(x)$,

así tenemos que la sucesión $\{f(x) - g_k(x)\}$ converge a la función cero y está dominada por la función integrable $g^p(x)$, aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, podemos inferir que,

$$0 = \int 0 \ d\mu = \lim_{k \to \infty} \int |f(x) - g_k(x)| \ d\mu$$

luego

$$0 = \lim_{k \to \infty} \{ \int |f(x) - g_k(x)|^p \ d\mu \}^{\frac{1}{p}} = \lim_{k \to \infty} \|f(x) - g_k(x)\|_p$$

esto significa que la sucesión $\{g_k(x)\}$ converge en L_p a la función $f(x)$.

Luego si $m \geq M(\varepsilon)$ y k es suficientemente grande, en vista de que $g_k(x)$ es subsucesión de $f_m(x)$, se verifica lo siguiente

$$\|f_m(x) - g_k(x)\|_p < \varepsilon$$

por lo tanto, $\forall \varepsilon > 0$, siempre que $m \geq M(\varepsilon)$, se tiene que

$$\|f(x) - f_m(x)\|_p \leq \|f(x) - g_k(x)\|_p + \|g_k(x) - f_m(x)\|_p < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

es decir,

$$\lim_{m \to \infty} \|f(x) - f_m(x)\|_p = 0.$$

Así hemos probado que cada sucesión de Cauchy $\{f_n(x)\}$ en L_p, converge con la norma de L_p a una función $f(x)$ que pertenece al espacio L_p.

Por lo tanto, el espacio $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$ es un espacio normado completo (con la métrica dada por la norma en L_p), es decir, el espacio $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$ es un Espacio de Banach, cuando $1 \leq p < \infty$.

■

Ya hemos visto los espacios $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$, para $1 \leq p < \infty$, ahora veamos el caso de $p = \infty$.

1.17. El espacio $L_\infty(X, \mathbb{X}, \mu)$.

Definición 31. Se define el espacio $L_\infty(X, \mathbb{X}.\mu)$ de la siguiente manera,

$$L_\infty = L_\infty(X, \mathbb{X}, \mu) = \{\ f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \mathbb{R} \mid f \text{ es medible y } f \text{ es acotada casi en todas partes } \} \tag{1.15}$$

vemos que este espacio consta de clases de funciones donde f y g pertenecen a la misma clase de equivalencia si $f = g$, excepto en un conjunto de medida cero.

Ahora, si $f \in L_\infty$ y $N \in \mathbb{X}$ es tal que $\mu(N) = 0$ se define $S(N) = sup\{|f(x)| : x \notin N\}$.

De esta forma L_∞es un espacio normado con la norma dada por:

$$\|f\|_\infty = inf\ \{S(N) \mid N \in \mathbb{X} \text{ y } \mu(N) = 0\} \tag{1.16}$$

(de la definición está claro que este número está bien definido).

Un elemento en L_∞se llama función esencialmente acotada. De la definición se tiene que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para casi toda x.

Más aún, si $A < \|f\|_\infty$entonces existe un conjunto E con medida positiva tal que $A \leq |f(x)|$, $\forall x \in E$.

Veamos que es el caso que este espacio es un espacio normado completo.

1.18. El espacio $L_\infty(X, \mathbb{X}, \mu)$ es un espacio de Banach.

Teorema 32. *(Completez del espacio $L_\infty(X, \mathbb{X}, \mu)$): El espacio $L_\infty(X, \mathbb{X}, \mu)$ es un espacio de Banach.*

Demostración.

Hay que ver que se cumplen los axiomas de norma.

Tenemos que $\|f\|_\infty \geq 0$; $\|0\|_\infty = 0$; $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$.

Ahora sea $\|f\|_\infty = 0$, se tiene que para cada número natural k, existe un conjunto $N_k \in \mathbb{X}$ con $\mu(N_k) = 0$ tal que $|f(x)| \leq \frac{1}{k}$ para $x \notin N_k$;

sea $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ así que $N \in \mathbb{X}$ y $\mu(N) = 0$, además $|f(x)| = 0 \; \forall x \notin N$. Por lo tanto $f(x) = 0$ casi para toda x;

Por último hay que verificar la desigualdad del triángulo.

Sean $f, g \in L_\infty$, se tiene que existen N_1y N_2 en $\mathbb{X}$ que cumplen $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ tales que: $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para $x \notin N_1$;

$|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ para $x \notin N_2$.

Luego entonces $|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ para $x \notin (N_1 \cup N_2)$ lo que a su vez implica que

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

así se cumple la desigualdad del triángulo.

Para probar la completez sea (f_n) una sucesión de Cauchy en L_∞ y sea M un conjunto en $\mathbb{X}$ con $\mu(M) = 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$$

para $x \notin M$, $n = 1, 2, ...$; también $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \; \forall x \notin M$, $n, m = 1, 2, ...$;

se tiene así que la sucesión (f_n) es uniformemente convergente en $X - M$, luego se tiene:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ para } x \notin M \text{ ; y } f(x) = 0 \text{ si } x \in M.$$

Por lo tanto f es medible y además se observa que $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Así se tiene que L_∞ es completo.

Es decir $L_\infty(X, \mathbb{X}, \mu)$ es un espacio de Banach.

$\blacksquare$

Hasta este punto tenemos que los espacios $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$, son espacios de Banach. Cabe hacerse la pregunta:

¿Para algún p, $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$, es Espacio de Hilbert?; Con el fin de dar respuesta a esta interrogante, veamos que la expresión dada por

$$< f, g >= \int_X f \; \overline{g} \; d\mu. \tag{1.17}$$

es un producto interior en $L_2(X, \mathbb{X}, \mu)$; para esto se expone el siguiente teorema.

Teorema 33. *La expresión*

$$< f, g >= \int_X f \; \overline{g} \; d\mu,$$

es un producto interior en $L_2(X, \mathbb{X},\mu)$

Demostración.

Veamos que efectivamente se cumplen los axiomas de producto interior en $L_2(X, \mathbb{X}, \mu)$.

$i) < f, f >= \int_X f \; \overline{f} \; d\mu = \int_X |f|^2 \; d\mu \geq 0$, ya que $|f|^2 \geq 0$.

$ii) < f, f > = 0 = \int_X |f|^2 \; d\mu, \Longrightarrow f = 0$; de manera inversa, si $f = 0$, $< f, f >= \int_X 0 \; d\mu = 0$,

por lo tanto $< f, f > = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

$iii) < f, g >= \int_X f \; \overline{g} \; d\mu = \int_X \overline{\overline{f} g} \; d\mu = \int_X \overline{g \overline{f}} \; d\mu = \overline{\int_X g \bar{f} d\mu} = \overline{< g, f >}$.

$iv) < tf, g > = \int_X tf \; \overline{g} \; d\mu = t \int_X f \; \overline{g} \; d\mu = t < f, g >$.

$v) < f + h, g > = \int_X (f + h) \; \overline{g} \; d\mu = \int_X f \; \overline{g} \; d\mu + \int_X h \; \overline{g} \; d\mu = < f, g > + < h, g >$.

Por lo tanto se satisfacen los axiomas de producto interior.

$\blacksquare$

De esta forma se tiene que en $L_2(X, \mathbb{X}, \mu)$, el producto interior dado por $< f, g >= \int_X f \; \overline{g} \; d\mu$, induce la norma que se tenía en $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$, con $p = 2$, es decir, se cumple que $< f, f > = \int_X |f|^2 \; d\mu = \|f\|^2$.

Por lo tanto, $L_2(X, \mathbb{X}, \mu)$, es un espacio con producto interior completo con la métrica determinada por la norma que induce el producto interior, es decir $L_2(X, \mathbb{X}, \mu)$ es un **espacio de Hilbert.**

Ahora cabe hacerse la pregunta, ¿será $L_2(X, \mathbb{X}, \mu)$, el único espacio de los $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, que es espacio de Hilbert?

Para dar respuesta a esto, hacemos uso del teorema de Jordan - Von Neumann, el cual nos indica que un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si en éste se verifica la igualdad del paralelogramo.

Por ejemplo, en los espacios de sucesiones l_p, con $1 \leq p < \infty$ tomando los dos vectores básicos $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, ...)$
observamos que $\|e_1 \pm e_2\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$, y deducimos que se verifica la igualdad del paralelogramo $\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2$ sólo si $p = 2$.
Nota: en el espacio de Hilbert l_2, el producto interior toma la forma siguiente:

$$< x_n, y_n >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

De este modo, cuando $p \neq 2$, **no** se verifica la igualdad del paralelogramo. Un razonamiento análogo muestra que l_∞ tampoco verifica tal igualdad. Por lo tanto l_p con $1 \leq p \leq \infty$ $(p \neq 2)$, **no** es un espacio de Hilbert.

Ahora en el caso de los espacios $L_p = L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$, siempre se pueden encontrar dos conjuntos medibles E y F disjuntos en X que tengan medida positiva finita.

Las funciones características de estos conjuntos χ_E, χ_F están en $L_p (1 \leq p \leq \infty)$ y estas dos funciones pueden hacer el papel de los vectores e_1 y e_2 en el razonamiento del ejemplo anterior. Con esto podemos establecer que $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$, $(p \neq 2)$, **no** es espacio de Hilbert.

Así tenemos que $L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ es un espacio de Hilbert sólo en el caso $p = 2$.

Después de estos ejemplos de Espacios Normados y Espacios de Hilbert pasamos ahora al concepto de Base ortonormal en un Espacio de Hilbert.

2. ORTOGONALIDAD Y ESPACIOS DE HILBERT SEPARABLES; BASES ORTONORMALES.

A continuación se usa material basado en: [1] capítulo 3; [2] capítulo 4; [3] capítulo II, [4] capítulo 10; [7] capítulos 4 y7; [10]capítulo 14; [12] capítulos 2 y 3.

2.1. Introducción.

En esta sección introduciremos la noción de ortogonalidad en espacios de Hilbert (espacio con producto interior), este concepto nos proporciona una herramienta muy importante en lo que respecta a los operadores lineales, pues es el concepto de ortogonalidad el que nos permite establecer los operadores conocidos como proyecciones ortogonales.
Además, la ortogonalidad nos permite abordar el concepto de las bases ortonormales en espacios de Hilbert separables. Esto nos permitirá referirnos a espacios de Hilbert isomorfos.
Por último, veremos el muy importante resultado conocido como el teorema de las Series de Fourier.

2.2. Definiciones.

Definición 34. (Ortogonalidad):

1. Los elementos x, y de un espacio de Hilbert (espacio con producto interno) se llaman ortogonales si

$$< x, y >= 0, \text{ esto se denota así: } x \perp y. \tag{2.1}$$

2. Un subconjunto K de un espacio de Hilbert se llama ortogonal si $x \perp y \ \forall x, y \in K$.

3. El subconjunto K se llama ortonormal si es ortogonal y además $\|x\| = 1 \ \forall x \in K$.

4. Dos subconjuntos K, L de un espacio de Hilbert se llaman ortogonales, denotado por $K \perp L$, si $k \perp l$, $\forall k \in K$, y $\forall \ l \in L$.

5. Un vector x es ortogonal al subespacio K, si $x \perp k$, $\forall k \in K$.

6. El complemento ortogonal de un subconjunto K de un espacio de Hilbert H es:

$$K^{\perp} := \{ \ x \in H \mid x \perp K\}, \text{ tenemos que } H^{\perp} = \{0\} \text{ y } \{0\}^{\perp} = H.$$

Proposición 35. *Sea K un subconjunto de un espacio de Hilbert H, en este caso se verifica lo siguiente.*

$i)$ $K^{\perp}$ siempre es un subespacio cerrado (por lo tanto $K^{\perp}$ es de Hilbert), además

$$K^{\perp} = \overline{K}^{\perp} = \overline{K^{\perp}}.$$

$ii)$ $K^{\perp\perp} := \left(K^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{K}.$

$iii)$ Por lo tanto para un subespacio cerrado K se tiene:

$$K^{\perp\perp} = K.$$

$iv)$ Si K es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, $\Longrightarrow$ cada $x \in H$ se escribe de manera única así:

$$x = y + z, \text{ donde } y \in K \text{ y } z \in K^{\perp}.$$

En este caso se dice que H es la suma directa de K y $K^{\perp}$, se denota así:

$$H = K \oplus K^{\perp}. \tag{2.2}$$

Demostración.

Probemos $i)$, veamos que $K^{\perp}$ es un subespacio cerrado, cuando K es un subconjunto de H.

Tenemos, $K^{\perp} = \{z \in H | y \perp z, \forall y \in K\}$, luego, sea $z_n \longrightarrow z$ una sucesión convergente en $K^{\perp}$, esto es que $z_n \in K^{\perp}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

veamos que $\forall y \in K$, se tiene lo siguiente

$$< z, y > = < lim_{n\longrightarrow\infty} z_n, y > = lim_{n\longrightarrow\infty} < z_n, y > = lim_{n\longrightarrow\infty} 0 = 0,$$

donde hemos usado la continuidad del producto interior. Por lo tanto $< z, y >= 0$ $\forall y \in K$, es decir que $z \in K^{\perp}$, por lo tanto $K^{\perp}$ es un subespacio cerrado.

El hecho que $K^{\perp}$ sea un subespacio vectorial de H, es consecuencia de la bilinealidad del producto interior.

Ahora probemos que $K^{\perp} = \overline{K}^{\perp}$, para esto considere $x \in K^{\perp}$, esto es que $x \perp k$, $\forall k \in K$, es decir $< x, k >= 0$, $\forall k \in K$, luego considere una sucesión $\{k_n\}$ en el subespacio K, tal que $k_n \longrightarrow k'$, luego, como el espacio $\overline{K}$ es cerrado, tenemos que $k' \in \overline{K}$, veamos lo siguiente

$$< x, k' > = < x, lim_{n\longrightarrow\infty} k_n > = lim_{n\longrightarrow\infty} < x, k_n > = lim_{n\longrightarrow\infty} 0 = 0,$$

donde se ha usado la continuidad del producto interior, por lo tanto $< x, k' >= 0$, $\forall k' \in \overline{K}$, por lo tanto, $K^{\perp} \subseteq \overline{K}^{\perp}$.

Veamos la inclusión en el otro sentido, sea $k \in \overline{K}^{\perp}$, esto es que $k \perp \overline{K}$, en particular es cierto que $k \perp K$, por lo que $\overline{K}^{\perp} \subseteq K^{\perp}$; por lo anterior podemos concluir que

$$\overline{K}^{\perp} = K^{\perp}.$$

Probemos a continuación la igualdad $K^{\perp} = \overline{K^{\perp}}$; sabemos que el conjunto $\overline{K^{\perp}}$, es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a $K^{\perp}$, pero como $K^{\perp}$ es cerrado, se concluye que $K^{\perp} = \overline{K^{\perp}}$.

Probemos ahora $iv)$.

Tenemos los subespacios cerrados K y $K^{\perp}$, sabemos que $K \cap K^{\perp} = \{0\}$, a continuación probemos que $H = K + K^{\perp}$.

En este caso se verifica lo siguiente,

$$K \subseteq (K + K^{\perp}), \quad \text{y} \quad K^{\perp} \subseteq (K + K^{\perp}),$$

luego, ya que en general, $S_1 \subseteq S_2, \Longrightarrow S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$, se tiene

$$(K + K^{\perp})^{\perp} \subseteq K^{\perp}, \quad \text{y} \quad (K + K^{\perp})^{\perp} \subseteq K^{\perp\perp} = K,$$

por lo tanto,

$$(K + K^{\perp})^{\perp} \subseteq K \cap K^{\perp} = \{0\}, \text{ es decir, } (K + K^{\perp})^{\perp} = \{0\},$$

en definitiva, ya que $H^{\perp} = \{0\}$,

$$K + K^{\perp} = H, \text{ además, } K \cap K^{\perp} = \{0\},$$

por lo tanto

$$H = K \oplus K^{\perp}.$$

Demostración de $ii)$.

Veamos que $K^{\perp\perp} := (K^{\perp})^{\perp} = \overline{K}$; como $\overline{K}$ es un subespacio cerrado, por el inciso $i)$ y $iv)$, tenemos $\overline{K} \oplus \overline{K}^{\perp} = \overline{K} \oplus K^{\perp} = H$, de igual forma, como $K^{\perp}$ es un subespacio cerrado, se verifica que $K^{\perp} \oplus (K^{\perp})^{\perp} = H$, por lo tanto, de la definición de complemento ortogonal se concluye que $\overline{K} = (K^{\perp})^{\perp}$.

La demostración de $iii)$, es inmediata del inciso anterior.

∎

Cabe mencionar que en esta proposición se relacionan propiedades topológicas del espacio H, con propiedades geométricas (propiedades de la ortogonalidad en un espacio con producto interno).

A continuación veamos la definición de espacio métrico separable.

Definición 36. (Subconjunto denso): Un subconjunto $E \subseteq X$ de un espacio métrico es denso en X, si $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall x \in X$ $\exists e \in E$ tal que $d(x, e) < \varepsilon$.

Definición 37. (Espacio métrico separable): Un espacio métrico X es separable si contiene un subconjunto denso numerable.

Definición 38. (Sistema ortonormal completo):

Un sistema ortonormal completo en un espacio de Hilbert H es un subconjunto ortonormal S tal que $Y = \langle S \rangle$ es denso en H,

es decir el subespacio vectorial generado por S es denso en H, $\overline{Y} = H$, donde la barra corresponde a la cerradura del espacio Y,
este es el subespacio cerrado más pequeño que contiene a Y.

En otras palabras S es un sistema ortonormal completo si $\forall x \in H$ y $\forall\, \varepsilon > 0$ existe una combinación lineal

$y = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$, con $v_1, ..., v_n \in S$, tal que $\|x - y\| < \varepsilon$;

Esto quiere decir que $\forall x \in H$, $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_iv_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_iv_i$, $a_i \in \mathbb{C}$, $v_i \in S$.

2.3. Caracterización de los espacios de Hilbert separables.

Veamos en el siguiente teorema que caracteriza a los espacios de Hilbert separables.

Teorema 39. *Un espacio de Hilbert H es separable $\Longleftrightarrow$ existe un sistema ortonormal completo numerable en H.*

Demostración.

$\Longrightarrow$)
Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $F = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso en H.

Por el proceso de ortonormalización Gram-Schmidt existe un conjunto ortonormal numerable $S = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$v_n \in \langle\{u_1, ..., u_n\}\rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos que $\langle S \rangle$ es denso en H.

Sea $x \in H$ y $\varepsilon > 0$, como F es denso en H $\exists\, v_k \in F$ tal que $\|x - v_k\| < \varepsilon$ luego como $v_k \in \langle\{u_1, ..., u_k\rangle$ existen escalares $a_1, ..., a_k$ tales que $v_k = a_1u_1 + ... + a_ku_k$.

Por lo tanto $v_k \in \langle S \rangle$ y $\|x - v_k\| < \varepsilon$, osea $\langle S \rangle$ es denso en H.

$\Longleftarrow$) Sea $S = \{\, u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal completo en H y definimos

$F = \{(a_1 + ib_1)u_{n_1} + ... + (a_k + ib_k)u_{n_k} \mid k \in \mathbb{N},\, a_j, b_j \in \mathbb{Q},\, u_{n_j} \in S\ (j = 1, ..., k)\}$,

F es el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores en S con coeficientes racionales complejos (caso real $b_j = 0$).

Así F es numerable, para verificar que es F denso en H sea $x \in H$ y $\varepsilon > 0$, como S es un sistema ortonormal completo en H se tiene que $\langle S \rangle$ es denso en H.

Luego existe $y = \lambda_1u_{n_1} + ... + \lambda_ku_{n_k} \in \langle S \rangle$, tal que $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora bien para cada $j = 1, ..., k$ tomamos $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$ tales que $|a_j + b_j - \lambda_j| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{k}}$, luego si $z = (a_1 + ib_1)u_{n_1} +, ..., +(a_k + ib_k)u_{n_k}$

se tiene $\|y - z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |a_j + ib_j - \lambda_j|^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon^2}{4k}} = \frac{\varepsilon}{2}$, y por lo tanto $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \varepsilon$.

Así tenemos que $z \in F$ y F es denso en H, por lo tanto H es separable.

$\blacksquare$

Observación 40. No necesariamente un espacio de Banach separable tiene un sistema ortonormal completo, esto lo probó P. Enflo en 1973.
(Artículo de P. Halmos titulado $Hasprogress\ in\ Mathematics\ slowed\ down?$ y publicado en Amer. Math. Montly, volumen 97 - 1990 - , pág. 561-588).

Ahora bien, por el teorema anterior tenemos que cada espacio de Hilbert separable tiene un sistema ortonormal completo numerable.

Mostraremos ahora que de hecho todos los sistemas ortonormales completos son numerables, éstos se llaman BASES ORTONORMALES.

Cabe mencionar que la dimensión de un espacio vectorial es la cardinalidad de cualquiera de sus bases (ya que éstas tienen la misma cardinalidad).

2.4. Caracterización de los espacios de Hilbert separables mediante su dimensión.

Teorema 41. *Sea H un espacio de Hilbert separable y S un sistema ortonormal completo en H.*

$i)$ Si $dimH = n < \infty$ entonces S tiene n elementos y es una base para H. (Una base es un conjunto linealmente independiente que genera al espacio.)

$ii)$ Si $dim\ H = \infty$ entonces S es infinito numerable.

Demostración.

$i)$ Si $dim\ H = n <\infty$ estamos en el caso del curso básico de álgebra lineal.

$ii)$ Sea $dim\ H = \infty$, hay que mostrar que S es infinito numerable, para verificarlo construiremos una función inyectiva

$$\phi : S \longrightarrow \mathbb{N} \text{ de la siguiente forma.}$$

Sea $F = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso numerable en H, F existe porque H es separable.

Entonces para $u \in S\ \exists\ v_k \in F$ tal que $\|u - v_k\| < \frac{1}{2}$, definimos ϕ en S así: $\phi(u) = min\{k \mid \|u - v_k\| < \frac{1}{2}\}$, luego si $u, u\acute{} \in S$

por el teorema de Pitágoras,

(Teorema de Pitágoras: si $x \perp y \Longrightarrow \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$;

prueba, $\langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle$, ya que $\langle x, y\rangle = 0$),

tenemos $\|u - u'\|^2 = \|u\|^2 + \|u'\|^2 = 1 + 1 = 2$, así entonces

$\|v_{\phi(u)} - v_{\phi(u')}\| = \|v_{\phi(u)} - u + u - u' + u' - v_{\phi(u')}\| \geq \|u - u'\| - \|v_{\phi(u)} - u\| - \|u' - v_{\phi(u')}\| > \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - 1 > 0.$

Por lo tanto $v_{\phi(u)} \neq v_{\phi(u')}$, así que $\phi(u) \neq \phi(u')$,

por lo tanto ϕ es inyectiva; esto implica que el sistema ortonormal completo S es numerable.

■

De esta forma ya tenemos caracterizados a los espacios de Hilbert separables, esto por medio de su dimensión.
Ya hemos visto que en el caso de espacios de Hilbert separables la cardinalidad de cualquiera de sus bases es o finita o infinita numerable.

Teorema 42. *Sea H un espacio de Hilbert separable. Si $dim\ H = n \Longrightarrow H$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$ en el caso real);*

Si $dim\ H = \infty \Longrightarrow H$ es isomorfo a l_2.

■

Ejemplo 43. Veamos que los espacios de Hilbert l_2 y $L_2[-\pi, \pi]$ son isomorfos, ya que ambos son separables.

Pues una base numerable para l_2 es $\{\phi_k(n) = \delta_{kn}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, estas son las sucesiones que tienen un 1 en el lugar k y 0 en los demás.

Por otro lado para ver que $L_2[-\pi, \pi]$ es separable se mostrará que

$$\{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}} \tag{2.3}$$

es una base numerable para éste espacio.

Suponga que $f\perp\{e^{-ikx}\}$,esto es $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky}f(y)dy = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ hay que ver que $f = 0$.

Multiplicamos por $[e^{ikx}]$ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky+ikx}f(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}f(y)dy$,

ahora haciendo un cambio de variables obtenemos $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky}f(x+y)dy = 0$.

Luego $\left(cos\frac{y}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{ikx}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-ikx}{2}}\right)^{2k}$ es una combinación lineal de exponenciales tenemos $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(cos\frac{y}{2}\right)^{2k} f(x+y)dy = 0$,

por otro lado sabemos que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(cos\frac{y}{2}\right)^{2k} dy = \frac{2}{\pi(k+1)}$, así obtenemos $f(x) = \pi(k+1)\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(cos\frac{y}{2}\right)^{2k}(f(x) - f(x+y))dy,$

así que

$|f(x)| \le \frac{\pi(k+1)}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(cos\frac{y}{2}\right)^{2k}|f(x) - f(x+y)|dy \le \frac{\pi(k+1)}{2}\|(cos\frac{y}{2})^{2n}\|_{L_2[-\pi,\pi]}\|f(x) - f(x+y)\|_{L_2[-\pi,\pi]}$

$\le C\|f(x) - f(x+y)\|_{L_2[-\pi,\pi]} \longrightarrow 0$ (cuando $y \longrightarrow 0$) . Por lo tanto $|f(x)| \le 0$, esto es $f(x) = 0$.

La ortonormalidad se tiene de lo siguiente:

$$< e^{inx}, e^{imx} >= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(n-m)}dx = 2\pi\delta_{nm}\ . \tag{2.4}$$

Así tenemos que $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$es una base ortonormal de $L_2[-\pi,\pi]$, podemos concluir que $L_2[-\pi,\pi]$ es isomorfo a l_2.

Esto mediante la transformación lineal biyectiva $U : L_2[-\pi,\pi] \longrightarrow l_2(\mathbb{Z})$ que hace corresponder a cada función $f \in L_2[-\pi,\pi]$, la sucesión $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, en l_2 cuyo $k-ésimo$ término es el $k-ésimo$ coeficiente de Fourier de la función f, de esta forma $f \longmapsto (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ($k \in \mathbb{Z}$), esto mediante la transformada de Fourier:

$$U(f) = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

donde

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx}dx. \tag{2.5}$$

■

2.5. La proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio.

Veamos en el siguiente teorema, el concepto de proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio.

Teorema 44. *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H,*

(un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert, es él mismo un espacio de Hilbert).

de esta forma, para cada $x \in H$ $\exists$ un único $y_0 \in Y$, tal que

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\| \ \forall y \in Y \ . \tag{2.6}$$

es decir, y_0 es el vector en Y más cercano a x.

Al vector y_0 se le llama LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE x SOBRE Y, y se denota así: $Proy_Y x$.

Además, por la definición de distancia entre dos conjuntos (en este caso de un punto a un conjunto) y_0 es el único vector en Y que satisface:

$$d(x,Y) = \|x - y_0\|.$$

Demostración.

Sea $r = d(x,Y)$, para cada $n \geq 1$ tomamos $y_n \in Y$ tal que $\|x - y_n\| < r + \frac{1}{n}$.

Se mostrará que la sucesión (y_n) es de Cauchy en el espacio completo H, donde por lo tanto converge.

Por la identidad del paralelogramo se tiene:

$$\|y_n-y_m\|^2=2\|y_n-x\|^2+2\;\|y_m-x\|^2-\|y_n+y_m-2x\|^2<2\big(r+\tfrac{1}{n}\big)^2\;2\left(r+\tfrac{1}{m}\right)^2-4\|\tfrac{1}{2}(y_n-y_m)-x\|^2\leq$$

$$2\left(r^2+\tfrac{2r}{n}+\tfrac{1}{n^2}\right)+2\left(r^2+\tfrac{2r}{m}+\tfrac{1}{m^2}\right)-4r^2=4r\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}\right)+\tfrac{1}{n^2}+\tfrac{1}{m^2}\;,$$

donde se ha usado que $\frac{1}{2}(y_n+y_m)\in Y$, y entonces $\|\frac{1}{2}(y_n-y_m)-x\|\geq r$;

por otro lado, como $\frac{1}{n},\frac{1}{m}\longrightarrow 0$, se puede concluir que dado $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n,m\geq N$,

se cumple que $\|y_n-y_m\|<\varepsilon$.

Por lo tanto (y_n) converge, digamos $y_n\longrightarrow y_0$, como Y es cerrado se tiene que $y_0\in Y$. Además por la construcción de la sucesión (y_n) obtenemos que

$$\|x-y_0\|=r=d(x,Y).$$

Para mostrar la unicidad sea $z_0\in Y$ tal que $\|x-z_0\|=d(x,Y)$, por la identidad del paralelogramo tenemos que:

$$\|y_0-z_0\|^2=2\|y_0-x\|^2+2\|z_0-x\|^2-\|y_0+z_0-2x\|^2=2r^2+2r^2-4\|\tfrac{1}{2}(y_0-z_0)-x\|^2\leq 0,$$

donde se ha usado el hecho que $\|\frac{1}{2}(y_0-z_0)-x\|\geq r=d(x,Y)$.

Por lo tanto $\|y_0-z_0\|=0$, esto es $y_0=z_0$.

■

Ahora veamos el siguiente lema.

Lema 45. *Sea Y subespacio de H, $y_0\in Y$ y $x\in H$, entonces*

$$y_0=Proy_Y x\Longleftrightarrow(x-y_0)\perp Y\;. \tag{2.7}$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea $y_0=Proy_Y x$, y $w=x-y_0$. Para $y\in Y$ sea $z=\frac{<w,y>}{\|y\|^2}y$.

Tenemos que $\|w-z\|=\|x-(y_0+z)\|\geq\|x-y_0\|=\|w\|$,

entonces $\|w\|^2\leq\|w-z\|^2=\|w\|^2-<w,z>-<z,w>+\|z\|^2=$

$\|w\|^2-\frac{\overline{<w,y>}}{\|y\|^2}<w,y>-\frac{<w,y>}{\|y\|^2}<y,w>+\frac{|<w,y>|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2=\|w\|^2-\frac{|<w,y>|^2}{\|y\|^2}$, lo que implica que $|<w,y>|\leq 0$,

por lo tanto $w\perp y$ para y arbitrario. Esto es $w\perp Y$.

$Ahora\Longleftarrow$) sea $x-y_0\perp Y$, luego para $y\in Y$ se tiene $x-y_0\perp y_0-y$ (ya que $y_0-y\in Y$) de modo que por el teorema de Pitágoras

$\|x-y\|^2=\|x-y_0\|^2+\|y_0-y\|^2\geq\|x-y_0\|^2$,por lo que $\|x-y\|\geq\|x-y_0\|$ y en definitiva $d(x,Y)=\|x-y_0\|$.

Así que $y_0=Proy_Y x$.

■

Ejemplo 46. (Del lema anterior): Considere el caso en que Y es un subespacio de dimensión finita con base ortonormal $\{u_1, ..., u_n\}$.

Entonces para cada $x \in H$ se tiene: $Proy_Y x = < x, u_1 > u_1 + ... + < x, u_n > u_n$. Para mostrarlo sea

$$y_0 = < x, u_1 > u_1 + ... + < x, u_n > u_n,$$

veremos que $x - y_0 \perp Y$. Si $y \in Y$, como la base $\{u_1, ..., u_n\}$ es ortonormal ,

$$y = < y, u_1 > u_1 + ... + < y, u_n > u_n$$

(esto se verifica directamente), luego entonces

$$< x - y_0, y > = < x, y > - < y_0, y > =$$

$$< x, \sum_{i=1}^n < y, u_i > u_i > - < \sum_{i=1}^n < x, u_i > u_i, y > = \sum_{i=1}^n \overline{< y, u_i >} < x, u_i > - \sum_{i=1}^n < x, u_i > < u_i, y > = 0,$$

por lo que $x - y_0 \perp Y$.

■

Lema 47. *Para cada espacio normado H y un subconjunto linealmente independiente $\{x_1, ..., x_n\}$ en H , existe $c > 0$ tal que para $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ se tiene que $\|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|)$*

■

2.6. Los espacios normados de dimensión finita, son espacios de Banach.

Veamos el siguiente teorema muy importante, pues revela que todo espacio normado de dimensión finita es completo.

Teorema 48. *Todo subespacio Y de dimensión finita de un espacio normado H es de Banach; en particular, todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.*

Demostración.

Sea (y_m) una sucesión de Cauchy en Y. Si $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base para Y , se tiene para cada elemento de la sucesión:

$y_m = \sum_{i=1}^n \alpha_i^m e_i$.

Luego por el lema anterior, $\varepsilon > \|y_m - y_k\| = \| \sum_{i=1}^n (\alpha_i^m - \alpha_i^k) e_i\| \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i^m - \alpha_i^k|$, $\forall m, k > N(\varepsilon)$.

Entonces $\{\alpha_i^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ y por lo tanto converge a un α_i, sea $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$,así $y \in Y$

además $\|y_m - y\| = \| \sum_{i=1}^n (\alpha_i^m - \alpha_i) e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i^m - \alpha_i| \|e_i\|$ esto tiende a cero , ya que $\alpha_i^m \longrightarrow \alpha_i$.

Por lo tanto $y_n \longrightarrow y \in Y$, esto significa que el espacio Y es completo. Por que Y es un espacio de Banach.

■

De álgebra lineal, sabemos que en un espacio H de dimensión finita, si $S = \{u_1, ..., u_n\}$ es una base ortonormal, se tiene para cada $x \in H$:

$$x =< x, u_1 > u_1 + ...+ < x, u_n > u_n \ ;$$

a continuación veremos el caso general de esto.

2.7. El teorema de las series de Fourier.

Teorema 49. *(Series de Fourier):*

Sea H un espacio de Hilbert separable y $S = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de H, (esto es, un sistema ortonormal completo) entonces para cada $x \in H$ se tiene:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > u_n; \tag{2.8}$$

más aún, esta expresión de x es única, ya que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n = x, \text{ entonces } \alpha_n =< x, u_n > .$$

Definición 50. Esta expansión se llama $\mathbf{Serie\ de\ Fourier}$ para x en términos de la base ortonormal S y los escalares $< x, u_n >$ se llaman coeficientes de Fourier de x.

Demostración.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $Y_n = \langle\{u_1, ..., u_n\}\rangle$, así cada subespacio Y_n es de dimensión finita y tenemos que

$Proy_Y x = \sum_{i=1}^{n} < x, u_i > u_i = s_n (n \in \mathbb{N})$ son las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > u_n$,

como $\langle S \rangle$ es denso en H $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ y$ es de la forma $y = \alpha_1 u_{n_1} +, ..., +\alpha_k u_{n_k}$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$

por lo que si $y \in Y_N$ donde $N = máx\{\ n_1, ..., n_k\}$ tenemos que $\|x - s_N\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$;

Más aún, para $n \geq N$ se tiene que $s_N \in Y_n$, así que $\|x - s_n\| \leq \|x - s_N\| < \varepsilon$ por lo que $s_n \longrightarrow x$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} < x, u_i > u_i = x.$$

Ahora para la unicidad sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$, luego si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$

son las sumas parciales de la serie infinita entonces (por la continuidad del producto interno),

$$< s_n, u_i > \longrightarrow < x, u_i > \text{ (cuando } n \longrightarrow \infty).$$

Pero $< s_n, u_i >= 0$ (para $n < i$); $< s_n, u_i >= \alpha_i$ (para $n \geq i$), en vista de que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H, por lo tanto

$$\alpha_n =< x, u_n >,$$

hemos probado el teorema.

■

2.8. Igualdad de Parseval y desigualdad de Bessel.

Corolario 51. *Sea H un espacio de Hilbert separable y $S = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal,*

entonces para cada $x \in H$ se tiene:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, u_n > |^2. \tag{2.9}$$

Definición 52. Esta igualdad se llama IGUALDAD DE PARSEVAL.

Además para $x, y \in H$, se verifica

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > \overline{< y, u_n >}. \tag{2.10}$$

También se cumple esto:

$$\sum_{i=1}^{k} | < x, u_i > |^2 \leq \|x\|^2, \tag{2.11}$$

cuando $\{u_1, ..., u_k\}$ son ortonormales.

Definición 53. Esta última expresión se denomina DESIGUALDAD DE BESSEL .

■

3. OPERADORES LINEALES Y FUNCIONALES LINEALES.

En esta sección se usa material basado en: [1] capítulo 4; [2] capítulo 7; [8] capítulo IV; [10] capítulo 21.

3.1. Introducción.

En esta sección veremos transformaciones lineales entre espacios normados y espacios de Hilbert. Se destacan los conceptos de operadores lineales y funcionales lineales. Entre otros resultados, veremos el teorema de la representación de Riesz, el cual caracteriza a las funcionales lineales en términos del producto interior.

3.2. Definiciones.

Sea $L : E_1 \longrightarrow E_2$ una transformación lineal entre espacios normados.

Definición 54. La transformación L es continua en el punto $f \in E_1$, si cuando la sucesión $f_n \longrightarrow f$ en E_1 se tiene que $L(f_n) \longrightarrow L(f)$ en E_2.

Definición 55. La transformación L es continua si es continua en $f, \forall f \in E_1$.

Definición 56. La transformación lineal L es acotada si $\exists K \geq 0$ $(K < \infty)$ tal que $\forall f \in E_1$

$$\|L(f)\| := \|Lf\|_{E_2} \leq K\|f\|_{E_1}. \tag{3.1}$$

Definición 57. La norma de la transformación L es:

$$\|L\| = sup_{\|f\|=1}\|Lf\|_{E_2}. \tag{3.2}$$

Definición 58. Cuando $E_1 = E_2$ se dice que L es un OPERADOR LINEAL ; Cuando $E_2 = \mathbb{C}$ se dice que L es un FUNCIONAL LINEAL.

En general puede ocurrir que una función no es continua en algunos puntos y en otros sí.

Veamos que esto no ocurre en el caso de transformaciones lineales entre espacios normados.

Teorema 59. *Una transformación lineal $L : E_1 \longrightarrow E_2$ es continua $\Longleftrightarrow$ es continua en un punto.*

Demostración.

$\Longleftarrow$) Sea L continua en x_0, sea $x \in E_1$ y $(x)_n \longrightarrow x$ una sucesión convergente a x;

Se tiene que la sucesión $(x_n - x + x_0) \longrightarrow x_0$ converge en E_1 , luego tenemos que

$\|L(x_n) - L(x)\| \leq\|L(x_n - x + x_0) - L(x_0)\| \longrightarrow 0$ cuando $(n \longrightarrow \infty)$, por lo tanto L es continua;

Ahora $\Longrightarrow$) $x_0 \in E_1$.

■

Tenemos en general, que una función sea acotada no tienen nada que ver con que sea continua. En el caso de transformaciones lineales entre espacios normados esto si ocurre.

3.3. Una transformación lineal es continua si y sólo si es acotada.

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 60. *Una transformación lineal es continua $\Longleftrightarrow$ es acotada.*

Demostración.

$\Longleftarrow$) Sea L acotada y sea $(x_n) \longrightarrow \widehat{0}$ una sucesión convergente al vector cero.

Así que $\|L(x_n)\| \leq K\|x_n\| \longrightarrow 0$ (cuando $n \longrightarrow \infty$, ya que $\|\widehat{0}\| = 0$) , por lo tanto L es continua en el vector cero.

Por el teorema anterior se tiene que L es continua. Ahora $\Longrightarrow$) Sea L continua y suponga que L no es acotada, entonces

para cada $n \in \mathbb{N}\ \exists\ x_n$ en E_1 tal que $\|L(x_n)\| > n\|x_n\|$.

Sea $y = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ $(n \in \mathbb{N})$, por lo tanto $(y_n) \longrightarrow 0$ (cuando $n \longrightarrow \infty$) al mismo tiempo que $\|L(y_n)\| > 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto L no es continua ! ; por lo tanto L No acotada $\Longrightarrow$ L No continua, osea L continua $\Longrightarrow$ L acotada.

■

Observación 61. En el caso de funciones lineales entre espacios de dimensión finita tenemos que siempre son continuas y acotadas.

Observación 62. Hagamos otro apunte, en lo que respecta a funciones lineales continuidad y continuidad uniforme son lo mismo. (La continuidad uniforme dice que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que ésta δ funciona para cualquier punto del dominio).

Sabemos que las funciones lineales entre espacios vectoriales forman ellas mismas un espacio vectorial.

Además la colección de funciones lineales acotadas forman un subespacio de éste espacio. En el caso de espacios normados se tiene el siguiente teorema.

Teorema 63. *Si E_1 y E_2 son espacios normados ,se tiene que la colección de todas las transformaciones lineales acotadas $\mathfrak{B}(E_1, E_2)$ forman un espacio normado, con la norma definida así:*

$$\|L\| = sup_{\|x\|=1}\|L(x)\|, (L \in \mathfrak{B}(E_1, E_2)). \tag{3.3}$$

Las operaciones de suma y producto por escalar se definen de manera puntual.

■

Definición 64. La convergencia en $\mathfrak{B}(E_1, E_2)$ se conoce como convergencia uniforme de operadores.

En éste mismo espacio tenemos otro tipo de convergencia llamada convergencia fuerte, donde la sucesión $(L_n) \subseteq \mathfrak{B}(E_1, E_2)$, converge fuertemente a $L \in \mathfrak{B}(E_1, E_2)$ si para cada $x \in E_1$ se tiene que $\|L_n(x) - L(x)\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Ya que $\|L_n(x) - L(x)\| \leq \|L_n - L\|\|x\|$ se tiene que la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte.

En general la afirmación en el sentido opuesto no es cierta. Tenemos el siguiente teorema que establece una relación entre el espacio de funciones lineales acotadas y los espacios dominio y contradominio de tales funciones.

3.4. El espacio de Banach $\mathcal{B}(E_1, E_2)$.

Teorema 65. *Si E_1 es un espacio normado y E_2 es un espacio de Banach $\Longrightarrow \mathfrak{B}(E_1, E_2)$ es un espacio de Banach.*

Demostración.

Hay que mostrar la completez de este espacio. Sea (L_n) una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{B}(E_1, E_2)$, $(L_n : E_1 \longrightarrow E_2)$ y $x \in E_1$, un elemento arbitrario, luego

$$\|L_m(x) - L_n(x)\| \leq \|L_m - L_n\|\|x\| \longrightarrow 0, (m, n \longrightarrow \infty)$$

lo que nos dice que $(L_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en E_2 el cual es de Banach.

Por la completez de E_2, se tiene que existe un único elemento $y \in E_2$, tal que $L_n(x) \longrightarrow y$, luego como x es arbitrario en E_1 esto define una función

$L : E_1 \longrightarrow E_2$, de la siguiente manera: $L(x) = lim_{n\longrightarrow\infty} L_n(x)$.

Hay que ver que $L \in \mathfrak{B}(E_1, E_2)$ y que $\|L_n - L\| \longrightarrow 0$ (cuando $n \longrightarrow \infty$).

Tenemos que L es una función lineal ya que cada L_n es lineal.

Por otro lado como las sucesiones de Cauchy son acotadas se tiene que existe una constante M tal que $\|L_n\| \leq M \; \forall \; n \in \mathbb{N}$.

Luego $\|L(x)\| = \|lim_{n\longrightarrow\infty} L_n(x)\| \overset{*}{=} lim_{n\longrightarrow\infty} \|L_n(x)\| \leq M\|x\|$ ($*$ por la continuidad de cada L_n) por lo tanto

$\|L(x)\| \leq M\|x\|$ es decir L es acotada, osea $L \in \mathfrak{B}(E_1, E_2)$.

Ahora sea $\varepsilon > 0$ y k tal que $\|L_n - L_m\| < \varepsilon$ para $m, n \geq k$, si $\|x\| = 1$ y $m, n \geq k$ tenemos $\|L_m(x) - L_n(x)\| \leq \|L_m - L_n\| < \varepsilon$,

luego manteniendo m fijo y haciendo $n \longrightarrow \infty$ se tiene $\|L_m(x) - L(x)\| \leq \varepsilon$ si $m \geq k$, $\forall x \in E_1$ (con $\|x\| = 1$)

por lo tanto se tiene $\|L_m - L\| \leq \varepsilon$ para $m \geq k$. Esto es

$$\|L_m - L\| \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Por lo tanto $(L_n) \longrightarrow L$, en $\mathfrak{B}(E_1, E_2)$, es decir $\mathfrak{B}(E_1, E_2)$ es un espacio de Banach.

■

Por el teorema anterior tenemos que el espacio de funcionales lineales acotadas de un espacio normado E hacia el campo $\mathbb{C}$ llamado espacio dual E^* , es un espacio de Banach.

Tenemos ahora un teorema acerca de la extensión lineal continua de una función lineal definida en un subespacio de un espacio normado.

Teorema 66. *Sea L una transformación lineal continua definida de un subespacio de un espacio normado E_1 hacia un espacio de Banach E_2.*
Entonces L tiene una única extensión lineal continua definida en la cerradura de su dominio.

En particular, si el dominio de L $D(L)$, es denso en E_1, la extensión lineal continua está definida en todo E_1.

■

Ahora tenemos descripciones del espacio nulo de una transformación lineal acotada.

Teorema 67. *Si $L : E_1 \longrightarrow E_2$ una transformación lineal continua, entonces el espacio nulo*

$$N(L) = \{\ x \in E_1 \mid L(x) = 0\} \tag{3.4}$$

es un subespacio cerrado de E_1 , más aún si el dominio de L $D(L)$, es un espacio cerrado , entonces la gráfica de L,

$$gra(L) = \{(x, L(x)) \subseteq E_1 \times E_2\} \tag{3.5}$$

es un subespacio cerrado en $E_1 \times E_2$.

Demostración.

Sea (x_n) una sucesión convergente en el espacio nulo $N(L)$, esto es $x_n \longrightarrow x$, veamos que $x \in N(L)$. Además tenemos que L es una transformación lineal continua, por lo que L preserva sucesiones convergentes.

Considere lo siguiente

$$L(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

luego por la continuidad de L,

$$0 = \lim_{n\to\infty} L(x_n) = L\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = L(x) = 0$$

por lo tanto, $x \in N(L)$, esto es prueba que el subespacio nulo $N(L)$, es un subespacio cerrado.

La segunda afirmación del teorema se sigue del hecho que el producto de espacios métricos cerrados es un espacio métrico cerrado.

■

Lema 68. *Si f es un funcional lineal acotado en un espacio con producto interno E , entonces $dim\ N(f)^{\perp} \leq 1$.*

Demostración.

Si $f = 0$ se tiene que $N(f) = E$, por lo que $N(f)^{\perp} = \widehat{0}$, y entonces $dim N(f)^{\perp} = 0 \leq 1$.

Ahora sea $f \neq 0$, por la continuidad de f tenemos que (teorema anterior) $N(f)$ es un subespacio cerrado de E , por lo que $N(f)^{\perp} \neq \emptyset$,

luego sean $x_{1|}, x_2 \in N(f)^{\perp}$vectores no nulos. Como $f(x_1) \neq 0$ y $f(x_2) \neq 0$, existe un escalar $\alpha \neq 0$

tal que $f(x_1) + \alpha f(x_2) = 0 = f(x_1 + \alpha x_2)$, por lo que $(x_1 + \alpha x_2) \in N(f)$. Por otro lado ya que $N(f)^{\perp}$ es un subespacio

(el complemento ortogonal siempre es un subespacio) tenemos que como x_1y $x_2 \in N(f)^{\perp}$ se tiene que $(x_1 + \alpha x_2) \in N(f)^{\perp}$,

por lo tanto $(x_1 + \alpha x_1) \in N(f) \bigcap N(f)^{\perp}$, así que $x_1 + \alpha x_2 = 0$, ($\alpha \neq 0$) por lo que x_1y x_2 son linealmente dependientes.

Por lo tanto $dim\ N(f)^{\perp} = 1$.

■

Ejemplo 69. (Funcional lineal): Considere el espacio de Hilbert $H = L_2((a, b))$, $-\infty < a < b < \infty$, donde se define el funcional lineal dado por:

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt,$$

si x_0 denota la función constante 1 en (a, b), claramente se tiene que $f(x) =< x, x_0 >$ además f es un funcional acotado. A propósito de este ejemplo tenemos el siguiente teorema importante.

3.5. El teorema de la representación de Riesz.

Teorema 70. *Sea f un funcional lineal definido en un espacio de Hilbert H, entonces existe exactamente un elemento $x_0 \in H$, tal que*

$$f(x) =< x, x_0 >, \forall x \in H \ . \tag{3.6}$$

Más aún, se tiene $\|f\| = \|x_0\|$.

Demostración.

Si $f(x) = 0\ \forall x \in H$, se toma $x_0 = 0$ y se tiene el resultado. Asuma ahora que $f \neq 0$, por el lema II.7

se tiene que $N(f)^{\perp} = 1$. Sea $z_0 \in N(f)^{\perp}$, así para cada $x \in H$ tenemos $x = x- < x, z_0 > z_0 + < x, z_0 > z_0$,

luego como $N(f)^{\perp}$ es subespacio tenemos que $< x, z_0 > z_0 \in N(f)^{\perp}$ y así debe ser que $x- < x, z_0 > z_0 \in N(f)$, esto por el lema II.7 .

Luego entonces $f(x- < x, z_0 > z_0) = 0$ esto significa que $f(x) - f(< x, z_0 > z_0) = 0$,

osea $f(x) = f(< x, z_0 > z_0) = < x, z_0 > f(z_0) = f(z_0) < x, z_0 >= \left\langle x, \overline{z_0 f(z_0)} \right\rangle$, por lo tanto $f(x) =< x, x_0 > \forall x \in H$,

donde $x_0 = \overline{z_0 f(z_0)}$.

Ahora la unicidad, suponga que $\exists x_1 \in H$ tal que $f(x) =< x, x_1 > \forall x \in H$, entonces $< x, x_0 - x_1 >= 0\ \forall x \in H$,

en particular tenemos $< x_0 - x_1, x_0 - x_1 >= 0$ como esto sólo es posible cuando $x_0 - x_1 = 0$ tenemos que $x_0 = x_1$.

Por último $\|f\| = sup_{\|x\|=1}|f(x)| = sup_{\|x\|=1}| < x, x_0 > | \leq sup_{\|x\|=1}\{\|x\|\|x_0\|\} = \|x_0\|$, (por la desigualdad de Cauchy)

por lo tanto $\|f\| = \|x_0\|$.

■

Sabemos que el espacio dual de un espacio normado es un espacio de Banach (ya que el campo $\mathbb{K}$ es un espacio completo), en particular lo es el espacio dual H^* de un espacio de Hilbert H .

Además por el teorema anterior se tiene que existe un isomorfismo entre H y H^*, esto dado mediante $x \longmapsto x_0$ (con la notación del teorema anterior), el elemento x_0 se llama el representante de f .

Notamos que la función dada por $f(x) =< x_0, x >$ donde $x_0\ (\neq 0)$ es fijo, no es una función lineal, en vista de que

$f(\alpha x + \beta y) = < x_0, \alpha x + \beta y > = \overline{\alpha} f(x) + \overline{\beta} f(y)$. Tales funcionales son llamadas antilineales.

A continuación se presentan algunos ejemplos de operadores lineales en espacios de Hilbert.

Los operadores lineales en espacios normados son muy importantes para representar cantidades físicas, de ahí la importancia que tienen en las matemáticas aplicadas y en física-matemática.

3.6. Ejemplos de operadores lineales en espacios de Hilbert.

Ejemplo 71. El operador identidad y el operador múltiplo escalar de la identidad.

Un ejemplo sencillo de un operador lineal en un espacio de Hilbert H, es el operador identidad, éste es el que deja fijo a cada elemento así: $I(x) = x$, $\forall x \in H$.

Otro operador es el operador nulo $O(x) = 0$, el cual asigna a cada elemento del espacio el vector cero.

Ambos operadores son acotado (continuos) ya que $\|I\| = 1$, $\|O\| = 0$. El operador múltiplo escalar de I es $(\alpha I)(x) = \alpha x$.

Ejemplo 72. Un operador lineal en $\mathbb{C}^n$.

Sea A un operador lineal en $\mathbb{C}^n$ y $\{e_1, ..., e_n\}$ la base de los vectores estándar.

Considere $i, j \in \{1, 2, .., n\}$ y defina $\alpha_{ij} =< Ae_j, e_i >$, así para cada $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \in \mathbb{C}^n$ tenemos que $Ax = \sum_{j=1}^n \lambda_j Ae_j$,

luego

$$< Ax, e_i >= \sum_{j=1}^n \lambda_j < Ae_j, e_i > = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\lambda_j \ .$$

Así cada operador en el espacio de dimensión finita $\mathbb{C}^n$ puede ser representado por una matriz de $(\alpha_{ij})_{n\times n}$ y viceversa.

Este es el isomorfismo que existe entre los operadores lineales en el espacio $\mathbb{C}^n$ y las matrices de $n \times n$.

Sea A el operador representado por (α_{ij}), entonces

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2},$$

es decir A es acotado.

Ejemplo 73. El operador diferencial.

Un operador muy importante es el operador diferencial: $D(f) = f'$, el cual está definido en el espacio de funciones diferenciables.

Considere al operador diferencial en el espacio $E_1 = \{f \in L_2([-\pi, \pi]) \mid f' \in L_2([-\pi, \pi])\}$, con la norma

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ y la sucesión } f_n(x) = sen(nx),\ (n = 1, 2, ...).$$

Tenemos que

$$\|f_n\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |sen(nx)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

y

$$\|Df_n\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |ncos(nx)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = n\sqrt{\pi}, \text{ por lo tanto } \|Df_n\| = n\|f_n\|,$$

es decir, el operador diferencial no es acotado.

Ejemplo 74. El operador integral.

Otra clase de operadores es el operador integral T dado por:

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt, \tag{3.7}$$

donde a y b son finitos o infinitos y la función K está definida en $(a,b) \times (a,b)$. Ésta función K se llama el núcleo del operador, el dominio del operador integral depende de la función K.

Si $\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dtds < \infty$, se tiene que el operador T es acotado en $L_2([a,b])$ y

$$\|T\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, dtds},$$

ya que $\forall\, x \in L_2([a,b])$ tenemos (por la desigualdad Cauchy-Schwarz),

$$\|Tx\|^2 = \int_a^b \left| \int_a^b K(s,t)x(t)dt \right|^2 ds \leq \int_a^b (\int_a^b |K(s,t)|^2 dt \int_a^b |x(t)|^2 dt) ds,$$

$$\leq \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, dtds \int_a^b |x(t)|^2 dt,$$

por lo tanto

$$\|Tx\| \leq \|x\| \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, dtds},$$

el operador T es acotado.

Ejemplo 75. El operador multiplicación.

Sea $z \in C([a,b])$ y sea A un operador definido en $L_2([a,b])$ así: $(Ax)(t) = z(t)x(t)$, por definición tenemos que es lineal. La función z es llamada el multiplicador.
Luego

$$\|Ax\|^2 = \int_a^b |x(t)|^2|z(t)|^2 dt \leq \max_{[a,b]}|z(t)|^2 \int_a^b |x(t)|^2 dt,$$

por lo tanto

$$\|Ax\| \leq \max_{[a,b]} |z(t)| \|x\|$$

el operador multiplicación es acotado.

La notación producto AB en el contexto de operadores tiene el sentido de la composición de funciones: $(AB)(x) = A(B(x))$.

En general no se tiene que $AB = BA$, por ejemplo en el espacio de funciones diferenciales en $\mathbb{R}$ los operadores $Af(x) = xf(x)$ y $D = \frac{d}{dx}$,
tenemos $AD \neq DA$.

El cuadrado de un operador A se define como $A^2 = A(A(x)) = AA(x)$, luego de manera inductiva: $A^n = A^{n-1}$, para $n = 0$ esto es $A^0 = I$ es operador identidad. Es natural esperar que el producto de operadores acotados sea acotado esto lo veremos un teorema posterior.

El espacio de operadores acotados de un espacio de Banach E, $\mathfrak{B}(E,E) = \mathfrak{B}(E)$ (y por lo tanto lo mismo sucede si E es espacio de Hilbert) es un espacio de Banach, además en $\mathfrak{B}(E)$ también se tiene definido un producto de operadores AB, en este caso se dice que $\mathfrak{B}(E)$ es un ÁLGEBRA DE BANACH.

Definición 76. Un álgebra de Banach M es un espacio de Banach donde además de las operaciones usuales de espacio vectorial ,

se tiene definida una operación llamada producto de vectores : $M \times M \longrightarrow M$.

Teorema 77. *El producto AB de operadores acotados es acotado, además $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.*

Demostración.
Sean A y B operadores acotados en un espacio normado E. $\|A\| = K_1$, $\|B\| = K_2$ luego $\|ABx\| \leq K_1 \|Bx\| \leq K_1 K_2 \|x\|$, $\forall x \in E$.

■

Veamos a continuación en detalle un poco de los funcionales llamados bilineales y sus formas cuadráticas asociadas.

3.7. Funcionales bilineales y formas cuadráticas asociadas.

En esta sección se usa material de: [1] capítulo 4; [8] capítulo III, [10] capítulo 21.

Definición 78. (Funcional Bilineal):

Un funcional Bilineal ϕ en un $\mathbb{C}-$ espacio vectorial E es una función $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisface dos condiciones:

$$i)\ \phi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\phi(x_1, y) + \beta\phi(x_2, y);$$

$$ii)\ \phi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}\phi(x, y_1) + \overline{\beta}\phi(x, y_2)\ ,\ \forall\alpha, \beta\in\mathbb{C} \text{ y } \forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2\in\mathbb{C}.$$

Notamos que un funcional bilineal es lineal en el primer argumento y antilineal en el segundo.
$Nota$: Algunos autores usan el término $sesquilineal$, y en cambio usan el término $bilineal$ cuando es lineal en los dos argumentos.

Ejemplo 79. El producto interior es un funcional bilineal.

Por lo que todo lo que se dice de un funcional bilineal se aplica para el producto interno en un espacio dotado de éste.

Ejemplo 80. Sean A y B operadores lineales en un espacio con producto interno E, entonces las funciones siguientes son funcionales bilineales:

$$\phi_1(x, y) = < Ax, y >,$$
$$\phi_2(x, y) =< x, By >,$$
$$\phi_3(x, y) =< Ax, By >.$$

Ejemplo 81. Sean f, g funcionales lineales en un espacio vectorial E, entonces $\phi(x, y) = f(x)\overline{g(y)}$ es un funcional bilineal en E.

Veamos a continuación la siguiente definición en cuanto a funcionales bilineales.

Definición 82. Sea ϕ un funcional bilineal en el espacio E.

$a)$ ϕ se llama funcional bilineal simétrico si $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$,$\forall x, y \in E$.

$b)$ ϕ se llama funcional bilineal positivo si $\phi(x, x) \geq 0$, $\forall x \in E$.

$c)$ ϕ se llama funcional bilineal estrictamente positivo si $\phi(x, x) > 0\ \forall x \neq 0$.

$d)$ Si E es un espacio normado, el funcional bilineal ϕ es acotado si $|\phi(x, y)|\leq K\|x\|\|y\|$, para algún $K > 0$ y $\forall x, y \in E$.

La norma de un funcional bilineal acotado es:

$$\|\phi\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\phi(x, y)|. \tag{3.8}$$

Observamos que para un funcional bilineal acotado ϕ en E se tiene: $|\phi(x, y)| \leq\|\phi\|\|x\|\|y\|$. También notamos que el producto interno es un funcional bilineal estrictamente positivo.

Si $f = g$ en el ejemplo $iii)$ se tiene que ϕ es simétrico y positivo; Si los operadores A y B en el ejemplo $ii)$ son acotados, tenemos que ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 son acotados.

También en el ejemplo $iii)$ si los funcionales f y g son acotados, entonces el funcional bilineal ϕ es acotado.

Tenemos ahora la definición siguiente que tiene que ver con las funcionales bilineales.

Definición 83. Sea ϕ un funcional bilineal en el espacio vectorial E.

La función $\Phi(x) : E \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(x) = \phi(x, x), \tag{3.9}$$

es llamada Forma Cuadrática asociada a la funcional bilineal ϕ.

Una forma cuadrática en un espacio normado E es acotada si existe una constante $K > 0$ tal que

$$|\Phi(x)| \leq K\|x\|^2 \ \forall x \in E. \tag{3.10}$$

La norma de una forma cuadrática se define como:

$$\|\Phi\| = \sup_{\|x\|=1} |\Phi(x)|. \tag{3.11}$$

Un funcional bilineal y su forma cuadrática asociada están relacionadas de manera similar a la relación que existe entre el producto escalar y la norma asociada a éste, dado por $\|x\|^2 =< x, x >$.

Teorema 84. *(Identidad de Polarización): Sean ϕ y Φ un funcional bilineal y su forma cuadrática asociada respectivamente en el espacio vectorial E, así se cumple lo siguiente:*

$$4\phi(x, y) = \Phi(x + y) - \Phi(x - y) + i\Phi(x + iy) - i\Phi(x - iy) \ , \forall x, y \in E. \tag{3.12}$$

■

Corolario 85. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 funcionales bilineales en el espacio E tales que $\phi_1(x, x) = \phi_2(x, x) \ \forall x \in E$,*

entonces se tiene que $\phi_1 = \phi_2$, es decir $\phi_1(x, y) = \phi_2(x, y)$, $\forall x, y \in E$.

De manera similar , si A y B son operadores en E tales que $< Ax, x >=< Bx, x > \forall x \in E$, tenemos que $A = B$.

Demostración.
Si $\phi_1(x, x) = \phi_2(x, x) \ \forall x \in E$, se tiene que sus formas cuadráticas asociadas son iguales $\Phi_1 = \Phi_2$, luego por el teorema anterior tenemos que

$\phi_1(x, y) = \phi_2(x, y)$. En el caso de los operadores , hacemos $\phi_1(x, y) =< Ax, y >$ y $\phi_2(x, y) =< Bx, y >$.

$\blacksquare$

Teorema 86. $i)$ *Un funcional bilineal ϕ en un espacio E es simétrico $\Longleftrightarrow$ su forma cuadrática asociada Φ es real.*

$ii)$ Un funcional bilineal ϕ en un espacio normado E es acotado $\Longleftrightarrow$su forma cuadrática asociada Φes acotada, más aún :

$$\|\Phi\| \leq \|\phi\| \leq 2\|\Phi\|.$$

$iii)$ Si un funcional bilineal ϕ en un espacio normado E es simétrico y acotado, entonces para su forma cuadrática asociada Φse tiene:

$$\|\phi\| = \|\Phi\|.$$

$\blacksquare$

Teorema 87. *Sea A un operador acotado en un espacio de Hilbert H, entonces el funcional bilineal definido por:*

$$\phi(x, y) = < x, Ay > \text{ es acotado y } \|A\| = \|\phi\|.$$

Demostración.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $x, y \in H$ tenemos $|\phi(x, y)| \leq | < x, Ay > | \leq \|x\|\|Ay\| \leq \|A\|\|x\|\|y\|$,

por lo que ϕ es acotado y $\|\phi\| \leq \|A\|$.

Por otro lado , $\|Ax\|^2 = | < Ax, Ax > | = |\phi(Ax, x)| \leq \|A\|\|\phi\|\|x\|$, así que para $Ax \neq 0$ se tiene $\|Ax\| \leq \|\phi\|\|x\|$.

Además para $Ax = 0$ la desigualdad es cierta, por lo tanto $\|A\| \leq \|\phi\|$. Así concluimos que $\|A\| = \|\phi\|$.

$\blacksquare$

Teorema 88. *Sea ϕ un funcional bilineal en un espacio de Hilbert H, entonces existe un único operador acotado A en H tal que:*

$$\phi(x, y) = < x, Ay > \forall x, y \in H \ . \tag{3.13}$$

Demostración.

Para cada fijo $y \in H$ $\phi(x, y)$ es un funcional lineal acotado en H, por el teorema de representación de Riesz

existe un único $Ay$$\in H$ tal que $\phi(x, y)$ $=< x, Ay > \forall x \in H$, hay que probar que el operador definido por $y \longmapsto Ay$ es acotado en H.

Sean $x, y_1, y_2 \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, luego

$$< x, A(\alpha y_1 + \beta y_2 >= \phi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}\phi(x, y_1) + \overline{\beta}\phi(x, y_2) = < x, \alpha Ay_1 + \beta Ay_2 >,$$

además se tiene la linealidad $A(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha Ay_1 + \beta Ay_2$. Hay que mostrar ahora que A es acotado, como tenemos que ϕ es acotado tenemos

$$| < x, Ay > | = |\phi(x, y)| \leq k\|x\|\|y\|,$$

esto para $k > 0$ y $x, y \in H$, en particular para $x = Ay$, se obtiene:

$$\|Ay\|^2 = | < Ay, Ay > | = |\phi(Ay, y)| \leq k\|Ay\|\|y\|,$$

por lo que para $Ay \neq 0$ $\|Ay\| \leq k\|y\|$ además esto también esto se satisface para $Ay = 0$,

esto prueba que A es acotado.

Ahora para probar la unicidad notamos que si $< x, Ay >=< x, By > \forall x, y \in H$, esto implica que $A = B$ por un corolario anterior.

■

Para ver el teorema de Lax-Milgram tenemos la siguiente definición.

Definición 89. Un funcional bilineal ϕ en un espacio normado E se llama elíptico si existe una constante $k > 0$ tal que $\forall x \in E$,

$$k\|x\|^2 \leq \phi(x, x), \tag{3.14}$$

Notamos que el producto interno es un funcional bilineal elíptico, ya que cumple la igualdad con $k = 1$.

■

4. OPERADORES ADJUNTOS Y AUTOADJUNTOS.

A continuación se usa material basado en: [1] capítulo 4; [2] capítulo 7; [3] capítulo VI; [7] capítulo 8; [8] capítulo IV; [9] capítulos 3 y 8; [10] capítulo 22 y 23; [13] capítulos II y III; [14] capítulo 7.

4.1. Introducción.

En esta sección, veremos que dado un operador acotado $A,$ siempre es posible referirnos a otro operador llamado el adjunto de A. Veremos los conceptos de operador normal, isométrico, unitario y positivo. Entre estos operadores, se destacan aquellos que cumplen la condición de ser iguales a su adjunto, estos son los operadores autoadjuntos.

Sea A un operador acotado en un espacio de Hilbert H , para cada fijo $x_0 \in H$ el funcional lineal definido en H por:

$$f(x) =< Ax, x_0 >, \tag{4.1}$$

es acotado . Luego por el teorema de representación de Riesz existe un único $y_0 \in H$ tal que

$f(x) =< x, y_0 > \forall x \in H.$ Esto es $< Ax, x_0 >=< x, y_0 > \forall x \in H.$

De esta forma tenemos un operador que hace la asignación $x_0 \longmapsto y_0$, y lo denotamos por A^*.

Esto esta bien definido en vista de la unicidad del elemento y_0 que le corresponde a x_0 por el teorema de representación de Riesz,
además es lineal ya que está dado en términos del operador A y el producto interno.

De esta forma se tiene $< Ax, y >=< x, A^*y > \forall x, y \in H$.

A propósito de este hecho, tenemos la existencia del siguiente operador muy importante.

4.2. El operador adjunto de un operador acotado.

Definición 90. Sea A un operador acotado en un espacio de Hilbert H, el operador $A^* : H \longrightarrow H$ definido $\forall x, y \in H$ por:

$$< Ax, y >=< x, A^*y > \tag{4.2}$$

se llama $OPERADOR\ ADJUNTO$ de A .

Proposición 91. *Como consecuencia de la definición de operador adjunto se tienen las siguientes propiedades para cualesquiera operadores A y B, $(\alpha \in \mathbb{C})$.*

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$

$$(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$$

$$(A^*)^* = A$$

$$I^* = I$$

$$(AB)^* = B^* A^*. \tag{4.3}$$

Teorema 92. *El operador adjunto A^*de un operador acotado A, es acotado. Además*

$$\|A\| = \|A^*\| \text{ y } \|A^*A\| = \|A\|^2. \tag{4.4}$$

■

En general $A^* \neq A$, por ejemplo considerando $H = \mathbb{C}^2$ y $A(z_1, z_2) = (0, z_1)$, luego

$< A(x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1\overline{y_2}$; $< (x_1, x_2), A(y_1, y_2) >= x_2\overline{y_1}$, tenemos en general que $x_1\overline{y_2} \neq x_2\overline{y_1}$.

En el caso de que ambos operadores sean iguales tenemos la siguiente definición.

4.3. Operadores autoadjuntos.

Definición 93. Si $A = A^*$, es decir $< Ax, y >=< x, Ay > \forall x, y \in H$, el operador A se llama $OPERADOR\ AUTOADJUNTO$ ó $HERMITIANO$.

Nota : Algunas veces se distingue entre operador autoadjunto y operador Hermitiano, en algunos textos el operador Hermitiano $A = A^*$ tiene como dominio $\mathcal{D}(A) \subseteq H$, cualquier subconjunto del espacio de Hilbert H , mientras que el operador autoadjunto $A = A^*$ tiene como dominio $\mathcal{D}(A) = H$.

Ejemplo 94. Un operador lineal A en $\mathbb{C}^n$ lo representamos por una matriz (a_{ij}), para que A sea autoadjunto es necesario que $(a_{ij}) = \overline{(a_{ji})}$.

Una matriz que satisface tal igualdad se llama Hermitiana.

Ejemplo 95. Sea A el operador en $L_2([a, b])$ definido por: $(Ax)(t) = tx(t)$, luego como

$$< Ax, y >=\int_a^b tx(t)\overline{y(t)}dt = \int_a^b x(t)\overline{ty(t)}dt =< x, Ay >,$$

vemos que el operador A es autoadjunto.

Ejemplo 96. Considere al operador A en $L_2(\mathbb{R})$ definido por $(Ax)(t) = e^{-|t|}x(t)$, este operador es acotado (continuo) y además:

$< Ax, y >= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)}dt =\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{[e^{-|t|}y(t)]}dt =< x, Ay >$, por lo que A es autoadjunto.

Teorema 97. *Sea A un operador acotado en un espacio de Hilbert H; se tiene que los operadores: $A^*A = T_1$ y $A + A^* = T_2$ son autoadjuntos.*

Demostración.

$\forall x, y \in H$ se tiene

$$< T_1x, y >=< A^*Ax, y >=< Ax, Ay >=< x, A^*A >=< x, T_1y >;$$

luego,

$$< T_2x, y >=< (A + A^*)x, y >=< x,(A + A^*)^*y > = < x,(A + A^*)y >=< x, T_2y >;$$

así que ambos operadores son autoadjuntos.

■

Teorema 98. *El producto de dos operadores autoadjuntos es autoadjunto $\Longleftrightarrow$ los operadores conmutan.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sean A y B operadores autoadjuntos , $< ABx, y >=< Bx, Ay >=< x, BAy >$ por lo que el producto es autoadjunto si $AB = BA$.

$\Longleftarrow$) Sea AB autoadjunto , entonces de la igualdad anterior se tiene que $AB = (AB)^* = BA$, los operadores conmutan.

■

Corolario 99. *Si el operador A es autoadjunto, también lo es un polinomio en A:*

$$\alpha_nA^n + ... + \alpha_1A + \alpha_0I, \tag{4.5}$$

donde los coeficientes son reales , $\alpha_n, ..., \alpha_0 \in \mathbb{R}$.

■

En la definición del operador autoadjunto A^* se asume que el dominio de A es todo el espacio H.
La existencia y unicidad del operador adjunto A^* es garantizada por el teorema de representación de Riesz .

En la práctica suele tratarse con operadores cuyo dominio es un subespacio de H, por ejemplo el operador diferencial.

En tal caso se define el operador adjunto así: Sean A: $\mathcal{D}(A) \longrightarrow H$ y B: $\mathcal{D}(B) \longrightarrow H$ operadores , $\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(B) \subseteq H$ donde sin perder generalidad se supone que $\mathcal{D}(A)$ y $\mathcal{D}(B)$ son subespacios vectoriales.

Entonces B se llama un adjunto del operador A si: $< Ax, y >=< x, By > \forall x \in \mathcal{D}(A)$ y $\forall y \in \mathcal{D}(B)$, en este caso el adjunto no necesariamente es único.

En el caso que $\mathcal{D}(A)$ sea denso en H, el adjunto sí es único. (Ver sección de operadores no acotados).

Ejemplo 100. Considere al operador diferencial D, definido un subespacio propio de $L_2(\mathbb{R})$, de las funciones diferenciables en $\mathbb{R}$, cuya derivada es de módulo cuadrado integrable. En este caso se tiene lo siguiente (ver sección 10.7.)

$$< Dx, y >= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{d}{dt}x(t)\right) \overline{y(t)} dt = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\tfrac{d}{dt}\overline{y(t)}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\left(-\tfrac{d}{dt}y(t)\right)} dt =< x, -Dy >,$$

esto es que $-D = D^*$.

A propósito de este ejemplo, veamos la siguiente.

Definición 101. Un operador A se llama ANTIHERMITIANO si $-A^* = A$.

El operador diferencial definido en el ejemplo anterior es antihermitiano, ya que $-D^* = D$.

Ejemplo 102. Ahora considere al operador $T = i\left(\frac{d}{dt}\right)$ en el espacio de las funciones diferenciables en $L_2(\mathbb{R})$, cuya derivada multiplicada por i, es de módulo cuadrado integrable. En este caso se tiene lo siguiente: (ver sección 10.7.)

$$< Tx, y >= \int_{-\infty}^{\infty} i\left(\tfrac{d}{dt}x(t)\right) \overline{y(t)} dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\tfrac{d}{dt}\overline{y(t)}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\left(i\tfrac{d}{dt}y(t)\right)} dt = < x, Ty >,$$

por lo que T es autoadjunto.

Ahora pasamos a una caracterización de los operadores acotados en términos de operadores autoadjuntos.

4.4. Operadores acotados como suma de operadores autoadjuntos.

Teorema 103. *Para cada operador acotado T en un espacio de Hilbert H, existen únicos operadores autoadjuntos A y B tales que*

$$T = A + iB \; ; T^* = A - iB \; . \tag{4.6}$$

Demostración.

Sea T un operador acotado , considere $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ y $B = \frac{1}{2}(T - T^*)$.

■

(De inmediato nos remitimos a lo que sucede con z y $\overline{z}$ en $\mathbb{C}$, $z = a + ib$; $\overline{z} = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$). Números complejos y reales; Operadores acotados y autoadjuntos.

El siguiente teorema es de importancia en la investigación de propiedades espectrales de operadores autoadjuntos.

Teorema 104. *Sea T un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert H , entonces*

$$\|T\| = sup_{\|x\|=1} | < Tx, x > | \; . \tag{4.7}$$

Demostración.

Sea $M = sup_{\|x\|=1} | < Tx, x > |$, luego si $\|x\| = 1$ se tiene

$$| < Tx, x > | \leq \|Tx\| \|x\| = \|Tx\| \leq \|T\| \|x\| = \|T\| \text{ esto implica que } M \leq \|T\|;$$

Por otro lado, sea $x \in H$ tal que $Tx \neq 0$, defina $\alpha = \sqrt{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}}$ y $z = \frac{Tx}{\alpha}$, luego se tiene

$$\|Tx\|^2 = < T(\alpha x), z > = \frac{1}{4}[< T(\alpha x + z), \alpha x + z > - < T(\alpha x - z), \alpha x - z >] \leq \frac{1}{4} M(\|\alpha x + z\|^2 + \|\alpha x - z\|^2) =$$

$$\frac{1}{2} M(\|\alpha x\|^2 + \|z\|^2) = \frac{1}{2} M[\alpha^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\alpha^2} \|Tx\|^2] = M\|x\| \|Tx\| \text{ , por lo que } \|Tx\| \leq M\|x\|$$

además esta desigualdad es trivialmente satisfecha para $Tx = 0$, por lo tanto$\|T\| \leq M$. Podemos concluir que

$$\|T\| = M = sup_{\|x\|=1} | < Tx, x > | \; .$$

■

Veamos a continuación el caso cuando un operador es invertible.

4.5. Operador inverso.

Definición 105. (Operador inverso):

Sea A un operador definido en un subespacio vectorial $\mathcal{D}(A)$ de E, un operador B definido en el rango de A $\mathcal{R}(A)$, se llama operador inverso de A si:

$$ABx = x, \forall x \in \mathcal{R}(A) \text{ y } BAx = x, \forall x \in \mathcal{D}(A)\ .$$

Un operador que tiene inverso se llama invertible. El inverso de A se denota por A^{-1} .

Si un operador tiene inverso, éste es único, ya que si B_1y B_2 son inversos de A,

$$B_1 = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = B_2.$$

Tenemos el siguiente teorema acerca de propiedades algebraicas de los operadores inversos, notamos que es un teorema propio del álgebra lineal.

Teorema 106. *Se verifican los siguiente incisos.*

$a)$ El inverso de un operador lineal es lineal.

$b)$ Un operador A es invertible si y solo si $Ax = 0$ implica $x = 0$.

$c)$ Si un operador A es invertible y $x_1, ..., x_n$ son vectores linealmente independientes, entonces los vectores $Ax_1, ..., Ax_n$ son linealmente independientes.

$d)$ Si A y B son operadores invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

■

Ejemplo 107. (Inverso no acotado)

Sea $E = l_2$ y defina al operador A por: $A(x_1, x_2, ...) = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ..)$,

luego como

$$\|A(x_1, x_2, ...)\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2}} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \|(x_1, x_2, ...)\|$$

se tiene que A es un operador acotado.

También A es invertible cuyo inverso es:

$$A^{-1}(x_1, x_2, ...) = (x_1, 2x_2, 3x_3, ...),$$

pero A^{-1} no es acotado, ya que considere en l_2 la base estándar (e_n) en cuya coordenada n-ésima tiene 1 y 0 en las demás. Así que $\|e_n\| = 1$ y $\|A^{-1}e_n\| = n$, por lo tanto A^{-1} no es acotado.

Notamos que si E es de dimensión finita, el inverso de cualquier operador invertible es acotado, ya que los operadores lineales en espacios de dimensión finita son acotados.

Veamos el siguiente teorema acerca del inverso de una transformación lineal.

Teorema 108. *Sea $A : X \longrightarrow Y$, una transformación lineal entre espacios normados, la transformación lineal inversa A^{-1}, existe y es acotada en el rango de A $\mathcal{R}(A)$, si y sólo si*

$$k\|x\| \leq \|Ax\|, \forall x \in X, \text{ para alguna } k > 0.$$

Demostración.

$\Longrightarrow)$

Se tiene que la transformación lineal A^{-1} existe en $\mathcal{R}(A)$ y es acotada, esto significa que existe alguna constante $M > 0$, tal que

$$\|A^{-1}Ax\| \leq M\|Ax\|,$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|Ax\|,$$

al poner $k = \frac{1}{M}$, tenemos el resultado.

Ahora
$\Longleftarrow)$

Veamos que en este caso la transformación lineal A^{-1} existe en $\mathcal{R}(A)$, para esto basta mostrar que A es inyectiva. Sea x tal que $Ax = 0$, luego

$$k\|x\| \leq 0, \text{ por lo que, } \|x\| = 0,$$

por lo tanto $x = 0$, de esta forma A es inyectiva, por lo tanto A^{-1} existe en $\mathcal{R}(A)$.

Ahora veamos que A^{-1} es acotada, tenemos por hipótesis la desigualdad $\forall x \in X$, $(k > 0)$, $k\|x\| \leq \|Ax\|$, luego sea $y \in \mathcal{R}(A)$, de esta forma, para alguna $x \in X$, se tiene $x = A^{-1}y$, por lo que

$$k\|A^{-1}y\| \leq \|A(A^{-1}y)\|, \text{ osea } \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{k}\|y\|,$$

esto vale $\forall y \in \mathcal{R}(A)$, tenemos así que A^{-1} es acotada.

■

Veamos lo siguiente.

Teorema 109. *Sea A un operador acotado en un espacio de Hilbert H tal que $\mathcal{R}(A) = H$,*

Si A tiene inverso acotado entonces el adjunto A^* es invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

■

Corolario 110. *Si un operador acotado autoadjunto A, tiene inverso acotado A^{-1}, entonces A^{-1} es autoadjunto.*

Demostración. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$.

■

4.6. Operador normal.

Definición 111. (Operador normal): Un operador acotado T se llama Operador Normal si conmuta con su adjunto, $T^*T = TT^*$. (Notamos que todo operador autoadjunto es normal) .

El siguiente teorema nos ayuda a encontrar operadores normales que no son autoadjuntos.

Teorema 112. *Un operador acotado es normal* $\Longleftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\| \ \forall x \in H.$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Tenemos $< T^*Tx, x > = < Tx, Tx >= \|Tx\|^2$ luego como T es normal se tiene

$$< T^*Tx, x >=< TT^*x, x >=< T^*x, T^*x >= \|T^*x\|^2,$$

por lo tanto

$$\|T^*x\|^2 = \|Tx\|^2, \text{ así que } \|T^*x\| = \|Tx\|.$$

Ahora $\Longleftarrow$) tenemos que $\|T^*x\| = \|Tx\|$ es decir

$$< T^*x, T^*x >=< Tx, Tx >\Longrightarrow< TT^*x, x >=< T^*Tx, x > \forall x \in H.$$

Por el corolario 85 tenemos que $T^*T = TT^*$.

■

Notamos que la condición $\|Tx\| = \|T^*x\|$ es más fuerte que $\|T\| = \|T^*\|$.

Ejemplo 113. (Operador normal no autoadjunto): Sea H un espacio de Hilbert y sea $Tx = ix\ \forall x \in H$,

como $T^*x = -ix$ tenemos que $T^* = -T$, por lo que T no es autoadjunto .

Por otro lado, $\|T^*x\| = \|-ix\| = |-i|\|x\| = \|x\|\ \forall x \in H$, también $\|Tx\| = \|ix\| = |i|\|x\| = \|x\|\ \forall x \in H$,

por lo tanto T es normal.

Ahora tenemos los siguientes teoremas referentes a operadores normales.

Teorema 114. *Si T es normal, $\Longrightarrow (\alpha I - T)$ es normal $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.*

Demostración.

Sea T normal , luego como $(\alpha I - T)^* = (\overline{\alpha} I - T^*)$ tenemos

$$(\alpha I - T)(\alpha I - T)^* = (\alpha I - T)(\overline{\alpha} I - T^*) = |\alpha|^2 I - \overline{\alpha} T - \alpha T^* + TT^* = (\alpha I - T)^*(\alpha I - T)\ .$$

■

Teorema 115. *Sea T un operador acotado en un espacio de Hilbert H y sean A y B operadores autoadjuntos en H tales que $T = A + iB$,*

se tiene que T es normal $\Longleftrightarrow$ A y B conmutan.

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea T es normal , como $T^* = A - iB$ tenemos que $TT^* = (A+iB)(A-iB) = A^2 + B^2 - i(AB - BA)$,

también se tiene $T^*T = (A - iB)(A + iB) = A^2 + B^2 + i(AB - BA)$, como T es normal debe ser que $AB - BA = 0$, esto es $AB = BA$.

Ahora $\Longleftarrow$) se asume que $AB = BA$, luego por las igualdades anteriores se tiene $TT^* = A^2 + B^2 = T^*T$, por lo que T es normal.

■

4.7. Operador isométrico.

Definición 116. (Operador Isométrico): Un operador acotado en un espacio de Hilbert H se llama Isométrico si

$$\|Tx\| = \|x\|\ \forall x \in H. \tag{4.8}$$

Ejemplo 117. (Operador isométrico): Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert H, para

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

sea A el operador dado por

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_{n+1},$$

de este modo, A es lineal y además

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|x\|^2$$

por lo que A es isométrico.

Tenemos ahora la siguiente caracterización de los operadores isométricos.

Teorema 118. *Un operador acotado T en un espacio de Hilbert H es isométrico $\Longleftrightarrow T^*T = I$, en H.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Se tiene que T es isométrico, esto es $\|Tx\| = \|x\|$ $\forall x \in H$, luego

$$< T^*Tx, x >=< Tx, Tx >=< x, x > \forall x \in H,$$

así que por el corolario 85, tenemos que $T^*T = I$.

Ahora $\Longleftarrow$) se tiene que $T^*T = I$, entonces

$$\|Tx\| = \sqrt{< Tx, Tx >} = \sqrt{< x, T^*Tx >} = \sqrt{< x, x >} = \|x\|$$

por lo tanto T es isométrico.

■

Notamos que los operadores isométricos preservan el producto interno $< Tx, Ty >=< x, y >$, en particular

$$x \perp y \Longleftrightarrow Tx \perp Ty\ . \tag{4.9}$$

Tenemos ahora la siguiente definición.

4.8. Operador unitario.

Definición 119. (Operador unitario): Un operador acotado en un espacio de Hilbert H se llama unitario si $T^*T = TT^* = I$ en H.

(En esta definición es importante que el dominio y rango de T sea todo el espacio H).

Pasamos a dar una caracterización de los operadores unitarios.

Teorema 120. *Un operador T es unitario $\Longleftrightarrow$ T es invertible y $T^* = T^{-1}$.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea T unitario , es decir

$T^*T = TT^* = I$, por lo tanto T es invertible y de la unicidad del operador inverso tenemos que $T^{-1} = T^*$.

Por otro lado

$\Longleftarrow$)
se tiene que T es invertible y $T^* = T^{-1}$, así que $T^*T = T^{-1}T = I = TT^{-1} = TT^* = I$,

por lo tanto T es unitario.

■

Corolario 121. *Para un operador unitario T se tiene:*

$i)T$ *es isométrico,*

$ii)T$ *es normal,*

$iii)T^*y\ T^{-1}$ *son unitarios.*

■

Cabe señalar que no necesariamente un operador normal es unitario, para ver esto basta considerar un operador autoadjunto A, con $\|A\| \neq 1$.

Ejemplo 122. (Operador unitario): Sea H el espacio de Hilbert de las sucesiones de números complejos

$$(...x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...) \text{ tales que } \|x\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

con el producto interno definido por: $< x, y >= \sum_{-\infty}^{\infty} x_n\overline{y_n}$,

defina el operador T por: $Tx_n = x_{n-1}$, así T es invertible ya que $T^{-1}x_n = x_{n+1}$, además

$$< Tx, y > = \sum_{-\infty}^{\infty} x_{n-1}\overline{y_n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n\overline{y_{n+1}} = < x, T^{-1}y >$$

lo que implica que $T^* = T^{-1}$, por lo tanto T es unitario.

4.9. Operadores positivos.

En esta parte se usa material de: [3] capítulo VI; [4] capítulos 22 y 23; [14] capítulo 7.

Definición 123. (Operador positivo): Un operador A se llama positivo si es autoadjunto y $< Ax, x >\geq 0\ \forall x \in H$.

Ejemplo 124. Sea ϕ una función continua no negativa en $[a, b]$, considere al operador multiplicación A en $L_2([a, b])$ definido por $Ax = \phi x$, veamos que es positivo.

Para verificar esto sea $x \in L_2([a, b])$, luego

$$< Ax, x >= \int_a^b \phi(t)x(t)\overline{x(t)}dt = \int_a^b \phi(t)|x(t)|^2 dt \geq 0,$$

el operador A es positivo.

Ejemplo 125. Sea K una función continua positiva definida en $[a, b] \times [a, b]$, el operador integral T en $L_2([a, b])$ definido por:

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt,$$

es positivo ya que

$$< Tx, x >= \int_a^b \int_a^b K(s, t)x(t)\overline{x(t)}dsdt = \int_a^b \int_a^b K(s, t)|x(t)|^2 dtds \geq 0\ \forall x \in L_2([a, b]).$$

Veamos que podemos tener siempre operadores positivos cuando tenemos operadores acotados.

Teorema 126. *Si A es un operador acotado en un espacio de Hilbert $H \Longrightarrow$ los operadores AA^* y A^*A son positivos.*

Demostración.

Tenemos $\forall x \in H$

$$< AA^*x, x > = < A^*x, A^*x >= \|A^*x\|^2 \geq 0\ ;\ < A^*Ax, x > = < Ax, Ax >= \|Ax\|^2 \geq 0.$$

■

Teorema 127. *Si A es un operador positivo invertible en un espacio de Hilbert $H \Longrightarrow A^{-1}$ es positivo.*

Demostración.

$\forall y \in \mathcal{D}(A^{-1})$ $\exists x \in H$ tal que $y = Ax$, luego

$$< A^{-1}y, y > = < A^{-1}Ax, Ax > = < x, Ax > \geq 0.$$

■

Para indicar que un operador A es positivo se escribe $A \geq 0$; si la diferencia $(A - B)$ de operadores autoadjuntos es un operador positivo escribimos $A \geq B$ de esta forma:

$A \geq B \Longleftrightarrow < Ax, x > \; \geq \; < Bx, x > \forall x \in H.$

Esta relación tiene las siguientes propiedades:

Si $A \geq B$ y $C \geq D \Longrightarrow A + C \geq B + D$.

Si $A \geq B$ y $\alpha \geq 0$ $(\alpha \in \mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha A \geq 0$.

Si $A \geq B$ y $B \geq C \Longrightarrow A \geq C$.

Teorema 128. *Si A es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert H, con $\|A\| \leq 1 \Longrightarrow A \leq I$.*

Demostración.

Como $\|A\| \leq 1$, tenemos $\forall x \in H$,

$$< Ax, x > \; \leq \; \|A\|\|x\|^2 \leq \; < x, x > \; = \; < Ix, x >.$$

■

Corolario 129. *Si A es un operador positivo en un espacio de Hilbert $H \Longrightarrow \exists \alpha > 0$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ tal que $\alpha A \leq I$.*

■

Ejemplo 130. El producto de dos operadores positivos no necesariamente es positivo. Considere en $\mathbb{R}^2$ los operadores definidos por las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que ambos operadores son positivos, pero el producto AB no es positivo.

A continuación tenemos un teorema que garantiza que el producto de algunos operadores positivos sea positivo.

Teorema 131. *El producto de dos operadores positivos A y B que conmutan en un espacio de Hilbert H es un operador positivo.*

Demostración.

Por definición de operador positivo, el operador A es autoadjunto, es decir $< A^2x, x > = < Ax, Ax > \geq 0$.

Asumiendo que el operador A no es el operador nulo, considere los operadores dados por:

$$A_1 = \frac{A}{\|A\|}, \quad A_2 = A_1 - A_1^2, \quad A_3 = A_2 - A_2^2, ..., \quad A_{n+1} = A_n - A_n^2,$$

de la definición, vemos que estos operadores A_n son autoadjuntos.

A continuación veamos que $0 \leq A_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, probaremos esto por inducción sobre n.

Para $n = 1$, considere que $\forall x \in H$,

$$< (1 - A_1)x, x > = < x, x > - < A_1x, x > = < x, x > - \frac{1}{\|A\|} < Ax, x > \geq < x, x > - \frac{1}{\|A\|}\|A\|\|x\|^2 = 0.$$

por lo tanto, $(1 - A_1) \geq 0$.

Ahora, supongan que vale el resultado para n, es decir, se verifica que $0 \leq A_n \leq 1$.

Probemos que vale para $(n + 1)$; para esto, como $A_{n+1} = A_n - A_n^2$, usando la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\left\langle A_n^2(1 - A_n)x, x\right\rangle = \langle(1 - A_n)A_nx, A_nx\rangle \geq 0,$$

por lo que

$$A_n^2(1 - A_n) \geq 0.$$

También tenemos que

$$A_n(1 - A_n)^2 \geq 0.$$

Luego, como la suma de operadores positivos es un operador positivo, se tiene

$$A_n^2(1 - A_n) + A_n(1 - A_n)^2 \geq 0.$$

efectuando operaciones esto es,

$$A_n^2 - A_n^3 + A_n - 2A_n^2 + A_n^3 = A_n - A_n^2 = A_{n+1} \geq 0.$$

Luego, como $A_n^2 \geq 0$ y por hipótesis de inducción tenemos que $(1 - A_n) \geq 0$, se tiene esto

$$(1 - A_{n+1}) = 1 - A_n + A_n^2 \geq 0,$$

por lo tanto

$$0 \leq A_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, de la definición de A_2, vemos que

$$A_1 = A_1^2 + A_2,$$

similarmente,

$$A_1 = A_1^2 + A_2^2 + A_3,$$

también

$$A_1 = A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 + A_{n+1}.$$

por lo que podemos establecer que

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2 = A_1 - A_{n+1} \leq A_1. \tag{4.10}$$

Luego entonces, como A es autoadjunto, para $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} A_i^2 x, x \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle A_i^2 x, x \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle A_i x, A_i x \right\rangle \leq \left\langle A_1 x, x \right\rangle.$$

Esto significa que la sucesión monótona

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \|A_i x\|^2 \right\}$$

es acotada, por lo tanto su límite existe, por lo tanto, el i-ésimo término de esta serie convergente tiende a cero,

$$\|A_i x\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } i \longrightarrow \infty.$$

En consecuencia, usando la ecuación (4.10),

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2 x = (A_1 x - A_{n+1} x) \longrightarrow A_1 x,$$

cuando $n \longrightarrow \infty$.

Ahora por hipótesis tenemos que el operador B conmuta con A, por lo que conmuta con cualquier A_n, así tenemos lo siguiente: (ya que $A_1 = \frac{A}{\|A\|}$)

$$\langle ABx, x \rangle = \langle \|A\| A_1 Bx, x \rangle = \|A\| \langle A_1 Bx, x \rangle = \|A\| \langle BA_1 x, x \rangle = \|A\| \left\langle B lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} A_i^2 x, x \right\rangle =$$

$$\|A\| lim_{n\longrightarrow\infty}\left\langle BA_i^2x,x\right\rangle = \|A\| lim_{n\longrightarrow\infty}\left\langle BA_ix,A_ix\right\rangle.$$

Luego, como $B\geq 0$, tenemos que $< BA_ix, A_ix > \geq 0$, $\forall i\in\mathbb{N}$,

por lo tanto,

$$< ABx, x > \geq 0,$$

el operador AB es positivo.

■

Corolario 132. *Sean A y B operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert H, si $A\leq B\Longrightarrow AC\leq BC$* para cualquier operador positivo C que conmuta con A y B.

■

El siguiente teorema nos proporciona propiedades de los operadores positivos análogas a propiedades de los números reales.

Teorema 133. *Sean $A_1\leq A_2\leq ...\leq A_n\leq ...$ operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert H tales que*

$$A_nA_m = A_mA_n\ \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

Si B es un operador autoadjunto en H tal que $A_nB = BA_n$y $A_n\leq B\ \forall n\in\mathbb{N}\Longrightarrow$

$\exists$ un operador autoadjunto A en H tal que:

$$\lim_{n\to\infty} A_nx = Ax\ \forall x\in H \text{ y } A_n\leq A\leq B\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Demostración.

Defina $C_n = B - A_n$, así los operadores C_n conmutan entre sí, además $C_1\geq C_2\geq ...\geq 0$

luego por el teorema 130, para $n > m$ los operadores $(C_m - C_n)C_m$ y $C_n(C_m - C_n)$ son positivos.

Tenemos que $< C_m^2x, x > \geq < C_mC_nx, x > \geq < C_n^2x, x > \forall x\in H$ así para un arbitrario pero fijo $x\in H$,

$(< C_k^2x, x >)$ es una sucesión decreciente de números no negativos la cual converge, así que

$$\lim_{n,m\to\infty} < C_mC_nx, x > = \lim_{n\to\infty} < C_n^2x, x >,$$

por lo que

$$\|C_mx - C_nx\|^2 =< C_mx - C_nx, C_mx - C_nx >=< (C_m - C_n)^2x, x >=< C_m^2x, x > -2 < C_mC_nx, x > + < C_n^2x, x > \longrightarrow 0$$

$(n, m \longrightarrow \infty)$.

Por lo tanto (C_nx)es una sucesión de Cauchy para cada $x \in H$ (fijo), consecuentemente (C_nx) y (A_nx) son sucesiones convergentes para cada $x \in H$.
Además el operador definido por

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_nx,$$

es autoadjunto (ya que cada $A_n$es autoadjunto) y por último también se tiene $A_n \leq A \leq B \; \forall n \in \mathbb{N}$.

■

En vista de los operadores positivos tenemos la siguiente definición.

4.10. Operador raíz cuadrada de un operador positivo.

Definición 134. (Raíz cuadrada): Una raíz cuadrada de un operador positivo A es un operador autoadjunto B que satisface $B^2 = A$.

Teorema 135. *Todo operador positivo A tiene un único operador positivo raíz cuadrada B; más aún, B conmuta con todo operador que conmuta con A.*

Demostración.

Sea $A \geq 0$ y $\alpha > 0$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ tal que $\alpha^2A \leq I$, éste α existe por corolario 129,

defina $T_0 = 0$ y

$$T_{n+1} = T_n + \tfrac{1}{2}(\alpha^2A - T_n^2),\ (n = 0, 1, 2, ...). \tag{4.12}$$

Notamos que los T_n son operadores autoadjuntos, ya que son polinomios en A con coeficientes reales, además éstos conmutan con todo operador que conmute con A,

en particular

$$T_nT_m = T_mT_n \; \forall n, m.$$

Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$I - T_{n+1} = \tfrac{1}{2}(I - T_n)^2 + \tfrac{1}{2}(I - \alpha^2A) \text{ y } T_{n+1} - T_n = \tfrac{1}{2}((I - T_{n-1}) + (I - T_n))(T_n - T_{n-1}),$$

por éstas igualdades tenemos que $T_n \leq I \; \forall n \in \mathbb{N}$ además $T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_n \leq ...$; luego $T_1 = \frac{1}{2}\alpha^2 A \geq 0 = T_0$,

luego si $T_n - T_{n-1} \geq 0$, se tiene que $T_{n+1} - T_n \geq 0$.

Ahora por el teorema 133, la sucesión (T_n) converge a un operador autoadjunto positivo T, así tomando el límite $n \longrightarrow \infty$ en la formula recursiva definida en (4.12) tenemos

$$T = T + \frac{1}{2}(\alpha^2 A - T^2) \text{ , esto es } \left(\frac{1}{\alpha}T\right)^2 = A.$$

Denotemos por $B = \frac{T}{\alpha}$,

así el operador B es positivo y $B^2 = A$, además el operador T_n $(\forall n \in \mathbb{N})$ conmuta con todo operador que conmuta con A, por lo que T y B también lo hacen.

Ahora hay que mostrar la unicidad, sea C un operador positivo tal que $C^2 = A$, luego como C conmuta con A, C conmuta con B.

Sea $x \in H$ y sea $y_0 = (B - C)x$, luego

$$< By_0, y_0 > + < Cy_0, y_0 > = < (B + C)y_0, y_0 > = < (B + C)(B - C)x, y_0 > = < (B^2 - C^2)x, y_0 > = 0$$

como B y C son operadores positivos tenemos que $< By_0, y_0 > = < Cy_0, y_0 > = 0$.

Luego si D es un operador positivo raíz cuadrada de B tenemos

$$\|Dy_0\|^2 = < D^2 y_0, y_0 > = < By_0, y_0 > = 0,$$

así que $Dy_0 = 0$ y también $By_0 = D(Dy_0) = 0$, de manera análoga podemos probar que $Cy_0 = 0$.

Por lo tanto,

$$\|Bx - Cx\|^2 = < (B - C)^2 x, x > = < (B - C)y_0, x > = 0 \; \forall x \in H,$$

por lo tanto $B = C$.

■

4.11. Operadores de proyección ortogonal.

En este tema se usa material de: [1] capítulo 4; [2] capítulo 7; [3] capítulo III; [4] capítulo 22; [9] capítulo 3.

De la sección 2 sabemos que si S es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, para cada $x \in H$ existe un único $y \in S$ tal que $x = y + z$ con $z \in S^{\perp}$. De esta manera cada subespacio cerrado induce un operador en H tal que a cada x le asigna el único y .

A propósito de este hecho, veamos la siguiente definición.

Definición 136. (Operador proyección ortogonal): Sea S un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H,

el operador P definido en H por:

$$Px = y \text{ , si } x = y + z, \text{ con } y \in S \text{ y } z \in S^{\perp} \tag{4.13}$$

se llama operador proyección ortogonal sobre S

o simplemente proyección sobre S.

El vector y se llama proyección ortogonal de x sobre S. De la descomposición de $x = y + z$

$(y \in S,\, z \in S^{\perp})$ tenemos que $< Px, x - Px >= 0\ \forall x \in H$.

De la unicidad de la definición $x = y + z$, se tiene que el operador proyección es lineal.

Ya que por el lema 45 tenemos que $y = Proy_S x \iff (x - y) \perp S.$

De la fórmula de Pitágoras tenemos que $\|Px\|^2 = \|y\|^2 = \|x\|^2 - \|z\|^2 \leq \|x\|^2$, el operador proyección es acotado,

ya que se verifica $\|P\| \leq 1$.

Tenemos el operador cero cuando $S = \widehat{0}$, cuando S no es el espacio nulo tenemos que $\|P\| = 1$ ya que para $x \in S$ $Px = x$.

El operador identidad I lo tenemos cuando $S = H$.

Ejemplo 137. (Operador proyección): Sea $\{e_1, e_2, ...\}$ una base ortonormal de un subespacio cerrado S de un espacio de Hilbert H.

El operador proyección P sobre S es : $Px = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$. En particular si la dimensión de S es uno y $v \in S$ con $\|v\| = 1$ se tiene que $Px =< x, v > v$.

Ejemplo 138. Sea $H = L_2([-\pi, \pi])$, para cada $x \in H$ se tiene una representación como $x = y + z$, donde y es una función par y z una función impar.

El operador $Px = y$ es la proyección sobre el subespacio de las funciones pares, éste operador puede representarse así:

$Px = \sum_{n=0}^{\infty} < x, \phi_n > \phi_n$, donde $\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ y $\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nt)$, $(n = 1, 2, ...)$.

Ejemplo 139. Sea $H = L_2([-\pi, \pi])$ y sea P el operador en H definido por: $(Px)(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ x(t) & si \quad t > 0 \end{cases}$,

así el operador P es la proyección sobre el subespacio de las funciones que se anulan en $t \leq 0$.

Para dar una caracterización de los operadores de proyección ortogonal, veamos la siguiente definición.

Definición 140. (Operador idempotente): Un operador T se llama idempotente si $T^2 = T$.

De la definición vemos que cada operador proyección es idempotente, ya que para $x \in S$ la proyección sobre el subespacio S es la identidad $Px = x$.

Luego como $Px \in S$ $\forall x \in H$, se tiene que $P(Px) = P^2x = Px$, $\forall x \in H$, esto muestra que todo operador proyección es idempotente.

Por otro lado considere al operador T en $\mathbb{C}^2$ definido por $T(x,y) = (x-y,0)$, éste operador es idempotente. Por otro lado se tiene esto:

$< T(x,y),(x,y) - T(x,y) >= x\overline{y} - |y|^2$, así $T(x,y)$ no necesariamente es ortogonal a $(x,y) - T(x,y)$ y por lo tanto T no es una proyección.

4.12. Operadores de proyección ortogonal: caracterización de estos.

Teorema 141. *Un operador acotado es un operador proyección $\Longleftrightarrow$ es idempotente y autoadjunto.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Ya hemos visto que la proyección es un operador idempotente, veamos que es autadjunto.
Sean $Px_1 = y_1$ y $Px_2 = y_2$ luego

$$< Px_1, x_2 >=< y_1, x_2 >=< y_1, y_2 >=< x_1, y_2 >= < x_1, Px_2 >$$

por lo tanto P es autoadjunto.

$\Longleftarrow$) Sea T un operador autoadjunto idempotente en el espacio H, defina: $S = \{x \in H | \ Tx = x\}$, como T es un operador acotado se tiene que S es un subespacio cerrado de H.

Para probar que T es un operador proyección veremos que $Tx \in S$ y $x - Tx \in S^{\perp}$, $\forall x \in H$.

El hecho que $Tx \in S$ $\forall x \in H$ se tiene porque T idempotente . Ahora sea $x \in H$ y $z \in S$,

luego

$$< x - Tx, z >=< x, z > - < Tx, z >=< x, z > - < x, z > = 0,$$

por lo tanto T es una proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado S.

■

Corolario 142. *Si P es un operador proyección sobre un subespacio de un espacio de Hilbert $H \Longrightarrow$*

$$< Px, x >= \|Px\|^2 \ \forall x \in H.$$

Demostración.

Por el teorema anterior tenemos $< Px, x > = < PPx, x > = < Px, P^*x > = < Px, Px > = \|Px\|^2$ $\forall x \in H$.

■

Ejemplo 143. (Proyección complemento): Si P es un operador proyección sobre un subespacio cerrado S, tenemos que $I - P$ es el operador proyección sobre el subespacio $S^{\perp}$.

Así se tiene que $S^{\perp} = \{x | Px = 0\}$, al operador $I - P$ suele denotarse por $P^{\perp}$ y llamarse proyección complemento.

En general la suma de dos operadores proyección no es una proyección, por ejemplo si P es un operador proyección no-cero tenemos que $P + P = 2P$ no es una proyección. Ya que $\|P + P\| = 2$, ya sabemos que la norma de una proyección es ≤ 1.

Por otro lado la suma de proyecciones $P + P^{\perp}$ si es un operador proyección. Tenemos la siguiente definición acerca de operadores proyección.

Definición 144. (Proyecciones ortogonales): Dos operadores proyección P y Q se llaman ortogonales si $PQ = 0$.

Notamos que para dos operadores proyección P y Q tenemos: $PQ = P^*Q^* = (QP)^*$ por lo que $PQ = 0 \Longleftrightarrow QP = 0$.

Teorema 145. *Dos operadores proyección $P_R : H \longrightarrow R$ y $P_S : H \longrightarrow S$, son ortogonales $\Longleftrightarrow R \perp S$.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Tenemos que $P_R P_S = 0$, si $x \in R$ y $y \in S$ tenemos $< x, y >=< P_R x, P_S y >=< x, P_R P_S y >= 0$, por lo tanto $R \perp S$.

$\Longleftarrow$) Ahora tenemos que $R \perp S$, si $x \in H$ se tiene que $P_S x \in S$ y así $P_S x \perp R$. Por lo tanto se tiene $P_R(P_S x) = 0 \; \forall x \in H$

por lo tanto las proyecciones P_R y P_S son ortogonales.

■

Veamos el siguiente resultado en el caso de suma de operadores proyección.

Teorema 146. *La suma de dos operadores proyección P_R y P_S es un operador proyección $\Longleftrightarrow P_R P_S = 0$; en tal caso se tiene:*

$$P_R + P_S = P_{R \oplus S}. \tag{4.14}$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Tenemos que $P_R + P_S$ es una proyección, por lo que

$$P_R + P_S = (P_R + P_S)^2 = P_R^2 + P_R P_S + P_S P_R + P_S^2 = P_R + P_R P_S + P_S P_R + P_S,$$

$$\Longrightarrow P_R P_S + P_S P_R = 0,$$

luego multiplicando por la izquierda la igualdad anterior por (P_R) tenemos

$$P_R P_S + P_R P_S P_R = 0 \tag{4.15}$$

ahora multiplicando por la derecha (P_R) se tiene: $P_R P_S P_R + P_R P_S P_R = 0$
osea

$$2P_R P_S P_R = 0 \tag{4.16}$$

así por (4.15) y (4.16) tenemos que $P_R P_S = 0$.

$\Longleftarrow$) Ahora tenemos que las proyecciones P_R y P_S cumplen $P_R P_S = 0$ lo que implica que $P_S P_R = 0$, de esta forma se tiene

$(P_R + P_S)^2 = P_R + P_S$ esto es que $P_R + P_S$ es idempotente.

Además es autoadjunto porque es suma de autoadjuntos, por lo tanto la suma $P_R + P_S$ es una proyección.

Por otro lado para $x \in H$ tenemos $Px := P_R x + P_S x \in R \oplus S$, más aún si $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in R$ y $x_2 \in S$, se tiene

$$Px = P_R x + P_S x = x_1 + x_2 = x,$$

por lo tanto P es la identidad en $R \oplus S$. Esto es $P_R + P_S = P_{_{R\oplus S}}$.

■

4.13. Producto de operadores de proyección ortogonal.

Teorema 147. *El producto de dos operadores proyección P_R y P_S es un operador proyección $\Longleftrightarrow$ $P_R P_S = P_S P_R$; en este caso se tiene $P_R P_S = P_{_{R\cap S}}$.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Tenemos que el producto de dos operadores proyección $P_R P_S = P$ es un operador proyección, por lo que $P^* = P$,

y de este modo tenemos

$$P_R P_S = (P_R P_S)^* = P_S^* P_R^* = P_S P_R.$$

$\Longleftarrow$) Ahora tenemos $P_S P_R = P_R P_S$, luego $(P_R P_S)^* = (P_S P_R)^* = P_R^* P_S^* = P_R P_S$ por lo tanto $P = P_R P_S$ es autoadjunto,

además

$$P^2 = (P_R P_S)^2 = P_R (P_S P_R) P_S = P_R (P_R P_S) P_S = P_R^2 P_S^2 = P_R P_S = P,$$

es decir que P es autoadjunto e idempotente

por lo tanto P es un operador proyección.

Por otro lado $\forall x \in H$ se tiene

$$Px = P_R(P_S x) = P_S(P_R x),$$

esto es $Px \in S \cap R$, más aún $\forall x \in S \cap R$ tenemos $Px = P_R(P_S x)$ $=P_R x = x$, así se obtiene que $P = P_R P_S = P_{R\cap S}$.

■

Teorema 148. *Sean R y S dos subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H, y P_R y P_S sus respectivos operadores proyección. Las siguientes condiciones son equivalentes :*

$a)$ $R \subset S$.

$b)$ $P_S P_R = P_R$.

$c)$ $P_R P_S = P_R$.

$d)$ $\|P_R x\| \leq \|P_S x\|$ $\forall x \in H$.

$e)$ $P_R \leq P_S$.

Demostración.

$a) \Longrightarrow b)$ Se tiene $R \subset S$, luego $P_R x \in S$ $\forall x \in H$, por lo que $P_S P_R x = P_R x$.

$b) \Longrightarrow c)$ Tenemos $P_S P_R = P_R$, así que $P_R = P_R^* = (P_S P_R)^* = P_R^* P_S^* = P_R P_S$.

$c) \Longrightarrow d)$ Asuma que $P_R P_S = P_R$, luego tenemos $\|P_R x\| = \|P_R P_S x\| \leq \|P_R\| \|P_S x\| \leq \|P_S x\|$.

$d) \Longrightarrow a)$ Suponga que $d)$ se cumple y que $a)$ no, así se tiene que $\exists x \in R$ tal que $x \notin S$, escribimos $x = y + z$ con $y \in S$ y $z \in S^\perp$

así tenemos que $z \neq 0$ ya que $x \notin S$, luego $\|P_R x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 > \|y\|^2 = \|P_S x\|^2$, lo que contradice $d)$
por lo tanto $R \subset S$.

$e) \Longrightarrow a)$ Tenemos para cualquier operador de proyección ortogonal lo siguiente: $\|Ez\|^2 = < Ez, Ez > = < Ez, z >$

por lo tanto,

$$\|P_R x\|^2 = < P_R x, x > \leq < P_S x, x > = \|P_S x\|^2.$$

$c) \Longrightarrow e)$ $P_R P_S = P_S P_R = P_R$, luego para $x \in H$,

$$< P_S x, x > - < P_R x, x > = < P_S x, x > - < P_S P_R x, x > = < (P_S(1 - P_R)x, x >$$

luego, como P_R y P_S conmutan, también conmutan P_S y $(1 - P_R)$, es decir

$$P_S(1-P_R) = P_S - P_S P_R = P_S - P_R P_S = (1-P_R)P_S,$$

por lo tanto, usando el teorema 146 tenemos que el operador producto $P_S(1-P_R)$ es un operador de proyección ortogonal, podemos concluir lo siguiente:

$$< P_S(1-P_R)x, x > = < P_S(1-P_R)x, P_S(1-P_R)x > = \|P_S(1-P_R)x\|^2 \geq 0$$

en definitiva, se tiene el resultado

$$< (P_S - P_S P_R)x, x > = < (P_S - P_R)x, x > = < P_S x, x > - < P_R x, x > \geq 0,$$

$$< P_S x, x > \geq < P_R x, x >,$$

$$P_S \geq P_R.$$

■

5. OPERADORES COMPACTOS.

A continuación se usa material basado en: [1] capítulo 4; [2] capítulo 8; [3] capítulo; [7] capítulo 8 y 9;
[10] capítulos 23 y 24.

5.1. Introducción.

Los Operadores Compactos constituyen una clase muy importante de Operadores Acotados. Entre otras cosas, el concepto fue originado por la teoría de ecuaciones integrales de segunda clase.
Para estos operadores, en una sección posterior se dará una representación en términos de sus vectores propios.

Definición 149. (Operadores compactos): Un operador A en un espacio de Hilbert H se llama Operador Compacto

(ó completamente continuo) si para cada sucesión acotada (x_n) en H, la sucesión (Ax_n) contiene una subsucesión convergente.

Ejemplo 150. Todo operador en un espacio de Hilbert de dimensión finita es compacto, ya que cada operador A en $\mathbb{C}^n$ es acotado y por tanto continuo.

Por lo que si (x_n) es una sucesión convergente en $\mathbb{C}^n$, la sucesión (Ax_n) es acotada en $\mathbb{C}^n$, luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass (Ax_n) contiene una subsucesión convergente.

5.2. Los operadores compactos son acotados.

Teorema 151. *Los Operadores Compactos son acotados.*

Demostración.

Si el operador A no es acotado, entonces existe una sucesión (x_n) tal que $\|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\|Ax_n\| \longrightarrow \infty$, por lo que la sucesión (Ax_n) no contiene una subsucesión convergente, por lo tanto A no es compacto.

Así hemos mostrado que A no acotado implica A no compacto; es decir, A compacto implica A acotado.

$\blacksquare$

Claro que no todo operador acotado es compacto.

Ejemplo 152. El operador identidad I en un espacio de Hilbert H de dimensión infinita no es compacto, aunque si es acotado. Ya que considere una sucesión ortonormal (u_n) en H, la cual es acotada, luego se tiene que la sucesión $(Iu_n) = (u_n)$ no contiene una subsucesión convergente. Así que I no es compacto.

Ejemplo 153. Sean y y z elementos fijos de un espacio de Hilbert H , defina $Tx =< x, y > z$, sea (x_n) una sucesión acotada.

Esto es $\|x_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$ y para alguna $M > 0$, luego tenemos

$$| < x_n, y > | \leq \|x_n\| \|y\| \leq M\|y\|,$$

(estas desigualdades tienen lugar en el espacio métrico completo $\mathbb{R}$)

por lo que la sucesión $(< x_n, y >)$ tiene una subsucesión convergente $(< x_{n_i}, y >)$.

Denotemos el límite de esta sucesión por α, así que $Tx_{n_i} =< x_{n_i}, y > z \longrightarrow \alpha z$ cuando $i \longrightarrow \infty$,
por lo tanto, T es un operador compacto.

Ejemplo 154. Un ejemplo importante de operador compacto es el operador integral T en $L_2([a,b])$ definido por:

$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt$, donde K es una función continua y $-\infty < a < b < \infty$.

Mostremos que este operador es compacto. Sea $(x_n) \in L_2([a,b])$ tal que $\|x_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$ y para alguna $M > 0$,

luego

$$|(Tx_n)(s)| \leq \int_a^b |K(s,t)x_n(t)|dt \leq M \ máx|K(s,t)|\sqrt{b-a}.$$

Así que la sucesión (Tx_n) es uniformemente acotada (la cota no depende de Tx_n, $\forall n$); más aún, para $s_1, s_2 \in [a,b]$ tenemos

$$|(Tx_n)(s_1) - (Tx_n)(s_2)| \leq \int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)||x_n(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)|^2 dt}$$

$$\leq M\sqrt{b-a} \max_{t\in[a,b]} |K(s_1,t) - K(s_2,t)| \ ,$$

luego como K es uniformemente continua, debido a que es continua en el compacto $[a,b] \times [a,b]$

(la continuidad uniforme requiere que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que ésta $\delta = \delta(\varepsilon)$ vale para cualquier punto del dominio de la función K)

se tiene que la sucesión de funciones (Tx_n) en $L_2([a,b])$ es una sucesión equicontinua.

(Una sucesión de funciones (f_n) es equicontinua si en la condición $\forall \varepsilon > 0$, la $\delta = \delta(\varepsilon)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$ y para cualquier punto del dominio de f_n.)

Por lo tanto podemos aplicar el teorema de Arzela - Ascoli,

Ver [7] capítulo 6.

y concluir que la sucesión (Tx_n) contiene una subsucesión uniformemente convergente, lo que a su vez implica que ésta subsucesión converge con la métrica del espacio $L_2([a,b])$.

Así concluimos que para cada sucesión acotada (x_n) en $L_2([a,b])$ la sucesión de imágenes bajo el operador T, (Tx_n) tiene una subsucesión convergente. Por lo tanto T es un operador compacto.

Ejemplo 155. Sea S un subespacio de dimensión finita de un espacio de Hilbert H, se tiene que el operador proyección P_S es un operador compacto. Esto en vista de la completez del subespacio de dimensión finita S.

Teorema 156. *La colección de todos los operadores compactos en un espacio de Hilbert H forman un espacio vectorial.*

Demostración.

Este resultado se sigue del hecho de que el límite de la suma de sucesiones convergentes, es la suma de los límites, al igual que el límite del producto de un escalar por una sucesión convergente, es el escalar por el límite de dicha sucesión.

■

Teorema 157. *Si A es un operador compacto en un espacio de Hilbert H y B un operador acotado en $H \Longrightarrow$ los operadores AB y BA son compactos.*

Demostración.

Sea (x_n) una sucesión acotada en H, como B es acotado tenemos que la sucesión (Bx_n) es acotada, luego como A es compacto tenemos que la sucesión (ABx_n) tiene una subsucesión convergente.

Por lo tanto AB es compacto.

Ahora como A es compacto, la sucesión (Ax_n) tiene una subsucesión convergente (Ax_{n_k}), luego como B es acotado (continuo) se tiene que la sucesión (BAx_{n_k}) es convergente, por lo que BA es compacto.

■

A propósito del ejemplo anterior, veamos el siguiente operador.

5.3. Operador de dimensión finita.

Definición 158. (Operador de dimensión finita): Un operador se llama de dimensión finita si su rango es de dimensión finita.

Teorema 159. *Un operador de dimensión finita es compacto.*

Demostración.

Sea A de dimensión finita y sea $\{z_1, ...z_k\}$ una base ortonormal del rango de A, defina $T_n x < Ax, z_n > z_n$ para $n = 1, ...k$.

Luego como $T_n x = \ < Ax, z_n > z_n \ \ =< x, A^* z_n > z_n$,

se tiene que los operadores T_n son compactos (por el ejemplo anterior), por lo tanto

$$A = \sum_{n=1}^{k} T_n$$

es compacto, en vista del teorema 156.

■

5.4. El límite de operadores compactos es compacto.

Teorema 160. *Si $T_1, T_2, ...$ son operadores compactos en un espacio de Hilbert H y $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, para algún operador T en $H \Longrightarrow T$ es compacto. (Límite de compactos es compacto.)*

Demostración.

Sea (x_n) una sucesión acotada en el espacio H, como T_1 es compacto tenemos que existe una subsucesión $(x_{1,n})$ de (x_n) tal que $(T_1 x_{1,n})$ es convergente.

De manera análoga la sucesión $(T_2 x_{1,n})$ contiene una subsucesión convergente $(T_2 x_{2,n})$.

En general para $k \geq 2$ sea $(x_{k,n})$ la subsucesión de $(x_{k-1,n})$ tal que $(T_k x_{k,n})$ es convergente.

Considere la sucesión $(x_{n,n})$ la cual es una subsucesión de (x_n), podemos poner $x_{m_n} = x_{n,n}$ (donde m_n es una sucesión creciente de números naturales)

así tenemos que la sucesión $(T_k x_{m_n})$ converge $\forall k \in \mathbb{N}$.

Veremos que la sucesión (Tx_{m_n}) es convergente. Sea $\varepsilon > 0$, como $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_k - T\| < \tfrac{\varepsilon}{3M},$$

donde M es la constante que existe por hipótesis $\|x_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Luego sea $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_k x_{m_n} - T_k x_{m_i}\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n, i > k_1$, así que

$$\|Tx_{m_n} - Tx_{m_i}\| \leq \|Tx_{m_n} - T_k x_{m_n}\| + \|T_k x_{m_n} - T_k x_{m_i}\| + \|T_k x_{m_i} - Tx_{m_n}\| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

esto para suficientemente grandes i, n.

Por lo tanto (Tx_{m_n}) es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert H, por lo tanto es una sucesión convergente. Por lo tanto el operador T es compacto.

■

Corolario 161. *El límite de una sucesión convergente de operadores de dimensión finita es un operador compacto.*

Demostración.

Los operadores de dimensión finita son compactos.

■

Ahora veamos la siguiente propiedad que se tiene acerca del adjunto de un operador compacto.

5.5. El adjunto de un operador compacto es compacto.

Teorema 162. *El adjunto de un operador compacto es compacto.*

Demostración.

Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert H y sea (x_n) una sucesión acotada en H, esto es $\|x_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Defina $y_n = T^* x_n$, $n = 1, 2, ...$; como T^* es acotado, tenemos que la sucesión y_n, es acotada . Como T es compacto se tiene que existe una subsucesión (y_{k_n}) de (y_n), tal que (Ty_{k_n}) converge en H, luego para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene :

$$\|y_{k_m} - y_{k_n}\|^2 = \|T^* x_{k_m} - T^* x_{k_n}\|^2 = \; < T^*(x_{k_m} - x_{k_n}), T^*(x_{k_m} - x_{k_n}) > \; =$$

$$< TT^*(x_{k_m} - x_{k_n}), (x_{k_m} - x_{k_n}) > \leq \|TT^*(x_{k_m} - x_{k_n})\| \|x_{k_m} - x_{k_n}\| \leq \; 2M \|Ty_{k_m} - Ty_{k_n}\| \longrightarrow 0$$

cuando $n, m \longrightarrow \infty$,

por lo tanto (y_{k_n}) es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert H, por lo tanto converge en H, por lo tanto T^*es un operador compacto.

■

A continuación el objetivo es demostrar el Teorema que establece que $UN\ OPERADOR\ T\ EN\ UN\ ESPACIO\ DE\ HILBERT\ H\ ES\ COMPACTO \iff cuando < x_n, y > \; \longrightarrow \; < x, y >$ $(\forall y \in H)$, se tiene que $Tx_n \longrightarrow Tx$.

Ésta es una caracterización de los operadores compactos en términos de la convergencia débil.

La convergencia fuerte en un espacio con producto interno es precisamente la convergencia dada por la norma que deriva del producto interno.

Esto es $(x_n) \longrightarrow x$, de manera fuerte si $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$.

Por otro lado la sucesión (x_n) converge de manera débil a x en el espacio H, $(x_n) \longrightarrow_w x$, si $\forall y \in H$
se tiene que $< x_n, y > \ \longrightarrow \ < x, y >$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

La condición de convergencia débil se puede escribir así: $< x_n - x, y > \ \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, $\forall y \in H$.

Para tal caracterización de los operadores compactos en términos de la convergencia débil necesitamos los siguientes resultados.

5.6. Series absolutamente convergentes en espacios normados.

Teorema 163. *Un espacio normado E es completo $\Longleftrightarrow$ toda serie absolutamente convergente, converge.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea E un espacio de Banach, suponga que $x_n \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$.

Defina

$$s_n = x_1 + ... + x_n, \ (n = 1, 2, ...)$$

mostraremos que (s_n) es una sucesión de Cauchy, sea $\varepsilon > 0$ y k un entero positivo tal que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon,$$

luego si $m > n > k$ tenemos

$$\|s_m - s_n\| = \|x_{n+1} + ... + x_m\| \leq \sum_{r=n+1}^{\infty} \|x_r\| < \varepsilon.$$

Esto prueba que (s_n) es una sucesión de Cauchy en E, como E es completo, tenemos que la sucesión (s_n) converge en E.

Como (s_n) está definida como sucesión de sumas parciales tenemos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, es convergente.

Ahora $\Longleftarrow$)

sea E un espacio normado en el cual cada serie absolutamente convergente, es convergente.

(Una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$).

Hay que probar que el espacio E es completo. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en E, así para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $i_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_n\| < 2^{-k}, \text{ para } m, n > i_k,$$

sin perder la generalidad podemos suponer que la sucesión de índices (i_n) es estrictamente creciente.

Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{i_{k+1}} - x_{i_k})$ es absolutamente convergente, se tiene que es convergente (esto usando la hipótesis), así que la sucesión $x_{i_k} = x_{i_1} + (x_{i_2} - x_{i_1}) + ... + (x_{i_k} - x_{i_{k-1}})$ es convergente a un elemento $x \in E$, consecuentemente

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{i_n}\| + \|x_{i_n} - x\| \longrightarrow 0,$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, ya que es una sucesión convergente (y de Cauchy), por lo tanto E es un espacio de Banach.

■

Teorema 164. *Sea E un espacio normado y sea (x_{ij}) $i, j \in \mathbb{N}$ una matriz infinita de elementos de E. Si*

$a)$ $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ij} = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

$b)$ toda sucesión creciente de índices (k_j) tiene una subsucesión (m_j) tal que: $\lim\limits_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{m_i} x_{m_j} = 0,$

entonces $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ii} = 0.$

Demostración.

Suponga que $\lim\limits_{i\to\infty} x_{ii} \neq 0$, entonces existe una sucesión creciente de índices (k_i) y algún $\varepsilon > 0$ tal que $\|x_{k_i k_i}\| \geq \varepsilon$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Por $b)$, la sucesión (k_i) tiene una subsucesión (m_i) tal que: $\lim\limits_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{m_i m j} = 0.$

Notamos que cada renglón y cada columna de la matriz $(x_{m_i m_j})$ converge a cero.

Ahora sea $r_1 = m_1$, luego sea r_2 el primer subíndice que cumple $r_2 > r_1$ y tal que

$$\|x_{m_i r_1}\| < \tfrac{\varepsilon}{4} \text{ , } \forall m_i \geq r_2 \text{ y } \|x_{r_1 r_2}\| < \tfrac{\varepsilon}{8}.$$

A continuación sea r_3 el primer subíndice tal que $r_3 > r_2$ con

$$\|x_{m_i r_2}\| < \tfrac{\varepsilon}{8} \; \forall m_i \geq r_3 \text{ y } \|x_{r_j r_3}\| < \tfrac{\varepsilon}{16}, \text{ para } j = 1, 2.$$

En el $n-$ésimo paso sea r_n el primer subíndice tal que $r_n > r_{n-1}$,

$$\|x_{m_i r_{n-1}}\| < \tfrac{\varepsilon}{2^n},\ \forall m_i \geq r_n \text{ y } \|x_{r_j r_n}\| < \tfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}\ ,\ j = 1, 2, .., n-1.$$

Continuando de esta manera construimos la matriz infinita $(x_{r_i r_j})$ tal que $\|x_{r_i r_j}\| < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$, $\forall i \neq j$.

Luego en vista de $b)$ tenemos que (r_j) tiene una subsucesión (s_j) tal que $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_{s_i s_j} = 0$.

Ahora considere la matriz $(x_{s_i s_j})$, así para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_{s_i s_j} \right\| = \left\| x_{s_i s_i} + \sum_{i\neq j} x_{s_i s_j} \right\| \geq \left| \|x_{s_i s_i}\| - \left\| \sum_{i\neq j} x_{s_i s_j} \right\| \right| \geq \left| \|x_{s_i s_i}\| - \sum_{i\neq j} \left\| x_{s_i s_j} \right\| \right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Esto es imposible, pues $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_{s_i s_j} = 0$, esta contradicción prueba el teorema.

■

5.7. El teorema de $Banach - Steinhaus$; Acotación uniforme.

Teorema 165. *(Banach-Steinhaus): Sea $\mathcal{F}$ una familia de transformaciones lineales acotadas de un espacio de Banach X en un espacio normado Y.*

Si $\forall\ x \in X\ \exists$ una contante M_x tal que $\|T(x)\| \leq M_x\ \forall T \in \mathcal{F} \Longrightarrow \exists\ M > 0$ tal que $\|T\| \leq M$, $\forall T \in \mathcal{F}$.

Demostración.

Suponga que no existe tal $M > 0$,

entonces existen $T_1, T_2, ... \in \mathcal{F}$, y $x_1, x_2, ... \in X$ tales que $\|x_n\| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\|T_n(x_n)\| \longrightarrow \infty$, si $n \longrightarrow \infty$.

Luego para alguna sucesión creciente de índices (k_n) debemos tener que

$$\|\tfrac{1}{n} T_{k_n}\left(\tfrac{x_{k_n}}{2^n}\right)\| \geq 1. \tag{5.1}$$

Ahora considere la matriz infinita (x_{ij}) definida por:

$$x_{ij} = \left(\tfrac{1}{i}\right) T_{k_i}\left(\tfrac{x_{k_j}}{2^j}\right),\ i, j \in \mathbb{N},$$

luego como la serie $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{x_{k_j}}{2^j}\right)$ es absolutamente convergente, (esto es que la serie $\sum_{j=1}^{\infty}\|\frac{x_{k_j}}{2^j}\|$ es convergente) y el espacio X es completo, por el teorema 163, tenemos que es convergente.

Así que, $\exists z \in X$ tal que

$$z = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{x_{k_j}}{2^k}\right),$$

luego

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{i}T_{k_i}\frac{x_{k_j}}{2^j}\right\| = \tfrac{1}{i}\left\|T_{k_i}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_{k_j}}{2^j}\right)\right\| = \tfrac{1}{i}\|T_{k_i}(z)\| \leq \tfrac{C}{i}$$

donde C es una constante que depende de z. Por lo tanto tenemos que $\lim\limits_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} = 0$. Notamos que el mismo argumento se cumple para la matriz infinita $(x_{m_i m_i})$ donde (m_i) es una sucesión arbitraria creciente de índices , como $\lim\limits_{i\to\infty} = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ así se cumplen las hipótesis del teorema 164, por lo que se tiene:

$\lim\limits_{i\to\infty}\frac{1}{i}\, T_{k_i}\frac{x_{k_i}}{2^i} = \lim\limits_{i\to\infty} x_{ii} = 0$. Pero esto contradice (5.1) por lo tanto debe existir $M > 0$ tal que $\|T\| \leq M$, $\forall T \in \mathcal{F}$.

■

5.8. La convergencia fuerte implica la convergencia débil.

Lema 166. *La convergencia fuerte $(x_n) \longrightarrow x$, implica la convergencia débil $(x_n) \longrightarrow_w x$, con el mismo límite.*

Demostración.

Sea $(x_n) \longrightarrow x$, esto es $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, por la desigualdad de Schwarz tenemos

$| < x_n - x, y > | \leq \|x_n - x\|\|y\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$,

por lo tanto $< x_n - x, y > \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ $\forall y \in H$. Por lo tanto $(x_n) \longrightarrow_w x$, se tiene convergencia débil.

■

En general la convergencia débil no implica la convergencia fuerte. Veamos bajo que circunstancias la convergencia débil implica la convergencia fuerte.

Teorema 167. *Si* $(x_n) \longrightarrow_w x$*, converge débilmente y* $\|x_n\| \longrightarrow \|x\| \Longrightarrow (x_n) \longrightarrow x$ *.*

Demostración.

Tenemos que $< x_n, y > \longrightarrow < x, y > \forall y$ cuando $n \longrightarrow \infty$, por lo que $< x_n, x > \longrightarrow < x, x > = \|x\|^2$.

Luego

$$\|x_n - x\|^2 = < x_n - x, x_n - x > = < x_n, x_n > - < x_n, x > - < x, x_n > + < x, x > =$$

$$\|x_n\|^2 - 2Re < x_n, x > + \|x\|^2 \longrightarrow \left(\|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2\right) = 0,$$

cuando $n \longrightarrow \infty$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$, es decir se tiene convergencia fuerte.

■

Tenemos ahora el siguiente lema.

Lema 168. *Sea* S *un subconjunto de un espacio con producto interno* H *tal que* $\langle S \rangle$ *es denso en* H*, si* (x_n) *es una sucesión acotada en* H *tal que*

$$< x_n, y > \longrightarrow < x, y > \text{ cuando } n \longrightarrow \infty \ \forall y \in S,$$

entonces $(x_n) \longrightarrow_w x$.

Demostración.

Como tenemos que $< x_n, y > \longrightarrow < x, y >, \forall y \in S$, se tiene que $< x_n, y > \longrightarrow < x, y >, \forall y \in \langle S \rangle$.

Ahora sea $z \in H$ y $\varepsilon > 0$, como $\overline{\langle S \rangle} = H$, existe $y_0 \in \langle S \rangle$ tal que $\|z - y_0\| < \frac{\varepsilon}{3M}$, donde M cumple lo siguiente,

$$\|x_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \|x\| \leq M.$$

Como $< x_n, y > \longrightarrow < x, y >, \forall y \in \langle S \rangle$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $| < x_n, y_0 > - < x, y_0 > | < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > n_0$; consecuentemente para $n > n_0$ se tiene:

$$| < x_n - z > - < x, z > | \leq | < x_n, z > - < x_n, y_0 > | + | < x_n, y_0 > - < x, y_0 > | + | < x, y_0 > - < x, z > | <$$

$$\|x_n\|\|z - y_0\| + \frac{\varepsilon}{M} + \|x\|\|y_0 - z\| < M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon,$$

esto vale para cualquier $z \in H$ y $\forall \varepsilon > 0$, podemos concluir por lo tanto que $(x_n) \longrightarrow_w x$, osea se tiene convergencia débil.

■

Lema 169. *Si la sucesión $(x_n) \longrightarrow_w x$, converge débilmente en un espacio de Hilbert H, $\Longrightarrow \exists\ M > 0$ tal que*

$$\|x_n\| \leq M \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

Sea $(x_n) \longrightarrow_w x$ una sucesión débilmente convergente en un espacio de Hilbert H, defina para $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) =< x, x_n >$,

por lo tanto $f_n : H \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal acotado $\forall n \in \mathbb{N}$, (Teorema de representación de Riesz).

Luego como $\forall x \in H$ la sucesión $(< x, x_n >)$ es convergente se tiene que es acotada, esto es $\exists M_x > 0$ tal que

$$|f_n(x)| = | < x, x_n > | \leq M_x \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así que por el teorema 165, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|f_n\| \leq M \text{ , } \forall n \in \mathbb{N},$$

así ahora se tiene

$$|f_n(x)| = | < x, x_n > | \leq \|x\|\|x_n\|$$

por lo que podemos concluir que $\forall x \in H$, $\|f_n\| \leq \|x_n\|$.

Por otro lado $|f_n(x_n)| = | < x_n, x_n > | = \|x_n\|^2$ así que $\|f_n\| = \|x_n\|$, por lo tanto tenemos en definitiva $\|x_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

■

Ahora estamos en condiciones de presentar a continuación la caracterización de los operadores compactos en un espacio de Hilbert en términos de la convergencia débil.

5.9. Caracterización de los operadores compactos en términos de la convergencia débil.

Teorema 170. *Un operador T en un espacio de Hilbert H es compacto $\Longleftrightarrow$ cuando $(x_n) \longrightarrow_w x$, se tiene que $Tx_n \longrightarrow Tx$.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea T un operador compacto, asuma que $(x_n) \longrightarrow_w x$ y que $Tx_n \nrightarrow Tx$, así que existe $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión (x_{k_n}) de (x_n) tal que

$$\|Tx_{k_n} - Tx\| > \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Como la sucesión (x_{k_n}) converge débilmente a x, por el lema 169, tenemos que es acotada. Por la compacidad del operador T la sucesión (Tx_{k_n}) tiene una subsucesión convergente (Tx_{m_n}). Por otro lado $\forall y \in H$ se tiene

$$< Tx_n, y > = < x_n, T^*y > \longrightarrow < x, T^*y > = < Tx, y >$$

así que

$$(Tx_n) \longrightarrow_w Tx, \text{ al igual que } (Tx_{m_n}) \longrightarrow_w Tx;$$

además también sabemos que la subsucesión (Tx_{m_n}) converge fuertemente. Sabemos que la convergencia fuerte implica a la débil y es el mismo límite.

Esto es $(Tx_{m_n}) \longrightarrow Tx$, pero esto contradice (5.2) por lo que se tiene la implicación de ida.

$\Longleftarrow$) Ahora asuma que el operador T es tal que cuando $(x_n) \longrightarrow_w x$, esto implica que $Tx_n \longrightarrow Tx$. Sea (z_n) una sucesión acotada arbitraria en H, queremos mostrar que (Tz_n) tiene una subsucesión convergente, es decir que T es un operador compacto.

Sea (e_n) una base ortonormal en H y $\|z_n\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, luego como

$$| < z_n, e_1 > | \leq \|z_n\|\|e_1\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N},$$

esto es que $< z_n, e_1 >$ es una sucesión acotada en $\mathbb{C}$, así tenemos que la sucesión (z_n) tiene una subsucesión $(z_{1,n})$ tal que $< z_{1,n}, e_1 >$ es convergente.

De igual manera

$$| < z_{1,n}, e_2 > | \leq M \ \forall n \in \mathbb{N},$$

la sucesión $(z_{1,n})$ tiene una subsucesión $(z_{2,n})$ tal que $< z_{2,n}, e_2 >$ es convergente, de esta forma podemos construir sucesiones $(z_{m,n})$, $m = 1, 2, ...$ tales que:

(1) $(z_{m+1,n})$ es subsucesión de $(z_{m,n})$ $\forall m \in \mathbb{N}$ y

(2) el límite $\lim\limits_{n\to\infty} < z_{m,n}, e_m >$, existe $\forall m \in \mathbb{N}$.

Ahora defina: $x_n = z_{n,n}$, $n = 1, 2, ...$; así (x_n) es una subsucesión de (z_n) y el límite $\lim\limits_{n\to\infty} < x_n, e_m >$, existe $\forall m \in \mathbb{N}$. Veamos que (x_n) converge débilmente.

Defina $\alpha_k = \lim\limits_{n\to\infty} < x_n, e_k >$, $k = 1, 2, ...$

Para $l, n \in \mathbb{N}$ tenemos $\displaystyle\sum_{k=1}^{l} | < x_n, e_k > |^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} | < x_n, e_k > |^2 = \|x_n\|^2 \leq M^2$, luego haciendo $n \longrightarrow \infty$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{l} |\alpha_k|^2 \leq M^2,$$

luego cuando $l \longrightarrow \infty$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leq M^2.$$

Ahora defina $z = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, de este modo, $\forall m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$< x_n, e_m > - < z, e_m > =$$

$$< x_n, e_m > - < \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_m > =$$

$$< x_n, e_m > - < \alpha_m e_m, e_m > = (< x_n, e_m > - \alpha_m) \longrightarrow 0,$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Por lo tanto $< x_n, e_m > \longrightarrow < z, e_m >$, $\forall m \in \mathbb{N}$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Luego como el espacio vectorial $\langle \{e_1, e_2, ...\} \rangle$ es denso en H, por el lema 168 se concluye que $(x_n) \longrightarrow_w z$, por lo tanto (usando la hipótesis), tenemos que

$$Tx_n \longrightarrow Tz$$

y esto significa por la construcción que se hizo, que para cualquier sucesión (z_n), la sucesión (Tz_n) tiene una subsucesión convergente.

Es decir, T es un operador compacto.

■

Corolario 171. *Si T es un operador compacto en un espacio de Hilbert H y (x_n) es una base ortonormal en H $\Longrightarrow$*

$$\lim_{n \to \infty} Tx_n = 0.$$

Demostración.

Las bases ortonormales son débilmente convergentes a 0, esto es

$$\lim_{n \to \infty} < x_n - 0, y > = 0 \ \forall y \in H.$$

Ya que $\forall y \in H$,

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} < y, x_m > x_m,$$

y como

$$< x_m, x_n >= \begin{cases} 0 & si \quad m \neq n \\ 1 & si \quad m = n \end{cases}$$

se tiene

$$< x_n, y >= < x_n, \sum_{m=1}^{\infty} < y, x_m > x_m >= (\overline{\sum_{m=1}^{\infty} < y, x_m >}) < x_n, x_m > = (\overline{\sum_{m=1}^{\infty} < y, x_m >}) \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & m \neq n \\ 1 & si & m = m \end{array} \right\},$$

luego tomando límite

$$\lim_{n \to \infty} < x_n, y >= 0.$$

Por lo tanto $(x_n) \longrightarrow_w 0$, así que $Tx_n \longrightarrow 0$, por la compacidad del operador T.

■

Por el teorema anterior tenemos que el inverso de un operador compacto en un espacio de Hilbert de dimensión infinita, si éste existe, es un operador no acotado.

Hemos notado que la condición de compacidad en un operador es más fuerte que la condición de ser acotado.

También hemos visto que en el contexto de operadores, ser acotado es equivalente a ser continuo.
Los operadores acotados son aquellos que mandan sucesiones convergentes en sucesiones convergentes, es decir preservan la convergencia fuerte.

El teorema anterior caracteriza a los operadores compactos en un espacio de Hilbert como aquellos operadores que mandan la convergencia débil de sucesiones en convergencia fuerte.

Desde éste punto de vista la compacidad de un operador es un tipo más fuerte de continuidad. Por ésta razón los operadores compactos algunas veces son llamados operadores completamente continuos.

La condición anterior fue usada por $F.\ Riesz$ como definición de operador compacto. $Hilbert$ usó otra definición equivalente de operador compacto:

Un operador A en un espacio de Hilbert H es compacto

si cuando $x_n \longrightarrow x$ débilmente y $y_n \longrightarrow y$ débilmente esto implica que $< Ax_n, y_n > \longrightarrow < Ax, y >$.

A continuación tenemos conceptos muy importantes en la teoría de operadores, estos son vectores propios y valores propios.

6. VECTORES PROPIOS Y VALORES PROPIOS.

A continuación se usa material de: [1] capítulo 4; [3] capítulo VII; [9] capítulo 9; [14] capítulo 7.

6.1. Introducción.

En esta sección se exponen algunos resultados concernientes a los valores propios y vectores propios de un operador lineal. Este concepto es muy importante, ya que permite expresar algunos operadores lineales en términos de sus vectores propios, resultado conocido como representación espectral de un operador.

6.2. Definiciones.

Definición 172. (Vector propio y valor propio): Sea A un operador en un espacio vectorial complejo E, un número complejo λ se llama valor propio del operador A si existe un vector no cero $u \in E$, tal que

$$Au = \lambda u. \tag{6.1}$$

Definición 173. Cada vector u que cumple esta igualdad se llama vector propio de A correspondiente al valor propio λ.

Ejemplo 174. Sea S un subespacio de un espacio con producto interno E, sea A la proyección sobre S, de esta forma los únicos valores propios de A son el 0 y 1, ya que $\lambda u = \lambda^2 u$, porque $A^2 = A$, así que $\lambda = 0, 1$.
Los vectores propios de 0 son los que son ortogonales a S y los vectores propios de 1 son los que pertenecen a S.

Notamos que a cada vector propio le corresponde un solo valor propio.

Por el contrario un valor propio tiene infinitos vectores propios , ya que cualquier múltiplo escalar de un vector propio es vector propio.
Más aún, varios vectores linealmente independientes pueden corresponder al mismo valor propio. Así tenemos el siguiente teorema.

6.3. Subespacio propio.

Teorema 175. *La colección de todos los vectores propios correspondientes a un mismo valor propio de un operador, forman un espacio vectorial.*

■

Definición 176. (Espacio propio): El espacio vectorial correspondiente al valor propio λ, se llama espacio propio del valor propio λ.

La dimensión de tal espacio se llama $multiplicidad$ de λ.

Un valor propio de multiplicidad uno es llamado $no\ degenerado$, un valor propio de multiplicidad mayor que uno es llamado $multiple$ o $degenerado$.

Definición 177. (Espectro y resolvente): Sea A un operador en un espacio normado E, el operador

$$A_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} \tag{6.2}$$

es llamado el resolvente de A.

Los λ para los cuales el operador A_λ está definido en todo el espacio E y es acotado, se llaman puntos o valores regulares de A.

El conjunto de los λ que no son valores regulares de A se llaman espectro de A.

Todo valor propio pertenece al espectro de un operador, veamos en el siguiente ejemplo que no todos los elementos del espectro de un operador son valores propios

Ejemplo 178. Sea $E = C([a, b])$ el espacio de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, para un fijo $u \in C([a, b])$ considere el operador A definido por

$$(Ax)(t) = u(t)x(t).$$

Luego como

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{u(t)-\lambda},$$

el espectro de A consiste de todos los $\lambda's$ tales que $\lambda - u(t) = 0$ para algún $t \in [a, b]$.

Esto significa que el espectro de A es exactamente el rango de u. Si $u(t) = c$ es una función constante entonces $\lambda = c$ es un valor propio de A.
Por otro lado si u es una función estrictamente creciente entonces A no tiene valores propios, en este caso el espectro de A es el intervalo $[u(a), u(b)]$.

Una de las principales fuentes de problemas de valores propios es la mecánica de un sistema de oscilaciones.
El estado de un sistema dado en un tiempo dado t puede ser representado por un elemento $u(t) \in H$, donde H es un apropiado espacio de Hilbert de funciones .

La ecuación del movimiento en mecánica clásica es:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au. \tag{6.3}$$

donde A es un operador en H. Si el sistema oscila, la dependencia respecto del tiempo de u es sinusoidal, esto es

$$u(t) = v \, sen(\omega t)$$

donde v es un elemento fijo de H. Si A es lineal el sistema en (6.1) es:

$$Av = (-\omega^2)v,$$

esto significa que $-\omega^2$ es un valor propio de A.

Físicamente los valores propios de A corresponden a las posibles frecuencias de oscilación del sistema.

En sistemas atómicos las frecuencias de oscilaciones son visibles como lineas de brillo en el espectro de luz que emiten éstas. Es así como el nombre $espectro$ se desprende de consideraciones físicas.

Los siguientes teoremas describen propiedades de vectores propios y valores propios para una clase especial de operadores. Principalmente operadores autoadjuntos, unitarios y compactos.

Teorema 179. *Sea T un operador invertible en un espacio vectorial E y sea A un operador en E. Entonces los operadores A y TAT^{-1} tienen los mismos valores propios.*

Demostración.

Sea λ un valor propio de A, así que existe un vector no cero u tal que $A\lambda = \lambda u$, luego como T es invertible $Tu \neq 0$ y

$$TAT^{-1}(Tu) = TAu = T\lambda u = \lambda Tu,$$

por lo tanto, Tu es un vector propio de TAT^{-1}.

Por otro lado asuma que λ es un valor propio de TAT^{-1}, se tiene que $TAT^{-1}u = \lambda u$, para algún vector no cero $u = Tv$.

Como $AT^{-1}u = \lambda T^{-1}u$, y $T^{-1}u \neq 0$, tenemos que λ es un valor propio de A.

■

6.4. Los valores propios de un operador autoadjunto son reales.

Teorema 180. *Los valores propios de un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert H, son reales.*

Demostración.

Sea λ un valor propio de un operador autoadjunto A y sea $u \neq 0$, un vector propio de λ. Entonces

$$\lambda < u,u > = < \lambda u,u > = < Au,u > = < u,Au > = < u,\lambda u > = \overline{\lambda} < u,u >$$

por lo tanto $\lambda = \overline{\lambda}$, esto significa que $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Teorema 181. *Los Los valores propios de un operador positivo son no negativos; los valores propios de un operador estrictamente positivo, son positivos.*

Demostración.

Sea A un operador positivo y $Ax = \lambda x$, para algún $x \neq 0$, como A es autoadjunto tenemos que

$$0 \leq < Ax,x > = \lambda < x,x > = \lambda \|x\|^2$$

por lo tanto, $0 \leq \lambda$. La otra parte se obtiene poniendo $<$ en lugar de $\leq$.

$\blacksquare$

Teorema 182. *Los valores propios de un operador unitario en un espacio de Hilbert son números complejos de módulo* 1.

Demostración.

Sea λ un valor propio de un operador unitario A y $u \neq 0$, un vector propio de λ. Luego

$$< Au,Au > = < \lambda u,\lambda u > = |\lambda|^2 \|u\|^2$$

por otro lado

$$< Au,Au > = < u,A^*Au > = < u,u > = \|u\|^2$$

por lo tanto $|\lambda| = 1$.

$\blacksquare$

Teorema 183. *Los vectores propios correspondientes a distintos valores propios de un operador autoadjunto o unitario en un espacio de Hilbert H, son ortogonales.*

Demostración.

Sea A un operador autoadjunto y u_1, u_2 vectores propios correspondientes a distintos valores propios λ_1 y λ_2.

Así tenemos que $Au_1 = \lambda_1 u_1$, $Au_2 = \lambda_2 u_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, como A es autoadjunto, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Luego

$$\lambda_1 < u_1, u_2 >=< Au_1, u_2 >=< u_1, Au_2 >=< u_1, \lambda_2 u_2 >= \overline{\lambda_2} < u_1, u_2 >= \lambda_2 < u_1, u_2 >$$

así que

$$(\lambda_1 - \lambda_2) < u_1, u_2 >= 0$$

por lo tanto, $< u_1, u_2 >= 0$, lo que implica que $u_1 \perp u_2$.

Ahora sea A un operador unitario en un espacio de Hilbert H, esto es $AA^* = A^*A = I$ y $\|Au\| = \|u\| \; \forall u \in H$.

Luego como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tenemos que $\lambda_1\overline{\lambda_2} \neq 1$ ya que si $\lambda_1\overline{\lambda_2} = 1$ se tiene $\lambda_2 = \lambda_1\overline{\lambda_2}\lambda_2 = \lambda_1|\lambda_2|^2 = \lambda_1$

por lo que se tiene

$$\lambda_1\overline{\lambda_2} < u_1, u_2 >=< \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2 > = < Au_1, Au_2 >=< u_1, A^*Au_2 >=< u_1, u_2 >$$

y como $\lambda_1\overline{\lambda_2} \neq 1$, debe ser $< u_1, u_2 >= 0$, por lo tanto $u_1 \perp u_2$.

■

En el siguiente teorema, veamos una desigualdad que relacional a un valor propio de un operador acotado con su norma.

Teorema 184. *Para cada valor propio λ de un operador acotado A, se tiene*

$$|\lambda| \leq \|A\|. \tag{6.4}$$

Demostración.

Sea $u \neq 0$ un vector propio del valor propio λ, como $Au = \lambda u$, tenemos que $\|Au\| = \|\lambda u\|$, por lo que

$$|\lambda|\|u\| = \|\lambda u\| = \|Au\| \leq \|A\|\|u\|$$

por lo tanto $|\lambda| \leq \|A\|$.

■

Corolario 185. *Los valores propios de un operador autoadjunto acotado A, satisfacen la desigualdad:*

$$|\lambda| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} | < Ax, x > |. \tag{6.5}$$

Demostración. Inmediata del teorema anterior.

■

Es natural preguntarse en qué situación para un operador acotado A, se tiene la existencia de algún valor propio λ tal que $|\lambda| = \|A\|$.
En general esto no ocurre, pero la respuesta es afirmativa en el caso de que A sea un operador compacto autoadjunto.

6.5. Una característica de los valores propios de un operador compacto.

Teorema 186. *Si A es un operador no nulo, compacto y autoadjunto en un espacio de Hilbert $H \Longrightarrow A$ tiene un valor propio λ tal que*

$$\lambda = \|A\|, \text{ ó } \lambda = -\|A\|. \tag{6.6}$$

Demostración.

Sea (u_n) una sucesión de elementos de H tales que $\|u_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\|Au_n\| \longrightarrow \|A\|$, cuando $n \longrightarrow \infty$, así tenemos que

$$\|(A^2u_n - \|Au_n\|^2u_n)\|^2 =< A^2u_n - \|Au_n\|^2u_n, A^2u_n - \|Au_n\|^2u_n >=$$

$$\|A^2u_n\|^2 - 2\|Au_n\|^2 < A^2u_n, u_n > + \|Au_n\|^4\|u_n\|^2 =$$

$$\|A^2u_n\|^2 - 2\ \|Au_n\|^2 < Au_n, Au_n > + \|Au_n\|^4\|u_n\|^2 = \|A^2u_n\|^2 - \|Au_n\|^4 \leq$$

$$\|A\|^2\|Au_n\|^2 - \|Au_n\|^4 = \|Au_n\|^2(\|A\|^2 - \|Au_n\|^2)$$

luego como $\|Au_n\| \longrightarrow \|A\|$, se obtiene que

$$\|(A^2u_n - \|Au_n\|^2u_n)\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty. \tag{6.7}$$

El operador A^2 siendo el producto de dos operadores compactos es compacto, así que existe una subsucesión (u_{k_n}) de (u_n) tal que $(A^2u_{k_n})$ es convergente.

Como $\|A\| \neq 0$, el límite lo podemos escribir como $\|A\|^2v$, con $v \neq 0$. Así que $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\|(\|A^2\|v - \|A^2\|u_{k_n})\| \leq \|(\|A^2\|v - A^2u_{k_n})\| + \|(A^2u_{k_n} - \|Au_{k_n}\|^2u_{k_n})\| + \|(\|Au_{k_n}\|^2u_{k_n} - \|A\|^2u_{k_n})\|,$$

luego por (6.7) tenemos

$\|(\|A^2\|v - \|A^2\|u_{k_n})\| \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, es decir $\|\|A^2\|(v - u_{k_n})\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Esto significa que la sucesión (u_{k_n}) converge a v, por lo que $A^2v = \|A\|^2v$, esto es que $A^2v - \|A\|^2v = (A^2 - I\|A\|^2)v = 0$

es decir

$$(A - I\|A\|)(A + I\|A\|)v = 0,$$

Si $A - I\|A\| = 0$, (el operador lineal cero), tenemos que $Av = \|A\|v$, por lo tanto $\|A\|$, es un valor propio de A.

Si $A + I\|A\| = 0$, tenemos que $Av = -\|A\|v$, por lo tanto $-\|A\|$, es un valor propio de A.

■

Corolario 187. *Si A es un operador no nulo, compacto y autoadjunto en un espacio de Hilbert $H \Longrightarrow$*

$\exists\ w \in H$, tal que $\|w\| = 1$, y

$$| < Aw, w > | = \sup_{\|x\| \leq 1} | < Ax, x > |. \tag{6.8}$$

Demostración.

Sea w con $\|w\| = 1$, un vector propio correspondiente a un valor propio λ tal que $|\lambda| = \|A\|$. Luego tenemos lo siguiente

$$| < Aw, w > | = | < \lambda w, w > | = |\lambda| \|w\|^2 = |\lambda| = \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} | < Ax, x > |,$$

por el teorema 104.

■

El teorema 186 nos garantiza la existencia de al menos un valor propio no cero, pero en general no más.

El corolario anterior nos proporciona un método para encontrar tal valor propio. Veamos el siguiente teorema acerca del conjunto de valores propios de un operador compacto autoadjunto.

Teorema 188. *El conjunto de distintos valores propios no cero (λ_n) de un operador compacto autoadjunto es finito o*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0. \tag{6.9}$$

Demostración.

Sea A un operador compacto autoadjunto tal que tiene una infinidad de valores propios distintos λ_n, $n \in \mathbb{N}$.

Sea u_n un vector propio correspondiente a λ_n tal que $\|u_n\| = 1$, por el teorema 183 (u_n) es una base ortonormal, también sabemos que las bases ortonormales convergen débilmente a 0, el teorema 170 implica

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|Au_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} < Au_n, Au_n >= \lim_{n\to\infty} < \lambda_n u_n, \lambda_n u_n >= \lim_{n\to\infty} \lambda_n^2 \|u_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \lambda_n^2.$$

■

Ejemplo 189. Veamos los valores propios y funciones propias (vectores propios) del operador A, en el espacio de funciones $L_2([0, 2\pi])$ definido por:

$$(Au)(x) = \int_0^{2\pi} k(x-t)u(t)dt,$$

donde k es una función $2\pi-$periódica de cuadrado integrable en $[0, 2\pi]$. Tratemos con la solución dada por: $u_n(x) = e^{inx}$ así tenemos que:

$(Au_n)(x) = \int_0^{2\pi} k(x-t)e^{int}dt = e^{inx} \int_{x-2\pi}^{x} k(s)e^{ins}ds$, así que $Au_n = \lambda_n u_n$, con $n \in \mathbb{Z}$, donde $\lambda_n = \int_0^{2\pi} k(s)e^{ins}ds$

el conjunto de funciones (u_n) $n \in \mathbb{Z}$ es una base ortogonal.

Notamos que el operador A es autoadjunto si la función k cumple con $k(x) = k(-x)$ $\forall x$. Aunque si el operador A no es autoadjunto, de cualquier forma las funciones propias forman una base ortogonal, es decir que al normalizarlas se obtiene una base ortonormal.

Para el siguiente teorema necesitamos la fórmula de Pitágoras siguiente.

Lema 190. *(Fórmula de Pitágoras): Si $x_1, ...x_n$, son vectores ortogonales en un espacio con producto interno, entonces:*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \tag{6.10}$$

Demostración.

Por inducción. Se tiene la fórmula para dos vectores. Suponemos que vale para $n-1$; sea $x = \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ y $y = x_n$, como $x \perp y$, tenemos

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\|^2 + \|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

■

Teorema 191. *Sea (P_n) una sucesión de operadores de proyección, ortogonales a pares en un espacio de Hilbert H*

y sea (λ_n) una sucesión de números tales que $(\lambda_n) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces se tiene lo siguiente.

$a)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ converge en $\mathcal{B}(H,H)$ y por lo tanto define un operador acotado.

$b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, λ_n es un valor propio del operador: $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$ y el único otro valor propio posible es 0.

$c)$ Si $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ el operador A es autoadjunto.

$d)$ Si todos los operadores proyección P_n son de dimensión finita $\Longrightarrow A$ es un operador compacto.

Demostración.

$a)$ Como $\mathcal{B}(H,H)$ es un espacio de Banach, basta mostrar que la sucesión de sumas parciales de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

es una sucesión de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, como $\lambda_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < \varepsilon$, si $n > n_0$, así $\forall\ x \in H$ y $m, k \in \mathbb{N}$ con $n_0 < k < m$, tenemos

$$\left\| \sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n x \right\|^2 = \sum_{n=k}^{m} \|\lambda_n P_n x\|^2 = \sum_{n=k}^{m} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 \leq$$

$$\varepsilon^2 \sum_{n=k}^{m} \|P_n x\|^2 = \varepsilon^2 \left\| \sum_{n=k}^{m} P_n x \right\|^2 \leq$$

$$\varepsilon^2 \left\| \sum_{n=k}^{m} P_n \right\|^2 \|x\|^2, \tag{6.11}$$

donde la primera y la última igualdad se dan por la ortogonalidad de las proyecciones P_n; además la suma $\sum_{n=k}^{m} P_n$ siendo suma finita de operadores proyección es un operador proyección y su norma es 1.

Así tenemos que (6.11) es:

$$\left\| \sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n \right\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n x \right\| \leq \varepsilon,$$

esto para $n_0 < k < m$, así tenemos que la sucesión de sumas parciales $\sum_{n=k}^{m} \lambda_n P_n$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $\mathcal{B}(H, H)$. Lo que prueba $a)$.

$b)$ Denote al rango de P_n por $\mathcal{R}(P_n)$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$, si $u \in \mathcal{R}(P_{n_0})$ se tiene que $P_{n_0}u = u$ y $P_n u = 0$ para $n \neq n_0$, ya que las proyecciones P_n son ortogonales dos a dos.

Luego

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n u = \lambda_{n_0} u,$$

esto muestra que λ_{n_0} es un valor propio de A.

Ahora probemos que no hay otro valor propio no cero de A. Sea u un valor propio de A con vector propio λ, sean $v_n = P_n u$, $n = 1, 2, ...$ y $w = Qu$, donde Q es la proyección sobre el complemento ortogonal de $\mathcal{R}(A)$.

Luego tenemos que

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} v_n + w, \text{ con } w \perp \mathcal{R}(P_n)\ \forall n \in \mathbb{N},$$

además

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n + w\right) = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Av_n,$$

por la continuidad del operador A y porque $P_n w = 0$. Consecuentemente la ecuación de valor propio se puede escribir así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n = \lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n + w\right), \text{ o de igual forma } \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) v_n + \lambda w = 0, \tag{6.12}$$

Luego como todos los vectores en (6.12) son ortogonales, tenemos que la suma es cero sólo si cada sumando es cero, así que

$$\lambda w = 0 \text{ y } \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda = \lambda_n \text{ ó } v_n = 0.$$

Por otro lado si u en la ecuación $u = \sum_{n=1}^{\infty} v_n + w$, es un vector propio no cero, en vista de (6.12) debe tenerse que $w \neq 0$ ó $v_k \neq 0$, para alguna $k \in \mathbb{N}$.

$c)$ Suponga que todos los escalares λ_n son reales, como todos los operadores proyección son operadores autoadjuntos tenemos que $\forall x, y \in H$:

$$< Ax, y > = \sum_{n=1}^{\infty} < \lambda_n P_n x, y > = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < P_n x, y > = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n < x, P_n y > =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} < x, \lambda_n P_n y > = \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n y \right\rangle = < x, Ay >,$$

así el operador A es autoadjunto.

$d)$ Si todos los operadores proyección P_n son de dimensión finita, por el corolario 161, tenemos que el operador A es compacto.

■

Veamos ahora la siguiente definición.

6.6. Valor propio aproximado.

Definición 192. (Valor propio aproximado): Sea T un operador en un espacio de Hilbert H, un escalar λ se llama valor propio aproximado de T si existe una sucesión de vectores (x_n) tal que

$$\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \|Tx_n - \lambda x_n\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty. \tag{6.13}$$

Claramente cada valor propio es un valor propio aproximado, veamos el siguiente ejemplo en el otro sentido.

Ejemplo 193. Sea (e_n) una base ortonormal en un espacio de Hilbert H, sea λ_n una sucesión decreciente cualquiera, de escalares convergente a algún λ. Defina en H el operador

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, e_n > e_n,$$

de esta forma cada λ_n es un valor propio de T pero λ no lo es.

Por otro lado

$$\|Te_n - \lambda e_n\| = \|\lambda_n e_n - \lambda e_n\| = \|(\lambda_n - \lambda)e_n\| = |\lambda_n - \lambda| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

así que λ es un valor propio aproximado de T, notamos que lo mismo se tiene si se asume que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ y $\lambda_n \neq \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7. TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES COMPACTOS AUTOADJUNTOS.

En esta parte se usa material de: [1] capítulo 4; [2] capítulo 8; [3] capítulo VIII;
[9] capítulo 9; [10] capítulo 24; [14] capítulo 7.

7.1. Introducción.

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita , $H \cong \mathbb{C}^n$ por álgebra lineal sabemos que los vectores propios de un operador autoadjunto en H forman una base ortonormal para H. Los siguientes teoremas generalizan este resultado a espacios de dimensión infinita.

7.2. Teorema de $Hilbert - Schmidt$.

Teorema 194. *(Hilbert-Schmidt): Para cada Operador Compacto Autoadjunto A, en un espacio de Hilbert H de dimensión infinita, existe un sistema ortonormal de vectores propios (u_n) correspondientes a los valores propios no cero (λ_n), tales que $\forall x \in H$, se tiene una representación única de la forma :*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n + v, \tag{7.1}$$

donde $\alpha_n \in \mathbb{C}$ y v satisface la ecuación $Av = 0$. Además si A tiene infinitos distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ...$, entonces $(\lambda_n) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Demostración.

Por el teorema 186 y el corolario 187, existe un valor propio λ_1 de A tal que: $|\lambda_1| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |< Ax, x >|$.

Sea u_1 un vector propio normalizado correspondiente a λ_1 y sea

$$Q_1 = \{x \in H \mid x \perp u_1\}$$

de este modo Q_1 es el complemento ortogonal del conjunto $\{u_1\}$, por lo que Q_1 es un subespacio cerrado de H.

Si $x \in Q_1$ tenemos que

$$< Ax, u_1 >=< x, Au_1 >= \lambda_1 < x, u_1 >= 0,$$

de esta forma si $x \in Q_1$ entonces $Ax \in Q_1$.

Así tenemos que el operador A manda al espacio de Hilbert Q_1 en sí mismo. Aplicamos otra vez el teorema 186 y corolario 187, poniendo a Q_1 en lugar de H, esto nos da el valor propio λ_2 tal que

$$|\lambda_2| = \sup_{\|x\|\leq 1} \{| < Ax, x > | \mid x \in Q_1\}.$$

Sea u_2 un vector propio normalizado correspondiente a λ_2, tenemos que $u_1 \perp u_2$. Ahora sea $Q_2 = \{x \in Q_1 \mid x \perp u_2\}$ y repitamos el procedimiento anterior.

De esta manera tenemos los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ y los correspondientes vectores propios normalizados $u_1, u_2, ..., u_n$, a continuación definimos

$$Q_n = \{x \in Q_{n-1} \mid x \perp u_n\}$$

luego tomamos un valor propio λ_{n+1} tal que

$$|\lambda_{n+1}| = \sup_{\|x\|\leq 1} \{| < Ax, x > | \mid x \in Q_n\} \tag{7.2}$$

y tomamos un vector normalizado u_{n+1} correspondiente a λ_{n+1} .

CASO 1: Este procedimiento es finito, es decir que existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $< Ax, x >= 0$, $\forall x \in Q_k$. Por lo tanto para cada $x \in H$ se tiene una representación única de la forma:

$$x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k + v,$$

donde $Av = 0$, y

$$Ax = \lambda_1 \alpha_1 u_1 + ... + \lambda_k \alpha_k u_k.$$

CASO 2: Se tiene una sucesión infinita de valores propios (λ_n) y vectores propios (u_n). Así (u_n) es una sucesión ortonormal la cual converge débilmente a 0, consecuentemente por el teorema 167, la sucesión (Au_n) converge fuertemente a 0, por lo que

$$|\lambda_n| = \|\lambda_n u_n\| = \|Au_n\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Sea $S = \langle\{u_1, u_2 ...\}\rangle$, S es el subespacio generado por $\{u_1, u_2, ...\}$, luego por el teorema de la proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado, cada $x \in H$ tiene una descomposición única $x = u + v$, esto es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n + v,$$

donde $u \in S$ y $v \in S^{\perp}$. Resta mostrar que $Av = 0$, $\forall v \in S^{\perp}$. Sea $v \in S^{\perp}$ $(v \neq 0)$, y defina $w = \frac{v}{\|v\|}$, luego entonces

$$< Av, v >= \|v\|^2 < Aw, w >,$$

enseguida por (7.2) tenemos que $w \in S^{\perp} \subseteq Q_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego tenemos

$$| < Av, v > | = \|v\|^2 | < Aw, w > | \leq \|v\|^2 \sup_{\|x\|\leq 1} \{| < Ax, x > | \mid x \in Q_n\} =$$

$$(\|v\|^2|\lambda_{n+1}|) \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Esto implica que $< Av, v >= 0 \; \forall v \in S^{\perp}$, por lo tanto por el teorema 104, la norma de A restringida al subespacio $S^{\perp}$ es cero, por lo tanto $Av = 0$, $\forall v \in S^{\perp}$.

■

A continuación, veamos el teorema central de esta sección.

7.3. Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.

Teorema 195. *Espectral para operadores compactos autoadjuntos.*

Sea A un operador compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert H de dimensión infinita, entonces se tiene lo siguiente.

Existe una base ortonormal $\{v_1, v_2, ...\}$ de H, la cual consiste de vectores propios de A, más aún , para cada $x \in H$ se tiene

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, v_n > v_n, \tag{7.3}$$

donde λ_n, es el valor propio correspondiente a v_n.

Demostración.

La mayor parte de este teorema está contenida en el teorema anterior, para obtener una base ortonormal $\{v_1, v_2, ...\}$, necesitamos añadir una base ortonormal arbitraria del espacio $S^{\perp}$ al sistema ortonormal $\{u_1, u_2, ...\}$ del teorema anterior.

Los valores propios correspondientes a aquellos vectores propios de $S^{\perp}$ son todos cero; de la continuidad del operador A se obtiene (7.3).

■

Teorema 196. *Para dos operadores A y B compactos autoadjuntos que conmutan en un espacio de Hilbert H, existe una base ortonormal la cual consta de vectores propios comunes.*

Demostración.

Sea λ un valor propio de A y sea S el correspondiente espacio propio, para $x \in S$ tenemos

$$ABx = BAx = B(\lambda x) = \lambda Bx,$$

esto significa que Bx es un vector propio de A correspondiente a λ, siempre que $Bx \neq 0$.

En cualquier caso $Bx \in S$, por lo que el operador B manda al espacio S en sí mismo. Luego como B es un operador compacto autoadjunto, aplicamos el teorema anterior, así S tiene una base ortonormal que consiste de vectores propios de B, pero esos vectores también son vectores propios de A porque están en S.

Repitiendo el mismo argumento para cada espacio propio de A, tenemos que la unión de todos esos vectores propios son una base ortonormal de H.

■

Veamos el siguiente teorema.

Teorema 197. *Sea A un operador compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert H, con base ortonormal de vectores propios $\{v_1, v_2, ...\}$, correspondientes a los valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$.*

Sea P_n el operador proyección ortogonal sobre el subespacio de dimensión 1 generado por v_n, así $\forall x \in H$ se cumple lo siguiente:

$i)$ $x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x.$

y

$ii)$ $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n.$

Demostración.

Del teorema espectral 195, tenemos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, v_n > v_n, \tag{7.4}$$

luego para cada $k \in \mathbb{N}$, el operador proyección ortogonal P_k sobre el subespacio unidimensional S_k, generado por v_k está dado por:

$$P_k x =< x, v_k > v_k,$$

por lo que (7.4) se escribe así:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x,$$

esto prueba $i)$.

A continuación, por el teorema espectral 195, tenemos

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, v_n > v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x.$$

Por lo tanto $\forall x \in H$,

$$Ax = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \right) x,$$

esto nos da la prueba de $ii)$, ya que la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$. está garantizada por el teorema 191.

■

El teorema 197 es otra versión del teorema espectral 195, esta versión es importante en el sentido de que puede ser extendida a operadores no compactos.
También es útil porque ésta presenta elegancia al expresar potencias y en general otras funciones de un operador.

Veamos esto.

Sean A, λ_n y P_n, como en el teorema anterior, entonces

$$A^2 = A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \right) = \sum_{n=1} \lambda_n A P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 P_n.$$

Ya que $AP_n x = \lambda_n P_n x$, $\forall x \in H$, similarmente para $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$A^k = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k P_n, \tag{7.5}$$

de manera general para un polinomio $p(t) = \alpha_n t^n + ... + \alpha_1 t$, tenemos

$$p(A) = \sum_{n=1}^{\infty} p(\lambda_n) P_n. \tag{7.6}$$

El término constante en el polinomio debe ser cero, de otra forma la sucesión $(p(\lambda_n))$ no sería convergente a 0. En el caso de polinomios con término constante no cero se debe sumar el operador $\alpha_0 I$ a la serie, notamos que en éste caso el operador $p(A)$ no es compacto.

El método anterior puede generalizarse de la siguiente forma.

7.4. Función de un operador.

Definición 198. (Función de un operador): Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función tal que $f(\lambda) \longrightarrow 0$, cuando $\lambda \longrightarrow 0$, y $f(0) = 0$, para un operador compacto autoadjunto

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

se define

$$f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n;$$

El teorema 191, asegura que ésta serie converge y que $f(A)$ es un operador compacto.

Ejemplo 199. Sea $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$, un operador compacto autoadjunto tal que $\lambda_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Para $\alpha > 0$, podemos definir al operador A^{α} por:

$$A^{\alpha} x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha} P_n x.$$

Ejemplo 200.
Notamos que en el caso $\alpha = \frac{1}{2}$, esta definición coincide con el operador raíz cuadrada visto anteriormente. Tenemos lo siguiente:

$$(\sqrt{A})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{\lambda_n})^2 P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n = A,$$

pues $\lambda_n \geq 0$.

Ejemplo 201. Sea $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$, un operador compacto autoadjunto, podemos definir el $seno$ del operador A de la siguiente forma:

$$sen(A) = \sum_{n=1}^{\infty} sen(\lambda_n) P_n.$$

La condición $f(\lambda) \longrightarrow 0$, cuando $\lambda \longrightarrow 0$, puede ser reemplazada por la condición de que f sea acotada en una vecindad del origen, ya que si

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n, \text{ y } P_n x = < x, v_n > v_n,$$

entonces para cada $x \in H$ tenemos

$$(f(A))x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) < x, v_n > v_n,$$

donde la convergencia de ésta serie se justifica en la siguiente proposición 202, y usando que

$$|f(\lambda_n) < x, v_n > |^2 \leq M| < x, v_n > |^2,$$

donde M es la cota de f en una vecindad del origen, aunque en éste caso no podemos esperar que $f(A)$, sea un operador compacto.

Proposición 202. *Sea (x_n) una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H y $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión.*

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ converge y en tal caso: $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2.$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Para cada $m > k > 0$ por la fórmula de Pitágoras tenemos:

$$\left\| \sum_{n=k}^{m} \alpha_n x_n \right\|^2 = \sum_{n=k}^{m} |\alpha_n|^2. \ (\star) \tag{7.7}$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$, entonces por (7.7), la sucesión $S_m = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert H.

$\Longleftarrow$) Tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n < \infty$, por (7.7), se tiene la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$, ya que la sucesión $\sigma_m = \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^2$, es de Cauchy en el espacio métrico completo $\mathbb{R}$. Por último, la fórmula del teorema se obtiene poniendo en (7.7) $k = 1$, y haciendo $m \longrightarrow \infty$.

■

Cabe notar lo siguiente respecto del ejemplo anterior. En la serie

$\sum_{n=1}^{m} | < x, v_n > |^2 \leq \|x\|^2$, cuando el conjunto $\{v_1, v_2, ...\}$, es ortonormal, si hacemos $m \longrightarrow \infty$ obtenemos:
$\sum_{n=1}^{\infty} | < x, v_n > |^2 \leq \|x\|^2$, esto justifica la convergencia de la serie dada en ejemplo.
Veamos en la siguiente sección propiedades que cumplen los operadores acotados autoadjuntos y otro teorema espectral.

8. TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES ACOTADOS AUTOADJUNTOS.

8.1. Introducción.

En la sección anterior hemos visto el teorema espectral en el caso de un operador compacto y autoadjunto. En esta sección removeremos la condición de compacidad y trataremos con el caso de un operador acotado autoadjunto.
En el teorema espectral de esta sección, se dará una representación del operador en términos de una integral de $\mathbf{Riemann-Stieltjes}$ (ver apéndice al final del capítulo).

Veamos primero el siguiente teorema, el cual caracteriza a los operadores autoadjuntos en términos de sus valores propios.

8.2. Los operadores autoadjuntos con valores propios positivos, son positivos.

Teorema 203. *Si los vectores propios $u_1, u_2, ...$, de un operador Autoadjunto T en un espacio de Hilbert H, forman una base ortonormal en H, y todos los valores propios son positivos (o no negativos), entonces T es estrictamente positivo (o positivo).*

Demostración.

Sean $u_1, u_2, ...$, vectores propios del operador autoadjunto T que forman una base ortonormal en H, correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ...$, así tenemos para cada $u \in H$,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n,$$

luego tenemos esto si los $\lambda_n' s$, son no negativos (positivos),

$$< Tu, u >= \left\langle Tu, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n} < Tu, u_n > =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n} < u, Tu_n > = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n} < u, \lambda_n u_n > = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\alpha_n} < u, u_n > =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\alpha_n} < \alpha_n u_n, u_n > = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\alpha_n} \alpha_n < u_n, u_n > = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\alpha_n} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\alpha_n|^2 \geq 0, (> 0)$$

esto prueba el teorema.

■

Antes del teorema espectral, veamos algunas propiedades del espectro de un operador acotado autoadjunto A, en un espacio de Hilbert H.

Tenemos la expresión para la norma del operador,

$$\|A\| = sup_{\|x\|=1}| < Ax, x > |$$

Sean

$$m = inf_{\|x\|=1} < Ax, x > \text{ y } M = sup_{\|x\|=1} < Ax, x >, \tag{8.1}$$

podemos ver que $\|A\| = máx\{|m|, |M|\}$, además del teorema 184 sabemos que los valores propios del operador A están contenidos en el intervalo cerrado $[-\|A\|, \|A\|]$.

Veamos a continuación el teorema espectral concerniente al caso de un operador acotado autadjunto. En la exposición de este muy importante resultado, se usa el concepto de la $Integral\ de\ Riemann - Stieltjes$.

8.3. Teorema espectral para operadores acotados autoadjuntos.

Teorema 204. *Sea A un operador Autoadjunto Acotado en un espacio de Hilbert H, entonces existe una familia $\{E(\lambda)\}$ de proyecciones ortogonales, tales que para cada $\lambda \in [m, M]$ se verifica lo siguiente:*

$1)$ Cuando $\lambda_1 \leq \lambda_2$, se tiene que $E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2)$; por el teorema 148, esto equivale a decir que

$$E(\lambda_2)E(\lambda_1) = E(\lambda_1)E(\lambda_2) = E(\lambda_1).$$

$2)$ Para cada λ, la función $E(\lambda)x$ ($x \in H$) es una función continua por la derecha, esto es:

$$lim_{\lambda \longrightarrow \lambda_0^+} E(\lambda)x = E(\lambda_0^+)x = E(\lambda_0)x.$$

$3)$ $E(\lambda) = 0$ para $\lambda < m$ y $E(\lambda) = 1$ para $\lambda \geq M$, (0 y 1 son los operadores nulo e identidad respectivamente).

$4)$ El operador A admite la representación en la forma de una integral de Riemann-Stieltjes de la siguiente manera:

$$A = \int_a^b \lambda\, dE(\lambda) = \int_m^M \lambda\, dE(\lambda).$$

Definición 205. La familia $\{E(\lambda)\}$ se denomina $La\ resolución\ de\ la\ Identidad$ asociada al operador A.

Demostración.

Sean a y b números reales tales que cumplen lo siguiente: ($x, y \in H$)

$$a < m = inf_{\|x\|=1} < Ax, y >$$

y

$$b \geq M = sup_{\|x\|=1} < Ax, y >$$

Por otro lado, para un operador lineal acotado $D \in L(H, H)$, existen operadores Autoadjuntos Acotados B y C tales que

$$D = B + iC.$$

donde B y C están dados por:

$$B = \frac{D+D^*}{2} \text{ y } C = \frac{D-D^*}{2i}.$$

Esto es, cualquier operador lineal acotado, queda expresado en términos de operadores acotados autoadjuntos.

Además, cualquier operador acotado autoadjunto, se puede expresar como una diferencia de operadores positivos, esto es, dado el operador acotado autoadjunto A, existen los operadores positivos A^+ y A^-, dados por:

$$A^+ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) \text{ y } A^- = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} - A\right)$$

tales que

$$A = A^+ - A^-. \tag{8.2}$$

Los operadores A^+ y A^- tienen la propiedad, $A^+A^- = 0$, ya que $\left(\sqrt{A^2} + A\right)\left(\sqrt{A^2} - A\right) = A^2 + A\sqrt{A^2} - A\sqrt{A^2} - A^2$.

Notamos que en el caso de que A sea un operador positivo, se tiene que:

$$A = \sqrt{A^2},\ A = A^+ \text{ y } A^- = 0.$$

similarmente, cuando $(-A)$ es un operador positivo, se verifica que:

$$A^+ = 0 \text{ y } A^- = A.$$

Por otro lado, cada uno de ellos conmuta con cualquier operador que conmute con el operador A, es decir, si el operador R conmuta con A, $AR = RA$, se tiene que $A^+R = RA^+$ y $A^-R = RA^-$.

Ahora, denotemos por N al espacio nulo del operador A^+ sea E el operador de la proyección ortogonal sobre este subespacio cerrado, (sabemos que es cerrado por el Teorema 67).

Por lo que para cualquier $x \in H$ se tiene que $Ex \in N$ y $A^+Ex = 0$, por lo tanto

$$A^+E = 0,$$

luego tomando el adjunto, ya que $(A^+E)^* = E^*(A^+)^*$ se tiene

$$EA^+ = 0.$$

Como $A^+A^- = 0$, $A^+(A^-x) = 0\ \forall x \in H$, esto implica que $(A^-x) \in N(A^+) = R(E)$, luego se verifica que $EA^-x = A^-x, \forall x \in H$ tenemos que

$$EA^- = A^-$$

tomando el adjunto, ya que $(EA^-)^* = (A^-)^*E^*$, se tiene

$$A^-E = A^-.$$

Dado que cada uno de los operadores A^+ y A^- conmuta con E, el operador suma $(A^+ + A^-)$ conmuta con E, además como $A = A^+ - A^-$ y $\sqrt{A^2} = A^+ + A^-$, tenemos que A y $\sqrt{A^2}$ conmutan con el operador E, es decir

$$AE = EA \text{ y } \sqrt{A^2}E = E\sqrt{A^2}.$$

Luego tenemos esto,

$$AE = EA = E(A^+ - A^-) = EA^+ - EA^- = EA^+ - A^- = 0 - A^- = -A^-$$

por lo tanto,

$$AE = EA = -A^-. \tag{8.3}$$

Luego podemos establecer que $A - AE = A - EA = A + A^- = A^+$, es decir

$$A(1 - E) = (1 - E)A = A^+. \tag{8.4}$$

Ahora, como A^+ y A^- son operadores positivos, se tiene

$$\sqrt{A^2} \geq A^+ + A^- \geq A^+ - A^- = A$$

similarmente

$$\sqrt{A^2} \geq A^+ + A^- \geq A^- - A^+ = -A$$

en definitiva,

$$\sqrt{A^2} \geq \pm A.$$

Podemos establecer que también se verifica lo siguiente:

$$A^+ \geq A^+ - A^- \geq, y\ A^- \geq -A. \tag{8.5}$$

En seguida, para proseguir con la demostración, estableceremos los siguientes resultados. Seguimos trabajando con el operador acotado y autadjunto A en el espacio de Hilbert H.

Resultado 1.

Sea B un operador acotado y autoadjunto en el espacio de Hilbert H, el cual conmuta con el operador A, entonces el operador B conmuta con el operador E.

Demostración.

Como B conmuta con A, tenemos que B conmuta con A^2, es decir $BA^2 = (BA)A = (AB)A = A(BA) = A(AB) = A^2B$, luego B conmuta con $\sqrt{A^2}$ y por lo tanto B conmuta A^+.

Esto implica que el subespacio $N(A^+)$ es invariante bajo el operador B, lo cual es equivalente a (por la proposición 206),

$$BE = EBE$$

tomando el adjunto se tiene esto,

$$(BE)^* = (EBE)^*, \text{ es decir } E^*B^* = EB = E^*B^*E^* = EBE$$

por lo tanto

$$BE = EBE = EB,$$

el operador B conmuta con E.

Proposición 206. *El subespacio cerrado M es invariante bajo el operador B, $\Longleftrightarrow$ $BE = EBE$, donde E es el operador de proyección ortogonal sobre M.*

Demostración.

$\Longrightarrow)$
Sea M invariante bajo B, luego como $\forall x \in H$, $Ex \in M$; además de la invariancia de M bajo B, $\forall x \in H$, $BEx \in M$,

luego

$$E(BE)x = BEx\ \forall x \in H,$$

por lo tanto

$$EBE = BE.$$

$\Longleftarrow)$
Sea $BE = EBE$ y sea $x \in M$, en este caso es cierto que $x = Ex$, también lo siguiente:

$$Bx = BEx = E(BE)x = EBx$$

esto es que el subespacio M es invariante bajo el operador B.

Resultado 2.

Sea B un operador acotado autoadjunto en el espacio de Hilbert H el cual conmuta con el operador A y además $B \geq \pm A$ $(+A = A)$, entonces $B \geq \sqrt{A^2}$.

Demostración.

Por el resultado 1, el operador B conmuta con E, por hipótesis B conmuta con A; veamos que los operadores operativos $(B - A)$ y $(1 - E)$ conmutan,

$$(B - A)(1 - E) = B - BE - A + AE = B - EB - A + EA = (1 - E)(B - A)$$

por lo tanto,

$$(B - A)(1 - E) = (1 - E)(B - A).$$

Luego, el producto de operadores positivos que conmutan es positivo (Teorema 131),

$$(B - A)(1 - E) \geq 0$$

así que usando (8.4),

$$B(1 - E) \geq A(1 - E) = A^+ \tag{8.6}$$

además como,

$$(B + A)E = E(B + A),\ E \geq 0 \text{ y } (B + A) \geq 0$$

se verifica que,

$$BE + AE \geq 0$$

ó usando (8.3) se tiene,

$$BE \geq -AE = A^-$$

ahora, sumando las anteriores tenemos el resultado requerido, (usando el Corolario 132)

$$B \geq A^+ + A^- = \sqrt{A^2}.$$

Nota: Corolario 132: Sean A y B operadores autoadjuntos en H, si $A \leq B \Longrightarrow AC \leq BC$, donde C es cualquier operador positivo que conmuta con A y B.

Resultado 3.

Sea el operador acotado, autoadjunto y positivo B, en el espacio de Hilbert H, tal que conmuta con A y $B \geq A$, entonces $B \geq A^+$.

Demostración.

De la ecuación (8.6) tenemos que se cumple:

$$B - BE \geq A^+$$

luego, como los operadores B y E son positivos y conmutan entre sí, se tiene

$$BE \geq 0$$

sumando ambas ecuaciones se obtiene el resultado,

$$B \geq A^+.$$

A continuación usaremos los resultados anteriores, para esto se introduce la siguiente notación:

$$A(\lambda) = A - 1\lambda = A - \lambda. \tag{8.7}$$

En esta notación, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$, se verifica que

$$A(\lambda_1) \geq A(\lambda_2)$$

ya que $A - \lambda_1 \geq A - \lambda_2$, es decir $(A - A) + \lambda_2 \geq \lambda_1$, luego por (8.5) se tiene

$$A(\lambda_1)^+ \geq A(\lambda_1) \geq A(\lambda_2).$$

Dado que $A(\lambda_1)^+$ es un operador acotado, positivo y conmuta con cualquier operador que conmute con $A(\lambda_1)$, en particular conmuta con $A(\lambda_2)$, aplicando el resultado 3 obtenemos,

$$A(\lambda_1)^+ \geq A(\lambda_2)^+.$$

A continuación sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, $(x \in H)$

$$\lambda \leq m = inf_{\|x\|=1} < Ax, x >$$

tenemos esto,

$$\lambda < x, x > \leq m < x, x > \leq < Ax, x >$$

lo que a su vez implica

$$< (A-\lambda)x, x> = < A(\lambda)x, x> \geq 0$$

es decir,

$$A(\lambda) \geq 0, \, (\lambda \leq m).$$

luego, tomando en cuenta que $A(\lambda)^{+}$ es un operador positivo, se tiene que

$$A(\lambda)^{+} = A(\lambda), \, (\lambda \leq m).$$

Ahora tomando $\lambda \geq M = sup_{\|x\|=1} < Ax, x >$, en este caso

$$< Ax, x > \leq M < x, x > \leq \lambda < x, x >$$

esto implica que

$$< (A-\lambda)x, x> = < A(\lambda)x, x> \leq 0, \, (\lambda \geq M)$$

es decir,

$$A(\lambda) \leq 0$$

por lo tanto,

$$A(\lambda)^{+} = 0, \, (\lambda \geq M).$$

Ya vimos que cuando $\lambda_1 \leq \lambda_2$, se tiene que $A(\lambda_1)^{+} \geq A(\lambda_2)^{+}$, es decir

$$A(\lambda_1)^{+} - A(\lambda_2)^{+} \geq 0,$$

luego como ambos operadores son positivos y conmutan entre sí, multiplicamos por $A(\lambda_2)^{+}$ en ambos lados,

$$A(\lambda_2)^{+} \left(A(\lambda_1)^{+} - A(\lambda_2)^{+}\right) \geq 0$$

es lo mismo que,

$$A(\lambda_2)^{+} A(\lambda_1)^{+} \geq \left(A(\lambda_2)^{+}\right)^2$$

poniendo esto en la forma de operadores autoadjuntos actuando sobre $x \in H$, tenemos

$$< A(\lambda_2)^{+} A(\lambda_1)^{+} x, x > \geq < \left(A(\lambda_2)^{+}\right)^2 x, x > = < A(\lambda_2)^{+} x, A(\lambda_2)^{+} x > = \|A(\lambda_2)^{+} x\|^2$$

Tomando el caso cuando $x \in N(A(\lambda_1)^{+})$, se tiene que $A(\lambda_1)^{+} x = 0$, luego en este caso se verifica que

$$A(\lambda_2)^+x = 0$$

por lo tanto podemos establecer la siguiente contención de subespacios:

$$N(A(\lambda_1)^+) \subseteq N(A(\lambda_2)^+)$$

cuando $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Con esto se establece que la familia de subespacios cerrados $\{N(A(\lambda)^+\}$ conforma una sucesión monótona creciente de subconjuntos.

Dado que hemos denotado por $E(\lambda)$ al operador de proyección ortogonal sobre el subespacio $N(A(\lambda)^+)$, la familia $\{E(\lambda)\}$ es una secuencia monótona creciente.

POR LO TANTO, HEMOS PROBADO EL INCISO $1)$.

8.4. La resolución de la identidad: $\{E(\lambda)\}$.

La familia $\{E(\lambda)\}$ es la resolución de la identidad, mediante la cual se dará la representación integral del operador A.

Probemos ahora que $E(\lambda) = 0$, cuando $\lambda < m$ y que $E(\lambda) = 1$ cuando $\lambda \geq M$.

Para $\lambda < m = inf_{\|x\|=1} < Ax, x >$, se tiene

$$\lambda < x, x > \leq < Ax, x >$$

para $x \neq 0$ esto es,

$$0 < (A - \lambda)x, x > = < A(\lambda)x, x >$$

usando que $A(\lambda)^+ = A(\lambda)$, esto implica para $x \neq 0$ y $\lambda < m$,

$$< A(\lambda)^+x, x > > 0$$

por lo tanto:

$$N(A(\lambda)^+) = \{0\}$$

luego, usando la contención $N(A(\lambda_1)^+) \subseteq N(A(\lambda_2)^+)$, cuando $\lambda_1 \leq \lambda_2$; tomando en cuenta que $\lambda < m$, tenemos el resultado requerido

$$E(\lambda) = 0,\ (\lambda < m).$$

De manera análoga, cuando $\lambda \geq M$, para $x \in H$ se tiene que $\lambda < x, x > \geq < Ax, x >$, es decir

$$0 \geq < (A - \lambda)x, x > = < A(\lambda)x, x >,\ (x \in H)$$

por lo tanto, ya que $A(\lambda)^+ = A(\lambda)$, esto nos dice que

$$A(\lambda)^+ = 0$$

lo que a su vez implica que

$$N(A(\lambda)^+) = X$$

tenemos así el resultado:

$$E(\lambda) = 1, \, (\lambda \geq M).$$

Nota: $E(\lambda)$ es un operador acotado, autoadjunto e idempotente, (es un operador de proyección ortogonal).

POR LO TANTO HEMOS PROBADO EL INCISO $3)$.

8.5. Representación integral del operador acotado autoadjunto.

A continuación probemos la representación del operador A, en la forma de una integral de Riemann-Stieltjes:

$$A = \int_a^b \lambda \, dE(\lambda). \tag{8.8}$$

Para este efecto, considere $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y defina la F de la siguiente manera,

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = E(\lambda_2) - E(\lambda_1)$$

por el teorema 148, $e)$, tenemos que $E(\lambda_2) \geq E(\lambda_1)$, es decir $F(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$.

luego, multiplicando F por $E(\lambda_2)$ y usando el teorema 148, $b)$ y $c)$, teniendo en cuenta que E es idempotente, vemos que

$$E(\lambda_2)F(\lambda_1, \lambda_2) = E(\lambda_2)(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)) = E(\lambda_2) - E(\lambda_2)E(\lambda_1) = E(\lambda_2) - E(\lambda_1) = F(\lambda_1, \lambda_2)$$

es decir,

$$E(\lambda_2)F(\lambda_1, \lambda_2) = F(\lambda_1, \lambda_2),$$

ahora multiplicando F por $E(\lambda_1)$,

$$E(\lambda_1)F(\lambda_1, \lambda_2) = E(\lambda_1)(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)) = E(\lambda_1)E(\lambda_2) - E(\lambda_1) = E(\lambda_1) - E(\lambda_1) = 0,$$

por lo que

$$E(\lambda_1)F(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{8.9}$$

Por otro lado, ya que $A - \lambda_2 = A(\lambda_2)$, resulta que $-A(\lambda_2) = \lambda_2 - A$; luego al sumarle $E(\lambda_2)F(\lambda_1, \lambda_2) = F(\lambda_1, \lambda_2)$, se obtiene esto

$$(\lambda_2 - A)F(\lambda_1, \lambda_2) = -A(\lambda_2)E(\lambda_2)F(\lambda_1, \lambda_2).$$

Ahora usando la ecuación (8.3), en vista del hecho de que el operador positivo $A(\lambda_2)^-$ conmuta con cualquier operador que conmuta con el operador $A(\lambda_2)$, el último término que aparece en la igualdad anterior verifica lo siguiente:

$$-A(\lambda_2)E(\lambda_2)F(\lambda_1, \lambda_2) = A(\lambda_2)^- F(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$$

de manera similar, usando (8.4)

$$(A - \lambda_1)F(\lambda_1, \lambda_2) = A(\lambda_1)F(\lambda_1, \lambda_2) = A(\lambda_1)(1 - E(\lambda_1))F(\lambda_1, \lambda_2) = A(\lambda_1)^+ F(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0.$$

De las tres últimas igualdades, se tiene lo siguiente:

$$\lambda_1 F(\lambda_1, \lambda_2) \leq AF(\lambda_1, \lambda_2) \leq \lambda_2 F(\lambda_1, \lambda_2)$$

poniendo a F de manera explícita, esto es

$$\lambda_1 \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right) \leq A \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right) \leq \lambda_2 \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right).$$

A continuación sean los numero reales a y b tales que $a < m$ y $b \geq M$, considere la siguiente partición del intervalo $[a, b]$,

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n = b$$

observamos que para $k = 1, 2, ..., n$, se cumple

$$\lambda_{k-1}(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \leq A(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \leq \lambda_k(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1}))$$

luego sumando respecto del subíndice k y notando que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) = 1$, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})).$$

Sea $\lambda'_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ cualquier punto, consideremos la diferencia:

$$A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})),$$

observando que $(\lambda_k - \lambda'_k) \leq (\lambda_k - \lambda_{k-1})$, vemos que

$$A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \leq \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1}))$$

sea $\varepsilon = máx_k |\lambda_k - \lambda_{k-1}|$, luego tenemos

$$A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) = 1\varepsilon.$$

De manera análoga, se verifica la siguiente desigualdad,

$$-1\varepsilon \leq A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1}))$$

Nota: en el caso de un operador acotado autoadjunto C, tal que $-1\varepsilon \leq C \leq 1\varepsilon$, se tiene que

$-\varepsilon < x, x > \leq < Cx, x > \leq \varepsilon < x, x >$, lo que a su vez implica que $\|C\| = sup_{\|x\|=1} < Cx, x > \leq \varepsilon$.

En el caso que estamos tratando, sea $C = A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1}))$, de esta forma se obtiene

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \right\| \leq \varepsilon$$

tomando el límite cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$, por la definición de $Integral\ de\ Riemann - Stieltjes$, se tiene el resultado siguiente:

$$A = \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)$$

el cual se sigue cumpliendo al poner $a = m$ y $b = M$,

$$A = \int_m^M \lambda \, dE(\lambda).$$

POR LO TANTO, SE HA PROBADO EL INCISO $4)$.

Hemos expresado al operador acotado autoadjunto A, en la forma de una integral de Riemann-Stieltjes, cuya existencia está garantizada por la continuidad por la derecha del integrador $E(\lambda)$, hecho que a continuación se prueba.

Conservando la notación usada, considere:

$$lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+} F(\lambda_1, \lambda_2)x = G(\lambda_1)x,$$

este límite existe ya que la familia $\{E(\lambda)\}$ es una sucesión monótona creciente, mostraremos que $G(\lambda_1) = 0$.

Retomemos la igualdad:

$$\lambda_1 \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right) \leq A \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right) \leq \lambda_2 \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right)$$

luego, al tomar el límite cuando $\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+$, se tiene que:

$$(\lambda_1) lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+} \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right) \leq lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+}(A) \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right) \leq (\lambda_1) lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+} \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right)$$

esto implica que

$$lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+}(A) \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right) = lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+}(\lambda_1) \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right)$$

es decir,

$$lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+} \{A \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right) - \lambda_1 \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right)\} = 0$$

$$(A - \lambda_1) lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+} \left(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\right) = 0$$

$$A(\lambda_1)G(\lambda_1) = 0 \tag{8.10}$$

Luego, usando que (8.4) y (8.10) vemos que

$$A(\lambda_1)^+ G(\lambda_1) = (1 - E(\lambda_1))A(\lambda_1)G(\lambda_1) = 0$$

es decir, para cualquier $x \in H$ se verifica que $G(\lambda_1)x \in N(A(\lambda_1)^+)$, lo que implica

$$E(\lambda_1)G(\lambda_1)x = G(\lambda_1)x$$

$$E(\lambda_1)G(\lambda_1) = G(\lambda_1)$$

como $E(\lambda_1)F(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, en vista de (8.9), podemos afirmar que $\forall x \in H$,

$$(1 - E(\lambda_1))F(\lambda_1, \lambda_2)x = F(\lambda_1, \lambda_2)x$$

tomando el límite cuando $lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+}$, se tiene $\forall x \in H$,

$$(1 - E(\lambda_1))G(\lambda_1)x = G(\lambda_1)x$$

es decir,

$$(1 - E(\lambda_1))G(\lambda_1) = G(\lambda_1)$$

$$G(\lambda_1) - E(\lambda_1)G(\lambda_1) = G(\lambda_1)$$

$$E(\lambda_1)G(\lambda_1) = G(\lambda_1) - G(\lambda_1) = 0$$

por lo tanto,

$$E(\lambda_1)G(\lambda_1) = 0.$$

Hemos obtenido lo siguiente:

$$E(\lambda_1)G(\lambda_1) = G(\lambda_1)$$

y $E(\lambda_1)G(\lambda_1) = 0,$

por lo tanto,

$$G(\lambda_1) = 0$$

esto es lo mismo que:

$$G(\lambda_1)x = lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+} F(\lambda_1, \lambda_2)x = lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+} (E(\lambda_2) - E(\lambda_1))x = 0$$

en definitiva,

$$lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+} E(\lambda_2) = E(\lambda_1)$$

$$lim_{\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1^+} E(\lambda_2) = E(\lambda_1) = E(\lambda_1^+).$$

POR LO TANTO HEMOS PROBADO EL INCISO 2) Y POR LO TANTO EL TEOREMA 204.

■

8.6. Apéndice. La integral de $\mathbf{Riemann - Stieltjes}$.

Veamos la definición de la integral de Riemann-Stieltjes y la situación en la cual esta existe. Ya que esta servirá para dar una representación integral en el caso de un operador acotado autoadjunto.

Sea $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, donde $x_{i-1} < x_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$; considere además los puntos intermedios $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, para $i = 1, 2, ..., n$.

Definición 8.6.1. Dadas las funciones $g, F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, la partición P y c_i los correspondientes puntos intermedios, se define la $suma\ parcial$ de $Riemann - Stieltjes$ como

$$S(P, g, F) = \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,(F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

Definición 8.6.2. La norma de la partición P, denotada por $\|P\|$, se define como $\|P\| = máx\{(x_{i-1}, x_i)\ ;\ i = 1, 2, ..., n\}$.

De esta forma, diremos que:

$$lim_{\|P\| \longrightarrow 0} S(P, g, F) = I,$$

cuando para las funciones dadas $g, F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, se tenga que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si para toda partición P que cumpla con $\|P\| < \delta$, se cumple que $|S(P, g, F) - I| < \varepsilon$.

Definición 8.6.3. (Integral de Riemann-Stieltjes): Dadas las funciones $g, F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
si existe el límite $lim_{\|P\| \longrightarrow 0} S(P, g, F) = I$, se dice que la integral de Riemann-Stieltjes de $g(x)$ respecto de $F(x)$ en el intervalo $[a, b]$ existe y vale I.

Se denota de la siguiente manera

$$\int_a^b g(x) dF(x).$$

Observación 8.6.4. Cuando $F(x) = x$, la integral de Riemann-Stieltjes coincide con la integral de Riemann.

Claro está, de seguro que las funciones $g(x)$ y $F(x)$ deben de cumplir alguna condición para que la integral de Riemann-Stieltjes exista. Esto lo vemos en el siguiente teorema de existencia.

Teorema 8.6.5. Si $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función continua y $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función monótona, entonces la integral de Riemann-Stieltjes de $g(x)$ respecto de $F(x)$ en $[a, b]$

$$\int_a^b g(x) dF(x),$$

existe.

■

9. OPERADORES NO ACOTADOS EN ESPACIOS DE HILBERT.

A continuación se usa material de: [1] capítulo 4; [4] capítulos 22 y 23; [9] capítulo 11; [10] capítulo 25 [14] capítulo 7.

9.1. Introducción.

La teoría de los operadores lineales no acotados surge como necesidad de establecer los fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica y fue desarrollada en los años $1920-1930$ por $Von\ Neumann$ y $Stone$. Esta teoría también tiene aplicaciones en Ecuaciones Diferenciales.

Los dos ejemplos básicos de operadores no acotados son el operador multiplicación $Mf(x) = xf(x)$, y el operador derivación $Df(x) = f'(x)$, definidos en $L_2(\mathbb{R})$, para los cuales se cumple la relación de conmutación $DM - MD = I$, fórmula en la cual se basa el $PRINCIPIO\ DE\ INCERTIDUMBRE$ de la Mecánica Cuántica (ver el último capítulo de esta tesis).

Para mostrar que un operador T es no acotado basta mostrar una sucesión $(x_n) \subseteq H$ con $\|x_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tal que

$$\|Tx_n\| \longrightarrow \infty, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Usaremos la notación $S \subset T$, para indicar que el operador T es extensión de S, es decir que $\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(T)$, y $T|_{\mathcal{D}(S)} = S$.

Si un operador lineal T es acotado y su dominio $\mathcal{D}(T)$ es denso en H, entonces éste se puede extender por continuidad a todo el espacio $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$.
Si $\mathcal{D}(T)$ no es denso en H, T se puede extender más allá de $\mathcal{D}(T)$, haciendo por ejemplo $Tx = 0\ \forall x \in H - \mathcal{D}(T)$, de esta forma T está definido en todo H. Ésta extensión es también acotada y tiene la misma norma que la del operador T.

Por esta razón, siempre se puede suponer que los operadores lineales acotados están definidos en todo el espacio H. Veamos la siguiente definición de un operador en términos de su dominio.

9.2. Definiciones.

Definición 207. (Operador densamente definido): Un operador A en un espacio normado E es densamente definido si su dominio es denso en E, es decir $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$.

Por ejemplo el operador diferencial $D = \frac{d}{dx}$, es no acotado y densamente definido en el espacio de funciones $L_2(\mathbb{R})$, (ver el último capítulo de esta tesis).

Veamos a continuación la generalización del concepto de operador adjunto para el caso de operadores densamente definidos.

Definición 208. (Adjunto de un operador densamente definido): Sea A un operador densamente definido en un espacio de Hilbert H. El operador A^* adjunto de A, es un operador definido en el conjunto

$$D(A^*) = \{x' \in H | \ existe \ \ y' \in H, \ \ tal \ \ que \ \ < Ax, x' > \ = \ < x, y' > \forall x \in D(A)\} \tag{9.1}$$

donde el operador A^* tiene como regla de correspondencia $\forall x' \in D(A^*),\ A^* x' = y'$.

Veamos que efectivamente, este operador está bien definido en vista de la densidad del conjunto $D(A) \subseteq H$.

9.3. El adjunto de un operador está bien definido si y sólo si su dominio es denso.

Teorema 209. *El operador adjunto A^* de un operador A, está bien definido (es decir, y' es único) si y sólo si $\mathcal{D}(A)$ es denso en H.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea A^* el operador adjunto de A el cual está bien definido, es decir el elemento y' de la definición anterior es único. Hay que probar que $\overline{D(A)} = H$.

Para esto usamos que "p implica q" es equivalente a "$no\ q$ implica $no\ p$".

Suponga pues que $\overline{D(A)} \neq H$, tenemos que el subespacio $\overline{D(A)}$ es cerrado en H, así que por la proposición 35, inciso $iv)$

$$H = \overline{D(A)} \oplus \left(\overline{D(A)}\right)^{\perp},$$

por lo que existe $y_1 \in H\ (y_1 \neq 0)$, tal que $y_1 \in \left(\overline{D(A)}\right)^{\perp}$, esto significa que $y_1 \perp D(A)$, es decir $< x, y_1 >= 0$, si $x \in D(A)$.

Luego entonces se tiene esto:

$$< x, y' > = < x, y' > + < x, y_1 > = < x, y' + y_1 >,$$

por lo tanto

$$< x, y' > = < x, y' + y_1 >,$$

así tenemos que el elemento y' no es único, ya que $(y' + y_1)$, es un elemento distinto de y' que cumple con la definición del operador adjunto.

Es decir, el adjunto no está bien definido.

Hemos mostrado que $\overline{D(A)} \neq H$, implica que el adjunto A^* no está bien definido.

Podemos concluir que cuando el operador adjunto A^* está bien definido, se tiene que $\overline{D(A)} = H$.

$\Longleftarrow$) Se tiene que $\overline{D(A)} = H$, por lo que $\left(\overline{D(A)}\right)^{\perp} = \{0\}$, luego suponga que el operador adjunto no está bien definido,

esto es, $A^*x \longmapsto y_1$, $A^*x \longmapsto y_2$, tenemos esto:

$< z, y_1 > = < z, y_2 >, \forall z \in D(A)$, entonces $< z, y_1 - y_2 > = 0, \forall z \in D(A)$, esto es $(y_1 - y_2) \perp D(A)$,

por lo que $(y_1 - y_2) \in (D(A))^{\perp} = \left(\overline{D(A)}\right)^{\perp} = \{0\}$, esto por la proposición 35 $i)$, y por la hipótesis $\overline{D(A)} = H$,

así podemos concluir que $(y_1 - y_2) \in \{0\}$, por lo tanto $y_1 = y_2$, es decir el operador adjunto A^* está bien definido.

■

Teorema 210. *Sean A y B operadores densamente definidos en un espacio de Hilbert H.*

$a)$ Si $A \subset B \Longrightarrow B^* \subset A^*$.

$b)$ Si $\mathcal{D}(B^*)$ es denso en $H \Longrightarrow B \subset B^{**}$.

Demostración:

$a)$ Ya que $A \subset B$ tenemos

$$< Ax, y >=< x, B^*y > \forall x \in \mathcal{D}(A) \text{ y } \forall x \in \mathcal{D}(B^*);$$

por otro lado

$$< Ax, y >=< x, A^*y > \forall x \in \mathcal{D}(A) \text{ y } \forall y \in \mathcal{D}(A^*).$$

Así que $\mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(A^*)$ y $A^*(y) = B^*(y)$, $\forall y \in \mathcal{D}(B^*)$ de donde tenemos $a)$.

$b)$ Observamos que la condición $< Bx, y >=< x, B^*y > \forall x \in \mathcal{D}(B)$, y $\forall y \in \mathcal{D}(B^*)$, puede escribirse así:

$$< B^*y, x >=< y, Bx > \forall x \in B \text{ y } \forall y \in B^*.$$

Luego como $\mathcal{D}(B^*)$ es denso en H , tenemos que el operador B^{**} existe, entonces

$$< B^*y, x >=< y, B^{**}x > \forall y \in \mathcal{D}(B^*) \text{ y } \forall x \in \mathcal{D}(B^{**}),$$

de donde podemos concluir que $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(B^{**})$ y $B(x) = B^{**}(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}(B)$.

■

9.4. El adjunto del inverso de un operador densamente definido.

Teorema 211. *Si A es un operador densamente definido en un espacio de Hilbert H, tal que es inyectivo e invertible, con A^{-1} densamente definido*

$\Longrightarrow A^*$ es inyectivo y además $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Demostración.

Sea $y \in \mathcal{D}(A^*)$ y sea $x \in \mathcal{D}(A^{-1})$, así que $A^{-1}x \in \mathcal{D}(A)$, y luego

$$< A^{-1}x, A^*y >=< AA^{-1}x, y >=< x, y >.$$

Esto significa que

$$A^*y \in \mathcal{D}((A^{-1})^*), \text{ y } (A^{-1})^*A^*y = (AA^{-1})^*y = y,$$

a continuación sea $y \in \mathcal{D}(A^{-1})^*$, y para $x \in \mathcal{D}(A)$,

tenemos que $Ax \in \mathcal{D}(A^{-1})$, y así

$$< Ax, (A^{-1})^*y >=< A^{-1}Ax, y >=< x, y >.$$

Esto muestra que $(A^{-1})^*y \in \mathcal{D}(A^*)$ y $A^*(A^{-1})^*y = (A^{-1}A)^*y = y$, por lo tanto $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

■

Teorema 212. *Si A, B y AB son operadores densamente definidos en $H \Longrightarrow B^*A^* \subset (AB)^*$.*

Demostración.

Sea $x \in \mathcal{D}(AB)$ y $y \in \mathcal{D}(B^*A^*)$, así $x \in \mathcal{D}(B)$ y $A^*y \in \mathcal{D}(B^*)$, por lo que $< Bx, A^*y >=< x, B^*A^*y >$.

Por otro lado , ya que $Bx \in \mathcal{D}(A)$ y $y \in \mathcal{D}(A^*)$ tenemos $< ABx, y >=< Bx, A^*y >$ por lo tanto $< ABx, y >=< x, B^*A^*y >$

esto vale $\forall x \in \mathcal{D}(AB)$, así tenemos que $y \in \mathcal{D}((AB)^*)$ y $(B^*A^*)y = (AB)^*y$.

■

Ya se han presentado algunas propiedades del operador adjunto en el caso de operadores acotados, en el caso de operadores no acotados el operador adjunto requiere un tratamiento más delicado. Tenemos la siguiente definición de operador adjunto en el caso no acotado.

Definición 213. (Operador autoadjunto): Sea A un operador densamente definido en un espacio de Hilbert H, A es autoadjunto si $A = A^*$, esto significa que $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ y $Ax = A^*x$, $\forall x \mathcal{D}(A)$.

Si un operador A es acotado y densamente definido en H, entonces A tiene una única extensión a un operador acotado definido en todo H y así su dominio al igual que el de su adjunto es todo el espacio H.

En el caso de operadores no acotados puede ocurrir que un operador densamente definido en H tiene un adjunto A^* tal que $Ax = A^*x$ para $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(A^*)$, pero $\mathcal{D}(A) \neq \mathcal{D}(A^*)$, en éste caso A no es autoadjunto. Es así que tenemos la siguiente definición que relaja la condición que establece la de operador autoadjunto.

Definición 214. (Operador simétrico): Un operador A densamente definido en un espacio de Hilbert H es simétrico si $< Ax, y >=< x, Ay > \forall x, y \in \mathcal{D}(A)$.

Observamos que todo operador autoadjunto es simétrico, pero no todo simétrico es autoadjunto. Veamos un ejemplo de operador no acotado autoadjunto y un ejemplo de un operador simétrico que no es autoadjunto.

Ejemplo 215. (Operador no acotado autoadjunto): Sea $H = l_2$ y A el operador en H definido por:

$$A(x_n) = \left(\frac{x_n}{n}\right),$$

así se tiene que A es un operador inyectivo autoadjunto.

El subespacio $\mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A^{-1})$, es denso en H y consiste de todas las sucesiones $y_n \in l_2$, tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |y_n|^2 < \infty.$$

El operador inverso es: $A^{-1}(y_n) = (ny_n)$, y es no acotado, ya que para la base estándar en H, $e_k = (\delta_{kn})$, $k = 1, 2, ...,$

tenemos $\|e_k\| = 1$ y $\|A^{-1}(e_k)\| = \|ke_k\| \longrightarrow \infty$, cuando $k \longrightarrow \infty$.

Por el teorema 211, tenemos que $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$, por lo que el operador A^{-1} es no acotado y autoadjunto.

Ejemplo 216. (Operador simétrico no autoadjunto): Considere al operador $A = \frac{id}{dt}$, con dominio

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in L_2([a, b]) \mid f' \; es \; continua \text{ y } f(a) = f(b) = 0\}$$

luego

$$< Af, g >= \int_a^b if'(t)\overline{g(t)}dt = if(b)\overline{g(b)} - if(a)\overline{g(a)} - \int_a^b if(t)\overline{g'(t)}dt = \int_a^b f(t)\overline{ig'(t)}dt =< f, Ag >,$$

esto muestra que el operador A es simétrico.

Como el funcional $< Af, g >$, es continuo en $\mathcal{D}(A)$, para cada función g continuamente diferenciable en $[a, b]$, la cual no necesariamente satisface $g(a) = g(b)$, tenemos que $\mathcal{D}(A^*)$ no es el mismo que $\mathcal{D}(A)$, así que A no es autoadjunto.

A continuación tenemos un teorema que nos da una buena caracterización de los operadores simétricos.

Teorema 217. *Un operador A densamente definido, en un espacio de Hilbert H es Simétrico* $\Longleftrightarrow A \subset A^*$.

Demostración.

$\Longleftarrow$) Tenemos que $A \subset A^*$, luego tenemos

$$< Ax, y >=< x, A^*y >, \forall x \in \mathcal{D}(A), \text{ y } \forall y \in \mathcal{D}(A^*),$$

así que

$$< Ax, y >=< x, Ay > \forall x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Esto es que A es simétrico.

$\Longrightarrow$) Si A es simétrico se cumplen las igualdades anteriores, por lo que $A \subset A^*$.

■

Ahora veamos operadores cerrados. Recordamos que la gráfica de un operador $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E_1 \longrightarrow \mathcal{R}(A) \subseteq E_2$, entre espacios vectoriales, es el conjunto

$$\mathcal{G}r(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\} \subseteq E_1 \times E_2 \ .$$

Notamos que si $A \subset B$, tenemos que $\mathcal{G}r(A) \subset \mathcal{G}r(B)$.

9.5. Operador cerrado.

Definición 218. (Transformación lineal cerrada): Una transformación lineal $A : E_1 \longrightarrow E_2$, entre espacios normados es Cerrada si su gráfica $\mathcal{G}r(A)$, es un subespacio cerrado de $E_1 \times E_2$.

Es decir, que cuando

$$x_n \in \mathcal{D}(A), \ x_n \longrightarrow x, \text{ y } Ax_n \longrightarrow y,$$

esto implica que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $Ax = y$.

Veamos el siguiente resultado inmediato de la definición anterior.

Proposición 219-a. Un transformación lineal acotada entre espacios normados, definida en un subespacio cerrado, es cerrada.

Demostración.

Sea A, una transformación lineal acotada entre espacios normados, tal que su dominio es cerrado,

$$A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y,$$

considere (x_n) una sucesión en $\mathcal{D}(A)$, tal que $x_n \longrightarrow x$, cuando $n \longrightarrow \infty$, luego, como A es continua, $\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax = y$, además como $\mathcal{D}(A)$ es cerrado, se tiene que $x \in \mathcal{D}(A)$, por lo tanto A es una transformación lineal cerrada.

■

Observación 219-b. Un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert, $A : H \longrightarrow H$, es un operador cerrado.

Demostración.

Inmediata de la proposición anterior, al considerar que el espacio H, es cerrado.

■

Veamos el siguiente teorema de una transformación lineal cerrada cuyo dominio es un espacio de Banach. Cabe mencionar que en este teorema se hace referencia a un concepto topológico conocido como $espacio\ categoria\ II$.

Teorema 219. *(Del inverso acotado): Sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$, una transformación lineal cerrada entre espacios normados, donde X es un espacio de Banach y el rango de A $\mathcal{R}(A)$, es un $espacio\ categoria\ II$.*
En este caso se cumple lo siguiente.

$a)$ A *es sobreyectiva, es decir $\mathcal{R}(A) = Y$.*

$b)$ *Existe una constante $m > 0$, tal que $\forall y \in Y$, existe $x \in \mathcal{D}(A)$, tal que $Ax = y$, y $\|x\| \leq m\|y\|$.*

$c)$ *Si A^{-1} existe, es acotada.*

Demostración.

Definición 220. Un subconjunto E, de un espacio métrico se llama $denso\ en\ ninguna\ parte$ si $\left(\overline{E}\right)^\circ = \emptyset$; el espacio E, se llama de $Categoría\ I$, si se puede escribir como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.
En otro caso el espacio se llama de $Categoría\ II$.

La prueba de $a)$, se hará usando lo siguiente: El rango de A contiene una vecindad del origen; probemos esto a continuación.

Denotemos la bola de radio α $(\alpha > 0)$, con centro en el origen como:

$$S_\alpha = \{x \in X |\ \|x - 0\| \leq \alpha\},$$

a continuación sea

$$D_\alpha = \mathcal{D}(A) \cap S_\alpha.$$

De la definición, tenemos que al hacer $\alpha = n$,

$$\mathcal{D}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

denotemos $\mathcal{D}(A) = D$, y aplicando en ambos lados A, se tiene,

$$A(D) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(D_n) \tag{9.2}$$

Luego, como $\mathcal{R}(A) = A(D)$ es de categoría II, en (9.2) hemos escrito al subespacio $A(D)$, como una unión numerable, por lo tanto, no todos estos subconjuntos son densos en ninguna parte.

Sea $A(D_{n_0})$, un subconjunto no denso en ninguna parte, es decir que $\left(\overline{A(D_{n_0})}\right)^{\circ} \neq \emptyset$, es decir existe algún z tal que

$$z \in \left(\overline{A(D_{n_0})}\right)^{\circ},$$

también existe $\delta > 0$, tal que la bola con centro en z y radio δ,

$$B_{\delta}(z) \in \left(\overline{A(D_{n_0})}\right).$$

A continuación, para $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$, se tiene la siguiente contención,

$$B_{\varepsilon}(w) \subset \overline{(A(D_{\alpha}))}, \Longleftrightarrow B_{\frac{\beta\varepsilon}{\alpha}}\left(\frac{\beta w}{\alpha}\right) \subset \overline{(A(D_{\beta}))}, \tag{9.3}$$

por lo que podemos escribir lo siguiente, al hacer $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n_0}$,

$$B_{\frac{\delta}{n_0}}\left(\frac{z}{n_0}\right) \subset \overline{A(D_1)}.$$

De esta forma, hemos obtenido un elemento $\frac{z}{n_0} = z_1 \in A(D_1)$, tal que existe una vecindad completamente contenida en $\overline{A(D_1)}$.

Es decir, tenemos que existen elementos z_1, tan cercanos como se quiera al elemento $\frac{z}{n_0}$.

En particular, existe $z_1 \in A(D_1)$, tal que para $\delta_1 = \frac{\delta}{2n_0}$, se tiene que

$$B_{\delta_1}(z_1) \subset \overline{A(D_1)}.$$

Luego, por la definición de $A(D_1)$, ya que $z_1 \in A(D_1)$, tenemos que debe de existir $x' \in D_1$, tal que

$$Ax' = z_1.$$

Considere ahora el conjunto dado por

$$N = \{x - x' \mid x \in D_1\},$$

en seguida, para un elemento $(x - x') \in N$, ya que $x, x' \in D_1 \subset S_1$, se tiene que

$$\|x - x'\| \leq \|x\| + \|x'\| \leq 2,$$

esto implica (ya que $x - x' \in D = \mathcal{D}(A)$),

$$x - x' \in S_2 \cap D = D_2,$$

es decir que $N \subset D_2$, luego aplicando la transformación A, esto es

$$A(N) \subset A(D_2), \text{ y también } \overline{A(N)} \subset \overline{A(D_2)}. \tag{9.4}$$

Por otro lado, como $x - x' \in N$, tenemos que

$$A(x - x') = Ax - Ax' = Ax - z_1,$$

también se verifica lo siguiente, $A(N) = A(D_1) - z_1 = \{Ay - z_1 | y \in D_1\}$, además

$$\overline{A(N)} = \overline{A(D_1) - z_1} = \overline{A(D_1)} - z_1. \tag{9.5}$$

Ahora, para $w \in B_{\delta_1}(0)$, tenemos $\|w\| < \delta_1$, es decir, $\|w + z_1 - z_1\| < \delta_1$, por lo que

$$w + z_1 \in B_{\delta_1}(z_1) \subset \overline{A(D_1)}, \text{ osea, } w \in \overline{A(D_1)} - z_1.$$

Usando (9.4) y (9.5) vemos que

$$w \in \overline{A(N)} \subset \overline{A(D_2)},$$

por lo tanto, cada elemento w de $B_{\delta_1}(0)$, es un elemento de $\overline{A(D_2)}$, esto es $B_{\delta_1}(0) \subset \overline{A(D_2)}$, a continuación usando (9.3) se tiene

$$B_{\frac{\alpha\delta_1}{2}}(0) \subset \overline{A(D_\alpha)}.$$

Definamos lo siguiente, para $\alpha = 2^{-k}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$,

$$P_\alpha = B_{\frac{\alpha\delta_1}{2}}(0),$$

de esta forma para $k = 0, 1, ...$, se tiene que

$$P_{2^{-k}} \subset \overline{A(D_{2^{-k}})}; \tag{9.6}$$

notamos que el radio de $P_{2^{-k}}$, es: $radP_{2^{-k}} = \frac{\delta_1}{2^{k+1}}$.

Veamos el caso cuando $k = 0$, sea $y \in P_1$, por (9.6) tenemos que

$$y \in \overline{A(D_1)},$$

por lo que debe existir $v \in A(D_1)$, tal que $\|y - v\| < \frac{\delta_1}{2^2}$, además del mismo hecho que $v \in A(D_1)$, debe existir $x_1 \in D_1$, tal que $Ax_1 = v$.

Esto implica que

$$(y - v) = (y - Ax_1) \in P_{2^{-1}} \subset \overline{A(D_{2^{-1}})}.$$

Razonando de la misma forma, se tiene la existencia de $x_2 \in D_{2^{-1}}$, tal que $\|(y - Ax_1) - Ax_2\| < \frac{\delta_1}{2^3}$.

Procediendo de esta forma, obtenemos la sucesión $\{x_k\}$, donde $x_k \in D_{2^{-k+1}}$, y

$$\|y - Ax_1 - Ax_2 - \cdots - Ax_n\| < \frac{\delta_1}{2^{n+1}}. \tag{9.7}$$

Considere la sucesión dada por $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, podemos ver que $\|s_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$, a continuación veamos que esta sucesión es acotada superiormente, para esto usaremos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, tenemos que

$$\|x_1\| \leq 1$$

$$\|x_2\| \leq \frac{1}{2}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

por lo tanto, $\|s_n\| \leq 2$, lo que a su vez implica que $s_n \in S_2$.

Luego, como s_n es una suma de elementos que pertenecen al subespacio $D = \mathcal{D}(A)$, vemos que $s_n \in D$, por consiguiente $s_n \in S_2 \cap D = D_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

De esta forma tenemos que $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach X, por lo tanto, existe $x \in X$ tal que $s_n \longrightarrow x$.

Como $\|s_n\| \leq 2$, $(n \in \mathbb{N})$, usando la continuidad de la norma, vemos que $\|x\| \leq 2$, podemos concluir que $x \in S_2$. A continuación, usando (9.7) se tiene que

$$\|y - As_n\| < \frac{\delta_1}{2^{n+1}},$$

esto quiere decir que

$$As_n \longrightarrow y.$$

Usemos ahora el hecho de que A es una transformación cerrada, dado que

$$s_n \longrightarrow x, \qquad \text{y} \qquad As_n \longrightarrow y,$$

podemos concluir que

$$x \in D, \quad \text{y} \quad y = Ax.$$

Sabemos que $x \in S_2$, por lo tanto, $x \in S_2 \cap D = D_2$, además, como $y \in P_1$, lo anterior prueba que la bola con centro en el origen, $P_1 = B_{\frac{\delta_1}{2}}(0)$, pertenece al rango de A, es decir

$$P_1 \subset A(D_2) \subset A(D).$$

Ya que hemos probado que la imagen de A, contiene una vecindad del origen, procedamos a lo siguiente.

Prueba de $a)$.

Sea $y \in Y$, luego para algún número adecuado β, podemos decir que $\beta y \in P_1$.

La manera de tomar el número β, es la siguiente: $\beta = \frac{\delta_1}{4\|y\|}$, ya que en este caso se verifica que $\|\beta y\| = \frac{\delta_1}{4}$, además como $radP_1 = \frac{\delta_1}{2}$, podemos concluir que

$$\beta y \in P_1,$$

pero, $P_1 \subset A(D)$, por lo que $\beta y \in A(D)$, así que debe existir $x \in D$ tal que

$$\beta y = Ax,$$

por lo tanto

$$y = A\left(\frac{x}{\beta}\right)$$

tenemos que A es sobreyectiva y con esto hemos probado $a)$.

Prueba de $b)$.

Hay que probar que $\forall y \in Y$, existe $x \in D$, tal que $Ax = y$, y además, $\|x\| \leq m\|y\|$.

Sea $y \in Y$, tomando un escalar $\beta = \frac{\delta_1}{4\|y\|}$ y un vector $x_0 \in D_2$ (como en la prueba de $a)$), escribimos

$$y = A\left(\frac{x_0}{\beta}\right)$$

vemos que

$$\|\tfrac{x_0}{\beta}\| = \frac{\|x_0\|}{\beta} \leq \frac{2}{\beta} = \frac{8\|y\|}{\delta_1},$$

por lo tanto, haciendo $x = \frac{x_0}{\beta}$ y $m = \frac{8}{\delta_1}$, se tiene la desigualdad

$$\|x\| \leq m\|y\|,$$

que prueba b).

Prueba de c).

Del teorema 108 y de la desigualdad en b), $\|x\| \leq m\|y\|$, se tiene que si existe la transformación A^{-1}, ésta es acotada. Esto prueba c).

■

Observamos que el dominio $\mathcal{D}(A)$, de un operador cerrado A, no necesariamente es un conjunto cerrado. Veamos los siguientes teoremas acerca de operadores cerrados entre espacios de Banach.

Teorema 221. *Sea $A : X \longrightarrow Y$, una transformación lineal acotada sobreyectiva entre espacios de Banach, entonces si A^{-1} existe es acotada.*

Demostración.

Tenemos lo siguiente:

1) $A(X) = Y$, ya que A es sobreyectiva.

2) A es una transformación lineal cerrada, pues como X y $A(X) = Y$, tenemos que $(X \times Y)$ es un subespacio cerrado.

3) El rango de A, es de categoría II. (Por el teorema de Baire, un espacio métrico completo es de categoría II).

Tenemos que se satisfacen las hipótesis del teorema anterior y por lo tanto tenemos el teorema probado.

■

Teorema 222. *(De la gráfica cerrada): Una transformación lineal Cerrada, $A : X \longrightarrow Y$, entre espacios de Banach es Acotada.*

Demostración.

Dado que X y Y son espacios de Banach, el espacio $(X \times Y)$, es un espacio de Banach. Luego, como A es una transformación lineal cerrada, su gráfica $\mathcal{G}raf(A)$, es un subespacio cerrado de $(X \times Y)$, por lo que $\mathcal{G}raf(A)$ es un subespacio cerrado de$(X \times Y)$, se concluye que $\mathcal{G}raf(A)$, es un espacio de Banach.

Considere la siguiente transformación lineal definida por:

$$B : \mathcal{G}raf(A) \longrightarrow X,$$

dada por

$$B(x, Ax) = x.$$

Veamos que B es acotada, (considerando que la norma en $(X \times Y)$ es la suma de la norma en cada factor)

$$\|B(x, Ax)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|(x, Ax)\|,$$

por lo tanto B es acotada.

Ahora veamos que B es una función biyectiva.

Tenemos que B es una función sobreyectiva, esto es $B(\mathcal{G}raf(A)) = X$; probemos que también es inyectiva, como B es lineal, basta probar que su núcleo es trivial.

Sea (x, Ax) en el núcleo de B, luego vemos que $B(x, Ax) = x = 0$, de donde tenemos que $Ax = 0$, por lo tanto $(x, Ax) = (0, 0)$, se concluye que B es inyectiva lo que a su vez implica que B es biyectiva.

Ahora tenemos que $B^{-1} : X \longrightarrow \mathcal{G}raf(A)$, existe, luego por el teorema anterior, tenemos que B^{-1}, es un operador acotado.

Probemos ahora que A es acotada, es decir, que A es continua. Sea $x_n \longrightarrow x$, una sucesión convergente en X, como B^{-1} es acotado, es continuo, por lo que se verifica lo siguiente:

$$B^{-1}(x_n) \longrightarrow B^{-1}(x),$$

es decir

$$(x_n, Ax_n) \longrightarrow (x, Ax),$$

osea

$$(x_n - x, Ax_n - Ax) \longrightarrow (0, 0),$$

por lo tanto

$$Ax_n \longrightarrow Ax,$$

se tiene que A, es continua y por lo tanto acotada.

■

Así tenemos que un operador cerrado en un espacio de Hilbert, necesariamente es acotado.

Con esto tenemos que el dominio de un operador no acotado en un espacio de Hilbert H, no puede ser un subespacio cerrado, sabemos que el espacio H es cerrado por los axiomas de espacio topológico, así en particular tenemos el siguiente resultado:

Observación 223. Un operador no acotado en un espacio de Hilbert H, no puede estar definido en todo H.

Veamos los siguientes teoremas.

Teorema 224. *El inverso A^{-1}, de un operador cerrado A, es cerrado.*

Demostración.

Ya que el subconjunto $\mathcal{G}r(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$ es cerrado, tenemos que $\mathcal{G}r(A^{-1}) = \{(Ax, x) \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$ es cerrado.

■

Teorema 225. *Si A es un operador densamente definido en un espacio de Hilbert H, $\Longrightarrow A^*$, es un operador cerrado.*

Demostración.

Si $y_n \in \mathcal{D}(A^*)$, $y_n \longrightarrow y$ y $A^*y_n \longrightarrow z$, para $x \in \mathcal{D}(A)$, tenemos:

$$< Ax, y >= \lim_{n\to\infty} < Ax, y_n >= \lim_{n\to\infty} < x, A^*y_n >=< x, z >,$$

por lo tanto $y \in \mathcal{D}(A^*)$, y $A^*y = z$, es decir, A^*, es un operador cerrado.

■

La propiedad de ser cerrado para operadores algunas veces es deseable. Si un operador A no es cerrado, ¿es posible extenderlo a un operador cerrado?; el siguiente teorema muestra que en el caso de un operador es simétrico, éste se puede extender a un operador cerrado.

9.6. Extensión de un operador simétrico.

Teorema 226. *Si A es un operador Simétrico densamente definido en un espacio de Hilbert H, $\Longrightarrow$ existe un operador cerrado simétrico B tal que $A \subset B$.*

Demostración.

Iniciemos definiendo el dominio del operador B $\mathcal{D}(B)$, como el conjunto de los $x \in H$, para los cuales existe $(x_n) \subseteq \mathcal{D}(A)$ y $y \in H$ tales que

$$x_n \longrightarrow x \text{ y } Ax_n \longrightarrow y \ .$$

De este modo $\mathcal{D}(B)$ es un espacio vectorial, (por la linealidad del límite de una sucesión convergente) y se tiene que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$. Definimos el operador B de la siguiente forma:

$$B(x) = \lim_{n\to\infty} A(x_n),$$

donde $(x_n) \subseteq \mathcal{D}(A)$ es una sucesión tal que $x_n \longrightarrow x$, por lo que el límite $\lim_{n\to\infty} A(x_n)$, existe.

Ahora hay que ver que de ésta forma el operador B está bien definido, es decir, que no depende de la sucesión (x_n); para esto suponga que

$$x_n \longrightarrow x,\ A(x_n) \longrightarrow y \text{ y } z_n \longrightarrow x,\ A(z_n) \longrightarrow w,$$

luego por la simetría de A, tenemos que $\forall u \in \mathcal{D}(A)$:

$$< u, Ax_n - Az_n >=< u, A(x_n - z_n) >=< Au, x_n - z_n > \tag{9.8}$$

por la continuidad del producto interno se tiene que

$$< u, y - w >=< Au, x - x >= 0, \text{ esto es que } (y - w) \perp \mathcal{D}(A).$$

Como $\mathcal{D}(A)$ es denso podemos concluir que $y = w$, por lo tanto B es un operador bien definido.

Ahora sea $x \in \mathcal{D}(A)$, si en (9.2) ponemos $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $A(x) = B(x)$, así que B es una extensión de A.

Luego sean $x, y \in \mathcal{D}(B)$, así que existen sucesiones $(x_n) \subseteq \mathcal{D}(A)$ y $(y_n) \subseteq \mathcal{D}(A)$ tales que :

$$x_n \longrightarrow x,\ Ax_n \longrightarrow Bx \text{ y } y_n \longrightarrow y,\ Ay_n \longrightarrow By,$$

usando que el operador A es simétrico tenemos: $< Ax_n, y_n >=< x_n Ay_n >$, ahora haciendo $n \longrightarrow \infty$, se obtiene: $< Bx, y >=< x, By >$, por lo tanto el operador B es simétrico.

Por último hay que probar que el operador B es cerrado. Sea (x_n) una sucesión en $\mathcal{D}(B)$ tal que

$$x_n \longrightarrow x, \text{ y } Bx_n \longrightarrow y, \tag{9.9}$$

para algunos $x, y \in H$.

Hay que ver que $x \in \mathcal{D}(B)$ y que $Bx = y$. Por la definición de $\mathcal{D}(B)$ para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $y_m \in \mathcal{D}(B)$ tal que

$$\|x_m - y_m\| < \tfrac{1}{m}, \text{ y } \|Bx_m - Ay_m\| < \tfrac{1}{m},$$

usando la condición en (9.3), tenemos que $y_m \longrightarrow x$, y $Ay_m \longrightarrow y$, esto significa que $x \in \mathcal{D}(B)$ y $Bx = y$. Esto muestra que el operador B es cerrado.

■

Notamos que la construcción de la extensión anterior es la mínima con la propiedad de ser cerrada.

A continuación veamos un teorema acerca de la solubilidad de ecuaciones lineales en la que intervienen operadores cerrados densamente definidos.

En esta parte usaremos lo siguiente: Si X y Y son espacios de Hilbert, un producto interior en el espacio de Hilbert $X \times Y$ es el siguiente:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = < x_1, x_2 > + < y_1, y_2 >.$$

Para verificar este hecho, se hace uso del teorema referente al producto de espacios métricos, ya que el producto de espacios métricos completos es un espacio métrico completo con la métrico producto dada en términos de las métricas de cada espacio factor.

Veamos el siguiente teorema.

Teorema 227. *Sea A un operador cerrado densamente definido en un espacio de Hilbert H, entonces*

$a)$ para cada $u, v \in H$, existen únicos $x \in \mathcal{D}(A)$ y $y \in \mathcal{D}(A^*)$, tales que: $Ax + y = u$, y $x - A^*y = v$,

$b)$ para cada $v \in H$, existe un único $x \in \mathcal{D}(A^*A)$, tal que $A^*Ax + x = v$.

Demostración.

$a)$ Considere el espacio de Hilbert $H_1 = H \times H$. Como el operador A es cerrado la gráfica, $\mathcal{G}r(A)$ es un subespacio cerrado de H_1 por lo que

$$H_1 = \mathcal{G}r(A) \oplus \mathcal{G}r(A)^{\perp}, \text{ donde } \mathcal{G}r(A) \cap \mathcal{G}r(A)^{\perp} = \{0\}.$$

Ahora, tenemos que $(z, y) \in \mathcal{G}r(A)^{\perp} \iff < (x, Ax), (z, y) >= 0 \; \forall x \in \mathcal{D}(A)$, o de manera equivalente

$$< x, z > + < Ax, y >= 0 \; \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Así que

$$(z, y) \in \mathcal{G}r(A)^{\perp} \iff < Ax, y >= (-1) < x, z >=< x, -z > \forall x \in \mathcal{D}(A) \; ,$$

en otras palabras

$$(z, y) \in \mathcal{G}r(A)^{\perp} \iff y \in \mathcal{D}(A^*) \text{ y } z = -A^*y.$$

En consecuencia si $(v, u) \in H_1 = H \times H$ entonces existen únicos $x \in \mathcal{D}(A)$ y $y \in \mathcal{D}(A^*)$ tales que $(v, u) = (x, Ax) + (-A^*y, y)$ lo que prueba $a)$.

$b)$ Si en $a)$ ponemos $u = 0$ se tiene entonces que existen $x \in \mathcal{D}(A)$ y $y \in \mathcal{D}(A^*)$ tales que $Ax + y = 0$ y $x - A^*y = v$,

esto es:

$$x - A^*(-Ax) = v \text{ , por lo tanto } A^*Ax + x = v.$$

■

Veamos el siguiente teorema que relaciona a la cerradura de un operador con su doble autoadjunto.

Teorema 228. *Sean X y Y espacios de Hilbert complejos y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$, una transformación lineal tal que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, suponga que A tiene una extensión cerrada.*

Entonces

$$1)\ \left(\overline{A}\right)^* = A^*$$

$$2)\ \overline{A} = A^{**}$$

$$3) \text{ en el caso que } A \text{ sea cerrada, } A = A^{**}.$$

Demostración.

Considere las funciones U_1 y U_2 definidas por:

$$U_1 : X \times Y \longrightarrow Y \times X, \text{ donde } (x, y) \longmapsto (iy, -ix)$$

$$U_2 : Y \times X \longrightarrow X \times Y, \text{ donde } (y, x) \longmapsto (ix, -iy)$$

Observación: de la definición, vemos que $U_1U_2 = U_2U_1 = 1$ y además U_1 y U_2 son isometrías.

Tenemos, $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax)\}$ y $U_1\mathcal{G}(A) = \{(Aix, -ix)\}$, veamos que $U_1(\mathcal{G}(A))^{\perp} = \mathcal{G}(A^*)$, como sigue:

sea $(y, z) \in U_1(\mathcal{G}(A))^{\perp}$

$$\Longleftrightarrow \langle (y, z), (Aix, -ix) \rangle = 0, \forall x \in Dom(A)$$

$$\Longleftrightarrow < y, iAx > + < z, -ix > = 0, \forall x \in Dom(A)$$

$$\Longleftrightarrow i < Ax, y > -i < z, x > = 0, \forall x \in Dom(A)$$

$$\Longleftrightarrow < Ax, y > = < z, x >, \forall x \in Dom(A)$$

$$\Longleftrightarrow y \in Dom(A^*) \text{ y } A^*y = z$$

$$\Longleftrightarrow < y, z > \in \mathcal{G}(A^*)$$

por lo tanto, hemos probado que

$$U_1(\mathcal{G}(A))^{\perp} = \mathcal{G}(A^*). \tag{9.10}$$

Luego, ya que $\overline{A}$ es la cerradura de A, debemos tener la igualdad de gráficas (por la definición de cerradura de una transformación), $\mathcal{G}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)}$, aplicando la isometría U_1 se tiene,

$$U_1\mathcal{G}(\overline{A}) = U_1\overline{\mathcal{G}(A)}.$$

Usando la igualdad en (9.10) tenemos que

$$U_1\mathcal{G}(\overline{A})^{\perp} = \mathcal{G}(\overline{A}^*),$$

luego, ya que U_1 es una isometría, se verifica que

$$U_1(\overline{\mathcal{G}(A)}) = \overline{U_1(\mathcal{G}(A))}.$$

Ahora podemos establecer lo siguiente,

$$U_1(\mathcal{G}(\overline{A}))^{\perp} = \overline{U_1(\mathcal{G}(A)}^{\perp} = U_1(\mathcal{G}(A))^{\perp} = \mathcal{G}(A^*)$$

por lo tanto,

$$\mathcal{G}(\overline{A}^*) = \mathcal{G}(A^*)$$

es decir,

$$\overline{A}^* = A^*$$

hemos probado $1)$.

Para probar $2)$ usamos que cuando U es una isometría, $U(S)^{\perp} = U(S^{\perp})$, donde $S \subset X$.

Dado que U_2 es una isometría, se verifica que

$$U_2(\mathcal{G}(A^*)^{\perp}) = U_2(\mathcal{G}(A^*))^{\perp}$$

luego, usando las igualdades anteriores, vemos que

$$\mathcal{G}(\overline{A}) = U_2(\mathcal{G}(A^*)^{\perp} = \mathcal{G}(A^{**})$$

por lo tanto,

$$\overline{A} = A^{**}.$$

hemos probado $2)$.

Si $A = \overline{A}$, se tiene que

$$A = A^{**}.$$

y hemos probado $3)$.

■

Veamos la siguiente definición y a continuación se procederá a probar algunos teoremas concernientes a este capítulo.

9.7. Expresión de operadores cerrados en términos de operadores acotados.

Teorema 229. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \longrightarrow H$, un operador lineal cerrado tal que $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$,*

entonces existe el operador $B = (1 + A^*A)^{-1}$ y el operador $C = A(1 + A^*A)^{-1}$; más aún, B y C están definidos en todo el espacio H, son acotados con norma

$$\|B\| \leq 1 \text{ y } \|C\| \leq 1,$$

y además $< Bx, x > \geq 0$, es decir B es un operador positivo.

Demostración.

Como el operador A es cerrado, su gráfica $\mathcal{G}raf(A) = \mathcal{G}(A)$, es un conjunto cerrado en el espacio de Hilbert $H \times H$.

Por lo que $H \times H = \mathcal{G}(A) \oplus \mathcal{G}(A)^{\perp}$; luego, como A es un operador cerrado, por el teorema anterior tenemos que $A = A^{**}$.

Lo anterior implica que $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(A^{**})$, tomando la función U_2 mencionada en el teorema anterior y de las igualdades (?) anteriores, se tiene

$$U_2(\mathcal{G}(A^*))^{\perp} = \mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(A^{**}).$$

Como U_2 es una isometría, del hecho que $\mathcal{G}(A^*)$ es un conjunto cerrado, tenemos que $U_2\mathcal{G}(A^*)$ también es un conjunto cerrado, por lo que

$$U_2\mathcal{G}(A^*)^{\perp\perp} = U_2(\mathcal{G}(A^*).$$

Sustituyendo, de la ecuación anterior, obtenemos

$$U_2(\mathcal{G}(A^*)) = \mathcal{G}(A)^{\perp},$$

por lo que la suma ortogonal anterior se puede escribir así:

$$H \times H = \mathcal{G}(A) \oplus U_2(\mathcal{G}(A^*))$$

por lo tanto, para un elemento $(z, 0) \in H \times H$, existen únicos $x, w \in H$ tales que:

$$(z, 0) = (x, Ax) + (iA^*w, -iw)$$

haciendo $y = iw$, se tiene

$$(z, 0) = (x, Ax) + (A^*y, -y).$$

De esta forma, hemos obtenido únicos $x, y \in H$, tales que satisfacen las ecuaciones:

$$z = x + A^*y \qquad \text{y} \qquad 0 = Ax - y.$$

En vista de las asignaciones anteriores, definamos los siguientes operadores:

$$Bz = x \qquad \text{y} \qquad Cz = y.$$

Probaremos que estos operadores B y C cumplen el teorema.

De la definición, tenemos que B y C son lineales. Usando estos operadores B y C, podemos escribir:

$$z = Bz + A^*Cz \qquad \text{y} \qquad 0 = ABz - Cz,$$

como esto es $\forall x \in H$, vemos que

$$1 = B + A^*C \qquad \text{y} \qquad 0 = AB - C, \, (C = AB)$$

luego

$$1 = B + A^*(AB) = (1 + A^*A)B.$$

Hemos probado una parte del teorema.

A continuación veamos que B y C son operadores acotados en H.

Para cualquier $z \in H$, se cumple $\|z\|^2 = \|(z, 0)\|^2$, y dado que se tiene la descomposición ortogonal:

$$H \times H = \mathcal{G}(A) \oplus U_2(\mathcal{G}(A^*))$$

podemos ver que, (usando la fórmula de Pitágoras)

$$\|z\|^2 = \|(z, 0)\|^2 = \|(x, Ax)\|^2 + \|(A^*y, -y)\|^2 =$$

$$\|x\|^2 + \|Ax\|^2 + \|A^*y\|^2 + \|y\|^2,$$

por lo que,

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|Bz\|^2 + \|Cz\|^2 \leq \|z\|^2.$$

Hemos obtenido lo siguiente, $\forall z \in H$

$$\|Bz\| \leq \|z\| \qquad \text{y} \qquad \|Cz\| \leq \|z\|$$

por lo tanto, los operadores B y C son acotados y $\|B\| \leq 1$; $\|C\| \leq 1$.

Para concluir la demostración, falta ver que el operador $(1 + A^*A)^{-1}$ existe en todo H y que $< Bx, x > \geq 0$.

Sea $w \in \mathcal{D}(A)$ tal que $Aw \in \mathcal{D}(A^*)$ y considere,

$$< (1 + A^*A)w, w > = < w, w > + < A^*Aw, w >$$

como $A^{**} = A$, de lo anterior tenemos que,

$$< (1 + A^*A)w, w > = < w, w > + < Aw, Aw > \geq < w, w >$$

tomando a w en el núcleo de $(1 + A^*A)$, esto es $(1 + A^*A)w = 0$, vemos que

$$0 \geq < w, w > \geq 0$$

por lo tanto, $w = 0$; de esta forma hemos visto que el operador $(1 + A^*A)$ es inyectivo.

Ahora veamos que es sobreyectivo.

Usando el operador B, cada $z \in H$ se puede escribir así:

$$z = (1 + A^*A)(Bz)$$

esto prueba que cada $z \in H$ se puede ver como la imagen del elemento (Bz) bajo el operador $(1 + A^*A)$, por lo tanto el operador $(1 + A^*A)$ es sobreyectivo.

Por lo tanto el operador $(1 + A^*A)$ es biyectivo, por lo tanto existe el operador inverso $(1 + A^*A)^{-1}$.

Para terminar la prueba de este teorema, para $x \in H$ considere,

$$< Bx, x > = < Bx, (1 + A^*A)Bx > = < Bx, Bx > + < ABx, ABx > \geq 0$$

hemos visto así, que el operador B es positivo.

$\blacksquare$

9.8. La transformación de Cayley.

A continuación, veamos una transformación unitaria dada en términos de un operador autoadjunto acotado o No acotado. Esta transformación se llama transformación de Cayley, entre otras cosas, permite establecer una interesante analogía entre operadores y números complejos.

De esta forma al definir al operador: $U = (A - i)(A + i)^{-1}$, los operadores autoadjuntos hacen el papel de los números reales y los operadores unitarios se corresponden con los números complejos de módulo 1.

Esto lo tenemos en el siguiente teorema.

Teorema 230. *Sea H un espacio de Hilbert y sea A un operador lineal autoadjunto acotado o No acotado, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \longrightarrow H$, donde $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$, entonces la transformación*

$$U = (A - i)(A + i)^{-1} \tag{9.11}$$

está definida en todo el espacio H y es un operador lineal unitario. U se llama $transformación\ de\ Cayley$ de A.

Demostración.

Veamos que las transformaciones dadas por $(A \pm i)$, son inyectivas, con esto se tendrá que las transformaciones inversas existen y estarán definidas en $\mathcal{R}(A \pm i)$.

Ya que A es autoadjunto, se tiene

$$\|Ax \pm ix\|^2 = < Ax \pm ix, Ax \pm ix > = < Ax, Ax > \pm < Ax, ix > \pm < ix, Ax > \pm < ix, ix > =$$

$$\|Ax\|^2 \pm < Ax, ix > \pm < ix, Ax > \pm \|x\|^2 = \|Ax\|^2 \pm < Ax, ix > \mp < Ax, ix > \pm \|x\|^2 =$$

$$\|Ax\|^2 + \|x\|^2.$$

esto es,

$$\|Ax \pm ix\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2. \tag{9.12}$$

Sea x tal que $(A \pm i)x = 0$, luego de (9.12) se tiene que

$$\|Ax \pm ix\| = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 = 0,$$

por lo que

$$\|Ax\|^2 + \|x\|^2 = 0, \text{ así que } \|x\| = 0, \text{ esto es que } x = 0,$$

por lo tanto las transformaciones $(A \pm i)$, son inyectivas, de donde tenemos que las funciones $(A \pm i)^{-1}$ existen y están definidas en $\mathcal{R}(A \pm i)$.

Ahora veamos que $\overline{\mathcal{R}(A+i)} = H$, para esto sea

$$z \perp \overline{\mathcal{R}(A+i)}, \text{ y } x \in \mathcal{D}(A),$$

luego

$$< Ax + ix, z > = < Ax, z > + < ix, z > = 0,$$

de donde vemos que

$$< Ax, z > = < x, iz >, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

De esta forma tenemos que

$$z \in \mathcal{D}(A^*), \text{ y } A^* z = iz,$$

luego, como A es autoadjunto,

$$z \in \mathcal{D}(A), \text{ y } Az = iz.$$

De esta forma se tiene que, $Az - iz = (A - i)z = 0$, pero sabemos que la transformación $(A - i)$ es inyectiva, por lo que en este caso, $z = 0$.

Por lo tanto, al suponer que $z \perp \overline{\mathcal{R}(A+i)}$, se concluye que $z = 0$, por lo tanto $\overline{\mathcal{R}(A+i)} = H$, esto significa que el espacio $\mathcal{R}(A+i)$, es denso en H.

Veamos que $\mathcal{R}(A+i) = \overline{\mathcal{R}(A+i)}$, para esto sea $y \in H$, por la densidad del espacio $\mathcal{R}(A+i)$, existe una sucesión $\{y_n\}$ en $\mathcal{R}(A+i)$, tal que

$$y_n \longrightarrow y, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

dado que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{R}(A+i)$, se tiene que cada y_n es de la forma:

$$y_n = Ax_n + ix_n, \text{ donde } x_n \in \mathcal{D}(A).$$

Luego,

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|A(x_n - x_m) + i(x_n - x_m)\|^2,$$

usando (9.12) tenemos la igualdad

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|A(x_n - x_m) + i(x_n - x_m)\|^2 = \|A(x_n - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2,$$

esto implica que las sucesiones $\{Ax_n\}$ y $\{x_n\}$ deben ser sucesiones de Cauchy en H, dado que H es un espacio de Hilbert, existen vectores $x, z \in H$, tales que

$$Ax_n \longrightarrow z, \text{ y } x_n \longrightarrow x, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

luego, como $A = A^*$, tenemos que es un operador cerrado, por lo que

$$x \in \mathcal{D}(A), \text{ y } z = Ax,$$

por lo tanto, hemos probado que

$$(Ax_n + ix_n) \longrightarrow (Ax + ix) = y \in \mathcal{R}(A + i), \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

por lo tanto el espacio $\mathcal{R}(A+i)$, es cerrado, es decir $\mathcal{R}(A+i) = \overline{\mathcal{R}(A+i)}$.

Ahora, como el espacio $\mathcal{R}(A+i) = \overline{\mathcal{R}(A+i)}$, es denso en H, tenemos que la transformación inversa $(A+i)^{-1}$, existe en todo el espacio H;
de manera análoga, al intercambiar el signo más $(+)$, por el signo menos $(-)$ en el razonamiento anterior, la transformación $(A-i)^{-1}$, está definida en todo el espacio H.

De esta forma se tiene la igualdad de dominios:

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A+i) = \mathcal{D}(A-i).$$

Ahora sea U el operador lineal dado por:

$$U = (A-i)(A+i)^{-1},$$

como la transformación $(A+i)^{-1}$, se puede aplicar a cualquier $x \in H$, y como $\mathcal{R}(A-i) = H$, se concluye que cada vector en H, es la imagen de algún elemento bajo el operador U, por lo que el operador U, es sobreyectivo.

También se tiene que el operador U, es inyectivo, ya que las transformaciones $(A-i)$ y $(A+i)^{-1}$ son inyectivas. Por lo tanto existe el operador U^{-1}.

Veamos a continuación que el operador U es isométrico, para esto considere un elemento $y = (A+i)x$,

$$Uy = (A-i)(A+i)^{-1}(A+i)x = (A-i)x,$$

usando la igualdad en (9.12) se tiene que

$$\|Uy\|^2 = \|(A-i)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 = \|Ax + ix\|^2 = \|(A+i)x\|^2 = \|y\|^2,$$

esto es

$$\|Uy\|^2 = \|y\|^2.$$

Esto nos permite ver que $\|Uy\| = \|y\|$, el operador U es acotado, por lo tanto existe el operador U^*. Ahora podemos establecer lo siguiente,

$$< Uy, Uy > = < y, y > \Longrightarrow < y, U^*Uy > = < y, y > \Longrightarrow U^*Uy = y,$$

esto nos permite concluir que $U^{-1} = U^*$, por lo tanto el operador U es unitario. Esto prueba el teorema.

■

En seguida, estableceremos una correspondencia entre el espacio P, de los polinomios con coeficientes reales y es espacio $L(H, H)$, de los operadores lineales acotados, donde se ha fijado de antemano un operador autoadjunto A.

9.9. Una correspondencia entre los polinomios con coeficientes reales y operadores autoadjuntos.

Teorema 231. *Considere la clase P de polinomios con coeficientes reales y sea A un operador acotado y autoadjunto en el espacio de operadores lineales acotados $L(H, H)$, también considere*

$$m = inf_{\|x\|=1} < Ax, x > \text{ y } M = sup_{\|x\|=1} < Ax, x >,$$

definimos la siguiente función:

$$\varphi_1 : P \longrightarrow L(H, H)$$

dada por:

$$p(\lambda) \longmapsto p(A)$$

en esta situación, se cumple lo siguiente:

$$1)\ \varphi_1(p_1 + p_2) = p_1(A) + p_2(A)$$

$$2)\ \varphi_1(p_1 p_2) = p_1(A) p_2(A)$$

$$3)\ \varphi_1(\alpha p) = \alpha p(A)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$4) \text{ si } p(\lambda) \geq 0 \text{ en } [m, M], \text{ entonces } p(A) \geq 0.$$

Notamos de $4)$ que cuando $p_1(\lambda) \geq p_2(\lambda)$, en $[m, M]$, esto implica que $p_1(A) \geq p_2(A)$.

Demostración.

Para probar $1), 2)$ y $3)$, basta considerar que $p(\lambda) \in P$ es de la forma:

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + ... + \alpha_1 \lambda + \alpha_0, \, (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

y que la imagen de $p(\lambda)$ bajo φ_1 es:

$$\varphi_1(p(\lambda)) = p(A) = \alpha_n A^n + ... + \alpha_1 A + \alpha_0.$$

Probemos $4)$.

Sean $\alpha_1, ..., \alpha_j$ las raíces reales del polinomio $p(\lambda)$ que son menores o iguales que m; denote por $\beta_1, ..., \beta_l$ las raíces reales que son mayores o iguales que M, por último sean $(v_1 + iu_1), ..., (v_k + iu_k)$ las demás raíces reales o complejas de $p(\lambda)$.

Si sucede que $u_i = 0$, tenemos que $v_i \in (m, M)$; por hipótesis se tiene que $p(\lambda) \geq 0$ en $[m, M]$, esto implica que cualquier raíz real de $p(\lambda)$ en (m, M) tiene multiplicidad par. Ya que las raíces aparecen en pares complejos, tomemos la siguiente representación de $p(\lambda)$,

$$p(\lambda) = a \prod_{i=1}^{j} (\lambda - \alpha_1) \prod_{i=1}^{l} (\beta_i - \lambda) \prod_{i=1}^{k} (\lambda - v_i)^2 + u_i^2 \tag{9.13}$$

donde $a \geq 0$.

El objetivo es probar que $A - \alpha_i \geq 0$, es decir, que $< (A - \alpha_i)x, x > \geq 0$, osea $< Ax, x > \geq < \alpha_i x, x > = \alpha_i < x, x >, \forall x \in H$,

luego, considerando que $\alpha_i \leq m = inf_{\|x\|=1} < Ax, x >$, hemos probado el objetivo.

Similarmente, hay que probar que $\beta_i - A \geq 0$, esto es que $\beta_i < x, x > \geq < Ax, x > \, \forall x \in H$, para esto usamos que $\beta_i \geq M = sup_{\|x\|=1} < Ax, x >$ y tenemos el resultado.

Para terminar, como el operador $(A - v_k)$ es autoadjunto, su cuadrado es positivo, además la suma de operadores positivos es positivo, por lo que

$$(A - v_k)^2 + u_k^2 \geq 0$$

así que cada factor de la imagen de (9.13) es positivo y su producto conmuta, luego por el teorema 131, la imagen del producto en (9.13) es un operador positivo.

Por lo tanto $p(A) \geq 0$.

■

Después de haber expuesto algo de la teoría de los operadores lineales en espacios de Hilbert, veamos a continuación como se aplican algunos de estos resultados al desarrollo matemático de los fundamentos de la mecánica cuántica.

10. NOCIONES DE LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA.

10.1. Introducción.

De los capítulos anteriores sabemos propiedades elementales de los $operadores\ lineales$ en los $espacios\ de\ Hilbert$.
A continuación el objetivo es ver una relación de esta teoría con la teoría de la $mecánica\ cuántica$.
Para esto es pertinente la pregunta, ¿qué es la mecánica cuántica?

Para dar una respuesta veamos algunos libros de Física.

De la bibliografía, el libro [15] en la página 17 nos dice:

"La mecánica cuántica es la teoría de los sistema atómicos y nucleares, habiendo surgido de la física clásica, especialmente de las dos grandes ramas: mecánica newtoniana y teoría electromagnética de Maxwell."
En la página 32 añade esto:

"La quiebra de la mecánica clásica resulta evidente cuando se intenta aplicarla a los sistemas suficientemente pequeños. Puede utilizarse para explicar satisfactoriamente la trayectoria de los astros o el movimiento de una pelota de golf, pero falla completamente cuando se aplica a los átomos."

La referencia bibliográfica [22] en la página 1 refiere lo siguiente:
"En el actual estado del conocimiento humano, la mecánica cuántica se puede considerar fundamentalmente como la teoría de los fenómenos atómicos".

Pasemos ahora a lo siguiente.
En general, la descripción mecánica de un $Sistema\ Físico$ requiere de los siguientes conceptos:

$i)$ Observables.

$ii)$ Estados.

$iii)$ Ecuaciones de movimiento.

Las cantidades físicamente medibles son llamadas observables. En mecánica clásica ejemplos de observables son: la posición, el momento, el momento angular , la energía; los cuales son características del sistema físico.

En el caso de un $Sistema\ Mecánico - Cuántico$ veremos a continuación a qué corresponden los conceptos de: $estados$, $observables$ y una ecuación fundamental de movimiento, a saber la $Ecuación\ de\ Schrödinger$.
La siguiente exposición corresponde a los postulados de la Mecánica Cuántica.

10.2. Postulado 1: El vector de estado.

En esta parte se usa material de: [1] capítulo 7; [9] capítulo 11; [10] capítulo 25; [15] capítulos 3 y 12; [16] capítulo 6; [19] capítulo III; [21] capítulo 2.

Los posibles estados de un sistema físico en mecánica cuántica, corresponden a los vectores de un $espacio\ de\ Hilbert$ H **sobre el campo de los números complejos** $\mathbb{C}$**, separable de dimensión infinita.**
Cada estado del sistema es representado por un vector (distinto de cero) en el espacio H.

De manera inversa, cada vector del espacio H **y sus múltiplos escalares (no cero) representan un mismo estado físico del sistema cuántico.**

El vector de estado que corresponde al estado del sistema en el tiempo t, **se denota por** $\Psi(x,t)$ **y es llamado vector de estado del sistema dependiente del tiempo.**
El estado de un sistema físico está completamente descrito por este vector de estado $\Psi(x,t)$ **en el sentido de que casi toda la información acerca del sistema en el instante de tiempo** t **se puede obtener del vector** $\Psi(x,t)$.

Usualmente el vector de estado se denota por $\psi(x)$.

10.3. Notación de $Dirac$.

En física hay una notación muy usada conocida como notación de Dirac. En esta notación un vector de estado se escribe como:

$\psi(x) =< x|\psi >$, o $\psi = |\psi >$ y su conjugado complejo es: $\overline{\psi(x)} =< \psi|x >$, o $\overline{\psi} =< \psi|$.

En vista del postulado 1 tenemos lo siguiente.
Por el teorema 42 sabemos que los espacios de Hilbert sobre el campo $\mathbb{C}$, separables, salvo isomorfismos, son dos:

$H = \mathbb{C}^n$ en el caso de dimensión finita, $dim(H) = n$,

y $H = L_2(X)$, para el caso de dimensión infinita, $dim(H) = \infty$.

Es así como obtenemos que los vectores de estado de un sistema cuántico, corresponden a los vectores del espacio de Hilbert $L_2(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid f\ es\ medible\ y\ \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$, de las clases de funciones de módulo cuadrado integrable.

El postulado 1 dice que los vectores $\psi(x)$, $(\psi(x) \neq 0)$ y $\alpha\psi(x)$ $(donde\ \ \alpha \in \mathbb{C} - \{0\})$, representan un mismo estado físico del sistema cuántico.

Por lo que $\psi(x)$ y $\frac{1}{\|\psi(x)\|}\psi(x)$ representan al mismo estado físico,

debido a esto no se pierde la generalidad al suponer siempre que un vector de estado ψ cumple con $\|\psi\| = 1$.

Con esto, veamos ahora la condición que tiene que cumplir el escalar no cero α para que ψ y $\alpha\psi$ representen al mismo estado físico del sistema,

para esto ponemos $\|\psi\| = \|\alpha\psi\| = 1 = |\alpha| \ \|\psi\|$, concluimos que $|\alpha| = 1$, con esto obtenemos que el escalar es de la forma $\alpha = e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$.
Con esta elección del escalar $\alpha = e^{i\theta}$, los vectores ψ y $\alpha\psi$ representan al mismo estado del sistema cuántico y cumplen con $\|\alpha\psi\| = \|\psi\| = 1$.

Ya que el producto interior en el espacio $L_2(X)$ está dado por: $< f, g > = \int_X f\overline{g}\ d\mu$,

la condición $\|\psi\| = 1$ en este espacio corresponde a: $\|\psi\|^2 = \int_X \psi\overline{\psi}\ d\mu = \int_X |\psi|^2 d\mu = 1.$

En la notación de Dirac esto se escribe así: $\int < \psi|x >< x|\psi > dx = \int | < \psi|x > dx| = 1$, o de forma abreviada $< \psi|\psi >= 1$.

Es decir, usando la notación de Dirac tenemos que el producto interno de dos vectores de estado $|\phi >$ y $|\psi >$ está dado por:

$< \phi|\psi >= \int \overline{\phi(x)}\psi(x)dx = \int < \phi|x >< x|\psi > dx.$

Así obtenemos de manera abreviada : $< \phi|\psi >= \overline{< \psi|\phi >}$.

Dos vectores de estado $|\phi >$ y $\psi >$ son ortogonales si $< \phi|\psi >= 0$

Un conjunto de vectores $|\psi_1 >, |\psi_2 >, ...$ es ortonormal si $< \psi_i|\psi_j >= \delta_{ij}$.

Dada una base ortonormal $\{|\psi_i >\}_{i\in\mathbb{N}}$ cualquier vector en el sistema se representa por :

$$|\psi >= \sum_{i=1}^{\infty} c_i|\psi_i >,$$

donde los coeficientes son: $c_i =< \psi_i|\psi >$, esto debido al Teorema 49 (de las series de Fourier).

El postulado 1 afirma que todo lo que podemos saber acerca del estado de un sistema cuántico en el tiempo t, se puede obtener del vector de estado $\Psi(x, t)$, donde $x \in X$ y $t \in \mathbb{R}$.

En tales sistemas al vector de estado $\Psi(x, t)$ también se le conoce como $función\ de\ estado$ o $función\ de\ onda$.

Se considerará el caso $X \subseteq \mathbb{R}$ y $X \subseteq \mathbb{R}^3$, por lo que se estará haciendo referencia a los espacios de Hilbert (isomorfos):

$$H = L_2(X \subseteq \mathbb{R}) = \{f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$$

$$H = L_2(X \subseteq \mathbb{R}^3) = \{f : X \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}.$$

donde se considera la medida μ de $Lebesgue$ en $\mathbb{R}^n$. Recordamos que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ asigna a un intervalo su longitud, en $\mathbb{R}^2$ asigna a un rectángulo su área y en $\mathbb{R}^3$ a un paralelepípedo su volumen.

Además se considera la $\sigma - álgebra$ de Lebesgue la cual es completa, aunque para efectos del cálculo es suficiente considerar la $\sigma - álgebra$ de $Borel$, esta es la generada por los abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Para este efecto, además se considera $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Ya que $Riemann$ integrable implica $Lebesgue$ integrable y además el valor de la integral es el mismo (ver [5]), es válido usar los teoremas del cálculo vectorial.

En los espacios de Lebesgue $L_2(X)$, se considera una función $f = [f] \in L_2(X)$ como una representante de su clase y no se hace distinción entre ésta y su clase.

Recordamos que los espacios $L_2(X)$ constan de clases de funciones, donde una clase de estas consta de todas las funciones que son iguales excepto en un conjunto de medida cero.
(Ejemplos de conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}$ son los conjuntos finitos, numerables, el conjunto de Cantor, uniones numerables de los anteriores, etc.)

10.4. Postulado 2: El operador observable y sus valores.

i) En mecánica cuántica un $observable$ físico corresponde a un operador hermitiano (autoadjunto) $\hat{A}$ en el espacio de Hilbert H, el cual tiene una base ortonormal que consta de vectores propios $\{\psi_n\}$ con sus correspondientes valores propios $\{\lambda_n\}$, por lo que $\hat{A}\psi_n = \lambda_n \psi_n$, $n = 1, 2, ...$

De manera inversa, a cada operador hermitiano $\hat{A}$ en el espacio de Hilbert H, le corresponde un observable físico.

ii) Los únicos valores posibles de un observable físico $\hat{A}$ son los distintos valores propios λ_n.

De acuerdo con el postulado II, debe haber un operador hermitiano para los observables cuánticos tales como: la posición , el momento, el momento angular, la energía, etc.

Tales operadores en mecánica cuántica se llaman **operadores observables.**

Por el teorema 180 sabemos que los valores propios de un operador autoadjunto (hermitiano) en un espacios de Hilbert H son reales. Así podemos concluir por el postulado 2 que los valores propios de los operadores observables en mecánica cuántica son reales. Esto es muy conveniente en lo que respecta a los resultados de las mediciones físicas que se obtienen al efectuar experimentos.

Otro consecuencia de este postulado es que el conjunto de valores propios $\{\lambda_n\}$ del observable, es un un conjunto discreto.

El inciso $ii)$ del postulado dice que los únicos valores posibles de un operador observable $\hat{A}$ son los valores propios λ_n. Esto hace referencia a los valores que se obtienen al realizar mediciones en un experimento físico.

Es apropiado mencionar lo que significa $medir$ desde un simple punto de vista físico. $Medir$ es hacer una bien definida operación física la cual al efectuarla sobre un sistema físico se obtiene un único número real, sin error ni ambigüedad, en el sentido de que no hay inexactitud experimental asociada con la obtención de tal número.

El postulado 2 establece la existencia de una base ortonormal conformada por vectores propios del operador observable, el cual este mismo postulado establece que es autoadjunto.

Mientras que en el teorema 195 de la descomposición espectral para operadores compactos autoadjuntos en un espacio de Hilbert H separable de dimensión infinita, se vio que es suficiente para un operador A el ser compacto y autoadjunto para que este tenga una descomposición de la forma:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, v_n > v_n,$$

donde $\{v_1, v_2, ...\}$ es una base ortonormal de vectores propios del operador A y el conjunto $\{\lambda_n\}$ es de los correspondientes valores propios de A.

El postulado 2 nos dice que cada operador observable $\hat{A}$ en mecánica cuántica cumple con lo siguiente:

- $\hat{A}$ es un operador lineal hermitiano, esto es $< \hat{A}x, y > = < x, \hat{A}y >$, para $x, y \in H$,

- H tiene una base ortonormal $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, ...\}$ de vectores propios del operador $\hat{A}$.

Con esta hipótesis y en vista del teorema 49 (de las series de Fourier), se tiene para cada $\psi \in H$ una expresión de la forma:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} < \psi, \psi_n > \psi_n.$$

Del postulado 2 tenemos esto: $\hat{A}\psi_n = \lambda_n \psi_n$, $(n \in \mathbb{N})$, por lo que se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{A}\psi_i = \hat{A}(\psi_1 + \psi_2 + ... + \psi_n) = \hat{A}\psi_1 + \hat{A}\psi_2 + ... + \hat{A}\psi_n = \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + ... + \lambda_n\psi_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi_i.$$

Luego aplicando el operador observable $\hat{A}$, a un elemento del espacio de Hilbert $\psi \in H$,

$$\hat{A}\psi = \hat{A}(\sum_{n=1}^{\infty} < \psi, \psi_n > \psi_n) = \hat{A}(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} < \psi, \psi_i > \psi_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} < \psi, \psi_i > \hat{A}\psi_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} < \psi, \psi_i > \lambda_i \psi_i =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \psi, \psi_n > \psi_n.$$

Por lo tanto para el operador observable $\hat{A}$ y para $\psi \in H$ se tiene:

$$\hat{A}\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \psi, \psi_n > \psi_n$$

una descomposición espectral semejante a la que se tiene en el teorema 195 para los operadores compactos autoadjuntos! pero, ... los operadores observables de la mecánica cuántica son compactos?

Veremos más adelante que la respuesta es negativa.
Pues los operadores observables de la mecánica cuántica son operadores no acotados en $L_2(\mathbb{R})$, y del teorema 151 sabemos que los operadores compactos necesariamente son acotados, por lo que si un operador no es acotado definitivamente no es compacto.
Veamos algunos operadores que son usuales en mecánica cuántica.

10.5. El operador de posición.

Se presenta el operador de posición $\hat{x}$, definido en un subespacio del espacio de Hilbert:

$$L_2(X \subseteq \mathbb{R}) = \{f : \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \int_X |f|^2 < \infty\}$$

El dominio de este operador observable es:

$$Dom(\hat{x}) = \{f \in L_2(X \subseteq \mathbb{R}) \mid xf(x) \in L_2(X \subseteq \mathbb{R})\} \subseteq L_2(X \subseteq \mathbb{R})\}$$

$$\hat{x} : Dom(\hat{x}) \subseteq L_2(X \subseteq \mathbb{R}) \longrightarrow L_2(X \subseteq \mathbb{R}),$$

cuya regla de correspondencia es:

$$\hat{x}(f(x)) \longmapsto xf(x).$$

Evidentemente el operador de posición es un operador multiplicación donde la función multiplicadora es la función identidad en $X \subseteq \mathbb{R}$, $I(x) = x$.
Veamos que el operador de posición $\hat{x}$ es acotado en el espacio $L_2([a,b])$, con el multiplicador dado por la identidad $I(x) = x$.

Sabemos que la función $I(x) = x$ es creciente en $[a,b]$, así que en $x = b$, esta función alcanza su máximo. Luego se tiene:

$$\|xf(x)\|^2 = \int_a^b |xf(x)|^2\, dx = \int_a^b |x|^2 |f(x)|^2 dx \leq \left(máx_{[a,b]}\right)^2 \int_a^b |f(x)|^2\, dx = b^2 \int_a^b |f(x)|^2\, dx = b^2 \|f(x)\|^2,$$

podemos concluir que, $\|xf(x)\| \leq |b| \|f(x)\|$, se cumple para $f(x) \in L_2[a,b]$, por lo tanto el operador multiplicación por $I(x) = x$ es acotado en $L_2[a,b]$.

Pero en el caso $X = \mathbb{R}$, aunque la función multiplicadora $I(x) = x$ es continua en $\mathbb{R}$, esto no implica que el operador de posición sea acotado.

Veamos primero que no toda función del espacio $L_2(\mathbb{R})$ pertenece a $Dom(\hat{x})$, para esto considere a la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad |x| \geq 1 \\ \\ 1 & si \quad |x| \leq 1. \end{cases}$$

Luego tenemos que $|f(x)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & si \quad |x| \geq 1 \\ \\ 1 & si \quad |x| \leq 1. \end{cases}$

Sabemos que: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left[-\tfrac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\tfrac{1}{b}\right) + \left(\tfrac{1}{1}\right) = 0 + 1 = 1$, es así que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 4 < \infty$,

es decir $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Sin embargo tenemos, $xf(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \geq 1 \\ \\ x & si \quad |x| \leq 1 \end{cases}$, por lo que $|xf(x)|^2 = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \geq 1 \\ \\ x^2 & si \quad |x| \leq 1 \end{cases}$, así resulta que $\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx = \infty$, es decir $xf(x) \notin L_2(\mathbb{R})$.

Veamos ahora que el operador observable de posición $\hat{x}$ no es acotado en $Dom(\hat{x}) \subseteq L_2(\mathbb{R})$, para esto usaremos el resultado del teorema 60, el cual nos dice que un operador es acotado si y sólo si este es continuo.

Recordamos que una función entre espacios métricos $f : (X, d_x) \longrightarrow (Y, d_y)$, es continua en x_0, si para cada sucesión convergente a x_0, $(x_n) \longrightarrow x_0$, se tiene que $(f(x_n)) \longrightarrow f(x_0)$. En el caso de espacios normados tenemos que la distancia es $d(x,y) = \|x - y\|$.

Se mostrará que el operador observable de posición $\hat{x}$, no es un operador continuo en su dominio. Considere una sucesión convergente en el dominio de este operador, $(f_n) \longrightarrow f$, dada por la sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} & si \quad x \in [0,n] \\ \\ 0 & si \quad x \notin [0,n]. \end{cases}$$

La gráfica de cada función $f_n(x)$ es la constante cero excepto en $[0,n]$, donde $f_n(x)$ es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente $\frac{1}{n^2}$, por lo que cuando $n \longrightarrow \infty$, la gráfica de $f_n(x)$ tiende a la función constante cero.

De la definición de esta sucesión de funciones, sabemos que cada $f_n(x)$ pertenece al espacio $L_2(\mathbb{R})$,

además también pertenecen a $Dom(\hat{x})$, ya que para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que cada $xf_n(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{n^2} & si \quad x \in [0,n], \\ \\ 0 & si \quad x \notin [0,n] \end{cases}$

pertenece a $L_2(\mathbb{R})$.

Así que la sucesión (f_n) convergen a la función $f(x) \equiv 0$, es decir $(f_n(x)) \longrightarrow f(x)$ en el espacio $Dom(\hat{x})$, esta convergencia con la métrica dada por la norma es:

$$\|f_n - f\| = \|f_n - 0\| = \|f_n\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

En $L_2(\mathbb{R})$, esto es $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dx = \int_0^n \frac{x^2}{n^4} dx = \frac{1}{n^4}[\frac{x^3}{3}]_0^n = \left(\frac{1}{n^4}\frac{n^3}{3}\right) = \frac{1}{3n} \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$.

Así tenemos que $(f_n) \longrightarrow f$, en el espacio $Dom(\hat{x})$.

Veamos ahora que sucede con la sucesión de imágenes bajo el operador $\hat{x}$,

$\hat{x}(f_n(x)) = xf_n(x) = x(\frac{x}{n^2}) = (\frac{x^2}{n^2})$, veamos a donde convergen la imágenes:

$\|\hat{x}f_n - \hat{x}f\|^2 = \|\hat{x}f_n - \hat{x}0\|^2 = \|\frac{x^2}{n^2} - 0\|^2 = \|\frac{x^2}{n^2}\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{x^2}{n^2}\right|^2 dx = \int_0^n \frac{x^4}{n^4} dx =$

$[\frac{x^5}{5n^4}]_0^n = \left(\frac{n^5}{5n^4}\right) - \left(\frac{0}{5n^4}\right) = \frac{n}{5}$, esto vale para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomando límite se tiene esto: $\lim\limits_{n\to\infty} \|\hat{x}f_n - \hat{x}0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}} = \infty$,

se concluye que $\|\hat{x}f_n - \hat{x}f\| \nrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, esto es $(\hat{x}f_n) \nrightarrow \hat{x}f$,

Es así que concluimos $(\hat{x}f_n) \nrightarrow (\hat{x}f)$, por lo tanto el operador observable de posición $\hat{x}$ No es continuo en su dominio.

Por lo tanto el operador de posición $\hat{x}$ No es acotado.

Ahora veamos que efectivamente el operador de posición $\hat{x}$ es un operador autoadjunto (hermitiano).

Hay que ver que $<\hat{x}f, g> = <f, \hat{x}g>$ para cualesquiera funciones $f, g \in Dom(\hat{x})$.

Para esto sean $f, g \in Dom(\hat{x})$, luego

$$<\hat{x}f, g> = <xf(x), g(x)> = \int_X xf(x)\overline{g(x)}dx = \int_X f(x)x\,\overline{g(x)}dx = \int_X f(x)\overline{xg(x)}\,dx = <f(x), xg(x)> = <f, \hat{x}g>,$$

por lo tanto $<\hat{x}f, g> = <f, \hat{x}g>$, es decir que el operador de posición $\hat{x}$ es hermitiano.

Ahora veamos que el operador de posición $\hat{x}$ está definido en un dominio denso, es decir que el conjunto $Dom(\hat{x})$ es denso en $L_2(X \subseteq \mathbb{R})$.
Para esto usaremos el teorema 209, el cual dice que el operador adjunto A^* de un operador lineal A en un espacio de Hilbert H, está bien bien definido si y sólo si el dominio $\mathcal{D}(A)$ es denso en el espacio H.

Para tal efecto, hay que probar que el operador adjunto $\hat{x}^* = \hat{x}$, está bien definido; para esto vemos que como $\hat{x}f(x) = xf(x)$, vemos que la asignación dada por el adjunto: $f(x) \longmapsto xf(x)$, es una función, es decir está bien definida.

Por lo tanto, el dominio del operador de posición $\mathcal{D}om(\hat{x})$, es denso en $H = L_2(\mathbb{R})$.

A continuación veamos cuales son los valores propios y funciones propias del operador observable de la posición $\hat{x}$, ya sabemos que este operador es hermitiano por lo que sus valores propios son reales.
Es necesario introducir la siguiente función generalizada llamada $delta\ de\ Dirac$.

10.6. La delta de $Dirac$.

Ver [11] página 83-87; [15] capítulo 12.

La función generalizada, conocida como delta de Dirac $\delta(x)$, puede verse como el límite de una sucesión de funciones como la siguiente:

$$\delta_{n,a}(x) = \begin{cases} n & si \quad x \in [a - \frac{1}{2n}, a + \frac{1}{2n}] \\ 0 & si \quad x \notin [a - \frac{1}{2n}, a + \frac{1}{2n}] \end{cases}$$

con las funciones $\delta_{n,a}(x)$ tenemos lo siguiente: $\quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n,a}(x)\,dx = n(\frac{1}{n}) = 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n,a}(x)f(x)\,dx = f(a).$

De esta forma, cuando $n \longrightarrow \infty$, el valor de la función $\delta_{n,a}(x)$ en el punto $x = a$, es: $\delta_{n,a}(a) = n \longrightarrow \infty$.

Estas son las características que definen a la función generalizada delta de Dirac: $\delta_a(x) = \delta(x-a) = \begin{cases} 0 & si \quad x \neq a \\ \infty & si \quad x = a \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

De esta forma, la función generalizada $\delta(x - x_0)$, cumple lo siguiente: $h(x)\delta(x - x_0) = h(x_0)\delta(x - x_0)$, en particular si $h(x) = x$ es la función identidad en $\mathbb{R}$, se tiene que $x\delta(x - x_0) = x_0\delta(x - x_0)$.

Así que podemos escribir la ecuación de valores propios para el operador observable de la posición como sigue:

$$\hat{x}\delta(x - x_0) = x_0\delta(x - x_0)$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}$, esto prueba que cada x_0 que pertenece a $\mathbb{R}$ es un valor propio del operador de posición $\hat{x}$, donde la correspondiente función propia es $\delta(x - x_0)$.

De esta forma el espectro del operador de posición $\hat{x}$ es el conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ (es un espectro es continuo), el cual en el caso de $X = \mathbb{R}$ es un conjunto no acotado en $\mathbb{R}$, luego, en vista del corolario 185, el cual establece que el conjunto de valores propios de un operador autoadjunto acotado, es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$, consecuentemente, el operador hermitiano (autoadjunto) $\hat{x}$ es no acotado (como se vio anteriormente).

Cabe señalar que el concepto de función generalizada formalmente es un objeto matemático propio del campo conocido como teoría de distribuciones.

Veamos ahora que en el espacio de Hilbert $L_2(X \subseteq \mathbb{R}^3)$ también se pueden definir unos operadores de posición de manera similar que el caso anterior.

Tenemos en un subespacio del espacio $L_2(\mathbb{R}^3) = \{f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C} | \ f \ es \ medible \ y \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x,y,z)|^2 dxdydz < \infty\}$

los operadores lineales,

$$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} : L_2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^3),$$

definidos por:

$$\hat{x}f(x,y,z) = xf(x,y,z); \qquad \hat{y}f(x,y,z) = yf(x,y,z); \qquad \hat{z}f(x,y,z) = zf(x,y,z).$$

Claro que cada uno de esto operadores son operadores multiplicación definidos en un subespacio del espacio de Hilbert $L_2(\mathbb{R}^3)$, es usual escribir estos operadores en ternas ordenadas así:

$$\hat{r} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (xf(x,y,z), yf(x,y,z), zf(x,y,z))$$

Así podemos ver que la función entre los espacios, $L_2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \left(L_2(\mathbb{R}^3)\right)^3$ cuya regla de correspondencia es:

$$f(x,y,z) \longmapsto (xf(x,y,z), yf(x,y,z), zf(x,y,z))$$

es una $transformación \ lineal$ entre tales espacios, además las proyecciones sobre la primera, segunda y tercera coordenada se pueden ver como los operadores lineales $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$ respectivamente.

A continuación se presenta otro operador lineal usual en mecánica cuántica.

10.7. El operador de momento lineal

El operador de momento lineal denotado por $\hat{p}$, está definido en un subespacio del espacio de Hilbert:

$$L_2(X \subseteq \mathbb{R}) = \{f : \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \int_X |f|^2 < \infty\}$$

de la siguiente manera:

$$f(x) \longmapsto \hat{p}f(x) = -i\hbar \tfrac{d}{dx} f(x).$$

Donde $\hbar$ es la constante reducida de $Planck$, tal constante está dada en unidades físicas, pero por el momento sólo será usada como una constante real positiva.
($\hbar = \frac{h}{2\pi}$; donde h es la constante de $Planck$, $h = 6.625 \times 10^{-27}\ erg.\ seg.$ -energía por tiempo-.)

Vemos que el operador observable de momento lineal tiene como dominio al subespacio:

$$Dom(\hat{p}) = \left\{ f(x) \in L_2(X \subseteq \mathbb{R}) | -i\hbar \tfrac{d}{dx} f(x) \in L_2(X \subseteq \mathbb{R}) \right\}.$$

Veamos que el operador de momento lineal $\hat{p}$ es autoadjunto, para esto sean $f, g \in Dom(\hat{p})$,

$$\langle \hat{p}f(x), g(x) \rangle = \left\langle -i\hbar \tfrac{d}{dx} f(x), g(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} -i\hbar \tfrac{d}{dx} f(x)\ \overline{g(x)} dx =$$

(integrando por partes hacemos $u = \overline{g}$ y $dv = df$)

$$= \left[-i\hbar f(x) \overline{g(x)} \right]_{-\infty}^{\infty} - (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \tfrac{d}{dx} \overline{g(x)}\ dx =$$

$$= lim_{a,b \longrightarrow \infty} \left[-i\hbar f(x) \overline{g(x)} \right]_{-a}^{b} + \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar \tfrac{d}{dx} \overline{g(x)}\ f(x) dx =$$

El primer término se anula, en vista de que son funciones en $Dom(\hat{p})$ las cuales en particular son continuas, por lo que tienden a cero en el infinito, de otra forma no serían de módulo cuadrado integrable en $\mathbb{R}$.

Por otro lado notemos que, $\overline{\overline{i}} = \overline{-i} = i$; y para $z, w \in \mathbb{C}$, $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$;

también $\overline{\tfrac{d}{dx} g(x)} = \tfrac{d}{dx}\ \overline{g(x)},$

ya que $g(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, es de la forma: $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$, donde $g_1(x), g_2(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Así que,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \overline{\left(-i\hbar \tfrac{d}{dx} g(x) \right)} dx = \left\langle f(x), -i\hbar \tfrac{d}{dx} g(x) \right\rangle = \langle f(x), \hat{p}g(x) \rangle,$$

podemos concluir que $\langle \hat{p}f(x), g(x)\rangle = \langle f(x), \hat{p}g(x)\rangle$, por lo tanto el operador observable del momento lineal es Autoadjunto (Hermitiano), en el correspondiente subespacio $Dom(\hat{p}) \subseteq L_2(\mathbb{R})$.

Veamos que el dominio del operador de momento lineal $\mathcal{D}om(\hat{p})$ es un espacio denso en el espacio de Hilbert $L_2(X \subseteq \mathbb{R})$. Para esto usaremos el teorema 209, el cual dice que el operador adjunto A^* de un operador lineal A en un espacio de Hilbert H está bien definido si y sólo si el dominio $\mathcal{D}(A)$ es denso en H.

Tenemos que probar que el operador $\hat{p}^* f(x) = \hat{p}f(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}f(x)$ está bien definido, para esto vemos que como $\hat{p}f(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}f(x)$, podemos establecer que la asignación

$$f(x) \longmapsto -i\hbar\tfrac{d}{dx}f(x),$$

está bien definida, es decir es una función. Concluimos por el teorema 209, que el subespacio $\mathcal{D}om(\hat{p})$ es denso en $L_2(X \subseteq \mathbb{R})$.

Como ya hemos visto que el operador observable del momento lineal es Hermitiano, los valores propios de éste son reales. Ahora veamos los valores propios y vectores propios del operador observable del momento lineal $\hat{p}$.

Para esto escribimos la ecuación de valores propios, donde p denota un valor propio del operador de momento lineal $\hat{p}$,

$$\hat{p}\psi(x) = -i\hbar\tfrac{d}{dx}\psi(x) = p\psi(x),$$

tenemos una ecuación diferencial cuya solución en general es:

$$\psi(x) = Ne^{\frac{i}{\hbar}px}, \text{ pues } -i\hbar\tfrac{d}{dx}\psi(x) = -i\hbar N\tfrac{i}{\hbar}pe^{\frac{i}{\hbar}px} = pNe^{\frac{i}{\hbar}px} = p\psi(x).$$

Esto se cumple para cada $p \in \mathbb{R}$, por lo que tenemos que el espectro del operador de momento lineal es el conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, (es un espectro continuo).
Así que el operador $\hat{p}$ tiene espectro no acotado, por lo tanto, en vista del corolario 185, se tiene que el operador observable del momento lineal $\hat{p}$ es un operador no acotado en su dominio $Dom(\hat{p}) \subseteq L_2(\mathbb{R})$.

Para obtener el valor de la constante de normalización N, es necesario recurrir a la función generalizada delta de Dirac.

Pues, si se quisiera normalizar de manera usual se tiene esto: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}px}e^{-\frac{i}{\hbar}px}dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty$.

En el caso discreto, una base ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ se define en términos de la delta de Kronecker $< u_n, u_m > = \delta_{nm}$, en el caso continuo, por analogía se requiere que el conjunto de funciones propias $\{Ne^{\frac{i}{\hbar}px} | p \in \mathbb{R}\}$ cumpla lo siguiente:

$$|N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')x} = \delta(p - p'),$$

con esta ecuación se define al factor de normalización N.

Para encontrar el valor de la constante N, escribimos la función generalizada $\delta(k - k')$ en su representación de Fourier:

Ver [11] páginas 937-938; [7] capítulo 6.

$\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(k-k')x} = \delta(k - k')$, luego hacemos $p = \hbar k$ y $p' = \hbar k'$, para obtener:

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')x} = \delta\left(\tfrac{p-p'}{\hbar}\right) = \hbar\delta(p-p'),$$

luego, $\tfrac{1}{2\hbar\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')x} = \delta(p-p')$.

La igualdad $\delta\left(\frac{p-p'}{\hbar}\right) = \hbar\delta(p-p')$, se prueba como sigue:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\tfrac{p-p'}{\hbar}\right)f(p)dp = \hbar\int_{-\infty}^{\infty} f(\tfrac{\hbar p}{\hbar})\delta\left(\tfrac{p-p'}{\hbar}\right)\tfrac{dp}{\hbar} = \hbar\int_{-\infty}^{\infty} f(\hbar k)\delta\left(k-\tfrac{p'}{\hbar}\right)dk = \hbar f(\hbar k) = \hbar f(\hbar\tfrac{p'}{\hbar}) = \hbar f(p') =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hbar\delta(p-p')f(p)dp, \qquad \Longrightarrow \qquad \delta\left(\tfrac{p-p'}{\hbar}\right) = \hbar\delta(p-p').$$

Donde se ha usado la propiedad: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)f(x)dx = f(a)$ y haciendo el cambio de variable: $\frac{p}{\hbar} = k$, $dp = \hbar dk$.

Por lo tanto, $|N|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}$, $\Longrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$, con esto se tienen que las funciones propias del operador de momento lineal $\hat{p}$ son:

$$\left\{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px}|p\in\mathbb{R}\right\}.$$

Pasando ahora al espacio de Hilbert $L_2(\mathbb{R}^3)$, se pueden definir también los siguientes operadores de momento lineal:

$$\hat{p}_x f(x,y,z) = -i\tfrac{\partial}{\partial x}f(x,y,z),$$

$$\hat{p}_y f(x,y,z) = -i\tfrac{\partial}{\partial y}f(x,y,z),$$

$$\hat{p}_z f(x,y,z) = -i\tfrac{\partial}{\partial z}f(x,y,z).$$

El dominio de estos operadores de momento lineal es el subespacio de funciones en $L_2(\mathbb{R}^3)$, tales que tienen la derivada parcial respectiva, de módulo cuadrado integrable.

Con estos tres operadores se tiene la siguiente transformación lineal cuya regla de correspondencia para $f(x,y,z)\in L_2(\mathbb{R}^3)$ es:

$$f(x,y,z)\longmapsto\left(-i\hbar\tfrac{\partial}{\partial x}f(x,y,z), -i\hbar\tfrac{\partial}{\partial y}f(x,y,z), -i\hbar\tfrac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)\right),$$

siempre que la función $f(x,y,z)$ tenga derivadas parciales de cuadrado integrable.
Esta es una terna ordenada de los tres operadores observables del momento lineal. Esta transformación lineal va del espacio $L_2(\mathbb{R}^3)$ en $\left(L_2(\mathbb{R}^3)\right)^3$.

Las respectivas proyecciones sobre la primera, segunda y tercera coordenada se pueden ver como el operador del momento lineal $\hat{p}_x, \hat{p}_y$ y $\hat{p}_z$ respectivamente.

Ya hemos visto los operadores observables de posición $\hat{x}$ y del momento lineal $\hat{p}$.

Se define a continuación el conmutador de dos operadores observables.

10.8. El conmutador $[A, B]$ de dos operadores observables A y B.

En esta parte se usa material de: [9] capítulo 11; [10] capítulo 25; [20] capítulo 3; [23] capítulo 14.

Definición 232. DEFINICIÓN: El conmutador $[\ ,\ ]$ **de dos operadores observables** $\hat{A}$ **y** $\hat{B}$ **se define como** $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

Cuando $[\hat{A}, \hat{B}] = 0,$ los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se llaman $compatibles.$

En el caso $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0,$ los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se llaman $complementarios.$

Veamos lo que se tiene en el caso de los operadores de posición y momento lineal $\hat{x}$ y $\hat{p}$, sea $\psi(x)$ un vector de $L_2(\mathbb{R})$, tal que tienen sentido efectuar las operaciones del conmutador.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \left(x\left[-i\hbar\tfrac{d}{dx}\right] - \left[-i\hbar\tfrac{d}{dx}\right]x\right)\psi(x) = -i\hbar x\tfrac{d\psi(x)}{dx} + ix\hbar\tfrac{d\psi(x)}{dx} + i\hbar\psi(x) = i\hbar\psi(x) \neq 0.$$

Por lo tanto los operadores observables de posición y momento lineal son complementarios.

Análogamente para un vector $\psi(x, y, z) \in L_2(\mathbb{R}^3)$ (que tengan sentido las operaciones del conmutador), se verifica que $[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$.

Luego, ya que el conmutador de $[\hat{x}, \hat{p}_y] = x\frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y, z) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)x\psi(x, y, z) = x\frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y, z) - x\frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y, z) = 0,$

podemos afirmar que, $[\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{x}, \hat{p}_z] = [\hat{y}, \hat{p}_z] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = [\hat{z}, \hat{p}_x] = [\hat{z}, \hat{p}_y] = 0$, es decir que estos observables son compatibles.

Definamos el siguiente operador:

$$\hat{T} = \tfrac{\hat{p}^2}{2m} = \tfrac{1}{2m}\left(-i\hbar\tfrac{d}{dx}\right)^2 = -\tfrac{\hbar^2}{2m}\tfrac{d^2}{dx^2},$$ donde m es una constante real (m es la masa)

se dice que este operador $\hat{T}$ representa a la energía cinética de una partícula "libre".

Observación 233. En vista de un corolario anterior, tenemos que el operador $\hat{T}$ es autoadjunto (hermitiano).

Veamos el conmutador de $\hat{p}$ y $\hat{T}$,

$$[\hat{p}, \hat{T}] = \left(\left[-i\hbar\tfrac{d}{dx}\right]\left[-\tfrac{\hbar^2}{2m}\tfrac{d^2}{dx^2}\right] - \left[-\tfrac{\hbar^2}{2m}\tfrac{d^2}{dx^2}\right]\left[-i\hbar\tfrac{d}{dx}\right]\right)\psi(x) = \left(i\tfrac{\hbar^3}{2m}\tfrac{d}{dx}\tfrac{d^2}{dx^2} - i\tfrac{\hbar^3}{2m}\tfrac{d^2}{dx^2}\tfrac{d}{dx}\right)\psi(x) = 0,$$

tenemos así que los operadores observables $\hat{p}$ y $\hat{T}$ son compatibles.

Veamos lo que pasa con el conmutador de $\hat{p}$ y el operador $\hat{H}$ definido por:

$$\hat{H} = \hat{T} + V(x) = \tfrac{\hat{p}^2}{2m} + V(x),$$

$$[\hat{p}, \hat{H}] = [\hat{p}, \hat{T} + V(x)] = [\hat{p}, \hat{T}] + [\hat{p}, V(x)] = [\hat{p}, V(x)] = \left(\left[-i\hbar\tfrac{d}{dx}\right]V(x) - V(x)\left[-i\hbar\tfrac{d}{dx}\right]\right) = \left(\left[-i\hbar\tfrac{d}{dx}\right]V(x) + i\hbar V(x)\tfrac{d}{dx}\right) = \mathcal{K},$$

para que sea $\mathcal{K}=0$, el operador de momento lineal y el operador multiplicación por $V(x)$ deben conmutar, por lo que en general los operadores $\hat{p}$ y $\hat{H}$ son complementarios.

Se dice que el operador $\hat{H}$, representa a la energía de una partícula moviéndose en un campo de potencial $V(x)$, donde la función V cumple con $V(x)=-\nabla F(x)$ para alguna función $F(x)$.

Proposición 234. *El operador $\hat{H}$ es $Autoadjunto$ cuando $\overline{V(x)}=V(x)$.*

Demostración.

Para probarlo, veamos que cumple con la definición.

$$\left\langle \hat{H}f,g\right\rangle=\left\langle\left(\hat{T}+V(x)\right)f,g\right\rangle=\left\langle\hat{T}f,g\right\rangle+\langle V(x)f,g\rangle=\left\langle f,\hat{T}g\right\rangle+\langle f,V(x)g\rangle=\left\langle f,\left(\hat{T}+V(x)\right)g\right\rangle=\left\langle f,\hat{H}g\right\rangle$$

■

El conmutador de dos operadores observables es muy importante en física cuántica, pues este se relaciona con los resultados de las mediciones simultáneas de los operadores observables considerados.

Ya hemos visto los operadores de posición $\hat{x}$ y de momento lineal $\hat{p}$, veamos a continuación los siguientes operadores dados en términos de los anteriores.

10.9. Operadores de momento angular.

En esta parte se usa material de: [1] capítulo 7; [9] capítulo 11; [10] capítulo 25; [15] capítulo 6 y 12; [16] capítulo 7 y 10; [19] capítulo III y X; [20] capítulo 11; [23] capítulo 14.

Tomemos los operadores de posición y momento lineal en ternas ordenadas, $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$, $(\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z)$ y usando la regla del producto cruz se definen los operadores lineales L_x, L_y y L_z de la siguiente manera.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix}=(\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y,\hat{z}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_z,\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x)=\left(\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z\right),$$

de esta manera: $\hat{L}_x=\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y$, $\hat{L}_y=\hat{z}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_z$ y $\hat{L}_z=\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x$, son operadores lineales en el subespacio de $L_2(\mathbb{R}^3)$ tal que las operaciones tienen sentido.

Estos operadores actúan de la siguiente manera, por ejemplo, para una función $f(x,y,z)$ se tiene:

$$\hat{L}_x\left(f(x,y,z)\right)=\hat{y}\left(-i\hbar\tfrac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)\right)-\hat{z}\left(-i\hbar\tfrac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)\right)=-i\hbar y\tfrac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)+i\hbar z\tfrac{\partial}{\partial y}f(x,y,z).$$

Los operadores $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ y $\hat{L}_z$ se llaman *operadores de momento angular orbital*; la terna ordenada $\hat{L} = \left(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z\right)$ se denomina *momento angular orbital*.

En este caso, vemos que los operadores $\hat{y}$, $\hat{p}_z$, $\hat{z}$ y $\hat{p}_y$ que definen al operador de momento angular orbital $\hat{L}_x$ conmutan, esto es $\hat{y}\hat{p}_z = \hat{p}_z\hat{y}$, ya que se deriva respecto de z y se multiplica por y (son variables independientes), análogamente sucede con los operadores $\hat{z}$ y $\hat{p}_y$ ya que $\hat{z}\hat{p}_y = \hat{p}_y\hat{z}$.

Lo mismo se tiene con los operadores $\hat{L}_y$ y $\hat{L}_z$, están definidos en términos de operadores que conmutan entre sí.

Ya hemos visto que los operadores observables de la posición y el momento lineal son autoadjuntos, luego por el teorema 98 sabemos que el producto de dos operadores autoadjuntos es autoadjunto si y sólo si los operadores conmutan. Además por el corolario 99 la suma de operadores autoadjuntos es un operador autoadjunto.

Por lo tanto los operadores observables del momento angular orbital $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ y $\hat{L}_z$ son operadores lineales autoadjuntos en el espacio de Hlibert $L_2(\mathbb{R}^3)$.

Veamos el conmutador de estos operadores,

$[L_x, L_y] = [(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y), (\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) = [(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y), \hat{z}\hat{p}_x] - [(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y), \hat{x}\hat{p}_z] =$

$[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] = \big((-i\hbar y\frac{\partial}{\partial z})(-i\hbar z\frac{\partial}{\partial x}) - (-i\hbar z\frac{\partial}{\partial x})(-i\hbar y\frac{\partial}{\partial z})\big) -$

$\Big((-i\hbar z\frac{\partial}{\partial y})(-i\hbar z\frac{\partial}{\partial x}) - (-i\hbar z\frac{\partial}{\partial x})(-i\hbar z\frac{\partial}{\partial y})\Big) - \big((-i\hbar y\frac{\partial}{\partial z})(-i\hbar x\frac{\partial}{\partial z}) - (-i\hbar x\frac{\partial}{\partial z})(-i\hbar y\frac{\partial}{\partial z})\big) +$

$\Big((-i\hbar z\frac{\partial}{\partial y})(-i\hbar x\frac{\partial}{\partial z}) - (-i\hbar x\frac{\partial}{\partial z})(-i\hbar z\frac{\partial}{\partial y})\Big) =$

$\big((-\hbar^2 y\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial x}) + (\hbar^2 z\frac{\partial}{\partial x}y\frac{\partial}{\partial z})\big) - \Big((-\hbar^2 z\frac{\partial}{\partial y}z\frac{\partial}{\partial x}) + (\hbar^2 z\frac{\partial}{\partial x}z\frac{\partial}{\partial y})\Big) - \big((-\hbar^2 y\frac{\partial}{\partial z}x\frac{\partial}{\partial z}) + (\hbar^2 x\frac{\partial}{\partial z}y\frac{\partial}{\partial z})\big) +$

$\Big((-\hbar^2 z\frac{\partial}{\partial y}x\frac{\partial}{\partial z}) + (\hbar^2 x\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial y})\Big) =$

$-\hbar^2 y\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial x} + \hbar^2 z\frac{\partial}{\partial x}y\frac{\partial}{\partial z} + \hbar^2 z\frac{\partial}{\partial y}z\frac{\partial}{\partial x} - \hbar^2 z\frac{\partial}{\partial x}z\frac{\partial}{\partial y} + \hbar^2 y\frac{\partial}{\partial z}x\frac{\partial}{\partial z} - \hbar^2 x\frac{\partial}{\partial z}y\frac{\partial}{\partial z} - \hbar^2 z\frac{\partial}{\partial y}x\frac{\partial}{\partial z} + \hbar^2 x\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial y} =$

$(-\hbar^2)y(z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}) + \hbar^2 z(y\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} + 0) + \hbar^2 z(z\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + 0) - \hbar^2 z(z\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + 0) + \hbar^2 y(x\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 0) - \hbar^2\ x(y\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 0) -$

$\hbar^2 z(x\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} + 0) + \hbar^2 x(z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}) =$

$-\hbar^2(yz\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}) - \hbar^2 y\frac{\partial}{\partial x} + \hbar^2 z(y\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}) + \hbar^2 z(z\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}) - \hbar^2 z(z\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}) + \hbar^2 y(x\frac{\partial^2}{\partial z^2}) - \hbar^2\ x(y\frac{\partial^2}{\partial z^2}) -$

$\hbar^2 zx\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} + \hbar^2 xz\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + \hbar^2 x\frac{\partial}{\partial y} = \hbar^2(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) = \hbar^2 x\frac{\partial}{\partial y} - \hbar^2 y\frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar(i\hbar)x\frac{\partial}{\partial y} - (i\hbar)(-i\hbar)y\frac{\partial}{\partial x} =$

$(i\hbar)\{(-i\hbar x\frac{\partial}{\partial y}) - (-i\hbar y\frac{\partial}{\partial x})\} = i\hbar(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) = i\hbar\hat{L}_z.$

Se concluye que $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$, podemos afirmar también que $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$ y $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$.

A continuación se define el *operador* $\hat{L}^2$ de *momento angular total*, en términos de los anteriores así: $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$.

El operador $\hat{L}^2$ es un operador lineal autoadjunto en el espacio $L_2(\mathbb{R}^3)$, esto en vista del teorema 98 y del corolario 99.

Luego, para expresar los operadores de momento angular orbital en términos de variables angulares, usamos coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) las cuales se relacionan con las cartesianas (x, y, z) así:

$x = rsen\theta cos\phi$
$y = rsen\theta sen\phi$
$z = rcos\theta$.

Usando la regla de la cadena para derivadas : $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}$, análogamente para $\frac{\partial}{\partial y}$ y $\frac{\partial}{\partial z}$,

los operadores de momento angular orbital los expresamos en términos de variables angulares así:

$\hat{L}_x = i\hbar\left(sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta} + cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$,

$\hat{L}_y = i\hbar\left(-cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta} + cot(\theta)sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$,

$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi}$.

Con esto el $Operador\ de\ Momento\ Angular\ Total$ se expresa así: $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right]$.

Veamos el conmutador de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$,

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = -\hbar^2\left[\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right]\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi}\right] - \left[-i\frac{\partial}{\partial \phi}\right]\left[\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right] =$$

$$\left(\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi}\right) - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\left(\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) = (-i\hbar)\left(\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^3}{\partial \phi^3}\right) + (i\hbar)\left(\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^3}{\partial \phi^3}\right) = 0,$$

por lo tanto, $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$, es decir, los operadores $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$ conmutan, $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = \hat{L}^2\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}^2 = 0$.

De acuerdo con la interpretación física del conmutador, podemos decir que es posible conocer, mediante mediciones experimentales, los estados simultáneos del operador de momento angular total $\hat{L}^2$ y del operador momento angular orbital $\hat{L}_z$.

Veamos ahora el conmutador de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_x$,

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = (-\hbar^2)\left[\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right] i\hbar\left(sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta} + cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\right) -$$

$$(i\hbar)\left(sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta} + cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\right)(-\hbar^2)\left[\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right] = (-i\hbar^3)\left(\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) +$$

$$(-i\hbar^3)\left(\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + (-i\hbar^3)\left(\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\right) + (-i\hbar^3)\left(\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\right) +$$

$$(i\hbar^3)\left(sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right) + (i\hbar^3)\left(sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) + (i\hbar^3)\left(cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right) +$$

$$(i\hbar^3)\left(cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) = (-i\hbar^3)\left(\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + (i\hbar^3)\left(sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right) +$$

$$(-i\hbar^3)\left(\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + (i\hbar^3)\left(sen(\phi)\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) +$$

$$(-i\hbar^3)\left(\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\right) + (i\hbar^3)\left(cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right) +$$

$$(-i\hbar^3)\left(\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\right) + (i\hbar^3)\left(cot(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) = 0,$$

para concluir esto se observa que los operadores (derivación y multiplicación) dentro de cada uno de los paréntesis, correspondientes a distintas variables conmutan, por lo tanto

$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = \hat{L}^2\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}^2 = 0$. De manera análoga se tiene que $[\hat{L}^2, \hat{L}_y] = 0$.

Por otro lado, calculemos las funciones propias Ψ_{lm} del operador $\hat{L}^2$, para esto ponemos la ecuación de valores propios,

$$\hat{L}^2\Psi_{lm} = K_l\Psi_{lm},$$

esto es, $(-\hbar^2)\left[\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Psi_{lm} = K_l\Psi_{lm},$

como dichas funciones dependen sólo de ϕ y θ, escribimos $\Psi_{lm} = \Theta_{lm}(\theta)\Phi_{lm}(\phi)$, para separar las variables, sustituyendo obtenemos

$$(-\hbar^2)\left[\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Theta(\theta)\Phi_{lm}(\phi) = K_l\Theta(\theta)\Phi_{lm}(\phi)$$

dividiendo entre Ψ_{lm} y poniendo lo que depende de θ de un lado y del otro lo que depende de ϕ,

$$\frac{sen^2(\theta)}{\Theta_{lm}(\theta)}\left(\frac{1}{sen(\theta)}\frac{d}{d\theta}sen(\theta)\frac{d\Theta_{lm}(\theta)}{d\theta} + \frac{K_l\Theta_{lm}(\theta)}{\hbar^2}\right) = -\frac{1}{\Phi_{lm}(\phi)}\frac{d^2\Phi_{lm}(\phi)}{d\phi^2},$$

a continuación separamos las variables,

$$\frac{sen^2(\theta)}{\Theta_{lm}(\theta)}\left(\frac{1}{sen(\theta)}\frac{d}{d\theta}sen(\theta)\frac{d\Theta_{lm}(\theta)}{d\theta} + \frac{K_l\Theta_{lm}(\theta)}{\hbar^2}\right) = cte.$$

$$-\frac{1}{\Phi_{lm}(\phi)}\frac{d^2\Phi_{lm}(\phi)}{d\phi^2} = cte.$$

La solución de esta última ecuación es: $\Phi_{lm}(\phi) = Ce^{\pm im\phi}$, donde $m = \pm\sqrt{cte.}$;

luego ya que $\phi \in [0, 2\pi]$ usamos la condición $\Phi_{lm}(\phi) = \Phi_{lm}(\phi + 2\pi)$, que implica $e^{im\phi} = e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}e^{im2\pi}$, por lo tanto debe ser $1 = e^{im2\pi} = cos(2\pi m) + isen(2\pi m)$, esto es que $m \in \mathbb{Z}$.

Ahora para que las funciones Φ_{lm} estén normalizadas debe cumplirse esto,

$\int_0^{2\pi} |\Phi_{lm}(\phi)|^2 d\phi = \mathcal{N}^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 1$, por lo que $\mathcal{N}^2 = \frac{1}{2\pi}$, $\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Se concluye que $\Phi_{lm}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$, con $m \in \mathbb{Z}$.

Para obtener las funciones Θ_{lm} volvemos a la ecuación de valores propios, $\hat{L}^2\Theta_{lm}\Phi_{lm} = K_l\Theta_{lm}\Phi_{lm}$, luego sustituyendo,

$(-\hbar^2)\left[\frac{1}{sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Theta_{lm}(\theta)\Phi_{lm}(\phi) = K_l\Theta_{lm}(\theta)\Phi_{lm}(\phi)$, es lo mismo que,

$(-\hbar^2)\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{sen^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Theta_{lm}(\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi} = K_l\Theta_{lm}(\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$, esto es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{m^2}{sen^2(\theta)}\right]\Theta_{lm}(\theta) = -\frac{K_l}{\hbar^2}\Theta_{lm}(\theta)$$

usando las igualdades, $y = cos(\theta)$, $\frac{d}{d\theta} = -sen(\theta)\frac{d}{dy}$, $\frac{d^2}{d\theta^2} = sen^2(\theta)\frac{d^2}{dy^2} - cos\frac{d}{dy}$, luego sustituimos

$$sen^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{dy^2} - cos(\theta)\frac{d\Theta}{dy} + \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}\left(-sen(\theta)\frac{d\Theta}{dy}\right) + \left(\frac{K_l}{\hbar^2} - \frac{m^2}{1-cos^2(\theta)}\right)\Theta = 0,$$ esto se puede escribir así:

$$\left(1-y^2\right)\frac{d^2\Theta}{dy^2} - 2y\frac{d\Theta}{dy} + \left(\frac{K_l}{\hbar^2} - \frac{m^2}{1-y^2}\right)\Theta = 0.$$

Hemos obtenido la $ecuación\ diferencial\ de\ Legendre$, cuya solución normalizada son las funciones dadas por:
(ver por ejemplo el libro $Mathematical\ methods\ for\ physicists,\ Arfken,\ páginas\ 786-790$)

$$\left[\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]P_l^m(cos(\theta))\ ,\ m \geq 0 \text{ donde } P_l^m(cos(\theta)) = sen^{|m|}(\theta)\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x)\ ,\text{ con } x = cos(\theta)$$

y $P_l(x) = \left(2^l l!\right)^{-1}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l$, es el $polinomio\ de\ Legendre$ de grado l, además $K_l = \hbar^2 l(l+1)$.

Tenemos así las funciones propias Ψ_{lm} del operador observable del momento angular total $\hat{L}^2$ dadas por:

$$\Psi_{lm} = Y_l^m(\theta,\phi) = \left[\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}(-1)^m e^{im\phi}\ P_l^m(cos(\theta)) = sen^{|m|}(\theta)\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x)\ ,\text{ donde } |m| \leq l \text{ y } x = cos(\theta).$$

10.10. Armónicos esféricos.

Estas funciones $Y_l^m(\theta,\phi)$ se llaman $armónicos\ esféricos$ (θ es el ángulo polar y ϕ el ángulo azimutal).

Por lo tanto tenemos la ecuación de valores propios: $\hat{L}^2 Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1)\ Y_l^m(\theta,\phi)$, $l \in \mathbb{N}$.

Ahora veamos lo que se obtiene cuando el operador $\hat{L}_z$ actúa sobre los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta,\phi)$,

$$\hat{L}_z Y_l^m(\theta,\phi) = (-i\hbar\tfrac{\partial}{\partial\phi})\left[\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}(-1)^m e^{im\phi}P_l^m(cos(\theta)) =$$

$$(-i\hbar)(im)\left[\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}(-1)^m e^{im\phi}P_l^m(cos(\theta)) = (\hbar m)\left[\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}(-1)^m e^{im\phi}P_l^m(cos(\theta)) = (\hbar m)\ Y_l^m(\theta,\phi),$$

por lo tanto hemos obtenido esto, $\hat{L}_z Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar m Y_l^m(\theta,\phi)$, una ecuación de valores propios.

Así, para cualquier valor dado de l, los posibles valores propios del momento angular orbital $\hat{L}_z$ son:

$L_z \equiv m\hbar$, $m = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm l$, por lo que se tienen $(2l+1)$ valores posibles.

De lo anterior tenemos que los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta,\phi)$ son simultáneamente funciones propias de los operadores $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$.
Observamos que este hecho es similar al resultado del teorema 196, el cual asegura que en el caso de dos operadores compactos autoadjuntos que conmutan en un espacio de Hilbert H, existe una base ortonormal de vectores propios comunes.

Tenemos que los valores propios del momento angular total $\hat{L}^2$ son: $\hbar^2 l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, ...$ y los valores propios del momento angular $\hat{L}_z$ son: $m\hbar$, $m = 0, \pm1, \pm2, ... \pm l$.

Por esto, en vista del postulado 2, sabemos que al efectuar mediciones experimentales del operador $\hat{L}^2$, los resultados solamente pueden ser: $0, 2\hbar^2, 6\hbar^2, 12\hbar^2, ...$

Los estados propios (vectores propios) del momento angular total con los valores para l; $0, 1, 2, 3, 4.$ son conocidos por razones históricas como los estados S, P, D, F, G respectivamente.
De la misma manera sabemos que los valores que podemos obtener al hacer mediciones sobre el operador $\hat{L}_z$ son: $0, \pm\hbar, \pm 2\hbar, ...$

Pasemos ahora a ver la siguiente propiedad interesante, de los operadores $\hat{L}_+$ y $\hat{L}_-$ definidos a continuación.

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y,$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y.$$

Teorema 235. *Los operadores $\hat{L}_+$ y $\hat{L}_-$ no son hermitianos; los operadores $\hat{L}_+\hat{L}_-$ y $\hat{L}_-\hat{L}_+$ sí son hermitianos.*

Demostración.

Como los operadores de momento angular orbital $\hat{L}_x$ y $\hat{L}_y$ son autoadjuntos (hermitianos) tenemos,

$$\left\langle \hat{L}_+\psi_1|\psi_2 \right\rangle = \left\langle \psi_1|\hat{L}_-\psi_2 \right\rangle ; \left\langle \hat{L}_-\psi_1|\psi_2 \right\rangle = \left\langle \psi_1|\hat{L}_+\psi_2 \right\rangle,$$

para cualesquiera funciones de onda ψ_1 y ψ_2, esto muestra que $\hat{L}_+$ y $\hat{L}_-$ no son Hermitianos y por lo tanto no representan ningún observable físico.

Ahora,

$$\hat{L}_+\hat{L}_- = \left(\hat{L}_x + i\hat{L}_y\right)\left(\hat{L}_x - i\hat{L}_y\right) = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar\hat{L}_z = \hat{L}^2 - \hat{L}_z(\hat{L}_z - \hbar)$$

de igual manera,

$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar\hat{L}_z = \hat{L}^2 - \hat{L}_z(\hat{L}_z + \hbar),$$

por lo tanto, dado que $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$ son autoadjuntos (hermitianos) y hemos expresado a $\hat{L}_+\hat{L}_-$ y $\hat{L}_-\hat{L}_+$ como funciones reales de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$, podemos concluir por el corolario 99 que los operadores $\hat{L}_+\hat{L}_-$ y $\hat{L}_-\hat{L}_+$ son Hermitianos.

■

Por otro lado, ya hemos que visto los conmutadores de los operadores de momento angular orbital satisfacen,

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \, [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, \, [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y; \qquad [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0;$$

A continuación, teniendo en cuenta las propiedades que hemos visto de los operadores del momento angular orbital, veremos unas matrices que tienen propiedades semejantes a los operadores anteriores. Estas matrices están relacionadas con los operadores llamados de momento angular intrínseco ó $espín$.

Recordamos que en el caso de que una matriz tenga forma diagonal: $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, los valores propios son a_1 y a_2,

y sus vectores propios son: $|u_1 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $|u_2 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; veamos las siguientes matrices.

10.11. Las matrices de $Pauli$.

DEFINICIÓN (MATRICES DE PAULI): Las matrices de $Pauli$ se definen como sigue:

(de inmediato nos remitimos a las unidades imaginarias i, j y k del anillo de los cuaterniones)

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

estas matrices son $hermitianas$ y satisfacen las relaciones siguientes:

$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma_x} = i\hat{\sigma}_z \ ,$$

$$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = -\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = i\hat{\sigma}_x,$$

$$\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = i\hat{\sigma}_y.$$

Ahora podemos definir las siguientes matrices $\hat{M}_x$, $\hat{M}_y$ y $\hat{M}_z$, en términos de las anteriores,

$$\hat{M}_x = \tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_x,$$
$$\hat{M}_y = \tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_y,$$
$$\hat{M}_z = \tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_z,$$

veamos el conmutador de las matrices $\hat{M}_x$ y $\hat{M}_y$

$$[\hat{M}_x\hat{M}_y] = \tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_x\tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_y - \tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_y\tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_x = \tfrac{1}{4}\hbar^2 i\hat{\sigma}_z + \tfrac{1}{4}\hbar^2 i\hat{\sigma}_z = \tfrac{1}{2}\hbar^2 i\hat{\sigma}_z = i\hbar\tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_z = \tfrac{1}{2}i\hbar\hbar\hat{\sigma}_z = i\hbar\hat{M}_z,$$

por lo tanto, podemos ver que se verifican las siguientes igualdades,

$$[\hat{M}_x, \hat{M}_y] = i\hbar\hat{M}_z, \quad [\hat{M}_y, \hat{M}_z] = i\hbar\hat{M}_x \quad \text{y } [\hat{M}_z, \hat{M}_x] = i\hbar\hat{M}_y.$$

Luego, definamos $\hat{M}^2 = \hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 + \hat{M}_z^2$, efectuando las operaciones se tiene esto,

$$\hat{M}_x^2 = \left(\tfrac{1}{2}\hbar\right)^2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \left(\tfrac{1}{2}\hbar\right)^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{M}_y^2 = \left(\tfrac{1}{2}\hbar\right)^2\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}^2 = \left(\tfrac{1}{2}\hbar\right)^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \hat{M}_z^2 = \left(\tfrac{1}{2}\hbar\right)^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \left(\tfrac{1}{2}\hbar\right)^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y vemos que se satisface lo siguiente,

$$\hat{M}^2 = \hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 + \hat{M}_z^2 = \left(\tfrac{3}{4}\hbar^2\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right)\hbar^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo que: $[\hat{M}^2, \hat{M}_x] = [\hat{M}^2, \hat{M}_y] = [\hat{M}^2, \hat{M}_z] = 0$.

Por otro lado, vemos que los valores propios de $\hat{M}_z = \frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, son: $M_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$, con sus correspondientes vectores propios:

$$|u_{+\frac{1}{2}} >= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } |u_{-\frac{1}{2}} >= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

estos mismos vectores son vectores propios de $\hat{M}^2$, cada uno con el valor propio: $M^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2$.

Observamos que los resultados que se han obtenido para las matrices $\hat{M}_x$, $\hat{M}_y$, $\hat{M}_z$ y $\hat{M}^2$, son semejantes a los que vimos anteriormente para los operadores observables del momento angular $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ y $\hat{L}^2$.
También vimos que los operadores $\hat{L}_z$ y $\hat{L}^2$ tienen vectores propios comunes, cuyos valores propios son:

$$L_z = \hbar m \text{ , } m = 0, \pm1, ..., \pm l. \text{ y } L^2 = \hbar^2 l(l+1) \text{ , } l = 0, 1, 2, ...$$

donde L_z y L^2 denotan los valores propios de $\hat{L}_z$ y $\hat{L}^2$ respectivamente y los valores l y m son enteros.

Podemos ver una diferencia significativa con los operadores del momento angular, ya que en el caso de las matrices $\hat{M}_z$ y $\hat{M}^2$ los valores propios son $\pm\frac{1}{2}\hbar$ y $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2$, esto es, $m = \pm\frac{1}{2}$ y $l = \frac{1}{2}$, es decir, no están restringidos a ser números enteros. Lo que sí sucede con los operadores del momento angular $\hat{L}_z$ y $\hat{L}^2$.

Pues bien, ya mostramos que las matrices $\hat{M}_x$, $\hat{M}_y$ y $\hat{M}_z$, satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[\hat{M}_x, \hat{M}_y] = i\hbar\hat{M}_z, \quad [\hat{M}_y, \hat{M}_z] = i\hbar\hat{M}_x \quad \text{y } [\hat{M}_z, \hat{M}_x] = i\hbar\hat{M}_y$$

$$[\hat{M}^2, \hat{M}_x] = [\hat{M}^2, \hat{M}_y] = [\hat{M}^2, \hat{M}_z] = 0.$$

Ahora, usando sólo esas relaciones de conmutación, veamos que podemos decir en general, acerca de los vectores propios y valores propios de las matrices que cumplan esas relaciones.

Seguiremos nombrando a tales matrices $\hat{M}_x$, $\hat{M}_y$ y $\hat{M}_z$.

Introducimos ahora por conveniencia las siguientes matrices:

$$\hat{M}_+ = \hat{M}_x + i\hat{M}_y,$$

$$\hat{M}_- = \hat{M}_x - i\hat{M}_y,$$

luego sustituyendo obtenemos esto:

$$[\hat{M}_z, \hat{M}_+] = [\hat{M}_z, \hat{M}_x + i\hat{M}_y] = [\hat{M}_z, \hat{M}_x] + i[\hat{M}_z, \hat{M}_y] = i\hbar\hat{M}_y + i(-i\hbar)\hat{M}_x = i\hbar\hat{M}_y + \hbar\hat{M}_x = \hbar\hat{M}_+,$$

$$[\hat{M}_z, \hat{M}_-] = [\hat{M}_z, \hat{M}_x - i\hat{M}_y] = [\hat{M}_z, \hat{M}_x] - i[\hat{M}_z, \hat{M}_y] = i\hbar\hat{M}_y - i(-i\hbar)\hat{M}_x = \hbar\hat{M}_y - \hbar\hat{M}_x = -\hbar\hat{M}_-,$$

$$[\hat{M}_+, \hat{M}_-] = 2\hbar\hat{M}_z.$$

es decir,

$$[\hat{M}_z, \hat{M}_+] = \hbar \hat{M}_+,$$

$$[\hat{M}_z, \hat{M}_-] = -\hbar \hat{M}_-,$$

$$[\hat{M}_+, \hat{M}_-] = 2\hbar \hat{M}_z.$$

A propósito de este resultado entre matrices y su conmutador, cabe observar lo siguiente.

10.12. Operadores escalera.

Teorema 236. *Supongamos que el conmutador de los operadores $\hat{N}$ y $\hat{X}$ satisface:*

$[\hat{N}, \hat{X}] = \lambda \hat{X}$, donde λ es un escalar.

Entonces el operador $\hat{X}$ actúa de tal manera que desplaza una cantidad λ cada valor propio y vector propio del operador $\hat{N}$.

Definición 237. Estos operadores se llaman operadores escalera, en el caso $\lambda > 0$, el operador $\hat{X}$ se denomina operador de subida; mientras que si $\lambda < 0$, el operador $\hat{X}$ se llama operador de bajada.

Demostración.

Sea $|n>$ un vector propio del operador $\hat{N}$ con valor propio n, luego tenemos

$$\begin{aligned} \hat{N}\hat{X}|n> &= \left(\hat{X}\hat{N} + [\hat{N}, \hat{X}]\right)|n> \\ &= (\hat{X}\hat{N} + \lambda\hat{X})|n> \\ &= \hat{X}\hat{N}|n> + \lambda\hat{X}|n> \\ &= \hat{X}n|n> + \lambda\hat{X}|n> \\ &= (n+\lambda)\hat{X}|n>, \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$\hat{N}\hat{X}|n> = (n+\lambda)\hat{X}|n>.$$

Lo que resulta es que $\hat{X}|n>$ también es un vector propio del operador $\hat{N}$ pero con valor propio $(n+\lambda)$.
(Cuando el operador $\hat{N}$ es hermitiano, el valor propio n es real.)

■

De lo anterior tenemos, ya que $\hbar, 2\hbar > 0$ y $-\hbar < 0$, los operadores escalera $\hat{M}_+$ y $\hat{M}_-$.

$$1)\ [\hat{M}_z, \hat{M}_+] = \hbar \hat{M}_+,$$

$$2)\ [\hat{M}_z, \hat{M}_-] = -\hbar \hat{M}_-,$$

$$3)\ [\hat{M}_+, \hat{M}_-] = 2\hbar \hat{M}_z.$$

Por otro lado,
ya que $\hat{M}^2$ y $\hat{M}_z$ conmutan, supongamos que el vector $|\lambda, m>$ es simultáneamente vector propio de ambas matrices, tal como sucede en el caso de los operadores de momento angular orbital, es decir

$$\hat{M}^2|\lambda, m>= \ \ \hbar^2\lambda|\lambda, m>,$$

$$\hat{M}_z|\lambda, m>= \hbar m|\lambda, m>.$$

Así, el problema es determinar los posibles valores de λ y m implicados por las relaciones de conmutación.

Para un valor dado de la magnitud λ, los valores propios posibles de $\hat{M}_z$ determinados por m deben estar en un dominio finito, acotado por los valores m_{max} y m_{min} .

Ahora, de la igualdad $\hat{M}_z|\lambda, m>= \hbar m|\lambda, m>$ tenemos que:

$$\hat{M}_+\hat{M}_z|\lambda, m>= \hat{M}_+\hbar m|\lambda, m>= \hbar m\hat{M}_+|\lambda, m>$$

luego en vista de $[\hat{M}_z, \hat{M}_+] = \hbar \hat{M}_+$, tenemos lo siguiente

$$\hat{M}_+\hat{M}_z = \hat{M}_z\hat{M}_+ - [\hat{M}_z, \hat{M}_+] = \hat{M}_z\hat{M}_+ - \hbar\hat{M}_+, \Longrightarrow \hat{M}_z\hat{M}_+ = \hat{M}_+\hat{M}_z + \hbar\hat{M}_+,$$

sustituyendo en la ecuación anterior nos da:

$$\hat{M}_z\hat{M}_+|\lambda, m>= \left(\hat{M}_+\hat{M}_z + \hbar\hat{M}_+\right)|\lambda, m>= \hat{M}_+\hat{M}_z|\lambda, m> +\hbar\hat{M}_+|\lambda, m>= \hbar m\hat{M}_+|\lambda, m> +\hbar\hat{M}_+|\lambda, m>= \hbar(m+1)\hat{M}_+|\lambda, m>$$

por lo tanto $\hat{M}_z\hat{M}_+|\lambda, m>= \hbar(m+1)\hat{M}_+|\lambda, m>$.

Entonces tiene que ser $\hat{M}_+|\lambda, m>= 0$, ó $\hat{M}_+|\lambda, m>= |\lambda, k>$, por conveniencia hacemos $k = m+1$, osea

$$\hat{M}_+|\lambda, m>= |\lambda, m+1>$$

por lo tanto,

$$\hat{M}_z|\lambda, m+1>= \hbar(m+1)|\lambda, m+1>.$$

En conclusión, podemos ver que partiendo de la ecuación

$\hat{M}_z\ |\lambda, m>= \hbar m|\lambda, m>$, con el vector propio$|\lambda, m>$ y el valor propio $\hbar m$, se llega a la otra ecuación,

$\hat{M}_z|\lambda, m+1>=\hbar(m+1)|\lambda, m+1>$, con el vector propio $|\lambda, m+1>$ cuyo valor propio es $\hbar(m+1)$,

siempre que $m \neq m_{max}$; en el caso $m = m_{max}$ el resultado es $\hat{M}_+|\lambda, m>=0$.

Notamos que los valores que admite m difieren en un entero.

Aplicamos un argumento similar para $\hat{M}_-\hat{M}_z$ y vemos que: $\hat{M}_-|\lambda, m>=0$, ó $\hat{M}_-|\lambda, m>=|\lambda, m-1>$,

por lo que tenemos: $\hat{M}_z|\lambda, m-1>=\hbar(m-1)|\lambda, m-1>$.

Así, dado un vector propio $|\lambda, m>$ podemos generar un nuevo vector propio $|\lambda, m-1>$ con valor propio $\hbar(m-1)$, siempre que $m \neq m_{min}$, ya que en ese caso tenemos $\hat{M}_-$—$\lambda, m>=0$.

Veamos ahora lo siguiente,

$$\hat{M}_-\hat{M}_+ = (\hat{M}_x - i\hat{M}_y)(\hat{M}_x + i\hat{M}_y) = \hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 + i[\hat{M}_x, \hat{M}_y] = \hat{M}^2 - \hat{M}_z^2 - \hbar\hat{M}_z \ .$$

luego si el operador $\hat{M}_-\hat{M}_+$ actúa sobre el vector $|\lambda, m_{max}>$ tenemos que

$$\hat{M}_-\hat{M}_+|\lambda, m_{max}>=(\hat{M}^2 - \hat{M}_z^2 - \hbar\hat{M}_z)|\lambda, m_{max}>=0$$

osea , $\hat{M}^2|\lambda, m_{max}> - \hat{M}_z^2|\lambda, m_{max}> - \hbar\hat{M}_z|\lambda, m_{max}>=0$

luego (usando ecuaciones anteriores): $\hat{M}^2|\lambda, m>=\hbar^2\lambda|\lambda, m>$ y $\hat{M}_z|\lambda, m> = \hbar m|\lambda, m>$ tenemos,

$$\hat{M}^2|\lambda, m_{max}>=\hbar^2\lambda|\lambda, m_{max}>; -\hat{M}_z^2|\lambda, m_{max}>=-\hbar\hbar m_{max}m_{max}|\lambda, m_{max}>; -\hbar\hat{M}_z|\lambda, m_{max}>=-\hbar\hbar m_{max}|\lambda, m_{max}>$$

así que $(\lambda - m_{max}^2 - m_{max})|\lambda, m_{max}>=0$, por lo tanto: $\lambda = m_{max}^2 + m_{max}$.

Análogamente, $\hat{M}_+\hat{M}_- = \hat{M}^2 - \hat{M}_z^2 + \hbar\hat{M}_z$, si este operador actúa sobre el vector $|\lambda, m_{min}>$, obtenemos $\lambda - m_{min}^2 + m_{min} = 0$ osea:

$$\lambda = m_{min}^2 - m_{min} \ .$$

Igualando las dos expresiones que obtuvimos para λ tenemos, $m_{max}^2 + m_{max}$= $m_{min}^2 - m_{min}$, luego

$(m_{max} + m_{min})m_{min} - (m_{max} + m_{min})m_{max} - (m_{max} + m_{min}) = (m_{max} + m_{min})(m_{min} - m_{max} - 1) = 0$, concluimos que:

$$m_{max} = -m_{min}.$$

Esto significa que los valores que toma m, se encuentran situados de manera simétrica respecto del origen.

Además, como los valores que toman difieren en un entero, tenemos:

$$m_{max} - m_{min} = 2l, \text{ donde }, l = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, ...$$

combinando este resultado con el hecho que $m_{max} = -m_{min}$, se nos muestra que: $-l \leq m \leq l$, (se tienen $2l+1$ valores).

Finalmente, de las igualdades que obtuvimos, $m_{max} - m_{min} = 2l$, $m_{max} = -m_{min}$ y $\lambda = m_{max}^2 + m_{max}$ se tiene esto:

$$2m_{max} = 2l, \text{ por lo que } m_{max} = l \quad \Longrightarrow \quad \lambda = m_{max}^2 + m_{max} = l^2 + l = l(l+1).$$

$$\lambda = l(l+1) \text{ , } l = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, ...$$

Por lo tanto, los valores propios de las matrices $\hat{M}_z$ y $\hat{M}^2$ son $\hbar m$ y $\hbar^2 l(l+1)$ respectivamente.

Notamos que en este caso se admiten valores semi-enteros, algo que no ocurría con los operadores de momento angular orbital.
Las matrices $\hat{M}_x$, $\hat{M}_y$, $\hat{M}_z$ y $\hat{M}^2$ están relacionadas con el observable cuántico llamado momento angular intrínseco ó $Espín.$

10.13. Postulado 3: Principio de correspondencia.

Se usa material de: [9] capítulo 11; [10] capítulo 25; [15] capítulo 3; [16] capítulo 6.

Un operador observable cuántico correspondiente a una variable dinámica, se obtiene al reemplazar la variable canónica de mecánica clásica por el correspondiente operador cuántico.

Este postulado nos da un método para formular el operador mecano-cuántico a partir de variables dinámicas clásicas, las cuales están dadas en términos de las variables canónicas conjugadas p y q.

Este principio de correspondencia fue propuesto por primera vez por $Niels\ Bohr$.

De este modo tenemos una correspondencia entre cantidades físicas de mecánica clásica y operadores de mecánica cuántica.

En general, un observable en mecánica clásica es una bien definida función de la posición y el momento. Este mismo está representado en mecánica cuántica por los operadores de posición y momento.

En una dimensión tenemos, $\hat{x} = x$ y $\hat{p} = -i\hbar(\frac{d}{dx})$.

La posición, el momento, el momento angular y la energía, no son los únicos observables en mecánica cuántica. Existen otros más, los cuales no tienen análogos en mecánica clásica, por ejemplo el espín.

Veamos el siguiente postulado.

10.14. Postulado 4: Cuantización.

Cada operador observable de variables canónicas conjugadas satisface las siguientes relaciones de conmutación de Heisenberg:

$$[\hat{q}_m, \hat{q}_n] = [\hat{p}_m, \hat{p}_n] = 0 \text{ ; } [\hat{q}_m, \hat{p}_n] = i\hbar\delta_{mn}.$$

Donde $\hat{q}_m$ es el operador observable correspondiente a coordenadas generalizadas y $\hat{p}_m$ es el operador observable de momento correspondiente al momento generalizado.

Este postulado se conoce como el $principio\ de\ cuantización$.

En coordenadas cartesianas los operadores $\hat{x}_m$ y $\hat{p}_n$ satisfacen:

$$[\hat{x}_m, \hat{x}_n] = [\hat{p}_m, \hat{p}_n] = 0 \text{ y } [\hat{x}_m, \hat{p}_n] = i\hbar\delta_{mn} \text{ .}$$

donde los subíndices $m, n = 1, 2, 3.$ para las x, y, z componentes de $\hat{x}$ y $\hat{p}$.

En una dimensión esto es: $[\hat{p}, \hat{x}]\psi = (\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p})\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) + i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\hbar\psi$, por lo que $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$.

Los observables que tienen análogos clásicos, siempre pueden expresarse como funciones de q_m y p_m, y las reglas de cuantización para estos observables son las de conmutación de Heisenberg.

10.15. Postulado 5: Mediciones cuánticas.

En esta parte se usa material de: [1] capítulo 7; [15] capítulo 3; [16] capítulo 2;[21] capítulo 4; [22] capítulo 2.

Si un operador observable $\hat{A}$ tiene una base propia $\{\psi_n\}$ y valores propios $\{\lambda_n\}$, entonces la probabilidad de obtener en la medición el valor propio λ_n del observable $\hat{A}$ del sistema en el estado propio normalizado $\psi(x)$ es:

$$P(\lambda_n) = | < \psi_n|\psi > |^2.$$

Este postulado establece una relación entre eventos (mediciones experimentales) y probabilidades.

Por el postulado 2, sabemos que los valores que resultan de efectuar mediciones en un sistema cuántico son los valores propios del correspondiente operador observable del sistema.
En lo que respecta a hacer mediciones en un sistema, la medición suele mejorarse si se hace varias veces en condiciones idénticas y luego se calcula el promedio de estas.

Este promedio llamado valor esperado o esperanza de un operador observable, se define a continuación.

Definición 238. (Valor esperado): El valor esperado $< \hat{A} >$ de un operador observable $\hat{A}$ en el estado $\psi(x)$ de un sistema físico, se define como:

$$< \hat{A} >= \frac{<\psi|\hat{A}\psi>}{<\psi|\psi>},$$

si el vector de estado está normalizado el valor esperado es:

$$< \hat{A} >=< \psi|\hat{A}\psi >.$$

En términos del valor esperado de $\hat{A}$, definimos la desviación media cuadrática $(\Delta\hat{A})$, la cual mide la desviación (dispersión) respecto de la media $<\hat{A}>$.

Definición 239. (Desviación media cuadrática): La desviación media cuadrática $(\Delta\hat{A})$ se define como la raíz cuadrada del valor esperado de $(\hat{A}-<\hat{A}>)^2$ en el estado ψ en el cual $<\hat{A}>$ es calculado.

De la definición tenemos lo siguiente :

$$(\Delta\hat{A})^2 =<(\hat{A}-<\hat{A}>)^2>=<\psi|(\hat{A}-<\hat{A}>)^2\psi>=<(\hat{A}-<\hat{A}>)\psi|(\hat{A}-<\hat{A}>)\psi>=\|(\hat{A}-<\hat{A}>)\psi\|^2$$

ya que $\hat{A}$ es Hermitiano y $<\hat{A}>$ es real.

Proposición 240. *Se verifican los siguientes incisos:*

$$i)\ (\Delta\hat{A})^2 =<\hat{A}^2>-<\hat{A}>^2;$$

$$ii)\ <\hat{A}^2>=\|\hat{A}\psi\|^2.$$

Demostración.

$$i)\ (\Delta\hat{A})^2 =<(\hat{A}-<\hat{A}>)^2>=<\psi|(\hat{A}-<\hat{A}>)^2\psi>=<\psi|(\hat{A}^2-2\hat{A}<\hat{A}>+<\hat{A}>^2)\psi>=$$

$$<\psi|\hat{A}^2\psi>-2<\psi|\hat{A}\psi><\hat{A}>+<\hat{A}>^2<\psi|\psi>=<\hat{A}^2>-2<\hat{A}>^2+<\hat{A}>^2=<\hat{A}^2>-<\hat{A}>^2,$$

(ya que $<\psi|\psi>=1$).

$ii)\ <\hat{A}^2>=<\psi|\hat{A}^2\psi>=<\hat{A}\psi|\hat{A}\psi>=\|\hat{A}\psi\|^2$.

■

Teorema 241. *La condición necesaria y suficiente para que un sistema físico se encuentre en el estado propio de un observable* $\hat{A}$ *es:* $(\Delta\hat{A})=0$.

Demostración:

$\Longrightarrow$) Suponga que el sistema está en el estado propio ψ de $\hat{A}$ con valor propio real λ, esto es $\hat{A}\psi=\lambda\psi$, luego

$$<\hat{A}>=<\psi|\hat{A}\psi>=\lambda\ ;\ <\hat{A}^2>=<\psi|\hat{A}^2\psi>=<\hat{A}\psi|\hat{A}\psi>=\|\hat{A}\psi\|^2=\lambda^2,$$

por la proposición anterior tenemos que

$$(\Delta\hat{A})=<\hat{A}^2>-<\hat{A}>^2=\lambda^2-\lambda^2=0.$$

$\Longleftarrow)$
$0 = (\Delta\hat{A})^2 = \|(\hat{A} - <\hat{A}>)\psi\|^2$, esto implica que $(\hat{A} - <\hat{A}>)\psi = 0$, osea $\hat{A}\psi = <\hat{A}>\psi$,

por lo que ψ es un estado propio de $\hat{A}$ con valor propio $<\hat{A}>$.

$\blacksquare$

Observemos lo siguiente, cuando $\psi_n(x)$ es un vector propio de $\hat{A}$, con valor propio λ_n, $\hat{A}\psi_n = \lambda_n\psi_n$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces el valor esperado en el estado propio $\psi_n(x)$ está dado por:

$$<\hat{A}> = \frac{<\psi_n|\hat{A}\psi_n>}{<\psi_n|\psi_n>} = \frac{<\psi_n|\lambda_n\psi_n>}{<\psi_n|\psi_n>} = \lambda_n \ .$$

Por otro lado si $\psi(x)$ no es un vector propio de $\hat{A}$, este se puede expandir en términos de la base ortonormal de vectores propios $\{\psi_n(x)\}$ así:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} <\psi_n|\psi>\psi_n(x) \text{ , por lo que } \|\psi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |<\psi_n|\psi>|^2.$$

Por lo que el valor esperado $<\hat{A}>$ adquiere la forma:

$$<\hat{A}> = \frac{1}{\|\psi\|^2} <\sum c_m\psi_m|A\sum c_n\psi_n> = \frac{1}{\|\psi\|^2} <\sum c_m\psi_m|\sum c_m\lambda_n\psi_n> = \frac{1}{\|\psi\|^2}\sum_{m,n} c_m\overline{c}_n\lambda_n <\psi_m|\psi_n> =$$

$$\frac{1}{\|\psi\|^2}\sum_{m,n} c_m\overline{c}_n\lambda_n\delta_{mn} = \frac{\sum|c_n|^2\lambda_n}{\|\psi\|^2} = \frac{\sum|c_n|^2\lambda_n}{\sum|c_n|^2} = \sum a_n\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_n \ ,$$

$$\text{donde } a_n = \frac{|c_n|^2}{\sum|c_n|^2} = \frac{|<\psi_n|\psi>|^2}{\sum|<\psi_n|\psi>|^2} \ .$$

Esto se puede interpretar como el resultado de efectuar una cantidad de mediciones bajo condiciones idénticas, es decir $<\hat{A}>$ se ve como un promedio de una cantidad de mediciones del sistema.

Pues el numerador de a_n representa la frecuencia con que los valores propios $\{\lambda_n\}$ ocurren en las mediciones y el denominador de a_n es el número total de mediciones .

Así, la razón entre la frecuencia $|<\psi_n|\psi>|^2$ y el número total de mediciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|<\psi_n|\psi>|^2$ representa el peso a_n de los valores propios en la medición .

Esto nos lleva a la interpretación estadística de

$$a_n = \frac{|<\psi_n|\psi>|^2}{\sum|<\psi_n|\psi>|^2},$$

como la probabilidad de obtener en la medición el valor propio λ_n para el operador $\hat{A}$ en el estado $\psi(x)$ del sistema físico.

Para el caso de un vector normalizado ψ, $\|\psi\|^2 = \sum|c_n|^2 = |<\psi_n|\psi>|^2 = 1$; $a_n = |c_n|^2 = |<\psi_n|\psi>|^2$, el valor esperado tiene la forma:

$$< \hat{A} >= \sum_{n=1}^{\infty} | < \psi_n|\psi > |^2 \lambda_n.$$

Entonces la cantidad

$$| < \psi_n|\psi > |^2,$$

se puede interpretar como la probabilidad de obtener en la medición el valor propio λ_n, de $\hat{A}$ en el estado normalizado $\psi(x)$.

Por lo tanto vemos que es imposible predecir con absoluta certeza el resultado que se obtendrá al hacer mediciones en un sistema cuántico en un estado definido.
Esto debido a que toda medición del sistema requiere de una interacción entre el equipo de medición y el sistema medido.

Por lo tanto, las predicciones de las mediciones cuánticas son de naturaleza estadística.

Comentemos ahora lo siguiente, la desviación estándar, la cual es la medida de dispersión respecto del valor esperado (la media), usualmente es llamada $incertidumbre \ \triangle \hat{A}$.

Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son operadores observables Hermitianos, las incertidumbres $\Delta \hat{A}$ y $\Delta \hat{B}$, que se obtienen al hacer mediciones sobre $\hat{A}$ y $\hat{B}$ en el estado dado $\psi(x)$ están dadas por:

$$\Delta \hat{A} = \|(\hat{A} - < \hat{A} >)\psi\| = \|\psi_1\| \ ; \Delta \hat{B} = \|(\hat{B} - < \hat{B} >)\psi\| = \|\psi_2\| \ .$$

Como el vector de estado ψ es un elemento de un espacio de Hilbert, se tiene que existe una relación entre las incertidumbres. Esta relación se conoce como el principio generalizado de incertidumbre.

10.16. Principio de incertidumbre de $Heisenberg$.

Teorema 242. *(Principio de Incertidumbre): Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son operadores observables Hermitianos, entonces para cualquier vector de estado ψ se tiene:*

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} > \tfrac{1}{2} | \tfrac{1}{i} < [\hat{A}, \hat{B}] > |.$$

Demostración:

Tenemos

$$\Delta \hat{A} = \|\psi_1\|, \psi_1 = (\hat{A} - < \hat{A} >)\psi \ ; \Delta \hat{B} = \|\psi_2\| \ , \psi_2 = (\hat{B} - < \hat{B} >)\psi.$$

Luego por la desigualdad de Schwarz se tiene para cualesquiera vectores ψ_1 y ψ_2:

$$\|\psi_1\|\|\psi_2\| \geq | < \psi_1|\psi_2 > | \geq |Im < \psi_1|\psi_2 > | \geq | \tfrac{1}{2i} \{ < \psi_1|\psi_2 > - \overline{< \psi_1|\psi_2 >} \}| \geq | \tfrac{1}{2i} \{ < \psi_1|\psi_2 > - < \psi_2|\psi_1 > \}|$$

así que

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq | \tfrac{1}{2i} \{ < (\hat{A} - < \hat{A} >)\psi | (\hat{B} - < \hat{B} >)\psi > - < (\hat{B} - < \hat{B} >)\psi | (\hat{A} - < \hat{A} >)\psi > \}| \geq \ | \tfrac{1}{2i} << \psi | (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\psi >> | \ \geq$$

$$\frac{1}{2}|\frac{1}{i} < [\hat{A}, \hat{B}] > |.$$

■

Corolario 243. *(Principio de incertidumbre de Heisenberg): Para los operadores de posición y momento $\hat{x}_i$, $\hat{p}_i$ ($i = 1, 2, 3$) se cumple lo siguiente:*

$$\Delta\hat{x}_i \Delta\hat{p}_i \geq \frac{\hbar}{2}.$$

■

El corolario es muy importante, es la famosa relación de incertidumbre entre la posición y el momento, descubierta por $HEISENBERG$.

De acuerdo con este principio de incertidumbre, la posición y el momento de una partícula no pueden ser determinados de manera exacta simultáneamente.
En otras palabras, es imposible diseñar un experimento que pueda medir de manera precisa los valores de posición y momento de una partícula.

La importancia del conmutador queda indicada en el teorema anterior, pues sólo cuando el conmutador de dos operadores observables es igual a cero, la incertidumbre puede ser cero.

10.17. Postulado 6: El operador Hamiltoniano y Ecuación diferencial de $Schrödinger$.

Se usa material de: [21] capítulo 4; [15] capítulo 3.

a) El operador Hamiltoniano.

Para cada sistema físico, existe un operador lineal autoadjunto (hermitiano) $\hat{H}$, llamado operador Hamiltoniano, el cual representa el operador observable correspondiente a la energía total del vector de estado del sistema.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\hat{r}).$$

b) La ecuación diferencial de Schrödinger.

Si un sistema físico no tiene disturbios por ningún experimento, el operador Hamiltoniano $\hat{H}$, determina la evolución temporal del vector de estado del sistema $\Psi(r, t)$ a través de la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi(r, t)\ .$$

Esta es la *Ecuación de onda de Schrödinger* **dependiente del tiempo y es la ecuación fundamental de movimiento en mecánica cuántica.**

Una de las razones que justifican que esta ecuación es considerada como fundamental en mecánica cuántica, es que predice de manera muy acertada lo que se obtiene al realizar experimentos.
Ya que el operador Hamiltoniano es $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\hat{r})$, la ecuación de Schrödinger asume la siguiente forma:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\hat{r})]\Psi.$$

Después de haber mencionado los postulados de la mecánica cuántica, veamos el siguiente ejemplo.

10.18. El oscilador armónico cuántico.

En esta parte se usa material de: [1] capítulo 7; [15] capítulo 5 y 12; [16] capítulo 5;

En este ejemplo usamos el principio de correspondencia del postulado 3 y el postulado 6.

En la mecánica clásica, se dice que un oscilador armónico es una partícula de masa m moviéndose bajo la acción de una fuerza $F = -m\omega^2 x$.
La ecuación de este movimiento es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

La solución de esta ecuación con condiciones iniciales $x(0) = a$, $x'(0) = 0$ es : $x = a\ cos(\omega t)$.

Se dice que esto representa un movimiento oscilatorio de frecuencia angular ω y amplitud a.

El potencial V se relaciona con la fuerza F así: $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$, por lo que $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Notamos que $V(x) \in \mathbb{R}$.

La energía del movimiento oscilatorio es la energía potencial cuando la partícula se encuentra posicionada en los extremos, así la energía es:

$$E = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 .$$

Consideremos ahora la teoría cuántica del oscilador armónico.

Por el principio de correspondencia del postulado 3 y el postulado 6, la energía total del sistema es representada por el operador Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 .$$

Como $V(x) \in \mathbb{R}$, ya vimos en la proposición 234 que $\hat{H}$ es un operador autoadjunto.

Por conveniencia introducimos ahora los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^*$ definidos por:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m}}\hat{p},$$

$$\hat{a}^* = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m}}\hat{p}.$$

Ya que $\hat{p}$ y $\hat{x}$ son operadores Hermitianos tenemos que: $<\psi_1|\hat{a}\psi_2> = <\hat{a}^*\psi_1|\psi_2>$ y $<\psi_1|\hat{a}^*\psi_2> = <\hat{a}\psi_1|\psi_2>$, para cualesquiera funciones de onda ψ_1 y ψ_2.

Esto muestra que los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^*$ no son Hermitianos y por lo tanto no representan observables físicos.

Por otro lado, los operadores $\hat{a}\hat{a}^*$ y $\hat{a}^*\hat{a}$ si son Hermitianos, esto en vista del corolario 99, ya que pueden ser representados por funciones reales de $\hat{H}$ así:

$$\hat{a}\hat{a}^* = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x} - \frac{i\omega}{2}[\hat{x},\hat{p}] = \hat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega,$$

$$\hat{a}^*\hat{a} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x} + \frac{i\omega}{2}[\hat{x},\hat{p}] = \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

También el operador observable Hamiltoniano $\hat{H}$ lo podemos representar en términos de $\hat{a}$ y $\hat{a}^*$ así:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{a}^*\hat{a} + \tfrac{1}{2}\hbar\omega. \\ \hat{H} &= \hat{a}\hat{a}^* - \tfrac{1}{2}\hbar\omega. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Veamos el conmutador de estos operadores,

$$[\hat{a},\hat{a}^*] = \hat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega - \left(\hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) = \hbar\omega, \qquad [\hat{a}^*,\hat{a}] = \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega - \left(\hat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega\right) = -\hbar\omega.$$

Es decir, tenemos los operadores escalera $\hat{a}$ y $\hat{a}^*$:

$$[\hat{a},\hat{a}^*] = \hbar\omega,\ [\hat{a}^*,\hat{a}] = -\hbar\omega.$$

Luego, el estado propio de la energía E_n es $|E_n>$ y $\hat{H}|E_n>= E_n|E_n>$, esto último lo podemos escribir usando (10.1) así:

$$\hat{a}^*\hat{a}|E_n>= \left(E_n - \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right)|E_n>,$$

o también así:

$$\hat{a}\hat{a}^*|E_n>= \left(E_n + \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right)|E_n>. \tag{10.2}$$

Multiplicando en (10.2) por $\hat{a}$ obtenemos:

$$\hat{a}\hat{a}^*\hat{a}|E_n>= \left(E_n - \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right)\hat{a}|E_n>, \tag{10.3}$$

entonces tenemos que debe ser ó $\hat{a}|E_n >= 0$, ó $\hat{a}|E_n >= |E_k >$, (hacemos $k = n - 1$)

usando esto podemos escribir la ecuación en (10.3) así:

$$\hat{a}\hat{a}^*|E_{n-1} >= \left(E_n - \hbar\omega + \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right)|E_{n-1} >,$$

pero esto es lo mismo que la igualdad en (10.2) siempre que se cumpla

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega.$$

Entonces, dado cualquier vector propio $|E_n >$, es posible generar otro vector propio $|E_{n-1} >$ usando la relación

$$\hat{a}|E_n >= |E_{n-1} >$$

con los valores propios dados por:

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega,$$

siempre que $|E_n >$ no sea el menor estado $|E_0 >$, ya que en este caso se tiene $\hat{a}|E_n >= 0$.

De la ecuación en (10.1) para $n = 0$ tenemos que $E_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega = 0$, esto determina el menor estado de la energía.

10.19. Operadores de aniquilación y creación.

De la relación

$$\hat{a}|E_n >= |E_{n-1} > ,$$

vemos que el operador $\hat{a}$ es el que va anulando la energía en el sistema en unidades cuánticas de $\hbar\omega$, por esta razón $\hat{a}$ es llamado el $Operador\ Aniquilación$ o $Aniquilador$.

Procediendo de manera similar, multiplicando la ecuación en (10.2) por $\hat{a}^*$ tenemos:

$$\hat{a}^*\hat{a}\hat{a}^*|E_n >= \left(E_n + \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right)\hat{a}^*|E_n > ,$$

así que ó $\hat{a}^*|E_n >= 0$, ó $\hat{a}^*|E_n >= |E_k >$, (hacemos $k = n + 1$). Usando esto podemos escribir la ecuación anterior así:

$$\hat{a}^*\hat{a}|E_{n+1} >= \left(E_n + \hbar\omega - \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right)|E_{n+1} > ,$$

observamos que esta es la misma ecuación que se tiene en (10.2) siempre que se cumpla $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$.

Así tenemos que dado un estado propio $|E_n >$, es posible generar un nuevo vector propio $|E_{n+1} >$ usando la relación:

$$\hat{a}^*|E_n >= |E_{n+1} >$$

donde los valores propios cumplen: $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$, siempre que E_n no sea el mayor estado de energía, pues en este caso se tiene $\hat{a}^*|E_n >= 0$.

Por otro lado, el potencial es una función de x creciente, por lo que no hay nivel máximo de energía y la creación de niveles mayores de energía siempre es posible.

Así, el operador $\hat{a}^*$ genera energía en el sistema, en unidades cuánticas $\hbar\omega$, por esto es llamado el $Operador\ Creación$ ó $Creador$.

10.20. Un conjunto discreto de energía.

De las igualdades anteriores: $E_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega = 0$ y $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$, tenemos que en general el nivel de energía es:

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega \ , \ n = 0, 1, 2, ...$$

Vemos que esto representa un conjunto discreto de niveles de energía, en este caso se dice que la energía es cuantizada.

El número entero no negativo n que caracteriza a los valores propios de la energía (y por lo tanto también a las funciones propias) se llama $número\ cuántico$.

El valor $n = 0$ corresponde al valor mínimo de número cuántico cuya energía es: $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.
Este es llamado el menor estado de energía y nunca es 0.

Para determinar las funciones propias de la energía ψ_n correspondientes a los valores propios E_n es conveniente escribir los operadores aniquilador y creador así:

$\hat{A} \equiv \frac{\hat{a}}{\sqrt{\hbar\omega}}$ y $\hat{A}^* \equiv \frac{\hat{a}}{\sqrt{\hbar\omega}}$; también reemplazamos $\hat{p}$ por $-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, luego obtenemos esto,

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\hbar m\omega)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\hat{x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \hat{\eta}\right),$$

$$\hat{A}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-(\hbar m\omega)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\hat{x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial\eta} + \hat{\eta}\right).$$

Donde $\hat{\eta} = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\hat{x}$, consecuentemente:

$$\hat{A}\hat{A}^* = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2},$$

$$\hat{A}^*\hat{A} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}.$$

Como ψ_0 es la función propia correspondiente al nivel menor de energía E_0, tenemos que: $\hat{A}\psi_0 = 0$, esto es,

$$\frac{d\psi_0}{d\eta} + \eta\psi_0 = 0,$$

cuya solución normalizada la podemos escribir así:

$$\psi_0(\eta) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \ .$$

Todas la demás funciones propia ψ_n las podemos calcular de ψ_0 aplicando de manera sucesiva el Operador Creador $\hat{A}^*$, de esta manera ψ_n es proporcional a $\left(\hat{A}^*\right)^n \psi_0$.

Ahora hagamos la siguiente observación:

$$\left\langle \hat{A}^*\psi_n|\hat{A}^*\psi_n \right\rangle = \left\langle \psi_n|\hat{A}\hat{A}^*\psi_n \right\rangle = \left\langle \psi_n| \left(\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)\psi_n \right\rangle = (n+1) < \psi_n|\psi_n > .$$

por lo que si ψ_n está normalizada, también lo estará $\psi_{n+1} = (n+1)^{-\frac{1}{2}}\hat{A}^*\psi_n$.

Así tenemos esto:

$$\psi_n = (n!)^{-\frac{1}{2}} \left(\hat{A}^*\right)^n \psi_0 = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{d}{d\eta} + \eta\right)^n exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right),$$

este resultado se simplifica usando las identidades de los operadores:

$$\left(-\frac{d}{d\eta} + \eta\right) = -e^{\frac{\eta^2}{2}}; \qquad \text{y } \left(-\frac{d}{d\eta} + \eta\right)^n = (-1)^n e^{\frac{\eta^2}{2}} \frac{d^n}{d\eta^n} e^{-\frac{\eta^2}{2}}$$

tenemos la expresión final para las funciones propias ψ_n:

$$\psi_n = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \left[(-1)^n e^{\eta^2} \frac{d^n}{d\eta^n} e^{-\eta^2}\right] = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} H_n(\eta) \ , n = 0, 1, 2, ...$$

donde la expresión entre corchetes define a $H_n(\eta)$, los $polinomios\ de\ Hermite$ de grado n. ■

11. Bibliografía.

[1] Introduction to Hilbert Spaces with Applications, *Lokenath Debnath & Piotr Mikusinski*.
University of Texas, University of Central Florida. *Elsevier Academic Press*.
Capítulos: 1, 3, 4 y 7.

[2] An Introduction to Hilbert Spaces, *Nicholas Young*.
Glasgow University, *Cambridge University Press*.
Capítulos: 1, 2, 3, 4, 7 y 8.

[3] Introduction to Hilbert Spaces, *Sterling K. Berberian*.
University of Texas at Austin, *Chelsea Publishing Company*.
Capítulos: II, III, IV, VI, VII y VIII.

[4] Functional Analysis, *George Bachman*, *Lawrence Narici*.
Polytechnic Institute of Brooklyn NY. *Academic Press*.
Capítulos: 1,3,10, 22 y 23.

[5] The Elements of Integration and Lebesgue Measure, *Robert G. Bartle*.
Eastern Michigan university and University of Illinois, *Wiley Classics Library*.
Capítulos: 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

[6] Lebesgue Integration on Euclidean Space, *Frank Jones*.
Rice University, *Jones and Bartlett Publishers*.
Capítulo 10.

[7] Applied Functional Analysis, *D. H. Griffel*.
University of Bristol, *Dover Publications Inc*.
Capítulos: 1, 4, 7, 8 y 9.

[8] Elements of Applicable Functional Analysis, *Charles W. Groetsch*.
University of Cincinnati, *Marcel Dekker Inc*.
Capítulos: I, II, III y IV.

[9] Introductory Functional Analysis with Applications, *Erwin Kreyszig*.
University of Windsor, *Wiley Classics Library*.
Capítulos: 1, 2, 3, 8, 9, 10 y 11.

[10] Linear Operator Theory in Engineering and Science, *Arch W. Naylor*, *George R. Sell*.
University of Michigan, University of Minnesota, *Springer*.
Capítulos: 12, 14, 15, 17, 21, 22, 23, 24 y 25.

[11] Mathematical Methods for Physicists, *George B. Arfken*, *Hans J. Weber*.
Miami University (Oxford Ohio), University of Virginia, *Elsevier Academic Press*.
Capitulos: 10, 12 y 15.

[12] Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems, *Murray R. Spiegel*.
Polytechnic Institute of Connecticut, *Schaum´s Outline Series*, *McGraw − Hill Book Company*.
Capítulos: 2 y 3.

[13] Teoría de Operadores con Aplicaciones a la Física, *Juan Hector Arredondo*.
Universidad Autónoma Metropolitana, UAM-I. *Libros de Texto*, *Manuales de Prácticas y Antologías*.
Capítulos: I, II y III.

[14] Elements of Functional Analysis. *L. A. Lusternik, V. J. Sobolev.*
Traducido del Ruso por: *Anthony E. Labarre, H. Ward Crowley, Herbert Izbicki.*
University of Idaho, University of Vienna. *John Wisley & Sons Inc.*
Capítulo 7.

[15] Introduction to Quantum Mechanics. *P. T. Matthews F.R.S.*
Imperial College, London. *McGraw – Hill Publishing Company.*
Capítulos: 2, 3, 5, 6 y 12.

[16] Quantum Mechanics. *John L. Powell, Bernd Crasemann*
University of Oregon. *Addison – Wesley Publishing Company, Inc.*
Capítulos: 2, 5, 6, 7, 9 y 10.

[17] Lectures on Quantum Mechanics. *Gordon Baym.*
University of Illinois. *The Benjamin/Cummings Publishing Company.*
Capítulo 3.

[18] Quantum Mechanics. *A. A. Sokolov, Y. M. Loskutov, I. M. Ternov.*
The City College of the City University of New York,
Moscow State University. *Holt Rinehart and Winston Inc.*
Capítulos: 4 y 7.

[19] Principles of Quantum Mechanics. *D. I. Blokhintsev.*
The Washington University. *Allyn and Bacon Inc.*
Capítulos: III y X.

[20] Quantum Mechanics. *Eugen Merzbacher.*
University of North Carolina at Chapel Hill. *John Wiley & Sons Inc.*
Capítulos: 3 y 11.

[21] Introducción a la Mecánica Cuántica. *Daniel T. Gillespie.*
Editorial Reverté.
Capítulos: 2 y 4.

[22] Quantum Mechanics. *Leonard I. Schiff.*
Stanford University. *McGraw – Hill Book Company.*
Capítulos: 2 y 3.

[23] Quantum Theory. *David Bohm.*
University of London. *Dover Publications Inc.*
Capítulo 14.