

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias



Titulo

T E S I S

para obtener el grado de Licenciado en Física

Autor:

Benjamín Jairo Dominguez Olvera

Director:

Dr. Arturo Quintanar Isaias

2012, CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

GENERACIÓN DE MODELOS NUMÉRICOS DE AGUAS
SOMERAS COMO APOYO A LA DOCENCIA EN
DINÁMICA DE FLUIDOS GEOFÍSICOS

*Dedicado a
mis padres
Yolanda y Benjamín*

Agradecimientos

Agradezco a Leonor por todo su amor y cariño. Agradezco a mis padres por todo su cariño y apoyo. Agradezco a Arturo Quintanar por toda su paciencia, tiempo, comentarios e ideas, para esta Tesis y en general por toda su ayuda y amabilidad.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Porque el modelo de aguas someras	3
2. Fundamentos de La Dinámica Fluidos	5
2.1. Coordenadas Eulerianas y Lagrangianas	5
2.2. Principios de Conservación	7
2.3. Teorema de Reynolds	7
2.4. Conservación de masa	11
2.5. Conservación de Momento	12
2.6. Conservación de energía	16
3. Derivación de las ecuaciones de Aguas someras	17
3.0.1. Ecuación de Continuidad para el modelo de Aguas Someras	18
3.0.2. Ecuación de Momento para la las ecuaciones de SW	20
3.1. Ecuaciones lineales para el modelo de Aguas Someras	22
3.1.1. Problema unidimensional	23
3.1.2. Ecuaciones bidimensionales	31
3.1.3. Solución analítica	32
3.2. Conservación de la Energía en el caso Bidimensional	34
3.3. Ecuaciones lineales considerando la fuerza de Coriolis	34
3.3.1. Solución Analítica en el caso bidimensional con rotación	35
3.3.2. Relación de dispersión	36
3.3.3. Conservación de la energía en el caso bidimensional con rotación	37
4. Discretización	39
4.1. Malla de Arakawa	40
4.2. Malla C unidimensional	40
4.2.1. Condiciones de Frontera	41
4.3. Malla C bidimensional	42
4.4. Discretización de las ecuaciones bidimensionales	43

4.4.1. Condiciones de Frontera	43
4.4.2. Discretización de las ecuaciones bidimensionales con Rotación	45
4.5. Filtros y Métodos de discretización en el tiempo	47
4.5.1. Método Trapezoidal de Adams-Bashforth	48
5. Resultados	49
5.1. Comparación de la solución analítica y numérica	49
5.1.1. Caso Unidimensional	49
5.1.2. Caso bidimensional	51
5.1.3. Caso Bidimensional con Rotación	54
6. Conclusión	57
A. Código Unidimensional	61
B. Código Bidimensional	67
C. Código Bidimensional con Rotación	73

Capítulo 1

Introducción

Actualmente los métodos numéricos representan una herramienta cada vez más poderosa para responder preguntas fundamentales en las áreas afines a la dinámica de fluidos. Las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el movimiento en un fluido son notoriamente difíciles de resolver en términos de soluciones analíticas con las herramientas del análisis matemático moderno. Por otra parte, en dinámica de fluidos, ingeniería, oceanografía, meteorología y reología surgen problemas cuya complejidad es de una magnitud casi inimaginable. Por ello, el desarrollo de técnicas de discretización de las ecuaciones gobernantes constituye nuestra mejor opción para atacar problemas de naturaleza compleja que afectan todas las actividades de la sociedad.

La solución numérica de una ecuación diferencial parcial conlleva un problema que se puede atacar por diferentes ángulos y con métodos distintos. El primer problema que surge cuando se tiene una ecuación diferencial parcial con condiciones iniciales y de frontera es el de traducir, esta, a una forma algebraica en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para que este proceso de discretización sea efectivo y preserve la información contenida en el sistema de ecuaciones original, es importante que los métodos de discretización preserven el mayor número posible de invariantes conocidos del sistema. Esto garantiza que al final del proceso de discretización, el sistema de ecuaciones final represente con la mayor fidelidad el sistema original.

En la actualidad, los métodos de discretización más utilizados se pueden representar en dos grandes grupos: en un grupo están las diferencias finitas y el volumen finito y en otro, la familia de métodos basados en el método de descomposición de Galerkin tales como métodos espectrales en la esfera y de elemento finito entre los más utilizados. Por otro lado, el problema de la discretización de las ecuaciones originales está ligado íntimamente a la naturaleza de los problemas computacionales específicos que estos definen. Así, algunos métodos arrojan soluciones que preservan la fidelidad de las soluciones analíticas, por ejemplo, pero a un costo

computacional prohibitivo. En otros casos, una solución computacional eficiente puede contener un grado de inexactitud o inestabilidad que en los rangos de aplicación puede resultar ser más útil que una más costosa y más cercana a la solución real.

El siguiente paso después de haber hecho una discretización aceptable del problema original, es elaborar un código que en forma recursiva obtenga la solución discreta en cada paso de tiempo y en cada elemento de malla computacional. En esta etapa, una nueva clase de problemas surge, la cual tiene que ver con la eficiencia del algoritmo computacional. Un ejemplo de este importante aspecto del desarrollo de soluciones numéricas es el gran contraste en términos de tiempo de CPU que surge de la comparación entre código operado por un solo proceso y el mismo operado por múltiples procesadores. El paradigma del cómputo paralelo que explota múltiples procesos al mismo tiempo, comunicando información entre sí, será, sin duda, la nueva herramienta que permitirá explorar y analizar las soluciones a problemas complejos en el área de dinámica de fluidos. Un ejemplo del desarrollo actual en esta área es el uso de códigos paralelizados con plataforma computacionales basadas en tarjetas gráfica (GPU). Esta nueva arquitectura computacional permite acelerar significativamente el cómputo de problemas complejos utilizando tarjetas gráficas que pueden llegar a tener varios miles de procesos trabajando en paralelo.

El presente trabajo pretende ofrecer una introducción didáctica a la discretización de ecuaciones relacionadas con los problemas de la dinámica de fluidos geofísicos y a la elaboración del código de las ecuaciones relacionadas con estos problemas. En otras palabras el presente trabajo ofrece una guía didáctica sobre el proceso de discretización de ecuaciones y la elaboración de un código. Este texto está orientado a alumnos de Física, Ingeniería o Ciencias de la Tierra que quieran tener un panorama de la dinámica de fluidos computacionales. El presente texto pretende ser lo más sencillo posible, a fin de que se constituya en un manual de uso práctico, y en el cual el lector pueda consultar información sobre la clase de problemas que se presentan al realizar cualquier código numérico. El texto incorpora el proceso de discretización y la elaboración del código de principio a fin cosa que no siempre podemos encontrar fácilmente en artículos especializados o incluso en textos universitarios sobre el tema. Un resultado esperado de esta tesis es que a partir de este texto, los estudiantes puedan unificar sus conocimientos de Física y Métodos Numéricos. de tal forma que puedan discretizar, programar y validar sus propios modelos.

1.1. Porque el modelo de aguas someras

El modelo de aguas someras es uno de modelos mas ampliamente usados en la dinámica de fluidos geofísicos. Es un modelo muy útil para explicar procesos atmosféricos y oceanográficos, por lo que existe una gran cantidad de literatura científica al respecto. Debido a lo anterior, uno de los propósitos de este trabajo es proporcionar una introducción didáctica al estudio detallado de este modelo, el cual sirva como guía para estudiantes que deseen tanto entender el modelo, como entender la discretización y codificación del mismo.

El modelo de aguas someras se deriva de las ecuaciones de Navier-Stokes. A grandes rasgos esta derivación se logra haciendo una integración en la vertical (como se ve a detalle en el capítulo 3 del presente trabajo). A partir de esa derivación existen muchas formas en las que podemos poner las ecuaciones de aguas someras. Podemos incluir la rotación de la tierra, la viscosidad, podemos considerar solo los términos lineales, podemos considerar el esfuerzo del viento sobre la superficie, los efectos de la batimetría, etc. En general todas estas formas contienen por lo menos dos ecuaciones:

- La ecuación de Momento
- La ecuación de continuidad

Las ecuaciones lineales sin el término de rotación (el parámetro f de Coriolis) dan lugar a ondas no dispersivas que solamente se encuentran bajo la acción del campo gravitacional, y que además conservan la energía. A estas Ondas les llamamos Ondas de Gravedad. Cuando agregamos el término de Coriolis f , (sin considerar la esfericidad de la tierra, $f = cte$), la solución del sistema que obtenemos nos genera ondas de Gravedad Inerciales. En este trabajo derivamos la forma mas general de las ecuaciones de aguas someras y posteriormente derivamos la forma mas sencilla. Esta forma sencilla es la forma lineal, unidimensional y sin rotación. En el capítulo 6 comparamos la solución numérica de este sistema con la solución analítica.

Cuando pasamos a las ecuaciones bidimensional uno de los enfoques mas citados en la literatura científica, es el propuesto por Akio Arakawa [5], para la construcción de una malla bidimensional. Arakawa propuso una serie de mallas en las cuales se pueden calcular las ecuaciones de Momento y Continuidad. Cada una de las cantidades necesarias (elevación de la superficie, Velocidad en x etc) se calcula en punto diferente dependiendo de la Malla. Una de las mallas mas usadas en la literatura para el modelo de aguas someras es la malla C. Sin embargo es sabido que para los términos de rotación (término de Coriolis), la malla C es menos precisa (Beckers, 1993 [9]), como se ve en el Capitulo 4 del presente trabajo es preciso hacer un promedio. Sin embargo la malla C nos ofrece la ventaja de poder

poner las condiciones de frontera de una superficie material de manera muy sencilla(Capitulo 4). Finalmente al llegar al modelo bidimensional incluyendo el término de rotación, comparamos la estabilidad que tienen diferentes discretizaciones en el tiempo, permitiendo encontrarla malla más adecuada en términos de estabilidad y precisión.

Capítulo 2

Fundamentos de La Dinámica Fluidos

2.1. Coordenadas Eulerianas y Lagrangianas

La posición de una partícula desde el origen O tiene asignado un vector de posición $\vec{x} = (x, y, z)$. Cualquier descripción del sistema que este en términos de estas variables que dependa de \vec{x} y de t , es decir que sea de la forma $q(\vec{x}, t)$ es lo que llamamos una descripción euleriana del fluido. Otra descripción del fluido es posible si consideramos un volumen que contiene el mismo número de partículas del fluido, en cuyo caso basta que se determine la evolución de ese volumen de control en el espacio y en el tiempo, a este tipo de descripción le llamamos Lagrangiana. En este caso, es importante destacar que siempre estaremos siguiendo a las mismas partículas dentro del volumen de control. Por ejemplo consideremos un caso unidimensional. En el que tenemos un observador fijo en el punto x que observa una propiedad del sistema $q(x, t)$ al tiempo t . Supongamos además que esta propiedad $q(x, t)$ es una propiedad que se conserva. (Ver figura 2.1):

Después de un tiempo δt el observador fijo observa la propiedad $q(t + \delta t)$ de tal forma que el cambio en tiempo es:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{q(x, t + \delta t) - q(x, t)}{\delta t} = \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_x$$

Por conservación de q , tenemos que:

$$q(x, t + \delta t) = q(x - \delta x, t)$$

Lo cual podemos ver en la figura 2.1.

Haciendo una aproximación de Taylor tenemos que:

$$q(x - \delta x, t) = q(x) + \frac{\partial q}{\partial x}(-\delta x) \tag{2.1}$$

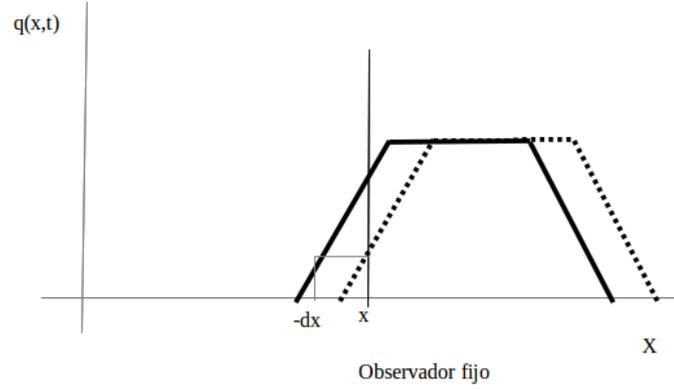


Figura 2.1: Observador fijo en la posición x

Observemos que:

$$q(x - \delta x, t) = q(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x}(-\delta x) \quad (2.2)$$

Sustituyendo la expresión 2.1 en 2.1 obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(q(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x}(-\delta x) - q(x, t))}{\delta t} = \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_x \quad (2.3)$$

De tal forma que obtenemos:

$$\frac{\delta x}{\delta t} \frac{\partial q}{\partial x} = \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_x \quad (2.4)$$

Como estamos tomando el límite entonces la cantidad $\frac{\delta x}{\delta t} = u$, de tal forma que la cantidad que nos queda finalmente es:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_x + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

Generalizando a tres dimensiones obtenemos:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla q \quad (2.6)$$

El término $\mathbf{u} \cdot \nabla q$ representa el transporte de q (en el léxico de la meteorología y oceanografía se le llama término de advección) y está relacionado con la velocidad \mathbf{u} a la que se está transportando la propiedad q en un fluido. Definimos la *derivada material* como:

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla q. \quad (2.7)$$

La derivada material es también llamada la derivada Lagrangiana pues nos dice el cambio que hay de cierta propiedad cuando vamos siguiendo las partículas (o al volumen de control) a través del tiempo. En este caso como vemos en la figura 2.1 el pulso no va cambiando a través del tiempo, es decir si seguimos ese pulso, este no se deforma través del tiempo lo cual quiere decir que la derivada material es cero (ecuación 2.8).

$$\frac{Dq}{Dt} = 0 \quad (2.8)$$

2.2. Principios de Conservación

En la dinámica de fluidos se manejan varios principios que son comunes en diferentes áreas de la Física. Estos principios son los principios de conservación o leyes de conservación, los cuales constituyen la columna vertebral de la Dinámica de Fluidos. Los principios son los siguientes:

Conservación de Masa.

Conservación de Momento.

Conservación de Energía.

Para derivar los principios básicos de conservación es necesario el concepto de volumen de control. El volumen de control es un volumen arbitrario en el cual se aplica una integral de cada uno de los principios de conservación. El volumen de control se va deformando continuamente a través del tiempo, de tal modo que es preciso analizar el cambio de volumen y los flujos que existan a través de las paredes del volumen de control.

2.3. Teorema de Reynolds

Una de los teoremas mas importantes es el *Teorema de Reynolds* el cual nos dice como cambian las propiedades extensivas a través del tiempo dentro de un volumen de control. Supongamos que observamos un volumen de control desde el punto de vista lagrangiano (siguiendo al volumen de control) y queremos analizar como

cambia a través del tiempo. También queremos analizar como cambia una cierta propiedad α intensiva (densidad, velocidad momento por unidad de volumen, energía por unidad de volumen) dentro del volumen de control para ello tomamos la derivada material de la integral de α en V , es decir:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV \quad (2.9)$$

Este es el cambio total de la propiedad $\alpha(t)$ dentro del volumen de control a través del tiempo. Ahora podemos escribir la definición de la derivada de la siguiente manera:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV = \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) \right] dV \quad (2.10)$$

Si sumamos la cantidad $\int_{V(t)} \alpha(t + \delta t)$ a la expresión 2.10 y la restamos, nos queda:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV = \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) - \int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) + \int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) - \int_{V(t)} \alpha(t) \right] dV \quad (2.11)$$

Podemos separar la expresión 2.11 en dos partes de tal forma que nos queda:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV = \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) - \int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) + \int_{V(t)} [\alpha(t + \delta t) - \alpha(t)] \right] dV \quad (2.12)$$

El término de la derecha es la derivada parcial respecto a t

$$\int_{V(t)} \frac{1}{\delta t} [\alpha(t + \delta t) - \alpha(t)] dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \quad (2.13)$$

Los dos términos resultantes en el lado derecho de 2.12, que tienen como integrando $\alpha(t + \delta t)$ se pueden analizar a partir de la figura 2.2. Tanto en la parte I del volumen de control (gris oscuro) como en la parte III, podemos considerar una sección del volumen. Si nos fijamos en la parte III, en donde ocurre un flujo hacia afuera ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} > 0$) podemos reescribir dV la diferencial de volumen en términos de la longitud, $d\mathbf{l} = \mathbf{u}\delta t$ y del área $d\mathbf{A} = dA\mathbf{n}$ de tal forma que:

$$dV = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \delta t \quad (2.14)$$

Hacemos lo mismo para la sección de volumen de la parte I el único cambio es que ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} < 0$).

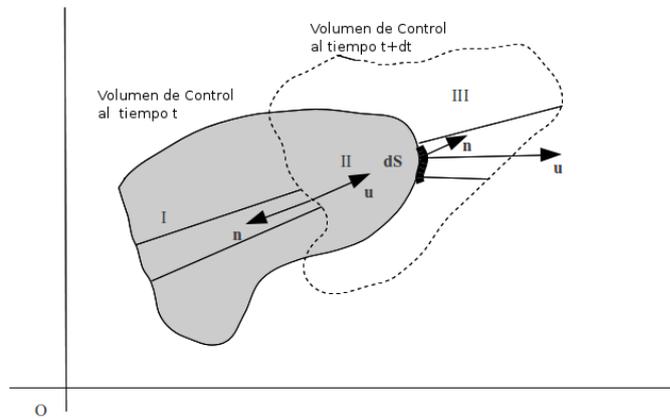


Figura 2.2: Volumen de Control deformándose después de un tiempo $t+dt$

Si sustituimos este valor en la integral de la izquierda de la expresión 2.12 nos queda una integral de superficie:

$$\int_{V(t+\delta t)-V(t)} \alpha(t + \delta t) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \int_{S(t)} \alpha(t + \delta t) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.15)$$

Al tomar el límite cuando δt tiende a cero, y usando el Teorema de Gauss para convertir la integral de Área en una integral de Volumen, nos queda que:

$$\int_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot (\alpha(t) \mathbf{u}) dV \quad (2.16)$$

Finalmente juntando las expresiones (2.10),(2.13) y (2.16) llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha(t) dV = \int_V \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) \right] dV = 0 \quad (2.17)$$

La expresión 2.17 es el Teorema de Reynolds en donde recordemos, α es alguna propiedad dentro del volumen de control (que puede ser masa, momento o energía), por lo tanto con el teorema de Reynolds podemos ver como cambia una propiedad $\alpha(t)$ en el tiempo. En la expresión 2.17 podemos ver que existe una relación de la derivada Lagrangiana con las derivadas Eulerianas.

2.4. Conservación de masa

El principio de conservación de masa establece que la masa de un sistema no cambia a través del tiempo.

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \quad (2.18)$$

Si aplicamos el Teorema de Reynolds (2.17) a la expresión (2.18) (que expresa la conservación de la masa para un volumen de control) nos queda que :

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = 0, \quad (2.19)$$

En donde la integral de volumen :

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = 0, \quad (2.20)$$

Se cumple para un volumen arbitrario, por lo que el integrando necesariamente es cero. Así podemos obtener la forma diferencial de la conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.21)$$

El cual está en términos de las derivadas eulerianas. Es preciso mencionar que si la derivada Lagrangiana de la conservación de la masa no fuera cero entonces querría decir que en el volumen de control la cantidad de masa esta creciendo o decreciendo. La ecuación 2.21, la podemos escribir en forma tensorial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0 \quad (2.22)$$

Desarrollando el segundo término nos queda que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2.23)$$

En la mayor parte de los fluidos $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$ es decir $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, si los seguimos desde el punto de vista lagrangiano, no solamente su masa permanecerá constante si no también su volumen y por lo tanto su densidad, de ahí que:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.24)$$

Usando la definición de *derivada material* de la ecuación 2.7, vemos que:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho = 0 \quad (2.25)$$

Lo cual corresponde a los primeros dos términos del lado derecho de la expresión 2.23, por lo tanto tenemos que:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u_k \frac{\partial\rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.26)$$

Como la densidad nunca es cero entonces $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, lo cual tiene un significado físico muy importante, pues por un lado quiere decir que el fluido es incompresible, situación que se presenta mucho en la naturaleza, y por otro lado, quiere decir que la rapidez de deformación volumétrica es cero.

2.5. Conservación de Momento

Siguiendo la misma idea que en la conservación de masa escribimos la conservación de momento para un volumen de control:

$$\frac{DP}{Dt} = \{\text{las Fuerzas que actúan sobre el V.C.}\} \quad (2.27)$$

Recordamos que la segunda ley de Newton escrita en términos del momento, establece que el cambio de momento es igual a la suma de las fuerzas que están actuando sobre un cuerpo, en este caso es sobre el volumen de control. Podemos escribir el momento en términos de la densidad y el volumen, lo cual es mas conveniente para un fluido, y además aplicar el teorema de Reynolds. De esa forma, podemos llegar a la siguiente expresión:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right] dV = \{\text{Suma de Fuerzas sobre V.C}\}, \quad (2.28)$$

Las fuerzas que actúan sobre un volumen de control en un fluido son de dos tipos básicamente: Fuerzas de contacto o fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo ("body forces") o fuerzas que actúan a distancia. Las fuerzas de cuerpo son por ejemplo la gravedad o eléctrica que no necesitan un medio de contacto directo con el cuerpo para ejercer la fuerza, mientras que las fuerzas de contacto, como su nombre lo dice, son proporcionales al área de contacto y muchas de estas fuerzas actúan en el sentido contrario al movimiento.

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right] dV = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_B \quad (2.29)$$

En donde los subíndices se refieren a S de superficie y B de cuerpo, por sus siglas en inglés. Estas fuerzas las podemos escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_B = \int \mathbf{P}_S dS + \int \rho \mathbf{f}_V dV. \quad (2.30)$$

En donde \mathbf{P} es la fuerza por unidad de área, y \mathbf{f} es la fuerza por unidad de masa. La fuerza \mathbf{P} por unidad de área depende de la normal a la superficie en cada una de las direcciones, n_i y del tensor de esfuerzos "stress tensor" σ_{ij} de la siguiente forma: $P_j = \sigma_{ij} n_i$. De tal forma que podemos escribir la ecuación anterior 2.29, finalmente como:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right] dV = \int \mathbf{P}_S dS + \int \rho \mathbf{f}_V dV. \quad (2.31)$$

Ahora es necesario escribir algunas de las expresiones vectoriales que hemos deducido hasta el momento, en forma tensorial, empezaremos con la expresión 2.31. Su forma tensorial es la siguiente:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k u_j)}{\partial x_k} \right] dV = \int_S \sigma_{ij} n_i dS + \int_V \rho f_j dV \quad (2.32)$$

Podemos aplicar el teorema de Gauss al primer término del lado derecho de la ecuación 2.32, de tal forma que todos los términos son integrales de volumen.

$$\int_S \sigma_{ij} n_i dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV, \quad (2.33)$$

De esta forma podemos considerar que como esta expresión es válida para un volumen arbitrario, entonces la expresión dentro del integrando también es válida, de tal forma que nos queda:

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k u_j)}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j \quad (2.34)$$

Ahora es necesario incluir una hipótesis física para entender qué es el tensor de esfuerzos σ_{ij} . Un fluido *Newtoniano* es aquel que su tensor de esfuerzos se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} \mathbf{P} + \tau_{ij} \quad (2.35)$$

En donde τ_{ij} es el *tensor de rapidez de deformación* ("deformation-rate tensor"), en el cual 6 de sus 9 componentes dependen linealmente de la *rapidez de deformación por esfuerzo cortante* mediante el coeficiente μ de viscosidad, esta última relación es un hecho experimental. Un fluido *no newtoniano* es aquel en el que

no existe una relación lineal entre la *rapidez de deformación por esfuerzo cortante* y el *tensor de rapidez de deformación*. El *tensor de rapidez de deformación*, ("shear stress tensor [1]") τ_{ij} esta formado por dos cantidades físicamente muy importantes:

- *rapidez de deformación volumétrica*
- *rapidez de deformación por esfuerzo cortante*

Muchos autores utilizan la letra σ_{ij} [3], para denominar la *rapidez de deformación volumétrica*, es decir las componentes normales del tensor τ_{ij} , sin embargo aquí usaremos la notación del libro de la referencia [1], en el que σ_{ij} es, como hemos dicho antes el *tensor de esfuerzos*. De esta forma el tensor de esfuerzos toma en cuenta todas las fuerzas de superficie (presión, esfuerzo cortante). El tensor de rapidez de deformación τ_{ij} es muy interesante, y es posible desarrollar la forma de cada uno de sus términos, en forma vectorial o tensorial. El desarrollo no lo haremos en este texto, ya que dichos desarrollos se pueden consultar en las referencias [1] y [2]. Como se menciona en [1], la forma tensorial de τ_{ij} , es:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.36)$$

En donde μ y λ son coeficientes que se determinan experimentalmente. Por lo tanto si sustituimos 2.36 en el primer término del lado derecho de la ecuación 2.32, nos queda:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-\delta_{ij} p + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.37)$$

Para la delta de Kronecker δ_{ij} , nos quedamos únicamente con el caso $i = j$, pensando en que la j es el índice libre, que representa las tres ecuaciones de momento, aplicamos la parcial de cada uno de los términos y nos queda:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.38)$$

Como vimos en la sección 2.4 en la expresión 2.26, en la mayoría de los fluidos se observa que el término $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, que en su forma tensorial es justamente $\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = 0$. Además el tercer término de la ecuación 2.38 lo podemos simplificar, de la siguiente forma:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial^2 x_i} \quad (2.39)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial^2 x_i} \quad (2.40)$$

Pero $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = 0$, por lo que:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial^2 x_i} \quad (2.41)$$

Finalmente la expresión 2.37, la escribimos como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial^2 x_i} \quad (2.42)$$

Recuperando la expresión 2.32 y combinándola con esta última expresión, la ecuación de conservación de momento queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k u_j)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial^2 x_i} + \rho f_j \quad (2.43)$$

Es preciso mencionar que para llegar a la expresión 2.43 fue necesaria la hipótesis de incompresibilidad del fluido $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. La *ecuación de conservación de momento* tiene varias formas, y todas ellas son muy útiles. Si desarrollamos los primeros dos términos de la derecha de la ecuación 2.43, nos queda:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = \quad (2.44)$$

$$u_j \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_k} = \quad (2.45)$$

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_k} = \quad (2.46)$$

En donde el segundo y cuarto términos forman la derivada material de ρ , la densidad, que se escribe $\frac{D\rho}{Dt}$, multiplicada por u_j . Esta expresión se revisó en la sección anterior (ecuación 2.26). Si es incompresible, entonces la densidad tampoco cambia desde el punto de vista lagrangiano. Juntando la expresión 2.46 y 2.43, nos queda otra forma de la conservación de momento:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial^2 x_i} + \rho f_j \quad (2.47)$$

Cuya forma vectorial es:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \mathbf{p} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \quad (2.48)$$

Si además despreciamos los efectos viscosos, llegamos a la llamada *ecuación de Euler*:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \mathbf{p} + \rho \mathbf{f} \quad (2.49)$$

2.6. Conservación de energía

En esta sección utilizaremos la primera ley de la termodinámica:

$$\delta e = \delta w + \delta q \quad (2.50)$$

Esto quiere decir que durante un proceso en equilibrio que ocurre en un sistema en el que existe una variable de estado e (que representa la energía interna) la cantidad de trabajo hecho sobre el sistema δw más el calor añadido al sistema δq es igual al cambio en la energía interna δe del sistema. Para aplicar el principio de conservación de energía a un volumen de control se considera que la energía de un fluido consta de dos partes: la energía intrínseca o interna, e y la energía cinética $\frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. De tal forma que el principio de la *conservación de la energía* para un volumen de control queda de la siguiente manera: La tasa de cambio de la energía dentro de un fluido es igual a la tasa con la que el trabajo esta siendo hecho sobre el volumen de control mas la tasa a la que el calor esta siendo añadido al volumen de control. Recordemos que el trabajo depende del numero de fuerzas que actúan sobre el volumen de control, en este caso, como mencionamos en la sección anterior 2.29 las fuerzas que actúan sobre el volumen de control son las fuerzas de cuerpo \mathbf{F} y las fuerzas de superficie \mathbf{F} , es decir que el trabajo sobre el volumen de control se divide en dos partes. Recordemos, también que el trabajo requiere de una fuerza para actuar a distancia. De tal forma que, cuando una fuerza \mathbf{F} actúa sobre un elemento de área $d\mathbf{s}$, el trabajo esta dado por:

$$w = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.51)$$

Para obtener la tasa con la que el trabajo esta siendo hecho sobre el sistema debido a la Fuerza \mathbf{F} , calculamos:

$$\delta w = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{\delta t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad (2.52)$$

Por lo que la tasa con la que el trabajo es realizado sobre el volumen de control sería la contribución de las fuerzas de superficie $\int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}$, (donde $\mathbf{P} = \sigma_{ij}n_i$) mas la contribución de fuerzas de cuerpo $\int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV$, más la tasa con la que el calor esta siendo añadido al sistema. Con estas ideas en mente escribimos la conservación de la energía, de la siguiente forma.

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) dV = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} ds + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.53)$$

Utilizando la conservación del Momento y la ecuación de continuidad podemos escribir la conservación de la energía en forma tensorial:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (2.54)$$

Capítulo 3

Derivación de las ecuaciones de Aguas someras

El modelo de aguas someras, **SWE** por sus siglas en inglés (Shallow Water Equations), se deriva de las ecuaciones de Navier Stokes. Es necesario hacer varias aproximaciones y aplicar las condiciones de frontera adecuadas, en cada caso. El nombre de aguas someras o poco profundas se deriva de la consideración de que las escalas horizontales (que denotaremos con \mathbf{L}) son muchos ordenes de magnitud por arriba de las escalas verticales, \mathbf{D} , por lo que el factor: $\delta = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{L}}$ es muy pequeño. Por tanto la condición fundamental que caracteriza las aguas someras es:

$$\delta = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{L}} \ll 1 \quad (3.1)$$

Ahora consideremos el siguiente esquema:

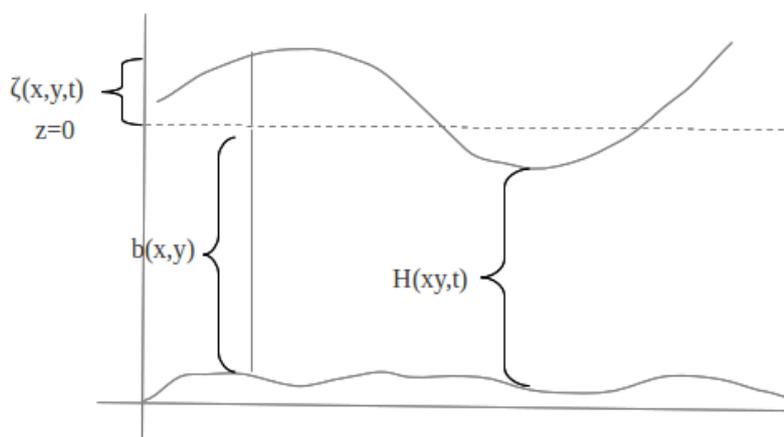


Figura 3.1: Elevación y batimetría en el esquema de SWE

Como podemos ver en la figura 3.1, la profundidad total H es :

$$H(x, y, t) = \zeta(x, y, t) + b(x, y) \quad (3.2)$$

ζ Es la elevación de la superficie y b es la batimetría, que es la forma del fondo. Para derivar el modelo las ecuaciones de **SW** comenzamos, igual que para las ecuaciones de Navier-Stokes, por la ecuación de continuidad.

3.0.1. Ecuación de Continuidad para el modelo de Aguas Someras

Consideraremos que el sistema físico es un flujo incompresible y que las condiciones de frontera $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ tendrán que ser especificadas en la superficie ζ y en el fondo b . Esta es la expresión $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ esto es que la componente normal de la velocidad en el fondo es cero, no hay flujo normal.

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} = u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w(-b) = 0 \quad (3.3)$$

La normal la escribimos como la dirección de máximo cambio sobre una curva, por lo que $\mathbf{n} = \nabla b$, en el fondo. Además, el término $\frac{\partial b}{\partial z}$, es uno, pues en el fondo b y z son la misma variable. Por otro lado consideramos también que para una superficie libre se considera que una partícula en la superficie siempre permanecerá en la superficie. Esto significa que si observamos a la partícula desde un esquema Lagrangiano, y seguimos a la a la partícula en la superficie, entonces no observaremos ningún cambio. De tal forma que la variable que describe los cambios en la elevación ζ , es $w(\zeta)$ por lo anterior, podemos escribir que:

$$w(\zeta) = \frac{D\zeta}{Dt} = 0 \quad (3.4)$$

Esto quiere decir que:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

Recordemos que $\zeta(x, y, t)$ no depende de z por eso se eliminó el término en z . Ahora tomamos la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, y tomando en cuenta que u y v no dependen de z , integramos la ecuación de continuidad del fondo hasta la superficie:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

Integrando

$$\int_{-b}^{\zeta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = - \int_{-b}^{\zeta} dw. \quad (3.7)$$

Lo cual nos da que:

$$(\zeta + b) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - [w(\zeta) - w(-b)]. \quad (3.8)$$

$$H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - [w(\zeta) - w(-b)]. \quad (3.9)$$

Sustituimos las expresiones 3.3 y 3.5 en la expresión 3.9, de tal forma que obtenemos:

$$H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} \right] \quad (3.10)$$

La batimetría $b(x, y)$, no depende del tiempo pues se considera que el relieve del fondo, no esta cambiando con el paso del flujo, por lo que $\frac{\partial b}{\partial t} = 0$. De tal forma que podemos escribir la expresión anterior (3.10), de la siguiente forma:

$$H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left[\frac{\partial \zeta + b}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} \right] = 0 \quad (3.11)$$

Agrupando tenemos que:

$$\frac{\partial(\zeta + b)}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + (\zeta + b) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \zeta u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta v}{\partial y} + \frac{\partial b u}{\partial x} + \frac{\partial b v}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial u(\zeta + b)}{\partial x} + \frac{\partial v(\zeta + b)}{\partial y} = 0 \quad (3.13)$$

Finalmente obtenemos que:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} = 0 \quad (3.14)$$

Esta es la ecuación de continuidad para el modelo de aguas someras.

3.0.2. Ecuación de Momento para la las ecuaciones de SW

Si tomamos la ecuación de conservación de momento de la expresión 2.43, de la sección anterior y escribimos cada una de sus componentes x, y y z , despreciando los términos de velocidad vertical, y considerando la fuerza de gravedad ("body force") en la ecuación de movimiento vertical, tenemos que:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (3.16)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (3.17)$$

Si tomamos la ecuación (3.17) y la integramos, considerando que la presión en la superficie es la presión atmosférica p_{atm} , entonces:

$$\rho g \int_{-b}^{\zeta} dz = - \int_{-b}^{\zeta} dp \quad (3.18)$$

Entonces

$$\rho g(\zeta + b) = \rho gH - (p_{atm} - p) = p - p_{atm} \quad (3.19)$$

Es decir que:

$$p - p_{atm} = \rho gH \quad (3.20)$$

Ahora si derivamos la expresión (3.20) respecto a x y respecto a y , obtenemos una expresión para el gradiente de la presión.

$$\rho g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.21)$$

$$\rho g \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.22)$$

Es preciso mencionar, que la única dirección en donde las variaciones de densidad podrían ser importantes es en la dirección vertical, sin embargo si no fuera así y la densidad no fuera constante en las direcciones horizontales, entonces la derivada 3.21 quedaría con otros términos:

$$\rho \frac{\partial gH}{\partial x} + gH \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p_{atm}}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.23)$$

Para un caso oceánico la densidad depende de la salinidad y de la temperatura. Sin embargo estas variaciones son muy pequeñas y no tienen consecuencias muy

grandes en los términos de advección de las ecuaciones de momento (3.24), (3.24) ni tampoco en los términos de viscosidad, por lo que tomaremos una densidad constante en esos términos. Es decir que el único termino en donde la densidad puede ser importante es en el término de gravedad. Esta aproximación que toma las variaciones de densidad en cuenta únicamente en el término gravitatorio se llama *Aproximación de Boussinesq* y es comúnmente usada en los flujos geofísicos. Dicho lo anterior, en esta sección solamente consideraremos la variación de la densidad en la vertical, por lo que si sustituimos las expresiones (3.21) y (3.22) en las ecuaciones de momento y consideramos la densidad como constante, entonces nos queda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -g \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (3.25)$$

Los términos de esfuerzos de las ecuaciones anteriores son complicados de tratar computacionalmente, por lo que muchas alternativas para estos términos han sido propuestas [4]. Los estreses mas importantes para el modelo de *SW* son los del fondo y la superficie. En la superficie, la fuente de esfuerzos es el viento, por lo que se han propuesto, formulas empíricas para el esfuerzo del viento y el esfuerzo del fondo [4].

$$\frac{\tau_s}{\rho_{aire}} = c_f W^2 \quad (3.26)$$

El esfuerzo del viento es la fuente de fuerza en el modelo de *SW*. La magnitud y la dirección del esfuerzo del viento en la superficie del fluido es determinado por el flujo de la atmósfera. Por lo general la velocidad del viento W es conocida. El coeficiente de arrastre, c_f , puede cambiar con la velocidad del viento [4]. Si la velocidad del viento se mide a 10 m sobre al superficie del mar, el orden de magnitud de c_f es 0.001. Si integramos las ecuaciones de momento (3.24) y (3.25) desde el fondo b hasta la superficie ζ , al igual que como integramos las ecuaciones de continuidad (3.7), llegamos a una expresión más manejable de las ecuaciones de momento para *SW*. Es preciso tomar en cuenta que para las ecuaciones de momento se toman valores promedio (promedios espaciales en la vertical) de las velocidades, las cuales son las siguientes.

$$\frac{1}{H} \int_{-b}^{\zeta} u_i dz = \overline{u_i} \quad (3.27)$$

Los términos de la forma:

$$\frac{1}{H} \int_{-b}^{\zeta} u_i u_j dz = \overline{u_i u_j} + \{\text{Términos difusivos}\} \quad (3.28)$$

Al integrar el primer término del lado derecho en las ecuaciones (3.24) y (3.25), nos queda lo siguiente:

$$g \int_{-b}^{\zeta} \frac{\partial H}{\partial x} = g \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\zeta} H = g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^2}{2} \right) = g \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} \quad (3.29)$$

Ahora podemos reescribir las ecuaciones (3.24) y (3.25), escribiendo los estreses como S_j (que son términos fuente para cada una de las componentes) y omitiendo la notación de $\bar{\mathbf{u}}$, para las velocidades promedio y despreciando los términos difusivos:

$$\frac{\partial H u}{\partial t} + \frac{\partial(H u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(H u v)}{\partial y} + \frac{1}{2} g \frac{\partial H^2}{\partial x} = S_x \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial H v}{\partial t} + \frac{\partial(H u v)}{\partial x} + \frac{\partial(H v^2)}{\partial y} + \frac{1}{2} g \frac{\partial H^2}{\partial y} = S_y \quad (3.31)$$

Y así obtenemos la forma *Conservativa*, que junto con la ecuación 3.14 forman el sistema de ecuaciones para el modelo de *SW*. Además dentro del término fuente S_j podemos agregar los términos de Coriolis, que serían $f H v$ y $-f H u$, para la ecuación de x y de y respectivamente. En donde $f = 2\Omega \sin\phi$ y ϕ es la latitud.

De tal forma que si incluimos la rotación de la tierra y despreciamos los estreses, las ecuaciones anteriores quedarían de la siguiente forma:

$$\frac{\partial H u}{\partial t} + \frac{\partial(H u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(H u v)}{\partial y} + \frac{1}{2} g \frac{\partial H^2}{\partial x} = f H v \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial H v}{\partial t} + \frac{\partial(H u v)}{\partial x} + \frac{\partial(H v^2)}{\partial y} + \frac{1}{2} g \frac{\partial H^2}{\partial y} = -f H u \quad (3.33)$$

3.1. Ecuaciones lineales para el modelo de Aguas Someras

Tomando la ecuación de continuidad (3.14) y las ecuaciones de momento (3.32, 3.33), podemos llegar a las ecuaciones lineales del modelo de aguas someras. Consideramos una pequeña perturbación a partir de un valor promedio de la altura del agua.

$$H = H_0 + H' \quad (3.34)$$

En donde H_0 es un valor fijo y H' es una pequeña perturbación de ese valor fijo. Consideramos que esta pequeña perturbación H' es dependiente del tiempo. Consideremos también una velocidad inicial v_0 y u_0 con sus respectivos valores perturbados u' y v' . De tal forma que podemos escribir lo siguiente:

$$v = v_0 + v' \quad (3.35)$$

$$u = u_0 + u' \quad (3.36)$$

Sustituimos la expresión 3.34, 3.36 y 3.35 en 3.14, y nos queda:

$$\frac{\partial(H' + H_0)}{\partial t} + \frac{\partial(H_0 u_0 + H_0 u' + H' u_0 + H' u')}{\partial x} + \frac{\partial(H_0 v_0 + H_0 v' + H' v_0 + H' v')}{\partial y} = 0 \quad (3.37)$$

Despreciando los términos cuadráticos y considerando la condición inicial para las velocidades como cero ($v_0 = u_0 = 0$), nos queda que:

$$\frac{\partial H'}{\partial t} + H_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.38)$$

Esta es la ecuación de continuidad lineal para el sistema de aguas someras. Donde H_0 es una profundidad constante y las velocidades primadas u' y v' son pequeñas perturbaciones. H' es la elevación de la superficie la cual es dependiente del tiempo. Ahora hacemos el mismo procedimiento para las ecuaciones de momento. Sustituimos 3.34, 3.36 y 3.35 en 3.32 y 3.33. De tal forma que podemos escribir las ecuaciones de Momento y continuidad, omitiendo el uso de u', v' y H' , de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g \frac{\partial H}{\partial y} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.41)$$

Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones lineales bidimensionales con los efectos de rotación. No olvidemos que en este caso el parámetro de Coriolis no está variando con la latitud de la tierra, simplemente es una constante.

3.1.1. Problema unidimensional

Las ecuaciones anteriores las podemos simplificar aún más considerando ahora el problema unidimensional y despreciando los efectos de rotación. Por lo que podemos escribir las ecuaciones de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.43)$$

Podemos ver fácilmente que si derivamos la ecuación 4.1 respecto a x , y la ecuación 4.2, respecto al tiempo, nos queda respectivamente:

$$u_{tx} = -gH_{xx} \quad (3.44)$$

$$H_{tt} = -H_0u_{xt} \quad (3.45)$$

Considerando que las parciales cruzadas son iguales podemos sustituir la primera ecuación dentro de la segunda:

$$H_{tt} = gH_0H_{xx} \quad (3.46)$$

Con lo cual podemos ver claramente que La elevación H cumple la ecuación de onda. Aplicando la misma idea para la velocidad, podemos darnos cuenta que la velocidad también cumple la ecuación de onda.

$$u_{tt} = gH_0u_{xx} \quad (3.47)$$

La solución de las dos ecuaciones representan ondas que se mueven con la misma velocidad $\sqrt{H_0g}$ y que no cambian de forma mientras se propagan, es decir, son ondas *no dispersivas*.

Solución analítica del caso unidimensional

En muchos textos de ecuaciones diferenciales [6], se utiliza la solución de D'Alambert para la ecuación de onda. La solución de D'Alambert nos ayuda a tener una idea de la solución para los puntos interiores, considerando únicamente las condiciones iniciales del problema. Dicha solución esta en función de las condiciones iniciales. Lamentablemente la solución de D'Alambert no nos permite saber como afectan las condiciones de frontera a la solución. Por tal motivo, en el presente trabajo consideramos el problema completo con condiciones iniciales y condiciones de Frontera.

El sistema de ecuaciones 4.1 nos da información de como se comporta la solución para los puntos interiores. Sin embargo necesitamos establecer que condiciones iniciales y de frontera usaremos. En el presente trabajo consideramos un fluido confinado por paredes impenetrables. Es decir las condiciones de frontera son las siguientes:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.48)$$

Lo cual nos dice que la componente normal de la velocidad es cero, y que el fluido no puede "penetrar" la superficie material. En el caso unidimensional esto se reduce a decir que la componente horizontal u en las fronteras, es cero, es decir $u(0) = 0$

y $u(L) = 0$. También consideramos que inicialmente la velocidad del fluido es cero $u(x, 0) = 0$. Finalmente, nuestra intuición física nos dice que un fluido que esta bajo la acción de la gravedad y que inicialmente su superficie es una constante horizontal, entonces el fluido permanecerá inmóvil, y sus velocidades seguirán siendo cero, es decir todo el sistema permanecerá en equilibrio, por lo que es necesario poner una condición inicial fuera del equilibrio para que el sistema empiece a oscilar alrededor de la condición de equilibrio.

El problema físico que estamos tratando establece únicamente condiciones de frontera para la velocidad. Las condiciones para la velocidad son:

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \tag{3.49}$$

Las cuales son condiciones de tipo *Dirichlet* para la velocidad. Ahora la pregunta es: ¿Y cuales son las condiciones de Frontera para la altura H ? Debido a que el sistema de aguas someras lineal unidimensional es un sistema de ecuaciones acoplado (ver 4.1 y 4.2), podemos establecer una relación entre las condiciones de Frontera de la velocidad u y las de la altura H , haciendo la siguiente observación:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=0} = \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0, 0)}{\Delta t} = 0 \tag{3.50}$$

Podemos observar en la ecuación anterior que ambos términos del numerador son cero por la condición de frontera para la velocidad. Tomando la ecuación de momento 4.1, podemos ver que:

$$0 = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=0} = -g \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=0} \tag{3.51}$$

Lo cual quiere decir claramente que la condición de frontera tipo *Dirichlet* para la velocidad u en $u(t, 0) = 0$ “ induce ” una condición de frontera tipo *Neumann* en la altura, de tal forma que $H_x(t, 0) = 0$. Es sencillo ver que lo mismo sucede para $u(t, L) = 0$, lo cual induce $H_x(t, L) = 0$. Finalmente, el problema completo para la altura es:

$$H_{tt}(x, t) = c^2 H_{xx}(x, t) \quad \text{de} \quad 0 < x < L, t > 0 \tag{3.52}$$

Donde $c^2 = gH_0$.

Condiciones de frontera tipo *Neumann*.

$$H_x(0, t) = H_x(L, t) = 0 \tag{3.53}$$

Condiciones Iniciales.

$$H(x, 0) = f(x) \quad (\text{Condición Fuera del Equilibrio}) \quad (3.54)$$

La condición inicial $f(x)$ es una función que no depende del tiempo, por lo que su derivada respecto al tiempo es cero.

$$H_t(x, 0) = \frac{\partial f(x)}{\partial t} = 0 \quad (3.55)$$

Recordemos que la condición de frontera 3.53, quiere decir que la fuerza esta dada en las fronteras. En nuestro caso esa fuerza es cero, lo cual concuerda con nuestro esquema físico, ya que no tenemos viscosidad en las paredes que contienen al fluido, y por lo tanto este se desliza libremente por las paredes.

Consideremos una variable U para representar el problema general para la altura H :

$$U_{tt}(x, t) = c^2 U_{xx}(x, t) \quad \text{de} \quad 0 < x < L, t > 0 \quad (3.56)$$

Condiciones de Frontera

$$U_x(0, t) = U_x(L, t) = 0 \quad (3.57)$$

Condiciones Iniciales

$$U(x, 0) = f(x) \quad (3.58)$$

$$U_t(x, 0) = 0 \quad (3.59)$$

El problema anterior puede ser resuelto analíticamente mediante separación de variables. Consideramos que la solución $U(x, t)$, puede ser un producto de funciones:

$$U(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.60)$$

En donde $X(x)$ es una función que únicamente depende de la posición y $T(t)$ es una función únicamente del tiempo. Cuando sustituimos esta expresión en (3.56), podemos ver que la ecuación diferencial $X(x)$ satisface que:

$$X(x)'' - \lambda X(x) = 0 \quad (3.61)$$

Lo cual tiene como solución:

$$X(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x) \quad (3.62)$$

En donde $\lambda = -\mu^2$ Si aplicamos las condiciones de frontera:

$$U(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad (3.63)$$

3.1. ECUACIONES LINEALES PARA EL MODELO DE AGUAS SOMERAS 27

Como $T(t)$ no es cero, entonces:

$$X(0) = 0 \quad (3.64)$$

La condición de frontera de la solución se hereda a la parte espacial. De tal forma que tenemos que la ecuación (3.62), cumple la condición de frontera.

$$X(0) = a = 0 \quad (3.65)$$

Sabemos que el coeficiente $a = 0$ por lo que la ecuación (3.62), la podemos volver a escribir con la segunda condición de frontera:

$$X(L) = b \sin(\mu L) = 0 \quad (3.66)$$

Lo cual requiere que $\mu = \frac{n\pi}{L}$. Esto nos genera una cantidad infinita de funciones que representan la solución.

$$X_n(x) = \cos(\mu_n x) \quad (3.67)$$

Por lo que la solución en $X(x)$ será la suma de estas funciones (3.67). En la parte temporal de la ecuación tenemos que se cumple la misma ecuación diferencial que para la parte espacial.

$$T''(t) - c^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.68)$$

Lo cual sustituyendo λ se puede escribir como:

$$T''(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0 \quad (3.69)$$

La solución de la parte temporal, es de la misma forma que la espacial solo que en este caso :

$$T_n(t) = a' \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b' \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \quad (3.70)$$

Por lo que la solución general será la suma infinita de las expresiones (3.67) y (3.70):

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.71)$$

Ahora derivamos la ec.(3.71) respecto a t .

$$U_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{L} \left[-a_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.72)$$

La velocidad inicial es entonces:

$$U_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{L} b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0 \quad (3.73)$$

Multiplicando la expresión anterior por $U_t(x, 0)$ e integrando de cero a L , por ortogonalidad de las funciones obtenemos que:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) U_t(x, 0) dx = \frac{cn\pi}{2} b_n \quad (3.74)$$

De tal forma que el coeficiente b_n es:

$$b_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) U_t(x, 0) dx = 0 \quad (3.75)$$

Lo anterior es evidente en nuestro caso por que $U_t(x, 0) = 0$. Ahora consideremos la siguiente condición inicial $U(x, 0) = 0$. Debido a la discusión $b_n = 0$ y anterior podemos escribir ec.(3.71) como:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.76)$$

Para facilitar el uso de los coeficientes de Fourier escribimos una “campana” en términos de la función coseno, como condición inicial, de la siguiente forma.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (3.77)$$

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (3.78)$$

Ahora si desarrollamos la suma e identificamos los coeficientes de la suma con cada uno de los términos de la condición inicial, podemos fácilmente saber el valor de los coeficientes.

$$a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + a_3 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (3.79)$$

Por simple inspección vemos que:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = a_4 = \dots = 0 \quad (3.80)$$

Sabiendo el valor de los coeficientes a_n podemos escribir la ec.(3.81) como:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{nc\pi}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.81)$$

3.1. ECUACIONES LINEALES PARA EL MODELO DE AGUAS SOMERAS 29

Desarrollando cada término de la suma:

$$U(x, y) = a_0 + a_2 \cos\left(\frac{2c\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2c\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (3.82)$$

Esta es la solución analítica para la altura.

Para el caso de la velocidad procedemos de la misma forma. El único cambio son las condiciones de frontera para la velocidad, las cuales son de tipo *Dirichlet*. Usando otra vez una variable U general, el problema para la velocidad queda especificado por las siguientes condiciones de frontera e iniciales:

$$U_{tt} = c^2 U_{xx} \quad (3.83)$$

Condiciones de frontera

$$U(0, t) = U(l, t) = 0. \quad (3.84)$$

Condiciones iniciales

$$U(x, 0) = 0 \quad (3.85)$$

$$U_t(x, 0) = f(x) \quad (3.86)$$

Podemos observar en 4.1, que si conocemos la condición inicial de la altura H , entonces debido al acoplamiento:

$$H(x, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial H(x, 0)}{\partial x} = -g \frac{\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (3.88)$$

Y debido al acoplamiento:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = -g \frac{\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (3.89)$$

De tal forma que para las condiciones iniciales de la velocidad tenemos:

$$U_t(x, 0) = f(x) = -g \frac{\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (3.90)$$

Separamos variables igual que para la altura, de tal forma que nos queda la siguiente solución:

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (3.91)$$

Si queremos que la expresión 3.91 cumpla las condiciones iniciales de la velocidad evaluamos la solución anterior en $t = 0$:

$$U(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0 \quad (3.92)$$

Esto quiere decir que todos los coeficientes a_n son cero. Por lo que la solución nos queda como:

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.93)$$

Ahora para que cumpla la segunda condición inicial, derivamos la solución respecto a t y evaluamos en cero.

$$U_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n c \pi n}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = -g \frac{\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (3.94)$$

Para que esta igualdad se cumpla, los coeficientes b_n tienen que ser los siguientes:

$$b_0 = b_1 = 0, b_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{H_0}}, b_3 = 0, b_4 = \dots \quad (3.95)$$

Finalmente la solución final que cumple con las condiciones de frontera e iniciales deseadas, es:

$$U(x, t) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{H_0}} \sin\left(\frac{2\sqrt{gH_0}\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right). \quad (3.96)$$

Las ecuaciones (3.82) y (3.96), son la solución completa del problema analítico unidimensional.

Conservación de la energía en el caso unidimensional

Considerando nuevamente el sistema 4.1 y 4.2, multiplicamos la segunda ecuación 4.1 por u y la primera por H , de tal forma que nos queda lo siguiente:

$$\frac{\partial \frac{1}{2} H^2}{\partial t} + H_0 H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial \frac{1}{2} u^2}{\partial t} + g u \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (3.98)$$

El segundo termino de la ecuación 3.97 por la derivada del producto, de tal forma que la ecuación 3.97 nos queda como:

$$\frac{1}{H_0} \frac{\partial \frac{1}{2} H^2}{\partial t} + \frac{\partial H u}{\partial x} = u \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.99)$$

3.1. ECUACIONES LINEALES PARA EL MODELO DE AGUAS SOMERAS 31

Ahora sustituimos la ecuación 3.99 en 3.98 y hacemos $K = \frac{1}{2}u^2$.

$$\frac{\partial K}{\partial t} + g \left(\frac{1}{H_0} \frac{\partial \frac{1}{2}H^2}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.100)$$

Esta última ecuación la podemos escribir como:

$$\frac{\partial H_0 K + \frac{1}{2}gH^2}{\partial t} + H_0 g \frac{\partial Hu}{\partial x} = 0 \quad (3.101)$$

Lo que vemos en el primer paréntesis de la expresión 3.102 es la suma de la energía cinética mas la potencial para el sistema de aguas someras (energía total). Es preciso mencionar que por conservación de masa si tenemos un sistema físico con una cierta cantidad de masa inicial (y una altura inicial) sin sumideros ni fuentes de masa, que evoluciona en el tiempo, esta cantidad inicial de masa permanece durante toda la evolución temporal del sistema, asi como la altura tampoco es cero a través de la evolución del sistema. De tal forma que si integramos la ecuación (3.102) respecto a x , desde 0 hasta L obtenemos:

$$\frac{\partial \int_0^L (H_0 K + \frac{1}{2}gH^2) dx}{\partial t} + H_0 g \int_0^L \left(\frac{\partial Hu}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (3.102)$$

y aplicamos las condiciones de frontera 3.49, para la velocidad, por lo que la segunda integral se hace cero. De tal forma que nos queda:

$$\partial t (\bar{E}_T) = 0 \quad (3.103)$$

En donde \bar{E}_T es la energía total promediada en el dominio:

$$\bar{E}_T = \int_0^L \frac{H_0 K + \frac{1}{2}gH^2}{L} \quad (3.104)$$

Por lo que \bar{E}_t es constante en el tiempo. Es necesario enfatizar el hecho de que la conservación en este caso depende de que las condiciones de frontera $Hu = 0$ en 0 y L .

3.1.2. Ecuaciones bidimensionales

El sistema de aguas someras para el caso lineal, bidimensional, es el siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial H}{\partial y} \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.107)$$

Al igual que en el caso unidimensional podemos ver que la altura cumple la ecuación de onda directamente del sistema anterior, derivando la ecuación de continuidad respecto a t y las ecuaciones de momento en x y en y respecto a x y y respectivamente. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de continuidad obtenemos que:

$$H_{tt} = gH_0(H_{xx} + H_{yy}) \quad (3.108)$$

Supongamos ahora que tenemos un dominio rectangular con dimensiones $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq y \leq b$. Las condiciones de Frontera para la velocidad en el caso bidimensional *Dirichlet* son las mismas que para el caso unidimensional:

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0 \quad (3.109)$$

$$v(x, 0, t) = v(x, b, t) = 0 \quad (3.110)$$

Las cuales “inducen” al igual que en el caso unidimensional condiciones tipo *Neumann* para la altura H . De tal forma que para la altura tenemos las condiciones de frontera siguientes:

$$H_x(0, y, t) = H_x(a, y, t) = 0, \quad 0 < y < b \quad (3.111)$$

$$H_y(x, 0, t) = H_y(x, b, t) = 0, \quad 0 < x < a \quad (3.112)$$

3.1.3. Solución analítica

Utilizando una variable U general, el problema completo para la altura H se puede resumir de la siguiente forma:

$$U_{tt} = c^2 (U_{xx} + U_{yy}) \quad (3.113)$$

Condiciones de Frontera:

$$U_x(0, y, t) = U_x(a, y, t) = 0, \quad 0 < y < b \quad (3.114)$$

$$U_y(x, 0, t) = U_y(x, b, t) = 0, \quad 0 < x < a \quad (3.115)$$

Condiciones Iniciales:

$$U(x, y, 0) = f(x, y) \quad (3.116)$$

$$U_t(x, y, 0) = 0 \quad (3.117)$$

3.1. ECUACIONES LINEALES PARA EL MODELO DE AGUAS SOMERAS 33

Aplicando la misma idea de separación de variables que en el caso anterior:

$$u(x, y, t) = G(t)X(x)Y(y) \quad (3.118)$$

Para cada una de las funciones G, X y Y obtenemos las soluciones al sustituir en la ecuación de onda 3.113, y aplicar las condiciones de frontera. Las soluciones para cada función son las siguientes:

$$X_n(x) = B_n \cos(k_n x) \quad (3.119)$$

$$Y_m(y) = C_m \cos(p_m y) \quad (3.120)$$

$$G_{mn}(t) = A_{mn} \cos(\lambda_{mn} t) + B_{mn} \sin(\lambda_{mn} t) \quad (3.121)$$

En donde $k_n = \frac{n\pi}{a}$, $p_m = \frac{m\pi}{b}$ y $\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}}$. De tal forma que la solución esta representada por la doble suma siguiente:

$$U(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [A_{mn} \cos(\lambda_{mn} t) + B_{mn} \sin(\lambda_{mn} t)] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (3.122)$$

Tomamos ahora como condición inicial:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right)\right) \quad (3.123)$$

Para que la expresión anterior cumpla las condiciones iniciales, hacemos lo siguiente:

$$U(x, y, 0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (3.124)$$

Si hacemos una cuidadosa inspección de los coeficientes A_{mn} de la suma doble, podemos ver que:

$$A_{00} = \frac{1}{4}, \quad A_{02} = A_{20} = -\frac{1}{4}, \quad A_{22} = \frac{1}{4} \quad (3.125)$$

El resto de los coeficientes son cero. De tal forma que la solución analítica es:

$$U(x, y, t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi c}{a}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \quad (3.126)$$

$$- \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi c}{b}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right). \quad (3.127)$$

3.2. Conservación de la Energía en el caso Bidimensional

Al igual que en el caso unidimensional tomamos las ecuaciones de Momento (4.5,4.6) y las multiplicamos por u y v respectivamente, luego el resultado de cada ecuación lo sumamos. Además la ecuación de continuidad 4.7 la multiplicamos por la altura H . De tal forma que haciendo algunas sustituciones podemos llegar a la siguiente ecuación:

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} H_0 u^2 + \frac{1}{2} H_0 v^2 + \frac{1}{2} g H^2 \right) + g \nabla \cdot (\bar{u} H) = 0 \quad (3.128)$$

La cual podemos reescribir como:

$$\partial_t (\bar{E}_T) + g \int_0^L \int_0^L \nabla \cdot (\mathbf{u} H) dA = 0 \quad (3.129)$$

Por el teorema de Gauss podemos escribir la segunda integral como:

$$\int_0^\tau H \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl = 0 \quad (3.130)$$

Donde τ es un parámetro que recorre la frontera y donde podemos ver claramente que la integral es cero pues las condiciones de frontera en el problema son: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Por lo que la energía total se conserva al igual que en el caso unidimensional

$$\bar{E}_T = cte \quad (3.131)$$

3.3. Ecuaciones lineales considerando la fuerza de Coriolis

El sistema de ecuaciones es lineales bidimensionales y con rotación es el siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g \frac{\partial H}{\partial y} \quad (3.133)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.134)$$

3.3.1. Solución Analítica en el caso bidimensional con rotación

La solución del sistema de ecuaciones anterior ha sido ampliamente estudiada, para ciertas condiciones de fronteras (LeBlond & Mysak 1978[11]) (canales abiertos, fronteras de costas o fronteras totalmente abiertas), las ondas de Kelvin y las ondas de Poincaré son ejemplos claros del estudio de estas ondas para ciertas condiciones de frontera y ciertas simplificaciones de las ecuaciones 3.132,3.133, 3.134. El tratamiento analítico de estas Ondas se puede ver en varios autores (Cavallini 2012 [15]). Sin embargo el problema para condiciones de frontera cerradas rectangulares, representa hoy en día un problema difícil de resolver (Mohamed Atef Helal 1999 [12]), por lo que una de las opciones ha sido considerar una superficie rígida (rigid lid) en lugar de una superficie libre (S. Nurijanyan, 2012 [13]), sin embargo debido a que la superficie del océano es una superficie libre, la solución de este problema no ha sido muy práctica para los problemas oceanográficos (White, L. 2006[14]). Por tal motivo en el presente trabajo solamente presentamos algunos lineamientos sobre el comportamiento de las ondas inercio-gravitacionales. En el siguiente capítulo resolveremos el problema numéricamente.

Tomando en cuenta el sistema (3.132,3.133, 3.134), si derivamos la ecuación de continuidad respecto a t ecuación (3.134), las ecuaciones de momento (3.132) y (3.133) respecto a x y y , respectivamente, llegamos al siguiente sistema:

$$H_{tt} = -H_0(u_{xt} + v_{yt}) \quad (3.135)$$

$$u_{tx} = fv_x - gH_{xx} \quad (3.136)$$

$$v_{ty} = -fu_y - gH_{yy} \quad (3.137)$$

Si sustituimos 3.136 y 3.137 en 3.135, llegamos a una ecuación para H

$$H_{tt} = -Hf\zeta + gH_0\nabla^2H \quad (3.138)$$

En donde ζ es la componente perpendicular al plano horizontal de la vorticidad, es decir $\omega = (0, 0, \zeta)$. Podemos de las ecuaciones : (3.132) y (3.133) fácilmente observar que :

$$\zeta_t = v_{xt} - u_{yt} = -f(u_x + v_y) = -f\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.139)$$

Y utilizando la ecuación ecuación (3.134), obtenemos que:

$$\zeta_t = \frac{f}{H_0}H_t \quad (3.140)$$

Lo cual se traduce en una conservación de vorticidad.

$$\zeta = \frac{f}{H_0}H \quad (3.141)$$

Sustituyendo esta expresión en 3.138 nos queda que:

$$H_{tt} = -f^2 H + gH_0 \nabla^2 H \quad (3.142)$$

La cual es una ecuación de Klein-Gordon para H . En donde las condiciones de Frontera pueden ser derivadas de (3.132) y (3.133), derivando estas respecto al tiempo y sustituyendo las derivadas temporales de las velocidades de las ecuaciones originales, para desacoplar las componentes de las velocidades, de tal forma que nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$u_{tt} + f^2 u = -g(fH_y + H_{xt}) \quad (3.143)$$

$$v_{tt} + f^2 v = g(fH_x - H_{yt}) \quad (3.144)$$

Lo cual nos dice que por ejemplo para la frontera $0 \leq y \leq L_y$ y $x = 0$ en donde $u = 0$ la condición de frontera para H esta dada como:

$$fH_y = -H_{xt} \quad (3.145)$$

Y para la otra frontera:

$$fH_x = H_{yt} \quad (3.146)$$

Lo cual representa un problema mas complejo de resolver analíticamente.

3.3.2. Relación de dispersión

En general se sabe que la solución del sistema de aguas someras con rotación debe de tener la forma:

$$H = \widehat{H} e^{i(kx+ly-\sigma t)} \quad (3.147)$$

$$u = \widehat{u} e^{i(kx+ly-\sigma t)} \quad (3.148)$$

$$v = \widehat{v} e^{i(kx+ly-\sigma t)} \quad (3.149)$$

En donde las amplitudes \widehat{H} son en general numeros complejos que dependen de x, y y t . Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones gobernantes (3.132), (3.133) y (3.134) obtenemos la matriz :

$$\begin{pmatrix} -i\sigma & H_0 ik & H_0 il \\ gik & -i\sigma & -f \\ -gim & f & -i\sigma \end{pmatrix}. \quad (3.150)$$

Cuyo determinante debe de ser cero para obtener soluciones validas distintas de la trivial.

Por lo que llegamos a la expresión.

$$\sigma^2 = f^2 + gH_0(k^2 + l^2) \quad (3.151)$$

Llamamos $K^2 = k^2 + l^2$. Recordemos que los números k y l son los números horizontales de onda, por lo que K contiene toda la parte horizontal.

$$\frac{\sigma^2}{K^2} = \frac{f^2}{K^2} + gH_0 \quad (3.152)$$

Por lo que en el caso de que los efectos rotacionales sean muy pequeños la relación de dispersión es como en el caso bidimensional sin rotación, la velocidad de fase es $\sqrt{gH_0}K$.

3.3.3. Conservación de la energía en el caso bidimensional con rotación

Este caso es muy simple ya que al seguir el mismo procedimiento que en el caso bidimensional obtenemos:

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right) = fuv - ug\partial_x H \quad (3.153)$$

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -fuv - vg\partial_y H \quad (3.154)$$

Al sumar las ecuaciones (3.153) y (3.154) los términos de rotación se eliminan y la ecuación que queda es la misma que para el caso bidimensional (3.128). Por lo que en el caso bidimensional con rotación la energía también se conserva.

Capítulo 4

Discretización

En este capítulo hablaremos sobre los elementos mas importantes de una discretización, además de mostrar como discretizar los tres tipos de sistemas que vimos en los capítulos anteriores: Sistema unidimensional, Sistema bidimensional y Sistema bidimensional con rotación. El proceso de discretización se refiere al método con el que traducimos el lenguaje del continuo expresado en una ecuación diferencial al lenguaje computacional. Los elementos presentes en una ecuación diferencial, como derivadas espaciales, temporales e integrales, pueden aproximarse con cantidades discretas. Existen muchos textos introductorios con respecto a este tema [7]. Uno de los elementos mas importantes es la discretización del dominio físico. Para este proceso se utiliza el concepto de malla. La malla puede pensarse en un como una red que cubre todo el espacio físico, en la que cada una de las cuadrículas tiene ciertas dimensiones conocidas. Cuando cada una de las cuadrículas tiene las mismas dimensiones decimos que es una malla regular. Muchos tipos de malla han sido propuestos [8]. También podemos variar el punto de la malla en donde se calcula cierta cantidad. Toda esta variedad de mallas y por lo tanto de discretizaciones existen debido a la variedad de comportamientos de las soluciones de las ecuaciones. Las ecuaciones diferenciales pueden tener diferentes comportamientos en el interior de sus puntos y este comportamiento puede ser completamente diferente dependiendo de las condiciones de frontera que hayan sido establecidas para el problema, por lo tanto no debe sorprendernos la gran cantidad de discretizaciones posibles pues cada una intenta mejorar la precisión y estabilidad de la solución.

Existen diferentes modos ampliamente utilizados y documentados en la literatura científica. Ejemplos de estos métodos son: Diferencias Finitas, Volumen Finito y Elemento Finito. En el presente trabajo utilizaremos diferencias finitas para discretizar nuestros diferentes modelos de aguas someras.

4.1. Malla de Arakawa

El Meteorólogo Akio Arakawa publicó un artículo en 1977, en el que propuso principalmente 4 tipos de mallas (A,B,C y D) para discretizar el espacio. Siendo la malla C una de las mas usadas para discretizar los modelos de aguas someras. En esta malla podemos calcular la ecuación de continuidad y la ecuación de momento, como veremos a continuación.

4.2. Malla C unidimensional

El siguiente es el caso unidimensional de malla C regular.

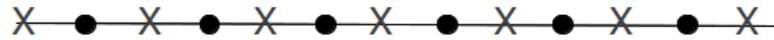


Figura 4.1: Malla C Unidimensional

En donde los puntos \times representan el lugar en donde estamos calculando la velocidad. En el caso unidimensional únicamente tenemos la componente horizontal de la velocidad u . La variable H de la altura la estamos calculando en los puntos \bullet . De tal forma que como se observa en la figura 4.1, el vector u , de velocidades es mas grande que el vector H por un punto. Ahora lo que resta saber es como discretizamos las ecuaciones 4.1, 4.2 utilizando la malla C. Recordemos primero el sistema antes mencionado.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4.2)$$

En la malla C, la ecuación de continuidad se discretiza en los puntos \bullet de la figura 4.1. Observemos la figura 4.2. El punto i es un punto interior cualquiera en donde estamos calculando la variable H de la altura.

De tal forma que la ecuación de continuidad queda:

$$H_i^{n+1} = H_i^n - H_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (4.3)$$

Imaginemos una celda (la línea punteada de 4.2) cuyas caras son los puntos $i + \frac{1}{2}$ y $i - \frac{1}{2}$, a esta celda la llamamos celda H . Por lo tanto necesitamos los valores de u en las caras de la celda H para calcular la derivada espacial de u , en la ecuación de continuidad.

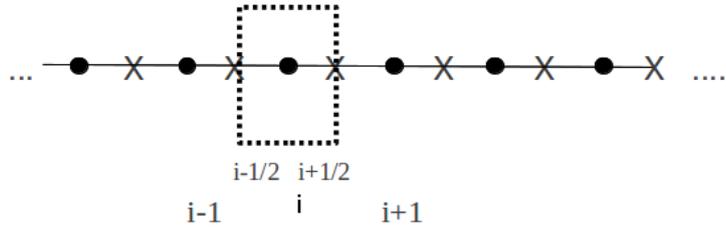


Figura 4.2: Puntos Interiores, ecuación de continuidad

La ecuación de momento, la calculamos en el punto $i - \frac{1}{2}$, por lo que podemos pensar que ahora el centro de la celda es justamente el punto $i - \frac{1}{2}$, a esta celda la llamamos celda u . Las caras de esta celda son los puntos i e $i - 1$ que corresponden a los valores: H_i y H_{i-1} respectivamente (4.3).

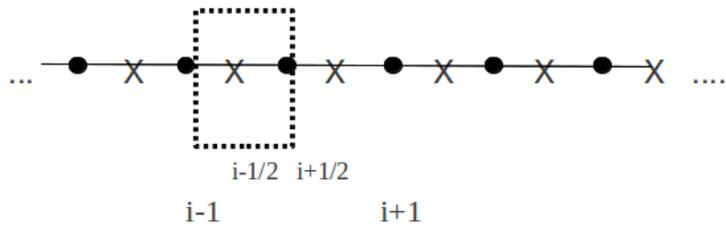


Figura 4.3: Puntos Interiores, ecuación de Momento

Finalmente la discretización para la ecuación de momento, queda:

$$u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{i-\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} g [H_i^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}] \quad (4.4)$$

De tal forma que si en nuestro código resolvemos primero la expresión 4.3 y después 4.4, nos queda un sistema explícito. Debido a que los valores H_i^{n+1} , están disponibles después de resolver la ecuación (4.3) y pueden ser usados en (4.4).

4.2.1. Condiciones de Frontera

Observando la figura 4.1, podemos darnos cuenta de que la única variable que necesita condiciones de frontera, es la velocidad u . Las condiciones de frontera para la velocidad en el caso unidimensional son las condiciones (3.49), vistas anteriormente. De tal forma que nuestro código deberá de incluir estas condiciones de frontera.

4.3. Malla C bidimensional

Recordemos el sistema de ecuaciones bidimensionales sin rotación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial H}{\partial y} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Para el caso bidimensional consideramos tres tipos de celdas, que se intersectan entre si. La celda central H , la celda u y la celda v .

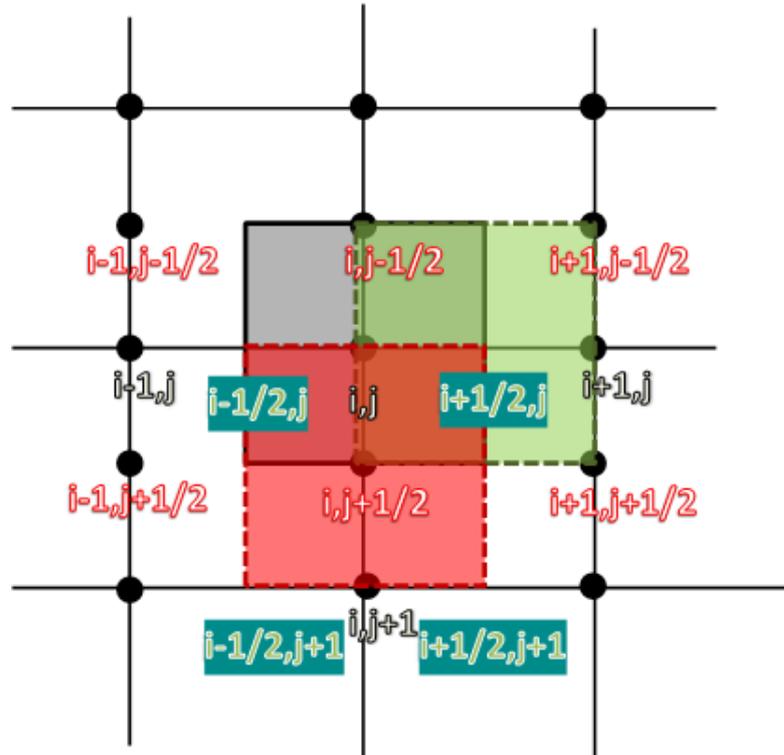


Figura 4.4: Malla C Bidimensional

La celda central (en color gris 4.4) es la que utilizaremos para calcular la ecuación de continuidad 4.7. En el centro de la celda H , está el valor de la variable H . Las coordenadas del centro de la celda H son i, j . Las caras este y oeste de la celda H son los puntos: $i + \frac{1}{2}, j$, $i - \frac{1}{2}, j$ respectivamente. La celda u (en color verde

4.2) donde calcularemos la ecuación de momento en u , se encuentra en el punto $i + \frac{1}{2}, j$. En medio de la celda u se encuentra el valor de la velocidad horizontal u . Finalmente la celda v (en color rojo 4.2), esta en el punto $i, j + \frac{1}{2}$. En la celda v calculamos la ecuación de momento en v (ecuación 4.6).

4.4. Discretización de las ecuaciones bidimensionales

Para calcular las derivadas parciales en la ecuación 4.7, necesitamos los valores que están en las caras de la celda H , por lo que la ecuación de continuidad discretizada nos queda como:

$$H_{i,j}^{n+1} = H_{i,j}^n - H_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n \right] - H_0 \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right] \quad (4.8)$$

Para la ecuación de momento en u , utilizamos la celda u , cuyas caras son los puntos $(i+1, j)$ y (i, j) . De tal forma que utilizamos los puntos $H_{i+1,j}$ y $H_{i,j}$ para escribir la derivada parcial respecto a x en la expresión 4.5. La discretización de la ecuación de momento en u , queda de la siguiente forma:

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_{i+1,j}^n - H_{i,j}^n \right] \quad (4.9)$$

La discretización para la ecuación de momento en v , se hace en la celda v , cuyas caras son: $v_{i,j+1}$ y $v_{i,j}$. De tal forma que los puntos necesarios para calcular la derivada parcial de y , (ecuación 4.6), son: $H_{i,j+1}$, $H_{i,j}$. Finalmente la ecuación de momento en v , queda como:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[H_{i,j+1}^n - H_{i,j}^n \right] \quad (4.10)$$

De tal forma que las ecuaciones 4.17, 4.9 y 4.10 nos permiten conocer los puntos $H_{i,j}^{n+1}$, $u_{i,j}^{n+1}$ y $v_{i,j}^{n+1}$ respectivamente. Es decir que cada ecuación nos permite conocer los valores de las variables H, u y v en el futuro.

4.4.1. Condiciones de Frontera

Consideremos un pequeño dominio de 4 por 4, formado por celdas H , como el que se muestra en la figura 4.5.

Como podemos ver en la figura 4.5, tenemos 16 celdas H (puntos \bullet), 5 celdas u en la horizontal y 4 en la vertical (cruces verdes). Tenemos también 5 celdas v en la vertical y 4 celdas v en la horizontal (cruces rojas).

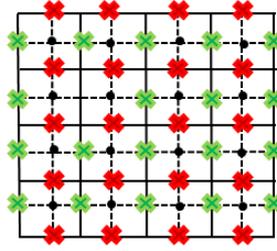


Figura 4.5: Malla C Bidimensional

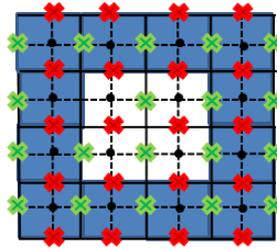


Figura 4.6: Fronteras del Dominio

Es importante darnos cuenta de que cuando estamos en cualquiera de las celdas de la frontera (franja azul figura 4.6), la malla C nos permite fijar los valores de las componentes normales de la velocidad en la superficie, por ejemplo consideremos una celda H en la esquina inferior izquierda (figura 4.7).

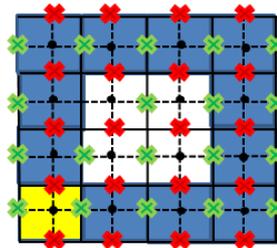


Figura 4.7: Celda en Frontera

Aquí podemos ver como las condiciones 3.48 aplican para cada una de las superficies. Por ejemplo en la figura 4.8 la componente de la velocidad normal a la superficie horizontal es v (flecha roja). La malla C nos permite fijar este valor como cero para todos los tiempos. De tal forma que $v(t) = 0$ en las fronteras. A través del mismo razonamiento, fijamos $u(t) = 0$ en las fronteras (flecha verde).

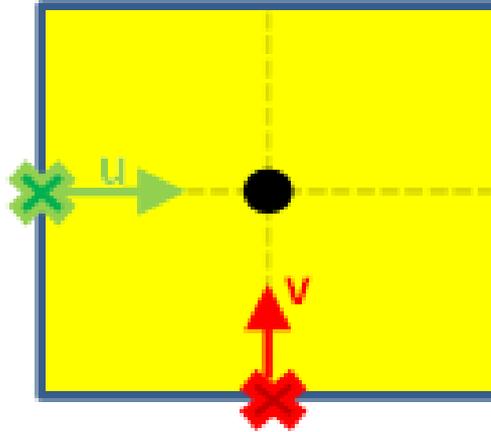


Figura 4.8: celda H en la Frontera

Esto ocurre para cada una de las celdas en Frontera. La malla C nos permite poner condiciones de tipo *Dirichlet* de manera directa.

4.4.2. Discretización de las ecuaciones bidimensionales con Rotación

Recordemos que el sistema bidimensional con el término de rotación es el siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g \frac{\partial H}{\partial y} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.13)$$

Podemos darnos cuenta que lo único que cambia con respecto al sistema 4.5, 4.6 y 4.7 es el término de rotación en las ecuaciones de momento, por lo que basta ver como discretizar este término en la maya C para poder proceder.

El término fv de la ecuación de momento en u se calculara al igual que el resto de los términos en la ecuación de momento en u , en la celda u cuyo centro es: $i + \frac{1}{2}, j$. Como podemos ver en la figura 4.9 es necesario hacer un promedio de 4 valores disponibles de v , para obtener $v_{i+\frac{1}{2},j}$ necesitamos los siguientes puntos:

Los valores que se toman para el promedio están en las esquinas del cuadro amarillo (figura 4.9), cuyo centro es el centro de la celda u , pues estamos calculando

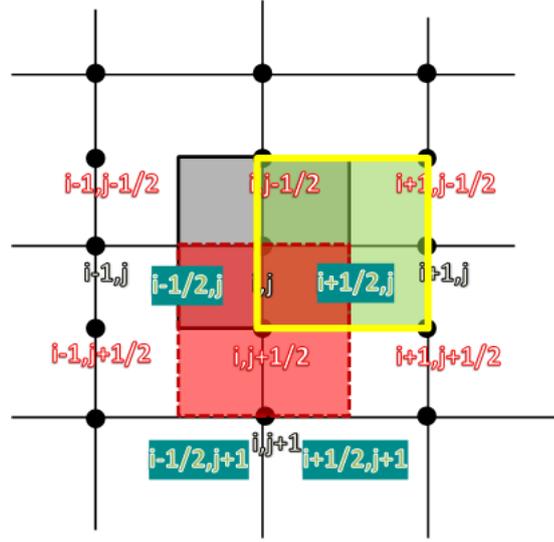


Figura 4.9: Promedio espacial de 4 valores de v

la ecuación de momento en u .

$$\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4} \left[v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.14)$$

El mismo procedimiento se aplica para el caso de la ecuación de momento en v , en donde se hace un promedio del valor de $u_{i,j+\frac{1}{2}}$. De tal forma que la discretización de las ecuaciones de momento incluyendo el término de rotación, son las siguientes:

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^n = \Delta t f \bar{v}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} g \left[H_{i+1,j}^n - H_{i,j}^n \right] \quad (4.15)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n = -\Delta t f \bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} g \left[H_{i,j+1}^n - H_{i,j}^n \right] \quad (4.16)$$

Recordemos que la ecuación de Continuidad discretizada es la misma que en el caso anterior (4.17).

Para resolver el sistema antes mencionado seguimos la técnica de discretización en el tiempo implementada en Beckers J.M., 1993 [9] y Sielecki A. 1968 [10], la cual consiste básicamente en resolver la ecuación de momento en u (4.18) primero, y después la ecuación de momento en v (4.19), para tiempos impares (comenzando en 1), y para tiempos pares se resuelve primero la ecuación de momento en v y después la de u . La ecuación de continuidad siempre la resolvemos primero, independientemente de si estamos en un paso par o impar de tiempo. Para realizar este procedimiento computacionalmente es conveniente utilizar un parámetro s ,

cuyo valor es 1 ó 0 dependiendo de la paridad o imparidad del tiempo. Siguiendo la misma técnica, con el propósito de obtener un sistema explícito en el cual estemos usando los valores mas actualizados de cada variable en cada paso de tiempo hacemos lo siguiente:

- Resolvemos la ecuación de continuidad 4.17 y obtenemos los valores $H_{i,j}^{n+1}$, para todo el dominio.
- Los valores de H obtenidos en el paso anterior se utilizan para calcular la derivada espacial de H respecto a x en la ecuación de momento en u 4.9, y con estos valores se calcula $u_{i,j}^{n+1}$ para todo el dominio (el valor de v depende de si el tiempo es par o impar ver ecuación).
- Los valores de H calculados en el primer paso se utilizan para calcular la derivada parcial de H respecto a y , en la ecuación de momento en v (los valores de u , al igual que en el paso anterior dependen del tiempo) .

De tal forma que el sistema que nos queda finalmente puede ser escrito de la siguiente manera:

$$H_{i,j}^{n+1} = H_{i,j}^n - H_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n \right] - H_0 \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right] \quad (4.17)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^n = \Delta t f \bar{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+s} - \frac{\Delta t}{\Delta x} g \left[H_{i+1,j}^{n+1} - H_{i,j}^{n+1} \right] \quad (4.18)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n = -\Delta t f \bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1-s} - \frac{\Delta t}{\Delta y} g \left[H_{i,j+1}^{n+1} - H_{i,j}^{n+1} \right] \quad (4.19)$$

Donde:

$$s = \begin{cases} 0 & \text{Para tiempos pares} \\ 1 & \text{Para tiempos impares} \end{cases} \quad (4.20)$$

4.5. Filtros y Métodos de discretización en el tiempo

Existen varias formas de discretizar las derivadas temporales en una ecuación (Tannehill [7]). Principalmente estos métodos consisten en tener un valor temporal de la variable llamado predictor y después corregir ese valor utilizando un corrector (Predictor-Corrector). En algunos métodos se utilizan pasos múltiples con varios valores temporales y en cada paso se hace una ponderación de esos valores (Fractional Time step, Multistep Method, Runge-Kutta orden 4). Todos estos procedimientos incrementan la precisión del esquema numérico y su estabilidad temporal.

4.5.1. Método Trapezoidal de Adams-Bashforth

Para el caso bidimensional sin rotación utilizamos un esquema de Adams-Bashforth en el tiempo, el cual básicamente consiste en un predictor y en un corrector trapezoidal. Este método está ampliamente descrito en Sajal K. Kar, 2012 [16]. Siguiendo la notación de este artículo la forma de la ecuación general es:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = F(\Psi) \quad (4.21)$$

En este artículo la función general Ψ utiliza dos condiciones iniciales para el lado derecho F^n y F^{n-1} , sin embargo en el presente trabajo utilizamos un medio paso en el tiempo (Leap Frog) de tal forma que nuestras condiciones iniciales son $F^{n+1/2}$ y F^n . Además en nuestro caso, dado que tenemos un sistema de ecuaciones Ψ y F son matrices. La forma de las ecuaciones queda entonces de la siguiente forma:

Predictor

$$\frac{\Psi^{(n+1)*} - \Psi^{n+1/2}}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{2}(3F^{n+1/2} - F^n) \quad (4.22)$$

Corrector

$$\frac{\Psi^{(n+1)} - \Psi^{n+1/2}}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{2}(F^{(n+1)*} + F^{n+1/2}) \quad (4.23)$$

En donde Ψ y F son:

$$\Psi = \begin{pmatrix} H \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$F = \begin{pmatrix} -H(\partial u_x + \partial v_y) \\ -g\partial H_x \\ -g\partial H_y \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo presentamos por un lado la comparación de los resultados analíticos y numéricos y por otro las leyes de conservación en el caso numérico y analítico. Primero presentamos el caso unidimensional. La condición inicial es la misma para el modelo numérico y para la solución analítica. Simultáneamente calculamos el error cuadrático medio en el tiempo. Seguimos este mismo procedimiento para el caso bidimensional, y observamos el comportamiento del error en el tiempo. En la siguiente sección calculamos la energía Cinética y Potencial del sistema de aguas someras para el caso unidimensional y bidimensional. Comparamos las leyes de conservación en el caso continuo y en el caso numérico. Aplicamos un filtro de Adam Bashforth en el tiempo para el caso unidimensional y bidimensional, este último caso lo probamos con el método de Runge-kutta de cuarto orden y observamos el comportamiento de la energía. Por último vemos el campo de velocidades en la solución con rotación.

5.1. Comparación de la solución analítica y numérica

5.1.1. Caso Unidimensional

Tomando en cuenta el sistema :(4.1),(4.2) y utilizando la condición inicial (3.77), sacamos el error cuadrático medio para cada tiempo, comparando así el esquema numérico con la solución analítica. Utilizamos el error cuadrático medio (ECM) para comparar el error entre la solución analítica y la numérica.

$$\text{ECM} = \frac{1}{N} \sum_j^N (H_{\text{numérica}} - H_{\text{analítica}})^2 \quad (5.1)$$

En donde N es el numero total de puntos en el espacio, es decir es la longitud del vector x , y j es el índice para los puntos en el espacio. La siguiente figura muestra la solución numérica y la analítica para la altura H y muestra el error cuadrático medio para 60 segundos de evolución en el tiempo.

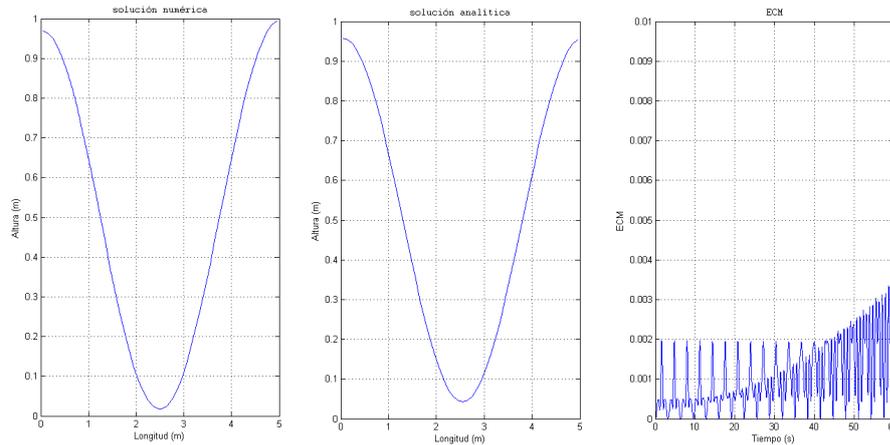


Figura 5.1: Comparación de las soluciones en el caso unidimensional

Para este caso tenemos $N = 50$ (numero de puntos de la malla) en una longitud horizontal de 5 metros y una resolución en el tiempo de 500 pasos de tiempo cada segundo.

Conservación de la Energía en el caso unidimensional

En el sistema de aguas someras la energía total la escribimos como (3.104). Para compararla con el caso continuo se escribió una forma discretizada para la energía total y se graficó en el tiempo con el propósito de verificar la conservación de la energía en el esquema discreto. Dentro del código se calculó la energía cinética y potencial por separado. En la siguiente figura (5.2) se grafican la energía potencial E.P. y la energía cinética E.C. para cada punto en el espacio para un determinado tiempo. Después se grafica el promedio espacial de E.C. y E.P., para poder observar el intercambio de energía cinética y potencial en el tiempo (barra azul y roja).

Cuando observamos la evolución temporal del intercambio de energía cinética y potencial podemos ver que para los tiempos en los que la columna de fluido alcanza su mayor altura, se tiene una mayor cantidad de energía potencial (barra azul) y para los casos de mayor velocidad de la onda, se tiene una energía cinética mayor (barra roja) (5.2).

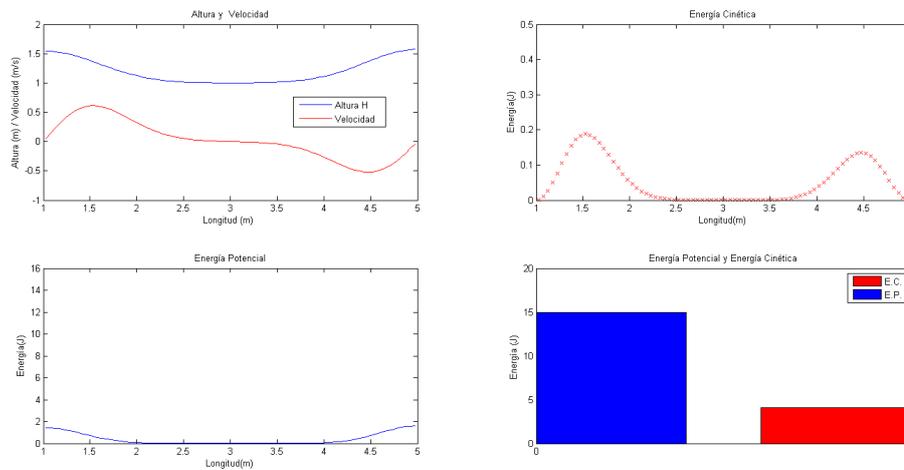


Figura 5.2: Energía en el caso unidimensional

Finalmente graficamos el promedio de la energía total en el dominio \bar{E}_T como función del tiempo.

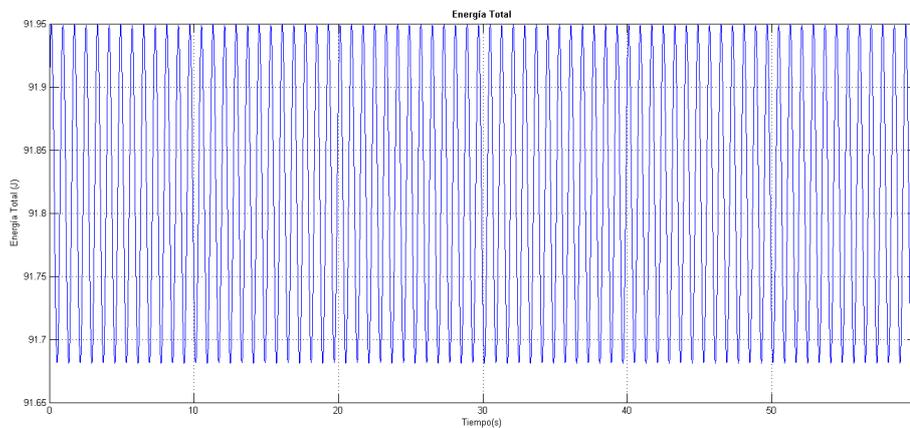


Figura 5.3: Evolución temporal de la energía total para el caso unidimensional

5.1.2. Caso bidimensional

Sacamos el ECM igual que en el caso unidimensional. Partiendo de la misma condición inicial (3.123) para las dos soluciones (numérica y analítica), los resul-

tados fueron los siguientes:

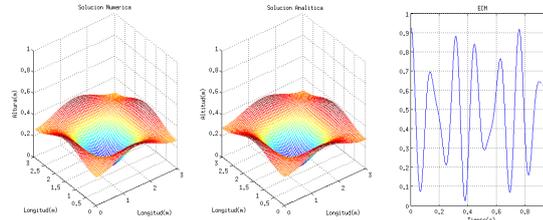


Figura 5.4: Comparación de las soluciones en el caso bidimensional

Para un tiempo de 60 segundos obtenemos el siguiente ECM (Figura 5.5).

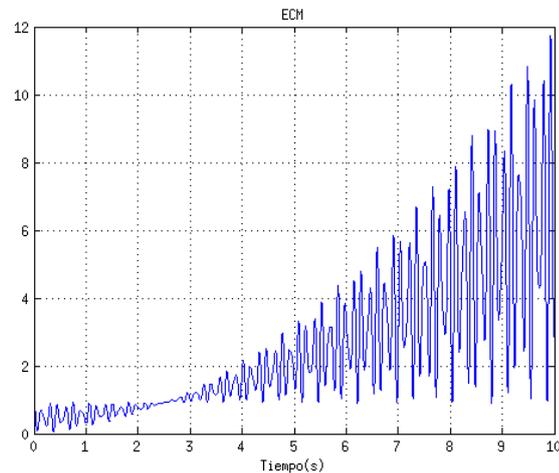


Figura 5.5: Evolución del ECM para 60 segundos

Utilizando el esquema de Adam-Bashforth, el ECM se muestra en la Figura 5.6:

Conservación de la Energía en el Caso Bidimensional

Sabemos que para la solución analítica, en el caso bidimensional la energía total se conserva 3.131. En el caso numérico, la energía total es de la siguiente forma:

Para comparar este resultado (5.7) con el resultado en el caso analítico, sacamos un promedio temporal (para 10 segundos) de la energía total, utilizando las mismas condiciones iniciales y de frontera. De tal forma que obtuvimos el promedio de la energía total en el caso analítico y en el caso numérico.

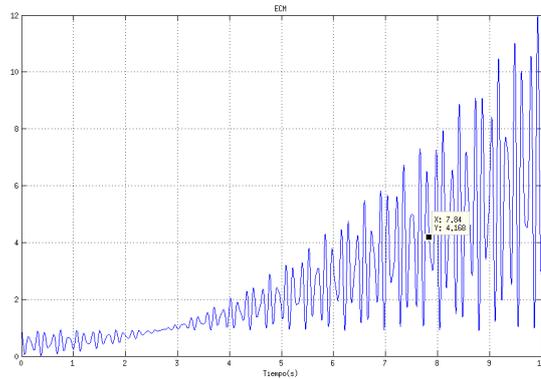


Figura 5.6: Evolución del ECM para 60 segundos utilizando A.B.

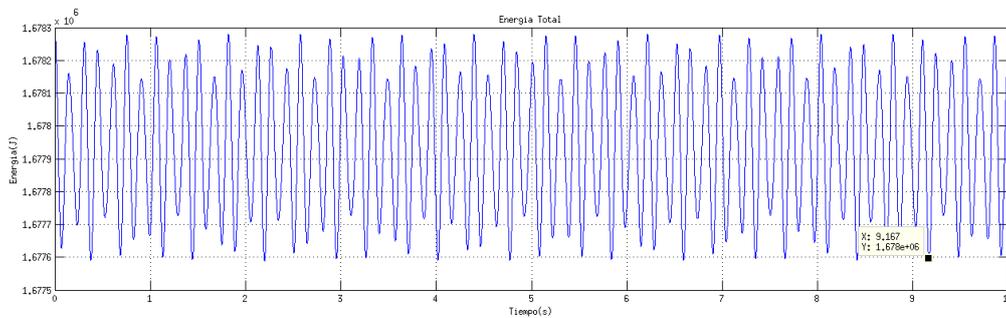


Figura 5.7: Evolución temporal de la energía total en el caso bidimensional

Promedio temporal numérico= 49,95J

Promedio temporal analítico= 44,95J

Utilizando el esquema de discretización Adams-Bashforth obtuvimos exactamente el mismo resultado para la energía (49,95J). Utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden obtuvimos lo siguiente (figura 5.8):

Al hacer el promedio temporal obtenemos:

Promedio temporal numérico= $3,0372e^{36}$ J

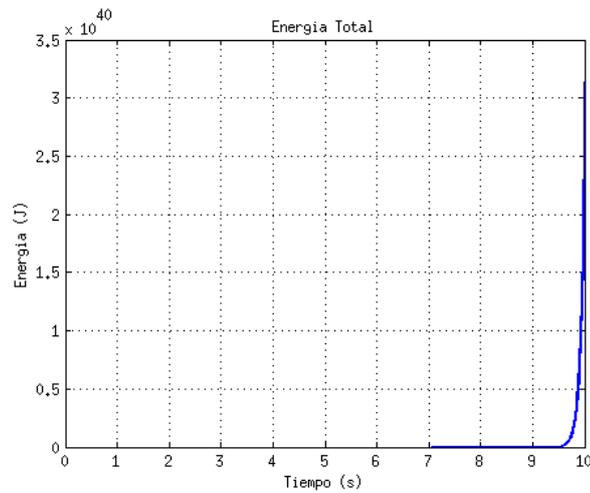


Figura 5.8: Evolución temporal de la energía total en el caso bidimensional utilizando R.K.4

La energía crece a lo largo de los 10 segundos de integración.

5.1.3. Caso Bidimensional con Rotación

Utilizamos la misma condición inicial y de frontera que para el caso bidimensional. Podemos ver la solución y su campo de velocidades (Figura 5.9).

En el caso Bidimensional con rotación obtenemos el siguiente resultado para la conservación de la energía total.

En donde el promedio temporal es :

$$\text{Promedio temporal numérico con rotación} = 0,05\text{J}$$

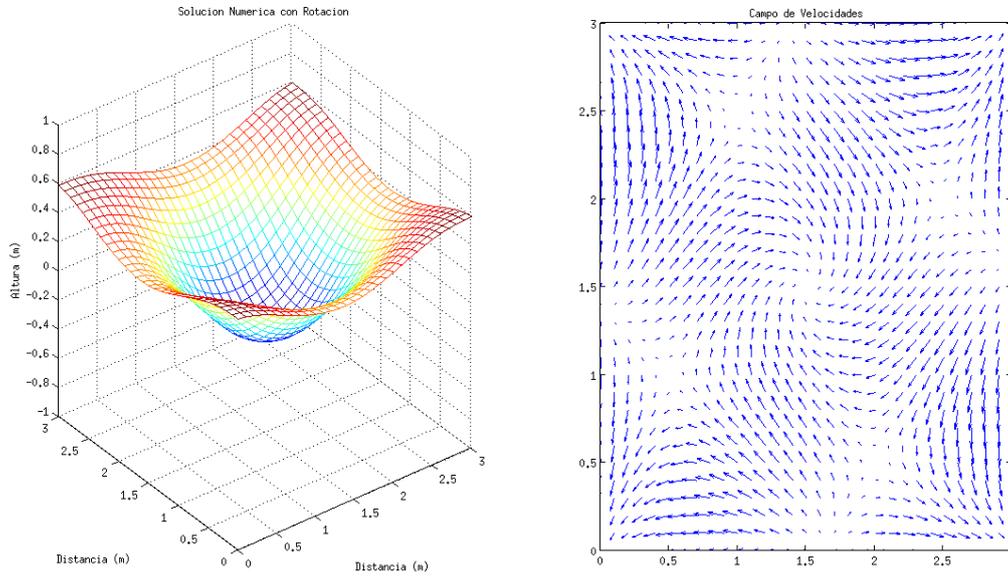


Figura 5.9: Solución para la altura y campo de velocidades con rotación

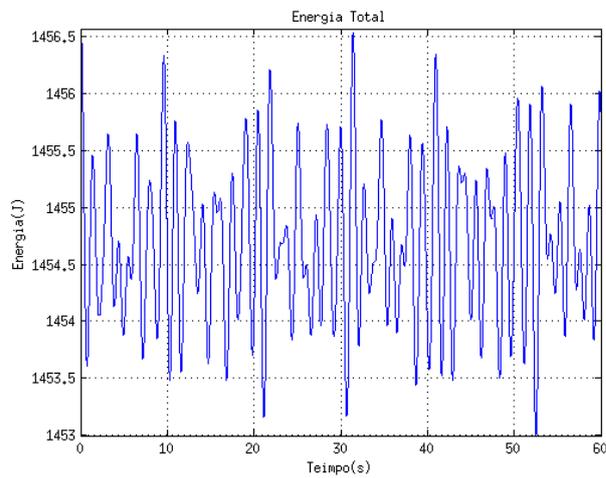


Figura 5.10: Evolución temporal de la energía total en el caso con rotación

Capítulo 6

Conclusión

En el caso unidimensional podemos ver que el **ECM** crece con el tiempo (para 60 segundos, figura 5.1). Lo cual es de esperarse para cualquier método numérico. Sin embargo esto se podría mejorar si utilizáramos un esquema que se incondicionalmente estable, por ejemplo si resolviéramos el problema con un esquema implícito. Al utilizar el filtro de Adams-Bashforth no obtuvimos ninguna mejora con respecto al esquema de Sielecki (1968[10]), esto tanto en términos de **ECM** como de conservación de energía total. De tal forma que una característica positiva del esquema de Sielecki (1968[10]) es que en el esquema numérico la energía total oscila entre los valores 91.95 y 91.7 pero su promedio (91.825) se conserva en el tiempo (figura 5.7), por lo que podemos decir que en el esquema numérico la energía se conserva.

En el caso bidimensional el **ECM** también crece en el tiempo (figura 5.4), y la energía total se conserva en el esquema numérico. Cuando probamos estas mismas ecuaciones con el esquema de Adam-Bashforth, el **ECM** y la energía total promedio permanecen iguales, no hay ninguna mejoría. Cuando utilizamos el esquema de Runge Kutta de cuarto orden la energía se “dispara “ (Figura 5.8), por lo que no es muy recomendable en este caso. Por esa razón para el caso bidimensional con rotación utilizamos únicamente el esquema descrito en [9],[10] y descrito en el capítulo 4 del presente trabajo.

En el caso bidimensional con rotación vemos que la energía total se conserva en el continuo (sección 3.3.3). Y esto sucede en el caso numérico (para 10 segundos) y lo podemos ver en la figura 5.10. Con respecto al error cuadrático medio, no existe error cuadrático medio contra el cual podamos comparar. Aplicando el esquema de Adam-Bashforth y Runge Kutta de cuarto orden no obtuvimos resultados físicamente consistentes en el caso bidimensional por lo únicamente los obtuvimos resultados con el esquema descrito en [9], para el cual se puede observar una cierta circulación respecto al centro del dominio (es decir como si el eje de rotación estuviera en el centro del dominio) (Figura 5.9), lo cual es de esperarse

para el sistema (3.134), (3.132) y (3.133). Es preciso mencionar que los tiempo de integración no se hicieron mas largos debido a que el CPU de la máquina que se usó, facilmente se saturaba con tiempos mas grandes a 60 segundos, por lo que un código que funcionara en paralelo y la programación en tarjetas gráficas (GPU) sería altamente recomendable para optimizar el proceso.

Bibliografía

- [1] I.G. Currie: Fundamental Mechanics of Fluids. Ed. McGraw-Hill,USA. 1974.
- [2] Yuri Nickolaevich Skiba: Introducción a la Dinámica de Fluidos. Universidad Nacional Autónoma de México. Centro de Ciencias de la Atmósfera. México, 2009.
- [3] W.Fox Robert et. al.: Introduction to Fluid Mechanics.Ed. John Wiley Sons. USA.2004.
- [4] Vreugdenhil C. B.: Numerical Methods for shallow water flow. Ed. Kluwer academic Publishers, Printed in Netherlands 1994.
- [5] Arakawa A., Lamb V.: Methods in computational Physics.(1980).
- [6] Farlow Stanley J. Partial differential equations for scientists and engineers,Ed. Dover,1993
- [7] Tannehill J.,C.,Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer.1997
- [8] Arakawa, A.; Lamb, V.R. (1977). "Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model" .Methods of Computational Physics 17. New York: Academic Press. pp.173–265.
- [9] Beckers, Jean-Marie .Stability of a FBTCS Scheme Applied to the Propagation of Shallow-Water Inertia-Gravity Waves on Various Space Grids,1993.
- [10] SIELECKI,A. AN ENERGY-CONSERVING DIFFERENCE SCHEME FOR THE STORM SURGE EQUATIONS.1968.
- [11] LeBlond, P.H., Mysak, L.A., 1978. Waves in the Ocean. Elsevier, Amsterdam.
- [12] Helal,Atef,M., Shallow water waves in a rotating rectangular basin,1999.Internat. J. Math. & Math.
- [13] S. Nuriyanyan,Inertial waves in a rectangular parallelepiped,2012

- [14] Laurent White, A one-dimensional benchmark for the propagation of Poincaré waves. 2006.
- [15] Cavallini, F., Quasi-Geostrophic Theory of Oceans and Atmosphere, 2012
- [16] Kar, Sajal K., 2012: An Explicit Time-Difference Scheme with an Adams–Bashforth Predictor and a Trapezoidal Corrector.

Apéndice A

Código Unidimensional

```
%%-----one dimension shallow water using -----%%  
%%-----vector plots-----%%  
clear all  
close all  
clc  
  
b=5;  
a=1;  
T=60;  
  
dx=0.05;  
dt=0.001  
H=1;  
  
%dx=0.05;  
%dt=0.001;  
%H=10;  
g=9.8;  
  
cond=sqrt(g*H)*dt/dx;  
  
x=a:dx:b;  
t=0:dt:T;  
  
%-----initial condition-----%%
```

```

%%---damp---%%
%for i=1:length(x)-1
%if(x(i)<=2 )
%    eta(1,i)=H;

%else
%    eta(1,i)=0;
%end
%end

%%-----gauss-----%%
X0=3;
for i=1:length(x)-1
    sigma=0.5;eta(1,i)=H+...
    (1/(2*pi*(sigma^2)))*exp(-((x(i)-X0).^2)/(2*sigma^2));
end

for i=2:length(x)-1
u(1,i)=0;
end

%%-----Boundary conditions-----%&

for j=1:length(t)
u(j,1)=0;
u(j,length(x))=0;
end

%%-----%%

%%.....Main compute.....%%

%%-----continuity eq-----%%

```

```
for j=1:length(t)

    for i=1:length(x)-1

        eta(j+1,i)=eta(j,i)-H*(dt/dx)*(u(j,i+1)-u(j,i));

    end

    %%momentum eq-----%%
    %cont=0;
    for i=2:length(x)-1
        %cont=cont+1;

    u(j+1,i)=u(j,i)-g*(dt/dx)*(eta(j+1,i)-eta(j+1,i-1));
    end

end

%%-----vector eta, para animación-----%%

for k=1:length(x)-1
xeta(k)=(x(k)+x(k+1))/2;
end

for k=1:length(xeta)
v(k)=0; %% velocidad en la direccio y
end

for j=1:length(t)
for k=1:length(xeta)
uint(j,k)=(u(j,k)+u(j,k+1))/2; %% interpolacion del vector de velocidades
end
end

%%-----%%
```

```

%%-----Kinetic energy and potential energy-----%%
for j=1:length(t)
for k=1:length(xeta)
K(j,k)=H*0.5*uint(j,k).*uint(j,k);
U(j,k)=0.5*g*(eta(j,k)-H).*(eta(j,k)-H);
TE(j,k)=U(j,k)+K(j,k);
end
end

for j=1:length(t)
Ksum(j)=0;
Usum(j)=0;
TEsum(j)=0;
for k=1:length(xeta)

Ksum(j)=Ksum(j)+K(j,k);
Usum(j)=Usum(j)+U(j,k);
TEsum(j)=TEsum(j)+TE(j,k);
end
TEtot(j)=TEsum(j);
end

%%-----%%

for j=1:length(t)

% hold on
%subplot(2,2,1)
% plot(xeta(:),eta(j,:));
% hold on

% plot(xeta(:),uint(j,:),'r');
% hold on
% axis([ 1 5 -1 2 ] )

```

```
% title('elevación y velocidad')
% hold off
%subplot(2,2,2)
% plot(xeta(:),K(j,:), 'rx')
% title('energia Cinética')
% axis([ 1 5 0 0.5 ] )
%subplot(2,2,3)
    plot(t(1:j),TEtot(1:j));
    grid on;
    title('Energia Total')
    axis([ 0 T 35 36 ] )
%subplot(2,2,4)
% xbar=[0 1 2];
% ybark(1)=0;
% ybark(2)=Ksum(j);
% ybark(3)=0;

% bar(xbar,ybark, 'r');
% hold on
% ybaru(1)= 16.9282*(Usum(j)/ 35.1991);
% ybaru(2)=0;
% ybaru(3)=0;
% bar(xbar,ybaru, 'b');
%plot(xeta(:),U(j,:), 'bo');
% hold on
% axis([ 0 1 0 20 ] )
% title('U energia potencial y K energia cinética')
% hold off
    pause(0.1)
M(j)=getframe;
end

numtimes=1;
fps=1;
movie(M,numtimes,fps)
```


Apéndice B

Codigo Bidimensional

```
%%-This program solves de 2 d shallow water linear equations-----%%
%%-----Using a stagered grid C-----%%
%clear all
%lose all
%clc

%%for this case we must have dx=dy
%dx=0.05;
%dy=0.05;
dx=0.1;
dy=0.1;
dt=0.001;
H=10;
g=9.8;

ax=0; %% ----horizontal axis
bx=3;

ay=0;
by=3; %%----- vertical axis

T=10; %%-----tinme

x=ax+(dx/2):dx:bx-(dx/2);
x_u=ax:dx:bx;
R=length(x);
R_u=length(x_u);
```

```

y=ay+(dy/2):dy:by-(dy/2);
y_v=ay:dy:by;
L=length(y);
R_v=length(y_v);

t=0:dt:T;
TT=length(t)

rx=dt/dx;%%cfl
ry=dt/dy;%%condition

cfl=0.5*rx*(1/(g*H)^0.5)

%%-----%%

%% -----Boundary conditions-----%%

for k=1:TT-1

for j=1:L
u(j,1,k)=0;
end

for j=1:L
u(j,R_u,k)=0;
end

for i=1:R
v(1,i,k)=0;
end

for i=1:R
v(R_v,i,k)=0;
end

end

```

```

%%-----%%

%%-----initial conditions-----%%

%%----grid generation----%%
[x_grid,y_grid]=grid_benj(x,y);
%%-----%%

% We start our simulation with a gauss function centered domain
x0=2;
y0=2;
for j=1:L
for i=1:R
% sigma=0.2;
% eta(j,i,1)=H+...
(1/((2*pi^0.5)*(sigma^2)))*exp(-((x_grid(i,j)-x0).^2+...
(y_grid(i,j)-y0).^2)/(2*sigma^2));
eta(j,i,1)=(0.5-0.5*cos( ((2*pi)/bx)*x_grid(i,j) ) ) .*...
(0.5-0.5*cos( ((2*pi)/by)*y_grid(i,j) ) );
end
end

%mesh(x_grid,y_grid,eta(:,:,1))

%% and zero velocity field for interior points

for j=1:L
for i=2:R_u-1
    u(j,i,1)=0;
end
end

for j=2:R_v-1
for i=1:R
v(j,i,1)=0;
end
end

```

```

end

%%-----%%

%%-----Main compute-----%%
for k=1:TT-1;

%%-----elevation equation
for j=1:L
for i=1:R
eta(j,i,k+1)=eta(j,i,k)-(H*rx)*(u(j,i+1,k)-...
u(j,i,k))-(H*ry)*(v(j+1,i,k)-v(j,i,k));
end
end

%%-----u momentum-----%%

for j=1:L
for i=2:R_u-1
u(j,i,k+1)=u(j,i,k)-g*rx*(eta(j,i,k+1)-eta(j,i-1,k+1));
end
end

%%-----v momentum-----%%

for j=2:R_v-1
for i=1:R
v(j,i,k+1)=v(j,i,k)-g*ry*(eta(j,i,k+1)-eta(j-1,i,k+1));
end
end

disp('esta es la iteración ')
k

disp('y necesita llegar a')
TT-1

```

```
end

%%---interpolación de velocidades

for k=1:TT-1

for j=1:L
for i=2:R_u
uint(j,i-1,k)=(u(j,i,k)+u(j,i-1,k))/2;
end
end

for i=1:R
for j=2:R_v
vint(j,i,k)=(v(j,i,k)+v(j-1,i,k))/2;
end
end

end
%%-----

%%-----Kinetic velocity-----%%
for k=1:TT-1

for j=1:L
for i=1:R
K(j,i,k)=H*0.5*uint(j,i,k).*uint(j,i,k)+...
H*0.5*vint(j,i,k).*vint(j,i,k); %% kinetic energy
U(j,i,k)=0.5*g*(eta(j,i,k)-H).*(eta(j,i,k)-H); %% potential energy
TE(j,i,k)=K(j,i,k)+U(j,i,k);

end
end

end

%%-----Total energy each time-----%
for k=1:TT-1
```

```
        Ksum(k)=0;
        Usum(k)=0;
        TEsom(k)=0;

    for j=1:L
        for i=1:R

            Ksum(k)=Ksum(k)+K(j,i,k);
            Usum(k)=Usum(k)+U(j,i,k);
            TEsom(k)=TEsom(k)+TE(j,i,k);
        end
    end

end

%%-----%%

%h=mesh(x_grid,y_grid,eta(:,:,1))

%axis([ 0 bx 0 by 0 1 ])
%for k=1:TT-1

%     Z=eta(:,:,k);
%     set(h,'ZData',Z);
%     pause(0.001);

%end
```

Apéndice C

Código Bidimensional con Rotación

```
%%-----shw 2d linear with rotation----%%  
  
clear all  
close all  
clc  
  
%%--f(columnas,filas)=f(x,y)---%%  
  
g=9.8;  
H=1;  
f=1;  
T=5  
Lx=10;  
Ly=10;  
  
dt=0.0025;  
dx=0.25;  
dy=0.25;  
t=0:dt:T;  
x=0:dx:Lx;  
y=0:dy:Ly;  
rx=dt/dx;  
ry=dt/dy;
```

```

cfl=(dt/dx)*sqrt(g*H);

%%-----Initial condition-----%%

[X,Y]=meshgrid(x,y);

Z=(0.5-0.5*cos((2*pi/Lx)*X)).*(0.5-0.5*cos((2*pi/Ly)*Y));

%sigma=2;
%X0=Lx/2;
%Y0=Ly/2;
%Z=(1/(2*pi*(sigma^2)))*exp(-5*((X-X0).^2+(Y-Y0).^2));

eta=zeros(length(y),length(x),length(t));

for j=1:length(y)
for i=1:length(x)

        eta(j,i,1)=Z(j,i);
end
end

u=zeros(length(y),length(x)+1,length(t));
v=zeros(length(y)+1,length(x),length(t));

%mesh(X,Y,eta(:,:,1))

%%-----B.C.-----%%

```

```
%for k=1:length(t)
%for j=1:length(y)
%u(1,j,k)=0;
%u(length(x)+1,j,k)=0;
%end
%end

u(:,1,:)=0;
u(:,length(x)+1,:)=0;

%for k=1:length(t)
%for i=1:length(x)
%v(i,1,k)=0;
%v(i,length(y)+1,k)=0;
%end
%end

v(1,,:)=0;
v(length(y)+1,,:)=0;

%%-----Main compute-----%%

%%---continuity---%%
for k=1:length(t)-1;

for j=1:length(y)
    for i=1:length(x)

        eta(j,i,k+1)=eta(j,i,k) -H*(rx*(u(j,i+1,k)-...
        u(j,i,k))+ry*(v(j+1,i,k)-v(j,i,k)) );

    end
end

res=mod(k,2);
s=1-res;

switch s
%if(s==0)
```

```

    case 0
    for j=1:length(y)
    for i=2:length(x)-1
        %v_prom=0;
        %v_prom=0.25*(v(i-1,j,k+s)+v(i-1,j+1,k+s)+...
        v(i,j,k+s)+v(i,j+1,k+s)); %% v antiguas
        u(j,i,k+1)=u(j,i,k)-g*rx*(eta(j,i,k)-eta(j,i-1,k))+...
        f*dt*(0.25*(v(j,i-1,k+s)+v(j+1,i-1,k+s)+...
        v(j,i,k+s)+v(j+1,i,k+s)) ); % v antiguas eta nuevas

    end
    end

    for j=2:length(y)-1
    for i=1:length(x)

        %u_prom=0;
        %u_prom=0.25*(u(i,j-1,k+1-s)+u(i+1,j-1,k+1-s)...
        +u(i,j,k+1-s)+u(i+1,j,k+1-s)); %% u nuevas
        v(j,i,k+1)=v(j,i,k)-...
        g*ry*(eta(j,i,k)-eta(j-1,i,k))-...
        f*dt*( 0.25*(u(j,i,k+1-s)+u(j+1,i,k+1-s)+u(j,i+1,k+1-s)+...
        u(j+1,i+1,k+1-s)) ); %% etas nuevas y u nuevas

    end
    end

    case 1

    for j=2:length(y)-1
    for i=1:length(x)

        %u_prom=0;
        %u_prom=0.25*(u(i,j-1,k+1-s)+u(i+1,j-1,k+1-s)+...
        u(i,j,k+1-s)+u(i+1,j,k+1-s)); %% u nuevas
        v(j,i,k+1)=v(j,i,k)-g*ry*(eta(j,i,k)-...
        eta(j-1,i,k))-f*dt*( 0.25*(u(j,i,k+1-s)+...

```

```

    u(j+1,i,k+1-s)+u(j,i+1,k+1-s)+...
    u(j+1,i+1,k+1-s) ); %% etas nuevas y u nuevas

end
end

for j=1:length(y)
for i=2:length(x)-1
    %v_prom=0;
    %v_prom=0.25*(v(i-1,j,k+s)+v(i-1,j+1,k+s)+...
    v(i,j,k+s)+v(i,j+1,k+s)); %% v atniguas
    u(j,i,k+1)=u(j,i,k)-g*rx*(eta(j,i,k)-...
    eta(j,i-1,k))+f*dt*(0.25*(v(j,i-1,k+s)+...
    v(j+1,i-1,k+s)+v(j,i,k+s)+v(j+1,i,k+s) ) ); % v antiguas eta nuevas

end
end

end

end

for k=1:length(t)-1
%%-----u int v int-----%%

for j=1:length(y)
    for i=1:length(x)

        u_int(j,i,k)=0.5*(u(j,i,k)+u(j,i+1,k));

    end
end
end

```

```
for j=1:length(y)
    for i=1:length(x)

        v_int(j,i,k)=0.5*(v(j,i,k)+v(j+1,i,k));

    end
end

%%-----%%
end

for k=1:length(t)-1

    subplot(1,2,1)
        mesh(X,Y,eta(:,:,k))
        axis([ 0 Lx 0 Ly -1 1 ])
    subplot(1,2,2)
        % mesh(X,Y,eta(:,:,k)); hold on;
        quiver(u_int(:,:,k),v_int(:,:,k));
    %axis([0 X 0 Y ])
    view(2)
    hold off;
    pause(0.000001)
    M(k)=getframe;
end

%numtimes=1;
%fps=1;
%movie(M,numtimes,fps)
movie(M)
```