



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS**

**DINAMICA DE LA FUNCIÓN RECORRIMIENTO EN
DENDRITAS UNIVERSALES CONSTRUÍDAS COMO
LÍMITES INVERSOS GENERALIZADOS**

**MODALIDAD DE GRADUACIÓN:
EXÁMENES GENERALES Y TESINA**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS**

**PRESENTA:
ALVARO REYES GARCÍA**

**DIRECTOR DE TESINA:
DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM**

MÉXICO, D. F. 23 DE MAYO DE 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dinámica de la Función *Recorrimiento* en Dendritas Universales Construídas como Límites Inversos Generalizados

Alvaro Reyes García

Cd. Universitaria, a 23 de mayo de 2013

Resumen

En este trabajo se exhiben algunas propiedades dinámicas de la función *recorrimiento* σ , aplicada a las dendritas universales D_3 y D_ω construídas como límites inversos generalizados en [1] y [2] respectivamente. Se estudia el conjunto de puntos que quedan fijos bajo esta función. También se trabaja con el hiperespacio de cerrados 2^{D_3} y con la función inducida 2^σ .

1. Introducción, Notación y Definiciones

En lo que sigue, X es un *continuo* (es decir, un espacio métrico que es compacto y conexo) con métrica d y f una función con dominio X . Denotamos como \mathbb{Z} al conjunto de los números enteros, y como \mathbb{N} al conjunto de los números naturales o enteros positivos. Dada $f: X \rightarrow X$, convenimos poner $f^0 = id_X$ (la función identidad en X) y $f^n = f \circ f^{n-1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$f^{-1}(x) = \{y \in X : f(y) = x\}, \text{ y } f^{-n}(x) = (f^n)^{-1}(x).$$

Dadas $f: X \rightarrow X$ y $x \in X$, entonces x es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$. El conjunto de puntos fijos de f se denota como $F(f)$.

Para todo $A \subset X$, se tiene $f(A) = \{f(x) \in X : x \in A\}$. Dado $A \subset X$, decimos que A es *invariante (bajo f)* si $f(A) \subset A$, y que es *totalmente invariante* si $f(A) = A$.

Denotamos al *espacio los subconjuntos no vacíos de X que son cerrados*, como 2^X ($2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}$). Consideramos a 2^X como un espacio métrico, con la métrica

de Hausdorff (ver [5] o [6]). Además, $2^f: 2^X \rightarrow 2^X$ es la *función inducida por f en 2^X* y está dada por

$$(2^f)(A) = f(A), \text{ para todo } A \in 2^X.$$

El espacio de los subconjuntos de X con un solo elemento se denota como $\mathcal{F}_1(X)$ ($\mathcal{F}_1(X) = \{\{x\}: x \in X\}$). Observamos que $\mathcal{F}_1(X) \subset 2^X$, y que $A \in 2^X$ es totalmente invariante bajo f si y sólo si $A \in F(2^f)$. Los espacios 2^X y $\mathcal{F}_1(X)$ son conocidos como *hiperespacios de X* .

Los límites inversos juegan un papel muy importante en este trabajo. Usamos los conceptos anteriores para introducirlos.

Al producto cartesiano numerable

$$\prod_{i=1}^{\infty} X = X \times X \times \dots,$$

lo denotamos como X^∞ ; si $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots) \in X^\infty$, entonces para toda $i \in \mathbb{N}$, $\pi_i(\hat{x}) = x_i \in X$ representa la *i -ésima proyección* o la *i -ésima coordenada* de \hat{x} . De forma análoga, para todo $A \subset X^\infty$ tenemos $\pi_i(A) = \{\pi_i(\hat{x}): \hat{x} \in A\}$.

Equipamos a X^∞ con la métrica

$$D(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} d(x_i, y_i).$$

El *límite inverso de $\{X, f\}$* , donde $f: X \rightarrow X$, se denota como $\varprojlim\{X, f\}$ y está dado por

$$\{\hat{x} \in X^\infty: x_i = f(x_{i+1}), \text{ para toda } i \in \mathbb{N}\}.$$

Tomamos ahora $f: X \rightarrow 2^X$. Decimos que f es suprayectiva si se satisface

$$\bigcup_{x \in X} f(x) = X.$$

Entonces el *límite inverso generalizado de $\{X, f\}$* , que se denota como $\varprojlim\{X, f\}$, es:

$$\{\hat{x} \in X^\infty: x_i \in f(x_{i+1}), \text{ para toda } i \in \mathbb{N}\}.$$

Observación 1.1. Si $\varprojlim\{X, f\}$ es un límite inverso y f es una función suprayectiva, entonces $\pi_i(\varprojlim\{X, f\}) = X$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Por ser un subespacio de X^∞ , $\varprojlim\{X, f\}$ hereda la métrica D .

2. La función *recorrimiento*

Ahora definimos la función *recorrimiento* aplicada en límites inversos (generalizados). Además enunciamos algunas de sus características más importantes.

Dado un límite inverso (generalizado) $\varprojlim\{X, f\}$, la función *recorrimiento* $\sigma: \varprojlim\{X, f\} \rightarrow \varprojlim\{X, f\}$, está dada por

$$\sigma(\hat{x}) = (x_2, x_3, \dots), \text{ para todo } \hat{x} \in \varprojlim\{X, f\}.$$

Observación 2.1. Sea $\varprojlim\{X, f\}$ un límite inverso y $\hat{x} \in \varprojlim\{X, f\}$. Entonces $\hat{x} \in F(\sigma)$ si y sólo si $x_1 = x_2 = x_3 = \dots$

Si $\hat{x} \in \varprojlim\{X, f\}$, y $\sigma(\hat{x}) = \hat{y} = (y_1, y_2, \dots)$, entonces $y_i = x_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. De lo anterior se desprenden dos sencillos resultados.

Proposición 2.2. σ está bien definida, es decir, $\sigma(\hat{x}) \in \varprojlim\{X, f\}$ para todo $\hat{x} \in \varprojlim\{X, f\}$.

Esto se tiene por el siguiente hecho:

$$y_i = x_{i+1} \in f(x_{i+2}) = f(y_{i+1}), \text{ para toda } i \in \mathbb{N}.$$

Proposición 2.3. σ es continua.

Se verifica fácilmente, ya que σ es continua en cada coordenada:

$$\pi_i(\sigma(\hat{x})) = \pi_{i+1}(\hat{x}), \text{ para todo } \hat{x} \in \varprojlim\{X, f\} \text{ y para toda } i \in \mathbb{N}.$$

Las premisas de las Proposiciones 2.2 y 2.3 se cumplen independientemente de la elección de $\varprojlim\{X, f\}$.

Teorema 2.4. Sea $\varprojlim\{X, f\}$ un límite inverso. Entonces $\sigma = id_{\varprojlim\{X, f\}}$ si y sólo si $f(x) = \{x\}$, para toda $x \in X$.

Demostración.

\Rightarrow)

Primero suponemos $\sigma = id_{\varprojlim\{X, f\}}$, entonces $f(x) = \{x\}$ para toda $x \in X$.

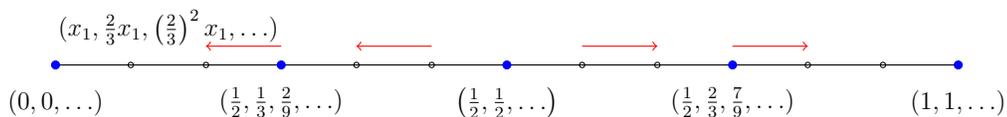
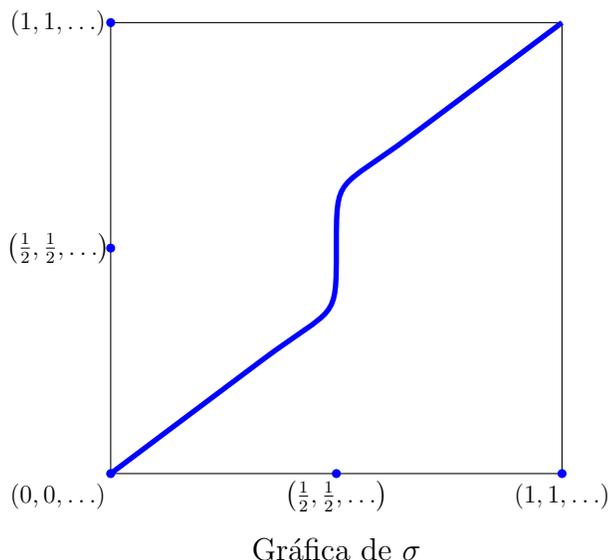
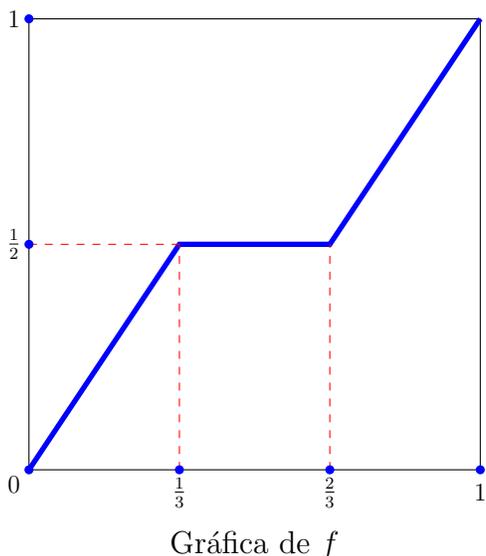
\Leftarrow)

Por otra parte, si $f(x) = \{x\}$, para toda $x \in X$, entonces los elementos de $\varprojlim\{X, f\}$ son de la forma (x, x, \dots) y $\sigma = id_{\varprojlim\{X, f\}}$ por la Observación 2.1. \square

En los Ejemplos 2.5 y 2.6 se aplica la función *recorrimiento* en límites inversos con $X = [0, 1]$.

Ejemplo 2.5. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x/2, & \text{si } x < 1/3 \\ 1/2, & \text{si } x \in [1/3, 2/3] \\ (3x - 1)/2, & \text{si } x > 2/3 \end{cases}$$



Veamos que $\varprojlim \{X, f\} \cong [0, 1]$. Consideramos el siguiente subconjunto de $\varprojlim \{X, f\}$

$$A_1 = \left\{ \hat{x} \in \varprojlim \{X, f\} : x_1 \in [0, 1/2], \text{ y } x_i = (2/3)^{i-1} x_1, \text{ para toda } i > 1 \right\}.$$

El conjunto A_1 es un arco. Ahora consideramos

$$A_2 = \left\{ \hat{x} \in \varprojlim \{X, f\} : x_1 = 1/2, x_2 \in [1/3, 1/2] \text{ y } x_i = (2/3)^{i-2} x_2, \text{ para toda } i > 2 \right\}.$$

Es claro que A_2 es también un arco. Además, $A_1 \cap A_2 = \{(1/2, 1/3, 2/9, \dots)\}$, ya que si $\hat{x} \in A_1 \cap A_2$, entonces $x_1 = 1/2$, $x_2 = (1/2)(2/3) = 1/3$, $x_3 = (1/2)(2/3)^2 = 2/9$ y el resto de las

coordenadas se obtienen de manera análoga. Continuando de manera similar, definimos

$$A_n = \left\{ \hat{x} \in \varprojlim \{X, f\} : x_1 = \dots = x_{n-1} = 1/2, \right. \\ \left. x_n \in [1/3, 1/2] \text{ y } x_i = (2/3)^{i-n} x_n, \text{ para toda } i > n \right\},$$

para $n > 1$. Aquí se observa que A_n es un arco. Además si $m < n$, entonces $A_n \cap A_m \neq \emptyset$ si y sólo si $m = n - 1$. De hecho dicha intersección se da en el punto $(\overbrace{1/2, \dots, 1/2}^{n-1}, 1/3, 2/9, \dots)$. Entonces es sencillo verificar que

$$A: = \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)} = \left\{ \hat{x} \in \varprojlim \{X, f\} : x_i \leq 1/2, \text{ para toda } i \in \mathbb{N} \right\},$$

es un arco con puntos extremos $(0, 0, \dots)$ y $(1/2, 1/2, \dots)$.

De forma análoga definimos

$$B_1 = \left\{ \hat{x} \in \varprojlim \{X, f\} : x_1 \in [1/2, 1], \text{ y } x_i = (2/3)^{i-1} x_1 \right. \\ \left. + 1/3 + \dots + (1/3)(2/3)^{i-1}, \text{ para toda } i > 1 \right\},$$

y también

$$B_n = \left\{ \hat{x} \in \varprojlim \{X, f\} : x_1 = \dots = x_{n-1} = 1/2, x_n \in [1/2, 1/3] \right. \\ \left. \text{ y } x_i = (2/3)^{i-n} x_n + 1/3 + \dots + (1/3)(2/3)^{i-1}, \text{ para toda } i > n \right\},$$

para $n > 1$. Entonces

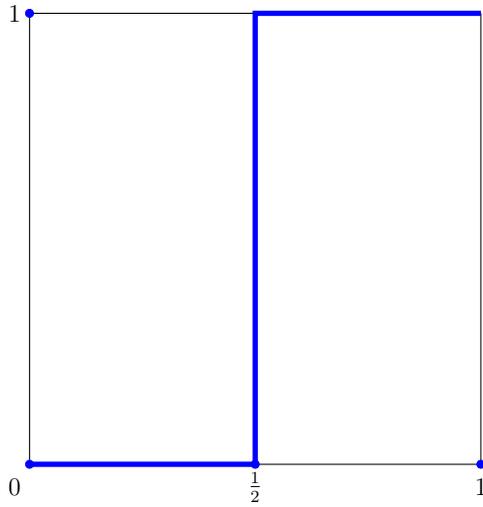
$$B: = \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)} = \left\{ \hat{x} \in \varprojlim \{X, f\} : x_i \geq 1/2, \text{ para toda } i \in \mathbb{N} \right\}$$

es un arco con puntos extremos $(1, 1, \dots)$ y $(1/2, 1/2, \dots)$. Así concluimos que $\varprojlim \{X, f\}$ es un arco. Además, observamos que $(0, 0, \dots)$, $(1, 1, \dots)$ y $(1/2, 1/2, \dots)$ son los únicos puntos que quedan fijos bajo σ .

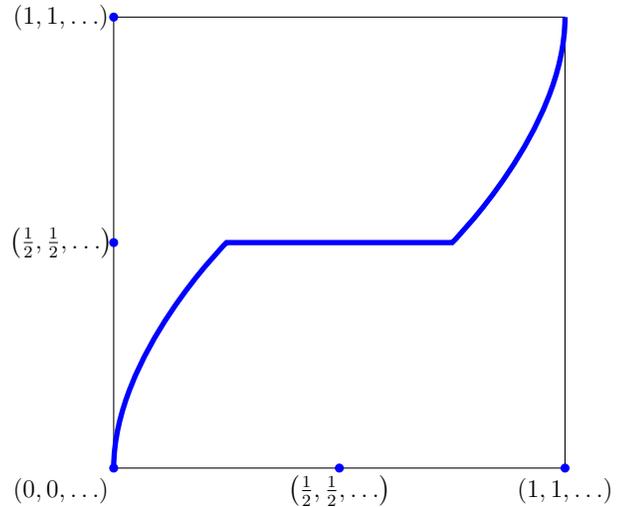
En el Diagrama 1 se bosqueja el comportamiento de σ .

Ejemplo 2.6. Sea $F: [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ [0, 1], & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \{1\}, & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Gráfica de f



Gráfica de σ

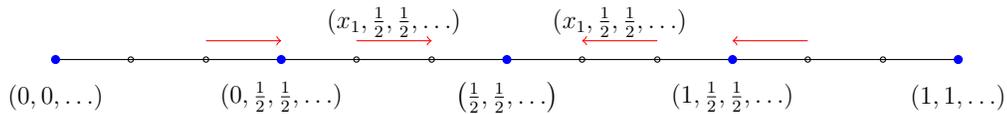


Diagrama 2

Nuevamente se tiene $\varprojlim\{X, f\} \cong [0, 1]$, y el lector lo puede corroborar de forma sencilla usando un procedimiento similar al del Ejemplo 2.5. $F(\sigma) = \{(0, 0, \dots), (1/2, 1/2, \dots), (1, 1, \dots)\}$, sin embargo la función σ es distinta a la respectiva del Ejemplo 2.5.

Observación 2.7. Sea $\varprojlim\{X, f\}$ un límite inverso y $\hat{x} \in \varprojlim\{X, f\}$, entonces $\pi_1(\sigma^{-1}(\hat{x})) = f(x_1)$.

Una función f es *monótona* si $f^{-1}(x)$ es un conjunto conexo, para toda $x \in X$.

Teorema 2.8. Sea $\varprojlim\{X, f\}$ un límite inverso. Entonces σ es monótona si y sólo si $f(x)$ es conexo, para toda $x \in X$.

La demostración se sigue de forma inmediata de la Observación 2.7

El Teorema 2.8 nos indica que en los límites inversos exhibidos en los Ejemplos 2.5 y 2.6, σ es una función monótona.

Es importante notar que σ siempre es suprayectiva (en el sentido usual) y no depende de la elección de $\varprojlim\{X, f\}$.

Teorema 2.9. *Sea $\varprojlim\{X, f\}$ un límite inverso. Entonces σ es biyectiva si y sólo si $f(X) = \mathcal{F}_1(X)$.*

Demostración.

\Rightarrow)

Suponemos que σ es biyectiva y sean $x \in X$ y $y, z \in f(x)$. Tomamos $\hat{y}, \hat{z} \in \varprojlim\{X, f\}$ con $y_1 = y, z_1 = z, y_2 = z_2 = x$ y $y_i = z_i$ para toda $i \geq 3$. Entonces $\sigma(\hat{y}) = \sigma(\hat{z})$, y se sigue $\hat{y} = \hat{z}$ y $y = z$.

\Leftarrow)

Suponemos que $f(X) = \mathcal{F}_1(X)$. Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \varprojlim\{X, f\}$ tales que $\sigma(\hat{x}) = \sigma(\hat{y})$. Entonces $x_i = y_i$, para toda $i \geq 2$, como $|f(x_2)| = 1$ tenemos $x_1 = y_1$ y así $\hat{x} = \hat{y}$. \square

En el Ejemplo 2.5, σ es una función biyectiva. En el Ejemplo 2.6 σ no es biyectiva, ya que $f(1/2) = [0, 1]$, y $[0, 1]$ no es elemento de $\mathcal{F}_1([0, 1])$.

3. Construcciones y Aplicaciones de *recorrimiento* en Dendritas Universales

Una *dendrita* es un continuo que es localmente conexo y hereditariamente unicoherente, es decir, que no contiene curvas cerradas simples.

Dada una dendrita D , un elemento $p \in D$ y κ un cardinal, decimos que el orden de p en D es menor o igual a κ ($\text{ord}(p, D) \leq \kappa$), si para todo abierto $U \subset D$ con $p \in U$, existe una vecindad V de p tal que $V \subset U$ y $|\partial(V)| \leq \kappa$. Si $\text{ord}(p, D) \leq \kappa$ y no se cumple $\text{ord}(p, D) \leq \lambda$ para toda $\lambda < \kappa$, decimos que el orden de p en D es κ ($\text{ord}(p, D) = \kappa$).

Los puntos de orden 1 en una dendrita D son los puntos terminales de D . El conjunto de puntos terminales de D lo denotamos como $E(D)$. Los puntos de orden 2 en D son los puntos ordinarios de D , y dicho conjunto se denota como $O(D)$. Por último están los puntos de

ramificación de D . Estos son los puntos de orden mayor o igual a 3. A este conjunto lo denotamos como $R(D)$.

Suponemos que S es una clase de espacios. Un elemento $U \in S$ es *universal* para S si cada elemento de S se puede encajar en U , es decir, para todo $X \in S$ existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow h(X) \subset U$. Con base en lo anterior, una dendrita es universal si contiene una imagen homeomorfa de cualquier otra dendrita. Dada $m \in \{3, 4, \dots, \omega\}$, D_m es la *dendrita universal de orden m* . En particular, D_ω es la *dendrita universal*. El lector puede consultar [10, Capítulo K, p.137], [8, Capítulo X, §6, p.318] y [3, 4].

Imitamos las construcciones hechas en [1] y [2] para obtener una funciones cuyos límites inversos respectivos son D_3 y D_ω .

3.1. Construcción de D_3

Sea $\{a_i\}_{i=1}^\infty \subset (0, 1) \setminus \{2^{-j}\}_{j=1}^\infty$ una sucesión densa en $[0, 1]$ que cumple $2^k a_i \neq a_j$ para toda $k \in \mathbb{Z}$ y para toda $i \neq j$. Claramente el conjunto

$$S_0 = \{2^k a_i : k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}\}$$

es numerable. Tomamos $\{b_i\}_{i=1}^\infty \subset (0, 1)$ como sigue:

$b_1 \in (a_1/2, 1/2)$ con $b_1 < 3a_1/4$. Como $R_1 = \{2^k a_1\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto discreto en $(0, 1)$ y $a_2/2 \notin R_1$, entonces escogemos $b_2 \in (a_2/2, 1/2)$ que cumpla $[a_2/2, b_2] \cap R_1 = \emptyset$, $|b_2 - a_2/2| < \min\{1/2^2, a_2/4\}$ y $b_2 \notin S_0$. De manera similar, continuamos la construcción. Teniendo b_1, \dots, b_j , introducimos $S_j = S_0 \cup \{2^k b_i : k \in \mathbb{Z}, i \in \{1, \dots, j\}\}$ y $R_j = \{2^k a_i : k \in \mathbb{Z}, i \in \{1, \dots, j\}\}$. Como R_j es discreto y $a_{j+1}/2 \notin R_j$, tomamos $b_{j+1} \in (a_{j+1}/2, 1/2) \setminus S_j$ con $[a_{j+1}/2, b_{j+1}] \cap R_j = \emptyset$ y $|b_{j+1} - a_{j+1}/2| < \min\{1/2^{j+1}, a_{j+1}/4\}$.

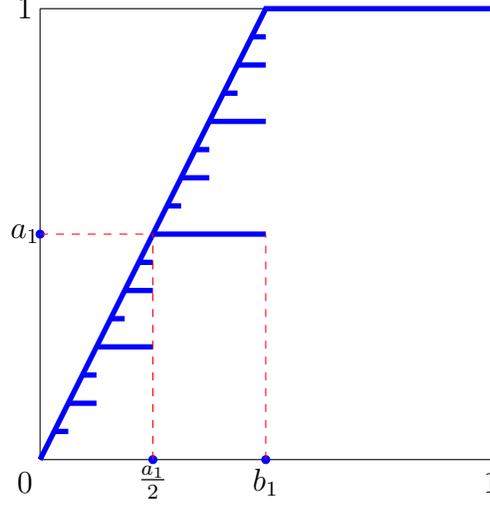
Entonces definimos

$$T = \{(x, 2x) : x \in [0, 1/2]\} \cup ([1/2, 1] \times \{1\}) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} ([a_i/2, b_i] \times \{a_i\}) \right).$$

Se verifica que T es cerrado en $[0, 1] \times [0, 1]$, y por lo tanto es la gráfica de una función semi-continua superiormente [7]. Dicha función $f: [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \{2x\} \cup \{a_i : x \in [a_i/2, b_i]\}, & \text{si } x < 1/2 \\ \{1\}, & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

En [1] se demuestra que el límite inverso que se obtiene a partir de dicha función es D_3 y se caracterizan sus puntos.



Gráfica de f
Diagrama 3

A continuación presentamos un resultado más de Martínez-de-la-Vega, donde se exhibe una nueva función de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ que también tiene por límite inverso a la dendrita D_3 .

Teorema 3.1. Sea $g: [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \{2x\} \cup \{d_i: x \in [d_i/2, e_i]\}, & \text{si } x < 1/2 \\ \{1\}, & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

donde $d_i = a_i/2$ y $e_i = b_i/2$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\varprojlim\{[0, 1], f\} \cong \varprojlim\{[0, 1], g\}$.

Demostración. Considera $\varphi: \varprojlim\{[0, 1], g\} \rightarrow \varprojlim\{[0, 1], f\}$ dada por:

$$\varphi(\hat{x}) = \varphi((x_1, x_2, \dots)) = (\max\{2x_1, 1\}, \max\{2x_2, 1\}, \dots).$$

Es sencillo verificar que φ es un homeomorfismo. □

Corolario 3.2. Sean $\alpha \in (0, 1)$ y $k: [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por

$$k(x) = \begin{cases} \{2x\} \cup \{r_i: x \in [r_i/2, s_i]\}, & \text{si } x < 1/2 \\ \{1\}, & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

donde $r_i = \alpha a_i$ y $s_i = \alpha b_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\varprojlim\{[0, 1], f\} \cong \varprojlim\{[0, 1], k\}$.

Consideramos la función $N: D_3 \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ dada por

$$N(\hat{x}) = |\{n \in \mathbb{N}: 1 \neq x_n \neq 2x_{n+1}\}|, \text{ para cada } \hat{x} \in D_3.$$

Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos

$$N_k(D_3) = N^{-1}(\{0, 1, \dots, k\}).$$

Observamos que el conjunto $N_0(D_3)$ es precisamente el arco que une a los puntos $(0, 0, \dots)$ y $(1, 1, \dots)$. Los conjuntos $N_0(D_3)$, $N_1(D_3)$, $N_2(D_3)$ y $N_3(D_3)$ se bosquejan en el Diagrama 5 en la página 18 de este trabajo.

Una propiedad que se verifica de manera sencilla es que $N_0(D_3)$, $N_1(D_3)$, $N_2(D_3)$, \dots constituye una sucesión creciente de subconjuntos de D_3 , es decir,

$$N_{k-1}(D_3) \subset N_k(D_3), \text{ para toda } k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

También consideramos el conjunto $N_\infty(D_3) = N^{-1}(\infty)$. Se trata de un subconjunto de $E(D_3)$, y está formado por los puntos terminales que no pertenecen a ningún conjunto $N_k(D_3)$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En el Diagrama 5 no aparece bosquejado N_∞ . Entre las propiedades más importantes de $N_\infty(D_3)$ están el hecho de que es un conjunto denso en D_3 y que es subconjunto de la frontera de $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k(D_3)$, como se puede apreciar en la Proposición 3.3 y en el Teorema 3.13.

Proposición 3.3. $N_\infty(D_3)$ es un conjunto denso en D_3 .

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\hat{x} \in D_3 \setminus N_\infty(D_3)$. Hay tres casos:

1. $\hat{x} = (1, 1, \dots)$.

Tomamos $n \in \mathbb{N}$ que cumpla

$$\sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} < \varepsilon.$$

Ahora escogemos \hat{y} , con

$$\begin{aligned} y_i &= 1, & \text{si } i < n, \\ y_n &\in \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \cap (1/2, 1), & \text{y escribimos } y_n = a_{i_n}, \\ y_{n+1} &\in \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \cap (a_{i_n}/2, b_{i_n}), & \text{y escribimos } y_{n+1} = a_{i_{n+1}}, \\ &\vdots \\ y_{n+j} &\in \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \cap (a_{i_{n+j-1}}/2, b_{i_{n+j-1}}), & \text{y escribimos } y_{n+j} = a_{i_{n+j}}, \text{ para toda } j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Entonces $\hat{y} \in N_\infty$ y $D(\hat{x}, \hat{y}) < \varepsilon$.

2. $\hat{x} \in N_0(D_3) \setminus \{(0, 0, \dots)\}$.

Sea $n = \min \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 1\}$. De manera similar al caso previo, escogemos \hat{y} con

$$\begin{aligned}
& y_i = 1, & \text{si } i < n, \\
& y_n \in \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \cap (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon), & \text{y escribimos } y_n = a_{i_n}, \\
& y_{n+1} \in \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \cap (a_{i_n}/2, c_{i_n}), & \text{con } c_{i_n} = \min\{b_{i_n}, a_{i_n} + \varepsilon/2\}, \text{ y escribimos} \\
& & y_{n+1} = a_{i_{n+1}} \\
& & \vdots \\
& y_{n+j} \in \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \cap (a_{i_{n+j-1}}/2, c_{i_{n+j-1}}), & \text{con } c_{i_{n+j-1}} = \min\{b_{i_{n+j-1}}, a_{i_{n+j-1}} + \varepsilon/2\}, \text{ y} \\
& & \text{escribimos } y_{n+j} = a_{i_{n+j}}, \text{ para toda } j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Entonces $\hat{y} \in N_{\infty}(D_3)$, además se tiene

$$\begin{aligned}
D(\hat{x}, \hat{y}) &= \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i| \\
&= 2^{-n} |x_n - y_n| + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i| \\
&\leq 2^{-n} |x_n - y_n| + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} (|x_{i-1}/2 - y_{i-1}/2| + |y_{i-1}/2 - y_i|) \\
&< \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} \varepsilon \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

3. $\hat{x} \in N_k$, con $k \in \mathbb{N}$.

Sea $n = \max \{n \in \mathbb{N} : 1 \neq x_{n-1} \neq 2x_n\}$. Observamos que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a_{i_0}/2, b_{i_0})$. Entonces escogemos \hat{y} , con $y_n \in \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \cap (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon) \cap (a_{i_0}/2, b_{i_0})$, y y_i como en el caso anterior, para toda $i \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$. El resultado se obtiene de forma análoga al caso 2.

□

3.2. Construcción de D_ω

Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión densa en $[0, 1]$. Consideramos ahora $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [0, 1]$ que cumpla las siguientes condiciones:

1. $a_n < b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. $a_n \neq a_m$, si $n \neq m$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$
4. Para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geq M$ se cumple que si $a_m < a_n$, entonces $b_m < a_m$.

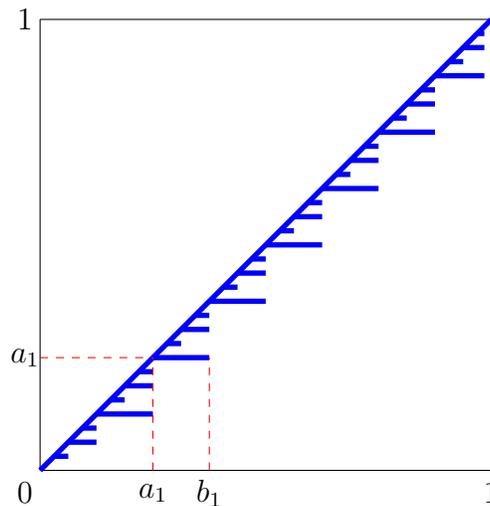
Consideramos el conjunto

$$T = \{(x, x) : x \in [0, 1]\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} ([a_i, b_i] \times \{a_i\}) \right).$$

Es fácil ver que T es un conjunto cerrado en $[0, 1] \times [0, 1]$. Definimos $f: [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por:

$$f(x) = \{x\} \cup \{a_i : x \in [a_i, b_i]\}.$$

El límite inverso resultante es precisamente D_ω . Para ver más detalles, el lector puede consultar [2].



Gráfica de f
Diagrama 4

Ahora introducimos $N: D_\omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ dada por

$$N(\hat{x}) = |\{n \in \mathbb{N}: x_n \neq x_{n+1}\}|, \text{ para cada } \hat{x} \in D_\omega.$$

De manera análoga a D_3 , definimos

$$N_k(D_\omega) = N^{-1}(\{0, 1, \dots, k\}),$$

$$N_\infty(D_\omega) = N^{-1}(\infty),$$

y se puede verificar que la propiedad (1) se cumple para D_ω . En el Diagrama 6 en la página 19 están descritos los conjuntos $N_0(D_\omega)$, $N_1(D_\omega)$ y $N_2(D_\omega)$.

Observación 3.4. Sea $\hat{x} \in D_\omega$. Entonces $\hat{x} \in N_0(D_\omega)$ si y sólo si $x_1 = x_2 = x_3 = \dots$

El siguiente resultado es parecido a la Proposición 3.3.

Proposición 3.5. $N_\infty(D_\omega)$ es un conjunto denso D_ω .

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\hat{x} \in D_\omega \setminus N_\infty(D_\omega)$. Consideramos tres posibles casos:

1. $\hat{x} \in N_0(D_\omega)$.

Escogemos \hat{y} con

$$\begin{aligned} y_1 &\in \{a_i\}_{i=1}^\infty \cap (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon), & \text{y escribimos } y_1 &= a_{i_1}, \\ y_2 &\in \{a_i\}_{i=1}^\infty \cap (a_{i_1}, c_{i_1}), & \text{con } c_{i_1} &= \min\{b_{i_1}, a_{i_1+1} + \varepsilon/2\}, \text{ y escribimos} \\ & & y_2 &= a_{i_2}, \\ & & & \vdots \\ y_{n+j} &\in \{a_i\}_{i=1}^\infty \cap (a_{i_{n+j-1}}, c_{i_{n+j-1}}), & \text{con } c_{i_{n+j-1}} &= \min\{b_{i_{n+j-1}}, a_{i_{n+j-1}} + \varepsilon/2\}, \text{ y} \\ & & \text{escribimos } y_{n+j} &= a_{i_{n+j}}, \text{ para toda } j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así, $\hat{y} \in N_\infty(D_\omega)$. Además, de la Observación 3.4 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} D(\hat{x}, \hat{y}) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i| \\ &= |x_1 - y_1|/2 + \sum_{i=2}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i| \\ &\leq |x_1 - y_1|/2 + \sum_{i=2}^{\infty} 2^{-i} (|x_{i-1} - y_{i-1}| + |y_{i-1} - y_i|) \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} \varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

2. $\hat{x} \in N_k$, con $k \in \mathbb{N}$.

Sea $n = \max \{n \in \mathbb{N} : x_{n-1} \neq x_n\}$. Entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a_{i_0}, b_{i_0})$. Entonces escogemos \hat{y} , con $y_n \in \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \cap (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon) \cap (a_{i_0}/2, b_{i_0})$, y también

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{si } i < n \\ \text{como en el caso 1,} & \text{si } i > n \end{cases}$$

□

3.3. Aplicación de *recorrimiento* σ en la Dendrita D_3

Juntamos las ideas de las Secciones 2 y 3 para estudiar a σ en D_3 , y a 2^σ en el hiperespacio 2^{D_3} .

En virtud de los Teoremas 2.8 y 2.9, σ no es monótona y no es biyectiva en D_3 . El conjunto de puntos fijos de σ está dado por

$$F(\sigma) = \{(0, 0, \dots), (1, 1, \dots)\}.$$

Además de ser puntos fijos de σ , $(0, 0, \dots)$ y $(1, 1, \dots)$ son un atractor y un repulsor (respectivamente) de σ . Esto se aprecia en los siguientes resultados.

Proposición 3.6. *Sea $\hat{x} \in D_3 \setminus \{(1, 1, \dots)\}$. Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(\hat{x}) = (0, 0, \dots).$$

La demostración de esto, se sigue del hecho de que si $x_i \neq 1$, entonces $x_{i+1} \leq 3x_i/4$, para toda $i \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.7. *Si $A \in 2^{D_3}$ y $(1, 1, \dots) \notin A$, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \{D(\hat{x}, \hat{y}) : \hat{x}, \hat{y} \in (2^\sigma)^n(A)\}) = 0.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(1, 1, \dots) \notin A$, entonces $\{\pi_i^{-1}[0, 1]\}_{i=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de A . Por ser compacto A , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n \pi_i^{-1}[0, 1].$$

Además, $\pi_{n+1}(A)$ es compacto en $[0, 1]$ y $1 \notin \pi_{n+1}(A)$. Sea $\alpha = \max(\pi_{n+1}(A))$, Tomamos $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que cumpla $(3/4)^j \alpha < \varepsilon$. Entonces

$$\max(\pi_1(\sigma^{n+j}(A))) = \max(\pi_{n+j}(A)) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^j \alpha < \varepsilon.$$

Concluimos que si $\hat{x}, \hat{y} \in \sigma^{n+j}(A)$, entonces

$$D(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^j \alpha \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} < \varepsilon.$$

□

Corolario 3.8. Si $A \in 2^{D_3}$ y $(1, 1, \dots) \notin A$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^\sigma)^n(A) = \{(0, 0, \dots)\}.$$

Corolario 3.9. Sea $\hat{x} \in D_3 \setminus \{(0, 0, \dots)\}$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{-n}(\hat{x}) = \{(1, 1, \dots)\}.$$

(Con la métrica de Hausdorff)

Es sencillo ver que $\{(0, 0, \dots)\}, \{(1, 1, \dots)\} \in F(2^\sigma)$. También se deduce que D_3 y $\{(0, 0, \dots), (1, 1, \dots)\}$ son elementos fijos de 2^σ . Nos preguntamos entonces si existe algún otro elemento en 2^{D_3} que esté en $F(2^\sigma)$. En la siguiente proposición se describe una familia de conjuntos en $F(2^\sigma)$.

Definimos $H: D_3 \rightarrow 2^{D_3}$ como sigue

$$H(\hat{x}) = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma^{-n}(\hat{x}) \right] \cup \{\sigma^n(\hat{x})\}_{n=0}^{\infty} \cup \{(0, 0, \dots), (1, 1, \dots)\}, \text{ para cada } \hat{x} \in D_3.$$

Proposición 3.10. Para cada $\hat{x} \in D_3$, $H(\hat{x}) \in F(2^\sigma)$.

Demostración. Basta observar que $2^\sigma(\{(0, 0, \dots), (1, 1, \dots)\}) = \{(0, 0, \dots), (1, 1, \dots)\}$, y que para todo $\hat{x} \in D_3$, $\sigma(\sigma^{-1}(\hat{x})) = \{\hat{x}\}$ y $\sigma(\sigma^{n-1}(\hat{x})) = \sigma^n(\hat{x})$, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. □

Una propiedad interesante que presenta la función N (estudiada en la Sección 3.1) es que si $N(\hat{x}) = k$ para alguna $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $N(\sigma(\hat{x})) \leq k$. Esto se sigue del siguiente hecho

$$N(\hat{x}) = |\{n \in \mathbb{N}: 1 \neq x_n \neq 2x_{n+1}\}| \Rightarrow N(\sigma(\hat{x})) = |\{n-1: 1 \neq x_n \neq 2x_{n+1}\} \cap \mathbb{N}|. \quad (2)$$

Por (2) se tiene también que $N(\sigma(\hat{x})) = \infty$ si y sólo si $N(\hat{x}) = \infty$.

Proposición 3.11. $N_k(D_3) \in F(2^\sigma)$, para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. De (2) se sigue que $2^\sigma(N_k(D_3)) \subset N_k(D_3)$. Para ver que la otra contención se cumple también, tomamos $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots) \in N_k(D_3)$. Definimos $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots)$ como sigue:

$$y_i = \begin{cases} \min\{2x_1, 1\}, & \text{si } i = 1 \\ x_{i-1}, & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

Es claro que $\hat{y} \in N_k(D_3)$ y que $\sigma(\hat{y}) = \hat{x}$, de donde se sigue el resultado. □

Corolario 3.12. $D_3 \setminus N_\infty(D_3) = \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k(D_3)$ es totalmente invariante bajo σ .

Después de haber obtenido los resultados anteriores, es natural preguntarnos si existe algún otro elemento en $F(2^\sigma)$ que no sea unión o subconjunto de los anteriores. Adelantando conclusiones, podemos decir que si dicho conjunto existe, su cardinalidad es infinita, ya que por la naturaleza de σ , los únicos elementos fijos finitos de 2^σ son $\{(0, 0, \dots)\}$, $\{(1, 1, \dots)\}$ y $\{(0, 0, \dots), (1, 1, \dots)\}$.

Para concluir esta parte del trabajo, presentamos un par de resultados más relacionados con las iteraciones de σ y 2^σ .

Teorema 3.13. Sean $\hat{x} \in N_\infty(D_3)$ y $A \in 2^{D_3}$ con $\hat{x} \in \text{int}(A)$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que cumple $(2^\sigma)^{n_0}(A) \cap N_0(D_3) \neq \emptyset$.

Demostración. Por (1) y por el Teorema de Anderson-Choquet (ver [9, Capítulo II, p.p. 23]), se tiene que

$$D_3 \cong \overline{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k(D_3) \right)},$$

de donde se sigue que $N_\infty(D_3) \subset \partial(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k(D_3))$. Como $\hat{x} \in \text{int}(A)$, entonces $A \cap N_k \neq \emptyset$, para alguna $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $\hat{y} \in A \cap N_k(D_3)$, tomamos

$$n_0 = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 0 \\ \max\{n \in \mathbb{N} : 1 \neq y_n \neq 2y_{n+1}\}, & \text{si } k \geq 1 \end{cases},$$

y así $\sigma^{n_0}(\hat{y}) \in N_0$. □

Ahora vemos que pasa con los puntos terminales, ordinarios y de ramificación en D_3 bajo las iteraciones de σ . En la siguiente tabla se describe la naturaleza de las últimas coordenadas de los puntos de D_3 .

$\widehat{x} \in \dots$	\Rightarrow	$\widehat{x} = \dots$
$\widehat{x} \in E(D_3) \setminus N_\infty(D_3)$	\Rightarrow	$\widehat{x} = (\dots a_i, b_i, \frac{b_i}{2}, \frac{b_i}{2^2}, \dots)$, para alguna $i \in \mathbb{N}$.
$\widehat{x} \in O(D_3)$	\Rightarrow	$\widehat{x} = (\dots a_i, x, \frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \dots)$, donde $x \in (a_i/2, b_i)$, para alguna $i \in \mathbb{N}$.
$\widehat{x} \in R(D_3)$	\Rightarrow	$\widehat{x} = (\dots, a_i, \frac{a_i}{2}, \frac{a_i}{2^2}, \dots)$, para alguna $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.14.

1. Si $\widehat{x} \in E(D_3) \cap [N_0(D_3) \cup N_\infty(D_3)]$, entonces $\sigma^n(\widehat{x}) \in E(D_3)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $\widehat{x} \in O(D_3)$, entonces $\sigma^n(\widehat{x}) \in O(D_3)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
3. Si $\widehat{x} \in \{E(D_3) \setminus [N_0(D_3) \cup N_\infty(D_3)]\} \cup R(D_3)$, entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\sigma^{m_0}(\widehat{x}) \in O(D_3) \cap N_0(D_3)$, de tal manera que $\sigma^{m_0}(\widehat{x}) \in O(D_3) \cap N_0(D_3)$, y $\sigma^n(\widehat{x}) \notin O(D_3)$ para toda $n \in \{0, \dots, m_0 - 1\}$.

Demostración. La primera afirmación se sigue inmediatamente de la Proposición 3.11. Para demostrar la segunda, ocupamos [1, Propiedad 15]:

Si $\widehat{x} \in O(D_3)$, entonces

$$\widehat{x} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n_0} \underbrace{(2^{n_1-n_0-1}a_{i_1}, 2^{n_1-n_0-2}a_{i_1}, \dots, 2a_{i_1}, a_{i_1})}_{n_1-n_0} \underbrace{(2^{n_2-n_1-1}a_{i_2}, 2^{n_2-n_1-2}a_{i_2}, \dots, 2a_{i_2}, a_{i_2}, \dots)}_{n_2-n_1} \dots \underbrace{(2^{n_k-n_{k-1}-1}a_{i_k}, 2^{n_k-n_{k-1}-2}a_{i_k}, \dots, 2a_{i_k}, a_{i_k})}_{n_k-n_{k-1}} \underbrace{(x_{n_{k+1}}, \frac{x_{n_{k+1}}}{2}, \frac{x_{n_{k+1}}}{2^2}, \dots)}_{n_k-n_{k-1}}, \quad (3)$$

donde $N(\widehat{x}) = k$, $0 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_k$, $\{a_{i_j}\}_{j=1}^k \subset \{a_i\}_{i=1}^\infty$ y $x_{n_{k+1}} \in (a_{i_k}/2, b_{i_k})$. Es claro que cualquier iteración de \widehat{x} bajo σ es un elemento de D_3 con la misma estructura. De ahí se concluye que $\sigma^n(\widehat{x}) \in O(D_3)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Pasamos a la tercera afirmación. Si $\widehat{x} \in \{E(D_3) \setminus [N_0(D_3) \cup N_\infty(D_3)]\} \cup R(D_3)$, entonces por un argumento similar al del Teorema 3.13 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^m(\widehat{x}) \in N_0(D_3)$. Por otro lado $\sigma^{-n}((0, 0, \dots)) = \{(0, 0, \dots)\}$ y $\sigma^{-n}(1, 1, \dots) = \{(1, 1, \dots)\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\sigma^m(\widehat{x}) \in N_0(D_3) \cap O(D_3).$$

Por último, si $\hat{x} \in E(D_3) \setminus [N_0(D_3) \cup N_\infty(D_3)]$, entonces \hat{x} se escribe como en (3) con $x_{n_{k+1}} = b_{i_k}$, y si $\hat{x} \in R(D_3)$, entonces \hat{x} se escribe como en (3) con $x_{n_{k+1}} = a_{i_k}/2$. Así $\sigma^n(\hat{x}) \notin O(D_3)$ si $n < n_k$. Tomamos $m_0 = n_k$ para concluir. \square

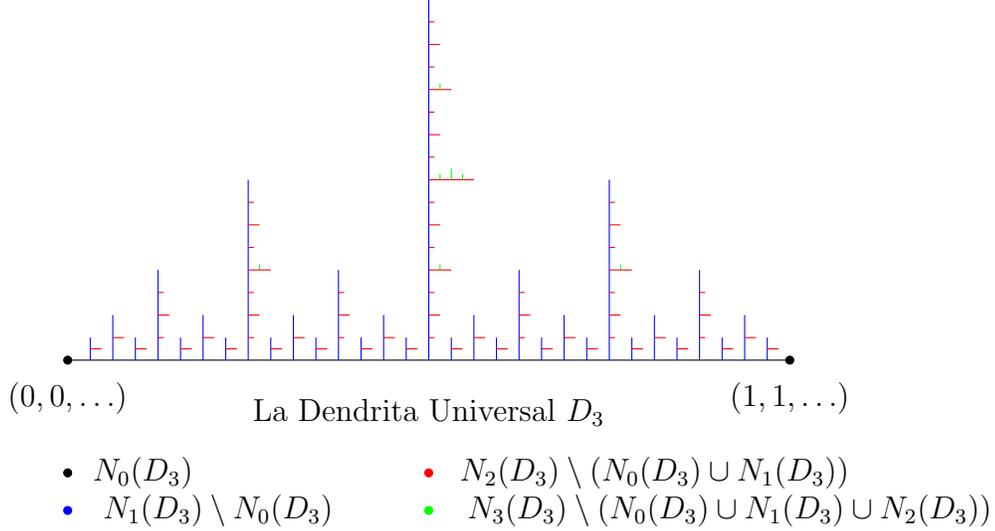


Diagrama 5

3.4. Aplicación de *recorrimiento* σ en la Dendrita D_ω

Igual que en su versión anterior, σ no es monótona ni biyectiva en D_ω ya que no se satisfacen las condiciones de los Teoremas 2.8 y 2.9. Sin embargo, en este caso el conjunto de puntos fijos es infinito y además resulta ser un atractor para todos los puntos que no están en $N_\infty(D_\omega)$

Teorema 3.15. *Sea $\hat{x} \in D_\omega$. Entonces $\hat{x} \in F(\sigma)$ si y sólo si $\hat{x} \in N_0(D_\omega)$.*

El resultado anterior es consecuencia directa de las Observaciones 2.1 y 3.4. Tenemos ya caracterizados los puntos fijos en D_ω bajo σ .

Teorema 3.16.

1. Si $\hat{x} \in E(D_\omega) \cap [N_0(D_\omega) \cup N_\infty(D_\omega)]$, entonces $\sigma^n(\hat{x}) \in E(D_\omega)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $\hat{x} \in O(D_\omega)$, entonces $\sigma^n(\hat{x}) \in O(D_\omega)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y si $\hat{x} \in R(D_\omega)$, entonces $\sigma^n(\hat{x}) \in R(D_\omega)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.
3. Si $\hat{x} \in E(D_\omega) \setminus [N_0(D_\omega) \cup N_\infty(D_\omega)]$, entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\sigma^{m_0}(\hat{x}) \in N_0(D_\omega)$, y $\sigma^n(\hat{x}) \notin N_0(D_\omega)$, para toda $n \in \{0, \dots, m_0 - 1\}$.

Demostración. Para la primera afirmación se procede de forma similar al Teorema 3.14

En la construcción hecha en [2], se obtiene que si $\hat{x} \in O(D_\omega)$, entonces

$$\hat{x} = \left(\overbrace{a_{i_1}, \dots, a_{i_1}}^{n_1}, \overbrace{a_{i_2}, \dots, a_{i_2}}^{n_2 - n_1}, \dots, \overbrace{a_{i_k}, \dots, a_{i_k}}^{n_k - n_{k-1}}, x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+1}}, \dots \right), \quad (4)$$

donde $N(\hat{x}) = k$, $0 \leq n_1 < \dots < n_k$, $\{a_{i_j}\}_{j=1}^k \subset \{a_i\}_{i=1}^\infty$ y $x_{n_{k+1}} \in (a_{i_k}, b_{i_k})$. Similarmente si $\hat{x} \in R(D_\omega)$, entonces \hat{x} se escribe como en (4), con $x_{n_{k+1}} = a_{i_k}$. En ambos casos, es claro que cualquier iteración de \hat{x} bajo σ es un elemento de D_ω con la misma estructura, con lo que queda demostrada la segunda afirmación.

Sea $\hat{x} \in E(D_\omega) \setminus [N_0(D_\omega) \cup N_\infty(D_\omega)]$. Entonces \hat{x} se escribe como en (4), con $n_1 > 0$ y $x_{n_{k+1}} = b_{i_k}$. Entonces, tomando $m_0 = n_k$ obtenemos

$$\sigma^{m_0}(\hat{x}) = (b_{i_k}, b_{i_k}, \dots), \text{ y } (b_{i_k}, b_{i_k}, \dots) \text{ está en } N_0(D_\omega),$$

y si $n \in \{0, \dots, m_0 - 1\}$, entonces

$$N(\sigma^n(\hat{x})) > 0, \text{ y } \sigma^n(\hat{x}) \notin N_0(D_\omega),$$

con lo que se concluye la demostración. □

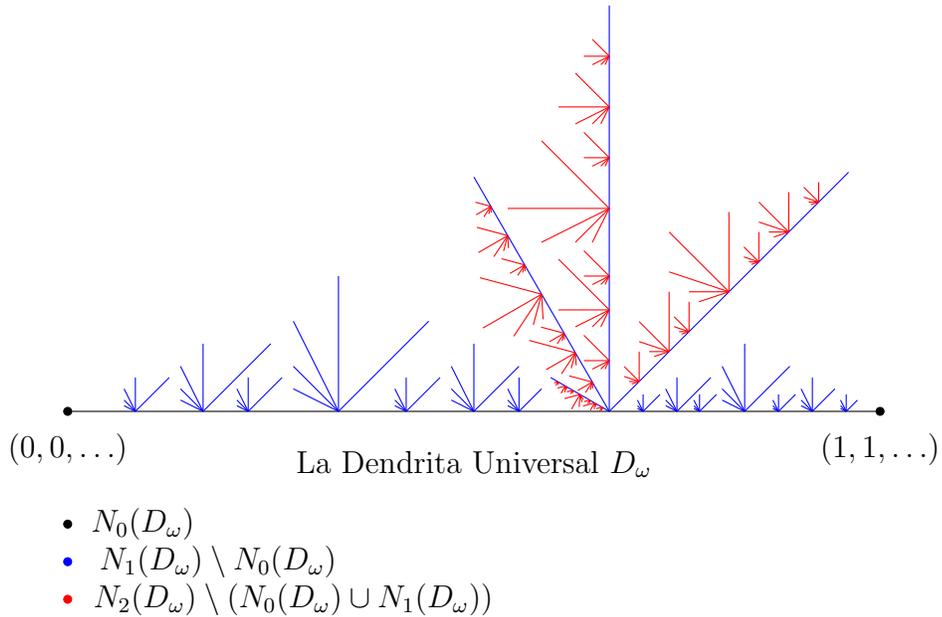


Diagrama 6

Se recomienda al lector consultar los detalles en [2]. En el Teorema 3.16 se demuestra que si \hat{x} está en $E(D_\omega) \setminus [N_0(D_\omega) \cup N_\infty(D_\omega)]$, entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\sigma^{m_0}(\hat{x})$

pertenece a $N_0(D_\omega)$. Sin embargo, para determinar si $\sigma^{m_0}(\hat{x})$ está en $E(D_\omega)$, en $O(D_\omega)$ o en $R(D_\omega)$, debemos fijarnos en x_{m_0} . Si $x_{m_0} = 1$, entonces $\sigma^{m_0}(\hat{x}) = (1, 1, \dots)$ y así $\sigma^{m_0}(\hat{x})$ es un punto terminal de D_ω . Por otro lado, si $x_{m_0} \in \{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\sigma^{m_0}(\hat{x})$ es un punto de ramificación. Finalmente, si x_{m_0} no está en $\{a_n\}_{n=1}^\infty \cup \{1\}$, entonces $\sigma^{m_0}(\hat{x})$ es punto ordinario.

Otro detalle fácil de verificar, es que los puntos de $D_\omega \setminus N_\infty(D_\omega)$ son enviados a puntos fijos de D_ω tras una cantidad determinada de iteraciones bajo σ , es decir, si $\hat{x} \in D_\omega \setminus N_\infty(D_\omega)$, entonces $\sigma^{n+1}(\hat{x}) = \sigma^n(\hat{x})$, si $n \geq N$ para alguna $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Referencias

- [1] I. Banic, V. Martínez-de-la-Vega, Universal Dendrite D_3 as a generalized Inverse Limit, por aparecer en Houston Journal.
- [2] I. Banic, M. Crepnjak, M. Merhar, U. Milutinovic, T. Sovic, Wazewski's Universal Dendrite as an Inverse Limit with one Set-valued Bonding Function por aparecer en Glasnik Math.
- [3] J. J. Charatonik, Open Mappings of Universal Dendrites, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci Math 28 (1980) 489-494.
- [4] J. J. Charatonik, Monotone Mappings of Universal Dendrites, Topology Appl. 38 (1991) 163-187.
- [5] A. Illanes, Hiperespacios de continuos. (Spanish) [Hyperspaces of continua] Aportaciones Matemáticas: Textos [Mathematical Contributions: Texts], 28. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004. iv+181 pp.
- [6] A. Illanes, S. B. Nadler, Hyperspaces. Fundamentals and recent advances. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999. xx+512 pp.
- [7] W. T. Ingram, W. S. Mahavier, Inverse limits of upper semi-continuos set valued functions. Houston H. Math 32 (2006) 119-130.
- [8] K. Menger, Kurventheorie, Teubner Verlag, Leipzig and Berlin 1932 (reprinted by Chelsea Publ. Co., Bronx, NY 1967).
- [9] S. B. Nadler, Continuum theory. An introduction. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992. xiv+328 pp.
- [10] T. Wazewski, Sur les courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan, Polske Tow. Mat. Annales Rocznic 2 (1923) 49-170.