



Universidad Nacional Autónoma de México  
Programa de posgrado en Astrofísica  
Instituto de Ciencias Nucleares

**Sistemas astrofísicos y cosmología en  
gravedad  $f(R)$ , un nuevo enfoque**

**TESIS**

que para optar por el grado de:

**Doctor en Ciencias (Astronomía)**

presenta:

**Luisa Guadalupe Jaime González**

**Tutores:**

Dr. Marcelo Salgado Rodríguez, Instituto de Ciencias  
Nucleares-UNAM

Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar, Facultad de Ciencias-UNAM

**México D.F. Junio de 2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*“La astronomía, considerada en su conjunto,  
es el más bello monumento del espíritu humano,  
el título más noble de su inteligencia.”*

Exposición del sistema del mundo.

P. S. Laplace

*“Una nueva teoría es raramente una simple ampliación de lo que ya  
se conoce. Su entendimiento demanda la reconstrucción de la vieja  
teoría y la compatibilidad con los hechos previos. Este proceso es  
revolucionario en sí mismo, raramente completado por una sola  
persona y nunca en un sólo día.”*

La estructura de las revoluciones científicas.

T. S. Kuhn



# Índice general

<b>1. Hacia una teoría general de la gravitación</b>	<b>9</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	9
1.1.1. Las ecuaciones de campo en Relatividad General	10
1.2. El Universo como escenario de Relatividad General . .	13
1.3. Cambiando de paradigma . . . . .	18
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	21
<b>2. Teorías de gravedad <math>f(R)</math></b>	<b>25</b>
2.1. Gravedad modificada, pero ¿cómo? . . . . .	25
2.2. Teorías $f(R)$ . . . . .	27
2.3. Aceleración cósmica en $f(R)$ . . . . .	29
2.4. Teorías Escalares Tensoriales (TET) y $f(R)$ . . . . .	32
2.4.1. Teorías de Brans-Dicke . . . . .	32
2.4.2. Equivalencia TET- $f(R)$ . . . . .	34
2.5. El límite de campo débil y el efecto camaleón . . . . .	36
<b>3. Método y modelos</b>	<b>43</b>
3.1. El método del escalar de Ricci . . . . .	43
3.2. Análisis cualitativo del método del escalar de Ricci . .	45
3.3. Modelos $f(R)$ . . . . .	48
3.3.1. Modelo de Hu-Sawiky . . . . .	49

3.3.2.	Modelo MJW . . . . .	52
3.3.3.	Modelo de Starobinsky . . . . .	58
3.3.4.	Modelo exponencial . . . . .	60
3.3.5.	Modelo $R^n$ . . . . .	64
<b>4.</b>	<b>Cosmología en <math>f(R)</math></b>	<b>69</b>
4.1.	FRW en $f(R)$ bajo el método del escalar de Ricci . . .	69
4.2.	Ecuación de estado en gravedad $f(R)$ . . . . .	73
4.3.	Integración numérica, cosmología . . . . .	79
4.4.	Resultados numéricos en cosmología . . . . .	87
<b>5.</b>	<b>Soluciones cosmológicas con <math>R</math> asintóticamente nulo</b>	<b>117</b>
5.1.	Modelo MJW . . . . .	118
5.2.	$f(R)$ Exponencial . . . . .	122
5.3.	El caso patológico $R^n$ . . . . .	129
<b>6.</b>	<b>Objetos compactos en <math>f(R)</math> bajo el método del escalar de curvatura</b>	<b>143</b>
6.1.	Antecedentes . . . . .	143
6.2.	Espacio-tiempos estáticos y esféricamente simétricos .	144
6.3.	Integración numérica en objetos compactos . . . . .	147
6.4.	Integración numérica . . . . .	148
6.5.	Resultados numéricos . . . . .	151
6.5.1.	Soluciones asintóticamente planas para objetos compactos . . . . .	158
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>163</b>

# Agradecimientos

Esta sección de mi tesis la he escrito al final (como todos, creo) y lo primero que viene a mi mente es el recuerdo de cuando tenía cinco años de edad y miraba la Luna mientras caminaba, no muy buena idea para una niña de cinco años y con (vamos a aceptarlo) poca agilidad. Esa caminata me costó la fractura de un brazo pero me dejó un sueño: ser astrónoma. Agradezco mucho a esa niña y a su Luna por llenarme la cabeza de ideas y preguntas.

Agradezco a Dari y a Goyo que desde esa noche supieron encaminarme hacia la ciencia. A mis hermanas Adriana y Cecilia, que soportaron las veces en las que me tocaba elegir el paseo del fin de semana. A Emilia que comparte mis preguntas sobre el Universo y a Teo por su sonrisa. A Edgar y a Hernando que han llegado a completar nuestra familia. A todos ellos les agradezco su amor, los cafés, el dominó y las tardes en Tepoztlán.

Marcelo y Leonardo han sido los mejores tutores que hubiera podido desear; les agradezco la dedicación en mi formación y, por supuesto, haber aceptado el tema de investigación que yo quería, ayudándome a desarrollar un trabajo sólido y con autocrítica. No tengo la menor duda de que sus enseñanzas me llevarán por un buen camino en mi investigación, de verdad, muchas gracias. Agradezco también

a mis sinodales: Octavio, Javier, Jorge y Roberto por confiar en mi trabajo y ayudarme con las correcciones de esta tesis.

Agradezco a Bárbara, mi tutora de la maestría, su gran apoyo y sus consejos a lo largo de este camino; a Toño porque hemos construido juntos un espacio para la ciencia ficción y tengo confianza en que seguiré por muchos años. Héctor y Toño gracias por ser mis amigos y compañeros constantes en el camino; Paloma, encontrarnos en la misma oficina recién llegadas para la maestría ha sido un evento muy afortunado.

Un lugar especial merece la Universidad misma, gracias a ella y a sus formas me ha sido posible llegar hasta este punto, y es que conseguir un doctorado en un país como el nuestro no es cosa fácil. Esta tesis se ha realizado con el apoyo de una beca para estudios de posgrado de la UNAM así como con el apoyo de los proyectos in115310, in132132.

Finalmente agradezco a mi persona favorita, te amo, esta tesis va por ti.

# Capítulo 1

## Hacia una teoría general de la gravitación

### 1.1. Antecedentes

La relatividad especial se fundamenta en el principio de que las ecuaciones que describen la física deben permanecer invariantes al pasar de un sistema de referencia inercial a otro. Sin embargo, los sistemas de referencia inerciales son un caso extraño en la naturaleza, por lo que llevar este principio a sistemas de referencia inerciales es lo que da pie al desarrollo de la relatividad general, trayendo como consecuencia a lo que conocemos como el principio de equivalencia.

Históricamente, a partir de 1912, Einstein trabajaba en la construcción de las ecuaciones de lo que llamaba “Teoría *Entwurf*”<sup>1</sup> al lado de su amigo, el matemático Marcell Grossmann [1], quien lo guió hacia la geometría Riemanniana y el cálculo tensorial como el lenguaje adecuado para las ideas que tenía en mente. Como producto

---

<sup>1</sup>*Entwurf*: trazado, boceto o proyecto

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

de esta colaboración, en 1913, publican un trabajo en el que se da una relación del campo gravitacional con el tensor métrico, sin llegar aún a lo que será la relatividad general. La diferencia fundamental de este trabajo, con otros de sus contemporáneos, era que las propiedades geométricas del espacio-tiempo no eran un ente fijo sino que se encontraban condicionadas por el contenido de materia.

En 1915, Hilbert invita a Einstein a Gotinga en donde mantuvieron constantes discusiones alrededor de la teoría de gravitación que estaba elaborando Einstein y que continuaron en una correspondencia constante después de su partida. Es hacia finales de ese mismo año, el 20 de Noviembre, que Hilbert dicta una conferencia en la Real Academia de Ciencias de Gotinga donde muestra las ecuaciones de campo para una teoría general de la gravedad; su deducción parte de un principio de mínima acción cuya dependencia, en el lagrangiano, era lineal en el escalar de Ricci. Durante ese mismo mes de Noviembre, Einstein presentó cuatro ponencias en la Academia Prusiana de Berlín; en la última de ellas, dictada el 25 de Noviembre, muestra sus ecuaciones de campo (equivalentes a las mostradas por Hilbert cinco días atrás). A diferencia de Hilbert, Einstein encuentra sus ecuaciones sin la necesidad de un principio de mínima acción, igualando un tensor geométrico (lo que conocemos actualmente como el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ ) cuya derivada covariante se anula (teorema conocido como las identidades de Bianchi), con el tensor de energía-momento el cual es conservado.

### 1.1.1. Las ecuaciones de campo en Relatividad General

Como se ha mencionado, la geometría se encontrará relacionada con el contenido de materia, considerando el tensor de Riemann, que tiene codificada la información geométrica del espacio-tiempo, y las

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

identidades de Bianchi, para éste tenemos (Ver [2] capítulo 4 sección 3):

$$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla_a R_{bcd}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e + \nabla_c R_{abd}{}^e = 0 \quad (1.2)$$

al contraer  $e$  con  $a$  y tomar  $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$  se obtiene:

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cad}{}^a - \nabla_c R_{bad}{}^a = 0 \quad (1.3)$$

Haciendo las contracciones indicadas obtenemos que:

$$\Rightarrow 2\nabla_a R_c{}^a - \nabla_c R = 0 \quad (1.4)$$

que podemos reescribir, con ayuda de la métrica, como

$$\nabla^a R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^a R = 0 \quad (1.5)$$

es decir

$$\nabla^a (R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R) = 0 \quad (1.6)$$

Por otro lado, la conservación de la energía nos dice:

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (1.7)$$

De esta manera Einstein asocia la fuente de curvatura en el espacio tiempo con el contenido energético, por lo que iguala estos tensores cuya derivada covariante se anula y postula:

$$G_{ab} = kT_{ab} \quad (1.8)$$

como la teoría que describe todos los fenómenos gravitacionales.

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

El camino que Hilbert siguió en su búsqueda por las ecuaciones que generalizaran la relatividad estuvo claramente inspirado en los trabajos de Einstein y en las comunicaciones que mantuvo con él de manera personal y por correspondencia, sin embargo su búsqueda tenía un espíritu distinto, encontrar una teoría unificada de campo <sup>2</sup>. Hilbert, como es bien sabido, era un gran matemático y se encontraba muy interesado en la física, de hecho llegó a dictar algunos cursos en Gotinga sobre mecánica, estructura de la materia, teoría cinética de los gases entre algunos otros así como seminarios con respecto a temas en física y publicó trabajos en los que se enfocaba en los fundamentos matemáticos de las teorías físicas. El amplio dominio de Hilbert de la matemática, específicamente de las formulaciones que tenían como base un principio variacional y el entendimiento de la exigencia de la invarianza bajo transformaciones de coordenadas fueron la clave en el desarrollo de las ecuaciones de campo de la relatividad general a través de, justamente, un principio de mínima acción. Esta acción, para relatividad general, la define como:

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4 \sqrt{-g} R + S_M(g_{ab}, \psi), \quad (1.9)$$

y se le conoce como la acción de Hilbert-Einstein. Haciendo la variación de ésta, con respecto a la métrica, se obtienen las mismas ecuaciones de campo que obtuvo Einstein 1.8. En resumen podemos decir que el espacio-tiempo es entonces una variedad  $M$  dotada de una métrica seudoriemanniana  $g_{ab}$  y cuyas propiedades geométricas están relacionadas con la distribución de materia y energía de acuerdo

---

<sup>2</sup>La teoría electromagnética obedece las transformaciones de Lorentz mientras que la teoría Newtoniana de la gravitación no. A principios del siglo XX estas eran las dos únicas fuerzas que se conocían y eran éstas la que Hilbert buscaba unificar. Einstein, por otro lado se encontraba interesado, en ese momento, en la gravitación únicamente.

# CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

a la ecuación de Einstein.

Más allá de las discusiones históricas que han existido alrededor de la autoría de las ecuaciones de campo [3, 4], la intención de estos breves antecedentes históricos es poner en la mesa la discusión sobre la motivación, por un lado física y por otro lado matemática, para comprender la elección del tensor geométrico que igualaría Einstein al contenido de materia. Sin embargo, buscar la covarianza a partir de un principio de mínima acción permitiría la elección de una dependencia, no necesariamente lineal, del escalar de curvatura en la acción descrita por Hilbert.

## 1.2. El Universo como escenario de Relatividad General

Una vez construidas las ecuaciones de campo de la relatividad general, Einstein busca aplicarlas al Universo mismo pero, en esos años, aún no se tenía bien claro en qué consistía el escenario cósmico; baste decir que no fue sino hasta 1920 que tuvo lugar el famoso debate de Shapley y Curtis [5] en el que se sostenían hipótesis muy distintas en relación tanto al tamaño como a la estructura del Universo. Las observaciones astronómicas, que eran la base de discusión en este debate, eran lo que se llamaban “nebulosas espirales”. Shapley, por un lado, sostenía que tales nebulosas se encontraban dentro de nuestra galaxia, concluyendo con esto que el todo Universo era solamente nuestra galaxia. Curtis, por otro lado, sostenía que las “nebulosas espirales” eran “universos isla” (término acuñado por Kant) y que nuestra galaxia a su vez era un universo isla. Esta idea no sólo cambiaba el tamaño que se podía asociar al Universo sino la estructura en sí misma que éste tendría.

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

Tal era el estado de la cosmología observacional en 1917, y uno de los pocos hechos que se tenían sabidos con certeza era que las velocidades relativas de las estrellas eran demasiado pequeñas, comparadas con la velocidad de la luz. Lo natural era entonces buscar una solución prácticamente estática de las ecuaciones de campo descritas por la teoría de la relatividad general, sin embargo no era posible tal solución a partir de las ecuaciones de campo descritas en su forma original por lo que Einstein decidió añadir el término  $\Lambda g_{ab}$  a ellas, donde  $\Lambda$  sería una constante universal conocida como “constante cosmológica”. Esta constante resulta estar relacionada con la densidad promedio del Universo.

Como veremos a continuación, las observaciones astronómicas de Hubble ayudaron a que este término cosmológico fuera eliminado como parte de las ecuaciones de campo en esa época, estas observaciones ponen de manifiesto la expansión del Universo a través del famoso diagrama que dio origen a la ley que lleva su nombre. Sin embargo, hay dos hechos anteriores que contribuyeron, en la mente de Einstein, en una mayor medida al abandono de la idea de la constante cosmológica. Por un lado, de Sitter [6] encuentra una solución estática y sin presencia de materia de las ecuaciones de Einstein, mostrando con esto que no era necesaria materia para producir inercia. Por otro lado, ya para 1924, comenzaban a salir los datos de los corrimientos al rojo de las “nebulosas espirales” en donde Slipher [7] mostraba que la mayoría de ellas se corrían al rojo mientras que solamente algunas lo hacían hacia el azul; esta era evidencia clara de que estas nebulosas se alejaban, en su mayoría, de nosotros. La motivación de la constante cosmológica se perdía, era necesaria para un Universo estático pero no para uno en expansión. En 1922 Friedmann describe las ecuaciones para un Universo con materia y en expansión. En 1923

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

Einstein escribe a su amigo Weyl que, ya que no hay un Universo cuasi-estático entonces se podrían deshacer del término cosmológico. Las observaciones de Hubble son reportadas hasta 1929 [8], la diferencia de su resultado con las observaciones anteriores era que mostraba la existencia de una relación clara entre las distancias estimadas, de las 46 “nebulosas espirales” que estudió, y la velocidad con la que se alejaban de nosotros. Era contundente, el Universo se encontraba en expansión.

El paradigma estándar que rige actualmente la cosmología se encuentra fundamentado en la relatividad general, pues es con base en esta que un gran número de observaciones astronómicas se pueden explicar. La explicación se basa en la descripción precisa de la dinámica de un sistema dado, desde el Universo mismo hasta una galaxia o una estrella, en donde se relaciona la geometría del espacio-tiempo con el contenido de materia y energía. Sin embargo, hacer coincidir de manera consistente la dinámica observada implica invocar la existencia de materia y energía oscuras.

¿Cómo concluimos la existencia de estos componentes oscuros?. Tener certeza del tipo y cantidad de materia y energía que se tiene en un sistema dado no siempre es trivial. Por ejemplo, en 1933 Fritz Zwicky con base en sus observaciones del cúmulo de Coma concluyó que, para poder explicar las velocidades de las galaxias en el cúmulo, era necesaria más materia de la que se podía observar, la naturaleza de esta materia faltante no estaba clara.<sup>3</sup> Otro gran ejemplo es la conclusión del contenido de materia basada en las observaciones de Vera Rubin [9] que, en 1970, publicó los resultados de la obser-

---

<sup>3</sup>Zwicky calculó que el exceso de masa debería de ser de unas 400 veces el valor de la materia visible, hoy se sabe que este valor es de hecho menor pero aún lo suficientemente grande para que la mayor cantidad de materia se considere faltante

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

vación de 67 regiones H II en M31 con lo que, suponiendo órbitas circulares, mostraba la curva de rotación de estos objetos a lo largo de los brazos de Andrómeda y encuentra que las regiones H II no siguen una relación consistente con lo esperado con base en la teoría Newtoniana de la gravitación y la densidad de materia observada.

<sup>4</sup> Estas dos son las observaciones “históricas” en las que se basa el postulado de la existencia de la materia oscura en el Universo.

Hasta ahora se han propuesto diferentes candidatos para llenar el lugar de la materia oscura, por ejemplo, “Masive Astrophysical Compact Halo Objects” (MACHO’s) que se encontrarían formados de materia bariónica, es decir, podrían ser estrellas enanas caféas, enanas blancas o estrellas de neutrones. Estos candidatos fueron descartados al mostrarse que sólo un muy pequeño porcentaje de los objetos que pueblan la galaxia son de este tipo [11]. En la década pasada los candidatos que parecían ser más prometedores eran las partículas que predicen los modelos supersimétricos, en particular los neutralinos. Sin embargo los problemas de las predicciones en las simulaciones numéricas al utilizar este tipo de materia oscura fría podría considerarse como descartado [12], al menos como única componente de materia oscura. Para rescatar el modelo de materia oscura se ha propuesto que los neutrinos estériles podrían ser candidatos ideales por interactuar solamente de manera gravitacional y no caer dentro de los modelos de materia oscura fría. Sin embargo las cotas que proveen los estudios por un lado cosmológicos y por otro lado experimentales, muestran una incompatibilidad en los rangos de masa [13]. A pesar de los inconvenientes todavía alguna combinación de los diferentes candidatos a materia oscura podría ser la responsable de la dinámica

---

<sup>4</sup>En 1980 [10] Vera Rubin publica los resultados de las observaciones de 21 galaxias confirmando sus conclusiones encontradas en Andrómeda

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

observada.

Las observaciones astronómicas basadas en las supernovas tipo Ia (SNIa) junto con la suposición de que el Universo es isotrópico y homogéneo a grandes escalas permiten concluir que nuestro Universo se expande de manera acelerada [14, 15, 16]. Estas observaciones marcan el renacimiento de la constante cosmológica en la relatividad general ya que se invoca para construir un Universo en expansión acelerada.

Uno de los problemas mayormente mencionados en la literatura es el llamado “problema de la coincidencia”. Éste se refiere a que hoy día la abundancia de materia (bariónica y oscura) es del mismo orden de magnitud que la abundancia de la energía asociada con el término cosmológico. Esto en principio, nos colocaría en una etapa privilegiada en el tiempo cósmico. Es importante mencionar que este problema podría resultar espúreo [17], pues las gráficas usualmente mostradas para sostener la importancia del problema de la coincidencia manejan una escala logarítmica. En dichas gráficas se muestra la evolución de las abundancias de materia, radiación y energía oscura (Constante cosmológica) dando la impresión de que, justo para la época actual, los valores asociados a la materia y a la constante cosmológica tienden a igualarse. No obstante, al realizar un simple cambio de escala, una escala lineal con el tiempo, se puede observar que las abundancias de estas dos componentes son del mismo orden durante la mayor parte del tiempo cósmico.

A pesar de que el añadir la constante cosmológica a las ecuaciones de campo de Einstein lograría empatar, de muy buena manera, las observaciones con las predicciones teóricas e incluso pensando que el problema de la coincidencia es espúreo, los problemas respecto a este factor siguen siendo relevantes. La naturaleza física que sostendría

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

la existencia de este término cosmológico está muy lejos de quedar clara. Uno de los argumentos que le podrían dar un sostén físico sería la energía de vacío, sin embargo queda muy lejos de ser del orden de lo requerido por las observaciones, cerca de 120 órdenes de magnitud. Si la constante cosmológica es una constante fundamental más en la naturaleza es algo que podría ser considerado pero se requiere constatar que dicho valor es de hecho constante para manejar una hipótesis tan aventurada.

Por otro lado, la expansión acelerada que tenemos en la época actual no ha sido la única que ha experimentado nuestro Universo. La teoría de la Gran Explosión requiere otro momento de expansión acelerada, la inflación, para poder explicar la planitud del Universo así como la poca variación en la radiación cósmica de fondo [18, 19]. Este periodo inflacionario debió tener lugar en un momento anterior a la etapa de dominio de radiación y no podría ser explicado con base en la constante cosmológica que se utiliza para explicar la aceleración cósmica actual.

### 1.3. Cambiando de paradigma

Con base en las observaciones astronómicas en su conjunto una cosa queda clara, es necesaria nueva física que provea un fundamento teórico robusto a la cosmología. Si tomamos el paradigma estándar,  $\Lambda$ CDM o  $\Lambda$ WDM, la nueva física que se invoca se encuentra contenida en las teorías que predicen la existencia de los candidatos más viables de materia oscura. También, dentro del paradigma estándar, es necesaria una explicación a la naturaleza de la constante cosmológica, si ésta no puede ser explicada por la energía de vacío entonces debería de existir alguna otra forma de producir esta energía subyacente en el

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

espacio-tiempo *per se*. Una manera de dar la vuelta a este problema, pero que a pesar de todo necesitaría también alguna justificación, es pensar en la constante cosmológica como una constante fundamental más en la naturaleza.

Si, por otro lado, tomamos la alternativa de cambiar el paradigma en el cual se basa la dinámica del Universo, la nueva física invocada radica en la modificación, o bien complementación, de las ecuaciones que relacionan la geometría del espacio-tiempo con la materia y energía, es decir, modificar la teoría de la relatividad general. Dentro de este esquema alternativo, es necesario que la modificación propuesta sea capaz de dar predicciones y que éstas empaten con las observaciones astronómicas actuales. Por ejemplo, si pensamos en una modificación que sea una alternativa a la explicación de la constante cosmológica, esta teoría deberá no sólo ajustar con los datos obtenidos de las distancias luminosas a las SNIa sino que deberá también ser consistente con las observaciones que se tienen a escalas más pequeñas como el Sistema Solar, o poder sostener la existencia de objetos compactos como estrellas de neutrones. Por otro lado, las predicciones que se tengan, si bien deben de ser muy cercanas a las que se alcanzan bajo el paradigma estándar, en general podrán tener predicciones distintas a diferentes escalas. Por ejemplo, la distancia luminosa para  $z$  mayores a los observados hasta ahora con las SNIa, podría distinguirse de las inferidas bajo  $\Lambda$ C(W)DM y en general el crecimiento de estructuras a gran escala puede también ser afectado por la dinámica misma dictada por las ecuaciones de campo y esta diferencia podría ser, en principio, medida con observaciones.

A modo de motivación fuera del marco de la astronomía, vale la pena mencionar, que la gravedad es la única de las cuatro fuerzas fundamentales que no puede ser cuantizada bajo los métodos canónicos,

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

que se utilizan en el caso del electromagnetismo, la fuerza débil y la fuerte. Como mencionamos, la idea de Hilbert era encontrar una unificación de la gravedad con el electromagnetismo. Weyl en 1919 [20] y el mismo Edington (quien midió la desviación de la luz de una estrella debida al campo gravitacional del Sol confirmando así las predicciones de la teoría de la relatividad general), consideraron modificaciones incluyendo dependencias de orden mayor del escalar de curvatura [21], aunque la única motivación de estas desviaciones fue meramente la curiosidad por averiguar sobre la unicidad de la acción definida y entender la nueva teoría. La exploración sobre tales modificaciones comenzó a tener lugar. Estas desviaciones hacia términos de orden mayor resurgieron en la década de los 60's cuando se encontró que la gravedad podría ser cuantizada [22] si se incluían estos términos. Los intentos, con la finalidad de encontrar una teoría cuántica de la gravedad siguieron por este camino, aunque solamente para los límites de campos gravitacionales fuertes, a la escala de Planck y, por lo tanto, para el Universo temprano. En 1980, cuando la teoría inflacionaria comienza a surgir, Satrobinsky [23] propuso un modelo de gravedad modificada (dentro de la gravedad  $f(R)$  estudiada en esta tesis) que permitía explicar tal escenario, pero entonces tampoco se esperaba que tales modificaciones tuvieran algún efecto a bajas energías y por lo tanto en el Universo a gran escala. El resurgimiento a principios de este siglo se da con las observaciones de las SNIa, una modificación de gravedad podría explicar también este fenómeno.

A pesar de que las motivaciones parecen ser sólidas existe una importante diferencia, en relatividad general se trabajó bajo la guía de principios físicos fundamentales, no con la finalidad de reproducir observaciones. Actualmente nos encontramos en una etapa de la cosmología observacional sumamente privilegiada, en este sentido nos

# CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

encontramos al revés. Hasta ahora en gravedad modificada se ha trabajado a ciegas en cuanto a que no contamos con los principios físicos fundamentales que quisiéramos añadir o modificar. Nos vemos en la necesidad de generar teorías que sean capaces de dar predicciones que sean consistentes con las observaciones astronómicas que tenemos pero fallamos en darles un fundamento. Desde mi punto de vista, cuando se observa la imagen completa que ofrecen las observaciones astronómicas y la incapacidad de generar una teoría cuántica de la gravedad, el modificar el paradigma que la rige es una línea de trabajo que se debe de abordar con seriedad, buscando un principio físico fundamental que sirva como guía y utilizando las observaciones astronómicas como escenario.

## 1.4. Estructura de la tesis

En este trabajo hemos optado por el cambio de paradigma, modificar relatividad general. Para esto hemos elegido las teorías de gravedad  $f(R)$  (más adelante se da una explicación a fondo del tema). Como se explicará con detalle, en este tipo de teorías existen algunos temas que se encuentran en controversia, la mayor parte de ellos debido al mapeo que se realiza a las teorías escalares tensoriales (TET).

La finalidad de esta tesis es proveer una forma de trabajo clara, directa y libre de discusiones, de esta manera las conclusiones que se obtienen se encuentran fuera de posibles controversias. De manera paralela, el estudio realizado es capaz de brindar predicciones comparables con observaciones astronómicas. Para tal estudio se ha generado en esta tesis el “método del escalar de Ricci”.

La estructura en la que se presentan nuestros resultados es la

# CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

siguiente:

**C-1** Como se ha leído, en este capítulo presentamos un breve recuento histórico del camino seguido hacia la construcción de la relatividad general así como el surgimiento del concepto de materia y energía oscuras como una aparente necesidad para empatar las observaciones con la teoría. Al final de este capítulo se han planteado las motivaciones que se han tenido para abordar el estudio del Universo desde el marco que provee la gravedad modificada.

**C-2** En este capítulo comenzamos con la introducción formal de la teoría de gravedad  $f(R)$  estudiada en esta tesis, las ecuaciones de campo que emanan de la modificación y se muestra el mapeo hacia las teorías escalares tensoriales que varios de los trabajos en el área han utilizado en el tratamiento de estas teorías así como los problemas asociados a éste. En la segunda mitad del capítulo se habla de los posibles problemas que pueden tener estas teorías en el límite de campo débil y el fenómeno que las rescataría de fallar a estas escalas, el efecto “camaleón”.

**C-3** En el desarrollo de esta tesis, para evadir los problemas asociados por el mapeo a las TET, se evita realizarlo y para tal fin se diseñó el método del escalar de Ricci. En este tercer capítulo se presentamos así como características generales de la gravedad  $f(R)$  que se han discutido. En este mismo capítulo se presentan los modelos, tomados de la literatura, que se estudiarán a lo largo de esta tesis.

**C-4** Como primera aplicación del método, se toma el modelo cosmológico Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y se analizan los

## CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

diferentes modelos  $f(R)$  planteados en este escenario bajo el método del escalar de curvatura. A lo largo del análisis se hace la comparación con el modelo  $\Lambda$ CDM. Se podrá constatar como algunos de estos modelos son exitosos y otros en cambio fallan en alguna manera para explicar las observaciones astronómicas.

- C-5** Como se mencionó, al modificar la gravedad, es necesario que los modelos planteados sean capaces de explicar el Universo que observamos. Una de estas pruebas fundamentales es el análisis de la existencia de objetos compactos en teorías  $f(R)$ , este análisis se hace en este capítulo.
- C-6** En este capítulo se presentan las conclusiones generales así como perspectivas en el estudio de gravedad  $f(R)$ , en particular la implementación de nuestro método a distintos escenarios que serían excelentes para las pruebas observacionales que están en puerta.

# CAPÍTULO 1. HACIA UNA TEORÍA GENERAL DE LA GRAVITACIÓN

---

## Capítulo 2

# Teorías de gravedad $f(R)$

### 2.1. Gravedad modificada, pero ¿cómo?

Al modificar la teoría de la relatividad general (RG) tenemos que plantearnos, antes que nada, hasta qué punto buscamos cambiarla, es decir, tenemos excelentes observaciones que confirman su validez en ciertos escenarios, como los experimentos sobre el principio de equivalencia o las observaciones del Sistema Solar y ya que, como también se ha mencionado, al pretender la modificación no contamos con un principio físico fundamental que nos guíe. Analicemos pues, ante esta ausencia, en qué se basa RG y veamos si es posible modificar alguno de estos principios o incluso modificarlo sin perder los éxitos ya demostrados.

Los elementos en los que se base RG son los siguientes:

- 1.- El espacio tiempo,  $(M, g_{ab})$ , es una variedad diferencial  $M$  de cuatro dimensiones dotada de una métrica pseudoriemanniana  $g_{ab}$ .
- 2.- La gravitación es geoméricamente descrita a través del ten-

## CAPÍTULO 2. TEORÍAS DE GRAVEDAD $F(R)$

---

sor de Riemann  $R_{abcd}$  el cual es, en general, distinto de cero e igual a cero solamente en el caso en el que el espacio-tiempo es globalmente plano.

- 3.- Principio de covarianza general.
- 4.- Principio de equivalencia.
- 5.- Las propiedades geométricas de la variedad 4-dimensional  $(M, g_{ab})$  están condicionadas por el contenido de materia y energía  $T_{ab}$ .
- 6.- No hay torsión.
- 7.- Las ecuaciones de campo son lineales en las derivadas de segundo orden de la métrica.

El último de los puntos citados es la más débil de las suposiciones hechas pues, el exigir la linealidad en el segundo orden de las ecuaciones diferenciales no es fundamental para obtener una solución del tipo  $T_{ab} = aG_{ab} + bg_{ab}$ ; este hecho lo demostró Lovelock en 1972 [24].

Modificar este último punto parece, por lo tanto, ser una alternativa viable y además muy directa; este es el camino que toman las teorías de gravedad  $f(R)$  pues, con base en este cambio, no se alteran los principios fundamentales de la teoría que, hasta ahora, muestran tener validez. En cambio podemos esperar un comportamiento dinámico distinto si las ecuaciones diferenciales que se obtengan para la métrica no son de segundo orden. Hay que tener en cuenta que, al hacer la generalización, deberíamos recuperar las ecuaciones de RG a ciertas escalas. Por otro lado, desde ahora, podemos decir que al elevar el orden en las ecuaciones diferenciales empleadas, fijar condiciones iniciales se volverá algo más complicado y, de hecho, habría que demostrar que las soluciones son únicas una vez fijadas.

## 2.2. Teorías $f(R)$

La propuesta de las teorías de gravedad  $f(R)$ , es modificar la dependencia del lagrangiano empleado en la acción de Einstein-Hilbert. Esta es quizá la manera más directa de hacer una modificación a RG sin cambiar el espíritu en el que ésta descansa. Recordamos, del capítulo anterior, que la acción así generada recuperaba las ecuaciones que había formulado Einstein pero, al provenir de un principio de mínima acción, las ecuaciones que resultaban eran naturalmente covariantes así que, sin romper este principio, podemos generalizar esta acción utilizando una dependencia arbitraria (en principio) del escalar de curvatura  $R$ .

De esta manera la acción modificada en teorías  $f(R)$  queda como:

$$S[g_{ab}, \psi] = \int \frac{f(R)}{2\kappa} \sqrt{-g} d^4x + S_{\text{matt}}[g_{ab}, \psi], \quad (2.1)$$

donde  $\kappa \equiv 8\pi G_0$  (usamos unidades donde  $c = 1$ ),  $f(R)$  es una función arbitraria del escalar de curvatura  $R$  y es lo suficientemente suave (clase  $C^3$  al menos). El primer término corresponde a la acción de la gravedad -modificada- y la segunda parte a la acción estándar para la materia, donde  $\psi$  representa el campo de la materia en la que se puede incluir no sólo la materia bariónica sino también la materia oscura y de esta manera realizar un análisis de viabilidad cosmológica separado de la viabilidad de estas teorías como candidatas a reemplazar la contribución asociada a la materia oscura.

Con base en este cambio en la acción se pueden obtener las ecuaciones de movimiento al hacer la variación de la acción con respecto de la métrica. Para esto tomemos el escalar de curvatura que está definido por:

$$R = g^{ab} R_{ab} \quad (2.2)$$

## CAPÍTULO 2. TEORÍAS DE GRAVEDAD $F(R)$

---

y por otro lado:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab} \quad (2.3)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{ab}\delta g^{ab} + g^{ab}\delta R_{ab}, \\ &= R_{ab}\delta g^{ab} + g^{ab}(\nabla_c\delta\Gamma_{ba}^c - \nabla_a\delta g_{ab}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La variación de la conexión estará dada por:

$$\delta\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{cd}(\nabla_a\delta g_{db} + \nabla_b\delta g_{da} - \nabla_d\delta g_{ab}) \quad (2.5)$$

con lo que:

$$\delta R = R_{ab}\delta g^{ab} + g_{ab}\square\delta g^{ab} - \nabla_a\nabla_b\delta g^{ab} \quad (2.6)$$

La variación de la acción queda entonces:

$$\begin{aligned} \delta S[g] &= \int \frac{1}{2k}(\delta f(R)\sqrt{-g} + f(R)\delta\sqrt{-g})d^4x \\ &= \int \frac{1}{2k}(f_R(R)\delta R\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab}f(R))d^4x \\ &= \int \frac{1}{2}\sqrt{-g}(f_R(R)(R_{ab}\delta g^{ab} + g_{ab}\square\delta g^{ab} - \nabla_a\nabla_b\delta g^{ab}) \\ &\quad - \frac{1}{2}g_{ab}\delta g^{ab}f(R))d^4x \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $f_R(R) = df(R)/dR$ . Con lo que, al realizar la integración por partes del segundo y tercer término del lado derecho en la ecuación

anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta S[g] = & \int \frac{1}{2k} \sqrt{-g} \delta g^{ab} (f_R(R) R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) \\ & + [g_{ab} \square - \nabla_a \nabla_b] f_R(R)) d^4 x \end{aligned} \quad (2.8)$$

Al pedir que la acción permanezca invariante,  $\delta S[g] = 0$ , se tiene:

$$f_R R_{ab} - \frac{1}{2} f g_{ab} + [g_{ab} \square - \nabla_a \nabla_b] f_R = k T_{ab} \quad (2.9)$$

donde se ha denotado  $f = f(R)$  y  $T_{ab}$  es el tensor de energía momento de la materia, cuya traza,  $T$ , estará dada por:

$$\square R = \frac{1}{3f_{RR}} \left[ \kappa T - 3f_{RRR} (\nabla R)^2 + 2f - R f_R \right], \quad (2.10)$$

Estas serán pues las nuevas ecuaciones de campo que asociarán la geometría del espacio tiempo con la materia y energía que contenga. Cabe mencionar que el límite de RG más constante cosmológica  $\Lambda$  se recupera al elegir justamente  $f(R) = R - 2\Lambda$ . Como se puede observar las ecuaciones ahora ya no son de segundo orden, en este caso, tenemos ahora ecuaciones de cuarto orden en la métrica, pues tenemos el D'Alambertiano y segundas derivadas covariantes aplicadas a la función  $f(R)$  y  $R$  depende de segundas derivadas de la métrica. En el capítulo 3 se discutirán más propiedades de estas ecuaciones.

### 2.3. Aceleración cósmica en $f(R)$

Como hemos mencionado, una motivación para modificar la gravedad es tener una explicación a la aceleración cósmica alterna al uso de la constante cosmológica. Es en este sentido que las teorías  $f(R)$

## CAPÍTULO 2. TEORÍAS DE GRAVEDAD $F(R)$

---

son prometedoras pues, muestran tener un claro potencial para generar la aceleración tardía del Universo, a pesar de que esta cualidad se estudia con mucho detalle a lo largo de la tesis, daremos aquí un breve análisis a este respecto.

Consideremos una métrica del tipo Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 + \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right\} \quad (2.11)$$

Introduciendo esta en la ecuación de campo para  $f(R)$  (2.9) y asumiendo  $T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$  tenemos:

$$H^2 = \frac{k}{3f'} \left( \rho + \frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f'' \right) \quad (2.12)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{k}{f'} \left( P + \dot{R}f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf') \right) \quad (2.13)$$

donde  $H = \dot{a}/a$  y  $\dot{X} := dX/dt$ . Podemos ver que  $\ddot{a}$  no se anula necesariamente, esta es una de las principales motivaciones para utilizar las teorías de gravedad  $f(R)$ . Una manera de ver esto es definiendo una densidad y presión efectivas de la geometría como:

$$\rho_{eff} = \frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f'' \quad (2.14)$$

$$P_{eff} = \dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(fRf') \quad (2.15)$$

donde  $\rho_{eff}$  no puede ser negativa en un espacio-tiempo de FLRW plano, como se puede ver de la ecuación 2.14 en el límite  $\rho \rightarrow 0$ . entonces las ecuaciones 2.12 y 2.13 pueden tomar la forma de las

ecuaciones estándar de Friedmann, tomando 2.14 y 2.15:

$$H^2 = \frac{k}{3}(\rho + \rho_{eff}) \quad (2.16)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{k}{6}[\rho + \rho_{eff} - 3(P + P_{eff})] \quad (2.17)$$

Así, la corrección en la curvatura puede ser vista como un fluido efectivo. El parámetro de la ecuación de estado efectiva para esta gravedad modificada puede expresarse como:

$$\omega_{eff} \equiv \frac{P_{eff}}{\rho_{eff}} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')}{\frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f''} \quad (2.18)$$

Ya que el denominador del lado derecho de la ecuación anterior es estrictamente positivo, el signo de la  $\omega_{eff}$  está determinado por el numerador. En general, para que un modelo  $f(R)$  imite la ecuación de estado tipo de Sitter  $\omega_{eff} = -1$ , este debe cumplir:

$$\frac{f'''}{f''} = \frac{\dot{R}H - \ddot{R}}{\dot{R}^2} \quad (2.19)$$

En general, esta es una condición que se podría cumplir eligiendo una  $f(R)$  adecuada. Como se mencionó, esta propiedad ha motivado el uso de estas teorías de gravedad modificada como una posible explicación a la expansión acelerada. Algunas otras propiedades serán analizadas en el capítulo 3 a la luz del método del escalar de curvatura.

## 2.4. Teorías Escalares Tensoriales (TET) y $f(R)$

### 2.4.1. Teorías de Brans-Dicke

Las teorías Brans-Dicke (BD) surgen a principios de los años 60's [25] como un intento de generalizar la relatividad general. La búsqueda de los autores era incluir el principio de Mach<sup>1</sup> en la teoría gravitacional generada, de tal manera que la dinámica de un sistema quedaría descrita no solo por la parte geométrica ya descrita por RG sino también por una interacción escalar. La manera de interpretar esta interacción escalar se introduce permitiendo que la “constante” gravitacional se convierta en una función escalar de las coordenadas espacio-temporales. Así para generalizar la acción de Hilbert-Einstein 1.9 se divide el lagrangiano entre  $G$  y se añade la densidad lagrangiana de un campo escalar  $\phi$ . La manera de relacionar  $G$  con  $\phi$  es pidiendo que la dependencia sea inversamente proporcional (a lo que los autores llaman una suposición “razonable”), con lo que la acción para las teorías de Brans-Dicke se lee:

$$S_{BD} = \int [\phi R - \omega_{BD}(\nabla_c \phi \nabla^c \phi / \phi) - U(\phi)] \sqrt{-g} d^4x + S_{mat} \quad (2.20)$$

donde  $S_{mat}$  es la acción de materia estándar, la constante  $G_0$  usual se convierte en una “constante” efectiva con lo que  $\phi$  ahora jugará el papel análogo al de  $G$  y  $\omega_{BD}$  es una constante que se fija dependien-

---

<sup>1</sup>El principio de Mach dice, básicamente, que la inercia de cualquier sistema es el resultado de la interacción con el resto del Universo. Este principio fue enunciado a finales del siglo XIX, con la idea en mente de un sistema de referencia absoluto, en el sentido de Newton, las estrellas fijas, de tal manera que se podría explicar la dinámica de los cuerpos en el Universo mediante las ecuaciones gravitacionales con todas las interacciones debidamente descritas. En relatividad general, como es bien sabido, no se toma un sistema de referencia absoluto, los objetos poseen inercia en relación a otros.

do del tipo de campo y para satisfacer las observaciones (ver sección 2.5). A diferencia del artículo original de Brans y Dicke [25], se ha introducido un potencial general  $U(\phi)$  para manejar una teoría escalar tensorial (TET) más general. Cabe hacer notar que el término de materia es exactamente el mismo que en la acción de Hilbert-Einstein, de tal manera que las ecuaciones de movimiento para las partículas quedarán únicamente determinadas por la métrica, respetando el punto número 2 de la lista mencionada al inicio de este capítulo.

Al hacer la variación de la acción de Brans-Dicke 2.20 con respecto a la métrica. las ecuaciones de campo que se obtienen son:

$$\begin{aligned}
 R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R &= \frac{8\pi}{\phi}T_{ab} + \frac{\omega_{BD}}{\phi^2} \left( \nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla_c\phi\nabla^c\phi \right) \\
 &+ \frac{1}{\phi}(\nabla_a\nabla_b\phi - g_{ab}\square\phi) - \frac{1}{2}g_{ab}U(\phi) \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior, es el mismo que en RG, lo que se ha modificado es el lado derecho. El primer término del lado derecho es el tensor de energía-momento estándar, salvo que el papel de  $G$  lo juega el campo escalar que se ha introducido  $\phi$ , el segundo término es el tensor de energía-momento asociado al campo escalar y que se encuentra acoplado también con  $\phi$  ( $G$ ). El tercer término del lado derecho resulta de la existencia de segundas derivadas de la métrica. Finalmente, encontramos el término asociado al potencial  $U$  multiplicado por la métrica.

Por otro lado, haciendo la variación de la acción 2.20 con respecto al campo  $\phi$  obtenemos:

$$(2\omega_{BD} + 3)\square\phi = -2U(\phi) + \phi\partial_\phi U(\phi) + 8\pi T \quad (2.22)$$

en la ecuación anterior se ha utilizado ya la sustitución de la traza de la ecuación 2.21 que nos da una relación para el escalar de curvatura:

$$-R = \frac{8\pi}{\phi}T - 2U(\phi) + \frac{\omega_{BD}}{\phi^2}\nabla_c\phi\nabla^c\phi - \frac{3}{\phi}\square\phi \quad (2.23)$$

A modo de conclusión, en cuanto a la introducción del principio de Mach en este tipo de teorías, cabe hacer notar que la ecuación del campo escalar depende de la distribución de la materia en el espacio-tiempo  $T$ .

### 2.4.2. Equivalencia TET- $f(R)$

La equivalencia de las TET con las teorías de gravedad  $f(R)$  ha sido demostrada claramente [26]. Para hacer evidente dicha equivalencia recordemos las ecuaciones de campo para ésta última dada por la ecuación 2.9 y reescribámosla de la siguiente forma:

$$f_R G_{ab} = -\frac{g_{ab}}{2}(f - Rf_R) + (\nabla_a\nabla_b - g_{ab}\square)f_R + \kappa T_{ab} \quad (2.24)$$

que si comparamos con la ecuación de campo al variar la métrica de la acción para TET 2.21, con un coeficiente  $\omega_{BD} = 0$ , podemos asociar  $\phi = f_R$  y el potencial  $U(\phi) = Rf_R - f$  que deberá estar en términos del campo escalar  $\phi$ , es decir,  $Rf_R - f = R(\phi)\phi - f(R(\phi))$ . Mientras que la ecuación de la traza de la ecuación de campo 2.9, al hacer las mismas equivalencias anteriores, nos dará:

$$3\square\phi = -2U(\phi) + \phi\partial_\phi U(\phi) + \kappa T \quad (2.25)$$

Si comparamos el potencial  $U(\phi)$  con 2.22, tomando  $\omega_{BD} = 0$ , resultan iguales. Con la comparación anterior se puede notar que existe una equivalencia entre las ecuaciones que describirían la dinámica de

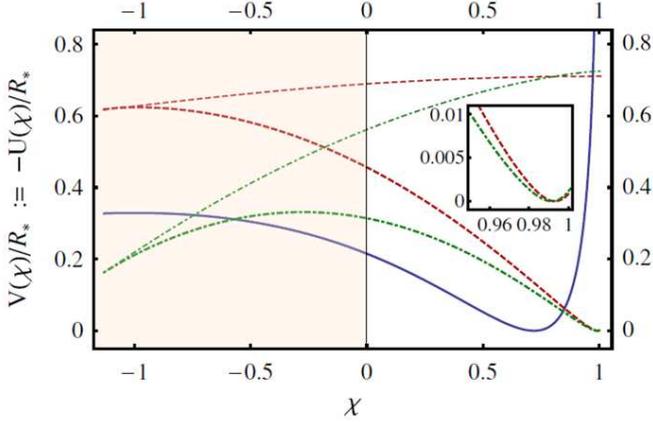


Figura 2.1: Potenciales asociados bajo la transformación a las teorías escalares tensoriales de diferentes  $f(R)$ , en rojo el modelo de Starobinsky, en azul Miranda et al. y en verde el propuesto por Hu y Sawicki. Figura tomada de [44]

ambas teorías. Existen algunas hipótesis sobre los modelos  $f(R)$  empleados que merecen la pena ser mencionadas, la manera en la que se ha definido a  $\phi$  exige que  $f_R$  sea una función monótona para todo el dominio de  $R$  donde esté definida dicha función para de esta manera garantizar que la segunda derivada sea positiva  $f_{RR} \geq 0$ , con lo que  $\phi = f_R(R)$  se puede invertir en una relación de la forma  $R = F(\phi)$ . Esta propiedad no se cumple en muchos de los modelos  $f(R)$  que hasta ahora han demostrado tener las mejores predicciones cosmológicas (ver capítulo 3), lo cual implica que el potencial asociado  $U(\phi)$  resulta ser multivaluado (ver Figura 2.1).

A pesar de este aspecto incómodo del tratamiento bajo las TET, muchos de los estudios de  $f(R)$  se hacen bajo el mapeo a las TET. La ventaja de utilizar este mapeo es, básicamente, operacional pues las

ecuaciones de campo que emanan de las TET son de segundo orden mientras que, como se mencionó anteriormente, las obtenidas bajo gravedad  $f(R)$  son de cuarto orden. Esto traería consigo también una simplificación al imponer condiciones iniciales a tales ecuaciones, además de que los estudios de las TET le llevan una gran ventaja a  $f(R)$  pues, desde que surgieron con Brans y Dicke en 1961 se ha trabajado en éstas, no solamente como alternativa a gravedad sino, en otros campos de la física.

La equivalencia de la que se ha hablado aquí puede causar problemas, pues es necesario responderse ¿hasta qué punto es válido llevar tal equivalencia?, es decir, se ha mostrado que se tienen ecuaciones de campo dinámicamente equivalentes. Si consideramos que una teoría está descrita completamente por sus ecuaciones de campo entonces la equivalencia no haría más que mostrar dos distintas representaciones de una misma teoría, sin embargo, este no es el caso aquí. El espíritu de ambas teorías es muy distinto. Por un lado, las teorías  $f(R)$  proponen una modificación de la geometría del espacio-tiempo en relación al contenido estándar de materia y energía, por otro lado, en las teorías escalares tensoriales se asume la existencia de un campo escalar, cuya interpretación física se encuentra aún en discusión dentro del escenario cosmológico.

### 2.5. El límite de campo débil y el efecto ca-maleón

Como se ha mencionado, una de las pruebas que deben pasar las teorías de gravedad modificada es la impuesta por las observaciones del Sistema Solar, es decir, deben presentar un comportamiento de campo débil que sea compatible con éstas. Al respecto, como varios

de los resultados de las teorías de BD (y TET en general) eran bien conocidos se pensaba que las teorías de gravedad  $f(R)$  podrían descartarse con base a estos resultados.

En particular era bien sabido, para la teoría BD con  $\omega_{BD} = 0$ , es incapaz de pasar los test del Sistema Solar pues el parámetro post-newtoniano  $\gamma$  está dado por la relación:

$$\gamma = \frac{1 + \omega_{BD}}{2 + \omega_{BD}} \quad (2.26)$$

con lo que,  $\gamma = 1/2$  y, si pensamos que la equivalencia es válida en el límite de campo débil, los esfuerzos por modificar la gravedad recurriendo a las teorías  $f(R)$  tendrían que parar ante la evidencia demostrada en la observaciones de la sonda Cassini [27], en las que se encuentra que este valor es:

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5} \quad (2.27)$$

Cumplir con tal restricción implica que, el valor del parámetro de Brans-Dicke, debe ser  $\omega_{BD} > 4 \times 10^4$ . Esta conclusión sería cierta si la equivalencia entre estas teorías fuera válida, lo cual implicaría que el potencial escalar  $U(\phi)$  debería anularse pero esto no sucede en general. El papel que este potencial pueda jugar en el límite de campo débil será, como veremos en los siguientes párrafos, fundamental. Para abarcar la inclusión del potencial debemos entonces hacer la exploración del límite de campo débil en las TET en general, es decir donde  $U(\phi) \neq 0$ .

Para analizar con detenimiento lo que sucede a escala del Sistema Solar en este tipo de teorías, analicemos con detenimiento el límite de campo débil en  $f(R)$  (se puede revisar también este análisis en [28, 29, 30]). Tomemos entonces una perturbación al espacio-tiempo

de fondo, digamos Minkowski:

$$ds^2 = -(1 - 2A(r) + 2B(r))dt^2 + (1 - 2A(r))dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.28)$$

donde se ha tomado  $A(r)$  y  $B(r)$  muy pequeños, notemos también que en el límite de RG  $B(r) \rightarrow 0$ . Ahora bien, la relación que seguirán  $A$  y  $B$  con el escalar  $R$  estará dada por la definición del tensor de Ricci que nos lleva a que:

$$\nabla^2(A + B) = -\frac{1}{2}R \quad (2.29)$$

$$\nabla^2 B = -\frac{1}{2}(R_0^0 + R/2) \quad (2.30)$$

Para baja curvatura  $R \rightarrow 0$  (i.e.  $R \ll \kappa\rho$ ) la solución a las ecuaciones anteriores sería simplemente  $B = -A$ . Usando las ecuaciones de campo 2.9 tenemos:

$$R_0^0 = \frac{-2\kappa\rho + \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}f + f_R R}{3(1 + f_R)} \quad (2.31)$$

y la ecuación 2.30 se puede reescribir como:

$$\nabla^2 B = -\frac{1}{4} \left( \frac{-4\kappa\rho + 4R + 5f_R R - f}{3(1 + f_R)} \right) \quad (2.32)$$

Por otro lado la ecuación de la traza 2.10 nos deja con:

$$3\nabla^2 f_R - R + f_R R - 2f = -\kappa\rho \quad (2.33)$$

Eligiendo  $B > 0$  y en el límite donde  $|f_R| \ll 1$  y  $|f/R| \ll 1$  tenemos:

$$\nabla^2 A \sim -\frac{1}{2}\kappa\rho + \frac{1}{6}(\kappa\rho - R) \quad (2.34)$$

$$\nabla^2 B \sim \frac{1}{3}(\kappa\rho - R) \quad (2.35)$$

y de la traza:

$$\nabla^2 f_R \sim \frac{1}{3}(R - \kappa\rho) \quad (2.36)$$

Así, una solución para  $f_R$  sería del tipo:

$$B(r) = -f_R(r) + a_1 + \frac{a_2}{r} \quad (2.37)$$

pero, ya que  $B$  debe mantenerse con un valor finito en  $r = 0$ , se tiene que  $a_2 = 0$ . Entonces podemos interpretar la solución de  $B$  como:

$$B(r) = -(f_R(r) - f_R(\infty)) \equiv -\delta f_R(r) \quad (2.38)$$

Para una distancia más allá de la cual  $\kappa\rho - R$  puede volverse despreciable entonces  $B(r) \sim 1/r$ . Se puede definir una masa efectiva como:

$$M_{eff} = 4\pi \int (\rho - R/\kappa)r^2 dr \quad (2.39)$$

de tal forma que se relaciona con  $f_R$  como:

$$B(r) = -\delta f_R \rightarrow \frac{2GM_{eff}}{3r} \quad (2.40)$$

Ahora podemos ver cual es la desviación del parámetro post-Newtoniano (PPN)  $\gamma$  que tenemos en este tipo de teorías:

$$\gamma - 1 \equiv \frac{B}{A - B} \rightarrow -\frac{2M_{eff}}{3M_{Tot} + M_{eff}} \quad (2.41)$$

donde  $M_{Tot}$  es la masa total del sistema. Si  $M_{eff} \ll M_{Tot}$  tendremos que  $\gamma - 1 = -2M_{eff}/M_{Tot}$  y si  $M_{eff} = M_{Tot}$  entonces  $\gamma \sim 1/2$ . Estas dos soluciones corresponden, respectivamente, a alta curvatura  $R \approx \kappa\rho$  y baja curvatura  $R \ll \kappa\rho$ .

En la ecuación de la traza descrita en en las soluciones anteriores,

## CAPÍTULO 2. TEORÍAS DE GRAVEDAD $F(R)$

---

la primera de ellas implica alta curvatura ( $R \approx \kappa\rho$ ), y pequeños gradientes  $\nabla^2 f_R \ll 1$ , mientras que las de baja curvatura ( $R \ll \kappa\rho$ ), implican altos gradientes  $\nabla^2 f_R \approx \kappa\rho/3$ .

Una condición suficiente, en el caso de alta curvatura, es que el gradiente sea despreciable para todo radio con respecto a la densidad de la fuente pero una condición necesaria es que el gradiente pueda ser despreciado comparado con los gradientes locales de densidad, entonces, para el caso de curvatura alta tenemos:

$$f_{RR}\partial_i^2 \rho \ll \rho, \quad f_{RR}^{1/2}\partial_i \rho \ll \rho \quad (2.42)$$

es decir, la densidad cambia a escalas que son mayores que  $f_{RR}$ . Si esto se satisface para todo  $r$  entonces la condición de alta curvatura es también válida para todo radio con lo que las desviaciones de RG serían suprimidas. Si la condición se viola para un radio exterior entonces una porción de este espacio exterior entraría en el límite de curvatura baja, i.e.  $R \ll \kappa\rho$ , la solución interior entonces dependerá de las condiciones exteriores.

El máximo cambio en  $f_R$  del interior al exterior esta impuesto por la condición que se toma para curvatura baja  $R \ll \kappa\rho$ , o bien,  $M_{eff} = M_{Tot}$ :

$$\Delta f_R(r) \leq \frac{2}{3}\Phi_M(r) \quad (2.43)$$

donde  $\Phi_M$  es el potencial Newtoniano exterior a la masa dominante, es decir,  $\Phi_M = GM_{Tot}/r$ . Esta condición impone un límite a la diferencia entre los valores interior y exterior del campo para una solución estática. A esta condición se le llama de *thin-shell (cáscara delgada)* y si es satisfecha y  $|\Delta f_R(r)| \ll \Phi_M(r)$ , entonces  $M \gg M_{eff}$  con lo que se garantiza que dentro de esta región existe una de alta

curvatura donde  $R \rightarrow \kappa\rho$ . Tomemos entonces, de la ecuación 2.43:

$$\Delta f_R \lesssim \kappa(\rho - \rho_\infty)r^2 \quad (2.44)$$

De afuera hacia adentro, cuando la condición de curvatura se satisface, se cuenta con suficiente material para hacer la transición del interior al exterior y una vez que se satisface permanecerá así en el interior y los cambios  $f_R$  serán mucho menores que el salto inicial dada la transición de régimen. El campo exterior es solamente generado por la cáscara delgada de masa  $M_{eff}$  que se encuentra fuera de la transición, cuando puede suceder este fenómeno se le llama, en la literatura, *efecto camaleón*. Este efecto fue reportado por Khoury y Weltman en 2003 [31], dentro de las TET y debido a éstas es que se pensó en buscarlo en las teorías de gravedad  $f(R)$ . Los modelos utilizados actualmente en la literatura (ver capítulo 3) cumplen con las condiciones impuestas por el Sistema Solar apelando a que dicho efecto sucede (ver [32] para una revisión completa y [33, 34] para el efecto en el Sistema Solar bajo  $f(R)$ ).



## Capítulo 3

# Método y modelos

### 3.1. El método del escalar de Ricci

Muchos de los trabajos en la literatura de gravedad  $f(R)$  son realizados utilizando la técnica de las TET. Sin embargo, como se ha mencionado, este método puede traer consigo algunos problemas debido a suposiciones hechas, ya sea antes del mapeo o bien una vez realizado. Los modelos  $f(R)$  son funciones del escalar de Ricci, hasta ahora no hay una motivación más allá de la compatibilidad observacional de las predicciones de cada modelo particular, y los modelos más exitosos son, en general, funciones no necesariamente *bien comportadas*, con esto simplemente se quiere decir que pueden tener puntos singulares, no ser funciones analíticas o bien no ser clase  $C^3$  lo cual pone en riesgo la equivalencia con las TET y por consiguiente las conclusiones obtenidas bajo ese mapeo. Por otro lado, si aún sabiendo que las hipótesis para la equivalencia no se cumplen, se realiza el mapeo y se calcula el potencial asociado a ciertos modelos, este potencial resulta ser multivaluado (como se mencionó en el

## CAPÍTULO 3. MÉTODO Y MODELOS

---

capítulo 2) y habría que elegir alguna de las ramas de este potencial asumiendo que la dinámica resultante de dicha rama del campo es la “correcta”.

Existen, en particular dos resultados que se encontraban en controversia, y cuya relevancia es fundamental para el estudio de viabilidad de los modelos  $f(R)$ : la existencia misma de los objetos compactos (como estrellas de neutrones o enanas blancas) y la viabilidad cosmológica de los modelos de la forma  $R^n$ . Estos casos serán estudiados con detalle en los capítulos posteriores (5 y 6) de esta tesis, por ahora solamente se mencionan como una motivación para desarrollar un método alternativo al tratamiento bajo las TET.

En esta tesis proponemos, lo que hemos llamado, el método del escalar de Ricci, bajo el cual el mapeo a las TET no es requerido y aún así las ecuaciones diferenciales que resultan son de segundo orden. El fundamento de este método descansa en una idea muy simple: promover el escalar de Ricci como una variable misma del sistema. De esta manera, al ganar un grado de libertad, se conseguirá tener un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, además de ganar una simplicidad notable en comparación con las resultantes de cuarto orden al mantener solamente los coeficientes métricos como variables. Este procedimiento facilita además la manera de fijar las condiciones de frontera en problemas específicos.

La ecuación de campo 2.9 se puede reescribir de manera muy directa como:

$$f_R G_{ab} - f_{RR} \nabla_a \nabla_b R - f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) + g_{ab} \left[ \frac{1}{2} (R f_R - f) + f_{RR} \square R + f_{RRR} (\nabla R)^2 \right] = \kappa T_{ab} , \quad (3.1)$$

donde  $(\nabla R)^2 := g^{ab}(\nabla_a R)(\nabla_b R)$  y se ha sumado y restado el término  $\frac{1}{2}f_R g_{ab} R$  para poder completar el tensor de Einstein  $G_{ab}$ .

La traza de la ecuación anterior está dada por la ecuación 2.10. Sustituyendo 2.10 en 3.1 se encuentra:

$$G_{ab} = \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \nabla_a \nabla_b R + f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) - \frac{g_{ab}}{6} \left( R f_R + f + 2\kappa T \right) + \kappa T_{ab} \right]. \quad (3.2)$$

Las ecuaciones (2.10) y (3.2) son las ecuaciones básicas para las teorías de gravedad  $f(R)$  que, en esta tesis, se propone utilizar para analizar cualquier sistema astrofísico en lugar de transformar a las teorías escalares tensoriales, de esta manera se podrán evadir los problemas naturales que surgen al hacer dicho mapeo. Es justo mencionar que una reducción similar fue considerada en [35], sin que nosotros nos encontráramos al tanto de tal estudio. Sin embargo su análisis no se aplicó a una resolución general sino a un análisis de estabilidad.

### 3.2. Análisis cualitativo del método del escalar de Ricci

Este método obviamente no cambia la naturaleza de cuarto orden, en la métrica, de estas teorías ya que  $R$  depende de segundas derivadas de los componentes de la métrica  $g_{ab}$  y, como se puede ver de lado derecho de la ecuación 3.2, hay segundas derivadas del escalar de curvatura  $R$ . Sin embargo el punto importante es promover  $R$  como una variable independiente y resolver el sistema (2.10) y (3.2) como un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden para  $R$  y  $g_{ab}$  respectivamente.

## CAPÍTULO 3. MÉTODO Y MODELOS

---

Una propiedad importante es el hecho de que no solamente el tensor total de energía-momento es conservado (lado derecho de la ecuación 3.2) sino también el tensor de energía momento de la materia por sí mismo. Entonces las ecuaciones de campo implican que  $\nabla_a T^{ab} = 0$ . Esto nos dice que este tipo de teorías son teorías métricas y, por lo tanto, la ecuación de geodésicas para partículas de prueba se mantiene. Las ecuaciones de conservación tomarán entonces la misma forma que en relatividad general y el cambio ocurrirá durante la evolución de las ecuaciones que la métrica seguirá.

Bajo el método del escalar de Ricci, los valores iniciales impuestos para  $R$  y sus derivadas no son arbitrarios, sino que se encuentran sujetos a las llamadas constricciones Hamiltonianas y de momentos, que son semejantes a las de relatividad general. Esta característica matemática resulta importante cuando se piensa en el problema de Cauchy para estas teorías. Para el caso de un espacio-tiempo de Friedmann-Roberson-Walker (FRW), esta característica se verá reflejada en que las condiciones iniciales para  $R$  y  $\dot{R}$  deberán satisfacer la ecuación de Friedmann modificada (ver capítulo 4).

Uno de los problemas de los que se ha hablado en esta tesis, al trabajar el estudio de la gravedad  $f(R)$  bajo el mapeo a las TET, es que el potencial que se define es multivaluado. El potencial que se asociará bajo el método del escalar de Ricci se puede obtener al analizar la ecuación de la traza 2.10 en vacío,  $T = 0$  y este quedaría simplemente dado por:

$$V(R) = -Rf(R)/3 + \int^R f(x)dx \quad (3.3)$$

el cual es univaluado si  $f(R)$  lo es y tal que cumpla con:

$$V_R(R) = dV(R)/dR = (2f - f_R R) / 3 \quad (3.4)$$

Entonces, si no hay términos de materia (como en el exterior de un objeto compacto) o es despreciable (como en el futuro de la evolución cósmica) la ecuación (2.10) admite como solución  $R = R_1 = \text{const.}$ , con lo que  $V_R(R_1) = 0$ , es decir,  $R_1$  es un punto crítico del potencial definido. Cuando esta solución se utiliza en (3.2) bajo la aproximación  $T_{ab} \approx 0$ , se obtiene:

$$G_{ab} = -\Lambda_{\text{eff}} g_{ab} \quad (3.5)$$

donde se impone la condición  $\Lambda_{\text{eff}} := R_1/4$  para corresponder justamente con los valores observacionales que se tienen asociados con la constante cosmológica. La diferencia en el caso de  $f(R)$  es que la aceleración es causada por una “energía oscura geométrica”. Con esta condición, la solución para la métrica debe ser tal que, asintóticamente en tiempo y espacio, el escalar de curvatura sea constante, es decir, tendremos soluciones tipo de Sitter. Esta característica se mantendrá para soluciones estáticas y esféricamente simétricas [36, 37] y para las soluciones en cosmología de FRW, como se mostrará en esta tesis [38, 39]. En resumen, es posible analizar, al menos cualitativamente, si un modelo particular  $f(R)$  tiene la capacidad de imitar una expansión acelerada, con base en el análisis de este potencial considerando el límite cuando la contribución de materia se vuelve despreciable. Incluso podemos notar que, dependiendo del modelo  $f(R)$ , se puede tener más de un punto crítico y dependiendo de la localización de estos, podríamos saber si la evolución cosmológica nos llevaría a un Universo tipo de Sitter, anti de Sitter e incluso podría tener un comportamiento asintótico tipo Minkowski y permitir aún

así una etapa de expansión acelerada [41] (ver capítulo 5).

Finalmente, cabe mencionar que, en nuestro análisis no estamos cambiando de ninguna manera los principios de gravedad  $f(R)$ , por lo que, si un modelo particular tiene comportamientos patológicos como singularidades o bien que alguna de sus derivadas se anule en algún punto, es decir, si  $f_R(R_0 = 0)$  o  $f_{RR}(R_0 = 0)$ , las ecuaciones de campo seguirán teniendo los problemas naturales debidos a estas patologías ya que, en las ecuaciones 3.2 y 2.10 existen denominadores dependientes de tales cantidades. La diferencia fundamental es que estos problemas no quedarán enmascarados por el mapeo a las TET, es decir, el estudio de viabilidad de los modelos no caerá de ninguna manera en ambigüedades.

### 3.3. Modelos $f(R)$

Ya se ha mencionado en la introducción de esta tesis que, para trabajar bajo el paradigma de gravedad modificada, es necesario un principio físico guiador que nos lleve a diseñar una teoría general de gravedad de manera adecuada. Sin embargo carecemos de tal principio y la búsqueda actual, por lo menos en gravedad  $f(R)$ , es a prueba y error.

En esta sección presentamos los modelos específicos  $f(R)$  que se han propuesto en la literatura y que analizaremos bajo el método del escalar de Ricci, la primera parte involucra los modelos que han demostrado tener mayor éxito cosmológico. El modelo de Hu-Sawicky [30] y el de Starobinsky [42] fueron publicados en 2007 con apenas un mes de diferencia, mientras que el modelo de Miranda [44] se propuso dos años después y, a pesar de no ser tan popular como los anteriores, se ha considerado de manera particular en esta tesis

debido a una propiedad muy importante: no presenta un potencial multivaluado al hacer la equivalencia a las TET, y por consiguiente, los resultados publicados por estos autores son robustos y servirán como una prueba de confiabilidad de nuestro método.

Otro modelo analizado en esta tesis, y que ha recibido una atención considerable, es el modelo exponencial, sugerido por Linder [45]. Este modelo presenta una característica particular que nos invitó a hacer un análisis detallado, su potencial, para ciertos valores de sus parámetros, se vuelve muy plano alrededor de  $R = 0$ . Con base en un análisis cualitativo podría esperarse que existieran soluciones que fueran asintóticamente planas y aún así tener una etapa de expansión acelerada, los detalles se podrán revisar en el siguiente capítulo.

El último de los modelos analizados en esta tesis es el denominado  $R^n$ , el cual ha sido muy utilizado en la literatura y objeto de distintas controversias en cuanto a su viabilidad cosmológica [46, 47, 48, 50, 51, 52, 53], incluso es utilizado por algunos autores como una alternativa al uso de materia oscura [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60].

### 3.3.1. Modelo de Hu-Sawicky

El modelo propuesto por Hu y Sawicky en 2007 [30] fue pensado originalmente para evadir los problemas del Sistema Solar apelando al efecto camaleón. Este modelo (HS) está dado por la relación:

$$f(R) = R - m^2 \frac{c_1(R/m^2)^n}{c_2(R/m^2)^n + 1}, \quad (3.6)$$

con  $n > 0$ ,  $m^2$  funciona no solamente para mantener una congruencia con las unidades sino que este valor se puede fijar con base en las observaciones, de tal manera que el valor  $R_1/4$  coincida con  $\Lambda_{eff}$ . Los valores  $c_1$  y  $c_2$  son parámetros constantes que, en este mo-

## CAPÍTULO 3. MÉTODO Y MODELOS

---

delo, se fijan por medio de imitar la contribución de materia y energía oscura para la época actual bajo el modelo  $\Lambda$ CDM. En este modelo, como en todos los utilizados en esta tesis, se pretende evitar la aparición de la constante cosmológica por lo que la materia oscura sigue apareciendo. Los valores que puedan tomar estas constantes harán que se ajuste de mejor o peor manera a las observaciones. En el trabajo donde se presentó el modelo [30], la constante  $m^2$  se fija utilizando la densidad media del Universo, debe tener las mismas unidades que  $R$ , entonces  $1/m$  tiene unidades de longitud y está dado por:

$$m^2 \sim \frac{\kappa^2 \rho_0}{3}, \quad (3.7)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad media del Universo en la época actual. El valor numérico que se ha asumido aquí es  $m^2 \approx 0.24 H_0^2$ . La característica particular impuesta es que las fracciones de  ${}^{\Lambda\text{CDM}}\Omega_{\text{bar+DM}}^0 \approx 0.24$  y  $\Omega_{\Lambda}^0 \approx 0.76$ . La densidad relativa  $\Omega_{\Lambda}^0$  será reemplazada por una definida para expresar la fracción de “energía oscura geométrica”, es decir, la aceleración debida a la modificación geométrica.

De acuerdo con [30] las condiciones para  $c_1$  y  $c_2$  se fijan a partir de:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{6\Omega_{\Lambda}^0}{{}^{\Lambda\text{CDM}}\Omega_{\text{bar+DM}}^0}, \quad (3.8)$$

y

$$f_R^0 - 1 = -n \frac{c_1}{c_2} \left( \frac{12}{{}^{\Lambda\text{CDM}}\Omega_{\text{bar+DM}}^0} - 9 \right)^{-n-1}. \quad (3.9)$$

En este trabajo se ha tomado  $n = 4$  y  $f_R^0 = 0.99$  (el superíndice <sup>0</sup> indica el valor actual, es decir en  $z = 0$ ) así que los valores específicos de  $c_1$  y  $c_2$  son  $c_1 \approx 1.25 \times 10^{-3}$ ,  $c_2 \approx 6.56 \times 10^{-5}$ . En las figuras 3.2

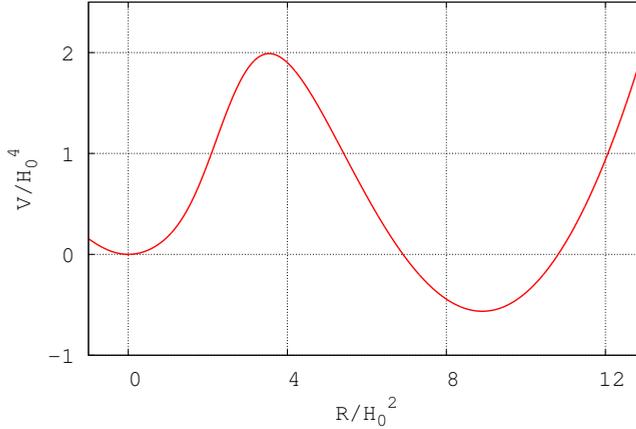


Figura 3.1: Potencial para el caso del modelo  $f(R)$  de Hu-Sawicky. Los parámetros que se han tomado en este caso son  $n = 4$ ,  $m^2 = 0.24H - 0^2$ ,  $c_1 \approx 1.25 \times 10^{-3}$ , y  $c_2 \approx 6.56 \times 10^{-5}$ .

y 3.3 se grafica este modelo y muestra que, en el régimen  $R \gg m^2$ ,  $f(R) \approx R - c_1 m^2 / c_2$ , donde  $\Lambda_{\text{eff}}^\infty = c_1 m^2 / (2c_2)$  no es despreciable porque  $c_1 \gg c_2$ . Este modelo tiene la propiedad de que  $f_R$  y  $f_{RR}$  son positivas durante la evolución cosmológica pero no son positivas definidas (ver figuras 3.4, 3.5 y 4.3).

El potencial  $V(R)$  asociado a este modelo con base en la relación 3.3 se muestra en la figura 3.1. La expresión analítica del potencial en este modelo queda en términos de una expresión hipergeométrica y no es muy ilustrativa. Se puede apreciar que tiene puntos críticos en donde se espera que una solución encuentre su comportamiento asintótico. El mínimo global en  $R_1 \approx 8.9H_0^2$  corresponde al punto de de Sitter encontrado en la evolución cósmica como se muestra en la figura 4.3. Se puede observar también que hay un mínimo en

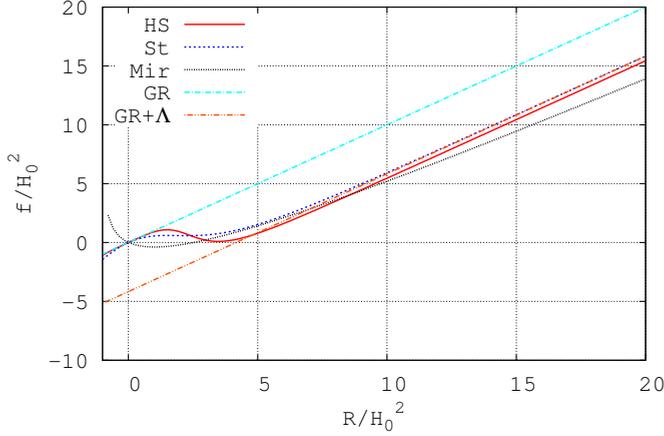


Figura 3.2: Modelos  $f(R)$  empleados en esta tesis. A modo de referencia general se ha graficado el caso de Relatividad General (GR)  $f(R)_{GR} = R$  y también el caso de Relatividad General más constante cosmológica (GR+ $\Lambda$ )  $f(R)_{GR\Lambda} = R - 2\Lambda$  con  $\Lambda = 2.08H_0^2$ . Es posible notar que para  $R/H_0^2$  lo suficientemente grande, el modelo de Starobinsky (St) y el de Hu-Sawicky (HS) se acercan al caso (GR+ $\Lambda$ ). El caso de Miranda tiene la etiqueta (Mir).

$R_{min} = 0$  con lo que se esperaría que la solución asintótica fuera tipo Minskowski.

### 3.3.2. Modelo MJW

Para evitar lidiar con potenciales multivaluados bajo el enfoque de las TET, Miranda y colaboradores diseñaron un modelo que cumpliera con todos los requerimientos para que el tratamiento bajo la equivalencia con  $f(R)$  resultara bien definido. De tal manera que se mantienen trabajando con la técnica de las TET pero el potencial

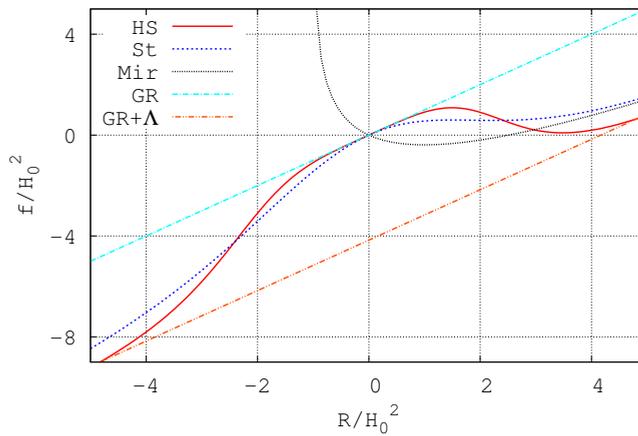


Figura 3.3: Comportamiento de los diferentes modelos  $f(R)$  trabajados en esta tesis cerca del origen, el comportamiento de este tipo de teorías es caracterizado por que las desviaciones a Relatividad General aparecen para valores del escalar de curvatura  $R$  bajos. Las etiquetas empleadas son las mismas que la figura (3.2)

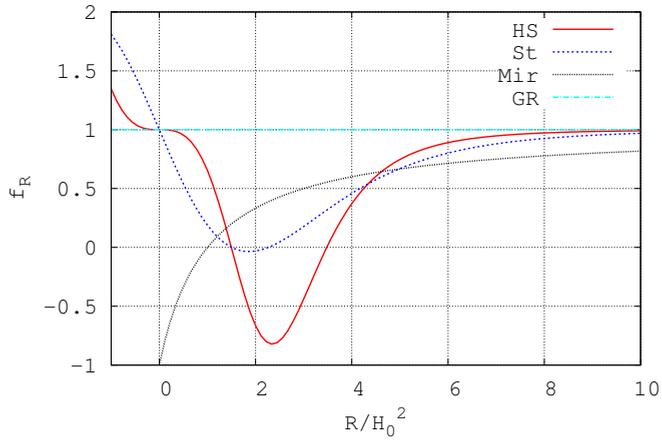


Figura 3.4: Gráficas de las derivadas de los modelos  $f(R)$  empleados en esta tesis  $f_R := df/dR$ . Se puede observar que esta cantidad permanece positiva para los valores adquiridos durante la evolución cósmica requerida para alcanzar un punto de de Sitter (aceleración cósmica).

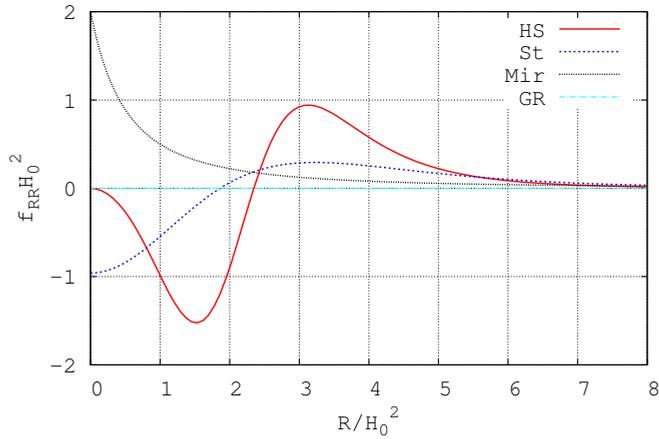


Figura 3.5: Gráfica de las segundas derivadas  $f_{RR} := d^2 f/dR^2$  de los modelos  $f(R)$  empleados en este trabajo. Se puede observar que esta cantidad es definida positiva para el modelo de Miranda *et al* (Mir) mientras que para los modelos de Starobinsky (St) y Hu-Sawicky (HS) ésta se mantiene positiva durante la evolución cósmica necesaria para alcanzar un punto de de Sitter.

## CAPÍTULO 3. MÉTODO Y MODELOS

---

resultante no es multivaluado (ver figura 2.1). Este modelo fue propuesto en 2009 [44] y la relación que mantiene con el escalar de Ricci es:

$$f(R)_{\text{MJW}} = R - \beta R_* \ln \left( 1 + \frac{R}{R_*} \right), \quad (3.10)$$

La función se mantendrá bien definida en tanto que  $R/R_* > -1$ .  $\beta$  es un parámetro adimensional y  $R_*$ , igual que  $m^2$  en el modelo de Hu-Sawicky, relacionará los valores de los puntos críticos en el potencial con el valor observacional asociado con la energía oscura bajo el paradigma  $\Lambda$ CDM. En el análisis cosmológico los parámetros utilizados son  $\beta = 2$  y  $R_* = \sigma_* H_0^2$ , donde  $\sigma_*$  es un parámetro adimensional que permitirá ajustar el modelo con las observaciones cosmológicas de SNIa.

Otra de las motivaciones, que los autores encontraron para generar un modelo distinto, es aclarar la existencia de los objetos compactos en gravedad  $f(R)$  (ver capítulo 6 para una discusión amplia sobre el tema).

Las figuras (3.2) y (3.3) muestran el comportamiento de este modelo. En la figura (3.4) se grafica el comportamiento de la primera derivada, es decir,  $f_R$  vs.  $R/H_0^2$  mientras que en la figura (3.5) se muestra la segunda derivada  $f_{RR} = \beta R_*^{-1}/(R/R_* + 1)^2$ . Se puede observar que la segunda derivada para este modelo es definida positiva en todo el dominio de la función, esta condición resulta fundamental para que el mapeo a las teorías escalares tensoriales se encuentre bien definido.

Por otro lado, la derivada  $f_R$  puede anularse o ser negativa en el rango  $-1 < R/R_* \leq \beta - 1$ , es decir,  $-1 < R/R_* \leq 1$  para el valor que se ha tomado en esta tesis  $\beta = 2$ . Sin embargo, como se mostrará en

la sección (4.4) de resultados numéricos, resulta que  $f_R > 0$  para el modelo cosmológico que se ha analizado, porque  $R/H_0^2 > 1$  durante la evolución cósmica, como se observa en las figuras (3.4) y (4.1). Por lo tanto, es posible evadir cualquier problema posible asociado a los valores cuando  $f_R \leq 0$ . Más aún, ya que  $R/H_0^2 > 1$ , el polo en  $R/R_* = -1$ , donde  $f_{RR} \rightarrow \infty$  y donde  $f(R)$  no se encuentra definido, nunca se puede alcanzar (ver figura (3.5)). Es por esto que, en todos los modelos estudiados aquí excepto  $R^n$ , no tiene ninguna relevancia incluir  $f_{RR}$  en la definición del potencial  $V(R)$  que se utiliza en este trabajo.

El potencial  $V(R)$  estará dado para este modelo por:

$$V(R) = \frac{R_*^2}{6} \left\{ (1 + \tilde{R})(\tilde{R} + 6\beta - 1) - 2\beta(3 + 2\tilde{R})\ln(1 + \tilde{R}) \right\} \quad (3.11)$$

donde  $\tilde{R} = R/R_*$ . Este potencial se muestra en la figura (3.6). Como en el caso anterior, los puntos críticos corresponden a las posibles soluciones triviales que pueden existir en este modelo. El punto crítico localizado en la parte positiva de  $R$  corresponde a una solución tipo de Sitter con solución trivial  $R = R_1$ , en este caso  $R_1 \approx 6.14H_0^2$ . Este punto crítico puede ser alcanzado también de manera asintótica, cuando la densidad de energía asociada a la materia se vuelve muy pequeña. Igualmente, un análisis similar se puede utilizar cuando la solución buscada es para el mínimo local  $R_1 < 0$ . En este caso se tendría una solución tipo anti de Sitter y la solución de Minkowski también puede ser encontrada de manera trivial o bien, si la evolución lo permitiera, encontrarlas de manera asintótica.

Miranda *et.al.* [44] han mostrado que este modelo es consistente con una cosmología FRW presentando una etapa de dominio de materia así como una etapa acelerada y, como se ha mencionado, que

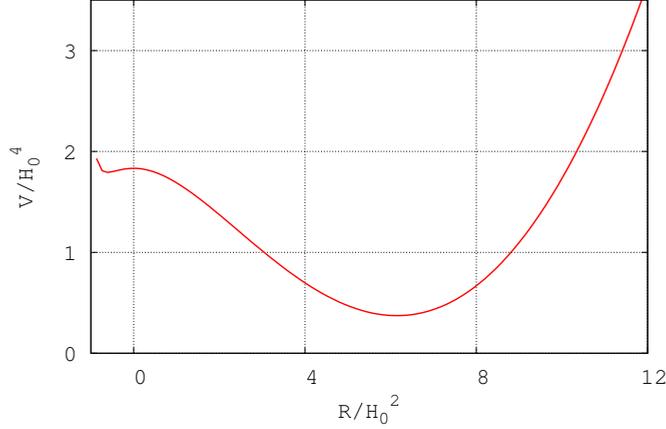


Figura 3.6: Potencial  $V(R)$  asociado al modelo de Miranda *et. al* dado por la expresión (3.10) tomando los valores  $\beta = 2$ ,  $R_* = H_0^2$ .

no existen singularidades en objetos compactos. Sin embargo uno de los problemas que parece presentar este modelo es a nivel de las perturbaciones cosmológicas. Estas parecen ser incapaces de reproducir el espectro de potencias de la materia además de que muestra inconsistencias con las restricciones a la gravedad a nivel local impuestas por las observaciones del Sistema Solar [61]. Miranda et al. en [62] han argumentado que los resultados de [61] no son contundentes y que sería necesario un análisis más cuidadoso al respecto. Por otro lado [63] ha aportado evidencia de la no viabilidad de este modelo al realizar un análisis del efecto camaleón.

### 3.3.3. Modelo de Starobinsky

El modelo de Starobinsky [42], junto con el de HS, fue uno de los primeros en desaparecer la necesidad de la constante cosmológi-

ca para producir un Universo acelerado y al mismo tiempo pasar las restricciones impuestas por el PPN  $\gamma$ . Uno de los problemas que presenta este modelo (y el de Hu-Sawicky) es que el potencial que resulta, bajo el mapeo a las TET, es multivaluado como se muestra en la figura 2.1 debido a que  $f_{RR}$  no es positiva definida y por lo tanto el análisis que se base en ese tipo de técnica será objeto de serias dudas [65, 66, 67, 69, 68, 70, 71].

El modelo de Starobinsky [42] está dado por la relación:

$$f_S(R) = R + \lambda R_S \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{R_S^2} \right)^{-q} - 1 \right], \quad (3.12)$$

con  $q, \lambda$  parámetros positivos y  $R_S$  es otro parámetro que juega el mismo papel que el parámetro  $m^2$  en el modelo de HS. Para fijar la escala se asume que  $R_S = \sigma_S H_0^2$  y tomamos  $\sigma_S \approx 4.17$ ,  $q = 2$  y  $\lambda = 1$  como en [72].

Tanto este como el modelo anterior tienen la propiedad de que, en vacío admiten soluciones con  $R \equiv 0$ , como en el caso de relatividad general, a diferencia de algunos modelos que contienen un término  $\sim R^{-1}$  en el lagrangiano. Debido a que  $f(R=0) = 0$  Starobinsky tituló su trabajo “disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity”. Por otro lado en el régimen de alta curvatura, cuando  $|R| \gg R_S$ , el modelo se comporta como  $f(R) \approx R - \lambda R_S$ , y así este adquiere una constante cosmológica efectiva  $\Lambda_{\text{eff}}^\infty := \lambda R_S/2$  (ver figuras 3.2 y 3.3).

En este modelo  $f_{RR} = 0$  en  $R = \pm R_S/\sqrt{2q+1}$ , así,  $f_{RR}$  no es positiva definida como se puede ver en la figura 3.5. El hecho de que esta cantidad aparezca en el denominador en la ecuación (2.10) indica que el análisis debe de realizarse de manera cuidadosa en estas zonas. Starobinsky hace notar esto en su trabajo [42], y llama a estos puntos *singularidades débiles* pensando que sería posible evadirlas.

## CAPÍTULO 3. MÉTODO Y MODELOS

---

Cabe mencionar que tal punto no es alcanzado durante la evolución cosmológica (ver figuras 3.5 y 4.2). La figura 3.7 muestra el potencial asociado a este modelo:

$$V(R) = \frac{1}{6} \left( R^2 - \lambda R R_S \frac{4R^4 + 5R^2 R_S^2 + 3R_S^4}{(R^2 + R_S^2)^2} \right) + \frac{\lambda R_S^2}{2} \arctan(R/R_S) . \quad (3.13)$$

Para  $R \geq 0$ , hay un mínimo global en  $R = 0$ , un máximo en  $R \approx 4.17H_0^2$  y un mínimo local en  $R_1 \approx 6.82H_0^2$  que corresponde al punto de de Sitter alcanzado durante la evolución cosmológica en el futuro lejano (ver figura 4.2). Como en el modelo anterior, la solución cosmológica en el rango explorado es tal que  $f_{RR}$  y  $f_R$  se mantienen positivas.

El modelo de Starobinsky puede satisfacer las condiciones impuestas por las observaciones cosmológicas actuales [74, 64]. Por ejemplo, es posible construir una época de dominio de materia adecuada que evolucione en una expansión acelerada como se espera de las observaciones a diferencia de varios modelos que han resultado no ser exitosos [46, 47, 48], estos resultados serán demostrados en el capítulo 4. En las referencias en [43] se pueden revisar algunos de los trabajos hechos utilizando el modelo de Hu y Sawicky y el de Starobinsky.

### 3.3.4. Modelo exponencial

Este tipo de modelos exponenciales han sido analizados anteriormente por diferentes autores [75, 45, 76, 77, 79, 80]. La forma particular que hemos tomado en esta tesis es la que se encuentra en [45] pero otras variantes de un modelo exponencial se estudian en [81].

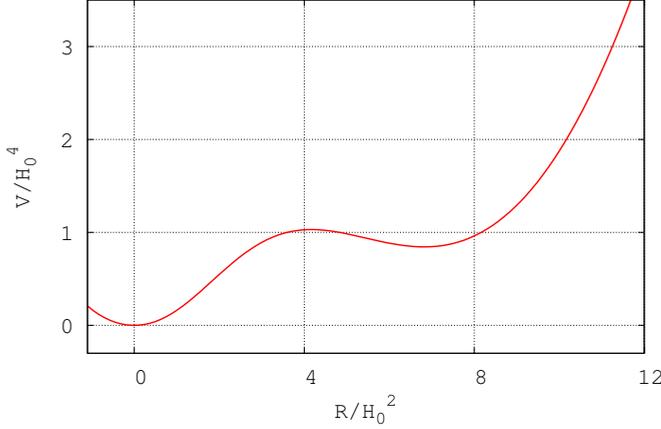


Figura 3.7: Potencial asociado al modelo de Starobinsky (3.12) con  $q = 2$ ,  $\lambda = 1$  y  $R_s \approx 4.17H_0^2$ .

El modelo está dado por la función:

$$f(R) = R_*[\tilde{R} - \lambda(1 - e^{-\tilde{R}})] \quad (3.14)$$

donde  $\tilde{R} = R/R_*$ ,  $\lambda$  es una constante positiva adimensional y  $R_* > 0$  es también una constante que fija la escala, es decir, jugará el mismo papel que en los casos anteriores, y que es del orden del valor actual del parámetro de Hubble  $H_0^2$ . En esta tesis se hará una exploración de la viabilidad cosmológica de este modelo en función de los parámetros. En la figura 3.8 se muestra este modelo tomando diferentes valores del parámetro  $\lambda$ .

La cantidad escalar  $f_R = 1 - \lambda e^{-\tilde{R}}$  es positiva si  $\tilde{R} > \ln\lambda$ . El potencial  $V(R)$  obtenido para este modelo es:

$$V(R) = R_*^2[\tilde{R}(\tilde{R} - 4\lambda) - 2(\tilde{R} + 3\lambda)e^{-\tilde{R}}]/6 \quad (3.15)$$

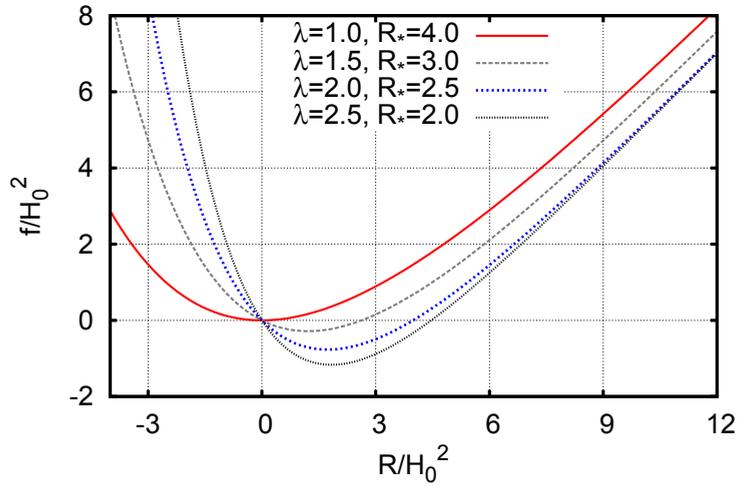


Figura 3.8: Modelo de gravedad exponencial para diferentes valores del parámetro  $\lambda$  y del factor de escala  $R_*$ .

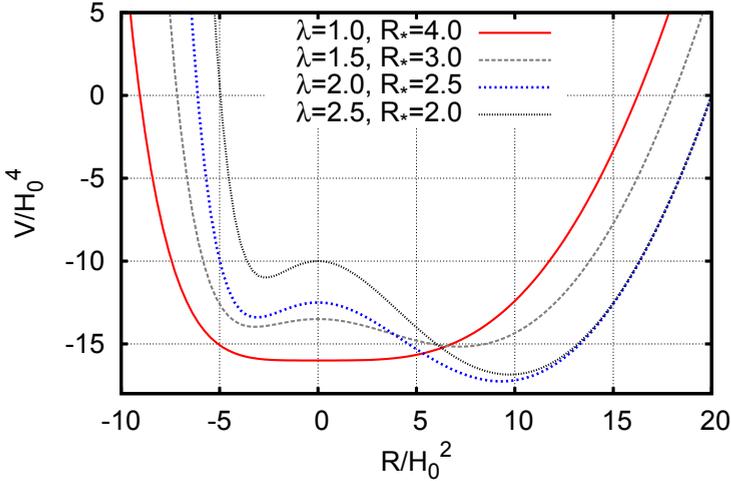


Figura 3.9: Potencial  $V(R)$  asociado para diferentes valores del parámetro  $\lambda$  para el modelo de gravedad exponencial

Para  $0 < \lambda \leq 1$  se puede ver que  $V(R)$  tiene solamente un punto crítico en  $R = 0$  el cual no es de de Sitter, en este caso  $\Lambda_{\text{eff}} \equiv 0$ . Por otro lado, si  $\lambda = 1$  se tendría un punto silla, y si  $0 < \lambda < 1$  entonces sería un mínimo global, como se puede ver pues  $V_{RR}(0) = 1 - \lambda$ . Para  $\lambda > 1$ , se tendría un máximo local en  $R = 0$  y un mínimo global en  $R = R_1 > 0$  que corresponde a el punto de de Sitter que se alcanzará asintóticamente en el futuro. También hay un mínimo local en  $R = R_2 < 0$ , pero este es un punto anti de Sitter que nunca sería alcanzado pues las soluciones cosmológicas suceden en el dominio  $R > 0$ .

El potencial  $V(R)$  se encuentra graficado en la figura 3.9, donde se pueden ver los puntos críticos que se acaban de describir. En el régimen de alta curvatura  $\tilde{R} \gg 1$ , se tiene  $f(R) \approx R - \lambda R_*$ , y así el

## CAPÍTULO 3. MÉTODO Y MODELOS

---

modelo adquiere una constante cosmológica efectiva  $\Lambda_{\text{eff}}^{\infty} := \lambda R_*/2$  (ver figura 3.8).

Se puede observar también que, para  $\lambda > 1$  suficientemente grande,  $\tilde{R}_1 \gg 1$ , y así  $\tilde{R}_1 \approx 2\lambda$ , entonces  $\Lambda_{\text{eff}} \approx \Lambda_{\text{eff}}^{\infty}$ . Finalmente notemos que  $f_{RR} = \lambda e^{-\tilde{R}}/R_* > 0$  lo cual asegura que no se encontrarán singularidades en la ecuaciones debido que  $f_{RR}$  pudiera anularse.

### 3.3.5. Modelo $R^n$

Este modelo está dado por:

$$f(R) = \lambda R_n (R/R_n)^n \quad (3.16)$$

$\lambda$  es un parámetro adimensional y  $R_n$  juega el mismo papel que  $R_*$  en los modelos introducidos en las subsecciones anteriores. La figura 3.10 muestra el modelo para diferentes valores de  $n$ . En la literatura, es llamado simplemente  $R^n$  y ha sido analizado frecuentemente, por representar de manera simple el tipo de modificación al que se recurre en gravedad  $f(R)$ : Incluso se pueden encontrar soluciones analíticas en vacío para este modelo [29]. A pesar de su simplicidad, algunos de los resultados encontrados por distintos autores se encuentran en debate [46, 47, 50, 48, 51].

El potencial para este modelo se encontrará dado por:

$$V(R) = \frac{\lambda R_n R (n-2) (R/R_n)^n}{3(n+1)} \quad (3.17)$$

En donde se ha considerado la contribución del denominador  $f_{RR}$  que formaría parte de la definición de  $dV(R)/dR$  que se obtiene de la ecuación de la traza. Esta aportación en general resulta espúrea al buscar los puntos críticos para los otros modelos, sin embargo en

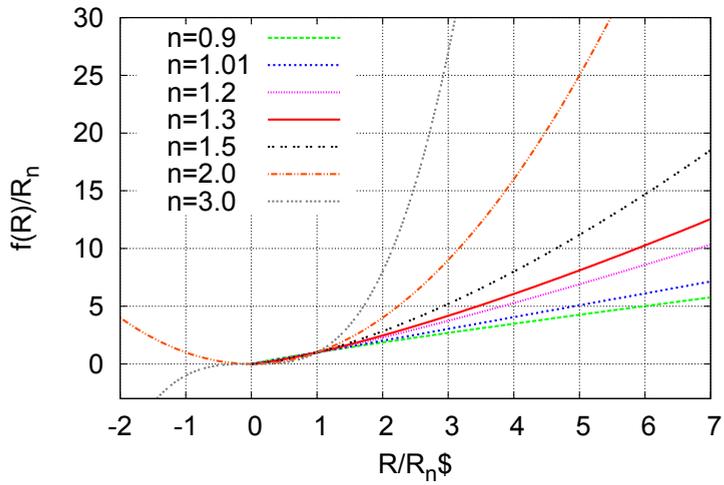


Figura 3.10: Potencial  $V(R)$  asociado para diferentes valores del parámetro  $\lambda$  para el modelo de gravedad exponencial

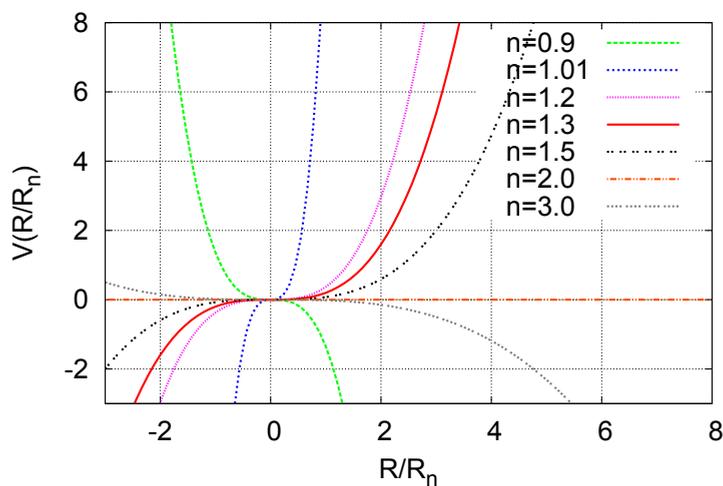


Figura 3.11: Potencial  $V(R)$  asociado para diferentes valores del parámetro  $\lambda$  para el modelo de gravedad exponencial

$R^n$  es relevante ya que podría tenerse comportamientos de la forma  $0/0$ . En la relación anterior se muestra que tiene un punto crítico en  $R/R_n = 0$ . Sin embargo, dada la forma del potencial podría no darse un comportamiento asintótico estable. La figura 3.11 muestra los potenciales asociados con distintos valores de  $n$  para este modelo.

Para  $n = 2$  tenemos un caso que resulta particular pues  $V(R) = 0$ , entonces para cualquier  $R = R_1 \neq 0$  se tendría un mínimo, es decir, cualquiera podría ser un punto de de Sitter, dependiendo de las condiciones iniciales adoptadas. Para los otros valores de  $n$  el potencial no acepta puntos de de Sitter, es decir, lugares con  $R_1 > 0$ , pero incluso así podría generar una etapa de expansión acelerada aunque esta resulta ser transitoria.



## Capítulo 4

# Cosmología en $f(R)$

### 4.1. FRW en $f(R)$ bajo el método del escalar de Ricci

Como se mencionó en la introducción, la razón primordial para considerar a  $f(R)$  como una posibilidad para tener una teoría de gravedad modificada, es su capacidad para producir soluciones que correspondan a un Universo con expansión acelerada. Para realizar el análisis cosmológico tomamos la métrica de Friedmann-Roberson-Walker (FRW) dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] , \quad (4.1)$$

donde  $k = \pm 1, 0$ .

Es posible observar que de la ecuación 2.10, definida para la traza de acuerdo al método del escalar de Ricci, bajo esta métrica queda

como:

$$\ddot{R} = -3H\dot{R} - \frac{1}{3f_{RR}} \left[ 3f_{RRR}\dot{R}^2 + 2f - f_{RR} + \kappa T \right] , \quad (4.2)$$

donde  $\dot{\phantom{x}} = d/dt$ . Como en el caso de relatividad general estándar, las componentes diagonales de la ecuación de campo 3.2 van a proveer las ecuaciones diferenciales a resolver. Es importante notar que la componente  $t - t$  contiene segundas derivadas temporales del escalar de curvatura  $\ddot{R}$ . Este término puede ser reescrito en términos de derivadas de menor orden utilizando la ecuación 4.2.

La expresión final de las ecuaciones es:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR}H\dot{R} - \frac{1}{6}(f_{RR} - f) \right] = \frac{-\kappa T^t_t}{3f_R} , \quad (4.3)$$

$$\dot{H} = -H^2 + \frac{1}{f_R} \left( f_{RR}H\dot{R} + \frac{f}{6} + \frac{\kappa T^t_t}{3} \right) , \quad (4.4)$$

donde  $H = \dot{a}/a$  es el parámetro de Hubble.

La ecuación (4.3) generaliza la ecuación usual de Friedmann bajo relatividad general estándar, funciona además como la constricción hamiltoniana, ya que constriñe las condiciones iniciales especificadas a un cierto tiempo  $t$ . Tal constricción debe satisfacerse a cada instante, por lo tanto, funciona como una ligadura de las ecuaciones diferenciales. Los valores iniciales que restringen a la constricción hamiltoniana, son los asociados a las variables  $a, H, R, \dot{R}$ . La expresión explícita del factor de escala  $a$  en 4.3 y 4.4, cuando  $k = 0$ , estará relacionada con la contribución del tensor de energía-momento que tome la materia, pues dependiendo del tipo de materia que se tome será la forma en la que evoluciona el Unvierso.

Notemos que las ecuaciones aquí descritas, pueden ser reducidas al caso de relatividad general si se toma  $f(R) = R$ ; tomando  $f(R) = R - 2\Lambda$  se recupera relatividad general con constante cosmológica.

Ahora bien, la expresión para el escalar de curvatura a partir directamente de la expresión de la métrica está dada por:

$$R = 6 \left( \dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2} \right) . \quad (4.5)$$

Una manera de comprobar que las ecuaciones encontradas se encuentran libres de errores algebraicos, es corroborar que la expresión estándar del escalar de curvatura se puede recuperar utilizando 4.3 y 4.4 en 4.5 y, efectivamente, se encuentra que  $R \equiv R$ .

Las variables involucradas en  $T_{ab}$  obedecen su propia dinámica, la cual estará dada por la ecuación de conservación:

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (4.6)$$

En este trabajo se ha supuesto que el tensor de energía momento  $T_{ab}$  es una combinación de tres tipos de fluidos perfectos, bariones, radiación y materia oscura:

$$T_{ab} = \sum_{i=1}^3 T_{ab}^i \quad (4.7)$$

con

$$T_{ab}^i = (\rho_i + p_i)u_a u_b + g_{ab} p_i \quad (4.8)$$

en una época donde la interacción es solamente gravitacional. El tensor de energía momento se conserva para cada componente de manera separada y la ecuación de conservación así descrita,  $\nabla_a T_i^{ab} = 0$ , da

## CAPÍTULO 4. COSMOLOGÍA EN $F(R)$

---

la expresión usual:

$$\dot{\rho}_i = -3H(\rho_i + p_i) \quad , \quad (4.9)$$

donde la densidad de energía total de la materia es:

$$\rho = \sum_{i=1}^3 \rho_i \quad (4.10)$$

La ecuación anterior es fácilmente integrable tomando  $p_{\text{bar,DM}} = 0$  y  $p_{\text{rad}} = \rho_{\text{rad}}/3$  como sigue:

$$\rho = \frac{\rho_{\text{bar}}^0 + \rho_{\text{DM}}^0}{(a/a_0)^3} + \frac{\rho_{\text{rad}}^0}{(a/a_0)^4} \quad , \quad (4.11)$$

donde  $^0$  denota los valores actuales de las variables.

En este caso las variables de materia que aparecen en las ecuaciones de campo están dadas explícitamente por:

$$T^t_t = -\rho \quad (4.12)$$

y

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i = \sum_{i=1}^3 (3p_i - \rho_i) = -(\rho_{\text{bar}} + \rho_{\text{DM}}) \quad (4.13)$$

pues  $T_{\text{rad}} \equiv 0$ , y  $p_{\text{bar,DM}} = 0$ . Entonces esto se puede escribir en términos del factor de escala de acuerdo a (4.11). De esta manera el sistema completo de ecuaciones diferenciales dependerá explícitamente de  $a$ .

En la mayoría de los estudios cosmológicos, realizados hasta ahora, la ecuación para  $\dot{H}$  es usualmente escrita en términos de  $\ddot{R}$ , esto claramente no es útil para el problema de valores iniciales a menos que se utilice la ecuación de la traza 4.2 para reemplazar esta cantidad

llevando así a un orden menor en las derivadas. De manera alternativa se puede utilizar una combinación de varias variables para conseguir un sistema de ecuaciones diferenciales de orden tal que sea posible fijar condiciones iniciales a cada una de las variables involucradas. Este tipo de formalismo se realiza en [82] y [47]. Cabe mencionar que dicho formalismo resulta barroco comparado con la simplicidad del método que se presenta en esta tesis y si bien es posible analizar la cosmología en  $f(R)$ , el formalismo no queda libre de controversias.

Nuestro método es similar al utilizado por Appleby & Batty [83] donde ellos utilizan el conjunto de ecuaciones dado por las ecuaciones 4.2, 4.3 y 4.5. Sin embargo, no utilizan la ecuación (4.3) para fijar las condiciones iniciales de su integración. Esto ocasiona que su formalismo utilice diferentes suposiciones y que no pueda ser monitoreado el error de sus soluciones numéricas. Otra diferencia importante es que esos autores utilizan a  $t$  mismo como variable independiente, mientras que en nuestro trabajo se utiliza  $\alpha = \ln(a/a_0)$ , además de que integran comenzando en la época actual y hacia el pasado. Dada la naturaleza de las teorías  $f(R)$  este tipo de integración produce soluciones numéricas incorrectas.

## 4.2. Ecuación de estado en gravedad $f(R)$

En la literatura de  $f(R)$  existen diferentes definiciones de la ecuación de estado asociada a la componente geométrica que agrega la modificación. Resulta conveniente escribir las ecuaciones, de la misma manera en la que se presentan las ecuaciones de Einstein, es decir,  $G_{ab}$  igualado a un tensor total de energía momento efectivo; para tal fin podemos reescribir las ecuaciones de campo, en  $f(R)$ , de la forma:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \nabla_\mu \nabla_\nu R + f_{RRR} (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) - \frac{g_{\mu\nu}}{6} (R f_R + f + 2kT) + kT_{\mu\nu} \right] \quad (4.14)$$

en donde, del lado derecho aparece el término  $f_R^{-1}$  por lo que la separación de las diferentes contribuciones no resulta del todo trivial [29].

La ecuación de estado total  $\omega_{\text{tot}}$ , asociada al tensor de energía momento total, se encuentra relacionada con el parámetro  $\ddot{a}/a$  de acuerdo con la relación:

$$\ddot{a}/a = -\kappa \rho_{\text{tot}} (1 + 3\omega_{\text{tot}}) / 6 \quad (4.15)$$

que determinar´a si el universo se encuentra en una expansión de manera acelerada o no. Dentro del paradigma  $\Lambda$ CDM se tiene:

$$\rho_{\text{tot}} = \rho + \rho_\Lambda \quad (4.16)$$

y

$$p_{\text{tot}} = p_{\text{rad}} + p_\Lambda \quad (4.17)$$

con

$$\rho_\Lambda = \Lambda / \kappa = -p_\Lambda \quad (4.18)$$

La ecuación de estado para la energía oscura  $\omega_\Lambda = p_\Lambda / \rho_\Lambda = -1$ , coincide con  $\omega_{\text{tot}}$  cuando la contribución de la materia es despreciable, en el tiempo presente  $\omega_{\text{tot}} \sim -0.75$ . Una de las metas en la cosmología observacional actual es medir con una mejor precisión la ecuación de estado de la energía oscura  $\omega_{\text{DE}}$  [84, 88]. Una separación de la unidad en  $|\omega_{\text{DE}}|$  indicaría que la naturaleza de la energía oscura sería mucho más compleja que la simple constante cosmológica.

En el marco de gravedad  $f(R)$ , como se ha mencionado, no existe una manera canónica de encontrar una expresión para el tensor de energía momento asociado a la contribución geométrica de la modificación, diferentes autores toman diferentes definiciones. En general se decide partir la densidad de energía total que aparece al reescribir  $H$  de la forma:

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} (\rho + \rho_X) \quad , \quad (4.19)$$

donde  $\rho$  incluye todas las contribuciones, materia (bariónica y oscura) así como radiación. Se puede definir la presión  $p_X$ , de manera similar al reescribir la ecuación 4.4 como:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa}{6} \left\{ \rho + \rho_X + 3(p_{\text{rad}} + p_X) \right\} \quad . \quad (4.20)$$

No es trivial desentrañar el valor de  $\omega_X$  a partir de la expresión de  $\omega_{\text{tot}}$ . Sin embargo es posible analizar si algunas definiciones tienen una motivación mejor que otras, o bien, si algunas de éstas tienen patologías inherentes.

En esta sección se discutirán algunas de las características de estas definiciones y se argumentarán las razones para utilizar en general, la definición que se propone en esta tesis y que está en acuerdo con la utilizada por algunos de los trabajos en la literatura de  $f(R)$ . Como se ha mencionado diferentes expresiones para este  $T_{ab}^X$  pueden ser encontradas en la literatura [42, 89, 72, 90, 44, 82, 77], las que se presentan en estos trabajos pueden ser englobadas en la siguiente definición:

$$\tilde{\rho}_X = \frac{A}{\kappa f_R} \left\{ \frac{1}{2} (f_{RR}R - f) - 3f_{RR}H\dot{R} + \kappa\rho \left( 1 - \frac{Bf_R}{A} \right) \right\} \quad , \quad (4.21)$$

$$\tilde{p}_X = -\frac{A}{3\kappa f_R} \left\{ \frac{1}{2} (f_R R + f) + 3f_{RR} H \dot{R} - \kappa \left( \rho - 3p_{\text{rad}} \frac{B f_R}{A} \right) \right\}, \quad (4.22)$$

Por medio de asignar diferentes valores para los escalares  $A$  y  $B$ , se pueden obtener las diferentes definiciones. Estas expresiones alternativas para la densidad y la presión de la energía oscura geométrica provienen de la expresión para el tensor de energía momento dado por:

$$\kappa \tilde{T}_{ab}^X(A, B) := A G_{ab} - \kappa B T_{ab} \quad (4.23)$$

En esta tesis se toma  $A = B = 1$ , con lo que el tensor de energía momento obtenido cumple con la ecuación de conservación  $\nabla^a T_{ab}^X = 0$  debido a las identidades de Bianchi y a que  $T_{ab}$  se conserva. Con lo que se puede definir una densidad  $\rho_X$  y presión  $p_X$  dadas por:

$$\rho_X = \frac{1}{\kappa f_R} \left\{ \frac{1}{2} (f_R R - f) - 3f_{RR} H \dot{R} + \kappa \rho (1 - f_R) \right\} \quad (4.24)$$

y

$$p_X = -\frac{1}{3\kappa f_R} \left\{ \frac{1}{2} (f_R R + f) + 3f_{RR} H \dot{R} - \kappa (\rho - 3p_{\text{rad}} f_R) \right\} \quad (4.25)$$

Con lo que la ecuación de estado quedará definida como:

$$\omega_X = \frac{3H^2 - 3\kappa p_{\text{rad}} - R}{3(3H^2 - \kappa\rho)} \quad (4.26)$$

A esta elección de parámetros  $A$  y  $B$  le hemos llamado receta I.

La ecuación de estado total es:

$$\omega_{\text{tot}} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{\frac{1}{2}(f_R R + f) + 3f_{RR}H\dot{R} - \kappa\rho}{\frac{1}{2}(f_R R - f) - 3f_{RR}H\dot{R} + \kappa\rho} \right]. \quad (4.27)$$

La elección alternativa  $A = f_R^0 = \text{const.}$  y  $B = 1$  deja la forma introducida por [47, 73, 74, 91] y para tal elección  $\tilde{T}_{ab}^X$  es conservado [91], se le llamará receta II, y haciendo la sustitución de estos valores en 4.21 y 4.22 se obtendrán las definiciones de  $\rho_X^{II}$  y  $p_X^{II}$  respectivamente. La ecuación de estado  $\omega_X^{II}$ , como es usual, se obtiene con base en el cociente de las cantidades anteriores.

En general  $f_R^0 \neq 1$  pero  $f_R^0 \approx 1$ . En [30] se muestra que es posible tomar  $f_R^0 \approx 1$  para evadir de esta forma desviaciones de la ecuación de estado relativas al valor de la constante cosmológica  $\omega_\Lambda = -1$ ; pero si se toma  $f_R^0 \neq 1$ ,  $\omega_X^{II}$  y  $\omega_X^I$  estas no resultan equivalentes. De hecho es posible notar que existiría una divergencia para  $\omega_X^{II}$  en algún  $z$  dependiendo del modelo  $f(R)$  que se tome (ver sección 4.3).

La receta III corresponde a tomar  $B = 1$  y  $A = f_R$ . El tensor de energía momento, en este caso está dado por:

$$\kappa T_{ab}^{III,X} := f_R G_{ab} - \kappa T_{ab} \quad (4.28)$$

$T_{ab}^{III,X}$  no se conserva debido a que el factor  $f_R$  no es constante en la evolución cósmica. En este caso el término asociado con la materia se reduce a  $3p_{\text{rad}} - \rho = T$ . Este tensor de energía momento ha sido considerado por Sotiriou y Faraoni [85].

Finalmente, la elección  $A = 1$  y  $B = f_R^{-1}$  corresponden a:

$$\kappa T_{ab}^{IV,X} := G_{ab} - \kappa T_{ab}/f_R = f_R^{-1} T_{ab}^{III,X} \quad (4.29)$$

al asociar  $\rho_X^{IV}$  y  $p_X^{IV}$ , con base en las ecuaciones 4.21 y 4.22 se en-

cuentra una relación de esta receta con la anterior:

$$\rho_X^{IV} = \rho_X^{III} / f_R \quad (4.30)$$

y

$$p_X^{IV} = p_X^{III} / f_R \quad (4.31)$$

con lo que, en estos dos casos, la ecuación de estado coincide.

El caso de la receta IV ha sido considerado por Sotiriou y Faraoni en [85], Capozziello et al. [86, 96], Carloni et al.[53], Cifton et al. [87] y Bamba et al. [93] entre otros autores.

Los tensores de energía momento dados por las recetas III y IV tienen la característica de no ser conservados,  $\nabla^a T_{ab}^{III, X} = G_{ab} \nabla^a f_R \neq 0$ ,  $\nabla^a T_{ab}^{IV, X} = -T_{ab} \nabla^a (f_R^{-1}) \neq 0$ , entonces las correspondientes densidades y presiones tampoco lo serán, no obedecerán una ecuación del tipo  $\dot{\rho}_X = -3H(\rho_X + p_X)$ . En particular  $\dot{\rho}_X^{IV} + 3H(\rho_X^{IV} + p_X^{IV}) \neq 0$  y el término fuente adicional que aparece en el lado derecho de la igualdad depende de la densidad de materia total,  $-T_{tt} \nabla^t (f_R^{-1}) = \rho d(f_R^{-1})/dt$ .

Solamente en vacío el término  $T_{ab}^{IV, X}$  es conservativo y coincide con  $T_{ab}^X$ . Así, las ecuaciones de estado  $\omega_X^{III}$  y  $\omega_X^{IV}$  coinciden sólo en vacío, pero ya que en cosmología nunca tendremos un Universo vacío del todo, en general no serán equivalentes estas dos definiciones.

Estos cuatro tipos de densidades y presiones se pueden obtener también de las ecuaciones de campo en cosmología por medio de una identificación adecuada de la densidad y presión de la energía oscura geométrica. Esta es precisamente la forma en la que la comunidad de  $f(R)$  introduce las definiciones en lugar de definir las directamente a partir del tensor de energía momento. La ventaja de introducir el tensor de energía momento es que es posible apreciar el origen de

las patologías en las definiciones mencionadas anteriormente. Posiblemente uno de los argumentos para insistir con tales definiciones es que, como en el caso de la receta I, se encuentra en todas el límite de relatividad general estándar cuando  $f(R) = R$ , es decir la densidad y presión asociada a la energía oscura geométrica se anula.

En resumen (ver tabla 4.1), existen al menos tres definiciones no equivalentes  $\omega_X$ ,  $\omega_X^{II}$ ,  $\omega_X^{III}$ , que han sido identificadas en la literatura, para representar la componente de la energía oscura geométrica. En esta tesis se considera la definición de  $\omega_X^1$  que tiene las características más deseables en un tensor de energía momento. Esta receta no tendría problemas con divergencias y es conservativa. Es importante tener en cuenta la definición que se esté usando cuando se tengan los datos necesarios para comparar con las observaciones.

### 4.3. Integración numérica, cosmología

El sistema de ecuaciones 4.2, 4.4 y 4.3 así como el sistema alternativo dado por las ecuaciones 4.2, 4.3 y 4.5 tienen la forma:

$$dy^i/dt = \mathcal{F}^i(y^i) \tag{4.32}$$

donde  $y^i = (a, H, R, \Pi)$  y  $\Pi := \dot{R}$ . Esta manera de escribir las ecuaciones hace posible resolverlos de manera sencilla utilizando el algoritmo Runge-Kutta de cuarto orden. Por otro lado, como es común hacer en los estudios en cosmología, la evolución en la integración numérica se hace utilizando el cambio de variable:

$$\alpha = \ln(a/a_0) \ , \tag{4.33}$$

bajo la cual el big bang  $a \rightarrow 0$  sucede para  $\alpha \rightarrow -\infty$ . Enton-

## CAPÍTULO 4. COSMOLOGÍA EN $F(R)$

TEM	densidad de energía y presión de la EOG
$\tilde{T}_{ab}^X(A, B) := AT_{ab}^{\text{tot}} - BT_{ab}$	$\tilde{\rho}_X = \frac{A}{\kappa f_R} \left[ \frac{1}{2} (f_R R - f) - 3f_{RR} H \dot{R} + \kappa \rho \left( 1 - \frac{B f_R}{A} \right) \right]$ $\tilde{p}_X = -\frac{A}{3\kappa f_R} \left[ \frac{1}{2} (f_R R + f) + 3f_{RR} H \dot{R} - \kappa \left( \rho - 3p_{\text{rad}} \frac{B f_R}{A} \right) \right]$

Receta	$A$	$B$	TEM
I $(T_{ab}^X, \rho_X, p_X, \omega_X)$	1	1	conservado
II $(T_{ab}^{II, X}, \rho_X^{II}, p_X^{II}, \omega_X^{II})$	$f_R^0$	1	conservado
III $(T_{ab}^{III, X}, \rho_X^{III}, p_X^{III}, \omega_X^{III})$	$f_R$	1	no conservado
IV $(T_{ab}^{IV, X}, \rho_X^{IV}, p_X^{IV}, \omega_X^{IV})$	1	$f_R^{-1}$	no conservado (conservado sólo en vacío)

Cuadro 4.1: Arriba: Variables de la energía oscura geométrica (EOG) en términos de las funciones escalares  $A$  y  $B$ . Para relatividad general, [ $f(R) = R$ ], las cantidades asociadas a la EOG se anulan, incluso si la materia aparece explícitamente. Abajo: Las diferentes definiciones del tensor de energía momento (TEM), densidad de energía, presión y ecuación de estado pueden ser obtenidas, para cada receta, tomando los valores de los parámetros  $A$  y  $B$  como se indica en la tabla. Las recetas III y IV producen la misma ecuación de estado pues  $B f_R / A = 1$  en ambos casos mientras que el factor  $A$  se cancela al hacer el cociente de la presión con la densidad de energía.

ces, cuando se realiza la integración con respecto a esta variable, se está siempre “lejos” del big bang en el dominio de  $\alpha$  pero es posible acercarse tanto como se quiera en el sentido de que  $a/a_0 \ll 1$ .

Las ecuaciones 4.2, 4.3, 4.4, y 4.5 se pueden reescribir, en términos de esta variable  $\alpha$ , como sigue:

$$R'' = -R' \left( 1 + \frac{R}{6H^2} \right) - \frac{1}{3f_{RR}H^2} [3f_{RRR}H^2R'^2 + 2f - f_R R + \kappa T] , \quad (4.34)$$

$$H' = -2H + \frac{R}{6H} , \quad (4.35)$$

$$H^2 + \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR}H^2R' - \frac{1}{6}(f_R R - f) \right] = \frac{-\kappa T'_t}{3f_R} , \quad (4.36)$$

$$H' = -H + \frac{1}{f_R H} \left( f_{RR}H^2R' + \frac{f}{6} + \frac{\kappa T'_t}{3} \right) . \quad (4.37)$$

Como se ha mencionado, se utiliza la ecuación 4.35 o la 4.37 para resolver para  $H$ . Sin embargo se han usado ambas ecuaciones para verificar la consistencia del código numérico y, junto con la verificación de la constricción hamiltoniana a cada paso de integración, se ha probado la consistencia de precisión de los resultados numéricos.

De 4.3 y 4.33 se obtiene:

$$\frac{dt}{d\alpha} = 1/H , \quad (4.38)$$

esta relación se utiliza para calcular la edad del Universo cuando se invierte la solución numérica  $t(\alpha)$ , así como para obtener  $a(t)$ . La

## CAPÍTULO 4. COSMOLOGÍA EN $F(R)$

---

condición inicial necesaria para resolver esta ecuación se encuentra tomando valores arbitrarios en el valor de  $z$  donde se comienza la integración que deberá de corresponder con el valor  $t = 0$  para el día de hoy.

Al realizar la integración numérica resulta adecuado reescribir las ecuaciones 4.34-4.37 de manera adimensional, para esto se introducen las cantidades:

$$\bar{a} = a/a_0 , \quad (4.39)$$

$$\bar{t} = t/H_0^{-1} , \quad (4.40)$$

$$\bar{H} = H/H_0 , \quad (4.41)$$

$$\bar{f} = f/H_0^2 , \quad (4.42)$$

$$\bar{R} = R/H_0^2 , \quad (4.43)$$

$$\bar{f}_{RR} = f_{RR}/H_0^{-2} , \quad (4.44)$$

$$\bar{f}_{RRR} = f_{RRR}/H_0^{-4} , \quad (4.45)$$

$$\bar{\rho} = \rho/\rho_{\text{crit}}^0 , \quad (4.46)$$

$$\bar{p}_{\text{rad}} = p_{\text{rad}}/\rho_{\text{crit}}^0 , \quad (4.47)$$

$$\bar{T} = T/\rho_{\text{crit}}^0 , \quad (4.48)$$

donde  $\rho_{\text{crit}}^0 := 3H_0^2/(8\pi G)$ .  $f_R$  ya es adimensional y por lo tanto no hace falta reescribirla de otra forma.

En términos de estas cantidades las ecuaciones (4.34)–(4.38) se reescriben como:

$$\bar{R}'' = -\bar{R}' \left( 1 + \frac{\bar{R}}{6\bar{H}^2} \right) - \frac{1}{3\bar{f}_{RR}\bar{H}^2} [3\bar{f}_{RRR}\bar{H}^2\bar{R}'^2 + 2\bar{f} - \bar{f}_R\bar{R} + 3\bar{T}] , \quad (4.49)$$

$$\bar{H}' = -2\bar{H} + \frac{\bar{R}}{6\bar{H}}, \quad (4.50)$$

$$\bar{H}^2 + \frac{1}{\bar{f}_R} \left[ \bar{f}_{RR} \bar{H}^2 \bar{R}' - \frac{1}{6} (\bar{f}_R \bar{R} - \bar{f}) \right] = \frac{\bar{\rho}}{\bar{f}_R}, \quad (4.51)$$

$$\bar{H}' = -\bar{H} + \frac{1}{\bar{f}_R \bar{H}} \left( \bar{f}_{RR} \bar{H}^2 \bar{R}' + \frac{\bar{f}}{6} - \bar{\rho} \right), \quad (4.52)$$

$$\frac{d\bar{t}}{d\alpha} = 1/\bar{H}, \quad (4.53)$$

donde se ha tomado  $T_t^t = -\rho$  y  $T = -(\rho_{\text{bar}} + \rho_{\text{DM}})$ . Al comparar con las ecuaciones originales 4.34, 4.36 y 4.37, el factor  $\kappa = 8\pi G$  ya no aparece y un factor 3 aparece en la ecuación 4.49 junto a  $\bar{T}$  para que  $T$  esté dada en unidades de  $\rho_{\text{crit}}^0$ .

De manera similar, en las ecuaciones 4.51 y 4.52 los factores  $\kappa/3$  desaparecen pues  $\rho$  está dada en unidades de  $\rho_{\text{crit}}^0$ .

En el pasado se han analizado diferentes sistemas de ecuaciones utilizando, a su vez, diferentes variables para realizar la integración cosmológica [30, 94, 74, 47, 82], en particular los sistemas empleados por Hu y Sawicky [30] se han vuelto muy populares en los años recientes.

Es importante hacer notar que la integración para este tipo de gravedad modificada debe ser realizada partiendo del pasado y hacia el futuro, esto se debe a que las soluciones en  $f(R)$  se comportan como atractores hacia el futuro (repulsores hacia el pasado). Integrar en la dirección contraria puede, fácilmente, llevarnos a soluciones cosmológicas que no satisfacen las condiciones físicas que deberían tener en el pasado. Este es precisamente el problema que se tiene con los

resultados reportados en [83] donde algún tipo de singularidad fue encontrada debido al sentido en el que la integración fue realizada. Este error correspondería con condiciones iniciales mal impuestas. Tales datos (a los cuales les llamaremos  $d_f^c$ ) al fijarlos en el futuro, pueden ser ligeramente diferentes de los datos que predice la integración cuando se integra del pasado al futuro, usando  $d_p^c$  como condiciones iniciales en el pasado. Esta diferencia puede hacer que la solución no coincida en el pasado con las condiciones  $d_p^c$  y haciendo incluso imposible llegar a las mismas épocas físicas asociadas con la integración partiendo de  $d_p^c$ .

Se podría requerir, debido a esta característica, una precisión numérica muy alta sobre las condiciones  $d_f^c$  para poder “predecir” de manera correcta las condiciones  $d_p^c$ ; esta es una característica usual en los sistemas dinámicos que tienen atractores en una dirección del parámetro de evolución y repulsores en la otra.

La estrategia numérica que se ha utilizado en esta tesis para integrar las ecuaciones es como sigue:

- Se comienza la integración en algún  $z$  en el pasado ( $z_c$ ), donde  $z = a_0/a - 1 = e^{-\alpha} - 1$ , dando condiciones iniciales para  $\rho_c^{\text{matt}}$ ,  $\rho_c^{\text{rad}}$ ,  $R_c$ ,  $R'_c$ ,  $H_c$ .
- A partir de las ecuaciones 4.36 y 4.26, evaluados en el punto de inicio de la integración  $z_c$ , se resuelve algebraicamente para  $R'_c$  y  $R_c$ , respectivamente, en términos de las variables que quedan.
- $R_c$  y  $R'_c$  son entonces fijados en función de los valores iniciales de  $H_c$ ,  $\rho_c^{\text{matt}}$ ,  $\rho_c^{\text{rad}}$  y  $\omega_X^c$ .
- Se utiliza el modelo  $\Lambda$ CDM como guía para fijar valores de  $\rho_c^{\text{matt}}$  y  $\rho_c^{\text{rad}}$  con base en las observaciones actuales y éstas se escalarán para el valor de  $a_c$  donde se comience la integración.

- En este caso particular, se ha pedido en todos los modelos comenzar en una época de dominio de materia para el  $z$  de inicio, esta condición es también consistente con el modelo  $\Lambda$ CDM y se impone la ecuación de estado para la energía oscura geométrica también en ese punto inicial de la integración  $\omega_X^c \approx -1$ .

De esta manera, todas las condiciones iniciales necesarias dependerán de una única determinación, el valor inicial del parámetro de Hubble  $H_c$ . El resto de las suposiciones son válidas en el sentido de que son compatibles con lo que se espera de las observaciones, y por lo tanto con lo esperado por  $\Lambda$ CDM. A pesar de que la elección de  $\omega_X^c$  pareciera muy *ad-hoc* es de esperar que para alto  $z$  la curvatura  $R$  sea también lo suficientemente grande en los modelos  $f(R)$  como para tener un comportamiento del tipo de relatividad general más constante cosmológica  $\Lambda_{\text{eff}}$  como, de hecho, se puede observar en la figura 3.2. Además de haber optado por este método con el objeto de comparar con resultados obtenidos por otros autores que han realizado análisis similares y se encuentra un comportamiento similar en la ecuación de estado. En cualquier caso el valor de  $\omega_X^c$  no es fundamental y puede ser fijado de manera arbitraria siempre y cuando la constricción hamiltoniana sea consistente con el valor empleado. El criterio que se ha utilizado en esta tesis para elegir los datos iniciales se encuentra en acuerdo con las observaciones actuales.

Para fijar el valor inicial de  $H_c$  es posible tomar el modelo  $\Lambda$ CDM como referencia y, a partir de este valor, modificarlo con la técnica de disparos de manera que permita recuperar las abundancias actuales de materia, radiación y energía oscura. Esto se hace para cada modelo, integrando el sistema dado por las ecuaciones 4.34, 4.35 y 4.37.

Como se ha mencionado, la ecuación 4.3 se utiliza para fijar los datos iniciales y para checar que esta constricción se siga satisfaciendo

a cada paso de integración. Esta relación es muy sensible a cualquier error en las ecuaciones por lo que es de suma utilidad para corroborar la validez del código numérico empleado. El error relativo se obtiene comparando el valor del parámetro de Hubble dado por esta constricción contra el valor que se obtiene de la integración numérica.

Como comentario final en cuanto a las diferentes recetas del tensor de energía-momento, ya que en esta tesis se utiliza la receta I dada por la ecuación 4.26 para ayudar a fijar los valores iniciales no es de esperarse que los valores iniciales obtenidos utilizando alguna otra de las recetas de la ecuación de estado coincidan con los obtenidos en esta tesis. De manera alternativa podría elegirse alguna de las recetas alternativas y elegir el valor de la condición inicial de la ecuación de estado de la energía oscura geométrica con base en que corresponda con el valor que arrojaría para el día de hoy y del que se tienen cotas, y así, a prueba y error fijarlo con la mayor precisión posible en el código. Si bien esto podría hacerse no se realizó dicho análisis en esta tesis. El punto importante es mantener consistencia entre las condiciones iniciales empleadas.

En cuanto a las diferencias con los valores de las condiciones iniciales con respecto a algunos trabajos recientes de otros autores, por ejemplo [95, 96, 97], han propuesto usar el valor actual del parámetro de desaceleración y el del *jerk*, respectivamente relacionados con  $\ddot{a}_0$  y  $\ddot{\ddot{a}}_0$  para fijar las condiciones iniciales para  $R_0$  y  $\dot{R}_0$ . Tales cantidades se pueden ser escribir respectivamente como:

$$q := -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{H^2 + \dot{H}}{H^2} = 1 - \frac{R}{6H^2}, \quad (4.54)$$

$$j := \frac{\ddot{\ddot{a}}}{aH^3} = \frac{\dot{R}}{6H^3} - \frac{\dot{H}}{H^2} + 1 = \frac{\dot{R}}{6H^3} + q + 2. \quad (4.55)$$

Esta podría resultar una buena estrategia si se pudiera integrar fácil-

mente del presente hacia el pasado. Como ya se ha mencionado, este no es el caso en gravedad  $f(R)$ . Siguiendo la estrategia de integración propuesta en esta tesis es posible recuperar los valores del parámetro de desaceleración y del *jerk* de manera que resultan una predicción misma y puede ser en cualquier caso comprobada con las observaciones ayudando así al estudio de viabilidad de un modelo  $f(R)$ .

#### 4.4. Resultados numéricos en cosmología

En esta sección se presentan los resultados del estudio numérico que se ha llevado a cabo para tres de los modelos  $f(R)$  más exitosos. Estos modelos son el de MJW, Starobinsky y el de HU-Sawicky, que se han introducido en el capítulo 3 de esta tesis. Su éxito radica en el hecho de reproducir una expansión acelerada en acuerdo con las observaciones. Estos tres modelos consideran una contribución de materia oscura para mantener concordancia con el modelo  $\Lambda$ CDM y tener de esta manera un punto de comparación que resulte adecuado.

Con base en estos resultados se muestra, no sólo que la integración resulta exitosa y tiene concordancia con los resultados publicados en la literatura, sino que el método del escalar de Ricci, propuesto en esta tesis, resulta ser una herramienta capaz de analizar un panorama completo de la evolución cosmológica en  $f(R)$ .

Las figuras 4.1–4.3 muestran el comportamiento del escalar de curvatura  $R$  (MJW, Starobinsky y Hu-Sawicky respectivamente) como función del corrimiento al rojo dado por la relación usual  $z = a_0/a - 1$ , donde  $z = 0$  corresponde con el tiempo presente. Para los tres modelos,  $R$  llega al mínimo de de Sitter que se puede observar de los potenciales graficados en las figuras 3.6–3.1.

La evolución del parámetro de expansión  $H$  mostrado en las figu-

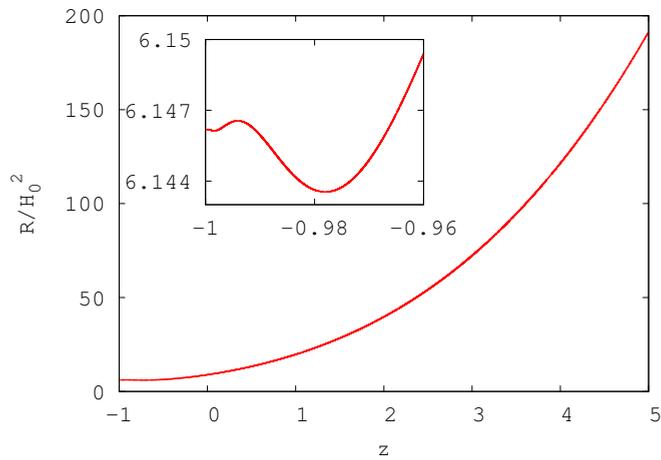


Figura 4.1: Escalar de Ricci  $R$  para el modelo MJW como función de  $z$ ,  $z = 0$  representa el tiempo presente, el futuro corresponde con  $z < 0$ , donde  $z = -1$  sucede en un tiempo infinito.

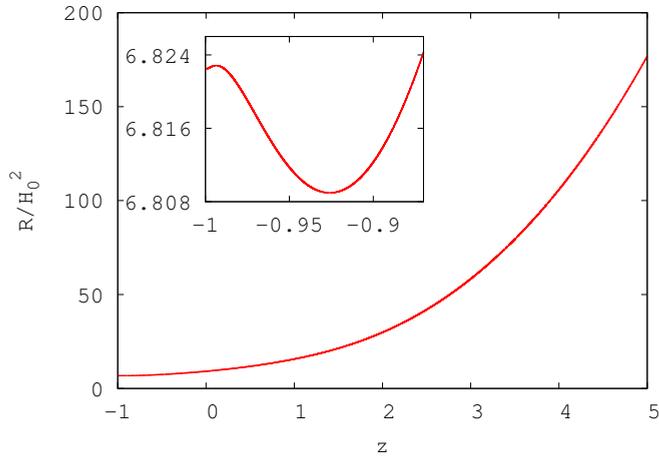


Figura 4.2: Escalar de Ricci  $R$  para el modelo Starobinsky como función de  $z$ ,  $z = 0$  representa el tiempo presente, el futuro corresponde con  $z < 0$ , donde  $z = -1$  sucede en un tiempo infinito.

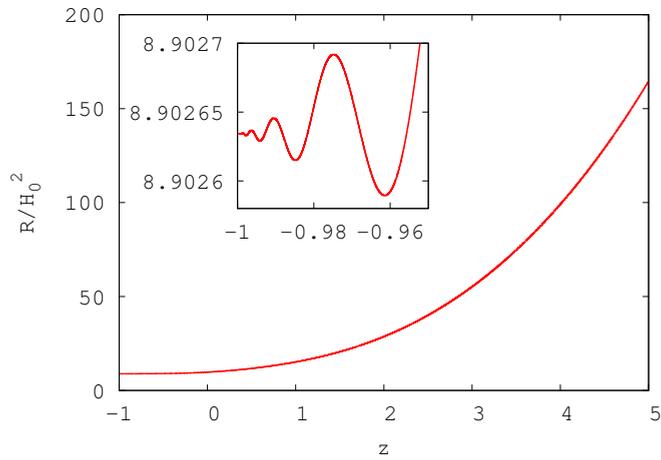


Figura 4.3: Escalar de curvatura de Ricci  $R$  para el modelo Hu-Sawicky como función de  $z$ ,  $z = 0$  representa el tiempo presente, el futuro corresponde con  $z < 0$ , donde  $z = -1$  sucede en un tiempo infinito.

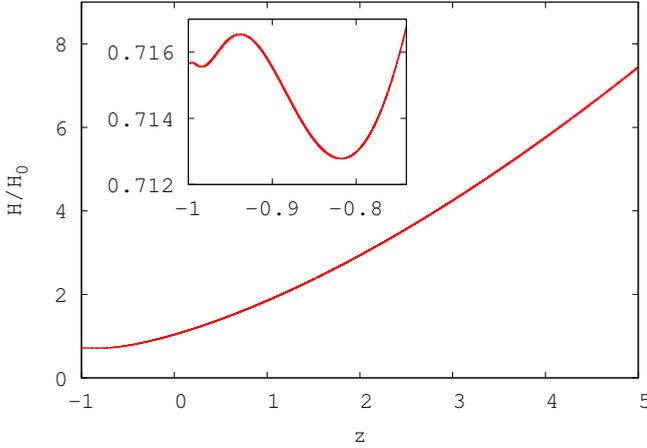


Figura 4.4: Expansión de Hubble expansión  $H$  para el modelo de MJW como función de  $z$ .

ras 4.4–4.6, para cada uno de los modelos  $f(R)$  estudiados en esta sección, sigue un comportamiento similar al del escalar de curvatura  $R$ . Cerca del mínimo se puede observar una oscilación al rededor del mínimo; este tipo de comportamiento fue reportado en [78]. Estas oscilaciones se pueden explicar tomando una perturbación lineal al rededor del punto de de Sitter donde la contribución de materia es despreciable pues se diluye rápidamente con la expansión.

Para comparar las predicciones que estos modelos hacen sobre las contribuciones de materia y energía oscura geométrica, con las obtenidas bajo el paradigma  $\Lambda$ CDM, se definen las densidades adimensionales para cada especie, materia bariónica, materia oscura, radiación y energía oscura geométrica, como sigue:

$$\Omega := \Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\text{bar}} + \Omega_{\text{DM}} + \Omega_X = 1 \quad , \quad (4.56)$$

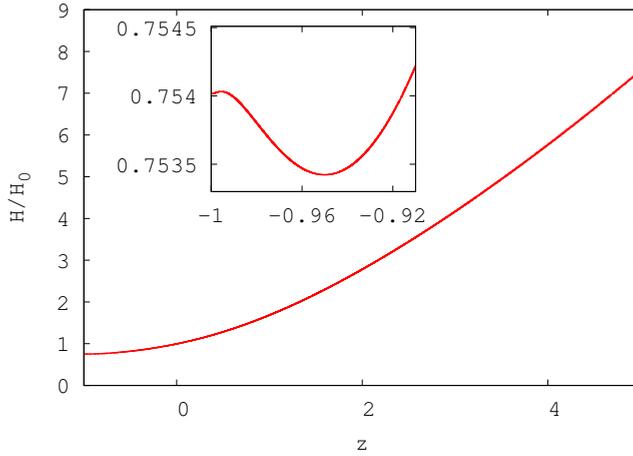


Figura 4.5: Expansión de Hubble expansión  $H$  para el modelo de Starobinsky como función de  $z$ .

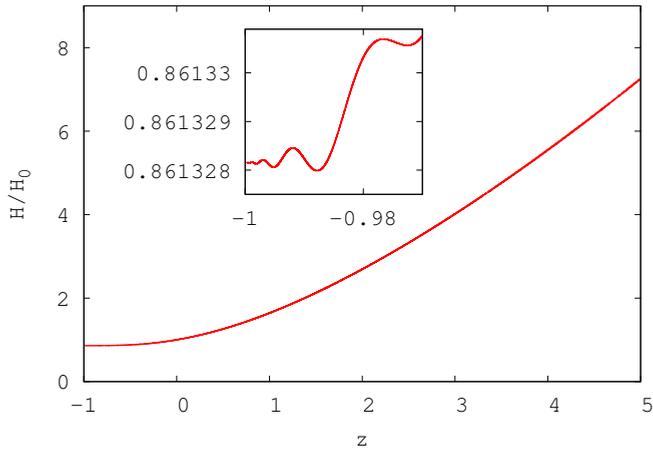


Figura 4.6: Expansión de Hubble expansión  $H$  para el modelo de Hu-Sawicky como función de  $z$ .

donde  $\Omega_i = \kappa\rho_i/(3H^2)$ . Aquí se ha tomado  $\rho_X$  como está dada por la receta I.

Las figuras 4.7–4.9 muestran las abundancias relativas  $\Omega_i$  como función de  $z$ . A manera de referencia las abundancias relativas para el modelo  $\Lambda$ CDM se muestran en las mismas gráficas para poder realizar la comparación adecuada de los modelos.

Las abundancias relativas en el modelo  $\Lambda$ CDM tienen las siguientes expresiones analíticas en términos de los valores correspondientes para hoy (marcados con el superíndice 0) y del factor de escala  $\bar{a} \equiv a/a_0$ :

$$\begin{aligned} \Omega_i^{\Lambda CDM} = & \Lambda CDM \Omega_i^0 \bar{a}^I \left[ (\Lambda CDM \Omega_{\text{bar}}^0 + \Lambda CDM \Omega_{\text{DM}}^0) \bar{a}^{-3} \right. \\ & \left. + \Lambda CDM \Omega_{\text{rad}}^0 \bar{a}^{-4} + \Omega_{\Lambda}^0 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.57)$$

donde el subíndice  $i$  indicaría radiación, bariones, materia oscura o energía oscura (constante cosmológica), y el exponente,  $I$ , toma los valores  $I = -4, -3, -3, 0$  para cada una de las especies respectivamente.

Se puede notar que  $\sum_{i=1}^4 \Omega_i^{\Lambda CDM} \equiv 1$ . Las abundancias actuales  $\Omega_i^0$  asociadas con los modelos  $f(R)$  son predichos dadas las condiciones iniciales en el pasado.

A pesar de que las condiciones iniciales varían de un modelo  $f(R)$  a otro, las abundancias actuales no son exactamente iguales para todos pues la razón de expansión  $H$  varía entre ellos. En todo el análisis hecho en esta tesis, para todos los modelos, se ha incluido la componente de radiación, sin embargo ésta es despreciable para el intervalo en el que la integración (en estos tres modelos) se realiza, es decir, durante la época de dominio de materia y la de dominio de

energía oscura.

Los modelos de Starobinsky y de Hu-Sawicky se comportan de manera muy similar a  $\Lambda$ CDM. En particular, el modelo de Hu-Sawicky es prácticamente indistinguible de  $\Lambda$ CDM. En cambio, el modelo de MJW muestra diferencias importantes para alto  $z$ .

Los tres modelos muestran una época de dominio de materia adecuada para la formación de estructura seguida por una etapa de dominio de energía oscura geométrica, que es adecuada para mostrar una aceleración como la que se espera de las observaciones de SNIa. Este es un test de gran importancia en vista de las discusiones que se tienen sobre diferentes modelos, en [46, 47, 48] se ha mostrado que varios de los modelos  $f(R)$  son incapaces de soportar una época de dominio de materia (Ver capítulo 5).

Es posible observar que  $\Omega_X$  decrece como  $\Omega_\Lambda$  para altos  $z$ , y si se extrapola este comportamiento a épocas muy tempranas, se podrá esperar que la radiación domine. Los modelos mostrarán una época de dominio de radiación, como es de esperarse, sin que existieran cambios con respecto a los predichos dentro del modelo  $\Lambda$ CDM, dejando la nucleosíntesis primordial de la misma manera. Para realizar una exploración al respecto es necesario integrar las ecuaciones comenzando en la época de nucleosíntesis, donde domina la radiación, hacia el presente y fijar las condiciones iniciales entonces. Esta no sería una tarea fácil. Además del problema de condiciones iniciales en sí mismo, existen otras limitantes numéricas, por ejemplo, los órdenes de magnitud de diferencia que se podrían encontrar, en particular con el escalar de curvatura y su derivada. A pesar de esto se podría realizar el análisis de nucleosíntesis utilizando el método del escalar de curvatura y una elección adecuada de unidades en el código numérico.

La figura 4.10 muestra el comportamiento del factor de escala  $a$

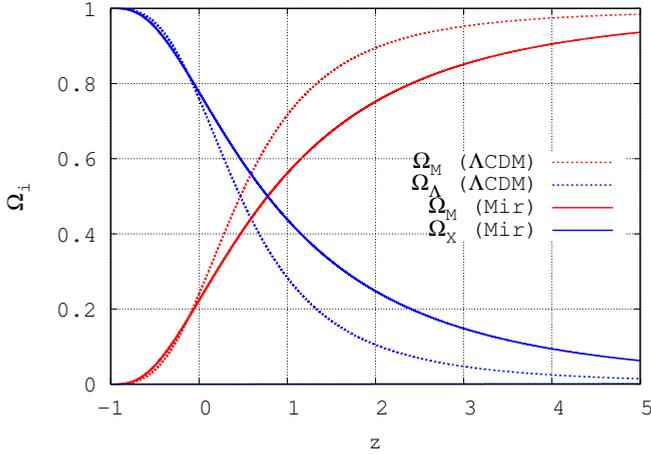


Figura 4.7: Densidades relativas para el modelo de MJW como función del corrimiento al rojo  $z$ . Como referencia las densidades del modelo  $\Lambda$ CDM son también mostradas en esta gráfica. La radiación ha sido tomada en cuenta, sin embargo, es pequeña para el intervalo en la evolución cósmica que se ha explorado. Se ha asumido las densidades del modelo  ${}^{\Lambda CDM}\Omega_{\text{bar+DM}}^0 \approx 0.24$ ,  ${}^{\Lambda CDM}\Omega_{\text{rad}}^0 \approx 4.1 \times 10^{-5}$  y  $\Omega_\Lambda^0 \approx 0.76$  para el modelo  $\Lambda$ CDM. Los valores predichos de las densidades para el día de hoy en el modelo de MJW son ligeramente distintas dadas las condiciones iniciales en el pasado

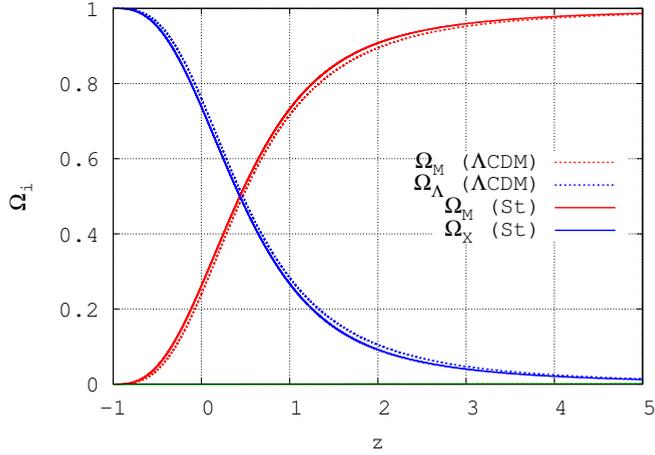


Figura 4.8: Densidades relativas para el modelo de Starobinsky como función del corrimiento al rojo  $z$ . Como referencia las densidades del modelo  $\Lambda$ CDM son también mostradas en esta gráfica. La radiación ha sido tomada en cuenta, sin embargo, es pequeña para el intervalo en la evolución cósmica que se ha explorado. Se ha asumido las densidades del modelo  ${}^{\Lambda}CDM \Omega_{\text{bar+DM}}^0 \approx 0.24$ ,  ${}^{\Lambda}CDM \Omega_{\text{rad}}^0 \approx 4.1 \times 10^{-5}$  y  $\Omega_\Lambda^0 \approx 0.76$  para el modelo  $\Lambda$ CDM. Los valores predichos de las densidades para el día de hoy en el modelo de Starobinsky son ligeramente distintas dadas las condiciones iniciales en el pasado

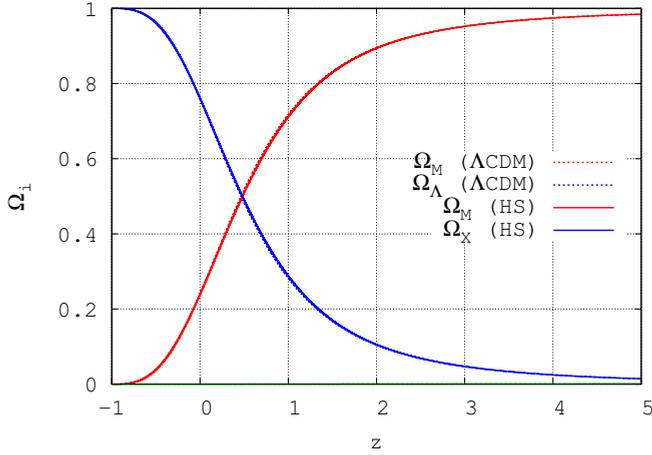


Figura 4.9: Densidades relativas para el modelo de Hu-Sawicky como función del corrimiento al rojo  $z$ . Como referencia las densidades del modelo  $\Lambda$ CDM son también mostradas en esta gráfica. La radiación ha sido tomada en cuenta, sin embargo, es pequeña para el intervalo en la evolución cósmica que se ha explorado. Se ha asumido las densidades del modelo  $\Lambda$ CDM  $\Omega_{\text{bar+DM}}^0 \approx 0.24$ ,  $\Omega_{\text{rad}}^0 \approx 4.1 \times 10^{-5}$  y  $\Omega_\Lambda^0 \approx 0.76$  para el modelo  $\Lambda$ CDM. Los valores predichos de las densidades para el día de hoy en el modelo de Hu-Sawicky son las mismas dadas las condiciones iniciales en el pasado

durante la evolución cósmica para los tres modelos  $f(R)$  que se han tomado en este capítulo (MJW, Starobinsky y Hu-Sawicky), comparados con el comportamiento del factor de escala bajo el modelo  $\Lambda$ CDM. Las curvas muestran la época inicial en la cual las ecuaciones comenzaron a ser integradas. La figura muestra en el modelo de Starobinsky y de Hu-Sawicky la edad del Unviervo que es del orden de  $H_0^{-1} \approx 9.78h^{-1} \times 10^9$ y, donde  $h = (H_0/100)$ . Mientras que para el caso del modelo de MJW, el Universo tendría una edad ligeramente menor,  $0.94H_0^{-1} \approx 9.19h^{-1} \times 10^9$ y. Tomando en cuenta que  $h = 0.7$ , como en la figura 4.20 se obtendría una edad  $\sim 13.97 \times 10^9$ y para los modelos de Starobinsky y de Hu-Sawicky mientras que para el modelo de MJW se tendría una edad aproximada de  $\sim 13.13 \times 10^9$ y; ambas edades se encuentran en buen acuerdo con las estimaciones de los cúmulos globulares en la Vía Láctea [98].

Las figuras 4.11–4.13 muestran el comportamiento de la ecuación de estado asociada a la componente  $X$  basada en las recetas I-III. En cuanto a los modelos de Starobinsky y de Hu-Sawicky nuestros resultados son consistentes con los reportados en [30, 89, 72, 90, 78] para valores similares en los parámetros involucrados en los modelos. En esos trabajos se ha utilizado la receta I para la ecuación de estado. Se obtienen también resultados similares para el modelo MJW reportados en [44], donde también se utilizó la receta I. Las definiciones no equivalentes I y III dan un resultado similar para los tres modelos, no obstante, la ecuación de estado de la receta II puede tener un comportamiento completamente diferente pues diverge en algún valor de  $z$  para el modelo de Starobinsky y para el de MJW como se ve en la figura 4.14. Esta divergencia, que también fue reportada en [74] y un poco discutida en [42], es debido a que la densidad  $\rho_X$  se anula y entonces se vuelve negativa, como se muestra explícitamente en las

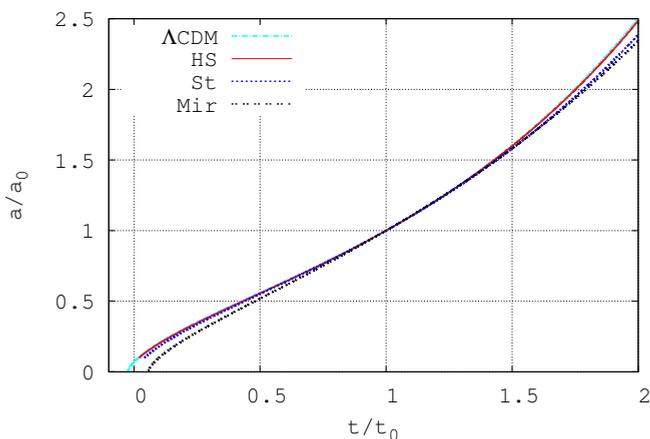


Figura 4.10: Factor de escala como función del tiempo cósmico para los modelos MJW, Starobinsky y Hu-Sawicky. El modelo  $\Lambda$ CDM está incluido en la figura como referencia. Aquí  $t_0 = H_0^{-1}$ . La edad del Universo puede ser estimada a partir del tiempo cuando  $a/a_0 = 1$  (hoy) y el tiempo cuando  $a/a_0 \sim 0$ , es decir, cuando sucede el “big bang”.

figuras 4.15 y 4.16.

Este cambio se puede entender mirando la ecuación 4.21, el término  $\rho(1 - f_R/A)$  puede anularse y cambiar de signo. En el caso  $A = 1$ , que corresponde con  $\rho_X$ , el término  $\rho(1 - f_R)$  es siempre positivo pues  $0 < f_R < 1$  durante la evolución cósmica, como se ve en la figura 3.4. Si las otras contribuciones son positivas, lo que es de esperarse dado que  $f_{RR} \ll 1$  y que los otros términos se asocian con la constante cosmológica efectiva con  $\Lambda_{\text{eff}} > 0$ , entonces la densidad se mantiene positiva  $\rho_X > 0$ .

Ahora bien si  $A = f_R^0 < 1$ , que corresponde a  $\rho_X^{II}$ , el término  $\rho(1 - f_R/f_R^0)$  puede ser negativo en épocas en las que  $f_R > f_R^0$ , que son aquellas épocas para las cuales  $R$  es grande a alto  $z$ . En la época de dominio de materia el término negativo  $\rho(1 - f_R/f_R^0)$  puede dominar sobre los términos geométricos  $f(R)$  de la ecuación 4.21. Esto es exactamente lo que sucede como se muestra en las figuras 4.15 y 4.16. A medida que la evolución continúa  $\rho$  decrece a un punto en donde los otros términos de la ecuación 4.21, los cuales crecen, balancean exactamente para obtener  $\rho_X^{II} = 0$ . Al seguir la evolución al punto donde  $f_R < f_R^0$  o  $\rho$  es suficientemente pequeño, el término  $\rho(1 - f_R/f_R^0)$  se vuelve positivo o pequeño, es entonces cuando  $\rho_X^{II}$  se vuelve positiva. Este comportamiento se acentuará si el parámetro  $f_R^0$  difiere lo suficiente de la unidad, ya que el término  $\rho(1 - f_R/f_R^0)$  se hace significativo.

Ya que en el modelo de Starobinsky y de MJW el parámetro  $f_R^0$  no es fijado *a priori* sino que es más bien una predicción de la evolución dadas ciertas condiciones iniciales en el pasado, entonces para estos modelos  $f_R^0$  diferirá de la unidad de manera más o menos importante dependiendo de las condiciones iniciales impuestas. El modelo de Hu-Sawicky fue construido precisamente tomando el valor

de  $f_R^0 \sim 1$ , es por esto que puede evadir dicho problema (ver la tabla 4.2), el término  $\rho(1 - f_R/f_R^0)$  no es muy importante entonces para este modelo en épocas donde  $\rho$  no es muy grande ya que  $1 - f_R/f_R^0 \approx 0$ . Sin embargo hacia el pasado, donde  $\rho$  domina, el término  $\rho(1 - f_R/f_R^0)$  puede volverse importante y hacer que  $\rho_X^{II} = 0$  en este modelo también. Esto dependerá de la razón en la cual el factor  $1 - f_R/f_R^0$  y la densidad de energía  $\rho$  decrece y crece respectivamente. En cualquier caso este comportamiento es inaceptable e indica que la definición de la ecuación de estado con base en la receta II no es adecuada.

Como en las referencias [30, 100, 89, 72, 90, 78], también hemos encontrado oscilaciones de la ecuación de estado al rededor de la “división fantasma”  $\omega_X = -1$ , para el modelo de Starobinsky y de Hu-Sawicky. Sin embargo para el modelo MJW se muestra bien comportada la ecuación de estado  $\omega_X$  y  $\omega_X^{III}$  no cruza hacia la “división fantasma” en el pasado. Este comportamiento también había sido mostrado desde la construcción del modelo en [44].

La figura 4.17 muestra el comportamiento de la ecuación de estado total. Se puede notar la transición entre la época de dominio de materia hacia la época de dominio de energía oscura geométrica, es decir, la época acelerada. Las figuras 4.18 y 4.19 muestran el parámetro de desaceleración y el jerk que se ha calculado de las ecuaciones 4.54 y 4.55 para los tres modelos  $f(R)$  estudiados en este capítulo.

La tabla 4.2 muestra los valores actuales para el parámetro de desaceleración, para el jerk y para otras cantidades de los tres modelos.

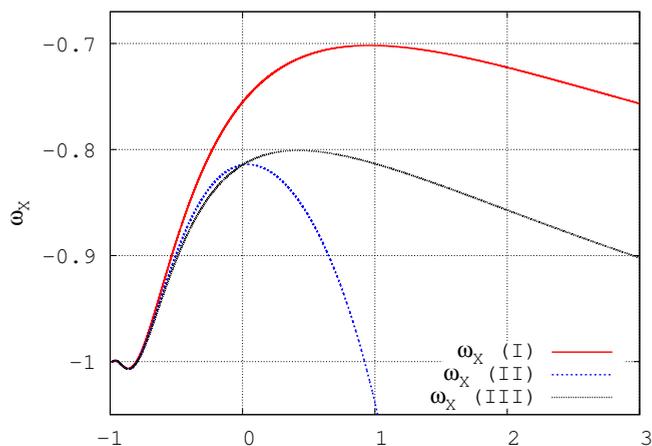


Figura 4.11: Ecuaciones de estado correspondientes a las recetas I, II y III para el modelo MJW

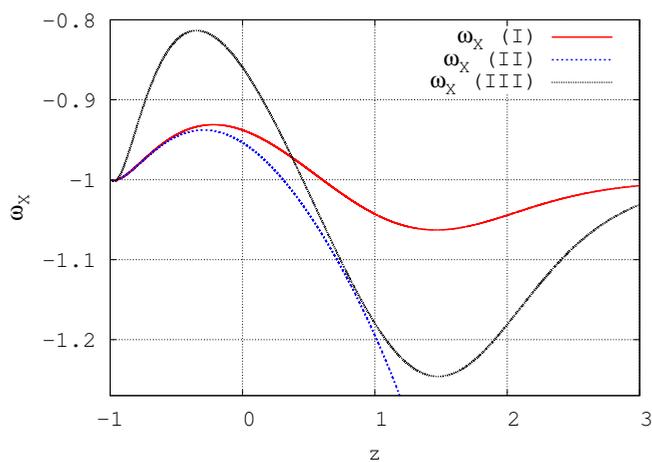


Figura 4.12: Ecuaciones de estado correspondientes a las recetas I, II y III para el modelo Starobinsky

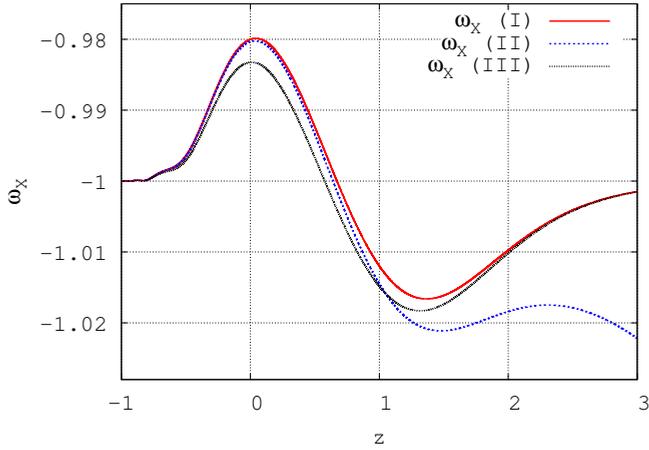


Figura 4.13: Ecuaciones de estado correspondientes a las recetas I, II y III para el modelo Hu-Sawicky

$q_0$	$j_0$	$\frac{R_0}{H_0^2}$	$f_R^0$	modelo
-0.618	0.94	9.74	0.99	Hu-Sawicky
-0.54	1.29	2.20	0.96	Starobinsky
-0.38	0.53	8.91	0.80	MJW

Cuadro 4.2: Parámetro de desaceleración, jerk y otras cantidades asociadas a los modelos de Hu-Sawicky, Starobinsky y MJW evaluados hoy  $z = 0$

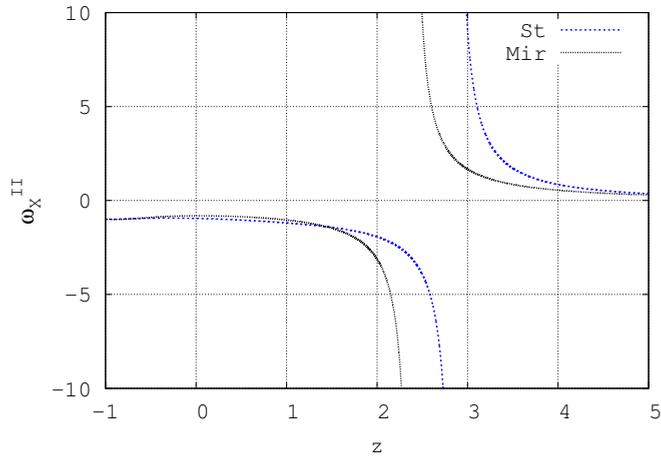


Figura 4.14: Ecuaciones de estado para la receta II para los modelos de Starobinsky y de MJW. Se muestra la divergencia debida al valor correspondiente donde la densidad de energía se anula, ver figuras 4.15 y 4.16. A bajo  $z$  estas ecuaciones de estado se grafican también en las figuras 4.11 and 4.12

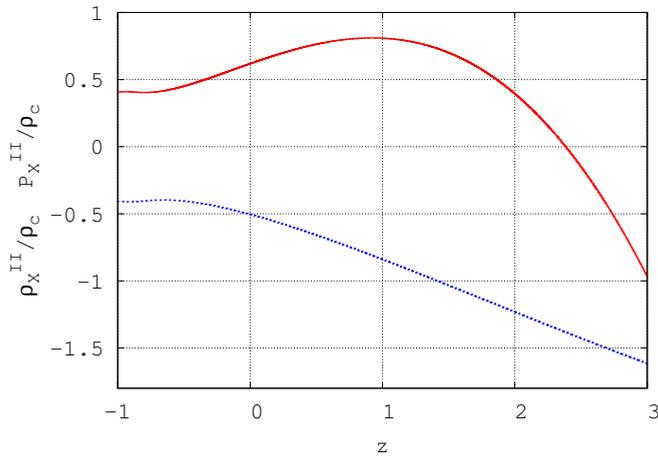


Figura 4.15: Densidad de energía  $\rho_X^{II}$  (línea sólida) y presión  $p_X^{II}$  (línea punteada) calculada a para el modelo MJW utilizando la receta II. Las cantidades están dadas en unidades de la densidad de energía crítica para el día de hoy. Es posible notar en esta gráfica que  $\rho_X^{II}$  se anula a  $z \approx 2.38$ .

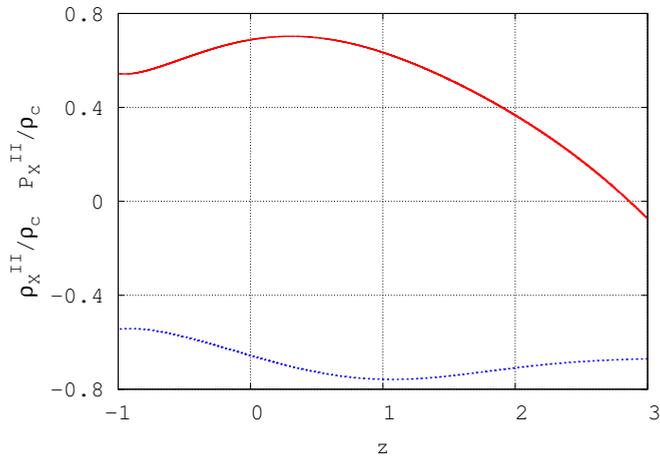


Figura 4.16: Densidad de energía  $\rho_X^{II}$  (línea sólida) y presión  $p_X^{II}$  (línea punteada) calculada a para el modelo Starobinsky utilizando la receta II. Las cantidades están dadas en unidades de la densidad de energía crítica para el día de hoy. Es posible notar en esta gráfica que  $\rho_X^{II}$  se anula a  $z \approx 2.86$ .

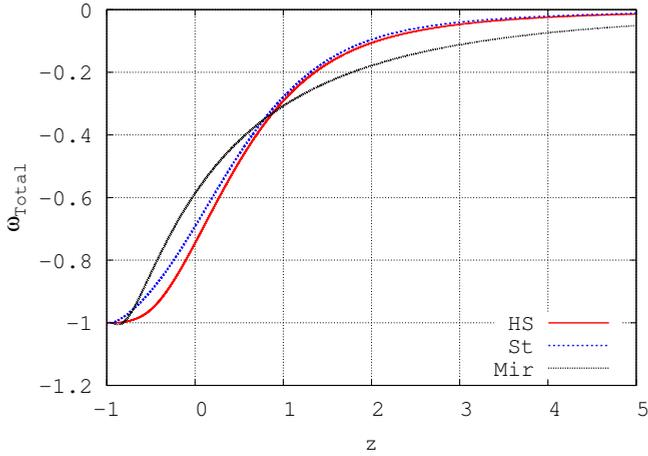


Figura 4.17: Ecuación de estado total  $\omega_{\text{tot}}$  definida por la ecuación 4.27 para los tres modelos

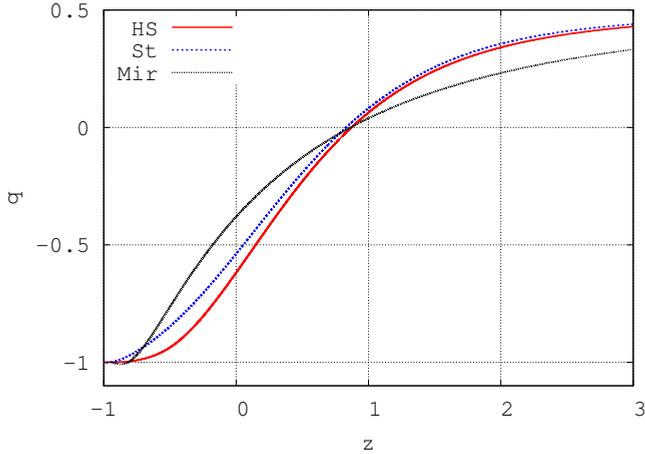


Figura 4.18: Parámetro de desaceleración  $q$  para los tres modelos

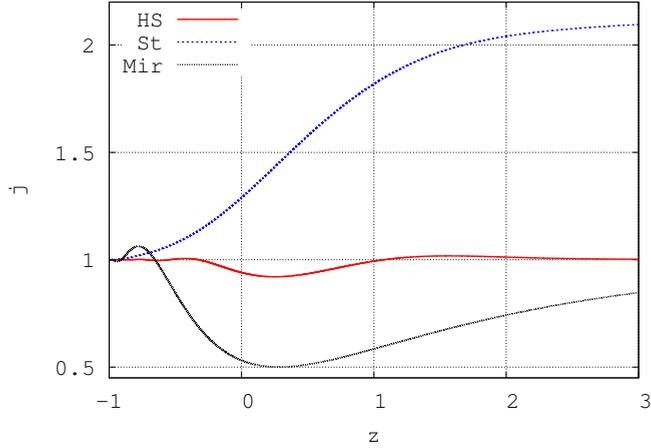


Figura 4.19: Parámetro jerk  $j$  para los tres modelos

### Distancia Luminosa y SNIa

La expansión acelerada del Universo ha sido corroborada por las medidas de la distancia luminosa en las supernovas tipo Ia (SNIa), al comparar con las predicciones del modelo  $\Lambda$ CDM se puede observar que se encuentran en mejor acuerdo que las predicciones de relatividad general sin constante cosmológica.

En esta sección se compararán los resultados predichos por los modelos  $f(R)$  para la distancia luminosa con las observaciones de SNIa y con el modelo  $\Lambda$ CDM.

El cálculo de la distancia luminosa está dado por:

$$d_L^{\text{flat}} = \frac{\zeta(\bar{a})}{\bar{a}}, \quad (4.58)$$

donde  $\bar{a} = a/a_0$  y

$$\zeta = c H_0^{-1} \int_{\bar{a}}^1 \frac{d\bar{a}^*}{\bar{a}^{*2} \bar{H}(\bar{a}^*)} , \quad (4.59)$$

donde se ha introducido de manera explícita la velocidad de la luz  $c$  para poder realizar el cálculo de las distancias en unidades de Mpc y se ha tomado  $\bar{H} := H/H_0$ .

Otra cantidad importante en cosmología es la distancia diametral angular ( $D_A$ ) dada por:

$$D_A^{\text{flat}} = \bar{a} \zeta(\bar{a}) . \quad (4.60)$$

Estas expresiones, tanto para la distancia luminosa como la de la distancia diametral angular son únicamente válidas cuando  $k = 0$ , es decir, el Universo es plano.

La manera más sencilla de calcular  $\zeta$  en el esquema numérico que se utiliza en este trabajo es transformar la ecuación (4.59) en la siguiente ecuación diferencial para  $\zeta$ :

$$\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{a}} = -\frac{1}{\bar{a}^2 \bar{H}(\bar{a})} , \quad (4.61)$$

donde  $\bar{\zeta} = \zeta/(c H_0^{-1})$  es adimensional y se encuentra en términos de la variable  $\alpha = \ln(\bar{a})$  definida en la ecuación (4.33), queda:

$$\bar{\zeta}' = -\frac{e^{-\alpha}}{\bar{H}} . \quad (4.62)$$

Esta ecuación diferencial de primer orden es integrada simultáneamente con las ecuaciones de campo en la forma que se ha descrito anteriormente. Hay un punto técnico importante, no es posible conocer el valor inicial de  $\bar{\zeta}$  *a priori*, es decir, el valor en el punto en

el pasado donde se comienza la integración numérica. Sin embargo este valor puede ser fácilmente encontrado utilizando el método de shooting, lo que se buscará es que este valor,  $\bar{\zeta}$ , sea cero para el día de hoy,  $z = 0 = \alpha$ . Una vez se da el valor de  $\bar{\zeta}$  se puede calcular  $d_L^{\text{flat}}$  y  $D_A^{\text{flat}}$  a partir de las ecuaciones (4.58) and (4.60). De hecho, la cantidad usualmente reportada no es la distancia luminosa sino el módulo de la distancia, dado por:

$$\mu := m - M = 5 \log_{10}(d_L^{\text{flat}}/\text{Mpc}) + 25 \quad . \quad (4.63)$$

Las figuras 4.20 y 4.21 muestran la distancia luminosa para los tres modelos estudiados en este capítulo y son comparados con el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ . Los datos utilizados en la gráfica corresponden a los históricos reportados por Riess et al. [15] y también la compilación de UNION 2 de Amanullah et al. [16]. Se puede apreciar que hasta  $z = 1$  no existen grandes diferencias entre los modelos  $f(R)$  estudiados y el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ . Sin embargo para alto  $z$ , mostrado en la figura 4.22, existen diferencias significantes que en el futuro podrían ayudar a constreñir los modelos o bien a descartarlos e incluso poner a prueba el paradigma  $\Lambda\text{CDM}$ . La figura 4.23 muestra el comportamiento de la distancia diametral angular para los tres modelos comparados con el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ .

Para concluir con esta sección es necesario mencionar un punto técnico que, en principio, restringe el dominio de la integración de las ecuaciones de campo para algunos modelos  $f(R)$  y que se manifiesta específicamente en los modelos de Starobinsky y de Hu-Sawicky. La restricción consiste en el hecho de que la segunda derivada del modelo  $f_{RR}$  se acerca a cero para alto  $R/H_0^2$ , este régimen ocurre durante la evolución cósmica para alto  $z$ . Las figuras 4.24 y 4.25 muestran el comportamiento de  $f_{RR}$ , en las que se puede ver que  $f_{RR}H_0^2 \ll 1$

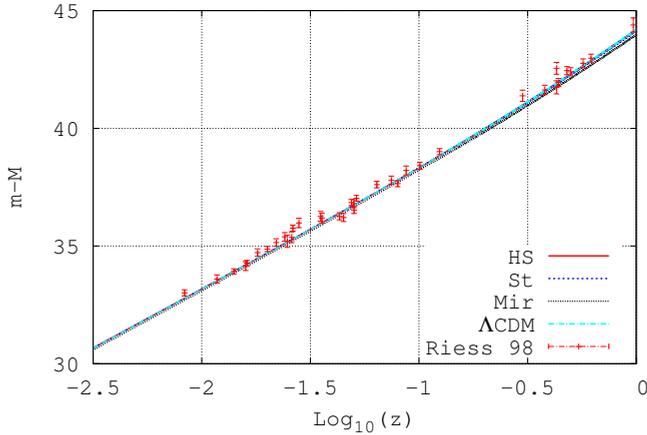


Figura 4.20: Módulo de la distancia luminosa para los modelos MJW, Starobinsky y Hu-Sawicky. El modelo  $\Lambda$ CDM es también mostrado en la gráfica para efectos de comparación. Los datos observacionales han sido tomados de Riess et al. [15]. Se ha considerado  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

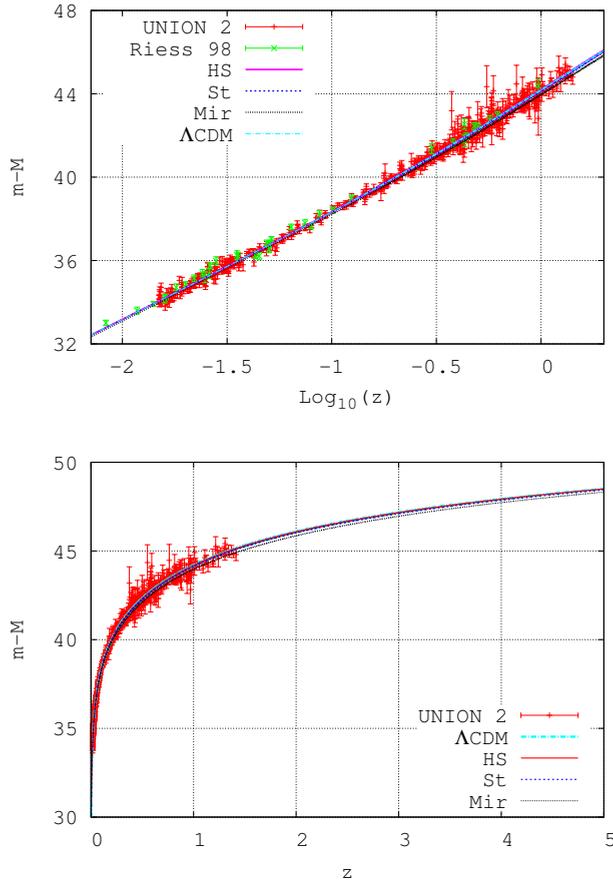


Figura 4.21: Izquierda: Módulo de la distancia luminosa para los modelos MJW, Starobinsky y Hu-Sawicky. El modelo  $\Lambda\text{CDM}$  es también mostrado en la gráfica para efectos de comparación. Los datos observacionales han sido tomados de Riess et al. [15] y de UNION 2 [16]. Se ha considerado  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Derecha: Los datos utilizados aquí corresponde únicamente a UNION 2, se muestra un rango mayor en  $z$

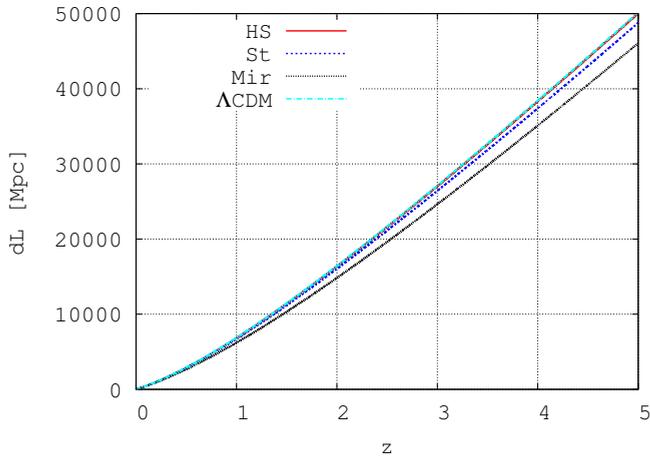


Figura 4.22: Distancia luminosa para alto  $z$  para los modelos de MJW, Starobinsky y Hu-Sawicky. El modelo  $\Lambda$ CDM se muestra como referencia

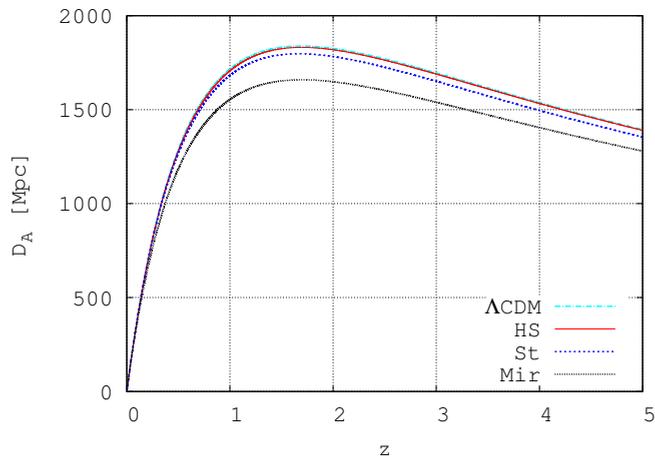


Figura 4.23: Distancia diámetro angular para el modelo de MJW, Starobinsky y Hu-Sawicky. El modelo  $\Lambda$ CDM es mostrado en la gráfica para efectos de comparación

se acerca a cero mucho más rápido para el modelo de Starobinsky y de Hu-Sawicky que para el modelo MJW. Este comportamiento es consistente con el mostrado en las figuras 3.2 y 3.5 donde se aprecia que para  $R$  grande el modelo de Starobinsky y de Hu-Sawicky se comportan aproximadamente como  $f(R) \approx R - 2\Lambda_{\text{eff}}$ , y por lo tanto  $f_{RR} \approx 0$ .

Ahora bien, como  $f_{RR} \approx 0$  en el pasado, entonces la ecuación (4.34) desarrolla grandes variaciones cuando  $f_{RR}^{-1}$  aparece en el lado derecho de la igualdad, requiriendo así de una mayor precisión numérica. Ya que en el modelo MJW  $f_{RR}$  decrece más despacio que los otros dos modelos, se ha corroborado que para este modelo se puede iniciar la integración numérica para  $z > 1$ , incluso desde la época de la recombinación, sin encontrar problemas numéricos. Esta característica puede ser también vista en la figura 3 de [44], donde la integración se comienza incluso antes de la recombinación, en una época de dominio de radiación.

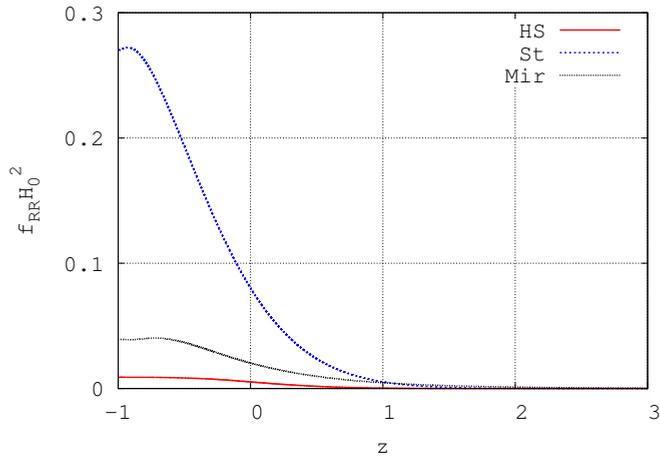


Figura 4.24: Segunda derivada  $f_{RR} := d^2 f/dR^2$  de la figura 3.5 como función de  $z$ . Notar que  $f_{RR}$  se va a cero para valores grandes de  $z$ .

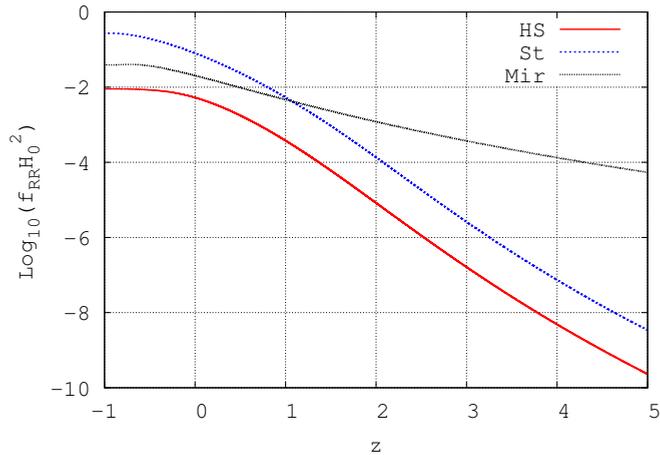


Figura 4.25: Segunda derivada  $f_{RR} := d^2 f/dR^2$  de la figura 3.5 como función de  $z$  en escala logarítmica. Notar que  $f_{RR}$  se va a cero para valores grandes de  $z$ .

## Capítulo 5

# Soluciones cosmológicas con $R$ asintóticamente nulo

La evolución de las soluciones cosmológicas en gravedad  $f(R)$  tienen un comportamiento equivalente al esperado con una constante cosmológica efectiva  $\Lambda_{eff} = R_1/4$ . A la luz del método propuesto en esta tesis, en este capítulo se explora si esta condición es necesaria, es decir, si para tener una expansión acelerada consistente con las observaciones se requiere que el mínimo del potencial  $V(R)$ , dado por la ecuación 3.3, sea distinto de cero.

La manera de explorar este posible tipo de soluciones es variando los valores de los parámetros en los modelos  $f(R)$ . En este capítulo se han estudiado dos modelos, el de MJW y el caso de una  $f(R)$  de forma exponencial (ver capítulo 3).

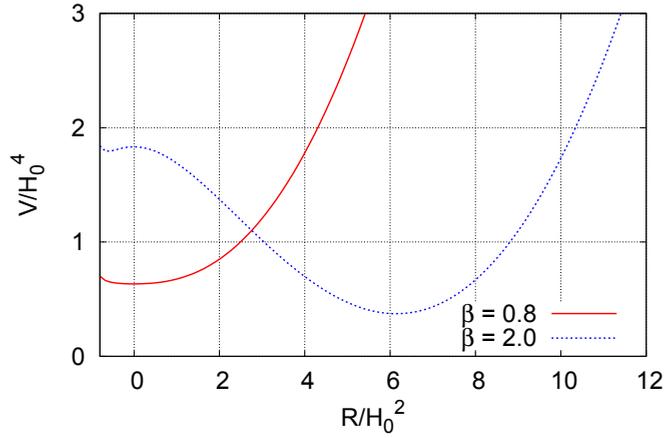


Figura 5.1: Potencial  $V(R)$  para el modelo MJW. La gráfica muestra el potencial para dos valores distintos del parámetro  $\beta = 0.8$  y  $2.0$ , en primer caso el mínimo se encuentra localizado en  $R_1 = 0$ .

## 5.1. Modelo MJW

El modelo de MJW se encuentra dado por la ecuación 3.10 introducida en el capítulo 3. El potencial, asociado a este modelo bajo el método del escalar de Ricci, se muestra en la ecuación 3.11. Para que el mínimo del potencial corresponda con  $R_1 = 0$  se toma  $\beta = 0.8$ . En la figura 5.1 se muestra el potencial para el caso asintóticamente plano comparado con el caso estudiado en el capítulo anterior para el mismo modelo.

Las figuras 5.2 y 5.3 muestran el comportamiento del escalar de curvatura y de la razón de expansión  $H$ , respectivamente, durante la evolución cósmica para este modelo. Se puede observar que  $R$  oscila al rededor del mínimo cuando  $z \rightarrow -1$ , esto corresponde a el futuro

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

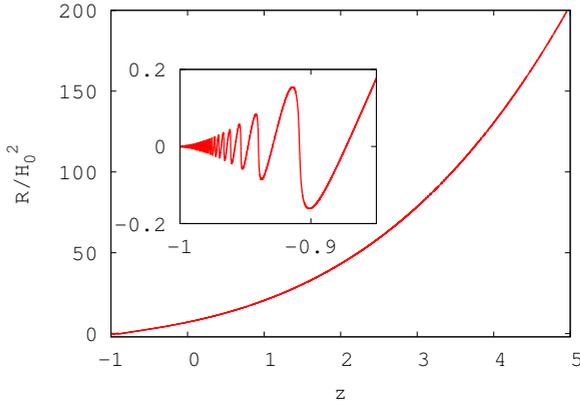


Figura 5.2: Evolución del escalar de curvatura en el modelo MJW con  $\beta = 0.8$  y  $R_* = 4.166H_0^2$ . El panel interior muestra un acercamiento al comportamiento de  $R$  para el futuro lejano  $z \rightarrow -1$ , se puede observar que oscila al rededor de  $R = 0$ .

lejano. A pesar de que  $R$  puede volverse negativo durante el periodo de oscilación, la amplitud máxima negativa de las oscilaciones es lo suficientemente pequeña como para prevenir que  $f_R$  se vaya a cero o se haga negativa. Esta amplitud se ve amortiguada debido a la expansión del Universo así que  $R$  finalmente se va a cero asintóticamente en el tiempo.

Las figuras 5.4 y 5.5 muestran el comportamiento de las fracciones de densidad y la ecuación de estado  $\omega_X$  y  $\omega_{\text{total}}$ . En este caso el análisis se ha enfocado a  $\omega_X$  y no a las otras recetas  $\omega_X^{II}$  y  $\omega_X^{III}$ . Se puede notar de la figura 5.4 que las fracciones de materia y energía oscura corresponden con las esperadas bajo el modelo  $\Lambda$ CDM. La elección de los parámetros en el modelo de MJW se hizo con la intención de que estas abundancias correspondieran.

La gráfica de la ecuación de estado muestra tener una expansión

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

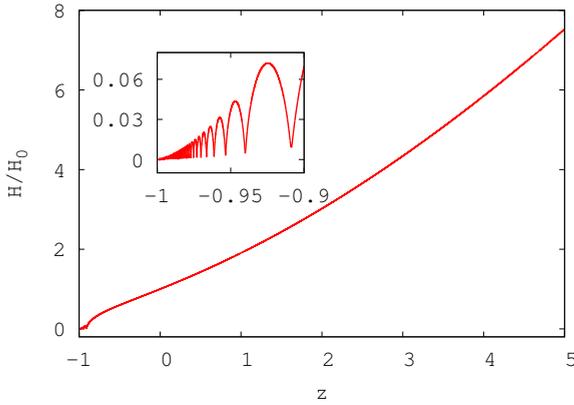


Figura 5.3: Evolución del parámetro de Hubble  $H$  para el modelo MJW con  $\beta = 0.8$  y  $R_* = 4.166H_0^2$ . El panel interior muestra un acercamiento al comportamiento de  $H$  para el futuro lejano  $z \rightarrow -1$ .

acelerada,  $\omega \approx -0.45$  para la época actual ( $z = 0$ ) el cual es menor que el requerido para explicar las observaciones de SNIa.

Los resultados mostrados con este modelo abren la puerta a que algún otro modelo  $f(R)$ , con un comportamiento asintótico con constante cosmológica efectiva nula, sea capaz de producir un Universo con una época de expansión acelerada consistente con las observaciones.

No todos los modelos  $f(R)$  que admiten  $R = 0$  como solución en vacío son capaces de producir una evolución cosmológica viable con una constante cosmológica efectiva que se anule en el futuro. Un ejemplo de esto es el modelo de Starobinsky, admite la solución en el vacío  $R = 0$  pues en  $R = 0$  presenta un punto crítico que corresponde con un mínimo global del potencial (ver figura 3.7). Sin embargo, dado que la solución cosmológica que interpola de  $R = 0$  (en el futuro lejano) y un valor alto en la curvatura (pasado lejano) de

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

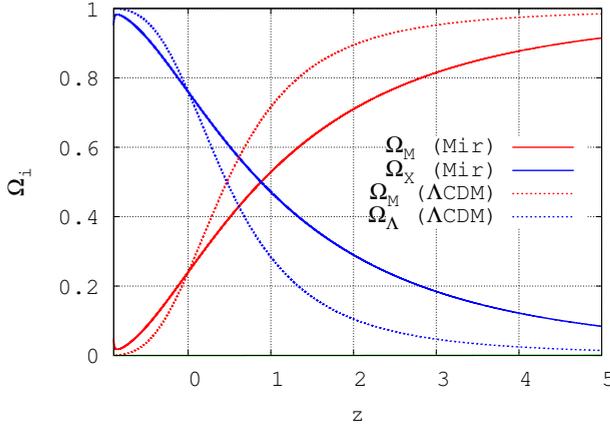


Figura 5.4: Evolución de las fracciones  $\Omega_M$  ( $\Omega_{\text{bar+DM}}$ ),  $\Omega_X$  and  $\Omega_{\text{rad}}$  para el modelo MJW con parámetros  $\beta = 0.8$  and  $R_* = 4.166H_0^2$ . Como referencia, se muestran las fracciones correspondientes bajo el modelo  $\Lambda$ CDM.

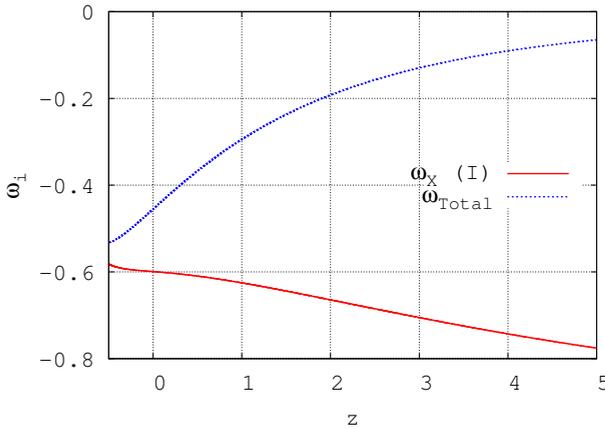


Figura 5.5: Evolución de la ecuación de estado total (azul) y para la energía oscura geométrica (rojo) para el modelo MJW con parámetros  $\beta = 0.8$  and  $R_* = 4.166H_0^2$ .

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

manera forzosa pasa por el punto donde se anula la segunda derivada de la función  $f(R)$ , i.e.  $f_{RR} = 0$  en  $R_{\text{ws}} = R_S/\sqrt{2q+1}$ . A este punto se le ha denominado una ‘‘singularidad débil’’ aunque dicha singularidad no parece ser del todo débil pues la integración numérica diverge irremediabilmente.

### 5.2. $f(R)$ Exponencial

El modelo utilizado es el dado por la ecuación 3.14, el potencial se encuentra en la figura 3.9. La integración se realiza de manera análoga a los casos anteriores. Las suposiciones son también las mismas, se comienza de una época dominada por materia, es decir  $\Omega_{\text{matt}} \approx 1$  en un tiempo en el pasado dado en algún  $z = a_0/a - 1$  y se integra hacia el futuro ( $z \rightarrow -1$ ). En la figura 5.6 se muestra la evolución del escalar de curvatura para diferentes valores de los parámetros. El comportamiento del parámetro de Hubble a lo largo de la integración numérica se muestra en la figura 5.7 para los mismos valores de los parámetros empleados en la gráfica 5.6. En todos los casos donde  $\lambda > 1$ ,  $R$  alcanzaría el punto de de Sitter en el mínimo global del potencial  $V(R)$ .

Para  $\lambda = 1$ , debido a que el potencial es muy plano al rededor del mínimo global y también al término de fricción,  $R$  se mantiene por mucho tiempo en un valor cerca del mínimo pero no en el valor del mínimo mismo. Esto explica por qué en este caso el modelo también imita una constante cosmológica efectiva.

En las figuras 5.8 y 5.9 se grafican las fracciones de densidades adimensionales  $\Omega_{\text{matt}}$  y  $\Omega_X$ . La contribución de radiación la cual es considerada en la integración numérica, es muy pequeña y no se puede apreciar en las gráficas. Las abundancias actuales (en  $z = 0$ ) de cada

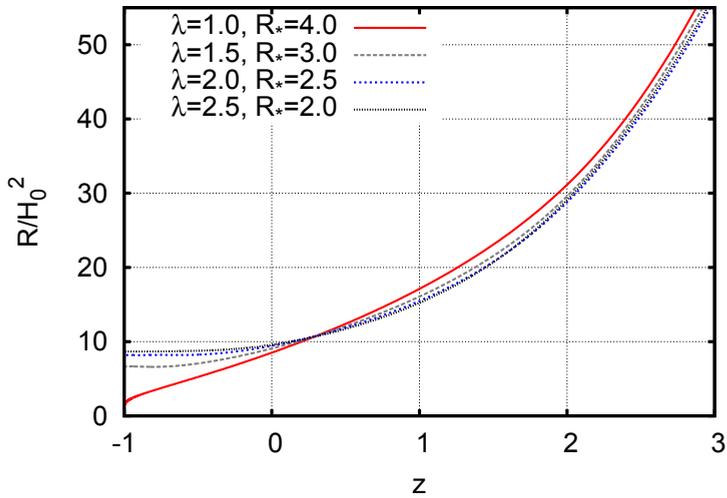


Figura 5.6: Escalar de curvatura  $R$  durante la evolución cósmica para diferentes valores de los parámetros en el modelo  $f(R)$  exponencial.

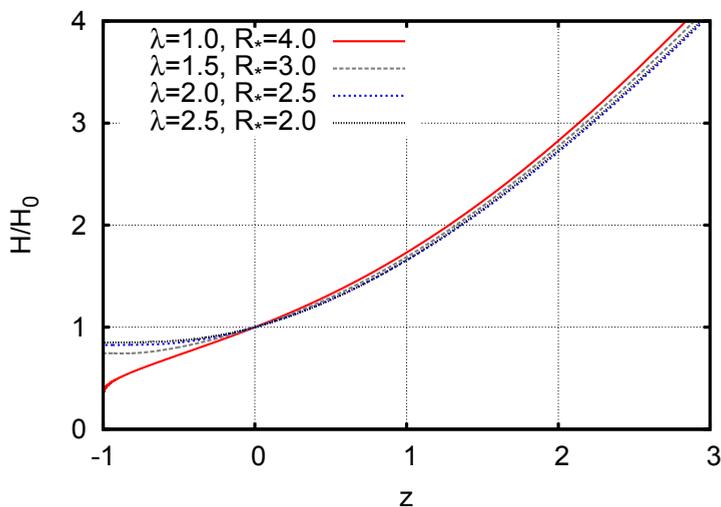


Figura 5.7: Parámetro de expansión de Hubble  $H$  durante la evolución cósmica para diferentes valores de los parámetros en el modelo  $f(R)$  exponencial.

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

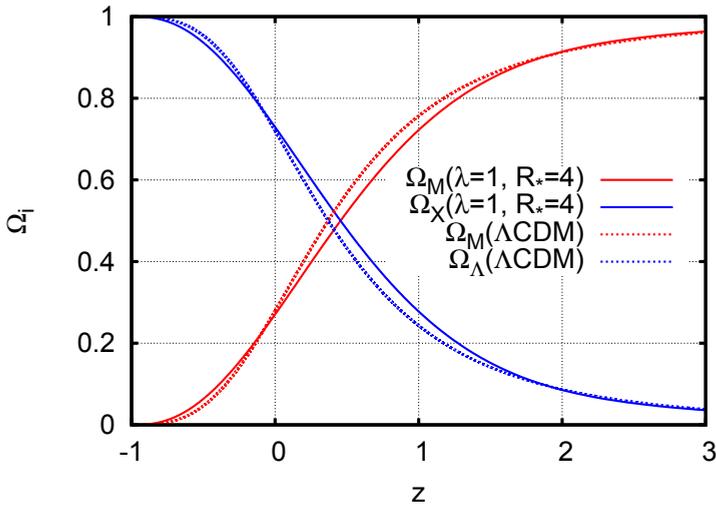


Figura 5.8: Evolución de  $\Omega_{\text{matt}}$  y  $\Omega_X$  (líneas continuas) para  $\lambda = 1$  y  $R_* = 4H_0^2$ . Como referencia se ha graficado la evolución de las fracciones correspondiente a materia y energía oscura (constante cosmológica) para el modelo  $\Lambda$ CDM con líneas punteadas.

una de las componentes empatan con los valores que corresponderían bajo el paradigma  $\Lambda$ CDM.

El modelo exponencial muestra una época de dominio de materia adecuada. La ecuación de estado asociada a la energía oscura geométrica se muestra en la figura 5.10. Como en el caso de los modelos  $f(R)$  del capítulo anterior, esta oscila al rededor de la barrera “fantasma” en  $\omega_\Lambda = -1$  antes de alcanzar asintóticamente el valor  $z \rightarrow -1$ .

La ecuación de estado total en la figura 5.11 muestra que para alto  $z$  el Universo se encontraría dominado por materia, teniendo  $\omega_{\text{tot}} \sim 0$ , y de ahí evolucionaría hasta alcanzar el valor  $\omega_{\text{tot}} = -1$

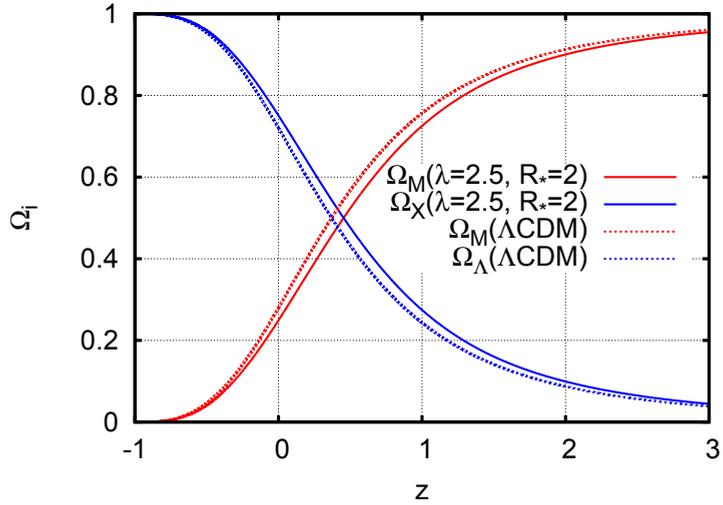


Figura 5.9: Evolución de  $\Omega_{\text{matt}}$  (línea continua roja) y  $\Omega_X$  (línea continua azul) para  $\lambda = 2.5$  y  $R_* = 2H_0^2$ . Como referencia se ha graficado la evolución de las fracciones correspondiente a materia y energía oscura (constante cosmológica) para el modelo  $\Lambda$ CDM con líneas punteadas.

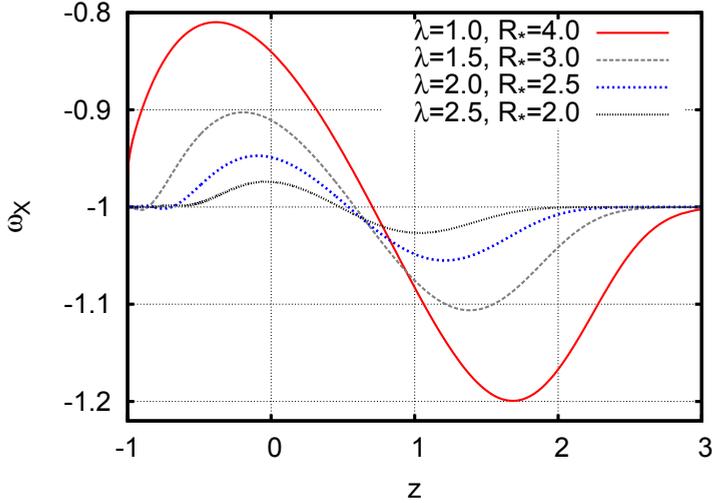


Figura 5.10: Ecuación de estado para la energía oscura geométrica  $\omega_X$  para el modelo exponencial para diferentes valores de los parámetro  $\lambda$  y  $R_*$ .

en el futuro lejano. En  $z = 0$ ,  $\omega_{\text{tot}} \sim 0.75$  lo que se encuentra en concordancia con las predicciones bajo el modelo  $\Lambda$ CDM.

Para este modelo existe también una dificultad técnica al integrar partiendo del pasado lejano ya que  $f_{RR} \rightarrow 0$  exponencialmente en el régimen de curvatura alta. Como en los casos estudiados anteriormente, al ir este término en el denominador de la ecuación (4.2), se producen grandes variaciones que afectan la precisión en la integración numérica. Para evitar este problema, la integración numérica parte de un valor de  $z \approx 3$ .

Las figuras 5.12 y 5.13 muestran el módulo de la distancia luminosa calculada como se ha mencionado en el capítulo anterior y el parámetro  $q$  que es el factor de desaceleración y que ya también se

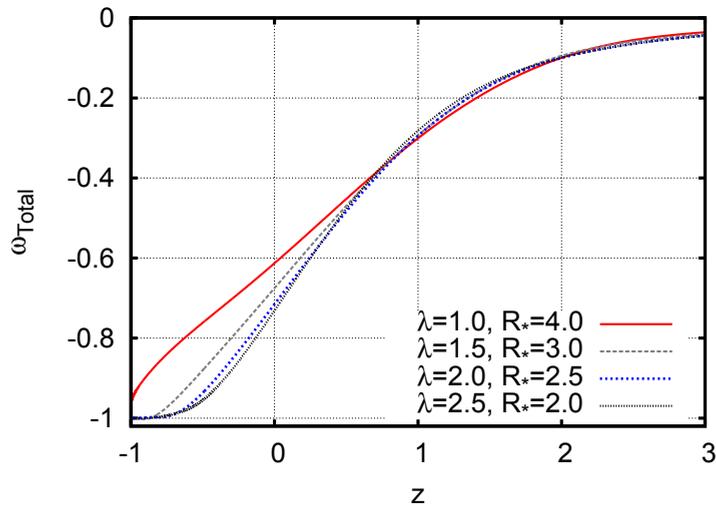


Figura 5.11: Ecuación de estado total  $\omega_{\text{tot}}$  para el modelo exponencial para diferentes valores de los parámetro  $\lambda$  y  $R_*$ .

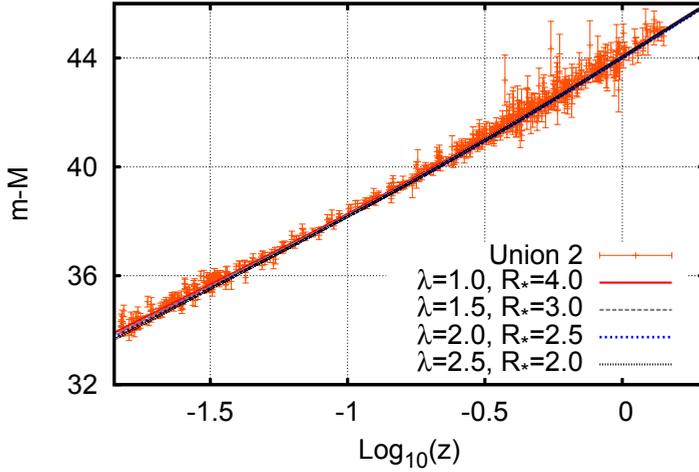


Figura 5.12: Distancia luminosa para el modelo  $f(R)$  exponencial para diferentes valores de los parámetros) comparada con los resultados de las observaciones de SNIa de la compilación UNION 2 [16].

había definido anteriormente.

Este modelo muestra tener consistencia con las observaciones cosmológicas de SNIa y también con las restricciones del Sistema Solar [45]. Sin embargo, como en otros modelos  $f(R)$  que parecerían viables, es necesaria una exploración del modelo en distintos escenarios antes de ser considerado un candidato serio.

### 5.3. El caso patológico $R^n$

El caso de este tipo de modelos resulta de particular relevancia ya que, como se mencionó en el capítulo 3, existe una controversia sobre su viabilidad cosmológica. Amendola *et al.* [46, 47] realizaron un

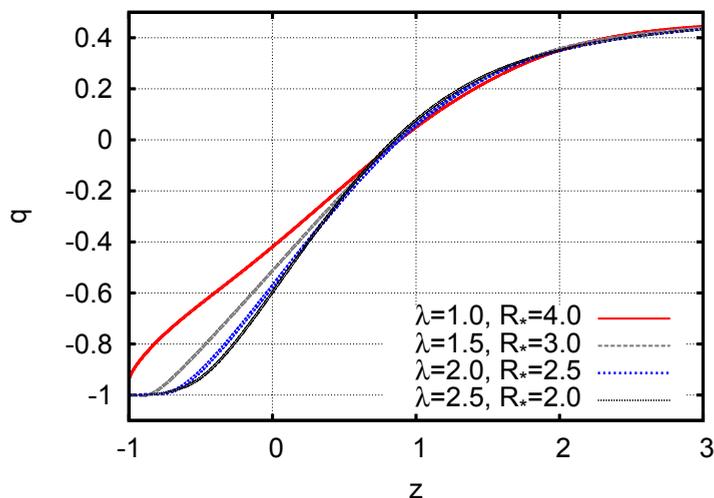


Figura 5.13: Parámetro de desaceleración  $q$  para diferentes valores de los parámetros en el modelo  $f(R)$  exponencial.

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

análisis detallado y encontraron que la época de dominio de materia que precede a la etapa acelerada y que debería de ir como  $a(t) \sim t^{2/3}$  es genéricamente reemplazada por una evolución no estándar con  $a(t) \sim t^{1/2}$  [92], mientras que en los casos en los que la época de dominio de materia tiene el comportamiento esperado entonces la aceleración que se produciría no es la adecuada.

Esta conclusión ha sido puesta en discusión debido a dos razones. Primero, los *marcos* (Einstein *vs* Jordan) usados en la técnica de la equivalencia con las teorías escalares tensoriales para analizar el modelo  $R^n$  [50, 48, 51]; en segundo lugar se ha puesto en duda el análisis realizado en el espacio fase que provee la técnica del análisis de sistema dinámico [52, 53].

El modelo  $R^n$  se ha considerado frecuentemente en la literatura (ver referencias en [101]), no sólo como candidato a explicar la expansión acelerada sino como modificación gravitacional para una explicación alterna a la materia oscura. En este capítulo reanalizamos el caso de  $R^n$  utilizando el método del escalar de curvatura [36, 38, 39], que como se ha mencionado no recurre a la equivalencia con las teorías escalares tensoriales, lo que dejará libre de debate sobre los marcos de referencia los resultados encontrados.

No consideraremos los casos  $n = 0$  porque la función se vuelve una constante con lo que  $f_R = f_{RR} = 0$  ni tampoco  $n = 1$  pues corresponde a relatividad general y en el caso  $n = 0$  la teoría desaparece. La condición  $f_{RR} > 0$  se mantiene en general para  $n > 1$  o  $n < -1$ , asumiendo en ambos casos  $R > 0$ , y  $f_{RR}$  se anula en  $R = 0$ , a este punto lo llamaremos  $R_0$ , o cuando  $R \rightarrow \infty$  ( $R_\infty$ ). No se considerará el caso  $n < 0$  pues en ese caso  $f_R = \lambda n (R/R_n)^{n-1}$  se vuelve negativa y por lo tanto se viola la condición  $G_{\text{eff}} > 0$ . La cantidad  $f_R$  también se anula en  $R_0$  o en  $R_\infty$ , dependiendo del valor de  $n$ .

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

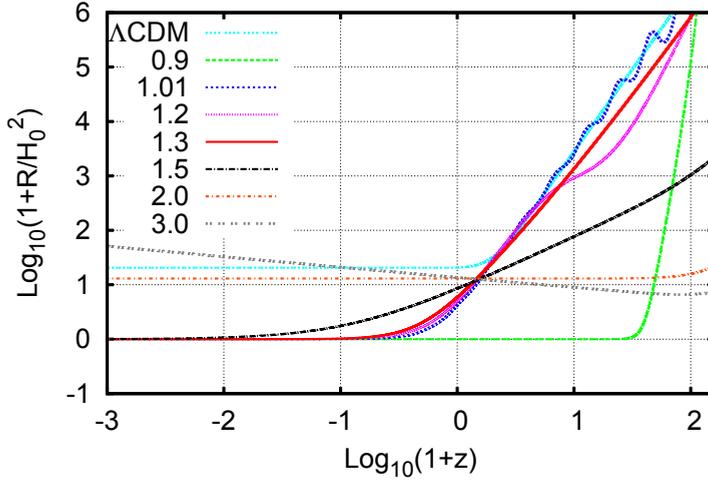


Figura 5.14: Escalar de curvatura para diferentes valores del parámetro  $n$  en gravedad  $R^n$ , tomando  $\lambda = 1$  y las constantes  $\alpha_n = R_n/H_0^2$  como  $\alpha_{0.9} \sim 577.85$ ,  $\alpha_{1.01} \sim 404.84$ ,  $\alpha_{1.2} \sim 2.02$ ,  $\alpha_{1.3} \sim 1.07$ ,  $\alpha_{1.5} \sim 8 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha_2 \sim 7.9 \times 10^{-6}$ ,  $\alpha_3 \sim 2.6 \times 10^{-6}$ . El comportamiento de  $R$  bajo  $\Lambda$ CDM se muestra en la gráfica para efectos de comparación. Para  $n < 2$ ,  $R$  se aproxima a cero de manera asintótica en el futuro y para  $n > 2$  se mantienen creciendo.

La integración de las ecuaciones diferenciales se comienza en un alto  $z$ , como en los casos estudiados anteriormente, dado por  $z = a_0/a - 1$ , en este caso se ha llegado a  $z \sim 150$ , asumiendo en ese punto que la materia se encuentra dominando para todos los valores de  $n$  empleados. Se obtienen las condiciones iniciales de la manera que se explicó en el capítulo 4 y se van variando empleando el método de disparos, para encontrar la evolución hasta el futuro lejano.

La figura 5.14 muestra la evolución del escalar de curvatura  $R$  para distintos valores de  $n$ . Se ha tomado el valor de la constante

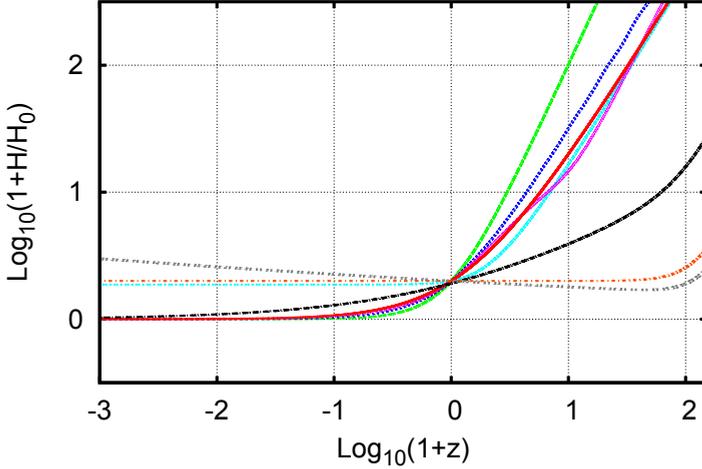


Figura 5.15: Parámetro de Hubble  $H$  con diferentes valores de  $n$  en gravedad  $R^n$ , tomando  $\lambda = 1$  y las constantes  $\alpha_n = R_n/H_0^2$  como  $\alpha_{0.9} \sim 577.85$ ,  $\alpha_{1.01} \sim 404.84$ ,  $\alpha_{1.2} \sim 2.02$ ,  $\alpha_{1.3} \sim 1.07$ ,  $\alpha_{1.5} \sim 8 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha_2 \sim 7.9 \times 10^{-6}$ ,  $\alpha_3 \sim 2.6 \times 10^{-6}$ . El comportamiento de  $R$  bajo  $\Lambda$ CDM se muestra en la gráfica para efectos de comparación. El valor de  $H$  para  $n < 2$  se va asintóticamente a cero mientras que para los valores  $n > 2$  crece este valor hacia el futuro. Nota: Las etiquetas para cada una de las curvas corresponde con las asignadas en la gráfica 5.14.

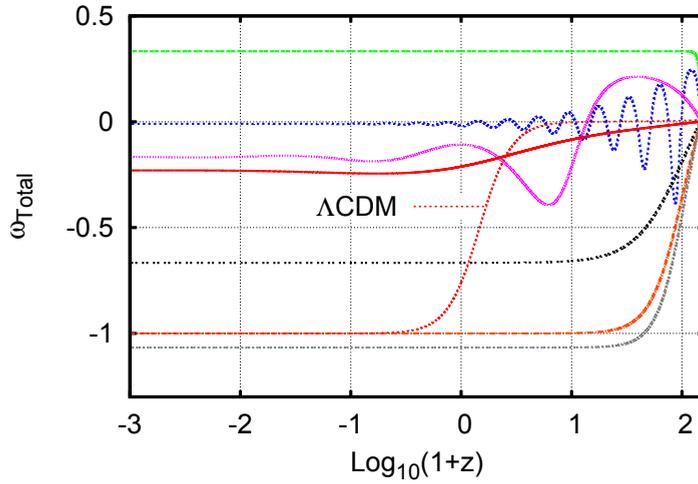


Figura 5.16: Ecuación de estado total para diversos valores del parámetro  $n$  en gravedad  $R^n$ . Se puede observar, con base en la comparación para el modelo  $\Lambda$ CDM, que no hay consistencia entre dominio de materia y aceleración cósmica. Nota: Las etiquetas para cada una de las curvas corresponde con las asignadas en la gráfica 5.14.

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

$\lambda = 1$  (cambiar el parámetro no cambia los resultados de manera significativa) y la constante  $\alpha_n$  involucrada en cada caso toma los valores  $\alpha_{0.9} \sim 577.85$ ,  $\alpha_{1.01} \sim 404.84$ ,  $\alpha_{1.2} \sim 2.02$ ,  $\alpha_{1.3} \sim 1.07$ ,  $\alpha_{1.5} \sim 8 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha_2 \sim 7.9 \times 10^{-6}$ ,  $\alpha_3 \sim 2.6 \times 10^{-6}$ . Es posible notar que para  $n = 2$  el modelo admite la solución de de Sitter con  $R \rightarrow R_1 \approx 12H_0^2$  al evolucionar el Universo hacia el tiempo presente. Ya que se han tomado en cuenta las contribuciones de materia y radiación esta igualdad no sucede exactamente pero se aproxima bastante bien al valor esperado.

En la figura 5.15 se muestra la evolución del parámetro  $H$  para los mismos casos del parámetro  $n$  empleados en la figura anterior. Las etiquetas para cada valor de  $n$  corresponden con las empleadas en la figura 5.15. Se puede observar que para  $n < 2$  la expansión de Hubble se aproxima a cero en el futuro, mientras que tanto  $H$  como  $R$  crecen para valores mayores que 2 crecen.

La figura 5.16 muestra la ecuación de estado total, y es esta de la que se puede extraer la información necesaria para notar si existe una etapa de dominio de materia. Recordemos que la ecuación de estado total esta dada por la relación:

$$\omega_{\text{tot}} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{\frac{1}{2}(f_R R + f) + 3f_{RR}H\dot{R} - \kappa\rho}{\frac{1}{2}(f_R R - f) - 3f_{RR}H\dot{R} + \kappa\rho} \right]. \quad (5.1)$$

Las etiquetas en la figura 5.16 también corresponden a las empleadas en la figura 5.14. Se puede observar que el modelo  $n = 2$  tiene una constante cosmológica efectiva y produce una ecuación de estado total  $\omega_{Tot} = -1$  en el futuro lejano, sin embargo no tiene una etapa de dominio de materia lo suficientemente largo, es decir, un periodo donde  $\omega_{Tot} \approx 0$ .

El modelo  $\Lambda$ CDM compatible con las observaciones de SNIa mues-

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

tra que la materia comienza su etapa de dominio al rededor de  $z \gtrsim 0.45$  y de energía oscura para  $z \lesssim 0.45$  lo cual corresponde con  $\omega_{\text{tot}} \gtrsim -0.5$ , y  $\omega_{\text{tot}} \lesssim -0.5$  alcanzando  $\omega_{\text{tot}} \gtrsim -10^{-2}$  para  $z \gtrsim 5$ , y  $\omega_{\text{tot}} \lesssim -0.75$  para  $z \lesssim 0$ .

El Universo comienza su aceleración cuando  $\omega_{\text{tot}} < -1/3$  en  $z \sim 0.8$ . La figura 5.16 muestra que para  $n \sim n_c$  con  $n_c \approx 1.285$  existe una época de dominio de materia suficientemente duradera con  $|\omega_{\text{tot}}| \ll 1$ , pero se va a un valor de la ecuación de estado total  $\omega_{\text{tot}}^{z=0} \approx -0.212$  lo que es inconsistente con las observaciones  $\omega_{\text{obs}} \sim -0.75$ . Para  $n < n_c$ , nunca existiría una etapa de dominio de materia y  $\omega_{\text{tot}}^{z=0}$  estaría siempre lejos de  $\omega_{\text{obs}}$  e incluso podría adquirir valores positivos. En particular para el modelo con  $n < 1$  (cuyo valor en este trabajo es 0.9 y se ha incluido con fines meramente ilustrativos pues viola la condición  $f_{RR} > 0$ ) se comporta como radiación, es decir la ecuación de estado total va como  $\omega_{\text{tot}} \sim 1/3$  y no se encuentra bien definida (es decir  $f_R$  y  $f_{RR}$  divergen) cuando  $R \rightarrow 0$ .

Finalmente para el caso  $n > n_c$ , nunca se produce una etapa dominada por materia, en general para estos casos  $\omega_{\text{tot}} < 0$  y va monótonamente hacia el valor asintótico que puede llegar a ser incluso menor que  $-1$ .

Los modelos con  $n > 3$  se comportan básicamente de la misma forma que para  $n = 3$  alcanzando rápidamente un valor para el parámetro en la ecuación de estado total que va como  $\omega_{\text{tot}} \sim -1.067$  alcanzándolo en el futuro lejano  $z \rightarrow -1$ .

Las figuras 5.17, 5.18 y 5.19 muestran la evolución de las fracciones  $\Omega_X$ ,  $\Omega_{\text{matt}}$  y  $\Omega_{\text{rad}}$  para tres de los modelos que se han ilustrado anteriormente, se han elegido pues representan de buena manera el comportamiento genérico de los modelos  $R^n$ . En estas mismas gráficas se ha acompañado la evolución de las mismas fracciones para el

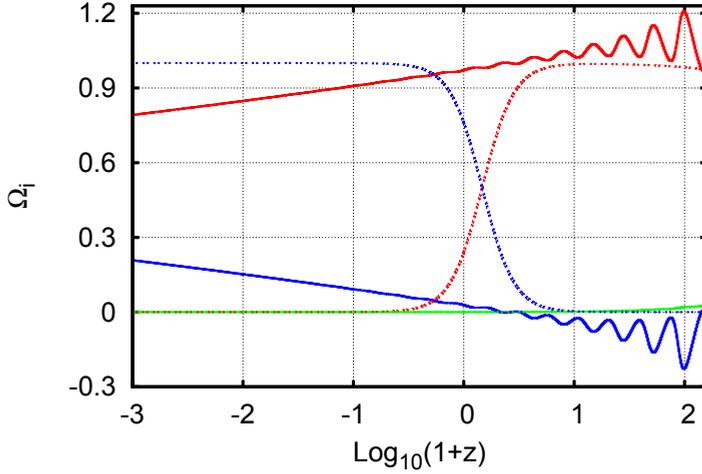


Figura 5.17: Evolución de la densidad de materia  $\Omega_{\text{matt}}$  (color rojo), radiación (color verde) y energía oscura geométrica  $\Omega_X$  (color azul) para el modelo  $R^n$  con  $n = 1.01$ . Las líneas sólidas corresponden al modelo  $R^n$  indicado, mientras que las líneas punteadas muestran la evolución de las mismas densidades pero en el paradigma  $\Lambda$ CDM. Notemos que, en este caso,  $\Omega_X$  puede tomar valores negativos y  $\Omega_{\text{matt}} > 1$ .

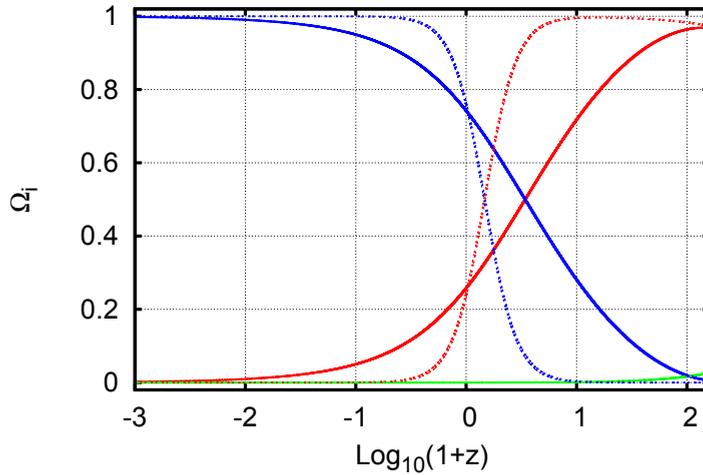


Figura 5.18: Evolución de la densidad de materia  $\Omega_{\text{matt}}$  (color rojo), radiación (color verde) y energía oscura geométrica  $\Omega_X$  (color azul) para el modelo  $R^n$  con  $n = 1.3$ . Las líneas sólidas corresponden al modelo  $R^n$  indicado mientras que las líneas punteadas muestran la evolución de las mismas densidades pero en el paradigma  $\Lambda$ CDM.

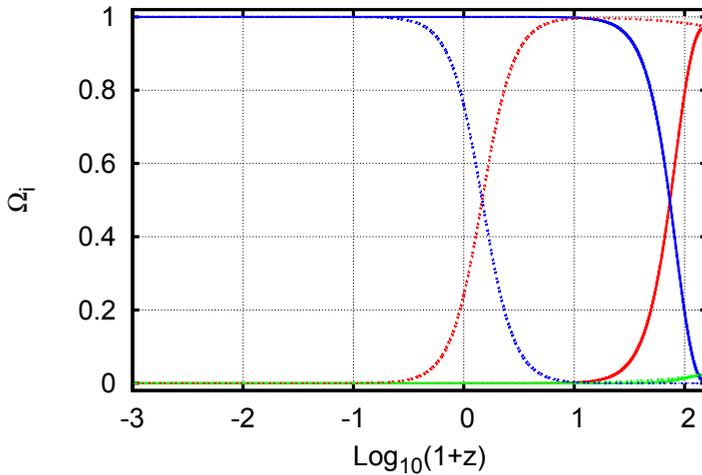


Figura 5.19: Evolución de la densidad de materia  $\Omega_{\text{matt}}$  (color rojo), radiación (color verde) y energía oscura geométrica  $\Omega_X$  (color azul) para el modelo  $R^n$  con  $n = 2.0$ . Las líneas sólidas corresponden al modelo  $R^n$  indicado mientras que las líneas punteadas muestran la evolución de las mismas densidades pero en el paradigma  $\Lambda$ CDM.

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

caso del modelo  $\Lambda$ CDM.

Para el caso en el que  $n > n_c$  la época de dominio de materia es demasiado corta, lo que se encuentra en acuerdo con lo que se espera con base en la gráfica 5.16. Un caso particular es cuando se toma el valor  $n = 1 + \epsilon$  con  $\epsilon \ll 1$ , correspondiente a  $n = 1.01$ . En este caso, el denominador en la ecuación 2.10 es muy pequeño lo cual produce una contribución importante sobre el lado derecho de la ecuación diferencia para  $R$ , como se puede observar en las figuras 5.14, 5.15, 5.16 y 5.17, el comportamiento es diferente al de  $\Lambda$ CDM (RG) a pesar de que  $n$  es muy cercano a 1.

Finalmente para el caso  $n < n_c$ ,  $\Omega_X$  puede volverse negativa por lo que (para mantener la condición  $\sum \Omega_i = 1$ )  $\Omega_{\text{matt}}$  presenta fases de "superdominio", es decir  $\Omega_{\text{matt}} > 1$ .

Carlóni *et. al.* en [52] y [53] realizan un análisis usando lo que ellos llaman, el método de sistema dinámico, obteniendo un sistema de ecuaciones de primer orden el cual les resulta útil para tener una descripción cualitativa del comportamiento global en  $R^n$ , la materia y la radiación no son necesariamente incluidas bajo tal análisis.

A pesar de las simplificaciones empleadas en su razonamiento ellos encuentran algunos puntos cruciales para este tipo de modelos como el comportamiento tipo atractor para algunos valores de  $n$ . Sin embargo, dadas tales simplificaciones, el método del sistema dinámico no es capaz de proveer evidencia contundente sobre la compatibilidad de la época de dominio de materia y al mismo tiempo analizar su evolución acelerada. En otras palabras, que la evolución del parámetro en la ecuación de estado vaya de  $\omega_{Tot} \approx 0$  durante un lapso lo suficientemente largo en el pasado a  $\omega_{Tot} \approx -1$  en el futuro lejano.

En resumen, el Universo homogéneo e isotrópico en  $R^n$  muestra estar en desacuerdo con lo requerido para explicar las características

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

actuales en la cosmología. Dado que se han tomado en cuenta todas las contribuciones (materia, radiación y “energía oscura geométrica”) y ya que el método empleado no emplea el mapeo a las TET, los problemas genéricos encontrados en nuestro análisis para el caso  $R^n$  resultan ser reales. Debido a estos resultados es posible descartar de manera definitiva los modelos  $R^n$ , incluso en escala de galaxias, ya que no satisfacen una evolución cósmica compatible con las observaciones.

## CAPÍTULO 5. SOLUCIONES COSMOLÓGICAS CON $R$ ASINTÓTICAMENTE NULO

---

## Capítulo 6

# Objetos compactos en $f(R)$ bajo el método del escalar de curvatura

### 6.1. Antecedentes

Para que un modelo de gravedad modificada pueda ser considerado viable debe poder demostrar que las estrellas de neutrones o bien las enanas blancas se pueden explicar por la modificación a las ecuaciones de campo que se proponga.

Una de las motivaciones principales que se tuvieron en cuenta en esta tesis, al proponer un método distinto para analizar las teorías  $f(R)$ , fue entender una serie de resultados contradictorios en la literatura sobre la existencia o ausencia de objetos compactos en el modelo propuesto por Starobinsky [42] (ver ecuación 3.12). Como se ha mostrado en el capítulo 4, se considera que este modelo es cosmológicamente exitoso.

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

Por un lado, Kobayashi y Maeda [102, 103] encuentran que la existencia de estrellas de “neutrones”, bajo la aproximación de un fluido incompresible, se ve comprometida ya que las soluciones parecen mostrar una divergencia (o singularidad) del escalar de curvatura en lo que sería todavía el interior estelar.

Por otro lado, en estudios posteriores, Babichev y Langlois [70] argumentan que este resultado negativo se debe a la aproximación del fluido incompresible. Cambiando esta hipótesis por una ecuación de estado más realista, como la de un polítropo, la singularidad del escalar de curvatura se puede evitar. Finalmente Upadhye y Hu [71] argumentan que esta divergencia puede desaparecer como consecuencia de la acción del efecto camaleón.

Una característica común en todos los estudios mencionados [102, 103, 70, 71] es que se realizan bajo la equivalencia de las teorías  $f(R)$  con las teorías escalares tensoriales que produce un potencial multivaluado 2.1, con lo que las soluciones que se pueden encontrar a través de estas no son confiables.

### 6.2. Espacio-tiempos estáticos y esféricamente simétricos

A continuación se considera, de nuevo, el método del escalar de Ricci discutido en la sección 3.1 y se aplica al caso de un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico. Bajo estas hipótesis reanalizaremos el problema de la existencia de objetos compactos. Un espacio-tiempo con las características mencionadas está dado por la métrica:

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

$$ds^2 = -n(r)dt^2 + m(r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (6.1)$$

donde los coeficientes métricos  $n$  y  $m$  son únicamente funciones de la coordenada  $r$ . De igual manera, todos los escalares asociados a la teoría, así como al modelo de materia que se tome, dependerán únicamente de la coordenada  $r$ , este será el caso de  $R$ .

La ecuación de movimiento para el escalar de curvatura estará dado por la ecuación 2.10, que para esta métrica queda:

$$R'' = \frac{1}{3f_{RR}} \left[ m(\kappa T + 2f - Rf_R) - 3f_{RRR}R'^2 \right] + \left( \frac{m'}{2m} - \frac{n'}{2n} - \frac{2}{r} \right) R'. \quad (6.2)$$

donde  $' := d/dr$ . Ahora bien, para las componentes  $t-t$ ,  $r-r$  y  $\theta-\theta$  de las ecuaciones de campo, después del manejo algebraico pertinente y utilizando la ecuación 6.2, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$m' = \frac{m}{r(2f_R + rR'f_{RR})} \left\{ 2f_R(1-m) - 2mr^2\kappa T_t^t + \frac{mr^2}{3}(Rf_R + f + 2\kappa T) + \frac{rR'f_{RR}}{f_R} \left[ \frac{mr^2}{3}(2Rf_R - f + \kappa T) - \kappa mr^2(T_t^t + T_r^r) + 2(1-m)f_R + 2rR'f_{RR} \right] \right\}, \quad (6.3)$$

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

$$n' = \frac{n}{r(2f_R + rR'f_{RR})} \left[ mr^2(f - Rf_R + 2\kappa T'_r) + 2f_R(m - 1) - 4rR'f_{RR} \right], \quad (6.4)$$

$$n'' = \frac{2nm}{f_R} \left[ \kappa T_\theta^\theta - \frac{1}{6}(Rf_R + f + 2\kappa T) + \frac{R'}{rm}f_{RR} \right] + \frac{n}{2r} \left[ 2 \left( \frac{m'}{m} - \frac{n'}{n} \right) + \frac{rn'}{n} \left( \frac{m'}{m} + \frac{n'}{n} \right) \right]. \quad (6.5)$$

De la expresión usual del escalar de curvatura en términos de la métrica tenemos:

$$R = \frac{1}{2r^2n^2m^2} \left[ 4n^2m(m - 1) + rnm'(4n + rn') - 2rnm(2n' + rn'') + r^2mn'^2 \right]. \quad (6.6)$$

Al reemplazar la expresiones 6.3–6.5 en la ecuación anterior 6.6 es posible mostrar que se obtiene una identidad trivial  $R \equiv R$ . Este resultado nos muestra dos cosas, por un lado exhibe la consistencia del método del escalar de Ricci y que no se han introducido errores algebraicos elementales. Por por lado indica que la ecuación 6.6 es redundante y que, por lo tanto, no aportará mayor información. Esta redundancia se puede explotar numéricamente al proveer un test natural de la precisión del código.

Cabe hacer notar que al reemplazar  $f(R) = R$  en 6.3–6.5 se recuperan las ecuaciones en relatividad general estándar para espacio-tiempos con simetría esférica y estáticos.

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

### 6.3. Integración numérica en objetos compactos

Las ecuaciones diferenciales descritas en la sección anterior, 6.2–6.5, se pueden escribir de la misma forma que en el caso cosmológico. Al escribir las ecuaciones de la forma:

$$dy^i/dr = \mathcal{F}^i(r, y^i) \quad (6.7)$$

donde  $y^i = (m, n, Q_n, R, Q_R)$ , el sistema de ecuaciones se puede resolver utilizando herramientas numéricas. Como en el caso cosmológico, utilizamos un algoritmo Runge-Kutta de cuarto orden implementado en un código en lenguaje FORTRAN de doble precisión.

En las ecuaciones 6.2–6.5 no se ha especificado el tipo de materia que se emplea, por lo tanto el sistema de ecuaciones es general; se podrán tratar diferentes problemas teóricos utilizando diferentes tipos de materia pueden ser tratados. En este trabajo nos limitamos al caso de un fluido perfecto, caracterizado por el tensor de energía momento:

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + g_{ab}p \quad (6.8)$$

La ecuación que describirá el comportamiento de este fluido y que complementará el sistema de ecuaciones diferenciales descrito anteriormente, está dada por la ecuación de conservación del tensor de energía momento  $T_{ab}$ :

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \quad (6.9)$$

Utilizando la ecuación 6.6 y el hecho de que  $P = P(r)$  y  $\rho = \rho(r)$ , se

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

obtiene:

$$p' = -(\rho + p)n'/2n \quad (6.10)$$

donde  $n'$  estará dado por la ecuación 6.4. La ecuación 6.10 corresponde a la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff modificada para equilibrio hidrostático y deberá complementarse con una ecuación de estado,  $P = P(\rho)$ , para el fluido a utilizar. En este caso se ha utilizado un fluido incompresible ya que la controversia que existía en la literatura se refería a este tipo de fluido. Una de las perspectivas que se tienen como trabajo posterior es el análisis de ecuaciones de estado politrópicas.

### 6.4. Integración numérica

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales dado por las ecuaciones 6.2, 6.3, 6.4 y 6.10 es necesario brindar condiciones de frontera que en este caso serán, más bien, condiciones de regularidad en el origen  $r = 0$ , así como condiciones asintóticas. En cuanto a las primeras, se impondrá la condición de suavidad de los coeficientes métricos y del escalar de curvatura en  $r = 0$ . Esto implica  $m' = n' = R' = 0$  en  $r = 0$ , en otras palabras, esta condición implica que la expansión al rededor de cero tiene la forma:

$$A(r) = A_0 + \frac{A_1 r^2}{2} + \mathcal{O}(r^4) \quad (6.11)$$

Los coeficientes  $A_0$  y  $A_1$  asociados con  $n$ ,  $m$ ,  $R$ , las componentes de materia, así como los valores de estas cantidades y sus segundas derivadas evaluadas en  $r = 0$ , se encuentran relacionadas entre sí. Por ejemplo, de la expansión en potencias anterior 6.11 y de las ecuaciones

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

6.2, 6.5 y 6.6 se puede encontrar que:

$$n''(0) = \frac{f^0 - 2f_R^0 R^0 - 4kT^0 + 18kT_\theta^{\theta 0}}{9f_R^0} \quad (6.12)$$

y

$$R''(0) = \frac{2f^0 - f_R^0 R^0 + kT^0}{9f_{RR}^0} \quad (6.13)$$

donde las cantidades del lado derecho (el superíndice  $^0$ ) son evaluadas en  $r = 0$ . En cuanto a las condiciones asintóticas, estamos interesados en encontrar soluciones tipo de Sitter, ya que buscamos que estas soluciones representen la solución compatible cosmológicamente, entonces pedimos que  $R \rightarrow R_1$ . Este valor permite definir una constante cosmológica efectiva como  $\Lambda_{eff} = R_1/4$ . Al final de la integración numérica se reescala  $n(r)$  para obtener el comportamiento asintótico canónico,  $n(r) \sim 1 - \Lambda_{eff} r^2/3$ .

Hasta ahora, las únicas condiciones libre son  $P(0)$ ,  $\rho(0)$  y  $R(0)$ . Usualmente la condición  $\rho(0)$  es libre y su valor fija una configuración estelar particular de una estrella con una masa y un radio específicos. Por otro lado,  $P(0)$  está determinada por el valor de la densidad en el origen a través de la ecuación de estado. En la situación que se analiza en esta tesis, no existe una ecuación de estado como tal, utilizamos un fluido incompresible,  $\rho = cte$  y  $P(0)$  se mantiene libre. La manera de fijar este valor en relación con la densidad es al suponer que se tiene un objeto compacto, con lo que la densidad es del orden de la presión en el centro estelar. Por otro lado, alcanzar el comportamiento asintótico deseado  $R \rightarrow R_1$  depende del valor de  $R$  en  $r = 0$ . La técnica que se emplea es, del mismo modo que en el caso cosmológico, utilizando el método de disparos.

Una dificultad técnica que se enfrenta al realizar la integración

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $f(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

numérica de las ecuaciones para una estrella de neutrones realista con condiciones asintóticamente de Sitter, y en general en el marco de las teorías  $f(R)$ , es la aparición de dos escalas de densidad muy distintas. Por un lado tenemos  $\rho(0) \sim \rho_{\text{nuc}} \sim 10^{14} \text{g cm}^{-3}$  mientras que  $\tilde{\Lambda}_{\text{eff}} \sim 10^{-29} \text{g cm}^{-3}$  ( $\tilde{\Lambda}_{\text{eff}} = \Lambda_{\text{eff}}/G_0$ ). Existe entonces un contraste de densidad de 43 ordenes de magnitud entre la densidad central típica de una estrella de neutrones y la densidad media del Universo, que se alcanza en la región asintótica.

Esta razón entre las densidades aparece de manera natural en las ecuaciones debido a que los parámetros que definen cada modelo específico  $f(R)$  son del orden de  $\tilde{\Lambda}_{\text{eff}}$  mientras que la densidad de un objeto compacto es del orden de la densidad nuclear  $\rho_{\text{nuc}}$ . Por consiguiente, si se pretenden utilizar unidades de densidad nuclear, el valor de la constante cosmológica se vuelve extremadamente pequeño y viceversa. Hasta ahora los autores que se han involucrado en la búsqueda de este tipo de objetos en  $f(R)$  [69, 70, 71, 44] han enfrentado el mismo problema y, con el objeto de evitarlo, se han construido objetos que son compactos pero bajo un escenario poco realista. En efecto, por un lado se asume que la presión es del orden de la densidad en el centro estelar (lo cual es necesario para una configuración relativista). Por otro lado, se asume que o bien  $\rho(0)$  no es del orden de la densidad nuclear y  $\Lambda_{\text{eff}} \sim \rho_{\text{obs}}$ , dando lugar a objetos de dimensiones mucho mayores que una estrella de neutrones realista o bien, lo opuesto, una estrella de neutrones realista pero en un fondo cosmológico ficticio con una densidad media mucho mayor a la observada.

A pesar de ser esta una restricción importante para obtener soluciones realistas no son un impedimento para analizar la existencia teórica de los objetos compactos en este tipo de gravedad modificada

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $f(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

siempre que se cumpla con la condición de que son relativistas en el sentido de que la presión es del mismo orden que la densidad en el centro de la estrella y la razón entre la masa obtenida y el radio alcanzado por la frontera de dicho objeto no sea mayor que  $4/9$

### 6.5. Resultados numéricos

Los modelos que se utilizan en este capítulo para probar la existencia de objetos compactos en gravedad  $f(R)$  son, por un lado, el modelo MJW pues, como se ha mencionado, su mapeo se encuentra bien definido en la equivalencia con las teorías escalares tensoriales, de esta manera se podrá tener una referencia en cuanto a los resultados numéricos. Por otro lado, ya que la controversia recae en el modelo de Starobinsky, utilizamos este modelo bajo la suposición de un fluido incompresible como la materia que conforma el objeto. Para el modelo MJW el parámetro que se ha utilizado es  $\alpha = 1.2$ , para el modelo de Starobinsky se ha utilizado  $\lambda = 1.56$ .

En la figura 6.1 se muestra el comportamiento del escalar de curvatura desde el centro de la estrella hasta que alcanza el valor asintótico  $R_1$ . La figura 6.2 muestra el comportamiento de la presión dentro de la estrella y de esta misma figura se puede observar cuál sería el valor del radio de dicho objeto dado por el valor de  $r$  donde se anula la presión.

Finalmente en la figura 6.3 se muestran los coeficientes métricos donde se puede observar que  $n(r)$  alcanza el horizonte cosmológico dado por  $n(r_h) = 0$ . Cabe mencionar que se ha comprobado numéricamente que el comportamiento asintótico de los potenciales métricos corresponde con la solución de de Sitter  $n(r) = m(r)^{-1} = 1 - \Lambda_{\text{eff}} r^2/3$ .

El seguimiento interno del error en el código se sigue fácilmente

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

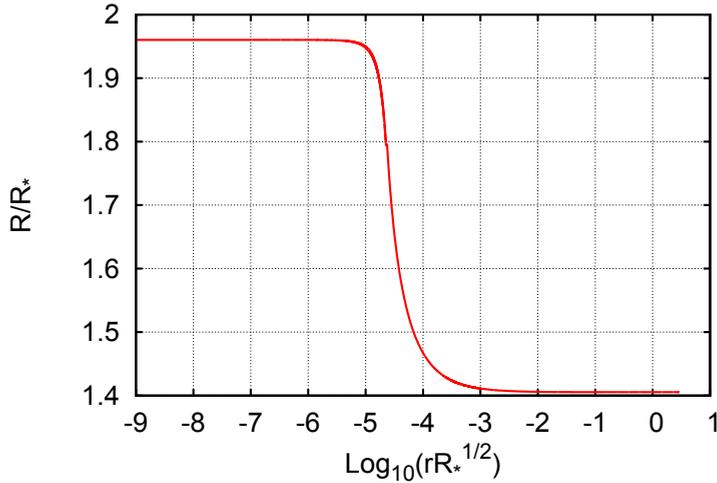


Figura 6.1: Escalar de curvatura de Ricci  $R$  para el modelo MJW con  $\alpha = 1.2$ , como función de  $r/R_*^{1/2}$ . Se puede observar que  $R$  tiende al valor asintótico cuando  $r/R_*^{1/2} \gg 1$ .

utilizando la definición del escalar de curvatura y comparando dicho valor con el que se obtiene de integrar la ecuación de la traza 6.2. Se encontró que las soluciones encontradas bajo este método coinciden con las reportadas en [44] con lo que se puede concluir que la implementación numérica es correcta pero sobre todo que el método es confiable y robusto.

Una vez que se ha comprobado que el método propuesto es robusto y que el código numérico es confiable se cuenta con los elementos necesarios para analizar el caso en donde existe la controversia, el modelo de Starobinsky. En la figura 6.4 se muestra la evolución del escalar de curvatura, partiendo del centro del objeto y alcanzando el valor asintótico esperado  $R \rightarrow R_1$ , con lo que no se encuentra ningún

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

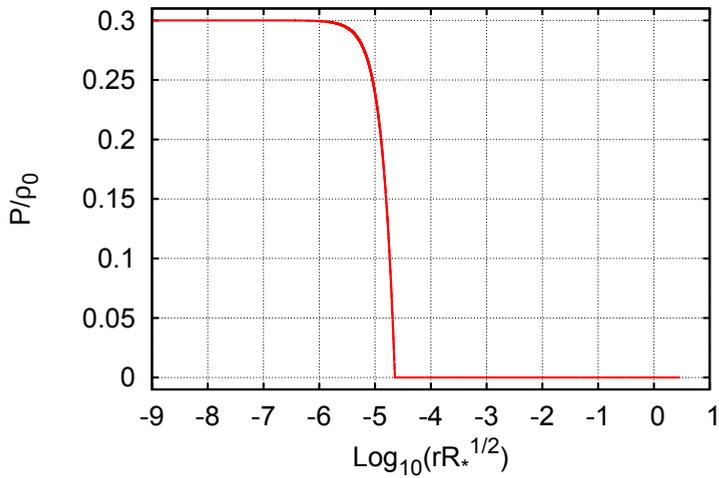


Figura 6.2: Evolución de la presión  $P/\rho_0$  en el modelo MJW con  $\alpha = 1.2$ , como función de  $r/R_*^{1/2}$ . El valor donde  $P/\rho_0 = 0$  marca la superficie de la estrella.

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

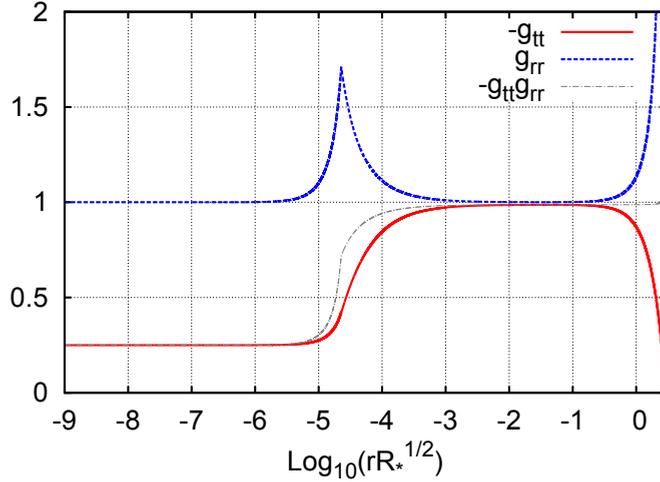


Figura 6.3: Evolución de los coeficientes métricos  $g_{tt}$ ,  $g_{rr}$  y el producto  $g_{tt}g_{rr}$  en el modelo MJW con  $\alpha = 1.2$ , como función de  $r/R_*^{1/2}$ . El comportamiento asintótico corresponde con de Sitter. El pico que se observa se debe al tipo de fluido utilizado, pues es una función escalón, al salir de la estrella  $\rho = 0$ . Al hacer un cambio en la elección del fluido este pico se suavizará, de manera análoga al comportamiento en relatividad general. Otra característica importante de hacer notar en esta figura (y en las siguientes de los coeficientes métricos) es que el comportamiento tipo de Sitter comienza muy cerca de la estrella debido al contraste de densidades.

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

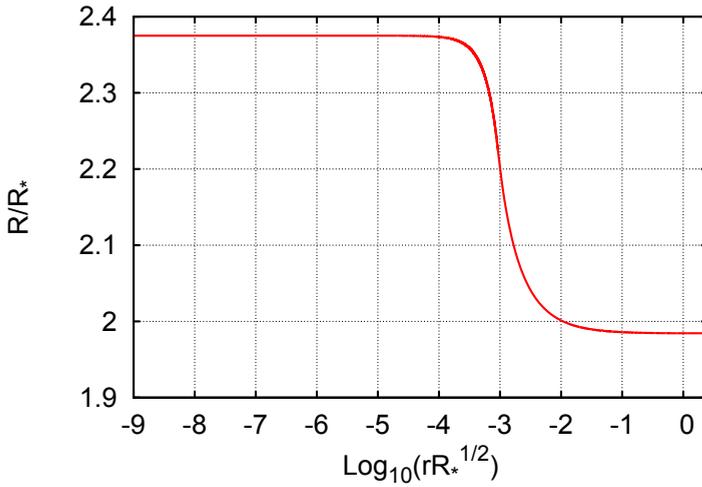


Figura 6.4: Escalar de curvatura de Ricci  $R$  para el modelo de Starobinsky con  $\lambda = 1.56$ , como función de  $r/R_*^{1/2}$ . Se puede observar que  $R$  tiende al valor asintótico cuando  $r/R_*^{1/2} \gg 1$ .

tipo de singularidad en el interior estelar del escalar de curvatura. En la figura 6.5 se muestra la presión en donde se puede apreciar claramente el punto donde la estrella termina.

En la figura 6.6 se han graficado los coeficientes métricos, que tienen el límite asintótico tipo de Sitter, es decir, su comportamiento es de la forma  $n(r) = m(r)^{-1} = 1 - \Lambda_{\text{eff}} r^2/3$ . Este comportamiento ha sido comprobado numéricamente, como en el caso anterior y se encuentra que el comportamiento es consistente con dicho límite.

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

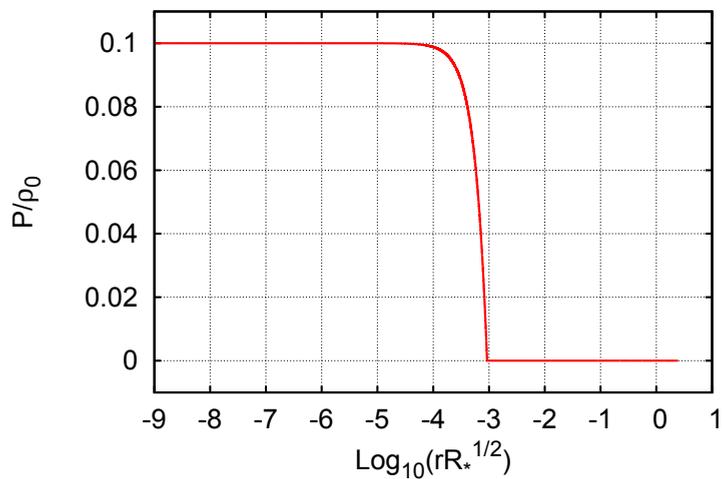


Figura 6.5: Evolución de la presión  $P/\rho_0$  en el modelo de Starobinsky con  $\lambda = 1.56$ , como función de  $r/R_*^{1/2}$ . El valor donde  $P/\rho_0 = 0$  marca la superficie de la estrella.

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

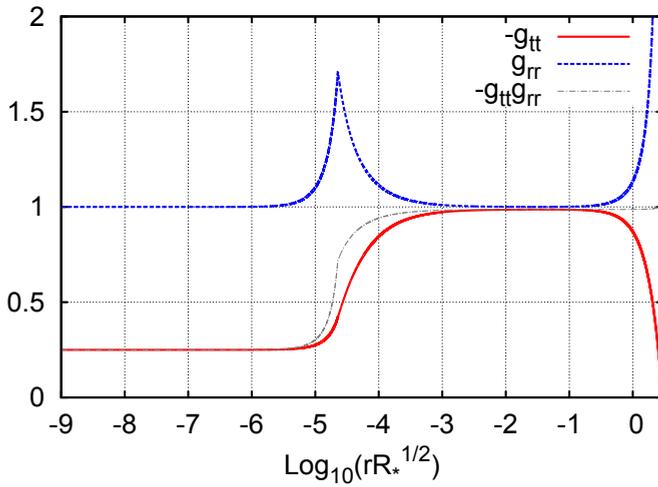


Figura 6.6: Evolución de los coeficientes métricos  $g_{tt}$ ,  $g_{rr}$  y el producto  $g_{tt}g_{rr}$  en el modelo de Starobinsky con  $\lambda = 1.56$ , como función de  $r/R_*^{1/2}$ . El comportamiento asintótico corresponde con de Sitter.

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

### 6.5.1. Soluciones asintóticamente planas para objetos compactos

En el capítulo anterior se mostró que existen soluciones asintóticamente planas que pueden, a pesar de no corresponder con un Universo tipo de Sitter, ser compatible con una expansión cósmica que se lleve a cabo de manera acelerada, incluso pueden ser consistentes con las observaciones de SNIa. En esta sección mostramos los resultados del modelo MJW con  $\alpha = 0.8$  bajo la exploración de la existencia de objetos compactos.

En la figura 6.7 se muestra el comportamiento del escalar de curvatura  $R$ . Cuando  $rR_*^{1/2}$  es grande el valor de  $R \rightarrow R_1 = 0$ , es decir, es asintóticamente plano. En la figura 6.8 se muestra la evolución de la presión en el interior estelar. El punto donde  $P = 0$  marca el borde del objeto. Finalmente, en la figura 6.9 se muestran los coeficientes métricos  $-g_{tt}$ ,  $g_{rr}$  y el producto de estos,  $-g_{tt}g_{rr}$ , el comportamiento asintótico corresponde con un comportamiento tipo Minkowsky.

Con los resultados encontrados en este capítulo podemos decir que la controversia sobre la existencia de objetos compactos en gravedad  $f(R)$  queda resuelta. Tales objetos pueden existir en estas teorías pues el comportamiento del escalar de curvatura evoluciona de manera adecuada, alcanzando el valor predicho teóricamente. La solución de objetos compactos bajo el modelo MJW con  $\alpha = 0.8$  muestra que incluso pueden ser reproducidos en un escenario donde el comportamiento es asintóticamente plano.

Al igual que en el caso cosmológico, este resultado abre la puerta para que los modelos planteados en este tipo de modificaciones se tornen hacia funciones de  $R$  cuyo potencial presente un único mínimo. Las perspectivas de trabajo a futuro, en el escenario de objetos compactos, se puede resumir en tres puntos, primero buscar soluciones

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

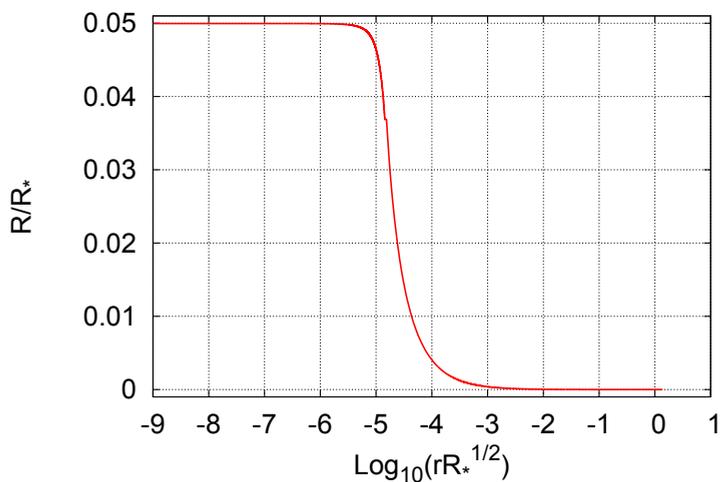


Figura 6.7: Escalar de curvatura de Ricci  $R$  para el modelo MJW con  $\alpha = 0.8$ , como función de  $r/R_*^{1/2}$ .  $R$  tiende al valor asintótico  $R_1 = 0$  cuando  $r/R_*^{1/2} \gg 1$ .

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

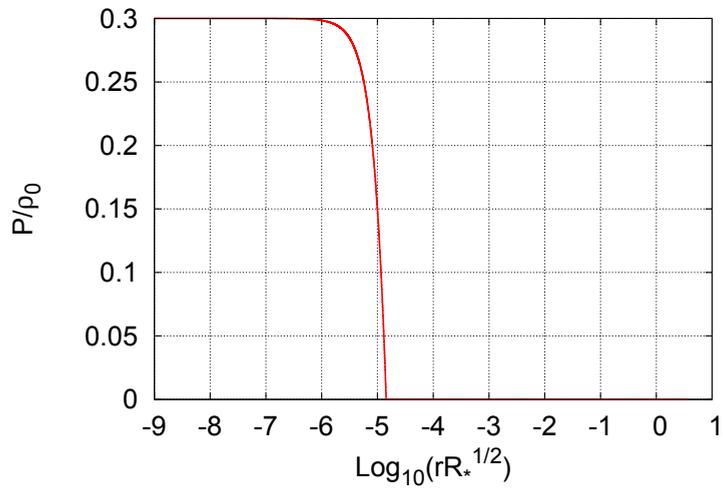


Figura 6.8: Evolución de la presión  $P/\rho_0$  en el modelo MJW con  $\alpha = 0.8$ , como función de  $r/R_*^{1/2}$ . El valor donde  $P/\rho_0 = 0$  marca la superficie de la estrella.

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

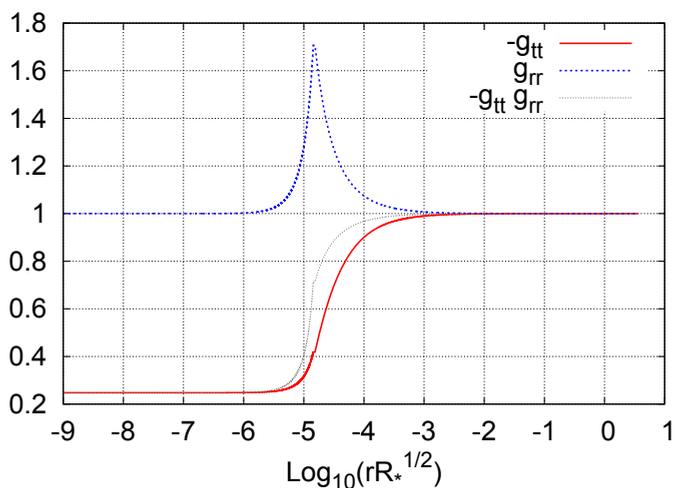


Figura 6.9: Evolución de los coeficientes métricos  $g_{tt}$ ,  $g_{rr}$  y el producto  $g_{tt}g_{rr}$  en el modelo MJW con  $\alpha = 0.8$ , como función de  $r/R_*^{1/2}$ . El comportamiento asintótico corresponde con Minkowsky.

## CAPÍTULO 6. OBJETOS COMPACTOS EN $F(R)$ BAJO EL MÉTODO DEL ESCALAR DE CURVATURA

---

con ecuaciones de estado más realistas, como polítropos. En segundo lugar resolver el problema numérico del contraste para construir estrellas compactas que puedan ser consideradas realistas. Finalmente, una vez resueltos los dos problemas anteriores queda estudiar el efecto camaleón y verificar si sucede para escenarios como el Sistema Solar.

## Capítulo 7

# Conclusiones

Las teorías de gravedad  $f(R)$  brindan una posible explicación sobre la expansión acelerada del Universo pues proveen una modificación en la relación que se guarda entre la geometría del espacio-tiempo y el contenido de materia y energía en éste. La modificación permitiría asociar una constante cosmológica efectiva directamente relacionada con el potencial efectivo definido en las ecuaciones de campo en las que, por medio de la traza (ecuación 2.10), es posible ver tal relación como se ha mostrado en la ecuación 3.3.

Muchos de los trabajos que existen hasta ahora en la literatura se hacen bajo la suposición de que el mapeo a las teorías escalares tensoriales (TET) es válido. Como se ha explicado en el capítulo 2 de esta tesis, esta suposición no es válida en general. Un modelo de gravedad  $f(R)$  que pretenda sostener tal equivalencia debe ser construido *ad hoc*. En este caso se encuentra el modelo de MJW el cual se ha utilizado a lo largo de la tesis. Cuando la equivalencia a las TET no está bien definida el potencial asociado que se genera resulta ser multivaluado, esto representa no solamente un problema

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

---

en la elección de la rama del potencial que se utilizaría para cada escenario a tratar, sino que resulta ser un problema de fondo y que podría dar resultados contradictorios, o al menos, se encontrarían constantemente en controversia.

Para evadir los problemas que representa el uso de la técnica del mapeo a las TET, en esta tesis se ha propuesto un método que demuestra ser robusto, a éste le hemos llamado ‘‘método del escalar de Ricci’’. Dicho método se encuentra basado en una idea simple, promover el escalar de Ricci  $R$  a una variable misma del sistema de ecuaciones a resolver. De esta manera, al tener una variable más, se logrará bajar el orden del sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, resultando de segundo orden, como en el caso de relatividad general estándar. Este método se puede emplear, no sólo en los sistemas astrofísicos estudiados en esta tesis sino en muchos otros casos. Al tener un sistema de ecuaciones de segundo orden se resuelven varias cosas a la vez, por un lado las ecuaciones son notablemente más sencillas, lo cual en sí ya representa una ventaja sobre otras técnicas empleadas en la literatura. Por otro lado, las condiciones iniciales que se requieren en la resolución numérica se ven simplificadas y están relacionadas, de manera que, en los casos estudiados en esta tesis, es posible encontrar soluciones numéricas fijando una única condición inicial ( $H_{ini}$  para el caso cosmológico y  $R_{ini}$  para el caso de estrellas). La técnica empleada para este fin es la de disparos (shooting), es bien conocida y de fácil implementación.

Bajo nuestro método se ha estudiado la evolución cósmica producida por distintos modelos  $f(R)$ , comenzando por los modelos que han demostrado tener mayor éxito en este campo, como los propuestos por Starobinsky, Hu-Sawicky y MJW, en donde se ha mostrado que el método puede ser explotado de tal manera que mucha información

cosmológica se puede extraer para cada modelo. En particular se ha mostrado que el modelo de Starobinsky y el de Hu-Sawicky son compatibles con las observaciones de SNIa y se ha provisto información sobre la distancia luminosa, distancia diametral angular y la ecuación de estado asociada a lo que hemos denominado “energía oscura geométrica” que se puede utilizar para comparaciones astronómicas a corrimientos al rojo más altos  $z \sim 5$ . Para el modelo de MJW se ha encontrado que, si bien provee un Universo en expansión, se debe realizar un estudio detallado para fijar los parámetros que resulten óptimos para reproducir adecuadamente las observaciones astronómicas.

Con el análisis mencionado en el párrafo anterior, se ha mostrado que el método empleado resulta una excelente herramienta. El estudio en esta tesis continúa con la exploración de soluciones que sin ser asintóticamente tipo de Sitter, pueden proveer una expansión acelerada y tener un comportamiento plano en su régimen asintótico. Este resultado llama en particular la atención pues abre la puerta a nuevos modelos de gravedad  $f(R)$  que pueden reproducir de manera exitosa las observaciones astronómicas, es decir, presentar una etapa de dominio de materia seguida de una de expansión acelerada y aún así terminar con un comportamiento asintóticamente Minkowski. En este caso se encuentra el modelo de MJW con parámetro  $\alpha = 0.8$  y el modelo exponencial. Este último resulta particularmente exitoso en la reproducción de la ecuación de estado de la energía oscura geométrica, con los datos de las SNIa y con las fracciones relativas de materia, radiación y energía oscura geométrica para la época actual.

Como hemos dicho, en la literatura se encuentran algunos resultados controversiales debido al método que siguen en su análisis algunos autores, una de estas controversias es la viabilidad cosmológica de la

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

---

familia de modificaciones tipo  $R^n$  (ver capítulo 5 sección 3). Este tipo de modelos resulta de particular importancia pues, muchas de las modificaciones que surgen al rededor de asociar gravedad modificada del tipo  $f(R)$  como candidato a reemplazar materia oscura, recurren al uso de este tipo de modelos. Variando el parámetro  $n$  o incluso el parámetro  $\lambda$  (al escribir  $f(R) = \lambda R^n$ , como se ha hecho en esta tesis) se pretende explicar, por ejemplo, las curvas de rotación en galaxias espirales. En esta tesis se ha demostrado que la familia  $R^n$  no puede ser un candidato viable pues no es capaz de producir una etapa de dominio de materia lo suficientemente larga como para formar estructura y ser seguida de una etapa acelerada que esté en concordancia con las observaciones. Al resolver directamente las ecuaciones de campo que resultan de la teoría nuestros resultados se encuentran libres de controversia.

Se han encontrado resultados fundamentales en el estudio de objetos compactos en este tipo de gravedad modificada. La existencia misma de tales objetos se encontraba en controversia en la literatura (ver antecedentes del capítulo 6). Bajo este escenario las ecuaciones diferenciales que se obtienen directamente de las ecuaciones de campo modificadas, de cuarto orden, resultan ser particularmente complicadas, por esta razón en la literatura es común encontrar que el estudio se hace bajo la técnica de las TET. Utilizando el método del escalar de curvatura se ha encontrado que la construcción de objetos compactos puede ser efectuada por el modelo de Starobinsky, incluso utilizando un fluido incompresible. En este mismo escenario se estudió el modelo de MJW (para el cual el mapeo a las TET esta bien definido) y se ha encontrado concordancia con los resultados en la literatura. Como parte del análisis seguido en esta tesis, se encontró también que pueden existir objetos compactos en modelos que resulten ser

asintóticamente planos. Con este último resultado, una vez más, se abre la puerta al estudio de este tipo de modelos  $f(R)$  como candidatos viables, tanto cosmológicamente como a escala estelar.

Algo que es importante hacer notar es que los parámetros que se utilizan en los modelos  $f(R)$  deben ser universales, es decir, al elegir un modelo, no sólo en su forma algebraica sino también en los parámetros particulares que utiliza, debe poder ser utilizado en cualquier escenario y probar su viabilidad en cada uno de estos. Si en un modelo  $f(R)$  se utilizan unos parámetros para un escenario y después es necesario cambiarlos al aplicarlo en un escenario distinto entonces este modelo puede ser descartado, pues equivaldría a proponer dos teorías distintas.

Los resultados principales de esta tesis se pueden resumir en los siguientes puntos:

- 1 Propuesta y desarrollo del Método del escalar de Ricci.
- 2 Estudio de los modelos cosmológicos más exitosos bajo el método del escalar de Ricci.
- 3 Estudio del escenario cosmológico asintóticamente plano para diferentes modelos  $f(R)$ .
- 4 Demostración de la no viabilidad cosmológica del modelo  $R^n$ .
- 5 Estudio de la existencia de objetos compactos en  $f(R)$ .

La propuesta del método del escalar de Ricci y su aplicación para el caso de un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico se encuentra publicado en [36]. El mismo método aplicado en cosmología, para un Universo tipo FRW, empleando los modelos de Starobinsky, Hu-Sawicky y MJW se puede consultar en [38]. El análisis para el

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

---

modelo exponencial forma parte de las memorias del congreso ‘‘Relativity and Gravitation: 100 years after Einstein in Prague’’ [39]. El estudio cosmológico hecho para gravedad  $R^n$  se encuentra publicado en [40]. Finalmente las soluciones asintóticamente planas encontradas para el modelo MJW así como la discusión planteada sobre la ecuación de estado para la energía oscura geométrica se han enviado a una revista para su publicación y el artículo se encuentra en el proceso de arbitraje.

Hasta ahora los modelos de gravedad  $f(R)$ , si bien han mostrado tener éxito reproduciendo algunas observaciones cosmológicas y en el Sistema Solar, es necesaria una exploración en muchos otros escenarios para considerarlos como alternativas serias a una nueva teoría de la gravitación que, bajo tal paradigma, daría explicación a toda la dinámica observada en el Universo. En este sentido algunos de los aspectos que tenemos como perspectivas de investigación, con base en la herramienta generada durante el desarrollo de esta tesis son:

- Análisis de agujeros negros en gravedad  $f(R)$
- Implementación de ecuaciones de estado realistas en objetos compactos
- Resolución numérica del problema de contraste para estrellas realistas
- Análisis de lente gravitacional bajo gravedad  $f(R)$  comparado con  $\Lambda$ CDM
- Análisis de la universalidad de los parámetros en los modelos  $f(R)$

# Bibliografía

- [1] Einstein, A.; Grossmann, M. Zeitschrift für Mathematik und Physik **62**, 225 (1913)
- [2] Wald, Robert M. General Relativity **The University of Chicago Press**, (1984)
- [3] Janssen M. y Renn J. How Einstein Found His Way Back to Field Equations Discarded in the Zurich Notebook **Max Planck Institute for the History of Science**, (2004)
- [4] Corry, L., Renn, J. y Stachel, J. Science **278**, 1270 (1997)
- [5] Shapley, H. y Curtis H. D. Bulletin of the National Research Council **2**, P.3 (1920)
- [6] de Sitter, W. MNRAS **78**, 3 (1917)
- [7] Slipher, V. M. Publications of the American Astronomical Society **4**, 284 (1922)
- [8] Hubble, E. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **15-3**, 168 (1929)
- [9] Rubin, V. Astrophysical Journal **159**, 379 (1970)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [10] Rubin, V. *Astrophysical Journal* **238**, 471 (1980)
- [11] Freese, K., Fields, B y Graff, D. *Nuclear Physics B Proceedings Supplements* **80**, 14 (1998)
- [12] Klypin, Anatoly A.; Kravtsov, Andrey V.; Valenzuela, Octavio; Prada, Francisco *Astrophys.J.* **522**, 82 (1999)
- [13] Dodelson S., Melchiorri, A. y Anze, S. *PRL* **97**, 041301 (2006)
- [14] S. Perlmutter, et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999)
- [15] A. G. Riess, et al., *Astron. J.* **116**, 1038 (1998)
- [16] R. Amanullah, et al. (Supernova Cosmology Project), *Astrophys. J.* **716**, 712 (2010)
- [17] E. Bianchi, and C. Rovelli, arXiv: 1002.3966; *idem*, *Nature* **466**, 321 (2010)
- [18] Penzias, A. A.; Wilson R.W *Astrophysical Journal* **142**, 419 (1965)
- [19] Dicke R. H.; Peebles, P. J. E.; Roll, P. G.; Wilkinson D. T. *Astrophysical Journal* **142**, 414 (1965)
- [20] Weyl, H. *Ann. Phys* **59**, 101 (1919)
- [21] Eddington, A. S. *The mathematical theorie of Relativity Cambridge Univ. Press.*, (1923)
- [22] Utiyama, R; DeWitt, B.S. *J. Math. Phys.* **3**, 608 (1962)
- [23] Starobinsky, A. *Phys. Lett.* **B91**, 99 (1980)
- [24] Lovelock, D. J. *Math. Phys.* **13**, 6 (1972)

- [25] Brans, D.; Dicke, R. H. Phys. Rev. **124**, 925 (1961)
- [26] Magnano, Guido and Sokolowski, Leszek M. Arxiv **gr-qc**, 9312008 (1993)
- [27] CASSINI 2003 Arxiv **gr-qc**, 9312008 (1993)
- [28] A. De Felice, and S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010)
- [29] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010)
- [30] Hu, Wayne and Sawicki, Ignacy ArXiv **astro-ph**, 0705.1158 (2007)
- [31] J. Khoury, and A. Weltman, Phys. Rev. Lett. **93**, 171104 (2004); *ibid*, Phys. Rev. D **69**, 044026 (2004)
- [32] S. Capozziello, and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **77**, 107501 (2008); P. Brax. C. van de Bruck, A. C. Davis, and D. J. Shaw, Phys. Rev. D **78**, 104021 (2008); T. Tamaki, and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **78**, 084020 (2008); T. Faulkner, M. Tegmark, E. F. Bunn, and Y. Mao, Phys. Rev. D **76**, 063505 (2007); V. Faraoni, Phys. Rev. D **83**, 124044 (2011); Y. Li, and W. Hu, Phys. Rev. D **84**, 084033 (2011); J. A. Gu, and W. T. Lin, arXiv: 1108.1782
- [33] T. Chiba, Phys. Lett. B **575**, 1 (2003); A. Rajaraman, astro-ph/0311160; V. Faraoni Phys. Rev. D **74**, 023529 (2006); A. L. Erickcek, T. Smith, and M. Kamionkowski Phys. Rev. D **74**, 121501(R) (2006)
- [34] G. J. Olmo, Phys. Rev. D **75**, 023511 (2007); T. Chiba, T. L. Smith, and A. L. Erickcek, Phys. Rev. D **75**, 124014 (2007); V. Faraoni and N. Lanahan-Tremblay, Phys. Rev. D **77**, 108501 (2008);

- T. Chiba, T. L. Smith, and A. L. Erickcek, Phys. Rev. D **77**, 108502 (2008)
- [35] M. D. Seifert, Phys. Rev. D **76**, 064002 (2007)
- [36] L. G. Jaime, L. Patiño, and M. Salgado, Phys. Rev. D **83**, 024039 (2011)
- [37] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4**, 115 (2007); *idem*, Phys. Rep. **505**, 59 (2011); N. Straumann, arXiv:0809.5148; W. Hu, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl. **194**, 230 (2009); S. Capozziello, M. De Laurentis, and V. Faraoni, arXiv:0909.4672; A. De Felice, and S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010); T. P. Sotiriou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010); S. Capozziello, and M. De Laurentis, arXiv:1108.6266; T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, Phys. Rep. **513**, 1 (2011)
- [38] Jaime, L.G.; Salgado, M; Patiño, L. arXiv: 1206.1642
- [39] Jaime, L.G.; Salgado, M; Patiño, L. arXiv: 1211.0015
- [40] Jaime, L.G.; Salgado, M; Patiño, L. PRD **87**, 024029 (2013)
- [41] Jaime, L.G.; Salgado, M; Patiño, L. Enviado —, — (2013)
- [42] Starobinsky, Alexei A. ArXiv **astro-ph**, 0706.2041 (2007)
- [43] V. Acquaviva, A. Hajian, D. N. Spergel, and S. Das, Phys. Rev. D **78**, 043514 (2008); A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado, and A. L. Maroto, Phys. Rev. D **77**, 123515 (2008); L. Pogosian, and A. Silvestri, Phys. Rev. D **77**, 023503 (2008); *idem*, Phys. Rev. D **81**, 049901(E) (2010); H. Oyaizu, Phys. Rev. D **78**, 123523 (2008); H. Oyaizu, M. Lima, and W. Hu, Phys. Rev. D **78**, 123524 (2008);

---

F. Schmidt, M. Lima, H. Oyaizu, and W. Hu, Phys. Rev. D **79**, 083518 (2009); G. B. Zhao, B. Li, and K. Koyama, Phys. Rev. D **83**, 044007 (2011); K. Koyama, A. Taruya, and T. Hiramatsu, Phys. Rev. D **79**, 123512 (2009); A. Taruya, T. Nishimichi, S. Saito, and T. Hiramatsu, Phys. Rev. D **80**, 123503 (2009); S. Tsujikawa, and T. Tatekawa, Phys. Lett. B **665**, 325 (2008); F. Schmidt, Phys. Rev. D **78**, 043002 (2008); R. Gannouji, B. Moraes, and D. Polarski, JCAP **02**, 034 (2009); S. Tsujikawa, R. Gannouji, B. Moraes, and D. Polarski, Phys. Rev. D **80**, 084044 (2009); G. B. Zhao, L. Pogosian, A. Silvestri, and J. Zylberberg, Phys. Rev. D **79**, 083513 (2009); E. Calabrese, A. Cooray, M. Martinelli, A. Melchiorri, and G. F. Smoot, Phys. Rev. D **80**, 103516 (2009); F. Schmidt, A. Vikhlinin, and W. Hu, Phys. Rev. D **80**, 083505 (2009); A. Borisov, and B. Jain, Phys. Rev. D **79**, 103506 (2009); S. Ferraro, F. Schmidt, W. Hu, Phys. Rev. D **83**, 063503 (2011); K. W. Masui, F. Schmidt, U. L. Pen, and P. McDonald, Phys. Rev. D **81**, 062001 (2011); H. Gil-Marín, F. Schmidt, W. Hu, R. Jiménez, and L. Verde, JCAP **11**, 019 (2011); T. Giannantonio, M. Martinelli, A. Silvestri, and A. Melchiorri, JCAP **04**, 030 (2010); K. Yamamoto, G. Nakamura, G. Hütsi, T. Narikawa, and T. Sato, Phys. Rev. D **81**, 103517 (2010); Z. Gironés, A. Marchetti, O. Mena, C. Peña-Garay, and N. Rius, JCAP **11**, 004 (2010); E. Beynon, D. J. Bacon, and K. Koyama, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **403**, 353 (2010); M. Martinelli, E. Calabrese, F. De Bernardis, and A. Melchiorri, Phys. Rev. D **83**, 023012 (2011); A. M. Nzioki, P. K. S. Dunsby, R. Goswami, and S. Carloni, Phys. Rev. D **83**, 024030 (2011); X. Fu, P. Wu, and H. Yu, Eur. Phys. J. C **68**, 271 (2010); T. Narikawa, and K. Yamamoto, Phys. Rev. D **81**, 043528 (2010); idem, Phys. Rev. D **81**, 129903(E) (2010); S. A. Thomas, S. A. Appleby, and J. We-

## BIBLIOGRAFÍA

---

- ller, JCAP **03**, 036 (2011); L. Lombriser, F. Schmidt, T. Baldauf, R. Mandelbaum, U. Seljak, and R. E. Smith, arXiv:1111.2020; S. Camera, A. Diaferio, and V. F. Cardone, JCAP **07**, 016 (2011)
- [44] Miranda, Vinicius., Jorás, Sergio E. and Waga Ioav. Phys. Rev. Lett. **102**, 221101 (2009)
- [45] E. V. Linder, PRD **80**, 123528 (2009)
- [46] L. Amendola, D. Polarski, and S. Tsujikawa, Phys. Rev. Lett. **98**, 131302 (2007).
- [47] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **75**, 083504 (2007).
- [48] L. Amendola, D. Polarski, and S. Tsujikawa, IJMPD **10**, 1555 (2007).
- [49] S. Capozziello, S. Noriji, S. D. Odintsov, and A. Troisi, Phys. Lett. B **639**, 135 (2006)
- [50] S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and A. Troisi, Phys. Lett. B **639**, 135 (2006); S. Capozziello, P. Martin–Moruno, and C. Rubano, Phys. Lett. B **664**, 12 (2008)
- [51] S. Capozziello, and M. Francaviglia, Gen. Relativ. Gravit. **40**, 357 (2008)
- [52] S. Carloni, P. K. S. Dunsby, S. Capozziello, and A. Troisi, Class. Quant. Grav. **22**, 4839 (2005)
- [53] S. Carloni, A. Troisi, P. K. S. Dunsby, Gen. Relativ. Gravit. **41**, 1757 (2009)

- [54] Capozziello, S.; Cardone, V.F.; Carloni, S.; Troisi, A. Phys.Lett. **A326**, 292 (2004)
- [55] Capozziello, Salvatore; Cardone, V.F.; Carloni, S.; Troisi, A. AIP Conf.Proc. **751**, 54 (2005)
- [56] Capozziello, Salvatore; Cardone, V.F.; Troisi, A. JCAP **608**, 001 (2006)
- [57] Nojiri, S.; Odintsov, S. D. lectures given at JGRG17 (Nagoya, Japan) and at VI Winter School on Theor.Phys. (Dubna, Russia) **arXiv**, 0801.4843 (2008)
- [58] Saffari, R.; Sobouti, Y. Astron. Astrophys. **472**, 833 (2007)
- [59] Mendoza, S.; Bernal, T.; Hidalgo, J.C.; Capozziello, S. PROCEEDING OF THE SPANISH RELATIVITY MEETING 2011 **arXiv**, 1202.3629 (2011)
- [60] Mendoza, S.; Bernal, T.; Hernández, X.; Hidalgo, J.C.; Torres, L.A. **arXiv** **1208.6241**, (2012)
- [61] de la Cruz-Dombriz, A.; Dobado, A. and Maroto, A.L.
- [62] V. Miranda, S. Jorás, and I. Waga Phys. Rev. Lett. **103**, 179002 (2009)
- [63] I. Thongkool, M. Sami, R. Gannouji, and S. Jhingan, Phys. Rev. D **80**, 043523 (2009) Phys. Rev. Lett. **103**, 179001 (2009)
- [64] S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **77**, 023507 (2008)
- [65] A. V. Frolov, Phys. Rev. Lett. **101**, 061103 (2008)
- [66] A. Dev, E. Jain, S. Jhingan, S. Nojiri, M. Sami, and I. Thongkool, Phys. Rev. D **78**, 083515 (2008)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [67] S. Capozziello, M. De Laurentis, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **79**, 124007 (2009)
- [68] Kobayashi, Tsutomu and Maeda, Kei-ichi Phys. Rev. D **79**, 024009 (2009)
- [69] Kobayashi, Tsutomu and Maeda, Kei-ichi Phys. Rev. D **78**, 064019 (2008)
- [70] E. Babichev, and D. Langlois, Phys. Rev. D **80**, 121501(R) (2009); *idem*, arXiv: gr-qc/0911.1297
- [71] A. Upadhye, and W. Hu, Phys. Rev. D **80**, 064002 (2009)
- [72] H. Motohashi, A. A. Starobinsky, and J. Yokoyama, Int. Jour. Mod. Phys. D **20**, 1347 (2011)
- [73] S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **76**, 023514 (2007)
- [74] L. Amendola, and S. Tsujikawa, Phys. Lett. B **660**, 125 (2008)
- [75] E. Elizalde et. al. PRD **77**, 04600 (2008)
- [76] L. Yang et. al., PRD **82**, 103515 (2010)
- [77] K. Bamba et. al. JCAP **08**, 021 (2010)
- [78] K. Bamba, C. Q. Geng, and C. C. Lee, JCAP **11**, 001 (2010); *idem*, Int. Jour. Mod. Phys. D **8**, 1339 (2011)
- [79] E. Elizalde et. al., PRD **83**, 086006 (2011)
- [80] E. Elizalde et.al., ArXiv **1108.6184**, (2011)
- [81] P. Zhang, PRD **73**, 123504 (2006)
- [82] A. De Felice, and S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010)

- [83] S. A. Appleby, and R. A. Battye, JCAP **05**, 19 (2008)
- [84] D. Schlegel, et al., arXiv: 1106.1706, 0904.0468
- [85] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010)
- [86] S. Capozziello, and M. Francaviglia, Gen. Relativ. Gravit. **40**, 357 (2008)
- [87] Clifton, T.; Ferreira, P.G.; Padilla, A.; Skordis, C. Phys.Rept. **513**, 01 (2012)
- [88] R. Jimenez, L. Verde, T. Treu, and D. Stern, Astrophys. J. **593**, 622 (2003); A. Melchiorri, L. Mersini, C. J. Ödman, and M. Trodden, Phys. Rev. D **68**, 043509 (2003); H. K. Jassal, J. S. Bagla, and T. Padmanabhan, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **405**, 2639 (2010); A. Carnero, E. Sánchez, M. Crocce, A. Cabré, and E. Gaztañaga, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **419**, 1689 (2012); T. E. Collet, M. W. Auger, V. Belokurov, P. J. Marshall, and A. C. Hall, arXiv: 1203.2758
- [89] H. Motohashi, A. A. Starobinsky, and J. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **123**, 887 (2010)
- [90] H. Motohashi, A. A. Starobinsky, and J. Yokoyama JCAP **06**, 006 (2011)
- [91] R. Gannouji, B. Moraes, and D. Polarski, JCAP **02**, 034 (2009)
- [92] T. Clifton, and J. D. Barrow, Phys. Rev. D **72**, 103005 (2005)
- [93] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, arXiv: 1205.3421

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [94] J. D. Evans, L. M. H. Hall, and P. Caillol, Phys. Rev. D **77**, 083514 (2008)
- [95] N. J. Poplawski, Phys. Lett. B **640**, 135 (2006)
- [96] S. Capozziello, V. F. Cardone, and V. Salzano, Phys. Rev. D **78**, 063504 (2008)
- [97] V. F. Cardone, S. Camera, and A. Diaferio, astro-ph/1201.3272
- [98] L. M. Krauss, and B. Chaboyer, Science **299**, 65 (2003)
- [99] Motohashi, Hayato; Starobinsky, Alexei A. and Yokoyama, Juníchi. ArXiv **astro-ph**, 1101.0716 (2011)
- [100] M. Martinelli, A. Melchiorri, and L. Amendola, Phys. Rev. D **79**, 123516 (2009)
- [101] V. Faraoni, Phys. Rev. D **83**, 124044 (2011)
- [102] Kobayashi, T. and Maeda, K. PRD **78**, 064019 (2008)
- [103] Kobayashi, T. and Maeda, K. PRD **79**, 024009 (2009)